PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

CÉSAR AUGUSTO TEIXEIRA LEITE

CONCEITO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS:

Elaboração e análise de um teste-piloto para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental

São Paulo
2010

CÉSAR AUGUSTO TEIXEIRA LEITE

CONCEITO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS:
Elaboração e análise de um teste-piloto para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Especialista em Educação Matemática****, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Maria José Ferreira da Silva.*

PUC – SP
2010

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

A Prof.ª Dr.ª Maria José Ferreira da Silva por sua valiosa orientação, incentivo e auxílio, sem os quais não seria possível completar esse projeto. Agradeço, em especial, por não me deixar desistir do curso e, com seu apoio, consegui concluir uma grande etapa pessoal e profissional. Minha eterna admiração e gratidão.

A todos os professores e colegas do curso de Pós Graduação em Educação Matemática, pela oportunidade de adquirir novos conhecimentos e amizades.

A minha família por sempre me incentivar a estudar e pela dedicação com que cuidaram de mim.

A minha noiva pelo companheirismo, apoio e compreensão nesses momentos que estive ausente para me dedicar aos estudos.

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa é levantar e analisar os principais fenômenos que interferem na construção dos conceitos relacionados à área de figuras planas no Ensino Fundamental. Para tal, foi elaborado um teste-piloto, de uma seqüência didática, que considerasse as principais variáveis relacionadas ao tema. As atividades foram concebidas para promover a articulação e dissociação dos quadros das grandezas, geométrico e numérico, buscando métodos e estratégias que possam minimizar as principais fontes de dificuldades dos alunos. O trabalho, ainda, propõe uma reflexão sobre as inúmeras especificidades para a construção significativa dos objetos matemáticos, visto que, os profissionais que não os consideram não permitem aos aprendizes desenvolver as habilidades necessárias para mobilizar seus conhecimentos em novas situações. Pode-se observar que quando as atividades promovem as devidas relações entre os quadros envolvidos, pode permitir aos alunos compreender e diferenciar superfície, área, medida de área, contorno, comprimento e perímetro. A pesquisa foi realizada considerando os princípios da engenharia didática, proposta por Artigue (1988). Na experimentação, participaram 33 alunos do 6º ano, de uma escola na periferia de São Paulo, porém, para efeito das análises, foram considerados apenas dois grupos de três indivíduos cada um. Para fundamentar o trabalho foram utilizados os quadros teóricos da "Dialética Ferramenta-Objeto", "Quadros e Jogos de Quadros", ambas de Douady, além dos "Registros de Representação Semióticos" e "As Apreensões Figurais", de Duval.

Palavras-chave: Conceito de área. Geometria. Ensino/aprendizagem. Decomposição. Composição.

ABSTRACT

The goal of this research is to survey and analyze the main phenomena that affect the construction of concepts related to the area of plane figures in elementary school. To this end, a pilot test of a didactic sequence was designed which considered the main variables related to the topic. The activities were designed to promote the coordination and dissociation of the geometric and numerical magnitude by searching for methods and strategies that can minimize the major sources of students' difficulties. The work also proposes a reflection on significant issues involving the construction of meaningful mathematical objects, since professionals who do not consider them do not allow learners to develop the skills needed to apply their knowledge in new situations. It can be observed that when appropriate activities facilitate relations between the tables involved, it can enable students to understand and differentiate the surface area, area measurement, contour, length and girth. The survey was conducted according to the principles of didactic engineering proposed by Artigue (1988). In the trial, 33 students of grade 7 from a school on the outskirts of Sao Paulo participated, however, for the purposes of gathering data, only two groups of three individuals each were considered. To offer reasonable grounds for this research, the use of Douady’s theoretical frameworks such as "Tool-Object Dialectic," and "Tables and Game Tables" were applied in addition to the "Records of Semiotic Representation" and "The Figural Seizures" by Duval.

Keywords: Concept of area. Geometry. Teaching/ learning. Decomposition. Composition.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho busca estudar e analisar os fenômenos que interferem na construção do conceito de área de figuras planas para alunos do Ensino Fundamental.

Para tal, recorremos a outras pesquisas realizadas sobre o tema, Facco (2003), Chiummo (1998), Bellemain e Lima (2000), entre outros, que destacam algumas das principais fontes de dificuldades para compreensão do conceito investigado.

Essas pesquisas nos trazem os estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), que consideram o ensino de área como uma grandeza autônoma e, além disso, defendem uma abordagem que promova a dissociação e articulação dos quadros das grandezas, geométrico e numérico, possibilitando a verificação das diferenças entre os objetos matemáticos envolvidos.

Destacamos ainda as contribuições de Baltar (1996) que apresenta as principais variáveis sobre o assunto, em especial quanto às diferenciações de área e perímetro, bem como as inúmeras concepções de alunos sobre o assunto.

Para analisar as especificidades sobre o assunto, elaboramos um teste-piloto, de uma sequência didática, que considerasse as principais variáveis investigadas, a fim de promover a dissociação e articulação entre os quadros envolvidos, trabalhando primeiramente a área como uma grandeza autônoma. Em outras palavras, pretendemos criar mecanismos para que os alunos diferenciem: superfície, área, medida de área, contorno, comprimento do contorno e perímetro de figuras planas.

Sabemos que no ensino brasileiro, a matemática vem sendo constantemente apontada como uma das maiores fontes de dificuldades por nossos alunos. As avaliações institucionais nos mostram que os aprendizes não estão construindo os conhecimentos básicos necessários.

Esse fato faz com que os educadores tenham que, cada vez mais, procurar novas técnicas e estratégias para conseguir que seus alunos atinjam os objetivos pretendidos.

Outra questão são os professores que se baseiam exclusivamente em livros didáticos ou ensinam o conceito de área apenas utilizando fórmulas. Ao desconhecer, ou não abordar, as especificidades em relação aos objetos matemáticos envolvidos os profissionais não permitem que os alunos construam as devidas relações dos elementos estudados, conseqüentemente eles terão imensas dificuldades em mobilizá-los em novas situações-problema.

Por isso, pretendemos ainda, propor uma reflexão referente à complexidade do tema, bem como produzir um material que possa subsidiar o professor em sala de aula, pois sabemos que uma das causas que podem interferir na construção do conceito pelos alunos são as escolhas didáticas dos profissionais.

Para experimentação, participaram 33 (trinta e três) alunos de uma sala do 6º ano, de uma escola estadual da periferia de São Paulo. Entretanto, para efeito da análise, foram considerados apenas dois desses grupos, de três alunos cada um, G1 e G2.

A metodologia utilizada seguiu os princípios da engenharia didática, apresentada por Artigue (1988), seguindo as fases: análises prévias; construção da seqüência e análise a priori de cada atividade; experimentação, análise a posteriori e validação.

Para uma análise dos resultados pretendidos e alcançados nos apoiamos nos quadros teóricos da “Dialética Ferramenta-Objeto” e “Quadros e Jogos de Quadros”, ambos de Douady (1986, 1987), além do “Registro de Representação Semiótico” e nos modos de “Apreensão Figural”, de Duval (1988, 1993, 1994 e 1995).

No primeiro capítulo apresentamos um breve relato histórico, o saber matemático e algumas pesquisas realizadas sobre o conceito de área que a tratam como grandeza autônoma.

No segundo capítulo delimitamos nosso assunto de pesquisa, explicitando a problemática, os procedimentos metodológicos e a fundamentação teórica.

Quanto ao terceiro capítulo, descrevemos os sujeitos de pesquisa, a descrição e objetivos da seqüência, a experimentação, propriamente dita, e as análises a priori e a posteriori.

E, ao final, abordamos os resultados alcançados e as considerações finais sobre a pesquisa.

CAPÍTULO 1 ESTUDOS INICIAIS

Neste capítulo, apresentaremos um breve histórico sobre o conceito de área, o saber matemático e revisão bibliográfica sobre o tema, destacando as principais variáveis envolvidas em sua construção e compreensão.

1.1 Desenvolvimento Histórico do Saber Matemático

Neste tópico procuramos fazer um breve histórico do desenvolvimento dos conceitos relacionados à área de figuras planas realizados pelas diversas sociedades, que há milênios já possuíam conhecimentos e técnicas de como proceder para calculá-las.

Em nossos estudos percebemos que é difícil relatar com precisão sobre qual sociedade antiga desenvolveu primeiro as técnicas para cálculo de área, pois dispomos apenas poucos registros que resistiram ao desgaste de milênios de anos para tentar identificar sua evolução.

Chiummo (1998) relata que o historiador grego Heródoto (séc. V a.C.) atribuiu aos egípcios à origem da geometria, a qual surgiu da necessidade de medir terras ao longo do Egito. Ainda, segundo Chiummo (1998), citando Heródoto, comenta que o rei dividiu as terras do Egito entre os egípcios e impôs o pagamento de tributos anuais por esses lotes.

Porém de tempos em tempos as terras as margens do rio Nilo sofriam com inundações e havia necessidade de medi-las novamente com o intuito de saber a “porção” de terra que havia sido perdida, a fim de recalcular o valor dos tributos anuais.

Essas medições eram feitas pelos estiradores de corda, que eram incumbidos de, utilizando cordas, medir tudo o que era necessário – de bases de templos a demarcações de terras.

Outra linha referente à origem da geometria é, segundo Chiummo (1998), de Aristóteles (384-322 a.C) que atribui tal surgimento à classe sacerdotal. Nesse contexto, a geometria possuía um caráter intelectual (puro prazer), e não de natureza prática como defendia Heródoto.

Sem entrar no mérito dessa discussão, o que nos chama atenção são algumas informações documentais que resistiram de alguma maneira ao tempo, como os Papiros Egípcios.

Um desses documentos é o Papiro de Rhind, que recebeu esse nome em homenagem a Henry Rhind, antiquário escocês que o comprou em 1858 a beira do rio Nilo. É conhecido também como Papiro de Ahmes, nome do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C.

Outro documento deixado por essas civilizações é o Papiro de Golenishev, também conhecido como Papiro de Moscovo, produzido, aproximadamente, na mesma época do Papiro de Rhind.

Observando especificamente o nosso conteúdo de pesquisa podemos verificar que, segundo Chiummo (1998), dos 87 (oitenta e sete) problemas constantes no Papiro de Rhind, 20 (vinte) deles são referentes à área dos campos e volume dos celeiros. Contudo as respectivas soluções são de origem pontual – servem apenas para aquela determinada situação.

Boyer (1974, p.13 apud FACCO, 2003, p.19) confirma a existência desses problemas no Papiro de Ahmes, como o problema 51 que mostra a medida da área de um triângulo isósceles.

Facco (2003) descreve que o problema foi resolvido multiplicando a metade, do que chamaríamos de base, pela altura e foi justificado pela decomposição do triângulo isósceles em dois triângulos retângulos e, em seguida, reconfigurado em um retângulo.

No problema 52, o trapézio isósceles também foi transformado em um retângulo pelo processo de reconfiguração.

Além desses, são destacados os problemas 48, 49, 50 e 53 que tratam de cálculos de superfícies, como retângulos, triângulos e trapézios. Esses são apenas alguns indícios, dentre outros, que evidenciam os procedimentos utilizados pelos egípcios para calcular áreas de algumas figuras.

Chiummo (1998) evidencia outra civilização, a Babilônica, destacando que esta era mais avançada que os egípcios. Mesmo aquela não tendo apresentado indícios de demonstração matemática.

A autora ainda ressalta o conhecimento matemático dos babilônicos, mencionado uma de suas tábuas que constam de problemas e suas soluções. Um desses problemas se refere a divisão de um trapézio de base **a** e **b** dividido por um segmento **m** paralelo as bases, em dois trapézios de áreas iguais.

Sobre essa civilização, Facco descreve:

> Numerosos exemplos concretos que os Babilônios do período 2000 – 1600 a.C. conheciam as regras gerais para o cálculo de área de retângulos, de triângulos retângulos e isósceles (e talvez de um triângulo qualquer), de trapézio retângulo e do volume do paralelepípedo retângulo. (FACCO, 2003, p.18)

Buscando outras fontes, podemos observar relatos do trabalho de Euclides de Alexandria (330 – 275 a.C), autor de “Os Elementos”. Essa obra é constituída de 13 livros que expõe de maneira sistematizada e com estrutura axiomática todo o conhecimento matemático desde a época de Tales (600 a.C) até sua época.

Secco (2007) revela que na obra “Os Elementos” encontramos vários resultados relativos à área de figuras planas. O pesquisador ainda comenta que Euclides não define área, em seu livro “[...] duas figuras são chamadas “iguais” quando têm a mesma “magnitude”, isto é, o mesmo comprimento, se forem segmentos, a mesma área se forem figuras planas, o mesmo volume se forem sólidos ou a mesma abertura se forem ângulos”. (SECCO, 2007, p.36)

Ainda segundo Secco (2007), a noção de área, no livro, era muito mais qualitativa do que quantitativa, no sentido que se referia à região delimitada por uma figura mais do que propriamente um valor numérico atribuído a região.

Esse fato pode ser percebido quando Euclides discute que a coincidência de duas figuras planas por sobreposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas.

Além disso, observamos que para Euclides a simples sobreposição da superfície de duas figuras era suficiente para compará-las, relacionado com nosso trabalho, a área podia ser vista como uma grandeza autônoma, comparando superfícies dizendo apenas se pertence à mesma classe de equivalência.

Atentamos também para a técnica de decomposição e composição de figuras planas, a fim de reconfigurar uma figura de partida em um retângulo como estratégia de cálculo de área.

Essas noções são importantíssimas em nossos estudos, pois nos apontam as estratégias que foram utilizadas para construção dos objetos em jogo e as prováveis indicações do surgimento das fórmulas. Nesse ponto podemos considerar as reconfigurações com um caminho para generalizar métodos de se obter os cálculos das medidas de áreas, elaborando atividades que sigam esse enfoque, afim de atribuir significado as fórmulas.

Discorrido apenas brevemente sobre algumas das muitas contribuições deixadas pelos povos da antiguidade ao estudo das origens dos conhecimentos construídos e sistematizados pelo homem ao longo da história a respeito do nosso tema, conceito de área.

1.2 Saber Matemático

Nesse tópico apresentaremos o saber matemático considerando, primeiramente, a área como uma grandeza, em outras palavras, iremos nos valer de propriedades que as caracterizam sem expressá-las numericamente, estabelecendo apenas se pertencem a uma mesma classe de equivalência.

A opção em definir a área como uma grandeza é dissociar o objeto em questão de um valor numérico, pois sabemos que, dependendo da unidade escolhida, esse valor irá mudar mesmo a área permanecendo a mesma.

Antes de definir o saber matemático (área), vamos considerar, de acordo com Bellemain e Lima (2000), “o termo superfície significa um subconjunto limitado do plano”.

Para caracterizar a grandeza área, os autores definem como essenciais as seguintes propriedades.

> - Positividade – uma figura que possua interior não vazio tem área positiva;
> - Aditividade: se duas figuras A e B têm em comum no máximo pontos de suas fronteiras, então a área da figura $A \cup B$ (união de A e B) é a soma da área de A com a área de B.
> - Invariância por isometria: se uma figura plana A é transformada em outra, B, de modo que a distância entre dois pontos quaisquer de A fica inalterada em B, então, A e B têm a mesma área. (BELLEMAIN; LIMA, 2000, p. 04 – 05)

Duarte (2004) completa que, definida a função área acima, pode-se construir, no conjunto das figuras geométricas, as classes de equivalência das figuras que possuem a mesma área.

Facco (2003) descreve outras propriedades de equivalência de polígonos, considerando P o conjunto de todos os polígonos de um plano. Segundo a autora, para todo polígono convexo A, entre outras propriedades, podemos estabelecer:

> Seja R_A um subconjunto de P x P.
> Definir uma relação de equivalência sobre P:
> S R_A S' $\Leftrightarrow$ u_A (S) = u_A (S')
> R_A é reflexiva, pois S R_A S. De fato u_A (S) = u_A (S)
> R_A é simétrica, pois S R_A S' $\Rightarrow$ S' R_A S
> De fato u_A (S) = u_A (S') $\Rightarrow$ u_A (S') = u_A (S)
> R_A é transitiva, pois $S_1 R_A S_2$ e $S_2 R_A S_3 \Rightarrow S_1 R_A S_3$
> De fato $u_A(S_1)$ = $u_A(S_2)$ e $u_A(S_2)$ = $u_A(S_3) \Rightarrow u_A(S_1)$ = $u_A(S_3)$
> (FACCO, 2003, p. 24)

Facco (2003) descreve ainda, que: "Chama-se de medida da área S_1 e a indicaremos por m(S_1) ao número real positivo associado a S_1, tal que m(S_1) = $u_A(S_1)$; "duas superfícies têm a mesma área se pertencem a mesma classe de equivalência"; "duas superfícies têm áreas diferentes se não pertencem a mesma classe de equivalência".

Com isso, as definições apresentadas são suficientes para comparar a área de duas, ou mais, superfícies concluindo se elas pertencem a mesma classe de equivalência.

1.3 Revisão Bibliográfica

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) propõem um currículo de matemática para o ensino fundamental subdivididos, mais não independente, em blocos – Bloco Dos Números e das Operações, Estudo do Espaço e das Formas, das Grandezas e Medidas e, por fim, do Tratamento da Informação.

Este documento ainda apresenta claramente a idéia de articulação entre esses blocos, destacando que o estudo das Grandezas e Medidas permite a interligação entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e dos outros campos do conhecimento.

Em adição, o PCN descreve os pontos que devem ser analisados na organização dos conteúdos, dentre os quais destacamos:

> A variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando possibilitar a compreensão mais amplo que o aluno possa atingir a respeito dos princípios e métodos básicos do corpo de conhecimento matemático [...] (BRASIL, 1998, p.53).

Este documento propõe, ainda, a resolução de problema como uma opção didática para o ensino e aprendizagem de matemática. Entretanto alerta que muitos professores, de forma equivocada, apresentam tal método como uma aplicação de procedimentos aprendidos anteriormente, e não como instrumento de que cria um ambiente de construção e discussão de novos conhecimentos.

Dentre outros princípios destacados para a organização do ensino e aprendizagem utilizando a resolução de problemas como meio, o PCN destaca:

> A situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL, 1998, p.40).

No que diz respeito a nossa pesquisa, o PCN descreve que, para o terceiro ciclo, o desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem devem levar o aluno a: “Resolver situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução”. (BRASIL, 1998, p.64-65).

Também, para esse mesmo ciclo, o PCN orienta quanto aos conceitos e procedimentos desejáveis no Bloco das Grandezas e Medidas que, entre outros, destacamos:

> - Reconhecimentos de grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volumes, ângulos, tempo, temperatura, velocidade e identificação de unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazendo o uso de terminologia própria;
> - Compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras;
> - Cálculo de áreas de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas. (BRASIL, 1998, p.73-74)

No que diz respeito ao conceito de área percebemos que inúmeros fenômenos interferem no seu ensino e aprendizagem e que precisamos de estratégias e uma sequência didática que minimizem os efeitos recorrentes.

Como algumas das estratégias possíveis, o PCN propõe “atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamento, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras [...]”. (BRASIL, 1998, p.123)

Somando se a isso, a referida proposta, recomenda o uso da composição e decomposição de figuras planas como estratégia para cálculo de medida de área.

O PCN (BRASIL, 1998, p.130-131) ainda destaca que: “No trabalho com as medidas é bastante freqüente os alunos confundirem noções de áreas e perímetros ou estabelecerem relações não verdadeiras entre elas [...]”, explicitando que tal fenômeno se deve ao fato de dificilmente eles são colocados em situações em que os dois conceitos estejam envolvidos.

Para se construir um ambiente que possa realmente conduzir a um aprendizado significativo e a dissociação entre esses conceitos o PCN (BRASIL, 1998) recomenda a variação de situações problemas e a construção, por parte dos alunos, de figuras em que as relações e distinções entre esses objetos matemáticos podem ser observadas.

Continuando com as propostas de situações de aprendizagem dos conceitos de área, o PCN completa:

> [...] o trabalho com áreas deve apoiar-se em procedimentos que favoreçam a compreensão das noções envolvidas, como obter área pela composição e decomposição de figuras cuja área eles já sabem calcular (recortes e sobreposição de figuras) por procedimentos de contagem (papel quadriculado, ladrilhamento), por estimativas e aproximações. (BRASIL, 1998, p.131)

Analisando outras fontes, observamos quanto a construção do conceito de área, Bellemain e Lima, descrevem que “[...] um dos resultados mais importantes é a classificação das concepções de área em dois pólos – as concepções geométricas e numéricas – propostas por Douady e Perrin-Glorian (1988) e por Balacheff (1988)”. (BELLEMAIN; LIMA, 2000, p.8)

Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989 apud BELLEMAIN; LIMA, 2000), “alguns alunos desenvolvem uma concepção forma (quadro geométrico) ou uma concepção número (quadro numérico) ou ambas, mas de forma isolada uma da outra”.

As concepções numéricas para Douady e Perrin-Glorian (1989 apud BELLEMAIN; LIMA, 2000), “seriam aquelas segundo as quais o aluno só considera os aspectos pertinentes para o cálculo, por exemplo, as medidas de comprimentos característicos da figura, que são combinadas de maneira mais ou menos fundamentada.” Já as concepções geométricas é caracterizada por Balacheff (1988 apud BELLEMAIN; LIMA, 2000) “como aquelas segundo as quais o aluno confunde área e superfície, perímetro e contorno”.

Considerando o tema de nossa pesquisa, podemos citar a pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989) que, segundo Facco (2003):

> apresentam uma pesquisa onde constroem um processo de aprendizado do conceito de área de superfícies planas para alunos de 9 a 12 anos, utilizando o quadro teórico da “dialética ferramenta-objeto e jogo de quadros” em sua seqüência de aprendizagem.

Douady e Perrin-Glorian (1989 apud BELLEMAIN; LIMA, 2000), apresentaram uma abordagem do conceito de área em que é necessário distinguir três quadros: o geométrico, o da grandeza e o numérico. Com relação a esses quadros, os autores descrevem:

> - Quadro geométrico é constituído por superfícies planas;
> - Quadro numérico é constituído de números reais positivos associados às medidas das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos;
> - Quadro das grandezas é o contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classe de equivalência de superfícies de mesma área. (BELLEMAIN; LIMA, 2000, p.9)

Ainda segundo os autores:

> Os objetos do quadro geométrico estão ligados as superfícies planas, figuras planas – triângulos, retângulos, círculos, contornos de figuras irregulares, etc. – que são modelos matemáticos de faces planas de objetos do mundo físico. São essas figuras que são comparadas com relação ao atributo área. O quadro numérico é o dos números reais não negativos - 2, 7, 1/2, $\sqrt{2}$, etc. Expressões compostas de um número e de uma unidade de medida - 2m2, 7cm2, ½ ha, $\sqrt{2}$ cm², 2m², etc. – são formas de representar grandezas. (BELLEMAIN; LIMA, 2000, p.9)

Facco (2003) descreve que, para Douady e Perrin-Glorian, é necessário distinguir área de superfície e área de número, antes de construir a área como grandeza autônoma. A autora comenta também que, “o conceito de área como grandeza constitui um ímã entre superfície e números, e uma escolha conveniente das unidades de comprimento e área permite estabelecer relações entre as medidas de comprimento e as medidas de área[...]”. (FACCO, 2003)

O trabalho de pesquisa de Douady e Perrin-Glorian baseou-se nas seguintes hipóteses:

- desenvolver o conceito de área como grandeza, ajuda os alunos a estabelecer relações entre os quadros numérico e algébrico.
- uma identificação precoce entre as grandezas e os números leva os alunos a fazer confusões entre comprimento e área. (FACCO, 2003)

E as escolhas didáticas, no estudo de área e perímetro foram:

- quadro geométrico – deve-se fazer a comparação com certas superfícies, por deslocamento ou recorte e colagem;
- quadro numérico- deve-se ter conhecimento de números inteiros e suas operações e saber associar um número a certas superfícies pelo cálculo do ladrilhamento de uma superfície de formas variadas;
- deve-se fazer o apontamento das diferenças e estabelecimento das relações entre áreas e perímetros. (FACCO, 2003)

Para Douady e Perrin-Glorian (1989 apud FACCO, 2003), "o jogo de quadros geométricos e numéricos faz avançar o conhecimento dos alunos sobre a noção de área, a medida e os números e provocar um certo efeito sobre a dissociação área-perímetro."

Do nosso ponto de vista, esse jogo de quadros, pode propiciar aos educados uma forma de dissociar, também, área de superfície, bem como perímetro de contorno, ajudando-os nas articulações entre os elementos envolvidos na construção do conceito de área.

Facco (2003) descreve ainda que, assim como Douady e Perrin-Glorian, Baltar utiliza o termo "grandeza" num sentido ingênuo sem buscar defini-lo. Ela acredita que área pode ser definida como classe de equivalência sobre uma função medida.

Em suas hipóteses, Baltar acredita que o desenvolvimento do conceito de área como grandeza permitem estabelecer relações necessárias entre os quadros geométricos e numéricos.

Para dissociar a área do perímetro, Baltar procurou respostas às seguintes indagações:

- Quais são as fontes de dificuldades dos alunos em relação à dissociação de área e perímetro?
- Essas dificuldades de aprendizagem são devidas aos objetos geométricos em jogo (a superfície, o contorno), as fórmulas, às variações respectivas?
- De qual domínio matemático ela são oriundas: geométrico, numérico ou Funcional?
- Para os diferentes tipos de superfícies, as dificuldades de aprendizagem são as mesmas? Há diferença?
- Que tipo de situação permite desestabilizar as concepções errôneas instaladas (por exemplo, área e perímetro variam sempre no mesmo sentido)?

- Quais situações reforçam a utilização das concepções errôneas?
- Que efeito do contrato didático habitual reforça e/ou permite superar essas concepções errôneas? (BALTAR, 1996 apud FACCO, 2003, p.25-26)

Baltar classificou essa distinção entre área e perímetro em pelo menos quatro pontos de vista distintos:

- **topológico**, segundo o qual os conceitos de área e de perímetro correspondem a objetos geométricos distintos, a área sendo associado à superfície e o perímetro ao seu contorno;
- **dimensional**, evidenciando que uma superfície e seu contorno são objetos matemáticos de natureeza distintas no que diz respeito as dimensões, o que traz conseqüências imediatas sobre o uso das unidades adaptadas à expressão das medidas de área e de perímetro;
- **computacional**, que corresponde à aquisição das fórmulas de área e perímetro de figuras usuais;
- **variacional**, que consiste na aceitação que área e perímetro não variam necessariamente no mesmo sentido, que superfícies de mesma área pode ter perímetros distintos e vice-versa. (BALTAR, 1996 apud BELLEMAIN; LIMA, 2000)

Segundo Facco (2003), para Baltar a variedade das dificuldades dos alunos permite compreender melhor a aprendizagem do conceito de área e controlar as condições que favorecem a aprendizagem.

Baltar (1996 apud FACCO, 2003) apresenta uma série de teoremas-em-ação que dão sentido ao conceito de área de superfícies planas, para todo o tipo de superfícies, para superfícies usuais e sobre as definições de paralelogramos.

Para a autora, “essas análises mostram que são numerosos os conceitos em jogo na concepção da área: os conceitos de área, de grandeza, de medida, de números, de perímetro, de encobrimento, de multiplicação, de adição, de colagem, de recorte, de equivalência, etc.”

Podemos observar claramente nas inúmeras inferências aos estudos de Perrin-Glorian e Douady e Baltar a importância de apresentar situações em que os alunos possam relacionar os quadros geométricos, numéricos e das grandezas, sabendo diferenciá-los e articulá-los. Tais abordagens são necessárias principalmente quando observamos que os erros mais comuns se referem à confusão dos objetos matemáticos envolvidos.

Quanto às unidades de medida, fica claro que os alunos não entendem as diferenças entre medir uma superfície (plano bidimensional) e um comprimento (plano unidimensional). Essa confusão se torna evidente quando os alunos escrevem, por exemplo, m² para exprimir uma unidade de comprimento e m para exprimir uma unidade de área.

Outro agravante é que muitos professores, em especial os profissionais que não se atualizaram, demonstram pouco conhecimento sobre os fenômenos de ensino e aprendizagem em relação aos conceitos de área e perímetro.

Nesse sentido acreditamos que uma sequência didática que, considerando essas pesquisas, construa o conceito de área como grandeza autônoma e estabeleça as devidas relações entre os quadros das grandezas, geométrico e numérico, podem auxiliar os alunos a superarem esses obstáculos.

CAPÍTULO 2 PROBLEMÁTICA

2.1 Delimitação do Problema

Esta pesquisa foi direcionada aos estudos dos fenômenos que interferem na construção dos conceitos de superfície, contorno, área e perímetro de figuras poligonais planas. Para tal, foi elaborado um teste-piloto, de uma sequência didática, que possa minimizar as principais fontes de dificuldades no ensino e aprendizagem dos objetos envolvidos.

Esse assunto é de extrema relevância não só no estudo da matemática, mas principalmente, no cotidiano das pessoas. Não podemos conceber um indivíduo que não consiga estimar, ou calcular, medidas de superfícies e/ou perímetros.

O PCN (BRASIL, 1998) destaca, no Bloco das Grandezas e Medidas, que tal relevância social se deve ao seu caráter prático e utilitário e pela possibilidade de múltiplas conexões com diferentes áreas do conhecimento, mostrando ao aluno a utilidade desses conhecimentos matemáticos no cotidiano.

Fora do contexto social mencionado, o conceito de área possui uma relevância enorme na matemática e o seu domínio é essencial para desenvolver situações-problema no campo da matemática. Tal importância pode ser verificada no PCN, que dispõe de um bloco que trata exclusivamente da Grandeza e Medida em todas as séries do ensino básico.

Observamos ainda, que nos dias atuais o estudo da matemática vem sendo vista com um olhar diferenciado, deixando de ser tratada como uma matéria reprodutora de fórmulas e procedimentos, para dar mais importância para causas que interferem no seu ensino e aprendizagem. Evidentemente, o baixo desempenho de nossos alunos nas avaliações institucionais são indicadores de que os professores precisam mudar sua postura.

Almouloud e Mello (2000), mencionando as avaliações feitas pelo SAEB/MEC e pela SEE/SP, divulgam que os alunos não estão construindo as noções básicas no ensino de matemática e esse fato se agrava ainda mais quando o tema é geometria.

Somando-se a isto o PCN comenta que o ensino da Geometria no Ensino Fundamental, “[...] tem tido pouco destaque nas aulas de matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas [...].” (BRASIL, 1998, p.122)

Outro indicativo pode ser constatado pelos crescentes estudos referentes a didática da matemática que colocam em “xeque” os procedimentos automáticos, para dar maior atenção a construção dos conceitos. Com isso, muitos dos obstáculos e dificuldades, que antes eram deixados de lado, vêm sendo estudados, evidenciando as variáveis e especificidades referentes aos objetos matemáticos, mostrando-nos a necessidade de novas posturas e atitudes a serem aplicadas em sala de aula.

Na busca das variáveis didáticas e matemáticas que interferem no ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados a área de figuras planas percebemos que inúmeros fatores devem ser considerados no preparo de atividades.

Chiummo (1998) cita que um dos motivos que pode prejudicar a compreensão desse objeto matemático são as práticas e as escolhas didáticas desenvolvidas pelos profissionais para “construírem” o conceito, e que tais escolhas não permitem aos alunos estabelecerem as relações necessárias entre os quadros numéricos e geométricos.

Segundo a autora, muitos desses professores iniciam o estudo do conceito de área como um número associado a uma superfície e tão logo aplicam fórmulas, o que não permitem aos alunos estabelecerem as devidas relações entre superfície, área, contorno e perímetro.

Para esses profissionais, que iniciam o estudo dos conceitos de área utilizando fórmulas, podem considerar esse conteúdo fácil de ensinar/aprender e os alunos podem demonstrar interesse pela aprendizagem do mesmo. Entretanto, “suposta facilidade” se deve ao simples fato dos educando decorarem e reproduzirem as técnicas “ensinadas” pelo professor. Contudo esse tipo de abordagem só será eficaz quando os exercícios forem idênticos aos apresentados em sala de aula, caso contrário o cenário serão os evidenciados pelas avaliações institucionais – desempenho a baixo do básico.

Fato esse que, segundo o PCN, “[...] A experiência tem mostrado que os alunos que aprendem mecanicamente fórmulas costumam empregá-las de forma também mecânica e acabam obtendo resultados sobre os quais não têm nenhum tipo de crítica e controle, além de se esquecerem rapidamente. [...].” (BRASIL, 1998, p.131)

Outro fator que interfere diretamente no ensino/aprendizagem dos conceitos de área e perímetro, são as escolhas didáticas dos educadores que, muitas vezes, utilizam exclusivamente o livro didático para prepararem suas aulas.

Facco (2003) em sua pesquisa analisou alguns livros didáticos da 5ª série (atual 6º ano) e verificou que neles apresentam um número muito reduzido de atividades relacionadas ao conceito de área e, rapidamente, já passam para as fórmulas.

As pesquisas nos revelam que frequentemente os alunos confundem área com superfícies e perímetros com contornos, o que nos leva a concluir que estão confundindo, ou até mesmo não aprendendo, as diferenças entre esses objetos. Esses equívocos estão estritamente relacionados aos quadros das grandezas, geométrico e numérico, mostrando-nos o quão é necessária uma abordagem que se considere os três quadros.

Estudos apontam que com a diferenciação e articulação destes quadros que poderemos minimizar as causas dos maiores erros identificados por alunos, e até mesmo por professores.

Como podemos observar um grande número de fenômenos que influenciam no ensino e aprendizagem dos conceitos de área e, infelizmente, muitos profissionais desconhecem tal complexidade e consequências. Com isso, quando um professor não considera as especificidades do tema, ele não consegue gerar mecanismos para que os alunos construam o conceito de forma significativa.

Sendo assim, temos a seguinte questão de pesquisa:

Uma sequência didática em que, ao se iniciar a construção do conceito de área, aborde-a como uma grandeza autônoma e, numa segunda fase, faça as devidas dissociações e articulações entre os quadros da grandeza, geométrico e numérico, pode minimizar as dificuldades frequentemente apontadas sobre o tema?

As hipóteses que nortearam, nossos estudos foram:

HIP1: Construir uma sequência de aprendizagem em que as comparações de superfícies de figuras planas possam ser realizadas de forma autônoma, sem a necessidade de expressá-la numericamente, pode ajudar o educando a dissociar área de superfície e perímetro de contorno.

HIP2: As diferenciações e articulações, realizadas nos momentos corretos, entre os quadros das grandezas, geométrico e numérico pode fazer avançar significativamente a compreensão em relação os objetos matemáticos envolvidos no conceito de área.

O objetivo dessa pesquisa é produzir um material que considere as principais especificidades do tema, procurando possíveis soluções, para subsidiar os professores, além de levantar novas hipóteses e/ou sugestões para futuras pesquisas.

Para atingir esse objetivo, iremos nos apoiar em outras pesquisas realizadas sobre o tema que destacam as maiores dificuldades dos alunos relacionadas a esse conceito. Organizando uma estrutura de trabalho que, primeiramente, estabeleça área como uma grandeza autônoma e, em seguida, promova as devidas relações entre os quadros geométricos e numéricos.

2.2 Procedimentos Metodológicos

Para realização desta pesquisa seguimos os pressupostos da engenharia didática, que Artigue descreve como:

> É uma forma de trabalho didático compatível ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apóia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.
> (1988 apud ALMOULOUD, 2007, p.171)

Além disso, Almouloud diz que a engenharia didática é caracterizada por “[...] um esquema experimental com base em realizações didáticas ‘em sala de aula’ [...]” e também “[...] como uma pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: comparação entre análise a priori e análise a posteriori [...]”.

A estrutura e organização da engenharia didática possuem as seguintes fases:

1. As análises prévias:
   - Estudos da organização matemática;
   - Análise da organização didática do objeto matemático escolhido;
   - Definição da (s) questão (ões) de pesquisa e hipóteses.

Nessa fase analisamos estudos referente à história do conceito de área, seu desenvolvimento e o saber matemático, observando como ele é ensinado e os efeitos recorrentes deste tipo de abordagem.

Buscamos no PCN e em outras pesquisas realizadas sobre o tema, a orientação quanto ao estudo do objeto matemático, as sugestões para seu ensino, os métodos e estratégias que possam minimizar os fenômenos que interferem no ensino e aprendizagem e os elementos fundamentais para construção do conceito de área.

Após a revisão bibliográfica, elaboramos nossa questão de pesquisa e conjecturamos nossas hipóteses.

2. Construção das situações e análise a priori:
    - Elaboração de uma sequência com situações-problema que procure responder a questão de pesquisa para validar, ou não, as hipóteses;
    - Análise matemática e didática de cada atividade da sequência, levando em consideração os fundamentos teóricos, a problemática da pesquisa e as análises prévias.

Com intuito de responder nossa questão de pesquisa e validar, ou não, as hipóteses levantadas, elaboramos um teste-piloto, a ser aplicado à alunos do 6º ano, considerando os aspectos observados nas análises prévias.

Procuramos definir as variáveis que possam interferir no processo de construção do conceito de área, bem como desenvolver estratégias/técnicas que possam auxiliá-los na resolução de problemas que envolvam os objetos matemáticos estudados.

Por fim, realizamos a análise a priori de cada atividade, considerando o quadro teórico e o objetivo da pesquisa.

3. Experimentação, análise a posteriori e validação:
    - Definir as variáveis macro e microdidáticas;
    - Definir os instrumentos de coleta de dados;
    - Aplicar sequência didática aos sujeitos da pesquisa, corrigindo-a quando necessário;
    - Coletar os dados da pesquisa;
    - Analisar os resultados, considerando a análise a priori, os fundamentos teóricos, as hipóteses e a problemática da pesquisa;
    - Síntese das conclusões e avaliações das limitações da pesquisa;
    - Validação, ou não, da sequência proposta.

Definido os sujeitos da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados, colocamos nossa sequência didática à prova, a fim de levantar o máximo de informações para verificar se os objetivos foram atingidos.

Na análise a posteriori todas as informações obtidas serão analisadas considerando a análise a priori, posteriormente, poderemos validar nossas hipóteses e definir as limitações da sequência proposta.

2.3 Fundamentação Teórica

Para nos nortear na construção e análises da sequência didática, bem como buscar fundamentações para as hipóteses levantadas, nos fazemos valer das teorias “Dialética Ferramenta-Objeto” e “Mudanças de Quadros e Jogos de Quadros” de Douady (1986, 1987), e das teorias dos “Registros de Representação Semióticos” e das “Apreensões das Figuras” de Duval (1988, 1993, 1994 e 1995).

Segundo ALMOULOUD:

> Do ponto de vista epistemológico, a dialética ferramenta-objeto e as mudanças de quadros tornam-se instrumentos poderosos de análise, porque permitem uma leitura diferenciada da evolução de noções matemáticas e, também, uma análise da aprendizagem efetivamente existente. (ALMOULOUD 2007, p.61).

Em sua teoria, Douady (1986 apud ALMOULOUD, 2007) propõe a construção de uma sequência didática organizada de maneira cíclica, em que o aprendiz se utiliza de seus conhecimentos antigos como ferramenta para resolução de um problema. Contudo o problema apresentado busca a construção de uma nova técnica ou saber matemático (considerado objeto), que, por fim, passa a ser uma ferramenta para resolução de novas situações, e assim por diante.

Para Douady (1986 apud ALMOULOUD, 2007, p.62) “uma noção ou conceito tem o estatuto de *ferramenta* quando intervém na resolução de um problema, e de objeto quando é identificado como conteúdo da aprendizagem”.

Somando-se a isso, Almouloud completa:

> A autora fala de ferramenta quando considera o caráter operatório, contextualizado e personalizado de um conceito e de objeto quando considera seu caráter cultural, relativamente descontextualizado, despersonalizado, atemporal e social. (DOUADY, 1993 apud ALMOULOUD, 2007, p.62)

Sua teoria é organizada em seis etapas, que são:

- **Antigo**: Essa primeira parte será onde o aluno poderá mobilizar seus conhecimentos prévios para resolver, pelo menos em parte, o problema proposto. O enunciado deve fazer sentido para o aluno;
- **Pesquisa**: O aluno não poderá resolver totalmente o problema, pois a ferramenta para a resolução é o próprio objeto de estudo;
- **Explicitação**: O objetivo dessa fase é dar o estatuto de objeto aos conhecimentos que foram utilizados como ferramenta, para que esse se torne um saber da classe;
- **Institucionalização**: O professor escolherá alguns conhecimentos explicitados na fase anterior para descontextualizá-lo e serem apropriados pelos alunos, para tornarem ferramentas na resolução de novos problemas;
- **Familiarização**: neste momento o educador propõe situações em que os alunos utilizem esse novo saber como ferramenta explícita na resolução de problemas. O objeto novo se torna ferramenta para ser mobilizado na resolução de novas situações, em um novo ciclo da dialética;
- **Complexificação da tarefa ou novo problema**: Neste momento o professor apresenta situações mais complexas em que os aprendizes possam testar e/ou desenvolver os novos conhecimentos adquiridos.

Sua organização e estrutura permitem que os educandos construam seus próprios conhecimentos de maneira significativa e autônoma, cabendo ao educador o papel de mediador, intervindo apenas nos momentos oportunos.

Outra teoria fundamental no ensino/aprendizagem do conceito área são as noções de Quadros, Mudanças de Quadros e Jogos de Quadros apresentados por Douady (1986 apud ALMOULOUD, 2007).

Entendemos por Quadro o conjunto de conhecimentos que pertencem a um domínio de conhecimentos da matemática. Já as Mudanças de Quadros seria uma forma de mudar de domínio de conhecimentos obtendo uma nova visão do objeto estudado, essa mudança de domínio apresenta novas ferramentas e técnicas para a resolução desejada. Os Jogos de Quadros são mudanças de quadros provocados por iniciativa docente, permitindo aos alunos uma melhor concepção dos objetos estudados.

Nas pesquisas realizadas podemos observar que um dos principais desafios na construção do conceito de área para o aluno é a distinção dos quadros envolvidos.

Essa revelação nos faz perceber a importância de se considerar todos os quadros envolvidos, criando sequências em que os jogos de quadros estejam presentes, para promover as distinções entre eles.

Outra teoria fundamental em nossos estudos é a noção de “Registros de Representação Semiótico” introduzida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Almouloud (2007) descreve que, para o autor, “um registro de representação é um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente” e que, tais representações, são essenciais para se ter acesso aos objetos matemáticos.

Duval (2008) descreve que as particularidades da atividade cognitiva em matemática não estão apenas nos conceitos e suas complexidades epistemológicas, pois todas essas dificuldades estão presentes em todos os conhecimentos científicos. Entretanto o que difere a compreensão em matemática de outras áreas são duas características fundamentais:

- A importância primordial das representações semióticas;
- A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática.

Segundo Duval (2008, p. 13-14), as representações são essenciais para o desenvolvimento dessa ciência. Tal afirmação pode ser considerada pelo fato de que a possibilidade de tratamento matemático depende do sistema de representação utilizado e, também, porque os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com ajuda de instrumentos. Nesse caso dependemos de um sistema representações que nos permite reconhecer esses objetos.

Quanto à variedade de registros, Duval (2008) completa que existe quatro tipos muito diferentes de registros (Quadro 1):

	Representação Discursiva	**Representação não Discursiva**
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.

Registros Monofuncionais	Sistemas de escritas	Gráficos cartesianos
Os tratamentos são principalmente algoritmos.	• Numéricas (binária, decimal, racionária); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais)	• Mudanças de sistemas de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Quadro 1. Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.
Fonte: DUVAL, Raymond (2008, p. 14)

O registro figural, cuja caracterização está em destaque na tabela, é de extrema importância para o estudo da geometria, porque, entre outras razões, na resolução de problemas, mostra mais facilmente a idéia da solução empregada que em outras formas de registro. Um exemplo disso é que na leitura de um gráfico, acessamos as informações de uma maneira muito mais rápida do que lendo um texto.

Almouloud e Mello (2000, p.2) revelam que “a heurística dos problemas de geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar as forma de interpretações autônomas. Para essas interpretações, Duval (1995) distingue três tipos de apreensão”

- **Apreensão perceptiva** – é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica.
- **Apreensão discursiva** – é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois as mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto.
- **Apreensão seqüencial** – é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura.
- **Apreensão operatória** – é uma apreensão centrada sobre as modificações de uma figura de partida e sua reorganização perceptiva que essas modificações sugerem. (ALMOULOUD; MELLO, 2000, p.3)

Segundo Almouloud e Mello (2000), a apreensão operatória esta diretamente relacionada com as modificações que a figura pode sofrer que são classificados por Duval (1995 apud ALMOULOUD; MELLO, 2000) como:

- **Modificação mereológica** – a figura pode separar-se em partes da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, colocando o todo as partes em relação.
- **Modificação ótica –** é a transformação de uma figura em outra chamada imagem, ou seja, consiste em ampliar, reduzir ou deformar a figura inicial.

- **Modificação posicional** – é o deslocamento em relação a um referencial, ou seja, corresponde a deslocamentos por rotação, translação e simetria.

Uma das mais importantes apreensões operatórias é a reconfiguração, que consiste na divisão da figura em outras sub-figuras que podem ou não ser reagrupadas formando novas figuras.

Almouloud e Mello (2000) destacam que como efeito da reconfiguração “as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reconfiguradas em muitas subfiguras, todas dentro da figura de partida.” Nesse caso, podemos utilizá-la para calcular, ou apenas comprar, a medida da área por soma das partes.

A reconfiguração pode ser espontânea ou difícil de “ver” a partir da figura inicial. Alguns fatores podem interferir na apreensão operatória, dificultando essas reconfigurações. São eles: o fato da figura ser convexa ou não, de ser ou desenhada em malha quadriculada, à divisão da figura em partes ser dada ou não na figura inicial.

CAPÍTULO 3 A SEQUÊNCIA

Esse capítulo aborda os elementos que nortearam a construção da sequência didática, sua estrutura e a organização das atividades com seus respectivos objetivos.

Apresentaremos, também, a análise didática e matemática de cada atividade utilizando o referencial teórico destacado anteriormente.

3.1 Sujeitos da Pesquisa

A fim de responder nossas hipóteses, elaboramos e aplicamos um teste-piloto a um grupo de 33 indivíduos, na faixa etária de 10 a 12 anos, do 6º ano de uma escola estadual localizada no distrito de São Miguel Paulista – bairro da periferia da capital de São Paulo.

Esses indivíduos, divididos em onze trios, receberam a folha com as atividades e os materiais necessários para a realização de cada atividade. Todos os materiais produzidos por eles foram recolhidos para futuras análises. Entretanto, para nossas considerações e análises, vamos nos resumir, nessa pesquisa, a apenas dois, desses onze, grupos, não descartando os demais comentários e realizações dos outros sujeitos.

A aplicação da sequência será realizada pelo próprio pesquisador, que é professor efetivo da rede estadual, e leciona para esse grupo de alunos, sujeitos da pesquisa. Porém, cabe ressaltar, que o desenvolvimento da sequência foi realizado sem interferência nas resoluções, cabendo apenas o “papel” de mediador.

3.2 Descrição da Aplicação

Para o desenvolvimento e posteriores análises das atividades foram entregues os materiais necessários para realização de cada exercício e pedido para que eles não apagassem nada do que haviam produzido.

Para um melhor acompanhamento, foram elaboradas fichas de observação (em anexo), para cada atividade, com as informações que deveram ser atentadas no transcorrer do trabalho.

Essas fichas de observações foram produzidas considerando os aspectos da análise a priori e, consequentemente, os fundamentos teóricos, a problemática, a questão de pesquisa e as hipóteses.

A aplicação foi realizada em 15 sessões de 50 (cinqüenta) minutos no horário de aula da turma. Ao término de cada atividade foram institucionalizados os objetos matemáticos, incluindo as estratégias e técnicas de resolução, e aberto espaço para debates e discussões sobre o que havia sido estudado/aprendido.

Essa sequência foi idealizada para ser trabalhada em dois momentos:

1. Iniciar a construção dos conceitos relacionados à área e o comprimento do contorno como uma grandeza autônoma. Articulando e dissociando apenas os quadros das grandezas e o geométrico.

Nesse primeiro momento (Parte 1) constam das atividades 1 a 6. Cada uma com um objetivo específico para tentar solucionar questões de ensino/aprendizagem do conteúdo.

O Quadro 2 apresenta, para primeira parte da sequência, as atividades e seus respectivos objetivos.

Objetivos	**Questões**
Reconhecer e diferenciar superfície e contorno.	Atividade 1.
Dissociar o quadro geométrico (superfície) e das grandezas (área).	Atividades 2, 3 e 4.
Dissociar o quadro geométrico (contorno) e das grandezas (comprimento do contorno).	Atividade 5 e 6.
Produzir figuras distintas com uma área, ou perímetro, pré-determinada.	Atividade 4 e 6.

Quadro 2. Objetivos pretendidos – atividades 1 a 6.

Nessa etapa, procuramos comparar os comprimentos dos contornos e as áreas das figuras sem expressá-las numericamente, dizendo apenas se pertencem ou não a mesma classe de equivalência.

Buscamos também articular os quadros das grandezas e geométricos, para isso as atividades contam com exercícios que pretendem dissociar as formas das figuras com sua área e/ou com seu comprimento. Além, de propor situações que diferem os conceitos de área e comprimento do contorno.

Dessa forma, procuramos apresentar elementos suficientes para que os alunos relacionem e dissociem cada objeto matemático. Consequentemente esperamos que, ao introduzir o quadro numérico posteriormente, as dificuldades e confusões entre área e perímetro, por exemplo, sejam minimizadas.

2. Dar continuidade ao estudo dos conceitos introduzindo o quadro numérico e promovendo as articulações e dissociações entre os quadros das grandezas, geométrico e numérico.

Nessa etapa, constam as atividades 7 a 17, as articulações e dissociações entre os quadros continuam, contudo o quadro numérico deverá será levado em consideração.

O Quadro 3 apresenta, para segunda parte da sequência, as atividades e seus respectivos objetivos.

Objetivos	**Questões**
Dissociar e articular o quadro das grandezas (área) e numérico (medida da área).	Atividade 7, 8 e 9.
Dissociar e articular o quadro das grandezas (comprimento do contorno) e numérico (perímetro).	Atividade 8, 9 e 11.
Dissociar área e perímetro	Atividade 8, 12, 13 e 14.
Produzir retângulos distintos com uma área, ou perímetro, pré-determinado.	Atividades 12, 13 e 14.
Utilizar a composição de decomposição como estratégia de calculo de área.	Atividades 10, 15, 16 e 17.

Quadro 3. Objetivos pretendidos – atividades 7 a 17.

Outro aspecto fundamental desse é o desenvolvimento da estratégia de decomposição e composição de figuras planas como instrumento para o cálculo de área.

Num primeiro momento, procuramos articular e dissociar os quadros das grandezas, geométrico e numérico e, após esse período, procuramos dar uma atenção maior aos processos de reconfiguração de uma figura.

3.3 Análise da Sequência

Nesse tópico apresentaremos a sequência didática, as análises à priori das atividades, fazendo as respectivas análises matemáticas e didáticas de cada atividade proposta, segundo o quadro teórico, a questão de pesquisa e as hipóteses levantadas.

As análises matemáticas serão feitas segundo Almouloud (2007, p.176), que descreve: *“Nesse estudo, queremos identificar os métodos e/ou estratégias de resolução de cada situação, evidenciando os conhecimentos e saberes matemáticos envolvidos.”*

Em relação às análises didáticas Almouloud (2007, p.176 - 177), menciona que nesse tipo de análise devem-se levar em conta os seguintes aspectos:

> - Analisar a pertinência das situações propostas, em relação ao saber matemático visado e em relação aos saberes anteriormente adquiridos.
> - Identificar as variáveis de comando da situação e escolher aquelas necessárias para o estudo.
> - Estudar a consistência das situações, isto é, verificar se as variáveis escolhidas não possibilitam que os alunos construam conhecimentos incompatíveis, mesmo que de modo provisório.
> - Prever e analisar as dificuldades que os alunos podem enfrentar na resolução de cada atividade.
> - Identificar os novos conhecimentos e/ou métodos de resolução que os alunos podem adquirir.
> - Prever os saberes/conhecimentos e/ou métodos de resolução de problemas que devem ser institucionalizados. (ALMOULOUD. 2007, p.176 -177).

Somando-se a isso, vamos apresentar as análises à posteriori confrontando-a com a análise à priori para validar ou não a sequência de aprendizagem.

Atividade 1

Vocês estão recebendo um jogo de TANGRAM, utilize-o para fazer duas figuras diferentes. Não precisa utilizar todas as peças. a) Com um lápis de cor contorne as duas figuras e, em seguida, pinte a região interna com uma cor diferente. b) Qual a diferença entre contorno e a região interna da figura

<u>Análise à priori</u>

A primeira atividade procura identificar se os alunos possuem um conhecimento implícito, ou mesmo explícito, sobre contorno e região interna ao contorno (superfície da figura).

O jogo do tangram foi escolhido para eles construírem figuras de maneira mais lúdica e se acostumarem com a dinâmica das sete peças. Tal familiarização com o material será de suma importância para as próximas atividades.

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades em realizar esse primeiro exercício, pois contornar e pintar figuras são tarefas que já fazem parte de sua vida. Contudo o item “b” em que pede para diferenciar contorno e região interna pode causar dúvidas.

Esperamos encontrar algumas respostas como: contorno é só uma linha; contorno não dá para pintar dentro; região interna da figura dá para pintar. Dentre essas, e outras, respostas vamos destacar as questões que abordam contorno como grandeza unidimensional e a região interna como grandeza bidimensional.

Nessa fase os alunos estão trabalhando apenas a apreensão perceptiva da figura e reconhecendo seus elementos, ou seja, eles estão “navegando” apenas pelo quadro geométrico.

Análise à posteriori

Como era de se esperar a primeira sessão foi bastante conturbada, com os alunos agitados com a novidade. Os alunos não têm costume de trabalhar em grupo e não sabem a forma adequada de se portar, tal fato prejudicou muito o desenvolvimento da atividade.

Destacamos também que o tangram possui uma função didática importantíssima nesta sequência, contudo, num primeiro momento, o jogo acaba tirando a atenção dos educandos que, pela sua imaturidade, querem começar a brincar e perdem o “foco”.

Como previsto na análise à priori, os alunos não tiveram dificuldades em realizar o item “a” e fizeram as duas figuras, contornando-as e pintando sua superfície.

Na hora de pintar a “região interna” da figura, um dos alunos do grupo G2, explicou para o colega do mesmo grupo que tinha que “pintar dentro da figura”, fazendo inferência a superfície, e depois deles discutirem sobre o assunto o outro aluno entendeu e completou dizendo que para separar a parte de “dentro e de fora da figura” usamos o contorno. Da mesma forma, não tivemos problemas com o grupo G1 que entendeu o que seria a região interna (superfície).

O item “b”, também como previsto nas análises, gerou dúvidas de como responder, ainda, notamos que eles não possuem costume de responder a questões abertas.

No início eles procuravam responder que a diferença do contorno e da superfície era a cor que eles haviam pintado e contornado. Nessa hora precisaram ocorrer intervenções para que eles se atentassem aos elementos envolvidos, independentemente da cor dos objetos.

Após essas discussões, saíram respostas como as imaginadas, entre as quais destacamos para o contorno: *ele é fino, não dá pra pintar dentro, são só* linhas (fazendo inferências a grandeza unidimensional). Para a superfície sugiram respostas como: *ela é larga, dá para pintar dentro, ela é grande, ela é espaçosa* (fazendo inferência a grandeza bidimensional).

Cabe ressaltar que a apreensão perceptiva da figura é um aspecto que interfere para visualização dos alunos, isso pode ser constatado nas respostas produzidas que, a todo instante, mencionam a forma da figura e não se atentam aos outros elementos em jogo. O educador deve ficar atento nesse aspecto, pois, se não for bem trabalhada, vai prejudicar o desenvolvimento das próximas atividades.

Ao final da atividade, e após os debates, foram institucionalizadas as diferenças entre os objetos envolvidos (contorno e superfície) e explicitado que chamamos a região interna de uma figura de superfície.

Atividade 2

Escolham três peças do tangram, façam duas figuras diferentes e pinte as regiões internas dessas figuras. Em seguida, respondam o que se pede. a) Observando a região interna das duas figuras, o que vocês observam em comum? Justifiquem suas respostas. b) Se vocês fizerem outras figuras com essas mesmas três peças, todas as regiões internas das figuras continuaram com essa mesma característica em comum? Justifiquem suas respostas.

<u>Análise à priori</u>

Nessa atividade pretendemos iniciar as comparações entre as áreas como uma grandeza autônoma, concluindo apenas se pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência. Essa conclusão será de extrema importância para institucionalizarmos que figuras formadas pelas mesmas partes possuem áreas equivalentes.

A escolha de se utilizar apenas três peças do tangram, e não todas se refletem apenas numa maior facilidade de se perceber as relações entre as peças e a figura, pois, obviamente, se fossem utilizadas todas as peças as conclusões seriam as mesmas. No caso de pintar as superfícies das figuras, foi uma escolha didática que permite tanto observar se eles entenderam o que significa, quanto para concentrar os olhares para o objeto em estudo.

No item “a” esperamos que os alunos percebam que as figuras terão a *região interna de mesmo tamanho* (áreas equivalentes), percebendo que elas foram formadas pelas mesmas peças. Contudo esperamos encontrar respostas negativas de alunos que apenas fixarem seus olhares para forma da figura, ou mesmo não observarem nada em comum. Cabe ressaltar que a terminologia *forma* é utilizada nesse trabalho para caracterizar a aparência física da figura.

No contexto, as apreensões operatórias, bem como as modificações possíveis de uma figura, no sentido de Duval (1995), não foram desenvolvidas, o que nos faz acreditar que alguns aprendizes poderão responder as perguntas levando em consideração apenas a apreensão perceptiva, em outras palavras, considerando apenas a forma da figura e não sua área.

No item “b” os alunos que responderem errado o item “a”, provavelmente erraram novamente. Contudo acreditamos que mesmo os que perceberem a relação da área da figura com as peças que a compõe no item “a” podem ter dificuldades em responder este item, pois poderão ficar em dúvidas sobre sua generalização. Esperamos também que alguns alunos tentem fazer mais algumas figuras diferentes para chegar à conclusão.

Entretanto, mesmo que as relações não sejam percebidas, o professor poderá instigá-los a observarem esse fato durante os debates individuais e coletivos e explicitá-lo durante a explanação do exercício.

Desejamos que o objeto, no sentido de Douady (1986-1987), comparação de superfícies por decomposição e composição, se torne ferramenta para as atividades subsequentes. Outra questão implícita nessa atividade é a relação entre as formas das figuras e suas superfícies.

Devemos ainda, abordar a decomposição de uma figura em partes, percebendo que essas partes podem ser utilizadas para comparar superfícies. Essa estratégia poderá levar os alunos a perceberem que figuras com formas distintas podem possuir a mesma área.

Ao final dessa atividade é essencial que os educandos percebam que todas as superfícies podem ser medidas (comparadas) e que, para tal, precisamos de outra superfície que sirva como unidade de medida – para nós, essas superfícies são as peças do tangram.

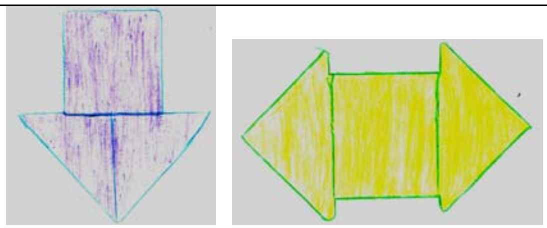
Análise à posteriori

Assim como na atividade 1, a apreensão perceptiva se demonstrou um obstáculo que deverá ser trabalhado, pois no desenvolvimento da atividade todas as respostas iniciais eram sobre a forma da figura, e seus elementos novamente foram desconsiderado, necessitando a intervenção para continuidade do exercício.

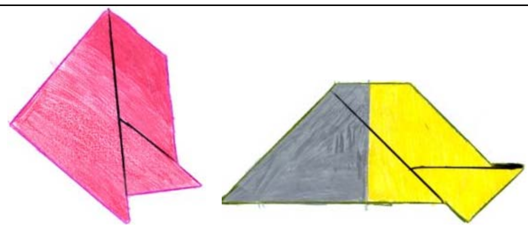
Os dois grupos (G1 e G2) não tiveram dificuldade em construir as duas figuras utilizando as mesmas três peças e pintar sua superfície. Entretanto ao relacionar as superfícies das duas figuras tivemos respostas como: as figuras são duas setas, é uma casa, e assim por diante, sempre citando seu aspecto físico.

Tal fato pode ser evidenciado na fala de um aluno do grupo G2 que, ao visualizar uma peça do tangram (o paralelogramo), falava que a figura formada pela peça era diferente dependendo de sua posição, em outras palavras, para ele a rotação da peça mudava sua forma.

Continuando as intervenções foi pedido para eles observarem a superfície da figura e não sua forma e, nesse momento, apareceram respostas que uma figura era “maior que a outra (áreas diferentes). Percebemos novamente a apreensão perceptiva como um obstáculo para realização da atividade. Entretanto foi pedido para eles marcarem os contornos de cada peça que formou a figura para destacar essas foram formadas pelas mesmas peças, conforme demonstra a Figura 1.



GRUPO G1



GRUPO G2

Figura 1. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 2

Essa interferência foi necessária para os dois grupos, porém, após essa discussão e serem marcadas o contorno de cada peça, os alunos perceberam que as duas figuras tinham o mesmo “tamanho” (área) observando que as peças haviam apenas mudado de posição.

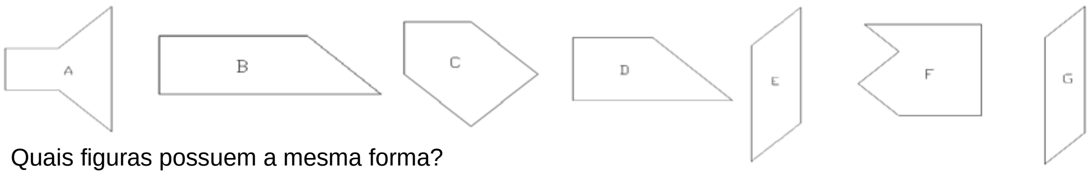
Após esses comentários os grupos G1 e G2 não tiveram dificuldades em responder o item “b”, percebendo que qualquer que seja a figura formada por essas mesmas três peças elas terão o mesmo “tamanho” destacando que apenas irão se alterar as posições das peças.

Podemos perceber a dissociação entre a forma da figura e sua área sendo desenvolvida por eles, elementos fundamentais para a atividade 3.

Ao final, foi institucionalizado que o “tamanho” da superfície recebe o nome de área em geometria e que qualquer figura que seja formada pelas mesmas peças terão a mesma área. Foi discutido também, que podemos utilizar as peças do tangram (outra superfície) para comparar a área de duas, ou mais, figuras.

Atividade 3

Vocês estão recebendo uma folha com várias figuras. Com auxílio do tangram, respondam o que se pede.



a) Quais figuras possuem a mesma forma?
b) Quais figuras possuem superfícies com mesma área?
c) Figuras que possuem superfícies com mesma área precisam ter a mesma forma? Justifiquem suas respostas.

Análise à priori

A atividade anterior já apresentava, de forma implícita, as diferenças entre os quadros geométricos e das grandezas. Entretanto, na atividade 3, trataremos explicitamente da diferenciação desses objetos – áreas equivalentes podem ser encontradas em figuras com formas diferentes.

Acreditamos que, após os debates e institucionalizações, ocorridos na atividade 2 os educandos irão examinar as figuras com maior cuidado e não se deixaram levar apenas pela apreensão perceptiva da figura. Pretendemos ainda observar se os objetos do exercício anterior foram usados como ferramentas para que os alunos verifiquem quais superfícies possuem as mesmas áreas.

No item “a” as figuras que possuem a mesma forma são B e D (trapézios), E e G (paralelogramos), provavelmente os alunos não terão dificuldades em perceber que essas figuras possuem as mesmas formas, pois precisarão mobilizar apenas o processo de visualização. No item “b” as figuras que possuem a mesma área são A, D e E.

Para descobrir as figuras com área equivalentes os aprendizes deverão escolher uma peça como unidade de medida e comparar as superfícies. Entretanto, o próprio jogo do tangram já possui, em suas peças, formas diferentes com área iguais (caso do quadrado, triângulo médio e paralelogramo), isso pode confundi-los na hora de perceber, por exemplo, que uma figura formada por um triângulo pequeno e um quadrado possui a mesma área de outra figura formada por um triângulo pequeno e um paralelogramo. Mas acreditamos que com a mediação do professor, instigando-os a comparar as superfícies das peças, essa questão será superada.

Outro ponto que pode gerar dificuldade é na hora da escolha das peças que recobrem perfeitamente, e sem sobreposição, a figura. Porém essa composição das peças, para formarem uma figura desejada, é fundamental para o desenvolvimento da apreensão operatória.

No item “c” houve uma escolha didática de as figuras com mesma forma não terem a mesma área. Tal escolha se deve ao fato de que um das causas de dificuldades dos alunos no aprendizado do conceito de área é associar a forma da figura com sua área.

Na atividade 2 os alunos perceberam que figuras com formas distintas podem ter a mesma área e nessa atividade irá aparecer que a figuras com mesma forma podem ter áreas diferentes, com isso acreditamos apresentar elementos suficientes para que haja uma dissociação dos entre os objetos superfície e área. Consequentemente, consideramos que os alunos não terão dificuldades em responder corretamente o item “c” – a área da figura não depende de sua forma.

É imprescindível institucionalizar que o “tamanho” da superfície (área) da figura independe de sua forma, pois muitos dos erros pesquisados revelam que tal confusão é um obstáculo no aprendizado. Outro ponto que deve fazer parte do debate é que para comprar uma superfície devemos utilizar outra superfície, em outras palavras, só podemos comprar objetos de mesma natureza.

Essa relação deve ser bem definida nessa etapa para, na hora de atribuir uma unidade de medida de área e perímetro, minimizar as dificuldades em relação à unidade certa, pois a escolha da unidade depende exclusivamente da natureza dos objetos.

<u>Análise à posteriori</u>

Essa atividade apresentou, novamente, o quanto a forma da figura interfere na construção do conceito de área, pois em todas as respostas, como anteriormente, os alunos responderam primeiramente sobre a forma e, só depois, procuravam outros elementos na figura.

O grupo G1 observou corretamente as figuras que possuíam a mesma forma e não tiveram dificuldades em responder. Entretanto o outro grupo (G2), que haviam respondido corretamente antes de responder o item “b”, apagou sua resposta e marcou incorretamente as figuras com mesma forma. Cremos que ouve uma confusão entre os itens “a” e “b”, pois eles marcaram o item “b” na questão “a”.

Observamos que mesmo após a institucionalização os alunos tiveram dificuldades em perceber que precisavam usar as peças do tangram para responder o item “b”, porém quando eles foram instigados a procurar uma estratégia para comparação das figuras, eles perceberam que as peças poderia ser uma excelente ferramenta.

Cabe ressaltar que inicialmente eles tentaram responder a questão analisando apenas a forma da figura, concluindo que as que tinham a mesma forma possuem a mesma área. Porém quando instigados a verificar com as peças eles perceberam que tal afirmação era incorreta.

Como previsto nas análises, as próprias peças do tangram causaram dificuldades na realização do exercício. Primeiro porque houve dificuldades em encontrar as peças que recobriam perfeitamente as figuras e, em segundo, porque eles não perceberam que uma peça, o quadrado, por exemplo, possui a mesma área de outras (triângulo médio e paralelogramo).

Somando-se a isso, percebemos outro erro comum nos grupos, eles estavam contando a quantidade de peças que recobriam as figuras e não suas áreas, como por exemplo, uma figura formada por um triângulo grande e um quadrado, para eles, tinha o mesmo tamanho de outra formada por um triângulo pequeno e um médio, pois nas duas figuras cabiam duas peças.

Novamente precisou ocorrer uma intervenção para explicitar que eles tinham que observar a área e não a quantidade de peças. Essa explanação e a verificação de quais peças do tangram possuem as mesmas áreas proporcionaram o correto desenvolvimento das atividades.

Verificamos que o grupo G1 respondeu parcialmente correta o item “b”, pois considerou as figuras A e C como tendo a mesma área e, do mesmo modo, não marcou a figura D como de área equivalente a A. Já o grupo G2, respondeu apenas parcialmente a essa atividade, concluindo que as figuras D e A e as figuras B e C, possuem as mesmas áreas, deixando de marcar a figura E, com área equivalente a A e D.

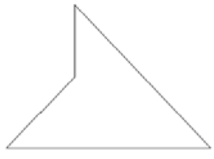
Ocorreram algumas intervenções para que eles começassem a entender a dinâmica da decomposição e composição utilizando as peças do tangram. Tal fato nos faz imaginar que precisamos desenvolver essas técnicas para eles conseguiram mobilizá-las em outras situações.

Entretanto observamos claramente, tanto na fala, quanto nas respostas escritas, que os educandos conseguiram dissociar o quadro geométrico (as formas) e das grandezas (áreas) concluindo que a área da figura independe de sua forma, percebendo que elas só precisavam serem formadas pelas mesmas peças, ou peças de mesma área.

Ao final da atividade e com os debates pertinentes, foram institucionalizados que a área da figura independe de sua forma, bem como, que as figuras formadas por peças de área equivalentes, terão a mesma área, destacando as relações de área e superfície.

Atividade 4

Observem a figura dessa atividade e, em seguida, façam outras duas figuras diferentes que tenham a mesma área da figura dada.



<u>Análise à priori</u>

Nessa atividade pretendemos propiciar aos educandos a possibilidade de se familiarizar com os objetos estudados nas atividades 2 e 3. A idéia central do exercício é perceber se eles mobilizam os conhecimentos construídos.

Para resolver esse problema devemos recobrir a figura dada (figura de partida) e, com as mesmas peças, ou ainda peças diferentes de mesma área, reconfigurá-la para formar outra figura. Obviamente, como as peças são as mesmas, as áreas das figuras serão iguais.

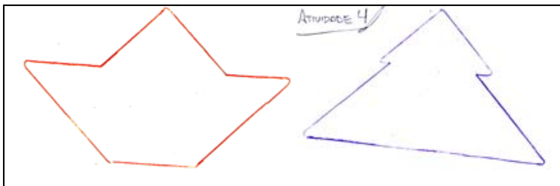
É importante, ao final da atividade, ressaltar que, independentemente da forma, as figuras que são formadas com as mesmas partes (as peças) possuem áreas equivalentes. Esse objeto será essencial para ser usado como ferramenta posteriormente.

Em geometria, a reconfiguração de uma figura inicial em outra é fundamental para que se possa reconhecer, ou visualizar, elementos que num primeiro momento não são perceptíveis, ajudando inclusive nos cálculos de área de figuras não usuais.

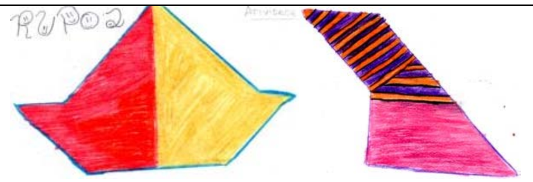
<u>Análise à posteriori</u>

Observamos que os objetos estudados e institucionalizados nas atividades anteriores se tornam ferramentas para resolução do exercício. Os dois grupos, G1 e G2, perceberam que a área da figura independe de sua superfície.

Percebemos também, que a comparação de superfícies utilizando as peças do tangram foram estratégias mobilizadas e eles não tiveram dificuldades em fazer as duas figuras que possuíam as mesmas áreas. Como pode ser observado na Figura 2.



GRUPO G1



GRUPO G2

Figura 2. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 4

As intervenções ocorreram para instigá-los a fazer novas figuras com peças diferentes das usadas anteriormente, mas mantendo a mesma área. Nessa hora ocorreram algumas dúvidas, em especial quanto às peças do tangram com mesma área, mas houve mediações para que eles percebessem as áreas das peças do tangram.

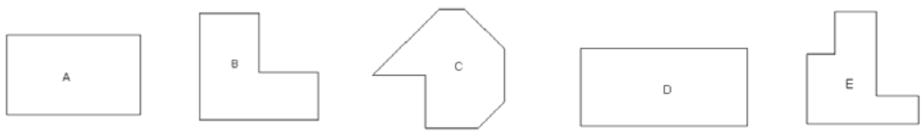
Cabe ressaltar que os alunos observaram outros elementos das figuras, deixando de se fixarem apenas em suas formas. Além disso, as técnicas de decomposição e composição foram utilizadas e eles desenharam as figuras sem dificuldade.

No final houve uma breve institucionalização para reforçar os objetos estudados anteriormente e notamos que, na fala deles, já aparecem as dissociações entre os quadros das grandezas e geométricos.

Constatamos ainda, que os objetos matemáticos estão sendo construídos de forma adequada observando frases como: “a forma é diferente mais o tamanho é o mesmo”; “é só usar as mesmas peças para ter a mesma área”.

Atividade 5

Vocês estão recebendo um *kit* contendo: placa de isopor, alfinetes e barbantes. Use os alfinetes para fixar a folha com as figuras sobre a placa de isopor e, em seguida coloque alfinetes sobre os vértices das figuras e com o barbante contorne cada figura para responder as questões abaixo.



a) Quais figuras possuem as mesmas formas?
b) Quais figuras possuem o contorno de mesmo comprimento?
c) As figuras que possuem o contorno de mesmo comprimento precisam ter a mesma forma? Justifique sua resposta.

Análise à priori

A atividade 5 pretende dissociar o contorno de uma figura do seu comprimento a partir da comparação, como uma grandeza autônoma. Nesse caso o exercício pretende diferenciar os quadros geométricos e das grandezas.

Escolhemos utilizar o barbante para comparar o comprimento das figuras, pois eles nos permitem concluir quais figuras possuem contorno de mesmo comprimento sem necessidade de expressá-las numericamente, identificando apenas quais pertencem a mesma classe de equivalência.

Sabemos que os alunos podem encontrar certa dificuldade no manuseio do barbante, por isso optamos em utilizar, também, uma “plaquinha” de isopor e alguns alfinetes, para que eles consigam esticar melhor o barbante. Cabe ressaltar, que os alunos entraram resultados aproximados para as medidas, contudo o intuito nesse primeiro momento é apenas comparar sem se preocupar excessivamente com o rigor nas medidas.

Assim como nas atividades anteriores, provavelmente os alunos não terão dificuldades em responder o item “a” – as figuras de mesma forma são A e D (retângulos).

Quanto ao item “b”, esperamos que eles percebam que as figuras A, C e E e as figuras B e D possuem, respectivamente, contorno de mesmo comprimento, pois a tarefa de contornar figuras já faz parte de seus conhecimentos e a única diferença é quanto ao material que eles têm em mãos – o barbante. Pode ser que alguns deles se atrapalhem na hora de contornar as figuras, ou mesmo que não estiquem bem e isso prejudique-os para completar as atividades.

Nessa etapa o professor tem em “mãos” a possibilidade de promover um debate sobre a diferença em comparar uma superfície e um contorno, as diferenças de unidades de medida escolhidas e abrir espaço para debater se poderiam ou não utilizar uma superfície comparar contorno de figuras. Cremos que essa possibilidade de reflexão é de suma importância para diferenciar esses objetos matemáticos.

No item “c” os alunos poderão associar a atividade 3 e, com isso, reflitam antes de responder, pois já perceberam que nem sempre as figuras terem a mesma forma é fator essencial para possuírem todas as características comuns.

Na institucionalização e discussões dessa atividade devem ser esclarecidas as dissociações entre o contorno de uma figura e seu comprimento (quadro geométrico e das grandezas). Além, de socializar a comparação entre o comprimento do contorno de uma figura com barbantes, ou outros objetos semelhantes, como uma estratégia para perceber a equivalência entre comprimentos de contornos.

Análise à posteriori

Nessa atividade percebemos que os alunos estão se apropriando dos objetos matemáticos estudados. O vocabulário correto, bem como os objetos matemáticos, estão sendo mobilizados e servindo de ferramenta para cada atividade seguinte.

Os educandos não tiveram dificuldades em fixar as folhas na placa de isopor com os alfinetes. Contudo eles não possuem o costume de ler o enunciado e ficam perguntando o que se deve fazer antes de procurar entender por si próprio. Após alguns breves esclarecimentos a atividade se desenvolveu tranquilamente.

No item “a”, o grupo G2 respondeu corretamente, afirmando que as figuras A e D (ambas retângulos) possuem a mesma forma, porém o grupo G1 respondeu que, além dessas, as figuras B e E também possuíam a mesma forma. Ao serem questionados eles insistiram que elas pareciam um “L”, mas ao final foi pedido para eles verem outros elementos, como número de lados, vértices, por exemplo.

Destacamos que, ao contrário do previsto, os alunos tiveram um pouco de dificuldade em entender o que eram as formas das figuras. Para efeito dos nossos exercícios, explicitamos que a forma era referente ao aspecto físico da figura, por isso, para responder eles precisavam se atentar a tal fato.

No item “b”, o grupo G1 não conseguiu observar que as figuras B e D possuíam contorno de mesmo comprimento, mas encontraram as figuras A, C e E. Já o grupo G2 conseguiu perceber a equivalência entre todas as figuras;A, C e E; B e D.

O grupo G1, ao serem questionados sobre quais figuras possuíam mesmo comprimento, eles responderam prontamente que era as figuras A e D, explicando que elas tinham a mesma forma. Entretanto pedimos para que eles utilizassem o barbante para nos mostrar e, antes mesmo de medir, um deles percebeu que não eram o do mesmo “tamanho”, apontando para a figura D e dizendo que ela era “maior”. Da mesma forma que nos outros exercícios, a apreensão perceptiva fez com que eles considerassem as forma e não os elementos envolvidos.

Observamos também, que o grupo G1 estava fazendo marcações nos barbantes de caneta para saberem o “tamanho” e, em seguida, compará-las com as demais.

Ao final do exercício (item “c”) eles perceberam que a forma da figuras e seu comprimento são elementos distintos, em outras palavras, eles dissociaram os quadros das grandezas do geométrico.

Podemos citar a resposta do grupo G2 que escreveu: “*Não, porque nenhuma precisa da outra*”. Quando questionados eles explicaram que “a forma e o comprimento eram diferentes”.

Assim como previsto na análise a priori, o grupo G1 se apropriou da atividade 3, e respondeu: “*Não, Só precisa ter mesma área ou mesmo comprimento*.”.

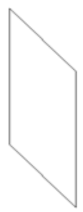
Demonstrando ter compreendido que a forma das figuras, sua área e seu comprimento são elementos distintos e, como tais, independentes.

Ao final, foi institucionalizado a dissociação entre a forma (quadro geométrico) e seu comprimento (quadro das grandezas). Destacando a necessidade de se medir as figuras para determinar quais possuem comprimentos equivalentes.

Aproveitamos esse momento para abrir espaço para discussão entre a área e o comprimento. Os aprendizes perceberam que para comparar a área de superfícies precisamos de outra superfície e, para o comprimento do contorno temos que utilizar outro comprimento, por exemplo o barbante. Isso nos faz perceber que os elementos estão sendo construídos corretamente, estabelecendo as relações e diferenças entre os objetos matemáticos envolvidos.

Atividade 6

Observem a figura dessa atividade e, em seguida, façam duas outras figuras diferentes quem possuam contorno de mesmo comprimento.



<u>Análise à priori</u>

Essa atividade, também de familiarização, seguem os mesmo interesses didáticos da atividade 4, pois neles podemos identificar se os objetos estudados foram efetivamente aprendidos, se existem conceitos que permanecem sem entendimento e quais precisam ser revistos.

Queremos destacar ainda, que provavelmente as figura elaboradas podem apresentar algumas pequenas diferenças entre os comprimentos pelo fato de estarem utilizando um material maleável (barbante), contudo, para minimizar esse efeito, serão entregues réguas para auxiliá-los. Cabe destacar que o objetivo dessa atividade é verificar se eles tentarão fazer as outras figuras com base no comprimento do contorno da figura de partida.

A dissociação entre os quadros geométricos e das grandezas deve ser enfatizado nos debates para propiciar a percepção que, independentemente da forma, a figura que tiver contornos de mesmo comprimento, pertencem a mesma classe de equivalência segundo esse critério.

<u>Análise à posteriori</u>

A atividade foi desenvolvida sem dificuldades pelos grupos. Percebemos algumas confusões quanto ao enunciado, pois os alunos tendem a, antes mesmo de procurar compreender, pedir a orientação do professor.

Observamos que alguns alunos pediram para pegar o tangram para fazer esta atividade, obviamente, associando com a atividade 4, em que se pedia para fazer duas figuras diferentes com mesma área da figura dada. Essa confusão foi esclarecia ao se discutir sobre o que se precisava para comparar contorno – o barbante ou uma peça – e, em seguida, eles conseguirão realizar o exercício.

Acrescentamos que, assim como prevista nas análises, as figuras de parte dos alunos que não utilizaram régua, ficaram mal desenhadas.

Somando-se a isto, alguns alunos procuraram fazer outra figura idêntica da que foi entregue a eles e, para dar continuidade, precisamos intervir e fazê-los fazer figuras com formas distintas. Alguns tiveram um pouco de dificuldades para resolver a atividade mais com alguns esclarecimentos eles encontraram uma estratégia para realizar o exercício.

Destacamos que os elementos estudados-aprendidos foram mobilizados e serviram de ferramenta para solucionar o problema proposto. Ao final foram institucionalizados a dissociação do comprimento do contorno (quadro das grandezas) e contorno da figura (quadro geométrico).

Atividade 7

Com quatro peças do tangram façam uma figura e pinte a sua superfície. Em seguida, respondam. a) Quantos triângulos pequenos são necessários para recobrir a superfície perfeitamente? b) Quantos quadrados são necessários para recobrir a superfície perfeitamente? c) Se a superfície da figura é a mesma, como vocês justificam os valores encontrados serem diferentes?

<u>Análise à priori</u>

Nessa atividade vamos introduzir o quadro numérico, além de articulá-lo e dissociá-lo dos quadros geométricos e das grandezas.

O objetivo dessa atividade é começar a construir o conceito de medida de área, como um número real positivo, propiciando aos alunos perceberem que toda área de uma superfície pode ser expressa por um valor numérico segundo uma função medida. Contudo, ao mesmo tempo, pretendemos dissociar a área (quadro das grandezas) de medida de área (quadro numérico).

Para isso, vamos destacar que a área de uma superfície pode ter medidas de áreas diferentes dependendo da unidade de medida escolhida, ou seja, a medida da área é um número que se obtêm do processo de comparação entre duas superfícies e, esse valor varia de acordo com a superfície escolhida como unidade de medida.

Nessas condições, ao pedirmos para os alunos medirem (decidirem quantas unidade de medida cabem no objeto a ser medido) um mesmo objeto com duas peças diferentes (triângulo pequeno e quadrado) estamos na verdade adotando unidades de medidas diferentes com intuito de eles construírem a noção de que os objetos matemáticos, medida de área e área, são diferentes.

A diferenciação dos quadros envolvidos deve ser feita cuidadosamente, pois muitas pesquisas evidenciam que confundir superfície, área e medida de área é outro dos erros comuns apresentados pelos estudantes.

Acreditamos que como já foram feitas algumas atividades em que pedia para decompor uma figura em outras com o tangram, eles não terão dificuldades em perceber a quantidade de triângulos (item ”a”) que recobrem perfeitamente as figuras feitas. Entretanto no item “b” eles precisarão recobrir a mesma figura com quadrados e, provavelmente, eles não conseguirão fazer com que o quadrado recubra perfeitamente todas a superfícies da figura, nesse caso eles podem perceber que o quadrado equivale a dois triângulos pequenos no tangram, essa descoberta facilitaria a execução da atividade.

O item “c” é o que se pretende institucionalizar. Os educandos devem ter observado que apesar da figura ser a mesma sua “medida” depende da unidade escolhida. Precisa ser explorada a idéia de que medir é comparar duas grandezas de mesma natureza, pois a partir delas podemos argumentar e diferenciar área de medida de área e, posteriormente, perímetro de comprimento de um contorno.

Para esse item “c”, podemos encontrar respostas como: *As medidas são diferentes porque o quadrado é maior que o triângulo*, entre outras. Contudo, ao nosso entender eles não terão dificuldades de relacionar os valores diferentes com a área das unidades de medida escolhida.

Explicitar que essas comparações devem ser feitas com grandezas de mesma espécie será essencial para podemos, futuramente, expor a necessidade de se representar unidades de medida diferentes para medida de área (grandeza bidimensional) e perímetro (grandeza unidimensional).

<u>Análise à posteriori</u>

No início da atividade 7, construir uma figura com quatro peças do tangram, notamos que, conforme revela a Figura 3, os indivíduos não tiveram dificuldades em realizar, pois já haviam essa tarefa anteriormente.

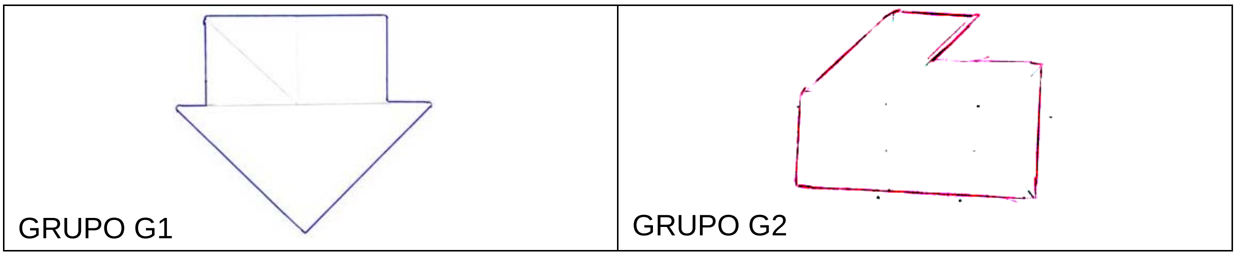


Figura 3. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 7

Entretanto, como previsto, na hora de recobrir a superfície utilizando o triângulo pequeno e o quadrado, percebemos que começaram a surgir questionamentos por não conseguirem recobrir perfeitamente a figura utilizando as peças, em especial com o quadrado.

Para continuidade do exercício foi pedido que eles percebessem as relações entre as próprias peças do tangram e, após eles começarem a interagir melhor com o tangram, os exercícios foram realizados com sucesso.

Destacamos o grupo G1, que ao recobrir sua figura com o quarado percebeu que sobrou o espaço de dois triângulos pequenos e, ao serem questionados sobre o que se poderia formar com esses triângulos, responderam de imediato, “o quadrado”. Com isso, eles conseguiram solucionar os itens “a” e “b” e responder corretamente o item “c” escrevendo: “*Porque os triângulos são menores e os quadrados são maiores*.”

Acrescentamos que os alunos desse grupo foram instigados a responder quantos triângulos grandes eram necessários para recobrir a figura e, ao perceber que quatro triângulos pequenos equivaliam a um grande, responderam de imediato.

Já o segundo grupo (G2), teve mais dificuldades em recobrir sua figura, pois além dos problemas já mencionados quanto ao recobrimento da superfície, eles fizeram uma figura menos usual, dificultando ainda mais o recobrimento.

Porém ao se iniciar os debates eles foram percebendo as relações das peças e com algum trabalho conseguiram chegar as resposta corretas nos itens “a” e “b”. Cabe ressaltar que eles perceberam inclusive que, ao medir com o quadrado sobrou um triângulo, equivalendo a meio quadrado.

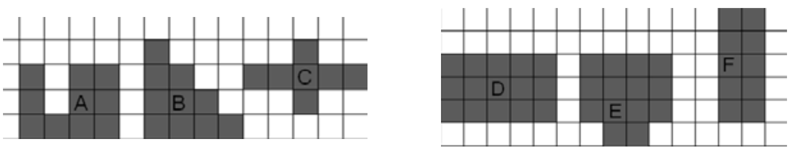
Para o item “c”, esse grupo respondeu que a diferença era por causa das peças, fazendo referência a área.

Ao término institucionalizamos que toda área de uma figura pode ser expressa por um valor numérico, que representa quantas vezes uma unidade de medida cabem no objeto a ser medido. Explicitamos também, que uma mesma área pode apresentar medidas de áreas diferentes dependendo da unidade de medida escolhida, dissociando os quadros das grandezas e numérico.

Ressaltamos que no processo de medição da área de uma figura deve-se atentar a unidade de medida escolhida, pois para recobrir uma superfície precisamos de outra superfície. Em outras palavras, temos sempre utilizar objetos de mesma natureza, objetos bidimensionais, para comparar as áreas.

Atividade 8

Vocês estão recebendo uma malha quadriculada com algumas figuras. Utilize um quadradinho com unidade de medida de área (u²) e o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento (u) e, em seguida, responda.



Determine a medida da área e perímetro de cada figura.

a) Quais figuras possuem a mesma área?
b) Quais figuras possuem o mesmo perímetro?
c) As figuras que possuem o mesmo perímetro possuem, também, a mesma área? Dê exemplo.
d) As figuras que possuem a mesma área possuem, também, o mesmo perímetro? Dê exemplo.

Análise à priori

Essa atividade tem por objetivo dissociar medida da área de perímetro de uma figura plana. Mostrando que figuras com mesma área não precisão ter perímetros iguais e vice-versa.

Outro aspecto é fazê-los observar que para calcular o perímetro precisamos utilizar uma unidade de medida diferente da unidade de medida de área. Por isso, a partir desse ponto em diante, vamos começar a construir a necessidade de, ao final de uma medida, indicar a unidade escolhida.

No exercício, como a unidade escolhida é o lado do "quadradinho" da malha, adotaremos ***u*** para perímetro e ***u²*** para medida de área, procurando relacionar essas diferentes unidades pela dimensão da figura, conseqüentemente objetos matemáticos distintos.

As figuras da atividade 8 possuem medida de área e perímetro, respectivamente, iguais a: figura A $10u^2$ e $18u$; figura B $10u^2$ e $16u$; figura C $7u^2$ e $16u$; figura D $15u^2$ e $16u$; figura E $14u^2$ e $16u$; figura F $10u^2$ e $14u$. Acreditamos que não haverá dificuldades em encontrar os valores de medida de área pelos inúmeros exercícios das atividades anteriores. Porém pode ser que eles não coloquem ou confundam a unidade de medida na hora de representá-la.

Quanto ao cálculo do perímetro entendemos como mais prováveis alguns equívocos na hora de apresentar os valores, pois caso não preste atenção pode-se facilmente deixar de contar alguma unidade, além disso, será o primeiro contato com a malha quadriculada. Ressaltamos ainda que, assim como na representação da medida da área, pode haver confusão com a unidade de medida do perímetro.

É importante que se discuta e institucionalize a necessidade de se indicar a unidade de medida correta, além de evidenciar o fato de que cada um desses objetos possuem uma representação diferente as quais nos permitem reconhecê-los.

Nos itens "b" e "c" esperamos não haver dificuldade em perceber quais figuras que possuem a mesma área ou perímetro, exceto daqueles que responderem errado a primeira questão.

Já nos itens "d" e "e", são partes fundamentais para que haja a dissociação da medida da área (ou somente a área) e de perímetro, pois eles poderão constatar que as figuras que possuem mesma área não precisam ter o mesmo perímetro e vice-versa.

Na institucionalização devemos atentar a todos os aspectos levantados nessa análise, pois só assim podemos minimizar as causas mais comuns de dificuldades dos alunos, como: Confundir área com perímetro e representar errado as unidades de medida de cada um desses objetos.

Análise à posteriori

Nessa atividade, diferentemente do previsto, apresentou certa confusão na hora de utilizar a malha quadriculada. Esse fato pode ser entendido, pois foi a primeira vez que eles usaram esse recurso didático.

Antes do início da atividade tivemos que explicar como trabalhar com a malha, bem como utilizar as unidades de medida – lado do quadradinho ou o “quadradinho cheio”. Nessa hora foi questionado sobre qual, das duas unidades, se utiliza para medir o perímetro e um dos alunos do G1 respondeu que era o lado do quadradinho da malha e a área era o “quadradinho cheio”.

Notamos que no trabalho com a malha quadriculada, e provavelmente a triangular, o calculo de área é mais simples do que o de perímetro. Fato esse que, provavelmente, se deve as inúmeras linhas (lados) que apresentam a superfície da figura.

Como as figuras desenhadas na malha não apresentam um contorno visível – pois o próprio quadriculado contorna a peça – percebemos que alguns alunos tiveram dificuldades em destacar o perímetro da figura.

Esse fato pode ser observado no grupo G2 que, ao calcular o perímetro, considerou todos os lados dos quadradinhos da malha, inclusive aqueles que estavam “dentro” da superfície. Conseqüentemente eles erraram todos os cálculos de perímetro.

O grupo G1 procedeu corretamente na hora de calcular a área e o perímetro, porém não haviam colocado as unidades de medida. Nesse momento eles foram questionados sobre quais unidades deveriam ser representadas e eles responderam corretamente e acrescentaram as unidades nas medidas realizadas.

Contudo, podemos observar na Figura 4, que esses alunos representaram a unidade de medida (**u**) como expoente, provavelmente se referindo a unidade de área que, no nosso caso, foi utilizado **u^2**, onde o 2 é o expoente de u.

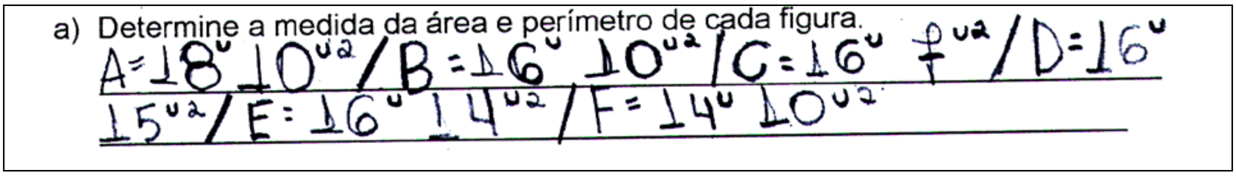

a) Determine a medida da área e perímetro de cada figura.
A=18u 10u²/B=16u 10u²/C=16u 8u²/D=16u
15u²/E=16u 14u²/F=14u 10u²

Figura 4. Protocolo do grupo G1 – Atividade 8

Cabe ressaltar que devido ter havido muita confusão quanto o cálculo do perímetro utilizando a malha propomos um debate sobre os procedimentos para se medir o perímetro. Após as discussões eles perceberam a forma correta de proceder, observando inclusive que para o perímetro devemos considerar unicamente o contorno.

Após essas discussões, o grupo G2 apagou suas respostas sobre o cálculo de perímetro, mesmo sendo explicado que eles não podiam apagar nada, e resolveu tudo novamente e, dessa vez, de forma correta, inclusive colocando a unidade de medida adequada.

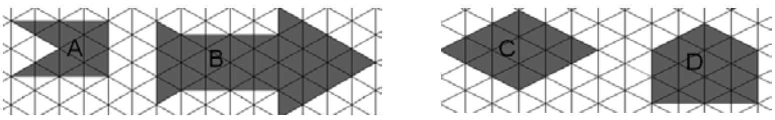
Tanto o grupo G1, quanto o G2, responderam corretamente os itens “b” e “c”, percebendo quais figuras possuíam a mesma área e perímetro. Quanto ao item “d” e “e” os dois grupos dissociaram a área do perímetro.

Cabe destacar que nesse exercício, do mesmo modo que no 7, a articulação entre o quadro numérico e geométrico ocorreu de forma natural e com sentido, destacando que o valor encontrado era referente a quantidade de unidades de medida que cabiam na superfície ou contorno da figura.

Ao final da atividade foi discutida a dissociação de área e perímetro. Quanto às unidades de medida, apresentamos a importância de se representá-la juntamente com o valor numérico e as diferenças entre unidade representação da medida de cada objeto.

Atividade 9

Vocês estão recendo uma folha com malha triangular com algumas figuras. Utilize um triângulo como unidade de medida de área (u²) e o lado do triângulo como unidade de medida de comprimento (u), e calcule o perímetro e a medida da área de cada figura.



<u>Análise à priori</u>

Essa atividade segue o mesmo princípio da atividade 8, com a diferença de ser uma malha triangular. É importante propiciar aos aprendizes uma diversidade de unidade de medida para que esses possam perceber que, independentemente da unidade, podemos medir a área e perímetro das figuras.

Nesse caso adotaremos o lado do triângulo da malha como unidade de medida de comprimento (u) e a superfície do triângulo como unidade de medida de área (u^2). Vamos aqui considerar a distância do vértice desses triângulos ao ponto médio do segmento oposto como 0,87u. Cabe ressaltar que a malha é formada por triângulos eqüiláteros.

Destacamos que essa atividade é uma complexificação da atividade anterior, pois, além deles terem que contar as unidades de medida, deveram também considerar metades do triângulo para medir a área e o perímetro. Esse fato pode fazer com que surjam alguns erros, pois, nesse caso, eles terão que realizar cálculos com números naturais e decimais, caso da metade do triângulo.

As figuras da atividade 9 possuem áreas e perímetros (aproximados), respectivamente, iguais a: figura A $12u^2$ e 12,96u; figura B $37u^2$ e 21,96u; figura C $18u^2$ e 12u; figura D 20 u^2 e 11,48u.

Podemos encontrar alguns alunos que considere metade do triângulo como uma unidade inteira, procedendo de forma errada na hora de representar os valores. Portanto esse será um dos aspectos indispensáveis para se institucionalizar, além de evidenciar as unidades de medida corretas.

Acreditamos que a Fig. C apresentará o maior índice de acertos por se tratar de uma figura que recobriu os triângulos da malha perfeitamente, tal fato facilita as medições, pois basta recorrer a uma contagem simples. No caso das demais figuras, imaginamos ter que ocorrer intervenções para instigá-los a perceber que parte da figura passa pelo meio do triângulo da malha e precisamos de duas metades para formar um triângulo inteiro. Consequentemente, para o perímetro, esse mesmo fato deverá ser compreendido e utilizar a medida de 0,87u.

Assim como no exercício anterior, a institucionalização será centrada nos procedimentos de cálculo de medida da área e perímetro, bem como as representações adequadas das unidades de medida.

<u>Análise à posteriori</u>

A atividade 9, por ser semelhante a atividade 8, foi compreendida facilmente pelos alunos, entretanto ocorreram dificuldades em considerar a metade do triângulo da malha como medida de área. Inicialmente eles queriam contar essa metade como uma unidade inteira, porém, ao serem questionados, perceberam que precisava de duas metades para forma uma unidade.

Para o cálculo de perímetro as dificuldades foram ainda maiores, pois, além da forma da malha dificultar a visualização, a metade do triângulo valer 0,87 (oitenta e sete centésimos) dificultou muito o processo. Observamos que esse aspecto se deve ao fato de não dar mais para contar simplesmente os lados como unidade inteira, pois devemos considerar as medidas não inteira e utilizá-las para calcular.

O grupo G2, ao calcular a medida da área da figura A, falaram que ela tinha 16u², pois era composta de 8 unidades completas e 8 metades de unidades. Entretanto eles foram questionados quanto ao fato de não podemos considerar partes não inteiras de unidades como unidades completas e, em seguida, eles concluíram então que essas oito metades formavam quatro unidades inteiras e que a área seria igual a 12u².

Somando-se a isso um dos alunos desse grupo, nos questionou sobre o porquê de se utilizar 0,87u quando consideramos metade do triângulo, já que esse valor deveria ser de 0,50u². Nesse ponto foi discutido com ele que o 0,87u era referente a medida a ser utilizada para o perímetro quando temos que considerar a metade do triângulo, porém para a medida da área ele estava correto em considerar como 0,50u².

Essas diferenças de representações devem ser atentadas pelo educador na hora de discutir e institucionalizar os objetos matemáticos nesse tipo de exercício para que não haja confusão entre os quadros geométricos e numéricos, pois uma medida é referente ao perímetro e a outra à medida da área.

Já o grupo G1, conseguiu entender corretamente o que deveria ser feito perguntando apenas sobre como fazer com as metades dos triângulos no cálculo de área e perímetro, contudo, eles mesmos conseguiram compreender como proceder para solucionar o exercício.

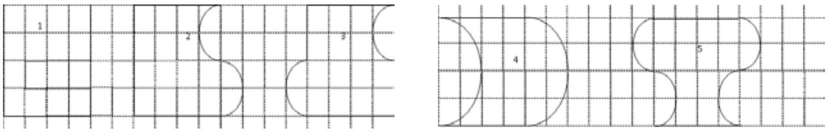
Destacamos que o grupo G1 calculou corretamente todas as medidas de área e perímetro das figuras, marcando inclusive suas respectivas unidades de medida. Entretanto o grupo G2 calculou apenas a medida das áreas, acrescentando suas unidades de medida corretamente.

Ao final dessa atividade, foi institucionalizado que podemos utilizar a malha para calcular a área e perímetro das figuras e que para medir precisamos escolher uma unidade de medida, de mesma natureza do objeto a ser medido, e perceber quantas vezes a unidade cabe na superfície a ser medida.

A representação da unidade de medida foi novamente evidenciada como essencial para representar o objeto em jogo.

Atividade 10

Como vocês observaram nas atividades com o tangram, uma figura pode ser dividida em várias partes para formarem novas figuras. Com essa mesma idéia, transforme as figuras 2, 3, 4 e 5, em figuras idênticas a figura 1.



Agora respondam. As figuras 1, 2, 3, 4 e 5 possuem a mesma área?

<u>Análise à priori</u>

Essa atividade, baseada no exercício da Facco (2003), busca identificar como os alunos procedem em processos de reconfiguração onde as figuras não são polígonos.

Pretendemos observar as reações dos alunos ao se depararem com figuras com linhas curvas e não convexas e verificar se esse aspecto pode interferir na operação de reconfiguração de uma figura em outra pré-determinada.

A técnica de reconfiguração é uma estratégia muito útil em geometria permitindo, muitas vezes, que se encontre solução para uma dada situação onde dificilmente se conseguiria encontrar considerando apenas a figura de partida. Como podemos observar na Figura 5.

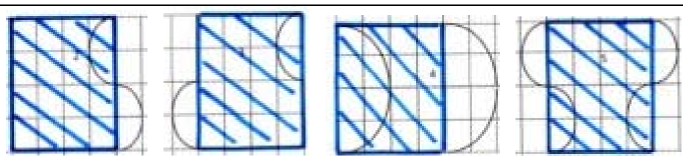


Figura 5. Possível solução – Atividade 10

Por isso, a partir desta atividade, vamos começar a enfatizar essas habilidades. Inicialmente vamos transformar algumas figuras em outra já determinada e, nas atividades posteriores, utilizar essas estratégias para auxiliar no cálculo da medida de área.

Acreditamos que alguns alunos possam encontrar dificuldades em conseguir realizar as reconfigurações, pois as formas das figuras são elementos que, inicialmente, pode deixá-los confusos.

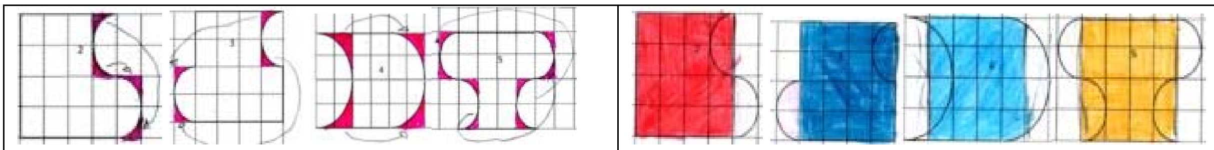
O sucesso, ou não, dessa atividade depende de como os alunos aceitaram as institucionalizações da atividade anterior. Caso eles tenham incorporado bem a noção de reconfiguração acreditamos que, nem pelo fato das linhas serem curvas, irá prejudicar que eles transformem as figuras 2,3,4 e 5 na figura 1.

<u>Análise à posteriori</u>

Como previsto nas análises prévias, a forma das figuras, num primeiro momento, dificultou a visualização de como transformá-las numa figura idêntica a primeira.

Novamente os grupos tiveram dificuldades em entender o enunciado sozinho pedindo auxílio para explicar como proceder. Notamos que eles não têm maturidade e autonomia na hora de interpretar e resolver as situações, requisitando a presença do professor a todo instante.

Entretanto após alguns esclarecimentos os grupos conseguiram, com certa facilidade, perceber que todas as figuras possuíam a mesma área da primeira figura, porém, o grupo G1, não transformou as demais superfícies de tal forma que ficassem com o mesmo aspecto físico da superfície 1, como podemos observar na Figura 6, mas chegaram a conclusão que todas as figuras tinham a mesma área, acrescentando que elas possuíam $16u^2$. Já o grupo G2, conseguiu fazer todas as figuras ficarem com o mesmo aspecto físico da figura inicial



GRUPO G1	GRUPO G2

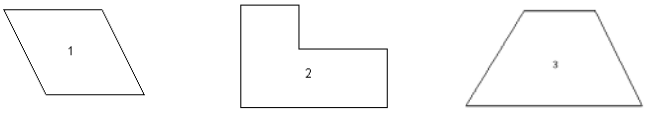
Figura 6. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 10

A estratégia utilizada pelo grupo G1, bem como a resposta dada, demonstra que eles perceberam que podem decompor e compor uma figura de tal forma que possam calcular sua área. Essa habilidade será de grande utilidade no cálculo de área de figuras mais complexas.

Além de ser institucionalizada a importância de se apropriar dessa técnica, foi debatido e esclarecido que essa transformação da não altera sua área, desde que todas as partes "retiradas" sejam novamente utilizadas na composição de uma nova figura.

Atividade 11

Utilizando a régua em polegadas e em centímetros, preencham a tabela abaixo com as medidas do perímetro de cada figura.



Instrumento de medida	Perímetro		
	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Régua em pol			
Régua em cm			

a) Por que, ao utilizarmos a régua em polegada e a em centímetros, para cada figura foram encontradas medidas diferentes?
b) O perímetro da figura 1 mede ____ cm, utilizando a régua em centímetros. Vocês poderiam explicar o que significa esse valor número ___cm?

Análise à priori

Essa atividade pretende articular e dissociar o comprimento do contorno de uma figura (quadro das grandezas) e perímetro (quadro numérico). Além de propiciar aos aprendizes perceberem que todo contorno pode ser expresso por um número real positivo.

Nessa fase os alunos começaram a utilizar instrumentos de medida padronizados para comparar com o contorno e expressar o resultado numericamente. É importantíssimo que eles incorporem as idéias fundamentais como, por exemplo, que o mesmo comprimento pode ser expresso por valores diferentes dependendo da unidade de medida escolhidas.

Uma das escolhas didáticas feitas foi utilizar uma régua em polegadas para fazer a comparação. Tal fato pode provocar um número maior de erros, pois a régua possui oito submúltiplos, e não dez como a régua em centímetros.

Entretanto destacamos que o principal objetivo da atividade é fazê-los perceber que, dependendo do instrumento de medida, o valor numérico obtida da comparação dos objetos será diferente.

Sabemos que a maior dificuldade será calcular o perímetro, pois eles vão ter que fazer os cálculos com números mistos, ou transformá-lo em uma representação unicamente fracionária. Independentemente da opção feita, o cálculo com fração, geralmente, é mais complicado para os educandos.

A comparação da mesma figura feita com essas duas unidades diferentes poderá fazer avançar as concepções dos alunos quanto ao fato que perímetro e comprimento da figura são objetos distintos.

Além disso, nesse exercício será necessário representar a unidade de medida nas respostas. É importante eles perceberem que se não representarem as unidades de medida não poderão saber qual instrumento foi usado na medição – régua em polegadas ou em centímetros. Já que dependemos das representações para reconhecer os objetos matemáticos.

As figuras da atividade 11 possuem como perímetro em centímetros e polegadas, respectivamente, os valores: figura 1 - 26,2cm e 10 3/8 pol; figura 2 – 33cm e 13pol; figura 3 – 38cm e 15pol.

Quanto ao item "a" o fato de estarmos utilizando uma régua em polegadas poderá facilitar a visualização de valores diferentes, pois sua representação será em fração ou números mistos. É fundamental que os alunos percebam as relações entre os instrumentos e os valores encontrados para, com isso, eles conseguirem dissociar a o comprimento do contorno (quadro das grandezas) de perímetro (quadro numérico).

Pensamos que, se eles conseguirem usar a régua em polegadas para medir, eles não terão dificuldades em responder essa questão e podemos encontrar respostas como: "*As réguas são diferentes"; "Uma é maior que a outra*";

O item "b" propõe uma reflexão sobre o significado de, por exemplo, 10cm. Perceber que essa medida é resulta da comparação de uma quantidade em que cabem dez vezes 1cm é essencial e deve ser considerado nas discussões.

No encerramento vamos institucionalizar as diferenças entre os quadros envolvidos e atentar para a representação da unidade de medida utilizada para medir o perímetro.

<u>Análise à posteriori</u>

Ao se iniciar a atividade os alunos tiveram algumas dificuldades em relação ao que era perímetro, observamos que havia alguma confusão sobre o objeto, nesse caso houve intervenção para questioná-los em relação ao que era perímetro e, posteriormente, eles conseguiram compreender a proposta do exercício.

Os grupos G1 e G2 não tiveram dificuldades em calcular o perímetro das figuras utilizando a régua em cm. Entretanto, quando tiveram que utilizar a régua em polegada, começaram a surgir as dúvidas de como proceder. Intervimos para explicar como medir utilizando este tipo de régua, inclusive destacando que não podemos escrever, por exemplo, 1 2/8 de polegadas como 1,2 pol, explicitando que tal fato se deve pela quantidade de subdivisões das réguas – uma está dividida em 10 partes (régua de cm) e a outra em 8 partes (régua de polegada).

Outra questão foi na hora de somar as medidas encontradas em polegadas e, novamente, precisou haver intervenção.

O grupo G1 encontrou, como medidas para atividade 11, utilizando a régua em polegadas e centímetros, respectivamente: figura 1 – 8 18/8pol e 26,5cm; figura 2 – 10 26/8pol e 33cm; figura 3 – 13 13/8pol e 38,6cm. Já o grupo G2 encontrou: figura 1 – 8 20/8pol e 26,8cm; figura 2 – 7 21/8pol e 33,7cm; figura 3 – 14 15/8pol e 29,1cm.

Os grupos, em especial o G1, encontraram valores próximos dos mencionados na análise a priori e consideramos como válidas as respostas apresentadas por eles – exceto o perímetro, apresentado pelo grupo G2, em polegadas da segunda figura e em centímetro da terceira figura.

Cabe ressaltar que essas pequenas diferenças entre os resultados já eram esperados, pois o processo de medição utilizando régua já resulta em valores aproximados, tal fato se agrava quando a régua utilizada está em polegadas que, para nós, está dividida em apenas 8 partes.

Destacamos que os alunos ainda não se acostumaram a representar a unidade de medida após o valor encontrado. Tivemos que toda hora questioná-los quanto qual deveria ser a unidade de medida. Com isso, os grupos G1 e G2, colocaram as unidades nas medidas encontradas para os lados das figuras, entretanto, na hora de preencher a tabela, deixaram de representá-las novamente.

Como previsto, no item “a” apareceram respostas como: “as réguas são diferentes”, “uma é maior”, “uma é em polegadas e a outra em cm”, “uma usa vírgula e a em polegada uma fração”, uma é dividida em 10 e a outra em 8”, e assim por diante.

Quanto ao item “b”, os grupos responderam que o 26,2cm, no nosso caso, é o perímetro da figura. Ao contrário do esperado, os alunos não conseguiram concluir que essa medida significa que o objeto medido equivale a vinte e seis unidades de cm e mais dois décimos de unidade de centímetro.

Na institucionalização, foi debatido sobre o porquê que o contorno de mesmo comprimento possuía perímetros diferentes, fato esse que foi percebido pela diferença das réguas (unidades de medida). Reforçando a dissociação dos quadros das grandezas e numérico, e a importância de representar a unidade de medida.

Atividade 12

Na malha quadriculada abaixo, construam quatro retângulos diferentes com perímetro igual a 20 unidades de comprimento (u). Em seguida, completem a tabela e respondam.

Figuras	Lado1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u^2)
Figura 1				
Figura 2				
Figura 3				
Figura 4				

<u>Análise à priori</u>

A atividade 12, (assim como a atividade 13) foram baseadas nos exercícios da dissertação de mestrado da FACCO (2003, p.93).

O Objetivo desta é construir figuras com um perímetro constante e perceber que elas possuem áreas diferentes. A confusão entre esses dois objetos é um dos maiores obstáculos no ensino/aprendizagem dos conceitos de área.

Para realizar essa atividade os alunos deverão considerar o lado do quadrado da malha como uma unidade de medida (u) e montar uma composição em que a soma dos lados dêem 20u.

A malha quadriculada já faz parte do repertório dos alunos então, provavelmente, eles não terão dificuldades em fazer as figuras. Contudo, para completar a tabela pode ser que se apresentem questionamentos quanto o que é lado 1 e lado 2, devendo o educador intervir para explicitar aos alunos que deve-se considerar dois lados adjacentes.

Sabemos que eles podem, num primeiro momento, tentar produzir figuras que tenham 20u de lado, caso não observe corretamente o enunciado que está pedindo para o perímetro ter 20u. Somando-se a isso, alguns indivíduos podem ter dificuldades em encontrar quatro retângulos que tenham perímetros iguais a 20u, pois pela primeira vez eles deverão produzir figuras com um perímetro pré-determinado.

Obviamente, caso os educandos não tenham compreendido o que é perímetro de uma figura eles precisarão de ajuda para concluir o exercício, cabendo ao professor fazê-los se atentar aos objetos aprendidos nas atividades anteriores.

Outro elemento presente no contexto é a percepção de que os lados opostos do retângulo devem ter medidas iguais, nesse caso, para produzir as figuras, o perímetro deve ser: 2.(lado 1) + 2.(lado 2).

As possíveis soluções são retângulos de lados 1 e 2, respectivamente, iguais a: 1u e 9u; 2u e 8u; 3u e 7u; 4u e 6u; 5u e 5u. Isso considerando a unidade de medida inteira, entretanto podemos apresentar outras soluções não inteiras, como pro exemplo: 1,5u e 8,5u; 2,5u e 7,5u; 0,5u e 9,5u. Contudo, consideramos que essas opções de resposta não irão aparecer, pois os alunos tentam evitar ao máximo os números racionais.

A institucionalização nessa etapa deve ser centrada nas dissociações de área e perímetro. São necessários os debates para os alunos perceberem que o perímetro e área são objetos distintos e que eles não variam, necessariamente, no mesmo sentido.

Outra questão que deve ser observada é quanto ao uso correto das unidades de medidas, o profissional deve esclarecer que a unidade de medida apropriada para área, nesse exercício, é o u^2 e a unidade para perímetro é u. Deve-se também, expor as diferenças entre as unidades adotadas para comprimentos e superfícies.

Cabe destacar que as unidades de medidas são diferentes pela razão que utilizamos objetos distintos para comparar cada objeto matemático – uma superfície para medida de área e um comprimento para perímetro – que são respectivamente de duas e uma dimensões.

Análise à posteriori

Na realização dessa atividade tivemos, novamente, muitos questionamentos quanto ao enunciado com os grupos perguntando o que tinha que fazer. Nesse caso foi pedido para eles relerem e tentarem entender sozinhos e, em seguida eles compreenderam.

No início da atividade foi esclarecido para considerarem os lados adjacentes para preencher a tabela com os lados das figuras. Tal fato foi uma escolha didática para que eles percebam que no retângulo, se sabemos os dois lados adjacentes, podemos calcular a medida da área e perímetro.

Algumas confusões quanto a perímetro e área ainda persistem, principalmente no fato de que eles sempre confundem se tem que contar os “quadradinhos cheios” (unidade de área) ou só a lateral (unidade de comprimento). Mas após serem questionados do que é perímetro eles respondem que é o “contorno total”, descrevendo a soma dos lados. Os objetos matemáticos ainda não estão bem definidos para eles, entretanto quando instigados a relembrar eles respondem corretamente.

Tivemos também algumas dúvidas do que era retângulo e tivemos que explicar para eles poderem seguir com as atividades.

Como previsto o grupo G1, inicialmente, queria fazer retângulos de lados iguais a 20u, o que não cabia na malha, porém quando questionados sobre quanto seria o perímetro dessa figura, eles responderam 80u. Entretanto, quando eles pediram auxílio, foi perguntando a eles o que era perímetro e, quando eles responderam, eles perceberam que os retângulos deveriam ter 20u de perímetro e não de lado.

O grupo G1 conseguiu fazer os quatro retângulos com perímetros iguais a 20u, marcando as medidas corretas dos lados, entretanto eles não estavam colocando as unidades de medidas e, após intervenção, eles prontamente colocaram de forma correta as unidades.

Da mesma forma, o grupo G2, teve dificuldades num primeiro momento em lembrar o que era perímetro, mas após ocorrer uma intervenção eles perceberam a forma correta de proceder.

Constatamos que os dois grupos fizeram duas figuras com lados de mesma medida, caso das figuras três e quatro do G1, e as figuras dois e quatro do G2, como demonstra a Figura 7. Esse fato pode demonstrar que para eles a rotação da figura, faz com que ela se torne diferente.

figuras	Lado1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1	5	5	20 u	25 u²
Figura 2	2	8	20 u	16 u²
Figura 3	6	4	20 u	24 u²
Figura 4	4	6	20 u	25 u²

GRUPO G1

figuras	Lado1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1	5	5	20 u	25 u²
Figura 2	2	8	20 u	16 u²
Figura 3	6	4	20 u	24 u²
Figura 4	8	2	20 u	16 u²

GRUPO G2

Figura 7. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 12

Ambos os grupos perceberam que as figuras com mesmo perímetro não precisam ter, necessariamente, a mesma área.

Destacamos que as institucionalizações dessa atividade ocorreram após o término da atividade 13.

Atividade 13

Na malha quadriculada abaixo, construam quatro retângulos diferentes que possuem a medida de área igual a 24 unidades de medida de área (u²). Em seguida, complete a tabela.

Figuras	Lado1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1				
Figura 2				
Figura 3				
Figura 4				

Análise à priori

A atividade 13 segue a mesma proposta da atividade anterior, mudando apenas que agora eles terão que construir figuras com medida de área determinada.

O objetivo dessa atividade é reforçar a idéia de que os objetos área e perímetro são distintos e, como isso, não existe uma relação de variabilidade constante entre esses. Porém agora se deve construir quatro retângulos diferentes com a medida de área constante e iguais a 24 unidades de área.

Do mesmo modo que na atividade 12, em que com perímetro constante a medida da área variava, nesse exercício com a medida de área constante pode-se perceber que o perímetro se altera, o que reforça essa noção de variação, não necessariamente, no mesmo sentido das duas grandezas.

No exercício os educandos poderão perceber que para se construir retângulos que tenham 24u² de medida de área eles deverão multiplicar os lados adjacentes do retângulo e o produto deverá ser igual a 24u². Como solução podemos encontrar retângulos do tipo: 1u x 24u; 2u x 12u; 3u x 8u; 4u x 6u.

Podemos encontrar também, alunos que façam, por exemplo, um retângulo 2u x 12u e outro como 12u x 2u, considerando que a simples rotação da figura faça com que elas se tornem diferente. Sabemos que nessa faixa etária a apreensão perceptiva é muito “forte”, fazendo com que eles acabem deixando de se atentar em outros elementos.

Assim como na atividade 12, podemos também encontrar resultados não inteiros, como por exemplo: 1,5u x 16u; 0,5u x 48u; etc. Entretanto pensamos que, novamente, esses resultados não serão considerados por eles.

Outro ponto importante que está implícito nesse exercício, mas que o professor deverá explicitá-lo durante os debates e institucionalizações são as relações entre os lados do retângulo e seu perímetro, bem como dois de seus lados adjacentes e sua área. Cabe ao educador instigá-los a descobrir essas relações e construir a fórmula, ou estratégia, de cálculo da medida de área e perímetro de retângulos.

É necessário a apropriação da estratégia de cálculo da medida de área e perímetro, inicialmente, do retângulo para que possamos propor atividades que eles possam realizar os cálculos sem a necessidade de utilizar a malha quadriculada, que por sinal é o objetivo principal, pois a malha é simplesmente uma escolha didática auxiliar na construção dos conceitos.

Além disso, o professor deverá institucionalizar e dissociar as os coneitos de área e perímetro, destacando a questão da não variabilidade necessariamente no mesmo sentido.

Análise à posteriori

Percebemos que os alunos não tiveram dificuldades em resolver a atividade 13, percebendo que dessa vez tinha que considerar o “quadradinho inteiro” (unidade de área) para fazer os retângulos com 24u².

O grupo G1, inicialmente confundiu um pouco o enunciado achando que deveria ser feito retângulos com medida de área e perímetro iguais a 24u², porém ao serem questionados perceberam prontamente que estavam interpretando erroneamente a questão e logo conseguiram fazer do modo correto.

Já o grupo G2 não teve dificuldades em entender o enunciado e, assim como o G1, fez todos os retângulos de forma correta. Entretanto, ao contrário do G1, esse grupo não colocou as unidades de medida num primeiro momento, devendo ocorrer intervenção para lembrá-los a representar as unidades.

Cabe ressaltar que, apesar da figura 3 do grupo G1 está marcando 10u x 2u, o que daria 20u², no desenho dos retângulos aparece 12u x 2u. Acreditamos que ocorreu apenas um engano na hora de passar a resposta para tabela.

Ambos os grupos fizeram, assim como na atividade 12, figuras com os mesmo lados fazendo apenas a rotação, entendendo como figuras diferentes, como destaca a Figura 8. Porém marcaram corretamente a medida dos lados, o perímetro e a medida da área das quatro figuras (exceto a terceira figura do G1).

figuras	Lado 1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1	8	3	22u	24u²
Figura 2	8	3	22u	24u²
Figura 3	10	2	28u	24u²
Figura 4	6	4	20u	24u²

GRUPO G1

figuras	Lado 1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1	6	4	20u	24u²
Figura 2	2	12	28u	24u²
Figura 3	8	3	22u	24u²
Figura 4	12	2	28u	24u²

GRUPO G2

Figura 8. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 13

Para atingir nosso outro objetivo, os grupos foram instigados a descobrir uma maneira de calcular a medida da área e perímetro dos retângulos sem necessidade de utilizar a malha. O G1, no início, fez alguns retângulos e começou a quadriculá-lo com intuito de contar quantos quadradinhos haviam, eles perceberam que em um retângulo de dimensões 3u x 8u, por exemplo, pode ser considerado como oito colunas de três quadradinhos, o que os levou a concluir que podemos calcular a medida da área do retângulo considerando o produto de seus lados adjacentes.

Já para o perímetro, eles perceberam que os lados opostos do retângulo possuem o mesmo comprimento, e que devemos considerar duas vezes cada lado.

O grupo G2 também chegou a conclusão de como calcular a medida da área do retângulo e do perímetro. Entretanto observamos que os dois grupos ainda confundem os dois objetos. Tal fato ficou evidente nos questionamentos de como calcular as suas medidas, que em um momento eles davam as respostas corretas e logo em seguida se confundiam novamente.

Ao final desta atividade foi institucionalizado a dissociação entre área e perímetro fazendo com que eles percebessem, observando as atividades 12 e 13, que esses objetos não variam necessariamente no mesmo sentido.

Destacamos novamente a importância de se utilizar as unidades de medida para representar os resultados obtidos, explicitando que apenas dessa forma poderemos saber se eles utilizaram o lado do quadrado da malha ou o quadrado inteiro.

As estratégias de cálculo da medida de área e perímetro também foram debatidos e institucionalizados, fazendo-os perceberem que para medida da área só consideramos o produto de dois lados adjacentes. Já para o perímetro devemos somar as medidas dos quatro lados.

Atividade 14

Sem a malha quadriculada, usando só a régua e o esquadro construam:

a) Dois retângulos com perímetro igual a 16cm. Em seguida, calcule a medida da área de cada figura.
b) Dois retângulos com medida de área igual a 12cm². Em seguida, calcule o perímetro de cada figura.

Análise à priori

O objetivo central dessa atividade é perceber se os alunos estão construindo os conceitos corretos em relação aos objetos matemáticos estudados e se estão conseguindo mobilizá-los, ou seja, se esses objetos realmente se tornaram ferramentas para resolução de problemas.

Em outras palavras, pretendemos que a técnica de calculo de perímetro e da medida da área do retângulo, sejam utilizadas para resolução de uma situação em que a malha quadriculada não esteja presente.

Acreditamos que, por ser a primeira vez que eles deverão calcular sem a malha, algumas dúvidas surgirão, cabendo a mediação do profissional para promover a compreensão das estratégias necessárias para concluir a atividade.

Poderão, também, aparecer dúvidas de como construir os retângulos usando os instrumentos de medida (régua e esquadro de 45°) e, além disso, esses retângulos possuirão medida de área e perímetro determinados. Acreditamos que possa haver necessidade do auxílio do educador para orientar alguns dos indivíduos quanto ao manuseio desses instrumentos.

Entretanto, caso as dificuldades com os instrumentos não os prejudiquem e eles consigam formar as figuras corretamente, pensamos que os alunos conseguiram responder aos itens “a” e “b”. Obviamente que para isso, eles devem ter compreendido as técnicas e estratégias para efetuar os cálculos de área e perímetro, apresentados nas atividades anteriores.

Alguns alunos poderão ainda, como estratégia, quadricular a superfície dos retângulos para deixá-los com o mesmo aspecto das atividades com a malha. Nesse caso o educador pode intervir para instigá-los a construir os quadriculados de 1cm, já que as medidas pré-determinadas dos exercícios possuem unidade de medida em cm. Porém, deve-se incentivar ao máximo a construção de outros métodos para resolução da situação.

A familiarização com os objetos estudados é essencial para percepção da real compreensão dos conceitos em jogo. O educador deve aproveitar essa etapa para intervir e sanar algumas concepções errôneas que podem estar aparecendo, além de observar como estão sendo mobilizados os objetos estudados/aprendidos.

Análise à posteriori

Inicialmente tivemos que expor, na lousa, como eles fariam para fazer os retângulos utilizando o esquadro de 45° e a régua de 30cm, pois nunca haviam tido contato com esse instrumento (esquadro).

Após isso, percebemos que alguns grupos não tiveram dificuldades no manuseio dos instrumentos, entretanto outros, como por exemplo, o G2, não utilizaram o esquadro para fazer as figuras.

Os grupos G1 e G2, num primeiro momento tiveram alguma dificuldade em entender o enunciado e começaram a fazer retângulos com 16cm de lado. Nessa hora intervimos questionando-os sobre o que era perímetro e, ambos os grupos, disseram que o perímetro é o contorno, demonstrando que eles ainda confundem os quadros geométricos e numéricos. Contudo, após a intervenção, eles mesmos começam a chegar nas respostas corretas e, com isso, conseguiram produzir as figuras corretamente (Figura 9).

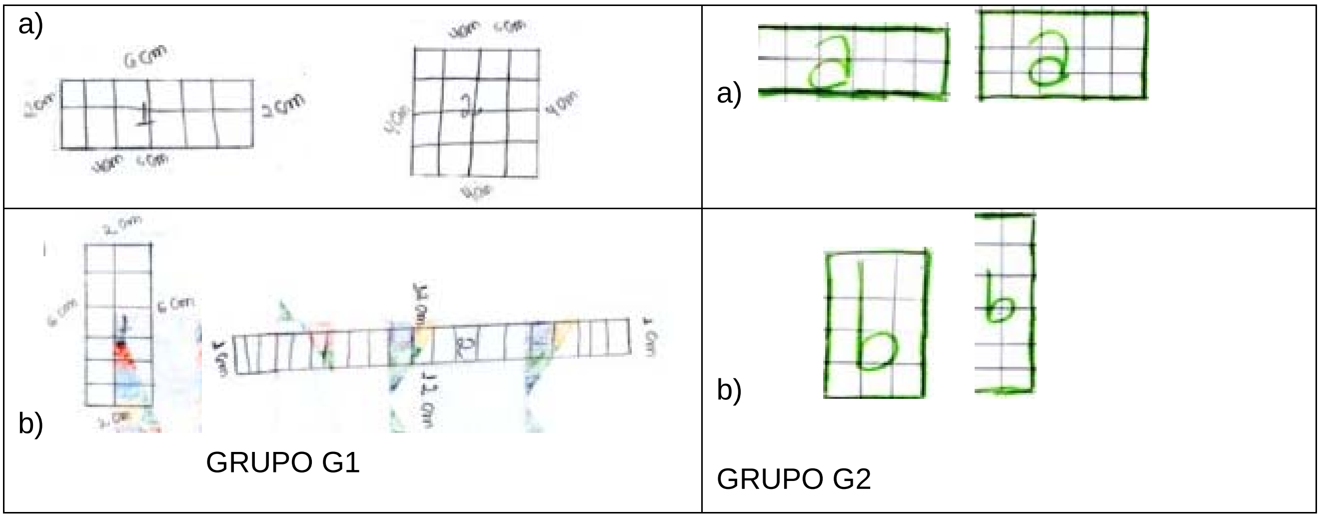


Figura 9. Protocolo dos grupos G1 e G2 – Atividade 14

Como previsto nas análises o grupo G2 fez uma malha quadriculada para poder fazer os retângulos e, mesmo antes de pedir, um dos alunos comentou que eles fizeram os quadradinhos com 1cm de lado. Provavelmente esse grupo não conseguiu compreender como proceder para se calcular sem o uso da malha, ou preferem utilizar essa estratégia por considerá-las mais fácil.

Já o grupo G1 fez os retângulos e, em seguida, quadricularam por dentro deles para conseguir visualizar melhor os cálculos. Contudo percebemos nas conversas entre eles que eles tinham noção de como calcular a área destas figuras. Ao fazer o retângulo de 24cm², respondendo o item “b”, um dos alunos do grupo fez um retângulo com dimensões 1cm x 11cm, considerando que a área havia dado 12cm², porém o outro aluno contestou explicando que estava incorreto, pois deveria ser 12cm x 1cm, para dar o 12cm².

Nesse mesmo retângulo (12cm x 1cm) observamos que o grupo G1 fez ele com as medidas corretas mas na hora de fazer o quadriculado para calcular a medida da área eles “dividiram” em vinte partes, e não em doze.

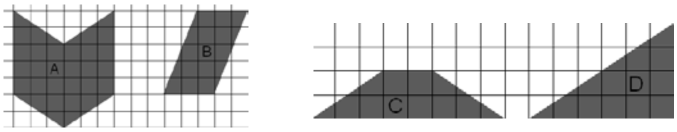
Os dois grupos conseguiram fazer todos os retângulos, nos itens “a” e “b”, e calcularam corretamente as medidas das áreas e perímetros de cada uma. Notamos que o grupo G2 não apresentou a unidade de medida em nenhuma das respostas, caso diferente do grupo G1 que está representando sempre com a unidade de medida, porém eles erraram a representação da medida da área do item “a”, representando como cm, e não cm².

A diferenciação entre área e perímetro é outro aspecto que causa enorme confusão. A todo o momento que os elementos aparecem simultaneamente eles ficam confusos de como proceder, mas sempre quando questionados conseguem resolver a situação.

Por ser uma atividade de familiarização, a institucionalizações foram uma retomada do que havia sido discutido nas atividades 12 e 13, destacando apenas as estratégias encontradas para calcular as medidas das áreas e perímetros de retângulos, e reforçando que não é necessário quadricular as figuras para encontrar as medidas desejadas.

Atividade 15

Transformem as figuras abaixo em retângulos e, em seguida, calcule a medida de sua área.



<u>Análise à priori</u>

Essa atividade pretende desenvolver mais explicitamente as apreensões operatórias na figura, fazendo as modificações “meorológicas”. Os trabalhos de reconfiguração de uma figura deverão ser institucionalizados ao final dessa, pois essa técnica é essencial para avançar nos estudos relacionados à área.

As figuras apresentadas, por motivos didáticas, nesse primeiro momento serão mais usuais e, com o avanço apresentaremos outras com maior grau de complexidade.

Essas figuras deverão ser decompostas e compostas para serem formados retângulos de mesma área da figura de partida. Os alunos poderão apresentar dificuldade, num primeiro momento, em realizar esses exercícios, porém eles já fizeram algumas atividades de reconfiguração e esperamos que tal fato amenizem esses efeitos. E, com o devido encaminhamento da atividade, o educador poderá fazer com que os alunos possuam uma ferramenta de grande utilidade na matemática.

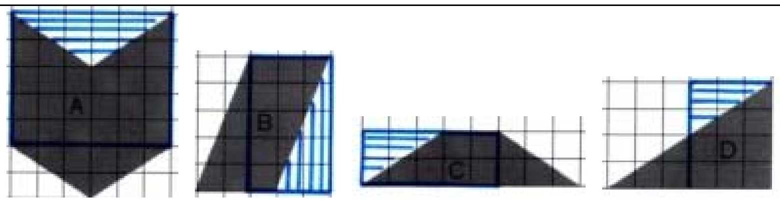


Figura 10. Possível solução – Atividade 15

A Figura 10 apresenta uma das possíveis soluções para o exercício, cujas medidas das áreas são: figura A ($30u^2$); figura B ($15u^2$); figura C ($10u^2$); figura D ($12u^2$).

As figuras foram cuidadosamente escolhidas não criar um bloqueio nesse primeiro momento. As áreas destas foram elaboradas de tal forma que, ao se tornarem retângulos, recubram perfeitamente os quadradinhos da malha.

A escolha de se formar retângulos se deve ao fato de ser a figura que eles já conhecem como calcular as medidas de área e perímetro, além de ser essencial para, futuramente, construir as fórmulas de outras figuras usuais.

A utilização da malha novamente é uma escolha didática para facilitar o processo de visualização das possíveis reconfigurações. Contudo nesse caso os alunos perceberam que em algumas figuras as linhas “inclinadas” não dividem o quadriculado da malha ao meio e eles não poderão simplesmente considerar duas metades como uma unidade inteira, obrigando-os a produzir nova estratégia, no caso as reconfigurações.

Entretanto acreditamos que, mesmo com essa impossibilidade, alguns alunos podem contar os quadradinhos como se estivessem sido cortados ao meio para conseguir solucionar o problema, ou ainda, que eles tentem contar os pedaços como uma unidade inteira.

Os aprendizes que ainda não conseguiram deixar de apenas se atentar as formas das figuras, isto é, não percebem os elementos geométricos presentes, terão dificuldades em organizar o processo de reconfiguração, pois poderão acreditar que se modificarem sua forma, sua área também irá se alterar.

Outra estratégia possível e desejável é a percepção que podemos formar um retângulo auxiliar em que a linha “inclinada” da figura se torne sua diagonal e, em seguida, podemos simplesmente calcular a medida da área desse retângulo e dividi-la por dois.

O desenvolvimento dessa técnica possui um motivo didático pela importância de se desenvolver a habilidade de compensação para calcular área de figuras planas, pois por mais complexa que seja a figura, em especial os polígonos, podemos sempre utilizar esses métodos para transformá-las em figuras mais usuais.

Ao final dessa atividade o professor deve assegurar que a decomposição e composição de polígonos, bem como essa estratégia de construir um retângulo auxiliar, em que uma linha qualquer da figura será sua diagonal, são ferramentas para os alunos prosseguirem nas próximas atividades.

Cabe lembrar e instigá-los a perceber, ou relembrar, que essas modificações nas figuras não alteram sua área, como estudado nas atividades iniciais.

Análise à posteriori

No início da atividade os alunos tiveram um pouco de dificuldade em entender o enunciado, chegando a fazer um retângulo em volta da figura, pois o enunciado pedia para transformas as figuras em retângulos. Com isso, precisou ocorrer esclarecimentos para continuidade do exercício.

Como previsto nas análises, alguns alunos tentar contar o quadradinho que não estavam preenchidos completamente como uma unidade de medida, ou ainda, pegavam duas partes da unidade, que não se “completavam”, e mesmo assim queriam considerá-la como uma unidade inteira.

Percebemos que houve muita dificuldade em conseguir fazer as modificações nas figuras para transformá-las em retângulos e, muitas vezes, os alunos ficavam inquietos e questionavam que não era possível. Nessa hora era apenas confirmada a possibilidade de realizar a tarefa e incentivado a eles procurarem a solução.

Observamos que o grupo G2, conseguiu rapidamente encontrar a solução para a atividade, calculando corretamente a área das figuras. Já o grupo G1 teve muita dificuldade em formar os retângulos, pois, eles foram pegando os pedaços e encaixando um por um, mas também conseguiram calcular corretamente a área das figuras, como podemos observar na Figura 11.

A representação da unidade de medida já está sendo incorporada por eles, pois nessa atividade os dois grupos apresentaram corretamente.

Ainda em relação a medida da área das figuras, um dos integrantes do G1, perguntou, depois de transformada as figuras em retângulos, como calcular a área das partes que não estavam completamente preenchidas e o outro aluno comentou que, após a modificação, os pedaços formaram um inteiro.

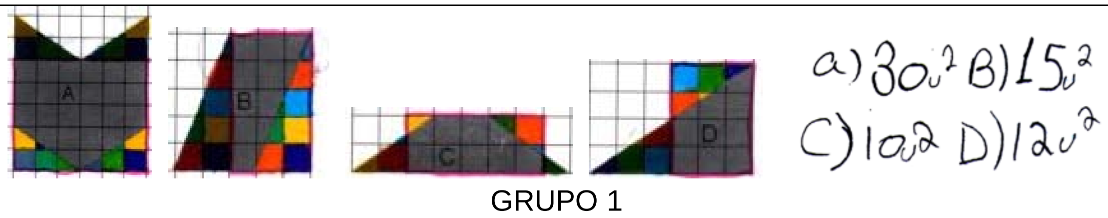


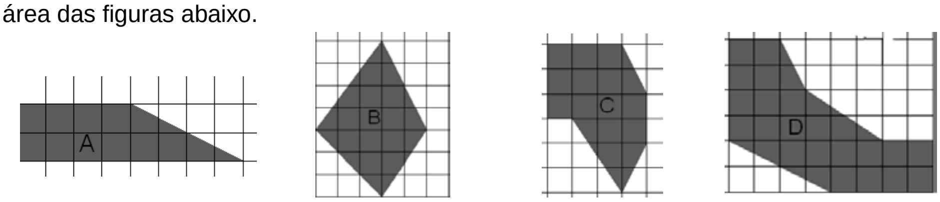
Figura 11. Protocolo do grupo G1 – Atividade 15

Observamos que não apareceram nas respostas, as estratégias mencionadas na análise a priori, de se consideram um dos lados da figura como diagonal de um retângulo auxiliar. Porém essa técnica foi institucionalizada por ser uma excelente estratégia para cálculo de área de figuras planas, em especial quando a malha quadriculada não estiver presente.

Nos debates foram ressaltadas as questões que essa decomposição e composição não alteram a área das figuras, pois estamos apenas deslocando uma parte para outro ponto.

Atividade 16

Calcule a área das figuras abaixo.



<u>Análise à priori</u>

Essa atividade segue os mesmo princípios do exercício anterior, sendo assim é uma atividade de familiarização que possui como característica principal a observação do desenvolvimento das técnicas e estratégias estudadas.

O professor deve, então, acompanhar atentamente como os alunos irão mobilizar os novos conhecimentos e se esses realmente se tornaram ferramentas, além de poder esclarecer alguns equívocos que podem estar acontecendo ainda.

As figuras apresentadas nesse momento apresentam um grau de dificuldade superior por não se tratar de figuras usuais e, com isso, pode ser mais difícil de visualizar as possíveis transformações, mas, novamente, o uso da malha poderá minimizar esses efeitos.

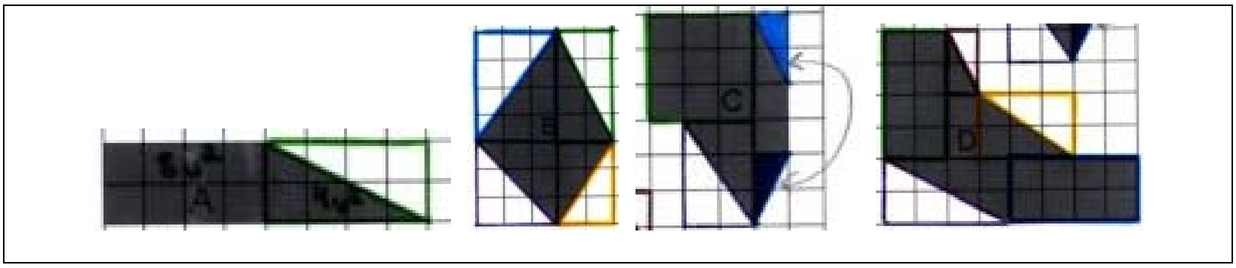


Figura 12. Possível solução – Atividade 16

A Figura 12 apresenta uma das possíveis soluções para atividade, cujas medidas das áreas das figuras são: figura A ($12u^2$); figura B ($17,5u^2$); figura C ($16u^2$); figura D ($26u^2$). Escolhemos apresentar uma figura (figura B) com medida de área não inteira e, esse fato, pode fazer com que os alunos tenham mais dificuldades em acertar, pois geralmente eles tendem a buscar resultados inteiros.

O sucesso, ou não, dessa atividade depende inteiramente das institucionalizações e discussões anteriores, pois caso a estratégia/técnica apresentadas na atividade 15, não terem sido construídas adequadamente pelos educandos, provavelmente as dificuldades permanecerão.

A institucionalização deve ser centrada nas técnicas e estratégias de decomposição e composição e, novamente, reforçada a idéia que podemos transformar uma figura em outra para facilitar o cálculo.

<u>Análise à posteriori</u>

Nessa atividade os alunos não tiveram dificuldades em compreender o enunciado, porém, como previsto, as formas das figuras complicaram os processos de decomposição e composição dos grupos.

Tanto o grupo G1, quanto o G2, conseguiram encontrar as respostas corretas para as figuras A,C e D, entretanto não conseguiram achar a medida da área da figura B. Provavelmente, um dos fatores que interferiram, foi que a medida não dava um valor inteiro ($17,5u^2$). Percebemos que suas respostas chegavam bem próximas, como: $17u^2$ e $18u^2$.

Observamos que pela quantidade de modificações exigidas para calcular a área das figuras os processos de decomposição e composição se tornam mais complexos e, com isso, surgem mais erros. Ambos os grupos apresentaram respostas incorretas num primeiro momento e foram instigados a procurar a solução correta.

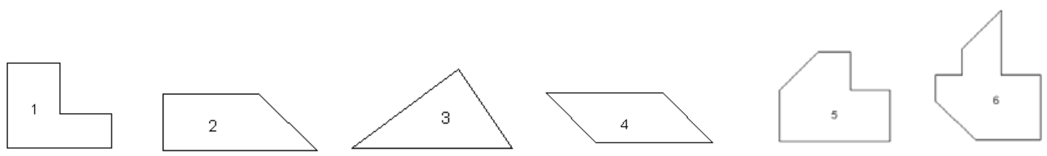
Destacamos que, novamente, as unidades de medida foram representadas corretamente. Visivelmente, quando não aparecem os objetos matemáticos área e perímetro, numa mesma situação, os alunos possuem maior facilidade em representar a unidade de medida adequada.

As figuras A e C, que necessitam de menos modificações foram a que eles conseguiram encontrar as respostas mais rapidamente. Acrescentamos que, mesmo depois de institucionalizado, a técnica de considerar um retângulo auxiliar, em que um dos lados da figura seja sua diagonal, não foi ferramenta na resolução dessa atividade. Tal estratégia faria com que eles encontrassem a solução da figura B.

Com essa constatação consideramos como necessário uma nova institucionalização dessa estratégia e a realizamos no final da atividade.

Atividade 17

Utilizando a régua, calcule a medida da área e o perímetro das figuras abaixo.



<u>Análise à priori</u>

A atividade 17 pretende propor uma complexificação de todos os elementos estudados, pois para realização desse exercício iremos apresentar figuras sem medida e algumas com formas não usuais.

Para resolução da situação os alunos deverão medir as figuras, com uma régua de 30cm, e reconfigurá-las de modo que se tornem retângulos, pois são as figuras que eles sabem calcular a medida da área sem a malha. Para tal deverão mobilizar as técnicas e estratégias aprendidas até então, além de realizarem cálculos com alguns números decimais.

Acreditamos que os índices de acertos irão diminuir de acordo com a complexidade da figura, pois, em algumas delas, serão necessárias mais manipulações para deixá-las com aspectos de figuras usuais.

Pensamos que alguns alunos possam quadricular as figuras para poderem achar a medida da área. Nesse caso eles serão instigados a tentarem fazer os cálculos sem necessidade de utilizar esse recurso. Entretanto, para nós, essa estratégia ainda é valida.

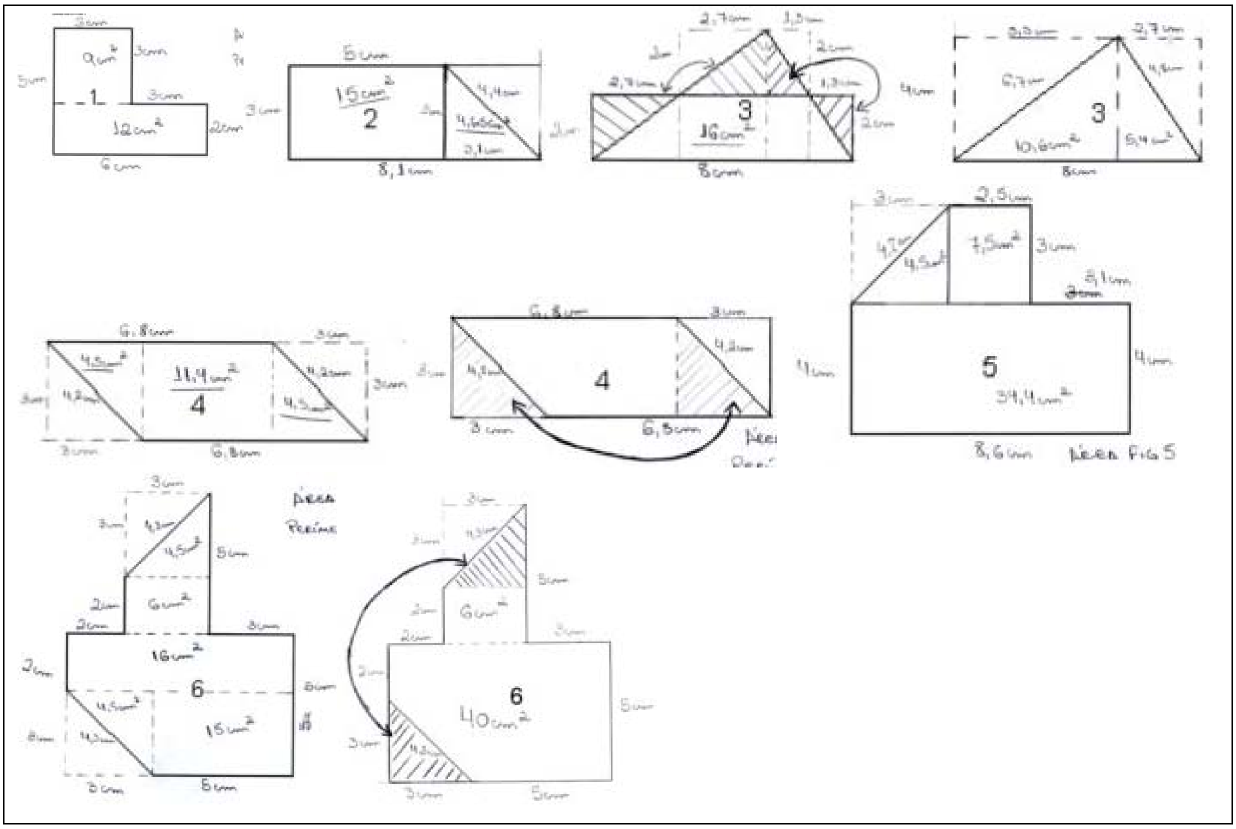


Figura 13. Possíveis soluções – Atividade 17

A Figura 13 apresenta algumas possíveis soluções da atividade 17, cujas medidas da área e perímetro são: 21cm² e 22cm para primeira figura; 19,65cm² e 20,5cm na segunda figura; 16cm² e 19,5cm na terceira figura; 20,4cm² e 22cm na quarta figura; 46,4cm² e 29,4cm na quinta figura; 46cm² e 32,6cm na sexta figura.

Entendemos que na primeira figura eles conseguirão perceber que podemos prolongar um dos lados para transformá-la em dois retângulos. Já para a segunda e quinta figuras, acreditamos que os alunos que não compreenderam como utilizar a técnica de considerar a diagonal do retângulo como elemento que o divide em duas partes de mesma área, terão dificuldades em acertar o cálculo da medida da área.

Quanto a terceira, quarta e sexta figuras, eles poderão utilizar tanto a técnica mencionada acima, quanto a reconfiguração, decompondo-a e compondo-a de tal forma que nas figuras três e quatro vire um retângulo e na sexta figura se torne dois retângulos, como apresenta a Figura 13.

Cabe ressaltar que, para a segunda figura, também poderemos utilizar a reconfiguração, mas será mais difícil de percebê-las, pois teremos que dividir parte da figura (o triângulo) ao meio de tal forma que se consiga compor outro retângulo.

Podemos encontrar alunos que, ao criarem linhas auxiliares nos desenhos, poderão considerá-las para o cálculo do perímetro, o que, obviamente, acarretará em resposta equivocadas.

Essa atividade, por exigir a reconfiguração da figura, pode causar imensas dificuldades em alunos que não desenvolveram bem as técnicas de decomposição e composição, já que sem esse recurso será extremamente difícil eles conseguirem encontrar as medidas das áreas.

Outra questão é que, nesse caso, eles deverão fazer as reconfigurações sem ter a malha quadricula como suporte, o que cria um grau de dificuldade mais elevado.

Quanto a medir as figuras, pensamos que eles não terão dificuldades, pois já realizaram tal procedimento na atividade 11. Consequentemente o cálculo do perímetro deverá ter um índice maior de acertos pelos estudantes.

Ao final da atividade serão discutidos os objetos matemáticos estudados, bem como apresentar as possíveis soluções realizadas pela turma.

Análise à posteriori

Percebemos que alguns alunos tentaram multiplicar um lado da figura por outro para encontrar a área da figura um, fazendo referência a área do retângulo. Nesse caso tivemos que intervir e explicar que esse procedimento só era possível, até então, para se calcular a medida da área do retângulo.

Outro aspecto nessa atividade foi às confusões, do grupo G2, entre quando somar ou multiplicar para encontrar a medida da área e perímetro dos indivíduos que não construíram corretamente a "fórmula" para o cálculo da área do retângulo.

Como previsto o números de acertos diminuiu bastante, pois se apresentaram inúmeras variáveis ao mesmo tempo e eles não tinham mais o auxílio da malha quadriculada. Entretanto o grupo G2, para fazer os cálculos, quadriculou as figuras com espaços de 1cm e, quando foram instigados para calcular sem esse recurso eles disseram que não conseguiriam.

Percebemos então que devemos nos atentar ao excesso de uso da malha, pois ela pode acabar criando uma dependência. E, apesar de que para faixa etária é um recurso válido, essa estratégia se torna um complicador a medida que os lados não são números inteiros e, nesse caso, devemos considerar apenas uma fração dos quadradinhos criados.

Além disso, o uso indiscriminado da malha faz com que eles comecem a sempre quererem expressar nas repostas as unidades de medida da malha, u e u^2, mesmo quando estão usando os centímetros.

Percebemos que, apesar desse grupo ter conseguido resolver as atividades anteriores, eles não conseguiram mobilizar as técnicas de reconfiguração para transformar as figuras em retângulos e, ainda, demonstraram não ter incorporado como calcular a área do retângulo. Tal fato prejudicou bastante o desempenho do grupo.

Diferentemente do G2, o grupo G1 demonstrou ter construído todas as ferramentas necessárias para calcular a área e o perímetro das figuras. Eles mobilizaram tudo o que haviam aprendido e realizaram a atividade de maneira correta, apesar de alguns equívocos no momento de somar o perímetro ou marcar a medida da área.

Contudo destacamos que no dialogo deles pudemos observar que estavam pensando corretamente. Completamos ainda que esses indivíduos conseguiram perceber que a área da figura poderia ser calculada pela soma das áreas intermediárias.

O grupo G1 reconfigurou as figuras, transformando-as em retângulos e calcularam suas áreas e perímetros, demonstrando ter conseguido se desvincular da malha, mesmo que inicialmente eles perguntarem se poderiam quadricular as figuras. Entretanto nós sugerimos para eles tentarem fazer sem esse recurso.

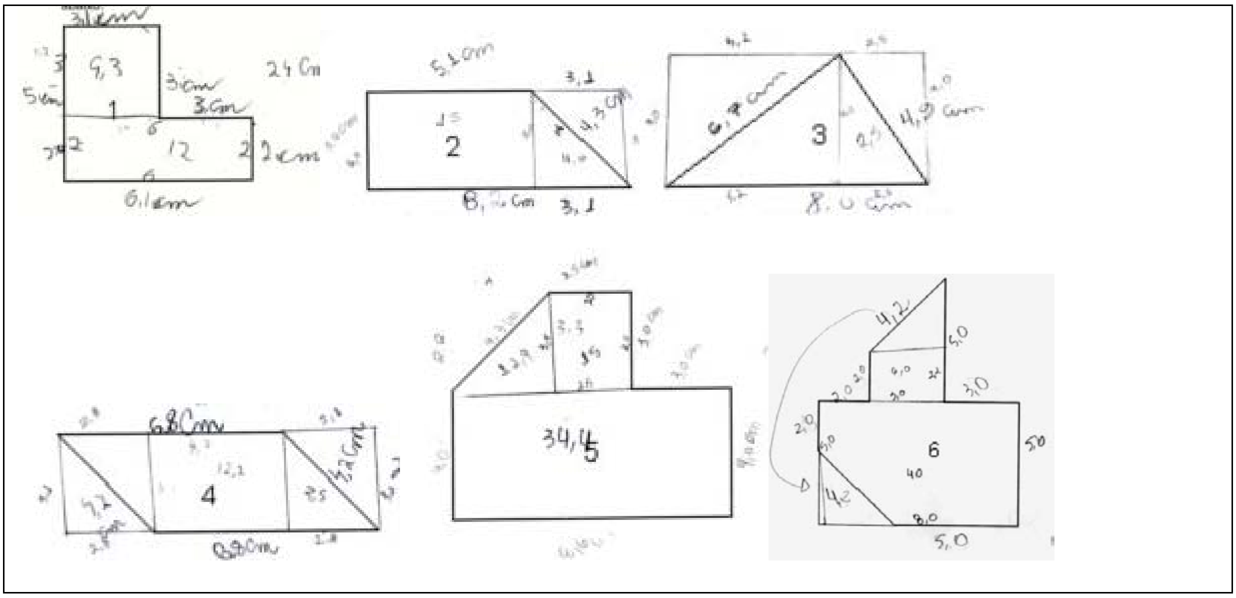


Figura 14. Protocolo do grupo G1 – Atividade 17

A Figura 14 demonstra as técnicas e estratégias utilizadas pelos integrantes do grupo G1, que encontraram como medida de área e perímetro, respectivamente: 21cm² e 24cm para primeira figura; 19,6cm² e 20,6cm na segunda figura; 15,5cm² e 19,6cm na terceira figura; 15,7cm² e 22,2cm na quarta figura; 62,3cm² e 29,4cm na quinta figura; 46cm² e 32,5cm na sexta figura.

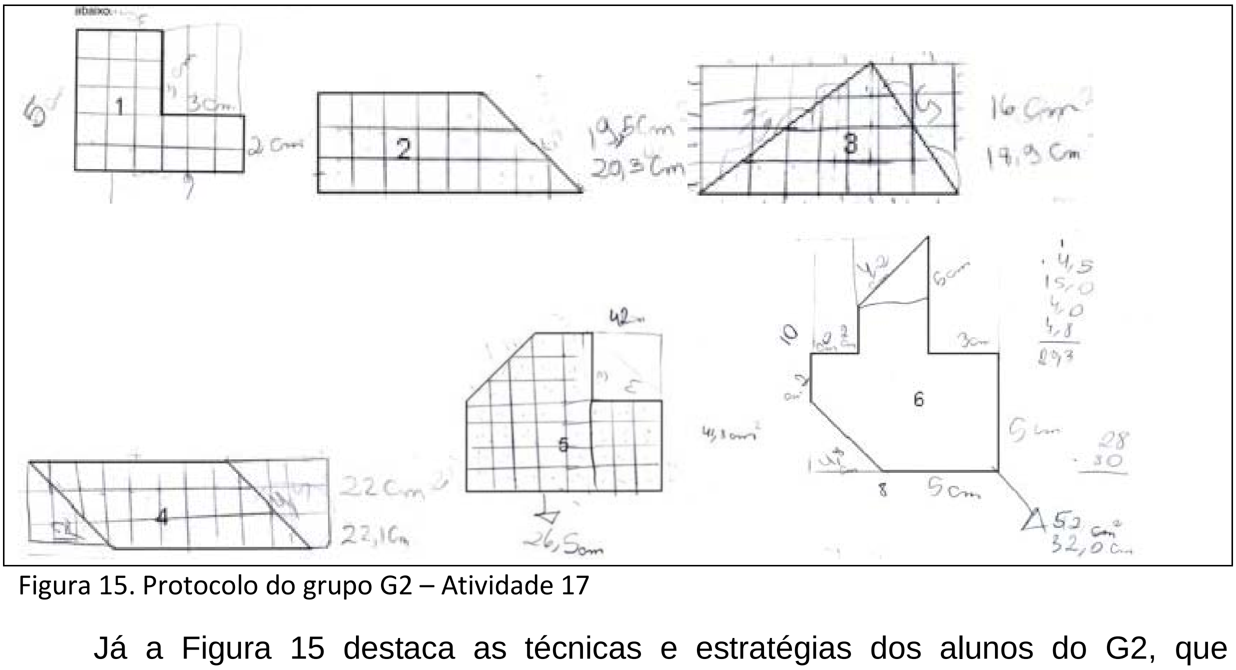


Figura 15. Protocolo do grupo G2 – Atividade 17

Já a Figura 15 destaca as técnicas e estratégias dos alunos do G2, que encontraram, para medida de área e perímetro, os seguintes resultados: 21cm² e 22cm para primeira figura; 19,5cm² e 20,3cm para segunda figura; 16cm² e 18,9cm para terceira figura; 22cm² e 22,1cm na quarta figura; 41,8cm² e 26,5cm para quinta figura; 52cm² e 32cm para sexta figura.

Ainda quanto ao grupo G2, percebemos que houve muita confusão nos cálculos, pois inicialmente elas mediram os lados e anotaram os valores encontrados e, em seguida, para quadricular as figuras, elas apagaram tudo o que haviam medido e tiveram dificuldades para determinar o perímetro.

Ambos os grupos não representaram as unidades de medida ao final da representação, devendo haver intervenção para relembrá-los de marcar. Entretanto o grupo G1, que representou corretamente a unidade de medida para perímetro, não o fez para a medida da área.

Cabe ressaltar que, apesar desse fato, na fala dos alunos desse grupo percebemos que eles compreenderam quais unidades devem ser utilizadas no para representar a medida da área e perímetro.

Constatamos ainda, que o grupo G1 conseguiu dissociar área de perímetro, mesmo que algumas vezes eles se confundissem. Entretanto o G2 teve mais dificuldades com esses dois objetos, principalmente quando quadricularam as figuras, o que prejudicou ainda mais as diferenciações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve o objetivo pesquisar os fenômenos que interferem no ensino e aprendizagem dos conceitos relacionados a área de figuras planas, bem como estudar suas relações com o conceito de perímetro.

Para tal, nos apoiamos nos trabalhos de Facco (2003), e outros pesquisadores, que apresentam as pesquisas realizadas por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Baltar (1996), onde consideram estudo da área como uma grandeza autônoma, onde podemos compará-las apenas decidindo se pertence a uma mesma classe de equivalência.

Outra noção apresentada é a importância de promover as devidas relações e dissociações entre os quadros das grandezas, geométrico e numérico, bem como as diferenças dimensionais dos objetos. Pois a confusão entre os objetos matemáticos que pertencem a cada quadro pode fazer com que os educandos construam de forma errônea os conceitos em jogo.

Nesse contexto elaboramos nossa questão de pesquisa: Uma sequência didática em que, ao se iniciar a construção do conceito de área, aborde-a como uma grandeza autônoma e, numa segunda fase, faça as devidas dissociações e articulações entre os quadros da grandeza, geométrico e numérico, pode minimizar as dificuldades freqüentemente apontadas sobre o tema?

Para obter dados que respondesse a esta questão elaboramos um teste-piloto, aplicado a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, que contemplasse as principais variáveis analisadas, partindo das seguintes hipóteses:

- Construir uma sequência de aprendizagem em que as comparações de superfícies de figuras planas possam ser realizadas de forma autônoma, sem a necessidade de expressá-la numericamente, pode ajudar o educando a dissociar área de superfície e perímetro de contorno.
- As diferenciações e articulações, realizadas nos momentos corretos, entre os quadros das grandezas, geométrico e numérico pode fazer avançar significativamente a compreensão em relação os objetos matemáticos envolvidos no conceito de área.

Percebemos que no início da experimentação os alunos ficaram eufóricos com a novidade, em especial com o uso do tangram. Porém rapidamente eles começaram a se distrair e querer brincar.

Além disso, ao se trabalhar com o tangram devem-se atentar as inúmeras variáveis que estão presentes nas próprias peças, como por exemplo, figuras com formas diferentes e áreas iguais, além de se poder utilizar uma peça para se formar outra. Para os estudantes, pode ser complicado lidar com tantos elementos em um único exercício.

O professor deve, ainda, controlar o uso excessivo de materiais didáticos “facilitadores”, como por exemplo, a malha quadriculada. Percebemos que esse fato pode criar certa dependência e, quando eles têm que solucionar uma situação onde a malha não esteja presente, os mesmo tendem a quadricular as figuras para tentarem reproduzir o mesmo modelo.

Consequentemente, os alunos, ao representar as unidades de medida de figuras sem a malha, acabam utilizando a mesma representação das utilizadas na malha quadriculada. Em outras palavras, quando, por exemplo, o perímetro de uma figura for igual a 12cm, eles consideram com 12u, ou u^2 se for medida da área.

Por isso, consideramos como fundamental propiciar um maior número de atividades de decomposição e composição sem necessidade de materiais auxiliares, pois, obviamente, na maioria das vezes as figuras não serão apresentadas com algum tipo de suporte.

Outro fato que interferiu para um melhor aproveitamento dos estudos, foi que eles não estavam acostumados em trabalhar em grupo e, com isso, a todo o momento havia discussões e conflitos entre os próprios integrantes. Outra conseqüência desse fato é que, para eles, o trabalho em grupo significava em um integrante fazer as atividades enquanto os outros conversavam. Eles não entendem que a idéia central nesse tipo de atividade é a cooperação e discussão entre os membros.

Acreditamos que, apesar da sequência não ter conseguido eliminar completamente algumas confusões entre os objetos matemáticos envolvidos, as atividades promoveram um grande avanço nas concepções em relação aos conceitos estudados.

Cabe ressaltar que as principais dificuldade encontradas pelos alunos foram em relação a dissociação e articulação entre os objetos presentes, fato que reforça a necessidade de se promover um ensino que considere essas especificidades.

À medida que as atividades vão ficando mais complexas e com maior número de variáveis, eles tendem a confundir, ou até mesmo deixar de representar, os objetos matemáticos presentes nas figuras. Devendo então, propiciar muitos exercícios que os diferencie.

Entretanto os grupos G1 e G2 conseguiram realizar praticamente todas as atividades, mesmo se confundindo em alguns momentos. Em especial, para o G1, o avanço foi considerável, pois eles se apropriaram das estratégias e técnicas necessárias para realizar a atividade 17, que exigiam a mobilização de todos os elementos construídos até então.

Essas análises nos fazem acreditar como válidas nossas hipóteses, pois é considerando as relações e diferenciações dos diferentes objetos em jogo que podemos propiciar um aprendizado significativo.

Porém, para um melhor aproveitamento da sequência, queremos aqui propor algumas alterações, como por exemplo:

- Nas atividades 12 e 13 deveriam aparecer questões que os obrigassem a justificar a atividade. Essas justificativas são importantes, pois criam a necessidade de refletir sobre o que foi feito;
- Na atividade 14, é importante apresentar mais exercícios para eles se familiarizarem melhor com o cálculo de área de retângulos, ou figurais que facilmente podem ser decomposta em retângulos. Percebemos que a falta desses exercícios na sequência prejudicou o desenvolvimento da atividade 17;
- Apresentar mais atividades de decomposição e composição de figuras sem utilizar a malhar. É essencial que eles sejam capazes de reconfigurar a figura sem nenhum suporte.

Pretendemos ainda propor uma reflexão sobre a complexidade de se ensinar/aprender os conceitos relacionados a área e perímetros de figuras planas, pois é um tarefa que exigem inúmeras competências e habilidades, principalmente pela quantidade de variáveis envolvidas nesse processo. Destacamos aqui algumas dessas variáveis: objetos unidimensionais e bidimensionais, e suas diferentes representações; dissociação de área e perímetro; dissociação do perímetro e contorno (quadros geométrico e numérico); decomposição e composição das figuras com o sem o uso da malha quadriculada; diferença para cálculo da medida da área e de perímetro; dissociação dos quadros das grandezas, geométrico e numérico; entre outras.

Por fim, acrescentamos que, para a construção do conceito de área é imprescindível que os alunos consigam se apropriar das técnicas e estratégias de decomposição e composição, entretanto, apesar de muito se falar em tal importância, não encontramos referência que indicam como desenvolver esta habilidade. Por isso, acreditamos haver necessidade de produzir estudos que procurem levantar como tal processo de desenvolve e como controlá-los.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A. ***Fundamentos da didática da matemática***. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 218 p.

ALMOULOUD, S.A.; MELLO, E.G.S. ***Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos***. Anais da Reunião da ANPED – Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação, Caxambu, 2000, Publicação em CDRom.

BELLEMAIN, P. M. B. & LIMA. P, F., **Análises prévias à concepção de uma engenharia de formação continuada para professores de matemática do ensino fundamental**. Anais da Reunião Anual da ANPED – Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação, Caxambu, 2000, Publicação em CDRom.

CHIUMMO, A. ***O conceito de áreas de figuras planas:*** Capacitação para professores do ensino fundamental. Mestrado em ensino da matemática. Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). São Paulo. 1998.

DUARTE, J. H. **Análise de situações didáticas para construção do conceito de área como grandeza no ensino fundamental**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

FACCO, S.R. ***Conceito de área:*** Uma proposta de ensino-aprendizagem. Mestrado em educação matemática. Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). São Paulo. 2003.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org). ***Aprendizagem em matemática:*** Registros de Reapresentação Semiótica. 4. ed. Campinas: Ed. Papirus. 2008. cap. 1.

BRSAIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais.*** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF. 1998. Matemática. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.

SECCO, A. ***Conceito das áreas:*** Da composição e decomposição de figuras até as fórmulas. Mestrado profissional em ensino de matemática. Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP). São Paulo. 2007.

ANEXO A – A SEQUÊNCIA

Parte - 1

Atividade 1

Vocês estão recebendo um jogo de TANGRAM, utilize-o para fazer duas figuras diferentes. Não precisa utilizar todas as peças.

a) Com um lápis de cor contorne as duas figuras e, em seguida, pinte a região interna com uma cor diferente.
b) Qual a diferença entre contorno e a região interna da figura?

____

____

Atividade 2

Escolham três peças do tangram, façam duas figuras diferentes e pinte as regiões internas dessas figuras. Em seguida, respondam o que se pede.

a) Observando a região interna das duas figuras, o que vocês observam de comum? Justifiquem suas respostas.

____

____

b) Se vocês fizerem outras figuras com essas mesmas três peças, todas as regiões internas das figuras continuaram com essa mesma característica em comum? Justifiquem suas respostas.

____

____

Atividade 3

Vocês estão recebendo uma folha com várias figuras. Com auxílio do tangram, respondam o que se pede.

a) Quais figuras possuem a mesma forma?

____

____

b) Quais figuras possuem superfícies com mesma área?

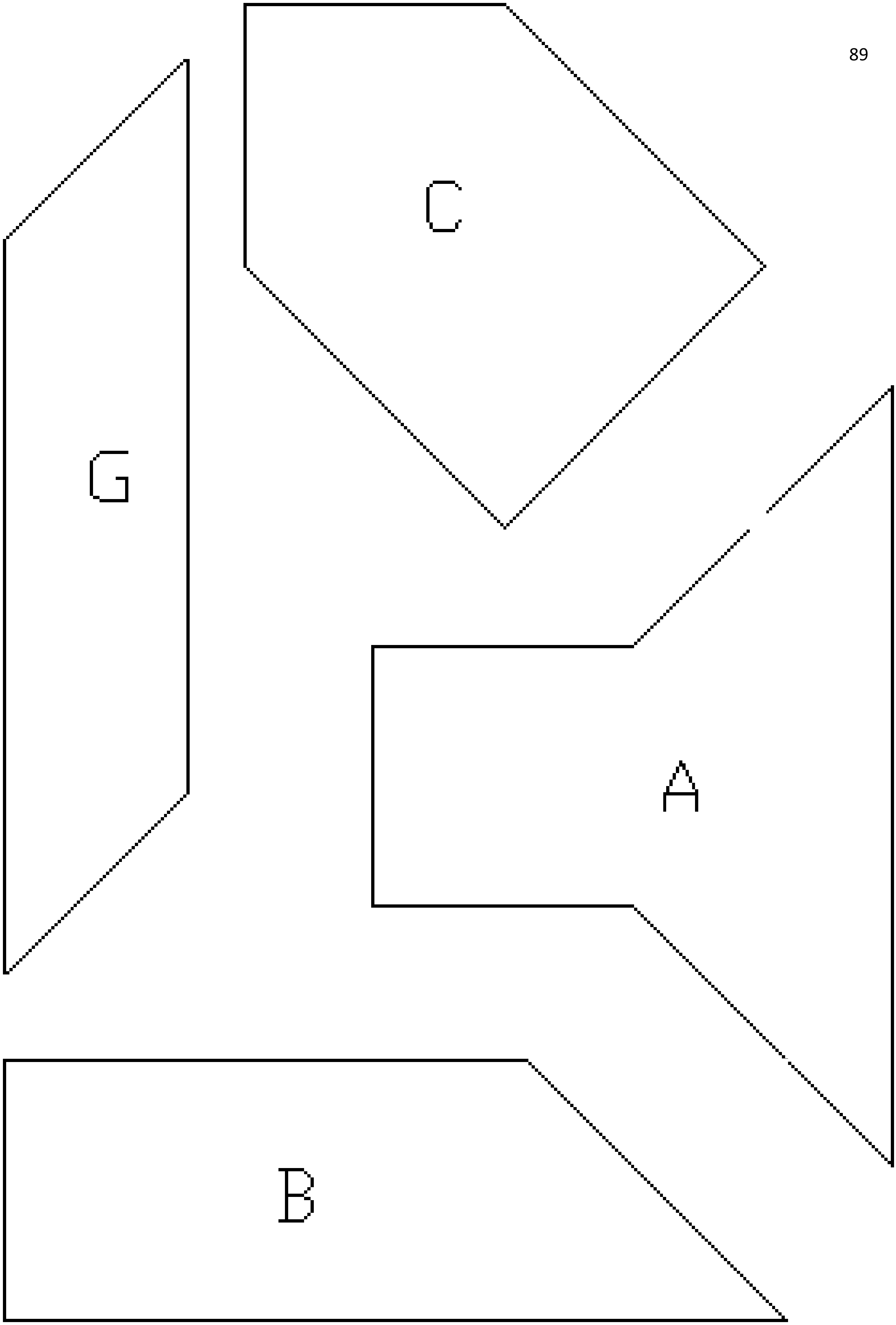
____

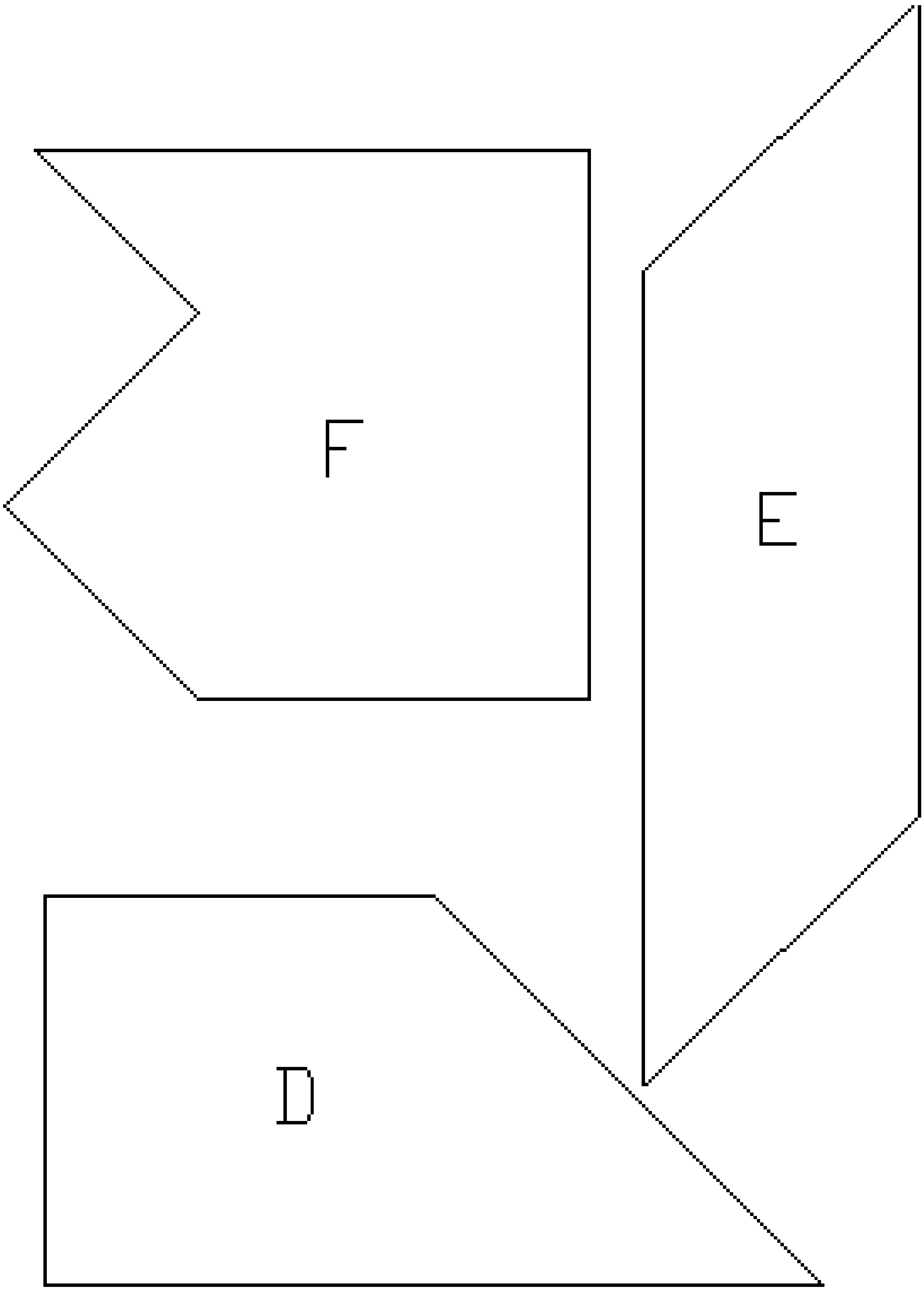
____

c) Figuras que possuem superfícies com mesma área precisam ter a mesma forma? Justifiquem suas respostas.

____

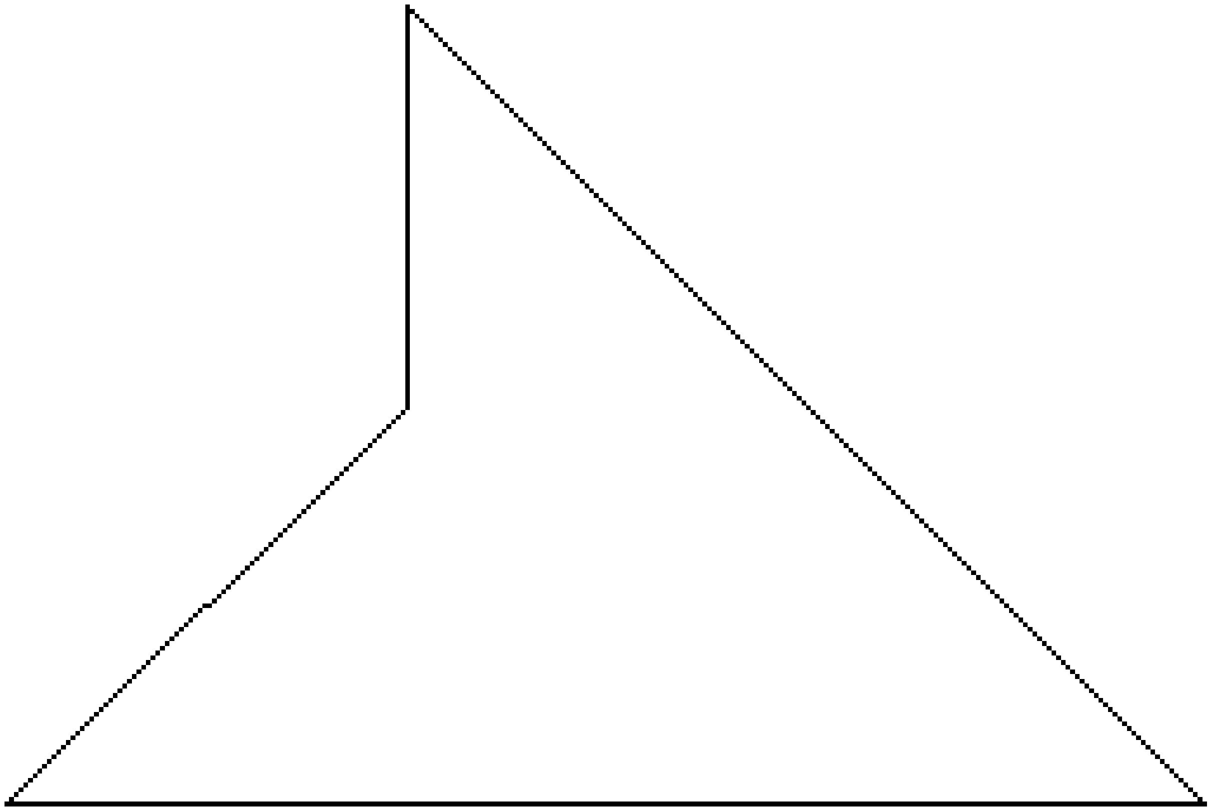
____


C
G
A
B


F
E
D

Atividade 4

Observem a figura dessa atividade e, em seguida, façam outras duas figuras diferentes que tenham a mesma área da figura dada.



Atividade 5

Vocês estão recebendo um *kit* contendo: placa de isopor, alfinetes e barbantes. Use os alfinetes para fixar a folha com as figuras sobre a placa de isopor e, em seguida coloque alfinetes sobre os vértices das figuras e com o barbante contorne cada figura para responder as questões abaixo.

a) Quais figuras possuem as mesmas formas?

____

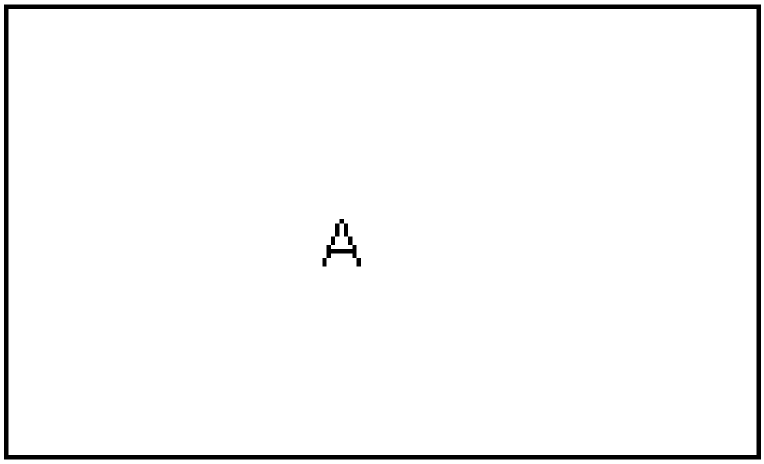
____

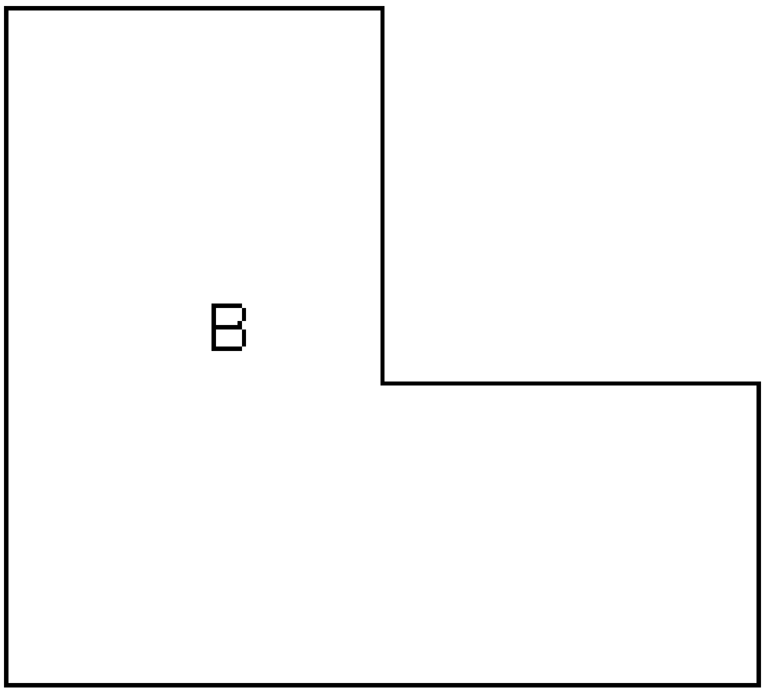
b) Quais figuras possuem o contorno de mesmo comprimento?

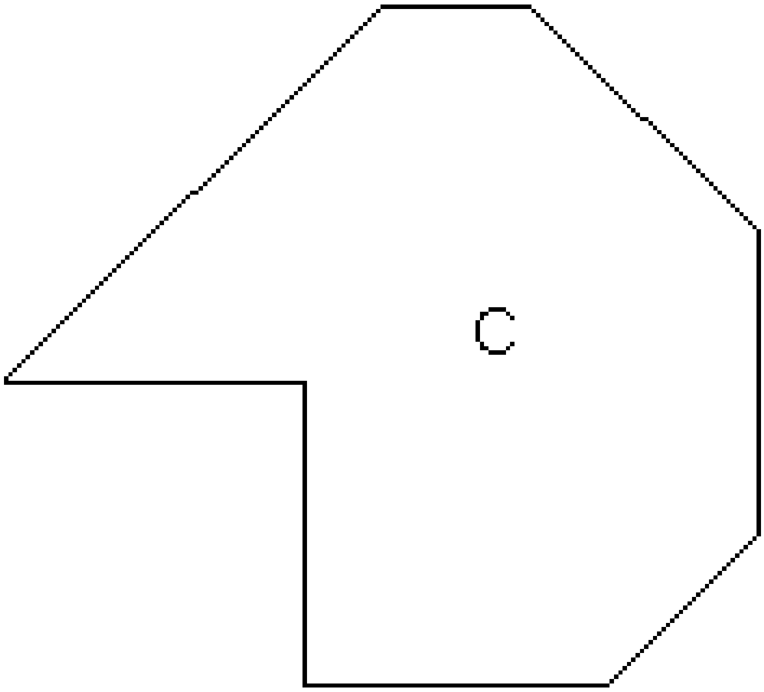
____

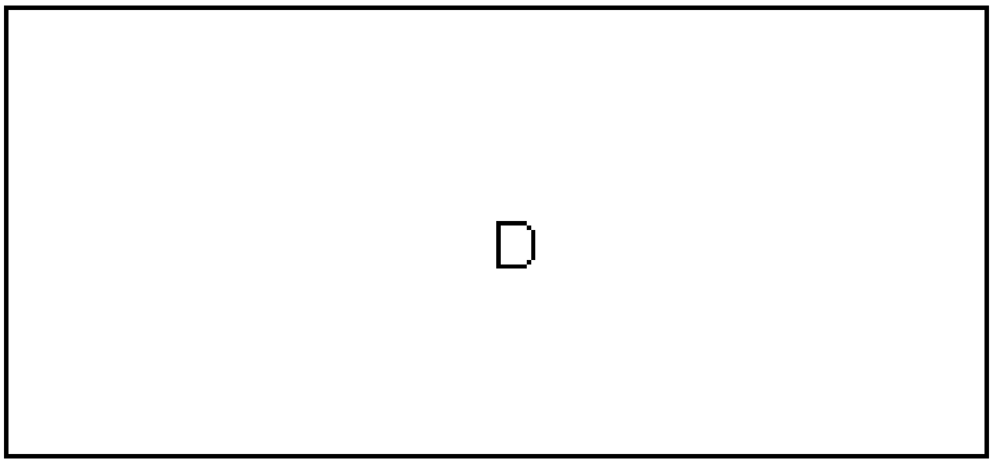
____

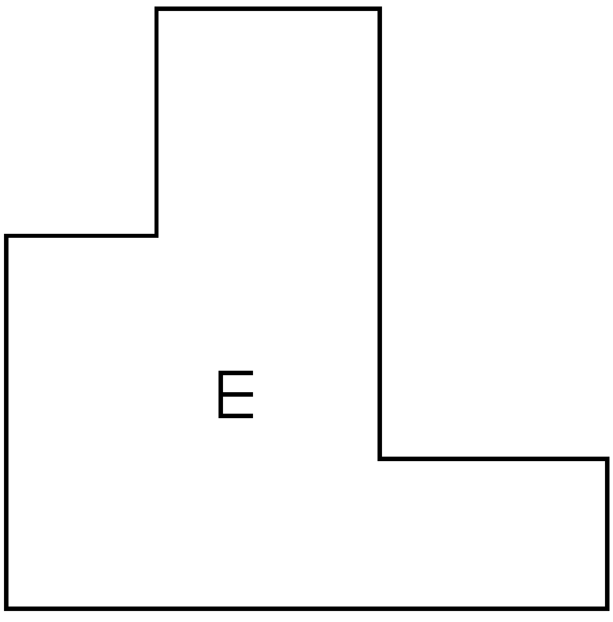
c) As figuras que possuem o contorno de mesmo comprimento precisam ter a mesma forma? Justifique sua resposta.





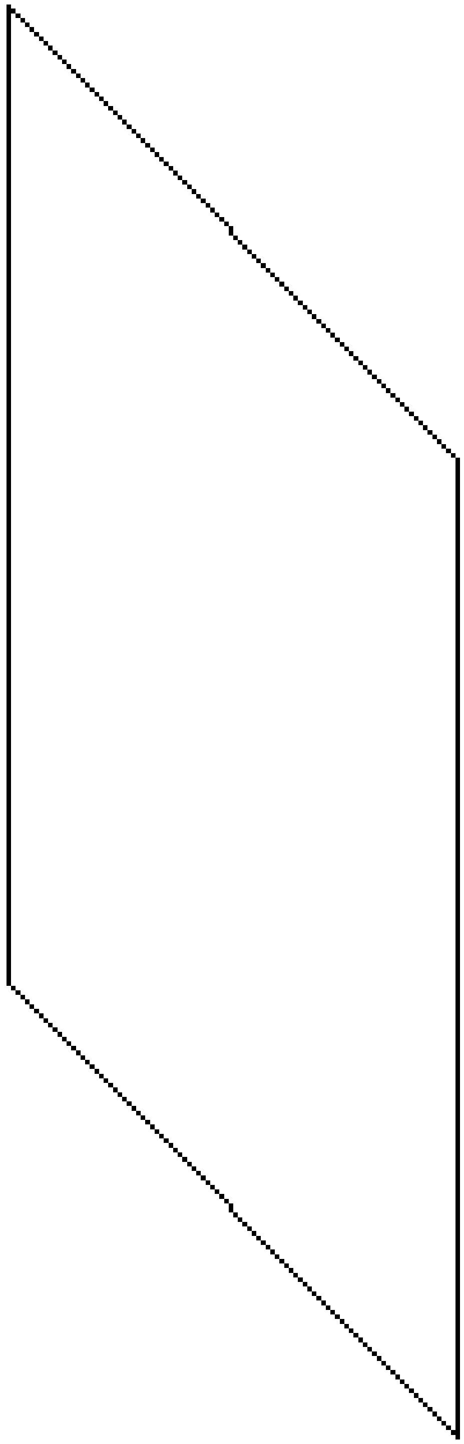

C


D


E

Atividade 6

Observem a figura dessa atividade e, em seguida, façam duas outras figuras diferentes quem possuam contorno de mesmo comprimento.



Parte - 2

Atividade 7

Com quatro peças do tangram façam uma figura e pinte a sua superfície. Em seguida, respondam.

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para recobrir a superfície perfeitamente?

____

____

b) Quantos quadrados são necessários para recobrir a superfície perfeitamente?

____

____

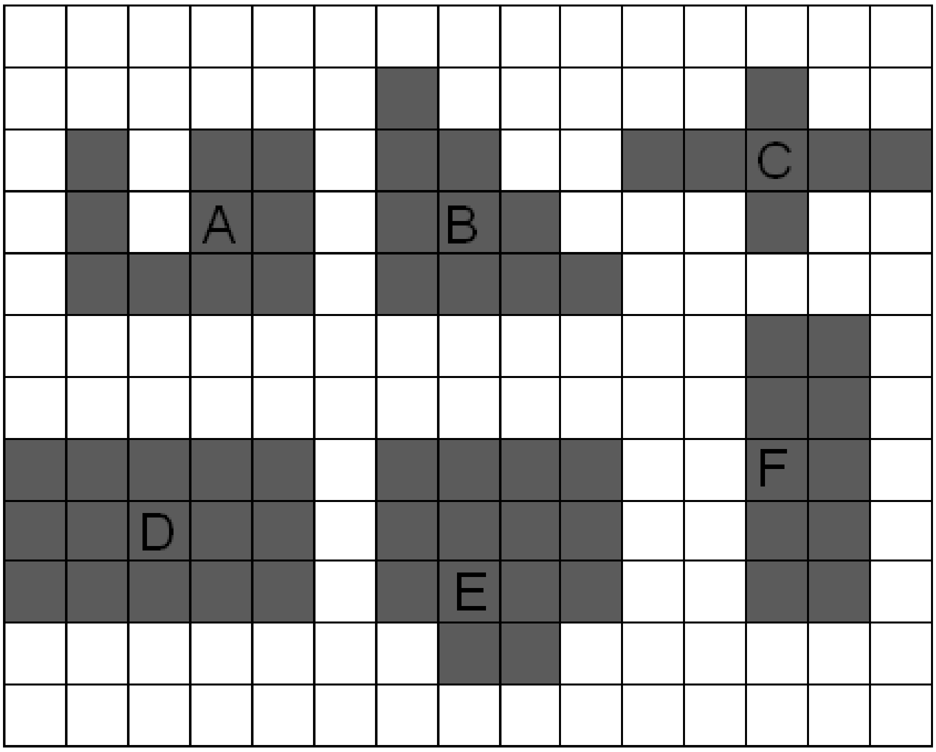
c) Se a superfície da figura é a mesma, como vocês justificam os valores encontrados serem diferentes?

____

____

Atividade 8

Vocês estão recebendo uma malha quadriculada com algumas figuras. Utilize um quadradinho com unidade de medida de área (u²) e o lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento (u) e, em seguida, responda.



a) Determine a medida da área e perímetro de cada figura.

____

____

b) Quais figuras possuem a mesma área?

____

____

c) Quais figuras possuem o mesmo perímetro?

____

____

d) As figuras que possuem o mesmo perímetro possuem, também, a mesma área? Dê exemplo.

____

____

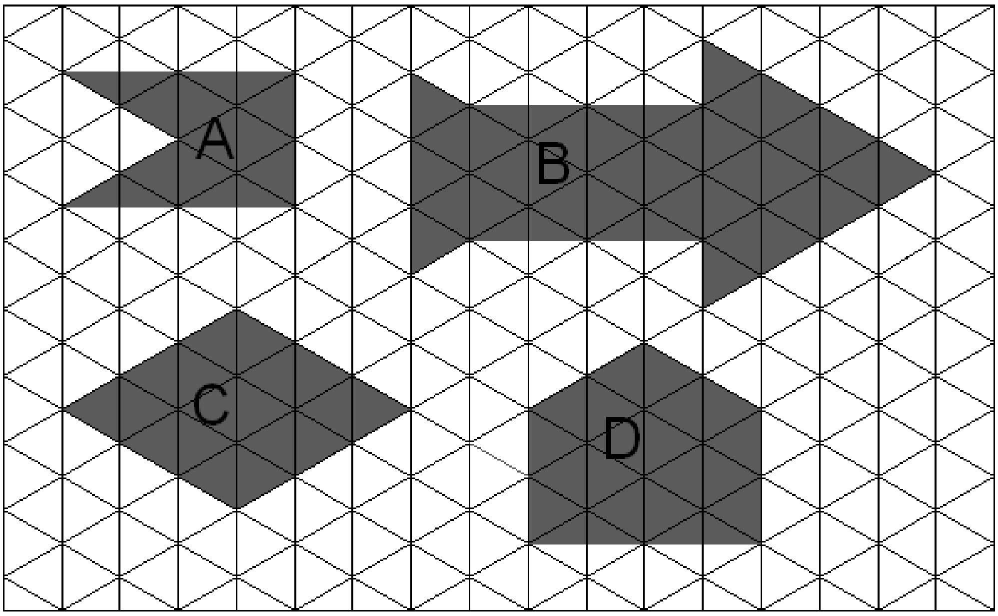
e) As figuras que possuem a mesma área possuem, também, o mesmo perímetro? Dê exemplo.

____

____

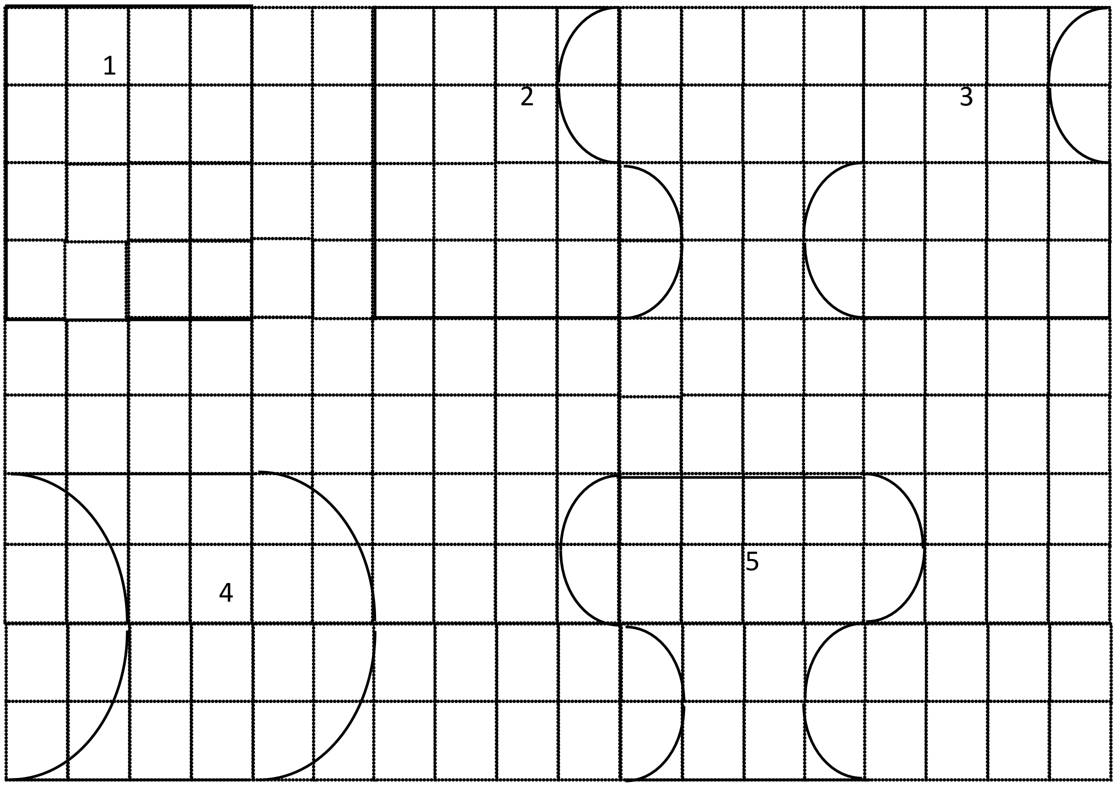
Atividade 9

Vocês estão recendo uma folha com malha triangular com algumas figuras. Utilize um triângulo como unidade de medida de área (u²) e o lado do triângulo como unidade de medida de comprimento (u), e calcule o perímetro e a medida da área de cada figura.



Atividade 10

Como vocês observaram nas atividades com o tangram, uma figura pode ser dividida em várias partes para formarem novas figuras. Com essa mesma idéia, transforme as figuras 2, 3, 4 e 5, em figuras idênticas a figura 1.



a) Agora respondam. As figuras 1, 2, 3, 4 e 5 possuem a mesma área?

____

____

Atividade 11

Utilizando a régua em polegadas e em centímetros, preencham a tabela abaixo com as medidas do perímetro de cada figura.

Instrumento de medida	Perímetro		
	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Régua em pol			
Régua em cm			

b) Por que, ao utilizarmos a régua em polegadas e a em centímetros, para cada figura foram encontradas medidas diferentes?

____

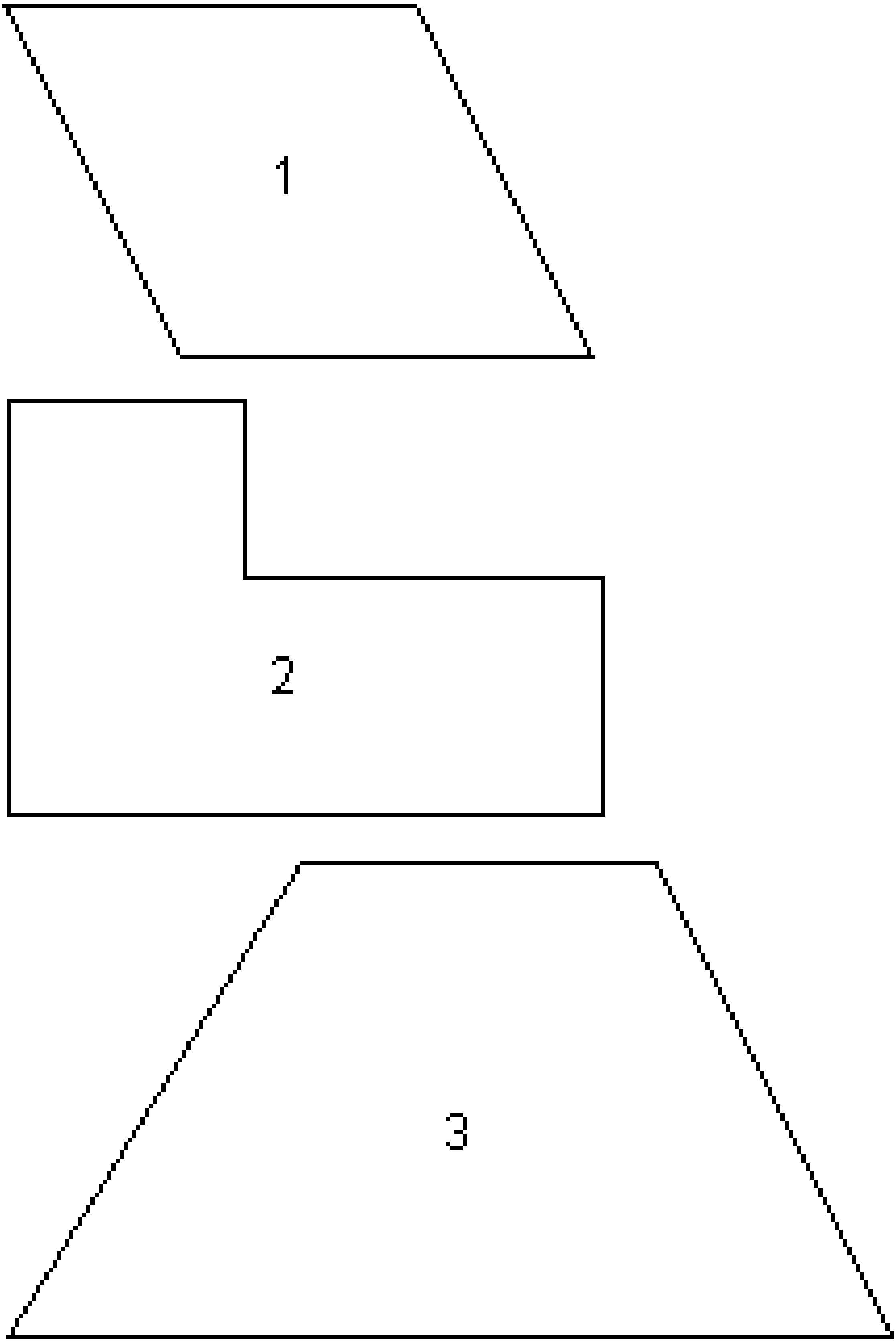
____

c) O perímetro da figura 1 mede ____ cm, utilizando a régua em centímetros. Vocês poderiam explicar o que significa esse valor número ___cm?

____

____

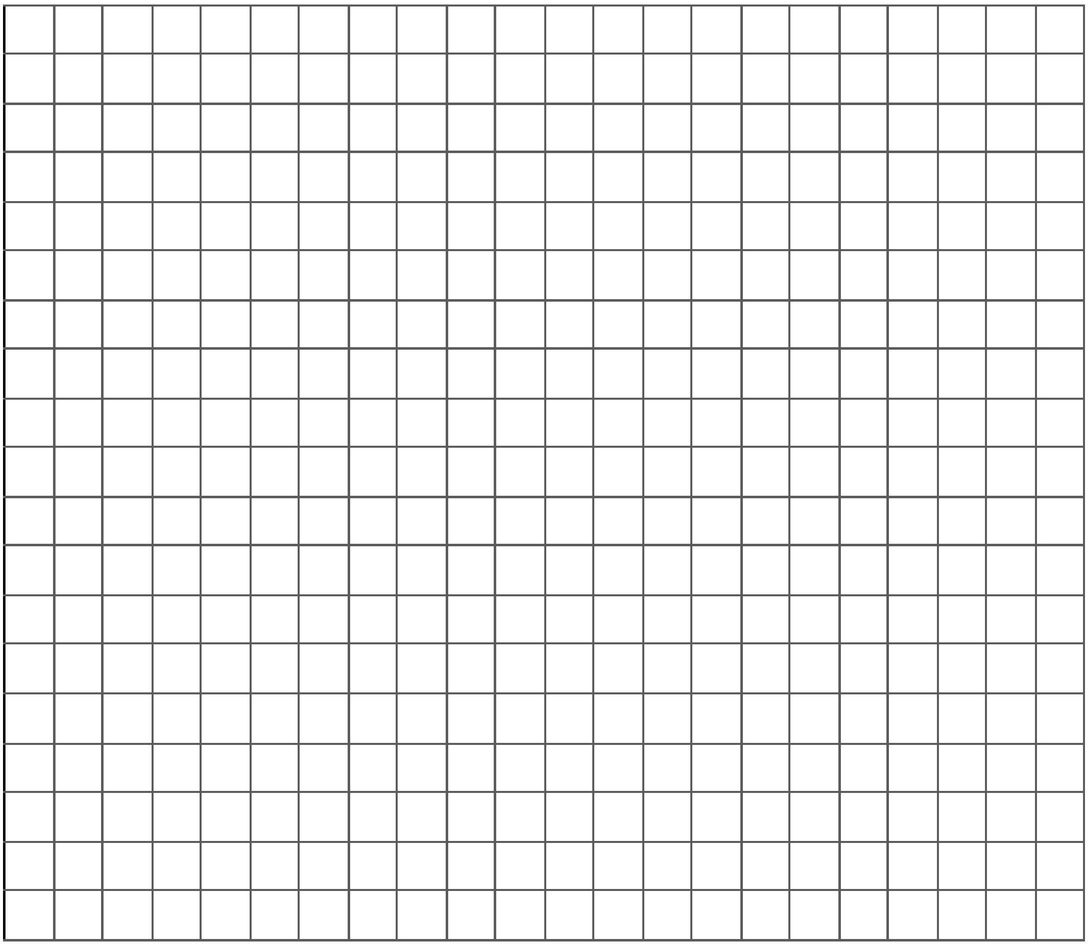
Figuras para Atividade 11



Atividade 12

Na malha quadriculada abaixo, construam quatro retângulos diferentes com perímetro igual a 20 unidades de comprimento (u). Em seguida, completem a tabela e respondam.

figuras	Lado1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1				
Figura 2				
Figura 3				
Figura 4				



Atividade 13

Na malha quadriculada abaixo, construam quatro retângulos diferentes que possuem a medida de área igual a 24 unidades de medida de área (u²). Em seguida, complete a tabela.

figuras	Lado 1	Lado 2	Perímetro (u)	Medida da Área (u²)
Figura 1				
Figura 2				
Figura 3				
Figura 4				

Atividade 14

Sem a malha quadriculada, usando só a régua e o esquadro construam:

a) Dois retângulos com perímetro igual a 16cm. Em seguida, calcule a medida da área de cada figura.

____

____

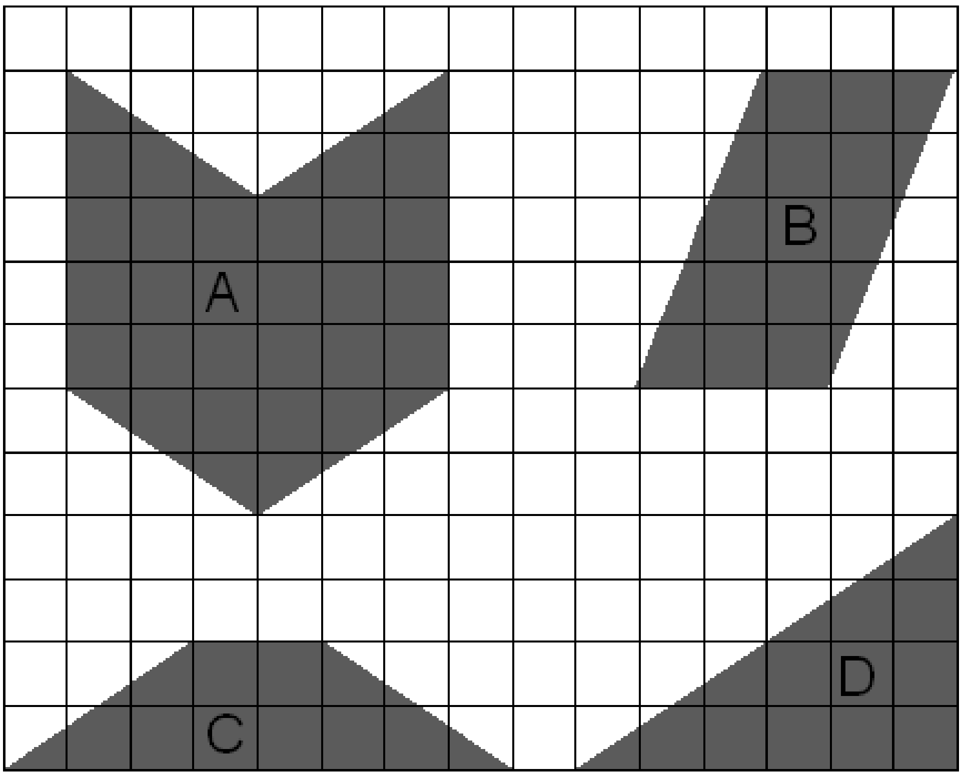
b) Dois retângulos com medida de área igual a 12cm². Em seguida, calcule o perímetro de cada figura.

____

____

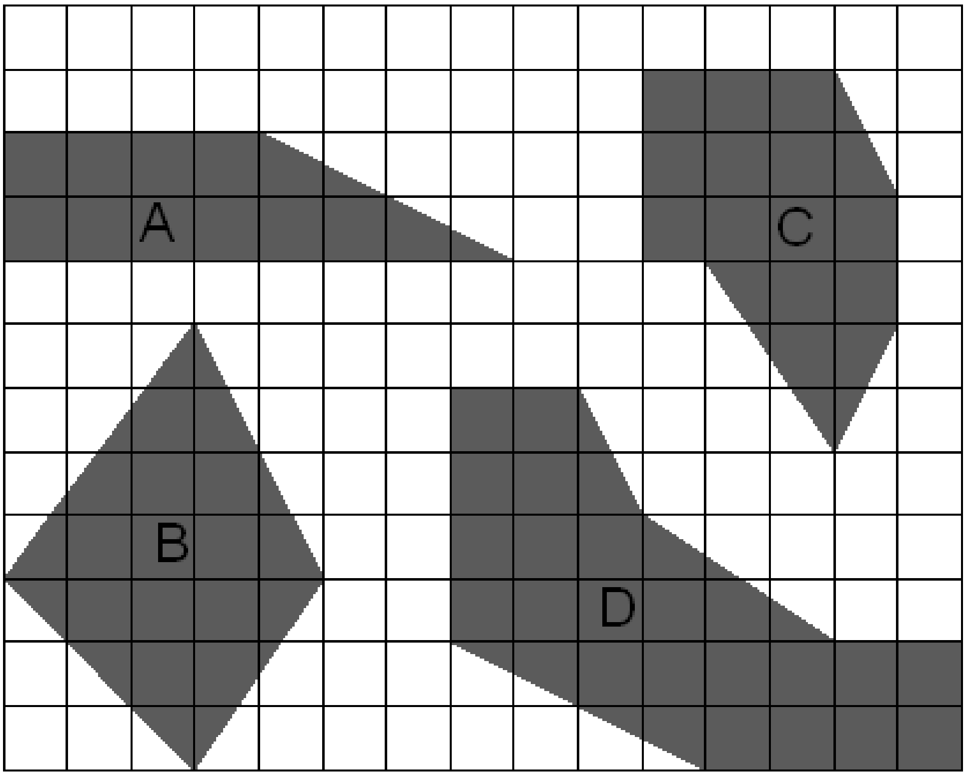
Atividade 15

Transformem as figuras abaixo em retângulos e, em seguida, calcule a medida de sua área.



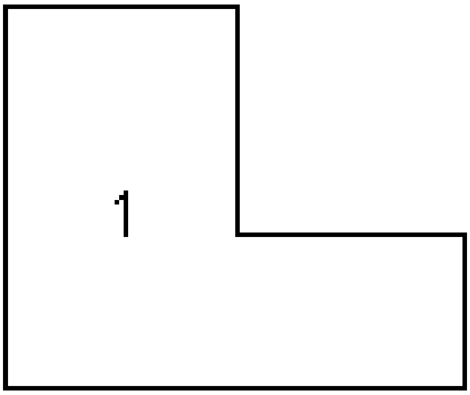
Atividade 16

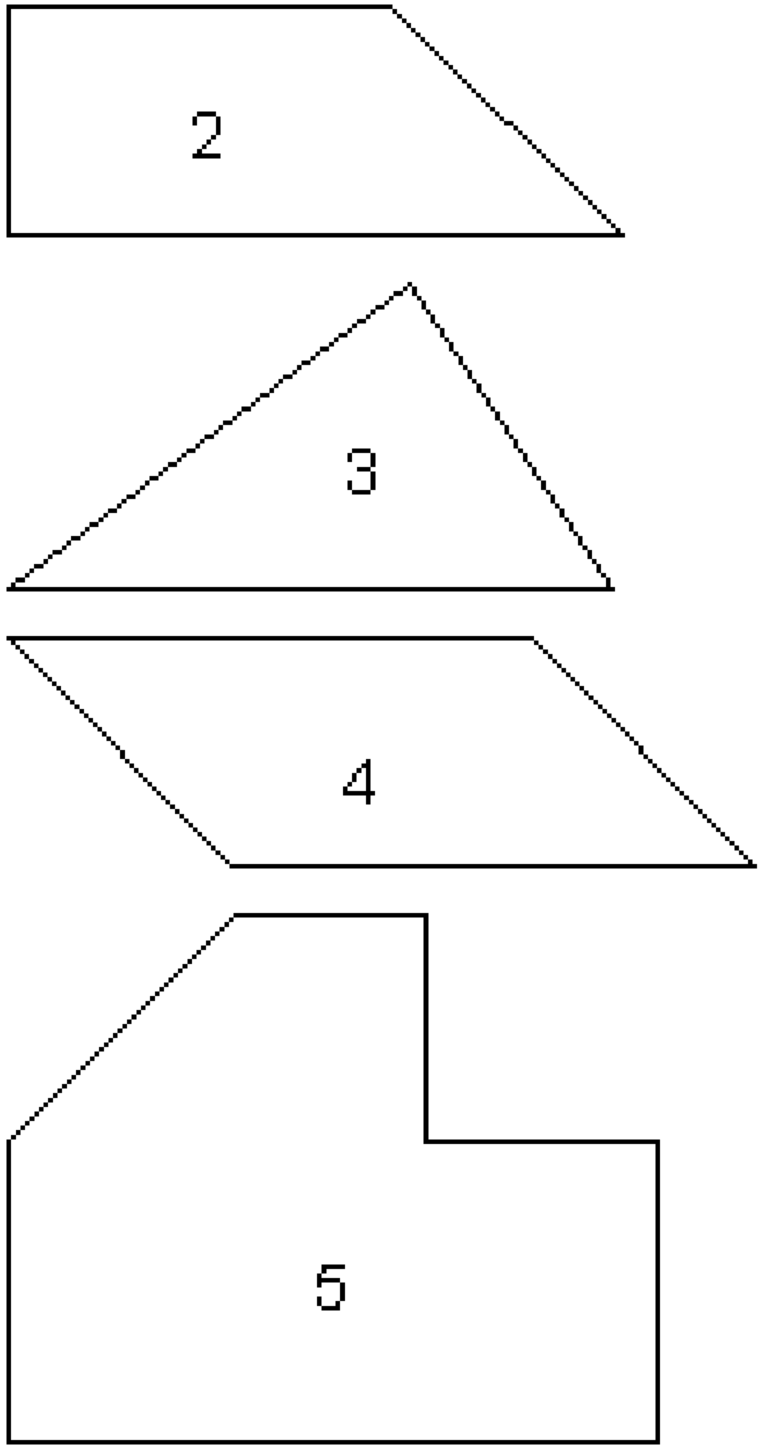
Calcule a área das figuras abaixo.

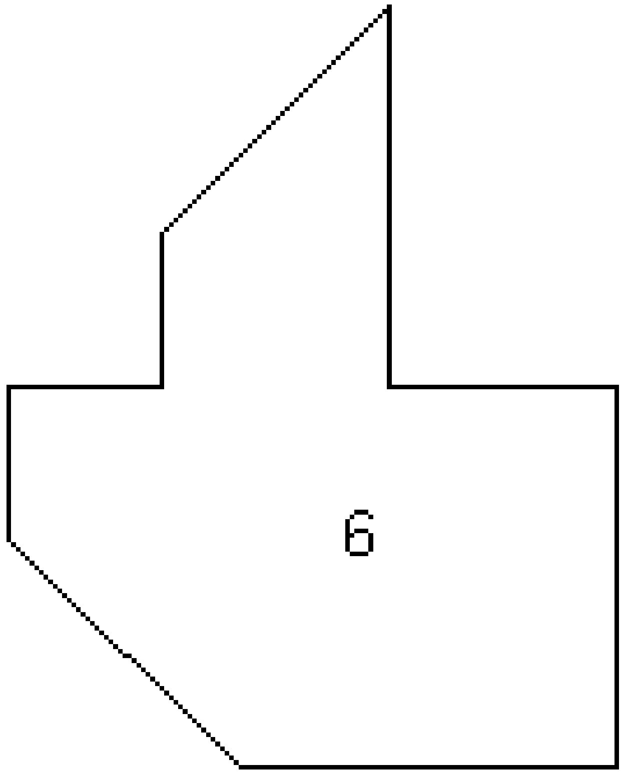


Atividade 17

Utilizando a régua, calcule a medida da área e o perímetro das figuras abaixo.




2
3
4
5



ANEXO B – FICHA DE OBSERVAÇÃO

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 1

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Construíram as duas figuras com as peças do tangram.				
Construíram as duas figuras.				
Pintaram a superfície das duas figuras.				
Usaram cores diferentes para o contorno e a superfície.				
Responderam corretamente (de acordo com as análises prévias) o item "b".				

Desenvolvimento atividade:

____
____
____
____
____
____

Demais Observações:

____
____
____
____
____
____
____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 2

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Pintaram corretamente a superfície das figuras.				
Fizeram as duas figuras com as mesmas 3 peças.				
Perceberam que as duas figuras possuem a mesma área.				
Observaram que, qualquer que seja, a figura formada por essas mesmas 3 peças elas terão a mesma área.				
A forma da figura foi obstáculo no desenvolvimento da atividade.				

Desenvolvimento atividade:

____
____
____
____
____
____

Demais Observações:

____
____
____
____
____
____
____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 3

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Observaram que as figuras B e G possuem a mesma forma.				
Observaram que as figuras E e D possuem a mesma forma.				
Conseguiram encontrar as peças que recobrem totalmente as figuras.				
Perceberam que as figuras A, C, E e G, possuem a mesma área.				
Perceberam as peças do tangram que possuem superfície com mesma área.				
Dissociaram a forma da figura de sua área.				

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 4

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Conseguiram recobrir a figura dada.				
Usaram as mesmas peças para fazer outras duas figuras.				
Perceberam que, independentemente da forma, as figuras possuem mesma área.				
Tiveram dificuldade em encontrar as peças corretas que recobrem perfeitamente a figura dada.				
Dissociaram a forma da figura de sua área.				

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 5

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Conseguiram arrumar as figuras sobre o isopor e prendê-las sobre o vértice.				
Conseguiram contornar todas as figuras com o barbante.				
Perceberam que o contorno das figuras A, C e E possuem o mesmo comprimento.				
Perceberam que o contorno das figuras B e D possuem o mesmo comprimento.				
Dissociaram a forma da figura de seu comprimento.				

Desenvolvimento atividade:

____

____

____

____

____

____

Demais Observações:

____

____

____

____

____

____

____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 6

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Usaram corretamente o alfinete e o isopor para fixar a folha e desenvolver a atividade.				
Contornaram corretamente a figura 6				
Utilizaram esse mesmo comprimento para fazer as outras duas figuras.				
Fizeram as duas figuras com o mesmo comprimento da figura 6.				
Perceberam que todas as três figuras possuem mesmo comprimento.				

Desenvolvimento atividade:

____
____
____
____
____
____

Demais Observações:

____
____
____
____
____
____
____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 7

Observações	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Conseguiram recobrir perfeitamente a figura com o triângulo pequeno.				
Conseguiram recobrir a figura com o quadrado.				
Caso necessário, eles utilizaram outras peças, de mesma área do quadrado, para auxiliar a recobrir perfeitamente a figura.				
Fizeram a figura com as quatro peças do tangram.				
Pintaram a superfície da figura.				
Dissociaram a área de medida de área.				

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 8

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	A	P	A	P	A	P	A	P
Acertaram a medida da área e perímetro da figura A.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura B.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura C.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura D.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura E.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura F.								
Procederam de forma correta para calcular área e o perímetro.								
Utilizaram as unidades de medida para representar as comparações.								
Perceberam que as figuras A, B e F possuem mesma área.								
Perceberam que as figuras B, C e D possuem mesmo perímetro.								
Dissociaram área de perímetro.								

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 9

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	A	P	A	P	A	P	A	P
Acertaram a medida da área e perímetro da figura A.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura B.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura C.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura D.								
Procederam de forma correta para calcular área e o perímetro.								
Utilizaram as unidades de medida para representar as comparações.								
A malha triangular dificultou os cálculos de área e perímetro.								
Dissociaram área de perímetro.								

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 10

Observação	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Conseguiram reconfigurar a figura 2.				
Conseguiram reconfigurar a figura 3.				
Conseguiram reconfigurar a figura 4.				
Conseguiram reconfigurar a figura 5.				
Perceberam que as figuras 1 e 2 possuem mesma área.				
Perceberam que as figuras 1 e 3 possuem mesma área.				
Perceberam que as figuras 1 e 4 possuem mesma área.				
Perceberam que as figuras 1 e 5 possuem mesma área.				
Perceberam que todas as figuras possuem mesma área.				
Utilizaram as unidades de medida para representar as comparações.				
A forma das figuras dificultou a reconfiguração.				
O processo de reconfiguração foi ferramenta para resolução.				

Desenvolvimento atividade:

____

____

____

____

____

Demais Observações:

____

____

____

____

____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 11

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	pol	cm	pol	cm	pol	cm	pol	cm
Calcularam corretamente o perímetro da figura 1.								
Calcularam corretamente o perímetro da figura 2.								
Calcularam corretamente o perímetro da figura 3.								
Indicaram corretamente a unidade de medida da figura 1.								
Indicaram corretamente a unidade de medida da figura 2.								
Indicaram corretamente a unidade de medida da figura 3.								
Agiram de forma correta para calcula o perímetro com a régua...								
Perceberam que as régua possuem unidades de medida diferentes.								
Dissociaram comprimento de perímetro.								

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 12

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	A	P	A	P	A	P	A	P
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 1.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 2.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 3.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 4.								
Procederam de forma correta para calcular área e o perímetro.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 1.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 2.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 3.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 4.								
Marcaram corretamente as medidas dos lados								
Perceberam que para um mesmo perímetro podemos ter medidas de área diferentes								
Dissociaram medida de área e perímetro								
Relacionaram os lados do retângulo com seu perímetro								
Relacionaram a medida da área do retângulo com seus dois lados adjacentes.								

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 13

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	A	P	A	P	A	P	A	P
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 1.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 2.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 3.								
Acertaram a medida da área e perímetro da figura 4.								
Procederam de forma correta para calcular área e o perímetro.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 1.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 2.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 3.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 4.								
Marcaram corretamente as medidas dos lados								
Perceberam que para uma mesma medida de área podemos ter perímetros diferentes								
Dissociaram medida de área e perímetro								
Relacionaram os lados do retângulo com seu perímetro								
Relacionaram a medida da área do retângulo com seus dois lados adjacentes.								

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 14

Observação	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Tiveram dificuldades em utilizar os instrumentos de medida.				
Fizeram dois retângulos com 16cm de perímetro.				
Fizeram dois retângulos com $12cm^2$ de medida de área.				
Calcularam corretamente as medidas das áreas do item “a”.				
Indicaram corretamente as unidades de medida de área.				
Calcularam corretamente o perímetro do item “b”.				
Indicaram corretamente a unidade de medida de comprimento.				

Desenvolvimento atividade:

____
____
____
____
____

Demais Observações:

____
____
____
____
____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 15

Observação	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Reconfiguraram a figura A para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura B para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura C para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura D para encontrar a medida de área.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura A.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura B.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura C.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura D.				
Indicaram corretamente a unidade de medida.				
O fato de não dar apenas para contar os quadradinhos prejudicou o desenvolvimento da atividade.				
Tentaram contar os quadradinhos mesmo não estando totalmente recobertos.				

Desenvolvimento atividade:

Demais Observações:

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 16

Observação	Sim		Não	
	G1	G2	G1	G2
Reconfiguraram a figura A para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura B para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura C para encontrar a medida de área.				
Reconfiguraram a figura D para encontrar a medida de área.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura A.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura B.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura C.				
Calcularam corretamente a medida da área da figura D.				
Indicaram corretamente a unidade de medida.				
O fato de não dar apenas para contar os quadradinhos prejudicou o desenvolvimento da atividade.				
Tentaram contar os quadradinhos mesmo não estando totalmente recobertos.				

Desenvolvimento atividade:

____
____
____
____

Demais Observações:

____
____
____
____
____

FICHA DE OBSERVAÇÃO – Atividade 17

Observação	Sim				Não			
	G1		G2		G1		G2	
	A	P	A	P	A	P	A	P
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 1.								
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 2.								
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 3.								
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 4.								
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 5.								
Calcularam corretamente as medidas de área e perímetro da figura 6.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 1.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 2.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura3.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 4.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 5.								
Indicaram corretamente as unidades de medida de área e perímetro da figura 6.								
Utilizaram a decomposição para transformar as figuras em retângulos.								
Utilizaram a reconfiguração para fazer os cálculos								