

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

LUIZ BARROS DA SILVA JUNIOR

Isaac Newton e a Origem do Cálculo Diferencial e Integral

ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2014**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

LUIZ BARROS DA SILVA JUNIOR

Isaac Newton e a Origem do Cálculo Diferencial e Integral

*Monografia apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de **ESPECIALISTA** em **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Fumikazu Saito**.*

**São Paulo
2014**

Banca Examinadora

Dedico este trabalho à minha querida esposa Angela, pelo amor, carinho, apoio, incentivo e compreensão nos momentos em que estive ausente. Você é o meu maior presente.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu amor revelado em Cristo, pelo dom da vida, por dar-me forças e capacitar-me a ensinar e ajudar a outras pessoas com o meu trabalho. Tenho plena convicção de que tudo que alcancei até aqui foi com seu auxílio e direção.

À minha querida mãe Albina Rosa, pelas orações, conselhos, orientações, enfim, por toda a educação e conhecimento a mim transmitido ao longo desses 37 anos.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fumikazu Saito, pela paciência, dedicação e apoio na orientação deste trabalho.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud, Dra. Renata Rossini, Dra. Maria José Ferreira da Silva e Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, por todo conhecimento, apoio e conselhos que nos transmitiram.

Aos meus colegas do Curso de Especialização, Wilton Galdino, Stella Camargo e Margarete Sartori. A companhia de vocês e a troca de experiências ao longo deste curso foram de fundamental importância para um grande aprendizado.

"Tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade."

Gottfried Wilhelm Leibniz.

RESUMO

Esta monografia apresenta parte da contribuição de Isaac Newton (1642-1727) para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Para a realização deste trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica. A partir de nossa investigação, percebemos que o cálculo de Newton, conhecido como *Método das Fluxões*, foi desenvolvido no contexto de seus estudos em *Filosofia Natural*, mais especificamente, nos problemas relacionados ao movimento dos corpos, não tendo como objetivo principal o desenvolvimento da matemática. Sendo assim, formulamos a seguinte questão de pesquisa: *o que era realmente o cálculo em sua origem?* A fim de responder esta pergunta, procuramos entender o contexto e as razões pelas quais Newton elaborou o seu método, e assim, estabelecemos como objetivo para esta pesquisa *refletir sobre alguns aspectos do método das fluxões presentes em seu tratado intitulado “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, também conhecido como “Principia”, no qual são apresentadas as leis do movimento e a lei da gravitação universal.* Para isso, apresentamos neste trabalho: uma breve biografia de Newton; um relato a respeito das mudanças ocorridas na filosofia natural do século XVII, bem como, a valorização da matemática neste período; o problema da tangente a uma curva e o problema da quadratura das curvas, os quais foram o ponto de partida para que Newton desenvolvesse o método das fluxões; e a maneira pela qual Newton apresentou seu método nos *Principia* a fim de resolver problemas relacionados ao movimento dos corpos.

Palavras-chave: Tangente. Quadratura. Movimento dos Corpos. Método das Fluxões. Principia.

ABSTRACT

This paper presents part of Isaac Newton's (1642-1727) contribution to the development of Differential and Integral Calculus. In order to build our analysis, we searched literature, and from our research we learned that the calculus of Newton, known as the Method of Fluxions, was developed within the context of his studies in Natural Philosophy, specifically those on issues related to the motion of bodies, not having the development of mathematics as its main objective. Therefore, we formulated the following research question: *what was actually calculus in its origin?* To answer this question, we tried to understand the context and the reasons why Newton developed his method, and thus established as a goal for this research *to reflect on some aspects of the method of fluxions which appear in his treatise entitled "Mathematical Principles of Natural Philosophy", also known as "Principia", in which the laws of motion and the law of universal gravitation are presented.* In order to do this, we present in our paper: a brief biography of Newton; an account on the changes that occurred in the natural philosophy of the seventeenth century, as well as the appreciation for mathematics in this period; the problem of the tangent to a curve and the problem of the quadrature of curves, which were the starting point for Newton to develop the method of fluxions; and the way in which Newton presented his method in the *Principia* in order to solve problems related to the motion of bodies.

Key words: Tangent. Quadrature. Motion of Bodies. Method of fluxions. Principia.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Página de <i>La Géométrie</i> de Descartes	22
Figura 2 – Método de Descartes para determinar a tangente a uma curva	22
Figura 3 – Uso da circunferência para determinar a tangente à parábola no ponto M. Cópia de uma página dos comentários de F. Van Fchooten à obra <i>La Géométrie</i> de Descartes ...	23
Figura 4 – Volume da Esfera (Cavalieri)	24
Figura 5 – Volume da pirâmide de base quadrada (Indivisíveis de Cavalieri)	24
Figura 6 – Página de <i>Lectiões Geometricae</i> de Barrow (1670)	27
Figura 7 – Quadratura e tangente (Leibniz)	34
Figura 8 – Diferenciais de Leibniz	35
Figura 9 – Integral de Leibniz	36
Figura 10 – Página dos <i>Principia</i> de Newton	39
Figura 11 – Paralelogramo do Corolário I das Leis do Movimento	40
Figura 12 – Ilustração do método das primeiras e últimas razões	44
Figura 13 – Demonstração dos Lemas II e III	46
Figura 14 – Demonstração dos Lemas VI e VII	48
Figura 15 – Problema dos Lemas VI e VII reproduzido no Geogebra	49
Figura 16 – Razão de Igualdade entre a tangente e a secante no Geogebra	49
Figura 17 – Razão de Igualdade entre a tangente, a secante e o arco no Geogebra	50
Figura 18 – Ilustração dos corolários decorrentes do Lema VII	50

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
CAPÍTULO 1 – CONTEXTO HISTÓRICO	13
1.1 A Filosofia Natural	15
CAPÍTULO 2 – A MATEMÁTICA DO SÉCULO XVII, AS SUAS INFLUÊNCIAS NO CÁLCULO DE NEWTON E O MÉTODO DAS FLUXÕES.....	20
2.1 As contribuições de Descartes, Cavalieri, Wallis e Barrow	21
2.2 O Método das Fluxões de Newton.....	28
2.3 Gottfried Wilhelm Leibniz	33
2.4 Comparativo entre os métodos de Newton e Leibniz	36
CAPÍTULO 3 – <i>PRINCIPIA</i>	38
3.1 As ideias de Newton, relativas ao Cálculo, nos <i>Principia</i>	41
3.1.1 As primeiras e últimas razões das quantidades	43
3.1.2 O método das razões no Livro I dos <i>Principia</i>	45
CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
REFERÊNCIAS.....	54
ANEXO A – Retrato de Newton	56
ANEXO B – Página do <i>Tratado dos Métodos das Séries e Fluxões</i>	57
ANEXO C – Página do <i>De Quadratura</i>	58
ANEXO D – Página dos <i>Principia</i>	59

INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral é um importante ramo da Matemática e constitui-se em uma ferramenta essencial em diversas áreas do conhecimento, tais como a Física, a Engenharia, a Economia, a Medicina, entre outras, o que torna o seu estudo obrigatório em vários cursos de graduação.

A História do Cálculo é um assunto que desperta grande interesse e curiosidade, porém, deve ser abordado de maneira cuidadosa. Dois aspectos importantes a serem observados são a ordem cronológica dos acontecimentos relacionados ao desenvolvimento do Cálculo e as razões pelas quais foram desenvolvidos os seus conceitos.

No que diz respeito à ordem cronológica, vale ressaltar que, ao longo de sua vida acadêmica, o estudante de Cálculo vai tendo contato com os diversos conceitos matemáticos ligados ao cálculo numa determinada sequência. O primeiro deles é o de Limite e Continuidade de funções, seguido pelo de Derivada, que é definida como um Limite, e depois, finalmente, o de Integral, que por diversas vezes, é apresentado como o percurso inverso ao da Derivada. Esta sequência que o estudante aprende dá ao aluno a ideia de que todos esses conceitos foram surgindo exatamente nessa ordem, no decorrer da história.

Mas, ao consultar um livro de história da matemática, nota-se que os conceitos relacionados ao Cálculo não surgiram nessa ordem. De fato, segundo Eves (2011, p. 417), *“o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária àquela apresentada nos cursos, ou seja, primeiro surgiu o cálculo integral e só muito tempo depois o cálculo diferencial”*. Além disso, deve-se ressaltar que, num primeiro momento, esses mesmos conceitos não estavam associados à ideia de função, pois, como bem observa Alves (2008):

O cálculo de Newton e de Leibniz utilizava variáveis, as quantidades variáveis ligadas a curvas, tais como as ordenadas, as abscissas, subtangentes e áreas. O cálculo moderno utiliza funções, aplicações de um conjunto (de números reais) em outro. O conceito de função surgiu somente no século XVIII. (ALVES, 2008, p. 21).

Segundo a abordagem tradicional da história da matemática, a invenção do Cálculo é atribuída a Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-

1716) em finais do século XVII. Mas, segundo essa vertente histórica, seria possível encontrar suas origens, na Grécia, no século V a.C., com os incomensuráveis, passando pelos paradoxos de Zenão e pelos métodos de exaustão e de equilíbrio de Eudoxo e de Arquimedes (Boyer, 1993 – Eves, 2011). Ainda segundo o relato tradicional, o desenvolvimento do Cálculo teria recebido uma importante contribuição do método dos indivisíveis de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), publicado em 1635. Assim, seguindo uma ordem cronológica de "descobertas", teria sido só depois disso, que Newton, em 1666, e Leibniz, em 1676, teriam desenvolvido o cálculo com os infinitesimais, tanto que, nessa época o cálculo era chamado de cálculo infinitesimal (ROQUE, 2012).

Apesar de essa narrativa ser amplamente aceita e divulgada, é preciso considerar alguns aspectos. Nesse sentido, Roque (2012) apresenta a seguinte questão: *“Mas será que Leibniz e Zenão tinham o mesmo objeto de pesquisa?”*. Segundo a autora, o relato tradicional se baseia na matemática atual e no que esse saber admite como correto. Logo, tem-se a impressão de que os conceitos evoluíram desde estágios mais rudimentares até a sua formalização e ao que é ensinado atualmente.

Assim, notamos que os conceitos do cálculo não só surgiram numa ordem que é diferente daquela encontrada nos livros didáticos, mas também que, em suas origens, eles não estiveram associados ao conceito de função.

A partir desse levantamento, surgiu a seguinte questão para esta pesquisa: ***o que era realmente o cálculo em sua origem?*** Para responder a essa pergunta é necessário compreendermos as circunstâncias pelas quais o cálculo foi elaborado, e, nesse sentido, podemos dizer que o cálculo de Newton e Leibniz surgiu num contexto que não é essencialmente matemático, tal como hoje entendemos.

No caso de Newton, embora ele tenha se interessado desde muito cedo pela matemática, o cálculo (conhecido em sua origem como cálculo de fluxões) foi desenvolvido no contexto de seus estudos em filosofia natural, mais especificamente, nos problemas relacionados ao movimento dos corpos (COHEN e WESTFALL, 2002).

Tendo em vista que as ideias de Newton relativas ao cálculo estavam relacionadas ao movimento dos corpos, esta pesquisa teve por objetivo ***refletir sobre alguns aspectos do método das fluxões presentes em seu tratado***

intitulado “Princípios matemáticos da filosofia natural”, também conhecido como *Principia*.

Na investigação realizada nesta pesquisa, encontramos diversos materiais relacionados ao tema, tais como livros, artigos, teses e dissertações que muito contribuíram em nosso estudo, entre os quais podemos citar: Roque (2012), Alves (2008), Sad (2002), Westfall (1995), Cohen e Westfall (2002), Bassalo (1996), Baron (1985), Struik (1992), Alfonso-Goldfarb (1994), Santos (2001), Contieri (2006), Grande (2013), Boyer (1993), Eves (2011), entre outros.

No primeiro capítulo, apresentamos o contexto histórico no qual Newton desenvolveu seus estudos em filosofia natural. É apresentada uma breve biografia, bem como, as mudanças que marcaram o período no que diz respeito às concepções de ciência e à valorização da matemática como ferramenta para explicar os fenômenos da natureza.

No segundo capítulo, apresentamos dois dos principais problemas tratados pela matemática do século XVII, o traçado das tangentes a uma curva e a determinação da área abaixo das curvas, os quais estavam ligados à filosofia natural da época e que conduziram ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Encerramos o capítulo com um breve comparativo entre os métodos de Newton e Leibniz.

No terceiro capítulo, apresentamos as ideias de Newton relativas ao cálculo presentes nos *Principia*, utilizadas para tratar de problemas relacionados ao movimento dos corpos.

Ao término deste trabalho, apresentamos nossas considerações finais.

CAPÍTULO 1 – CONTEXTO HISTÓRICO

Isaac Newton (1642-1727) nasceu no dia de Natal, na casa senhorial de Woolsthorpe, em Lincolnshire, Inglaterra; e faleceu aos 84 anos, em Londres. Dentre as várias contribuições deixadas por Newton, podemos destacar: a teoria das cores, as leis do movimento, o teorema binomial e a lei da gravitação universal.

Não sabemos muito sobre sua formação a não ser o fato de que, aos 12 anos, ingressou em uma escola em Grantham, onde estudou latim e um pouco de grego, considerando-se o que era ensinado nos liceus ingleses daquela época. Apesar de não conter referência alguma à matemática ou à filosofia natural, o estudo do latim o ajudou muito, pois todas as obras que ele estudou posteriormente em matemática e a maioria das obras de filosofia natural eram escritas nesse idioma.

Pode-se dizer que o estudo do latim deu a Newton a possibilidade de ter acesso e comunicar-se com a ciência europeia da época, o que dificilmente teria conseguido sem esse conhecimento. Além do latim, nessas escolas inglesas era também estudada a Bíblia em línguas clássicas, o que pode ter influenciado os estudos de Newton em Teologia. (WESTFALL, 1995)

Durante sua estada em Grantham, Newton mostrou ter grande habilidade em trabalhos mecânicos, a ponto de seu quarto ser repleto de ferramentas. Por diversas vezes, ele deixava de lado os trabalhos escolares para se dedicar às suas invenções mecânicas, atitude que o levava a ser repreendido pelo Sr. Stokes, diretor do liceu de Grantham. Dentre essas invenções estão um protótipo de um moinho de vento, um carrinho com quatro rodas acionadas por uma manivela que ele girava ao sentar-se e uma lanterna para iluminar seu trajeto para a escola nas manhãs de inverno. Muitas dessas invenções foram tiradas de um livro chamado *The Mysteries of Nature and Art* (Os mistérios da natureza e da arte) de John Bate, que, segundo Westfall (1995), era um livro que alimentava seus interesses naturais. Além das invenções citadas anteriormente, Newton se dedicou aos relógios de sol, os quais exigiam muito mais que habilidade no manejo de ferramentas. Ele manteve uma espécie de calendário no qual era possível distinguir as fases do Sol indicando os equinócios e os solstícios, além dos dias do mês.

Essa habilidade e seu grande interesse pelas ciências da natureza foram de suma importância, pois alguns anos depois o conduziram a seus estudos em

filosofia natural, os quais possibilitaram, posteriormente, que ele se tornasse um importante membro da Royal Society.

Após sua formação em Grantham, em 5 de junho de 1661, Isaac Newton foi admitido como aluno do Trinity College na Universidade de Cambridge. No início de seus estudos na universidade, Newton não se destacou em nenhum aspecto. Em seus três primeiros anos no Trinity, ele deixou de lado o estudo do currículo oficial, centrado no *trivium* e *quadrivium*¹, o que se tornava um sério problema. Entretanto, tendo seu potencial sido reconhecido por Benjamin Pulleyn, tutor de Newton no Trinity, e pelo Dr. Isaac Barrow (1630-1677), único homem do colégio capaz de julgá-lo em suas habilidades matemáticas, Newton foi contemplado com uma bolsa de estudos no Trinity College, garantindo sua permanência em Cambridge (WESTFALL, 1995).

Além disso, para garantir a continuidade de seus estudos, em 1667, Newton se candidatou a uma das nove vagas de professor². Isso lhe garantiria uma permanência por tempo indeterminado em Cambridge. Apesar de suas chances serem pequenas, no dia 2 de outubro de 1667, Newton tornou-se professor do Trinity College (WESTFALL, 1995).

Entretanto, Newton não se dedicou apenas à universidade. No dia 15 de janeiro de 1689³, a Universidade de Cambridge o elegeu como representante no Parlamento Constituinte.

Na primavera de 1696, ele foi nomeado superintendente da Casa da Moeda e transferiu-se para Londres. A instituição passava por diversas crises e necessitava de uma liderança forte para conduzi-la e Newton deu tudo de si a exercer essa função. Sua habilidade com os números facilitou a compreensão imediata do sistema contábil da Casa da Moeda. O hábito que ele tinha de criar uma espécie de índice para organizar novos conhecimentos foi de grande serventia. Porém, seus afazeres na Casa da Moeda não o impediram de continuar suas investigações em filosofia natural. Por exemplo, em janeiro de 1697, Newton recebeu um desafio na forma de dois problemas formulados por Johann Bernoulli (1667-1748), que

¹ O estudo *trivium* (gramática da língua latina, retórica e lógica) durava quatro anos e levava ao grau de Bacharel em Humanidades. O do *quadrivium* (aritmética, geometria, música e astronomia) durava três anos e levava ao grau de Mestre em Humanidades.

² Nas universidades inglesas, o professor era um graduado de certo destaque, nomeado pela direção para residir e trabalhar num dos colégios, recebendo um estipêndio para desenvolver estudos avançados (Westfall, 1995, p. 61).

³ O Anexo A deste trabalho contém a cópia de um retrato de Newton, produzido nesse mesmo ano.

consistia em determinar a trajetória pela qual um corpo pesado desce mais rapidamente, de um ponto para outro não diretamente abaixo dele. Foi estabelecido um prazo de seis meses para a resolução. A resposta de Newton demorou, pois estava extremamente atarefado com as atividades da Casa da Moeda, porém, após passar uma noite sem dormir, resolveu o desafio, ao que Bernoulli, reconheceu dizendo: “*como se reconhece o leão por sua pata*” (WESTFALL, 1995).

Contudo, talvez os maiores reconhecimentos acadêmicos tenham ocorrido em 30 de novembro de 1703, data em que foi nomeado presidente da Royal Society de Londres, e em abril de 1705, quando foi sagrado pela rainha Ana como cavaleiro.

1.1 A Filosofia Natural

Diversas foram as contribuições de Newton para a filosofia natural, mas neste trabalho focaremos em alguns pontos de seus estudos em matemática. No entanto, antes de tratar a respeito do Cálculo desenvolvido por ele e suas ideias apresentadas nos *Principia*, é fundamental entender em qual contexto surgiram essas ideias e as razões pelas quais o seu método foi elaborado.

A esse respeito, Sad (2002), analisando os problemas epistemológicos no desenvolvimento do cálculo infinitesimal, destaca a importância de uma investigação na qual seja feita uma ligação entre a matemática e outras áreas da ciência, pois na época de Newton nem sempre o objetivo central foi o desenvolvimento da matemática. No desenvolvimento do Cálculo, incluindo os trabalhos de Newton, os problemas centrais estavam relacionados à Física e à Astronomia, que, naquele período, faziam parte da *Filosofia Natural*.

Alfonso-Goldfarb (1994) observa que a filosofia natural nasceu como uma mistura de velhas formas de explorar e conhecer a natureza, mas também era uma nova maneira de montar e combinar esses antigos conhecimentos. Segundo Alfonso-Goldfarb (1994), a nova filosofia natural foi decorrente de três aspectos:

- da precisão técnica do antigo artesão, construtor de ferramentas e explorador dos meios naturais;
- do poder de previsão da astronomia, em que, por meio de cálculos, podia-se prever e antecipar resultados sobre os fenômenos naturais;

- da necessidade de experimentar ou testar o novo.

Em linhas gerais, pode-se dizer que a precisão, a previsão e a experimentação eram as principais metas da nova filosofia natural e é nesse contexto que surgiu o interesse de Newton pelas matemáticas. Desde sua admissão como aluno do Trinity College em 1661, ele se dedicou totalmente ao estudo da filosofia natural, e, apesar do fato de o currículo do Trinity ser fundamentado nas ideias aristotélicas, os principais trabalhos e investigações realizados por Newton seguiram um rumo totalmente diferente.

De acordo com Westfall (1995), Newton escreveu em um caderno de anotações o título *Quaestiones quaedam philosophicae* (*Algumas questões filosóficas*) e acima do título escreveu o seguinte lema: *Amicus Plato amicus Aristoteles magis amica veritas* (*Platão é meu amigo, Aristóteles é meu amigo, porém minha maior amiga é a verdade*). Essas anotações mostram que Newton estudou as obras de vários autores que faziam parte da nova filosofia natural, entre eles, Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650) e Pierre Gassendi (1592-1655) e assim como eles, deixou de lado, parcialmente, o mundo de Aristóteles, dedicando-se inteiramente à filosofia mecânica (WESTFALL, 1995).

A reação antiaristotélica de Newton é compreensível se considerarmos o contexto europeu naquela época. A Europa viveu grandes mudanças durante e após o período do Renascimento devido ao entusiasmo com a possibilidade de acesso à cultura clássica por meio da recuperação de trabalhos perdidos (ALFONSO-GOLDFARB, 1994). No que diz respeito às matemáticas, por exemplo, desde o século XIII, obras de Euclides de Alexandria (séc. III a.C.), Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), Apolônio de Perga (262-190 a.C.) e Diofanto de Alexandria (c. 250) foram traduzidas para o latim, porém, as obras completas só foram recuperadas ao longo dos séculos XV e XVI (ROQUE, 2012).

Entretanto, esses antigos conhecimentos não só foram recuperados, mas também criticados, interpretados e, algumas vezes, rejeitados. Isso porque devido às grandes navegações, iniciadas por portugueses e espanhóis no século XV e intensificadas no século XVI, começam a surgir novidades não previstas nos textos dos antigos clássicos (ALFONSO-GOLDFARB, 1994). Além disso, muitos desses

textos que foram recuperados eram discordantes, devido a diferentes orientações de natureza filosófica, conduzindo os estudiosos daquela época a reavaliarem o conhecimento antigo. Esse movimento de leitura, interpretação, correção, etc., conduziu a uma nova forma de conhecer o mundo, desenvolvendo diferentes segmentos do conhecimento.

No que diz respeito à matemática, segundo Struik (1992), um fator que influenciou o seu rápido desenvolvimento foi o uso das máquinas. Para o autor, o interesse pelas máquinas conduziu ao desenvolvimento da mecânica teórica e ao estudo científico do movimento. Vale ressaltar que o movimento era um dos assuntos-chave na filosofia natural e, por consequência, o principal objeto de estudo no Cálculo desenvolvido por Newton.

É importante ter em conta, aqui, que, nesse período de grandes mudanças, a ciência oficial tinha como base as ideias de Aristóteles, que influenciavam totalmente o currículo das universidades. A lógica tinha um papel de extrema importância e a astronomia era respeitada, porém, a matemática ocupava uma posição marginal tendo uma função apenas propedêutica para ingresso em faculdades superiores, nas quais eram estudadas apenas a teologia, a jurisprudência e a medicina (ROQUE, 2012).

No que tange ao estudo do movimento, as ideias de Aristóteles estavam bastante sedimentadas. Segundo Porto (2009), para Aristóteles, movimento significava mudança, ou seja, representava uma passagem daquilo que está em “potência” para o “ato” (realidade). Esta mudança tinha quatro modalidades: nascimento (geração) e destruição (corrupção), mudanças de qualidades (alteração), mudanças de tamanho (crescimento ou diminuição) e deslocamentos (movimentos locais). Além disso, diferentemente da ideia mecanicista, a concepção aristotélica para o movimento era finalística e tinha um caráter qualitativo, ou seja, uma mudança (movimento) ocorria com a finalidade de passagem de um modo de ser à plena realização da essência desse ser.

A respeito da ideia aristotélica em relação ao movimento, Roque (2012) faz a seguinte observação:

O movimento era determinado pela qualidade, considerada uma propriedade essencial de um corpo. O “lugar” ocupado por um corpo era definido por suas qualidades essenciais. Ou seja, a Terra ocupa o centro do

Universo porque é pesada; alguns corpos caem porque são pesados; outros sobem porque são leves. O movimento seria, assim, a tendência de um corpo ocupar o seu lugar por essência. (ROQUE, 2012, p. 286)

O cosmos aristotélico era, assim, dividido em dois mundos: o mundo terrestre e o mundo celeste. O mundo terrestre era feito de matéria corruptível e, nele, os fenômenos de geração e corrupção ocorriam continuamente. Além disso, a cosmologia aristotélica rejeitava duas ideias: a do vácuo e a do infinito (uma das principais características do cálculo infinitesimal). Sendo assim, seu Universo era finito, limitado por uma esfera com a Terra ao centro, à qual estavam ligadas as estrelas, e era totalmente preenchido pela matéria (PORTO, 2009).

Essa visão aristotélica de mundo, entretanto, passava por mudanças na época de Newton. Todavia, é importante ressaltar que essa mudança não ocorreu de maneira simples e rápida, na verdade foi muito lenta. De acordo com Alfonso-Goldfarb (1994), as antigas ideias resistiram muito tempo.

Dentre as principais mudanças que gradativamente foram ocorrendo, podemos destacar, como observa Porto (2009):

- a adoção da linguagem matemática como forma de expressão de mecanismos impessoais de causa dos fenômenos físicos. A nova física distinguia-se radicalmente da física de Aristóteles pelo seu caráter eminentemente quantitativo;
- a substituição da ideia de um cosmos ordenado segundo critérios metafísicos por um espaço totalmente neutro e indiferenciado, representável por conceitos geométricos abstratos;
- o abandono da concepção aristotélica de movimento como processo de mudança, substituído por um conceito mais restrito de movimento, entendido apenas como deslocamento físico, deixando de lado as ideias de causas formais e finais – tal como preconizado por Aristóteles – em favor de uma concepção mecanicista, baseada na noção de causas eficientes que determinam o movimento do objeto a partir de uma ação exterior.

Assim, foi nesse contexto em que não só as concepções de ciência estavam se modificando, mas também em que as matemáticas passaram a ser valorizadas que Newton desenvolveu seu estudo sobre o cálculo. Como veremos a seguir, o método de fluxões de Newton estava estreitamente relacionado às questões ligadas à filosofia natural de sua época.

CAPÍTULO 2 – A MATEMÁTICA DO SÉCULO XVII, AS SUAS INFLUÊNCIAS NO CÁLCULO DE NEWTON E O MÉTODO DAS FLUXÕES

No século XVII, filósofos naturais, como Newton, foram rompendo com as ideias aristotélicas, e como consequência, utilizando cada vez mais a linguagem matemática para explicar os fenômenos naturais. Segundo Struik: *"A evolução do cálculo, participando da renovação total das matemáticas, ocorreu num ambiente intelectual no qual os pensadores gradualmente se iam libertando da antiga visão aristotélica da natureza"*. (STRUIK, 1992, p.162)

Dentre os problemas mais discutidos na matemática do século XVII estavam o traçado de tangentes das curvas (que hoje é chamado de diferenciação) e a determinação das áreas abaixo das curvas (que naquela época era denominada "quadratura" e que hoje é chamada de "integração"). (COHEN e WESTFALL, 2002)

De acordo com Roque (2012), a ideia antiga de tangente estava relacionada apenas ao comportamento de retas em relação a curvas dadas, definidas geometricamente. Porém, no século XVII, o problema das tangentes teria adquirido um significado técnico ou físico. Segundo Roque: *"As curvas procuradas representam, por exemplo, trajetórias de pontos ou curvas ópticas, e encontrar suas tangentes permite determinar a direção de um projétil ou o formato de lentes"*. (ROQUE, 2012, p. 337)

Como já se sabe, o método geral para o problema das tangentes (diferenciação) e para o problema das quadraturas (integração) foi alcançado de maneira independente por Isaac Newton e por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Não vamos aqui tratar desse assunto, entretanto, queremos apenas apontar para o fato de que uma das razões de Newton e Leibniz terem chegado à mesma ideia por caminhos diferentes está relacionado às fontes e aos objetivos de cada um deles.

No caso de Newton, segundo Cohen e Westfall (2002), seu interesse pela matemática surgiu em algum momento, durante o ano de 1664. Ao se deparar com os problemas das tangentes e da quadratura das curvas, Newton estudou *Os Elementos* de Euclides, que considerou muito óbvio num primeiro momento, mas a

que, posteriormente, deu a devida atenção, uma vez que foi de grande influência aos *Principia*.

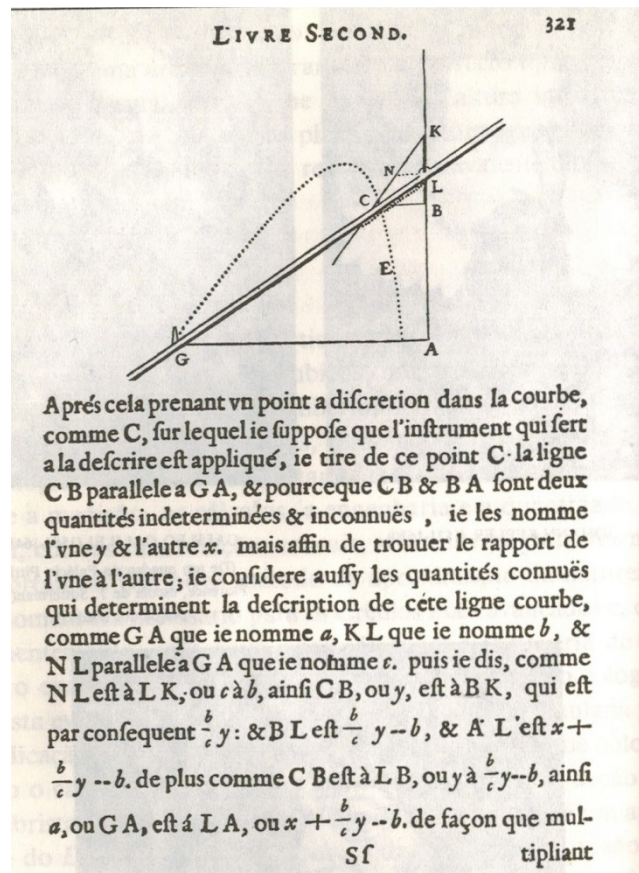
Além da obra de Euclides, ele se dedicou ao estudo de *La Géométrie* de Descartes, que lhe exigiu grande esforço; a *Aritmetica Infinitorum* (Aritmética do Infinito) de John Wallis (1616-1703), que, segundo Contieri (2006), tentava ampliar a obra de Cavalieri; e também, teve contato com o trabalho do Dr. Isaac Barrow, que apesar de não ter sido o tutor de Newton, foi de grande importância em sua vida e seu trabalho.

Para Struik (1992), Newton e Leibniz alcançaram o método geral para o problema das tangentes e da quadratura das curvas, pois conseguiram dominar os métodos geométricos dos gregos e de Cavalieri, além dos métodos algébricos de Descartes e Wallis. Além de um método geral, eles concluíram que um processo era o inverso do outro, o que hoje é conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo.

2.1 As contribuições de Descartes, Cavalieri, Wallis e Barrow

René Descartes teve papel importante na matemática do século XVII. Segundo Struik (1992), Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e encontrar a verdade nas ciências. Essas ideias foram expostas em seu tratado de geometria (*La Géométrie*) num apêndice intitulado *Discours de la Méthode*. Embora seja aceito o fato de que a publicação de *La Géométrie* corresponda ao nascimento da Geometria Analítica, vale ressaltar que não existem nessa obra eixos cartesianos ortogonais e deduções de equações de reta ou de cônicas. Em grande parte, Descartes apresenta uma regra para determinar raízes positivas e negativas (as quais chamou de verdadeiras e falsas) de equações algébricas (STRUİK, 1992).

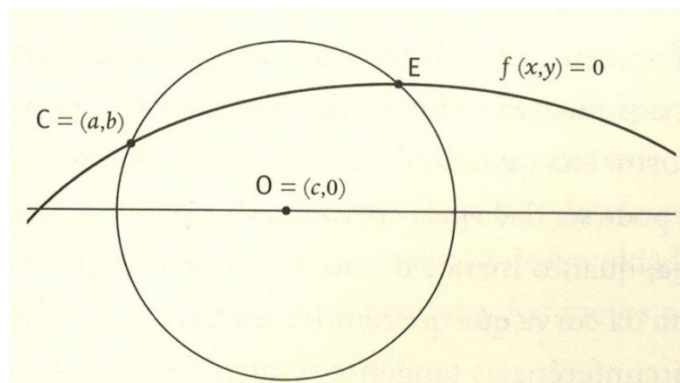
Segundo Westfall (1995), foi por meio da obra de Descartes que Newton aprendeu como desenhar a reta tangente a uma curva em um ponto dado.

Figura 1 – Página de *La Géométrie* de Descartes

Fonte: Struik (1992, p. 164)

O método de Descartes para traçar a tangente a uma curva consistia em traçar um círculo de centro O sobre um eixo, interceptando a curva dada nos pontos C e E, conforme a figura 2.

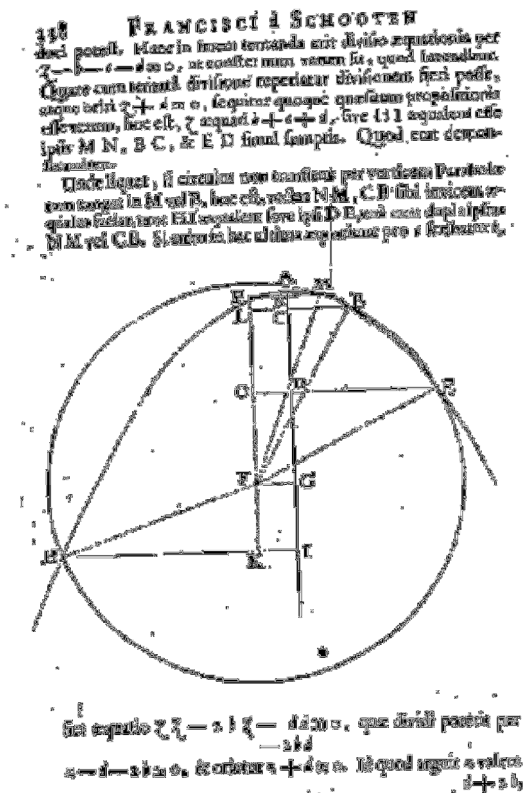
Figura 2 – Método de Descartes para determinar a tangente a uma curva



Fonte: Roque (2012, p. 339)

O objetivo do método era encontrar o centro do círculo, de maneira tal, que os pontos C e E fossem reduzidos a um só. Para Contieri (2006), com este método Descartes estava muito próximo do conceito rudimentar de *limite*, ou seja, a tangente assumiria a posição de limite da secante.

Figura 3 - Uso da circunferência para determinar a tangente à parábola no ponto M. Cópia de uma página dos comentários de F. Van Fchooten à obra *La Géométrie* de Descartes



Fonte: ⁴Pires (2004, p. 30)

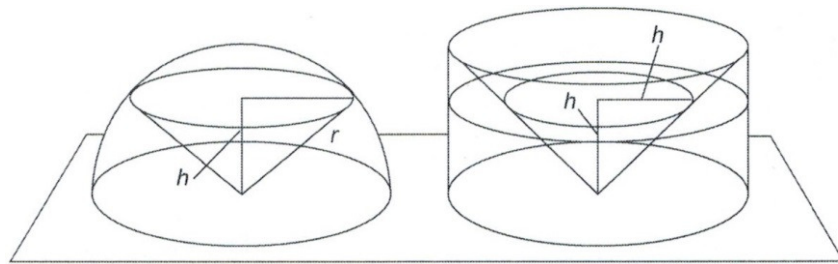
No entanto, a primeira exposição sistemática a esse respeito parece ter sido feita por Cavalieri. Struik (1992) afirma que a publicação da *Geometria Indivisibilium Continuorum* de Cavalieri em 1635 teria exposto sistematicamente os resultados obtidos até então do que hoje se conhece como cálculo infinitesimal.

Baseado na concepção do indivisível, Cavalieri admitia que: uma reta era composta de pontos; uma área era formada por um número infinito de segmentos

⁴ PIRES, J. A. L. Cálculo Diferencial: estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2004.

paralelos equidistantes (indivisíveis); o volume de um sólido era composto de infinitos planos paralelos equidistantes, considerados como *volumes indivisíveis*.

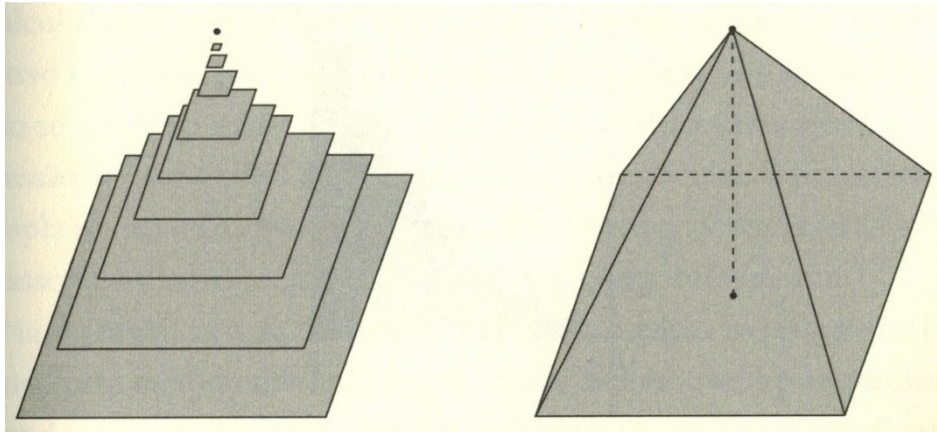
Figura 4 – Volume da Esfera (Cavalieri)



Fonte – Eves (2011, p. 428)

Embora Cavalieri tenha admitido um número infinito de elementos indivisíveis, esse não era o aspecto central de sua obra. De acordo com Sad (2002), seu emprego era apenas uma noção auxiliar, pois seu objetivo principal era a correlação entre os indivisíveis.

Figura 5 – Volume da pirâmide de base quadrada (Indivisíveis de Cavalieri)



Fonte: Roque (2012, p. 347)

Todavia, no desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o trabalho de Jonh Wallis parece ter sido um dos mais importantes do período que antecede aos trabalhos de Newton e de Leibniz. Wallis expôs um método que consistia em uma ampliação dos indivisíveis de Cavalieri, introduzindo séries infinitas e produtos

infinitos usando expoentes imaginários, negativos e fracionários. Grande (2013) considera a *Aritmetica Infinitorum* (Aritmética do Infinito) de Wallis a “arimetização” do método dos indivisíveis de Cavalieri.

Segundo Struik (1992), Wallis escreveu ∞ para $\frac{1}{0}$ (e sustentou $-1 > \infty$), e ainda, é responsável pelo desenvolvimento $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$.

Alem disso, Boyer (1993) apresenta um exemplo da utilização do método de Wallis para calcular a área abaixo da curva $y = x^2$, o que, em notação moderna, corresponde a $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Wallis formava a razão entre as somas dos quadrados de ordenadas igualmente espaçadas sob a curva $y = x^2$ e a soma dos quadrados das ordenadas correspondentes sob $y = 1$. Considerando-se só as ordenadas em $x = 0$ e $x = 1$, a razão é

$$\frac{0^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Subdividindo-se o intervalo entre $x = 0$ e $x = 1$ em duas partes iguais e imaginando-se cada parte como um intervalo unitário, a razão entre as somas dos quadrados torna-se

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2}{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

Dividindo-se o intervalo entre $x = 0$ e $x = 1$ em três subintervalos iguais e considerando-se cada um deles como um segmento unitário, a razão entre as somas dos quadrados é

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}.$$

Para Wallis tornou-se evidente, através de indução, que

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + n^2 + \dots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

e que, conforme n cresce indefinidamente, esta razão aproxima-se cada vez mais de $1/3$, de modo que para $n = \infty$ a razão será $1/3$. (BOYER, 1993, p. 13)

Além do trabalho de Wallis, não podemos deixar de destacar o trabalho desenvolvido por Isaac Barrow (1630-1677), o qual foi de grande importância e influência no cálculo de Newton, e também foi estudado por Leibniz.

Em seu trabalho, Isaac Barrow teve preocupações com questões filosóficas de fundamentos da matemática, defendendo o uso de formas rigorosas clássicas como a euclidiana, além de trabalhar com as ideias de seus antecessores Cavalieri e Wallis (SAD, 2002). Além dos seus trabalhos em matemática, também obteve grande projeção com seus trabalhos em física, astronomia e teologia (EVES, 2011).

Embora não tenha sido o tutor de Newton, Barrow deu a ele grande contribuição. Barrow envolveu Newton na publicação de seus dois conjuntos de palestras, atribuiu-lhe tarefas matemáticas e, ainda, permitiu que ele usasse sua biblioteca de matemática (WESTFALL, 1995).

Com a ajuda de Newton, Barrow publica *Lectiones opticae* em 1669 e *Lectiones geometricae* em 1670, contendo problemas de quadraturas, tangentes e retificação de curvas.

A respeito do fato de Barrow ter chegado próximo ao Teorema Fundamental do Cálculo, Sad (2002) faz a seguinte observação:

[...] as demonstrações de Barrow baseiam-se em estipulações geométricas rebuscadas, e, restringem-se somente a um dos resultados que teria esse famoso teorema, quer seja, obter integrais indefinidas a partir de integrais definidas, ficando a outra parte (o inverso) ainda por fazer. (SAD, 2002, p. 76)

A partir do estudo dos trabalhos de seus predecessores, Newton desenvolveu o seu próprio método para tratar do problema das tangentes e da quadratura das curvas. Segundo Cohen e Westfall (2002), suas anotações de leitura foram aos poucos se transformando em investigações originais, cujo produto final foi apresentado no tratado de outubro de 1666, como veremos a seguir.

2.2 O Método das Fluxões de Newton

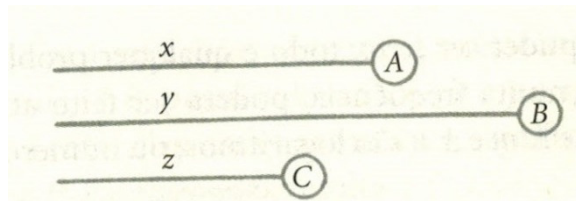
No inverno de 1664-1665, Newton começou a estender o método de séries infinitas de Wallis, usando expressões binomiais. E no outono de 1665, apresentou uma nova abordagem para o método de quadraturas e tangentes, *baseada no movimento de um corpo*. O resultado de todo esse trabalho, realizado em um ano e meio, foi apresentado no *tratado de outubro de 1666*, no qual Newton apresentou o **método das fluxões**. Era o nascimento do cálculo infinitesimal. (BASSALO, 1996)

Segundo Cohen e Westfall (2002), a estratégia adotada por Newton nesse tratado foi demonstrar como manipulações puramente algébricas poderiam fornecer a solução para problemas geométricos. Para Newton, o tempo fluía (termo *fluxão* vem do latim *fluere* que significa “fluir”) de maneira uniforme sendo a base para os fenômenos do movimento, podendo ser usado para expressar as velocidades com que, na linguagem atual, x e y se alteram. Vejamos como Newton se referiu às fluxões⁵:

⁵ Apresentamos aqui a tradução de Cohen e Westfall (2002) de algumas proposições do tratado de 1666.

Outubro de 1666. Para resolver problemas pelo movimento, as proposições que se seguem são suficientes. (COHEN e WESTFALL, 2002, p. 456)

Proposição 7: Dada uma equação que expresse a relação entre duas ou mais linhas, x, y, z etc., descritas por dois ou mais corpos em movimento, A, B, C etc. (figura abaixo), a relação entre as velocidades p, q, r etc., poderá ser assim encontrada: coloquem-se todos os termos de um dos lados da equação, para que eles sejam iguais a zero. E, primeiro, multiplique-se cada termo por tantas vezes p/x quantas x tiver dimensões nesse termo. Segundo, multiplique-se cada termo por tantas vezes q/y quantas y tiver dimensões nele. Terceiro (se houver três quantidades desconhecidas), multiplique-se cada termo por tantas vezes r/z quantas z tiver dimensões nesse termo. (E, se ainda houver mais quantidades desconhecidas, faça-se o mesmo com cada quantidade desconhecida.) A soma de todos esses produtos será igual a zero. Essa equação fornece a relação entre as velocidades p, q, r etc.



(COHEN e WESTFALL, 2002, p. 457)

Demonstração: Ora, se a equação que expressa a relação entre as linhas x e y for $x^3 - abx + a^3 - dy = 0$, posso colocar $x + po$ e $y + qo$ no lugar de x e y , porque elas, assim como x e y , significam linhas descritas pelos corpos A e B . Fazendo isso, resulta

$$x^3 + 3pox + 3ppox + p^3o^3 - abx - abpo + a^3 - dy - 2dqoy - dqqoo = 0$$

Mas $x^3 - abx + a^3 - dy = 0$ (por suposição). Portanto resta apenas

$$3pox + 3ppox + p^3o^3 - abpo - 2dqoy - dqqoo = 0$$

Ou, dividindo-a por o , temos

$$3px^2 + 3ppox + p^3oo - abp - 2dqy - dqgo = 0$$

Todos aqueles termos em que está o são infinitamente pequenos. Omitindo-os, portanto, resta

$$3pxx - abp - 2dqy = 0$$

O mesmo pode ser feito em todas as outras equações. (COHEN e WESTFALL, 2002, p. 461)

Utilizando uma linguagem matemática atual, teríamos:

$$x^3 - abx + a^3 - dy^2 = 0$$

Multiplicando os termos

$$3 \cdot \frac{p}{x} \cdot x^3 - \frac{p}{x} \cdot abx + 0 \cdot \frac{p}{x} \cdot 0 \cdot \frac{q}{y} \cdot a^3 - 2 \cdot \frac{q}{y} \cdot dy^2 = 0$$

Simplificando, temos a equação: $3pxx - abp - 2dqy = 0$.

Os infinitésimos estão presentes nesse método de Newton, porém, ele usou a ideia de velocidade instantânea para representá-los, sendo p e q as velocidades instantâneas de x e y , respectivamente, que hoje seriam representadas por dx/dt e dy/dt , e a razão p/q equivalente a dx/dy .

Além da velocidade instantânea, Newton usou a ideia de distância infinitesimal percorrida num momento de tempo, a qual foi representada por o . Na demonstração da Proposição 7 foram utilizadas as expressões $x + po$ e $y + qo$ no lugar de x e y e representam, em notação moderna, $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$. Vale ressaltar que a instrução de “multiplicar cada termo por tantas vezes p/x quantas x tiver dimensões (potência de x) nesse termo” é semelhante à técnica usada hoje com nx^{n-1} , para determinar a derivada de funções polinomiais.

Assim, a Proposição 8 apresenta o método de Newton para a quadratura das curvas, ou seja, para determinar a área abaixo da curva. Partindo de uma equação em x e q/p , deve-se encontrar y .

Proposição 8: Se dois corpos A e B , por suas velocidades p e q , descreverem as linhas x e y , e se for fornecida uma equação que expresse a relação entre uma das linhas, x , e a razão q/p de seus movimentos q e p , encontrar a outra linha y .

Sempre que isso puder ser feito, todo e qualquer problema poderá ser resolvido. Mas, com muita frequência, poderá ser feito através das seguintes regras. (Note-se que $\pm m$ e $\pm n$ são logaritmos, ou números que significam as dimensões de x .)

Primeiro, obtenha-se o valor de q/p ; se ele for racional e seu denominador compuser-se de um único termo, multiplique-se esse valor por x e divida-se cada termo dele pelo logaritmo de x nesse termo; o quociente deverá ser o valor de y . Onde, se:

$$ax^{m/n} = \frac{q}{p} \text{ então, } \frac{na}{m+n} x^{m+n/n} = y.$$

(COHEN e WESTFALL, 2002, p. 459)

É possível observar que, quando Newton usa a palavra *logaritmo*, está na verdade se referindo ao *expoente* de x . O algoritmo fornecido por Newton é idêntico ao utilizado hoje para determinar a primitiva de funções polinomiais. Por exemplo, para determinar a primitiva de $x^{1/2}$ usando o algoritmo newtoniano, teríamos:

Sendo $a = 1$, $m = 1$ e $n = 2$, logo, a primitiva de $x^{1/2}$ será $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

Esta técnica é semelhante à utilizada hoje que, para determinar a primitiva de x^α , deve-se fazer $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Esses resultados foram descritos em 1671 por Newton no ⁶*Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (Tratado dos métodos das séries e fluxões), que, segundo Santos (2011), só foi publicado em 1742, apesar de uma tradução para o inglês ser datada de 1736, com o título de *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*.

⁶ O Anexo B deste trabalho contém a cópia de uma página desse tratado.

Neste tratado Newton utilizou a seguinte notação para o método das fluxões:

- a, b, c , etc. para as quantidades conhecidas (constantes);
- v, x, y , e z para as fluentes (variáveis);
- $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}$ e $\dot{z}$ para as fluxões (velocidades);
- o para a quantidade ou acréscimo infinitamente pequeno;
- $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o$ e $\dot{z}o$ para os incrementos das variáveis em um intervalo de tempo infinitamente pequeno.

Baron (1985) apresenta um exemplo dado por Newton nesse tratado, usando a nova notação para o método.

Dada a equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, substitua $x + \dot{x}o$ em lugar de x e $y + \dot{y}o$ em lugar de y : surgirá

$$\begin{aligned} & \left(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}o^3 \right) - \left(ax^2 + 2a\dot{x}ox + a\dot{x}^2o^2 \right) + \left(axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 \right) - \\ & - \left(y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + y^3o^3 \right) = 0. \end{aligned}$$

Agora, pela hipótese $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ quando esses termos forem cancelados e o resto dividido por o , restará

$$3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

Supondo-se o infinitamente pequeno, a fim de expressar os momentos das quantidades, os termos que contêm o como fator podem ser desprezados. Portanto, restará

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

(BARON, 1985, p.29)

Um fator importante que devemos aqui considerar é que o texto de Newton não se referia a um ponto matemático em movimento, mas sim, a um corpo em movimento. Newton tinha acabado de criar um método geral (para diferenciação e

integração) que estava apto a lidar com problemas relacionados ao movimento dos corpos, algo que todos os pensadores do seu tempo almejavam.

Mas, diferentemente do Cálculo Diferencial e Integral que é estudado hoje, o cálculo desenvolvido por Newton estava relacionado a curvas representadas por uma equação e não ao conceito de função com aplicações de um conjunto (de números reais) em outro, que ainda não havia sido definido na época, o que veio a ocorrer somente no século XVIII (ALVES, 2008).

Embora outros matemáticos tenham desenvolvido métodos para determinar tangentes e quadratura de curvas, Newton parece ter sido o primeiro a perceber a natureza inversa entre os métodos, pois, ao término da demonstração da Proposição 7, ele afirmou que “*a Proposição 8 é o inverso dessa Proposição 7 e, portanto, pode ser analiticamente demonstrada por ela*” (COHEN e WESTFALL, 2002). Eram os primeiros passos para se chegar ao Teorema Fundamental do Cálculo.

Além de Newton, como veremos a seguir, Leibniz também percebeu a natureza inversa dos métodos, deixando sua contribuição no desenvolvimento do cálculo.

2.3 Gottfried Wilhelm Leibniz

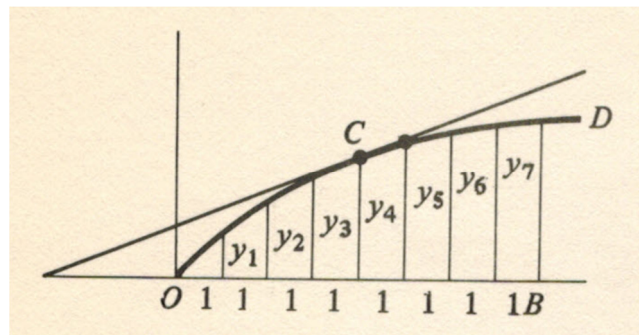
Leibniz nasceu em Leipzig, na Alemanha, no ano de 1646. Ele desenvolveu as ideias relativas ao cálculo entre os anos de 1672 e 1676, quando estava em Paris cumprindo uma missão diplomática. Assim que chegou a Paris, encontrou-se com o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695), a quem demonstrou o desejo de tornar-se um matemático. Segundo Bassalo (1996), Huygens recomendou-lhe a leitura das obras de René Descartes, Blaise Pascal (1623-1662), René-François Sluse (1622-1685), David Gregory (1659-1708) e Bonaventura Cavalieri. De acordo com Santos (2011), Leibniz ainda teria adquirido em 1673, um exemplar das *Lectioes geometricae* de Barrow.

Após resolver um problema de sequência de diferenças, dado por Huygens, Leibniz usou o mesmo raciocínio para deduzir alguns resultados importantes no triângulo harmônico, o qual é obtido pelo triângulo de Pascal. Com essas ideias, passou a tratar dos problemas da quadratura e das tangentes (GRANDE, 2013). A partir desses estudos, ele adquiriu um conhecimento que, segundo Baron (1985), foi fundamental para o desenvolvimento do seu cálculo: “*Somar sequências e tomar as*

suas sequências de diferenças são operações mutuamente inversas num certo sentido". (BARON, 1985, p. 46)

A figura 7 mostra um exemplo dado por Baron (1985), no qual Leibniz observou que, se a distância entre as ordenadas é igual a 1, então a soma das ordenadas é aproximadamente igual à área da curva (mesma ideia de Cavalieri), e as diferenças das ordenadas consecutivas na sequência dão aproximadamente o declive da tangente. Assim, Leibniz também percebeu a natureza inversa entre o problema das tangentes e da quadratura das curvas.

Figura 7 – Quadratura e tangente (Leibniz)



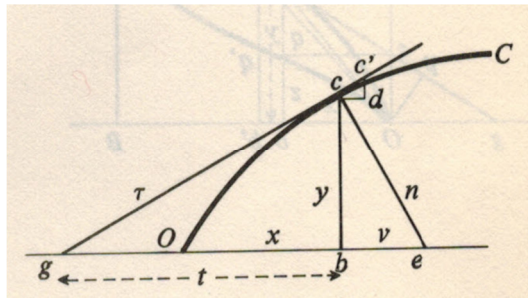
Fonte: Baron (1985, p. 46)

Assim surgiu, apesar de estar indefinida nesse período, a ideia de um *cálculo* de diferenças infinitamente pequenas e de somas de sequências ordenadas que servissem para resolver os problemas de quadratura e de tangentes, problemas cuja reciprocidade foi reconhecida. (BARON, 1985, p. 46)

Para estabelecer a regra geral para determinar a área sob a curva, Leibniz usou o *triângulo característico* e chamou essa regra de “*a transmutação*”, a qual resumiu da seguinte maneira: “*A área sob uma curva pode ser considerada como sendo a soma das áreas de retângulos pequenos, mas também, como sendo a soma das áreas de triângulos pequenos*” (BARON, 1985). A seguir, é apresentada uma descrição do triângulo característico.

Observando a figura abaixo, OcC é uma curva arbitrária, $\tau = cg$ é a tangente em c e $n = ce$ é a normal em c. Tome c' na tangente perto de c, tal que numa boa aproximação, cc' possa ser considerado coincidente com a curva. O triângulo pequeno cdc' é o “*triângulo característico*” em c. Ele é semelhante aos triângulos grandes cbe e gbc:

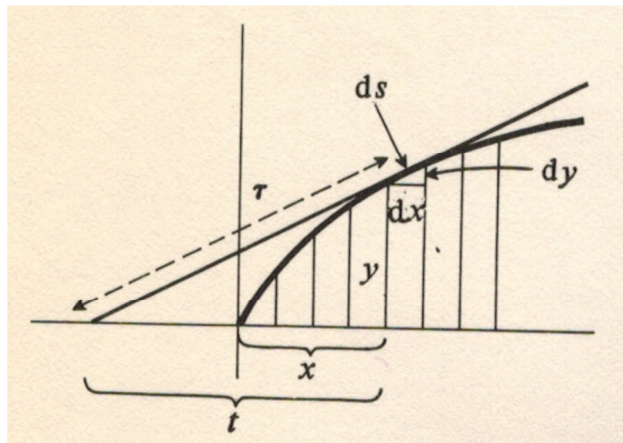
$$cd : dc' : cc' = y : v : n = t : y : \tau$$



(BARON, 1985, p. 47)

De acordo com um manuscrito de 1673, Leibniz usou o símbolo $\int$, que significa **suma** (do latim, soma) para representar a área sob curvas e dx e dy para representar as diferenças em x e y , respectivamente (SANTOS, 2011).

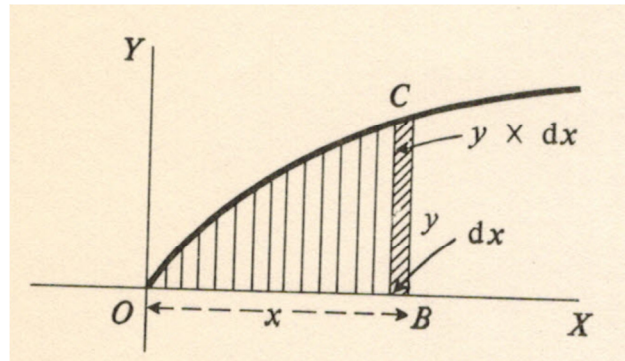
Figura 8 – Diferenciais de Leibniz



Fonte: Baron (1985, p. 58)

Segundo Bassalo (1996), em Novembro de 1676, Leibniz encontrou regras gerais para $dx^n = nx^{n-1}dx$ e $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Figura 9 – Integral de Leibniz



Fonte: Baron (1985, p. 60)

Leibniz publicou o seu cálculo no *Acta Eruditorum* em 1684 e, de acordo com Struik (1992), foi o primeiro a usar as expressões *calculus differantialis* (cálculo diferencial) e *calculus integralis* (cálculo integral).

2.4 Comparativo entre os métodos de Newton e Leibniz

Após o estudo das contribuições de Newton e Leibniz, é importante analisar as diferenças entre os métodos. Bassalo (1996) destaca alguns aspectos que os diferenciam, entre os quais, estão:

- **Quantidades variáveis:** Newton considerou-as *dependentes do tempo*, enquanto Leibniz, como *percorrendo sequências de valores infinitamente próximos*;
- **Variação das quantidades:** Newton chamou-a de *fluxão* e Leibniz, de *diferencial*;
- **Conceito de integração:** para Newton, consistia em determinar os *fluentes* de fluxões dadas. Leibniz considerou uma *somatória*;
- **Os infinitesimais:** no caso de Newton, estes eram apenas um mecanismo para encontrar as fluxões, enquanto que Leibniz considerou-os realmente como pequenos acréscimos.

Vale destacar que tanto o ponto de partida tanto de Newton quanto o de Leibniz foi o estudo das séries infinitas: no caso de Newton, quando começou ampliar o método de Wallis para expressões binomiais, enquanto Leibniz, a partir de resultados no triângulo harmônico, obtido a partir do triângulo de Pascal (BARON, 1985).

A seguir, veremos como Newton expôs o método das fluxões em sua maior obra, os *Principia*, a fim de resolver problemas relacionados ao movimento dos corpos.

CAPÍTULO 3 – *PRINCIPIA*

Em agosto de 1684, Newton recebeu uma visita que mudaria totalmente o rumo de sua vida. Edmond Halley (1656-1742) foi à Cambridge e expôs a Newton um problema que vinha sendo discutido na Royal Society há seis meses: a derivação das leis do movimento planetário de Johannes Kepler a partir dos princípios da dinâmica. De imediato, Newton respondeu que a órbita descrita pelos planetas era uma elipse, pois ele já havia calculado (WESTFALL, 1995).

A visita de Halley incentivou Newton a escrever um tratado chamado *De motu*, no qual demonstrou a dinâmica orbital que resultava nas três leis de Kepler. Segundo Cohen e Westfall (2002), nos primeiros meses de 1685, Newton começou a trabalhar na revisão e ampliação de *De motu*, colocando como conceito central a força centrípeta:

[...] que expressava a percepção de que o movimento circular ou orbital é um movimento acelerado e de que um corpo só continuará a se mover numa órbita fechada enquanto uma força que impele para o centro o sustentar nessa trajetória. (COHEN e WESTFALL, 2002, p. 272)

O tratado foi ampliado e, à sua versão final em dois volumes, foi dado o nome de *De motu corporum* (*Do movimento dos corpos*), apresentando os princípios da mecânica racional, o que hoje é conhecido como dinâmica. Porém, Newton começou a ampliar o trabalho, redigindo um terceiro volume para uma investigação dos movimentos terrestres e celestes, o que o conduziu à lei da gravitação universal (WESTFALL, 1995).

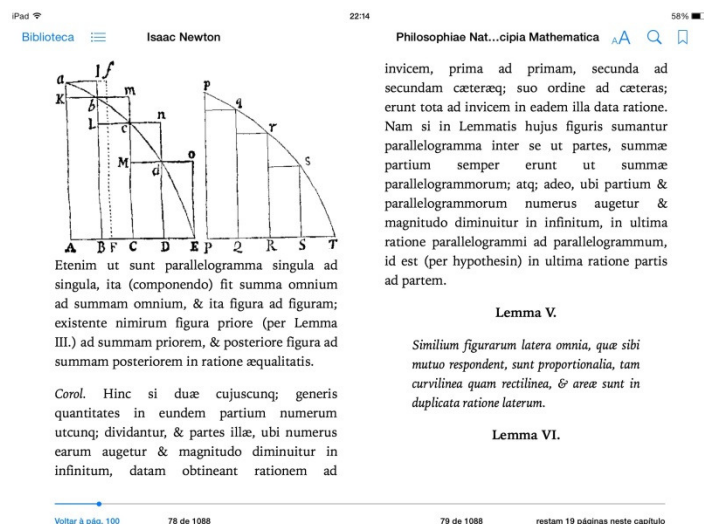
No dia 5 de julho de 1687, é publicada a maior obra de Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Princípios matemáticos da filosofia natural*) também conhecida como ⁷*Principia*. A obra era dividida em três volumes: os Livros I e II, com o título *De motu corporum*, sendo o Livro I voltado inteiramente para o movimento dos corpos em espaços livres de resistência e o Livro II para problemas em meios resistentes; o Livro III com o título *De mundi systemate* (O sistema do mundo), no qual apresenta a lei da gravitação universal.

⁷ O Anexo D deste trabalho contém uma cópia da página 27 desse tratado.

Seguindo a nova concepção científica, que adotava a linguagem matemática para explicar os fenômenos naturais e representava o cosmos por meio de conceitos geométricos abstratos, Newton elaborou os *Principia* estabelecendo a mecânica sobre uma fundamentação axiomática (STRUICK, 1992).

Segundo Sad (2002), a geometria ainda era o campo matemático mais fortemente presente naquela época e, para Newton, isso traria rigor às suas provas. A geometria utilizada nessa obra mostra que Newton se dedicou ao estudo da obra de Euclides, além das influências de seu predecessor Isaac Barrow, como mencionamos anteriormente. Nos *Principia*, Newton deixa de lado o ⁸silogismo de Aristóteles e adota o método axiomático de Euclides.

Figura 10 – Página dos *Principia* de Newton



A obra é iniciada com oito definições, que são as seguintes: a quantidade de matéria; a quantidade de movimento; a *vis insita* ou força inata da matéria; a força imprimida; a força centrípeta; a quantidade absoluta de uma força centrípeta; a quantidade acelerativa de uma força centrípeta; a quantidade motora de uma força centrípeta.

Após as definições, são apresentados os axiomas ou leis do movimento:

⁸ Termo filosófico com o qual Aristóteles designou a argumentação lógica perfeita, constituída de três proposições declarativas que se conectam de tal modo que a partir das duas primeiras, chamadas premissas, é possível deduzir uma conclusão. Por exemplo: Todo homem é mortal (premissa maior). Sócrates é um homem (premissa menor). Logo, Sócrates é mortal (conclusão).

Lei I (Princípio da Inércia): *Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.*

Lei II (Princípio Fundamental da Dinâmica): *A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

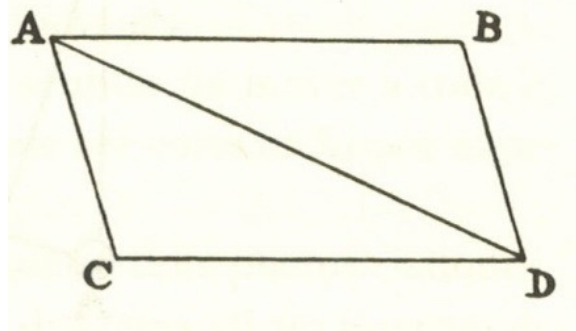
Lei III (Princípio da Ação e Reação): *A toda ação há sempre oposta uma reação igual ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.* (NEWTON, 2012, p. 53)

Após a exposição das leis do movimento, Newton apresenta seis corolários decorrentes dessas leis. A seguir, é mostrado o Corolário I.

Corolário I: *Um corpo, submetido a duas forças simultaneamente, descreverá a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que ele descreveria os lados pela ação daquelas forças separadamente.*

Se um corpo num dado tempo, pela força M imprimida separadamente no lugar A , fosse levado com um movimento uniforme de A até B , e pela força N imprimida separadamente no mesmo lugar, fosse levado de A para C , completa do paralelogramo $ABCD$, e por ambas as forças agindo juntas, o corpo seria levado, no mesmo tempo, na diagonal de A para D . (NEWTON, 2012, p. 55).

Figura 11 – Paralelogramo do Corolário I das Leis do Movimento



Fonte: Newton (2012, p. 55)

Segundo Newton (2012), pela *Definição IV*, “a força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo a fim de alterar seu estado, seja de repouso, seja de movimento uniforme em uma linha reta”. Por esse corolário, ele mostra que, se um corpo sofre a ação de duas forças, ao mesmo tempo, o movimento do corpo será a resultante da ação dessas duas forças.

Hoje, entendemos que Força é uma grandeza vetorial, pois tem módulo, direção e sentido, logo, é possível afirmar que a ideia apresentada por Newton no Corolário I é semelhante ao que hoje é conhecido como a *regra do paralelogramo* para a soma de vetores. Se considerarmos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do paralelogramo da figura como segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, temos que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Terminadas as apresentações das definições e das leis do movimento, Newton inicia o Livro I, intitulado *O Movimento dos Corpos*, o qual está dividido em catorze seções contendo proposições e teoremas, bem como suas demonstrações. A organização adotada por Newton nos *Principia* é idêntica à adotada por Euclides em *Os Elementos*.

3.1 As ideias de Newton, relativas ao Cálculo, nos *Principia*

Como mencionamos, Newton expôs suas ideias referentes ao Cálculo no tratado de outubro de 1666, no qual apresentou o método das fluxões que, segundo Bassalo (1996), ainda apresentava uma notação provisória e complicada. Ao final do mesmo ano, Newton afastou-se da matemática a fim de se dedicar a outros estudos. Lembremos também que, em outubro de 1684, Leibniz publicou seu trabalho a respeito do Cálculo Diferencial no *Acta Eruditorum Lipsiensium* (*Ata dos Eruditos de Lípsia* (Leipzig)) o que levou Newton a pensar na possibilidade de publicar seus trabalhos em matemática. Por volta de 1691, ele resolveu dar continuidade a um tratado que havia iniciado em 1676, chamado ⁹*De Quadratura Curvarum* (*Sobre a Quadratura das Curvas*), em que apresenta uma série de problemas, semelhantes aos de Leibniz, resolvidos pelo método das fluxões (BASSALO, 1996).

⁹ O Anexo C deste trabalho contém a cópia de uma página desse tratado.

Bassalo (1996) afirma que, em *De Curvatura*, Newton adotou definitivamente a seguinte notação:

- $\dot{x}$ para representar a fluxão de x ;
- x' para representar o fluente cuja fluxão é x ;
- Q (de quadratura), que substitui o $\int$ de Leibniz;
- Dobrou os pontos (.) e as linhas (') para representar, respectivamente, fluxões de fluxões e fluentes de fluentes.

Pode-se dizer que, no *De Quadratura*, Newton deixava de lado os acréscimos infinitesimais e explicava o método das fluxões em termos da *primeira razão de quantidade finita nascente* e da *última razão de quantidade ínfima* (BASSALO, 1996). Seguindo essa mesma ideia, Baron (1985) cita um trecho do tratado, no qual Newton observa o seguinte:

Não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes *extremamente pequenas*, mas como sendo geradas por um *movimento contínuo*. Linhas são descritas, e ao descrevê-las são geradas. Não por um alinhamento de partes, mas por um movimento contínuo de pontos. As superfícies são geradas pelo movimento de linhas, os sólidos pelo movimento de superfícies, os ângulos pela rotação de seus lados, o tempo por um fluxo contínuo, etc. Essa gênese está baseada na natureza e pode ser vista dia a dia no movimento dos corpos. (BARON, 1985, p. 31)

Em outro trecho, Newton fazia a seguinte referência ao tratado de outubro de 1666:

(...) esforcei-me para encontrar um método que determinasse as quantidades das velocidades, dos movimentos ou dos incrementos, que as geraram. Chamando de *fluxões* às velocidades dos movimentos ou dos aumentos e de *fluentes* às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos

anos de 1665 e 1666) o método das fluxões, que aproveito aqui na *Quadratura das curvas*. (BARON, 1985, p. 31)

Foi com esta abordagem, apresentada no *De Quadratura*, que Newton expôs suas ideias relativas ao Cálculo nos *Principia* a fim de demonstrar diversos Lemas do Livro I que trata do movimento dos corpos em espaços livres de resistência.

De acordo com Cohen e Westfall (2002), Newton não se sentia à vontade com os infinitésimos, que, a seu ver, tinham credenciais geométricas duvidosas. Como ele fundamentou o seu Cálculo, nos *Principia*, por meio da geometria, associou aos infinitésimos a ideia de velocidade instantânea. Assim, no Livro II, que trata do movimento dos corpos em meios com resistência, Newton se deparou com problemas mais complexos. No Lema 2, ele fez uma exposição sucinta do método fluxional, apresentando os algoritmos do método de cálculo.

3.1.1 As primeiras e últimas razões das quantidades

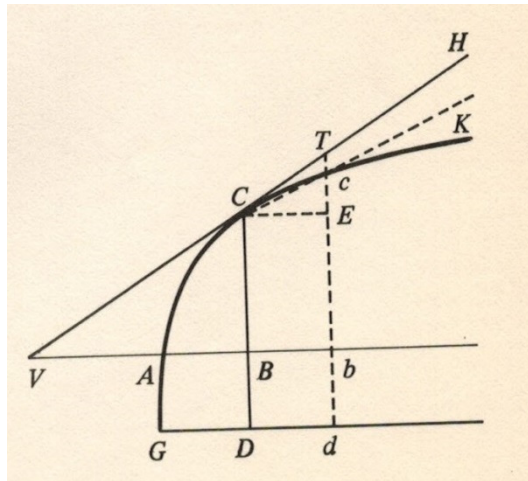
Em *De Quadratura*, Newton utilizou alguns exemplos para explicar o seu método:

As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempo iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato, diria que estão na *primeira razão* dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas ABC , $ABDG$ forem descritas pelas ordenadas BC e BD , que se movem uniformemente ao longo da base AB , então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas BC e BD que as descrevem e poderão ser representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas. (BARON, 1985, p. 31)

Observando a figura 12, é possível notar que as áreas ABC e $ABDG$ são geradas pelo movimento das ordenadas BC e BD . A linha BCD move-se de maneira uniforme sobre a base AB , determinando que:

$$\frac{\text{fluxão de } ABC}{\text{fluxão de } ABDG} = \frac{BC}{BD}$$

Figura 12 - Ilustração do método das primeiras e últimas razões



Fonte: Baron (1985, p. 31)

A respeito desse trecho, Baron (1985) faz algumas observações, entre as quais é possível destacar: o fato de as quantidades serem geradas por movimento; as velocidades dos movimentos são as fluxões e as quantidades geradas são os fluentes. Para a autora, isso poderia ser escrito em notação moderna com x , y e z sendo os fluentes, e ainda, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ (representados respectivamente por $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) sendo as fluxões.

De acordo com Bassalo (1996) e Baron (1985), Newton também apresenta um exemplo para calcular a fluxão de uma curva expressa por $y = x^n$. Deixando x fluir em um intervalo de tempo, x^n torna-se $(x+o)^n$ que, pelo método das séries infinitas seria $x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$. Newton percebeu que os aumentos o e $nox^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$ estavam relacionados entre si como 1 e $nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2} + \dots$, constituindo a *primeira razão*. Fazendo os aumentos

desaparecerem, encontrou a *última razão*: $1 : nx^{n-1}$. Para os autores, isso poderia ser escrito, em notação moderna, da seguinte maneira:

$$\text{Se } y = x^n, \text{ então, } \lim_{o \rightarrow 0} \left(\frac{o}{(x+o)^n - x^n} \right) = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

Após encontrar a *última razão*, Newton afirmava que, com esse método, era possível obter as fluxões de linhas, sejam elas retilíneas ou curvadas, além das fluxões de áreas, de ângulos e de outras quantidades.

3.1.2 O método das razões no Livro I dos *Principia*

Apesar de apresentar o Cálculo, nos *Principia*, de maneira diferente da que foi utilizada no tratado de outubro de 1666, deste tratado Newton usou os padrões de raciocínio, o conceito de taxas de variação instantânea, a abordagem das áreas e o processo dos limites (COHEN e WESTFALL, 2002).

Como o objetivo desta pesquisa é estudar alguns aspectos do método das fluxões presentes nos *Principia*, abordamos, a seguir, os Lemas I, II, III, VI e VII da Seção I por conterem problemas relacionados à determinação da área abaixo de uma curva e às tangentes a uma curva.

A Seção I do Livro I é iniciada da seguinte maneira:

O método da primeira e última razões de quantidades, com o auxílio do qual demonstramos as proposições abaixo.

Lema I: *As quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do fim desse tempo, aproximam-se mais uma da outra do que por qualquer diferença dada, tornam-se finalmente iguais.*

Se você negá-lo, suponha-as como finalmente desiguais, e tome D como sendo a última diferença. Portanto, elas não podem se aproximar mais da igualdade do que por essa diferença dada D ; o que contraria a suposição. (NEWTON, 2012, p. 71)

Baron (1985) e Bassalo (1996) concordam em dizer que o Lema 1 trata-se de uma tentativa de Newton de definir o conceito de Limite. Bassalo (1996) afirma que o método das razões é reconhecido hoje como o precursor da Teoria dos Limites.

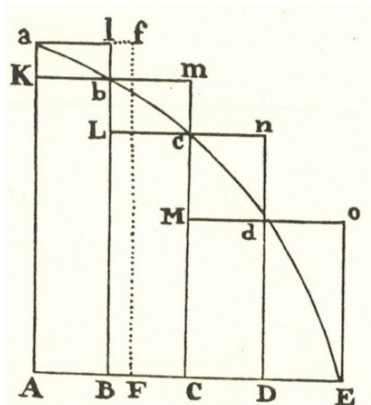
Segundo Baron (1985), por meio desse Lema, Newton tenta explicar algo parecido com o seguinte exemplo: dadas duas quantidades Q_1 e Q_2 , dizemos que elas variam com o tempo. Se a diferença entre Q_1 e Q_2 diminuir continuamente, em um intervalo de tempo finito, de tal maneira que, uma se aproxime da outra, então, teremos que $Q_1 = Q_2$, ou seja, na linguagem moderna, $\lim_{t \rightarrow \infty}(Q_1) = \lim_{t \rightarrow \infty}(Q_2)$.

Nos lemas seguintes, Newton apresenta alguns problemas resolvidos por meio do método das razões. Os problemas envolvem o cálculo de áreas abaixo de curvas e as tangentes a uma curva.

O Lema II apresenta um problema relacionado à determinação da área abaixo da curva:

Lema II: *Se em qualquer figura AacE, delimitada pelas retas Aa, AE e a curva acE, existirem um número qualquer de paralelogramos Ab, Bc, Cd etc., de bases iguais AB, BC, CD etc., e lados Bb, Cc, Dd etc., paralelos a um lado Aa da figura; e os paralelogramos aKbl, bLcm, cMdn etc., forem completados; então, se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressivamente diminuída e o seu número aumentado in infinitum, afirmo que as razões finais que a figura inscrita AKbLcMdD, a figura circunscrita AalbmcndoE e a figura curvilínea AabcdE, terão uma para a outra, são razões de igualdades. (NEWTON, 2012, p. 71)*

Figura 13 - Demonstração dos Lemas II e III



Fonte: Newton (2012, p. 72)

O método descrito por Newton para determinar a área abaixo da curva acE , com centro em A , consiste no seguinte:

- É necessário desenhar um número qualquer de paralelogramos inscritos a essa curva, que no caso da Figura 13, são aqueles que têm bases $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, formando a figura inscrita $AKbLcMdD$, cuja área é menor que a área procurada;
- Em seguida, desenhar paralelogramos menores, que no caso da Figura 13, são os de bases $\overline{Kb}$, $\overline{Lc}$, $\overline{Md}$ e $\overline{DE}$, obtendo a figura circunscrita $AalbmcndoE$, cuja área é maior que a área procurada;
- Se a largura dos paralelogramos for diminuída, o número de paralelogramos irá aumentar infinitamente, fazendo com que a área da figura inscrita aumente e a área da figura circunscrita diminua e ambas se aproximem da área da figura curvilínea, até o momento em que as três áreas serão iguais.

Newton usa a mesma figura anterior para mostrar o seguinte:

Lema III: *As mesmas razões finais serão também razões de igualdade quando as larguras AB , BC , CD etc., dos paralelogramos são desiguais, e forem diminuídas in infinitum. (NEWTON, 2012, p. 72)*

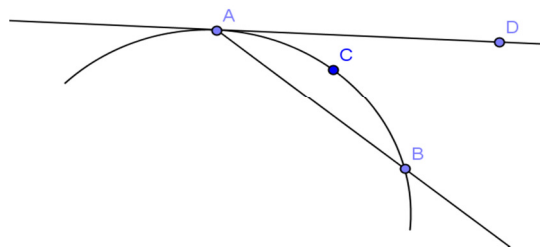
Por esse Lema, Newton procura mostrar que o método das razões pode ser utilizado mesmo que as larguras dos paralelogramos sejam diferentes, trazendo o mesmo resultado para a determinação da área da figura curvilínea. Como exemplo, ele utiliza, na mesma figura, o paralelogramo $FAaf$, cuja base $\overline{AF}$ possui uma largura maior que as demais. Este paralelogramo é maior que a diferença entre as figuras inscrita e circunscrita, porém, como sua largura AF é diminuída infinitamente, ele será menor que qualquer outro paralelogramo dado.

Os Lemas VI e VII tratam do problema das tangentes a uma curva. No Lema VI, Newton afirma o seguinte:

lados estão se aproximando um do outro. Se o ângulo deixar de existir, seus lados estarão sobrepostos um ao outro e, portanto, a secante será igual à tangente. Aqui nesse lema, segundo Contieri (2006), Newton utilizou uma ideia semelhante à de Descartes em seu método para determinar a tangente a uma curva.

Seguindo a descrição dada por Newton, a demonstração se dá da seguinte maneira:

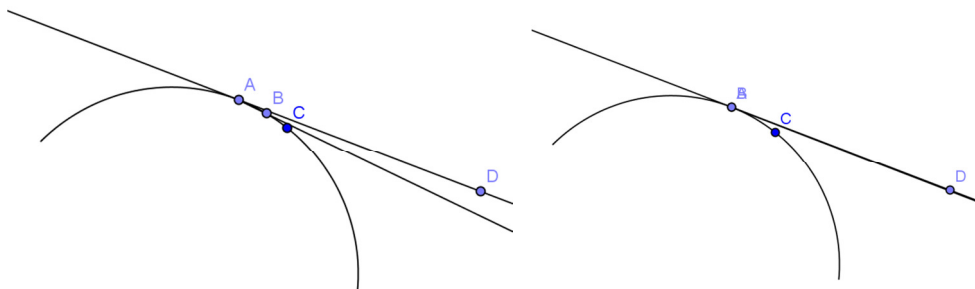
Figura 15 – Problema dos Lemas VI e VII reproduzido no Geogebra



Fonte: Autor

Se movimentarmos o ponto B até A sobre a curva, até se encontrarem, notaremos que a secante $\overline{AB}$ e a tangente $\overline{AD}$ se sobrepõem, tendo assim uma razão de igualdade.

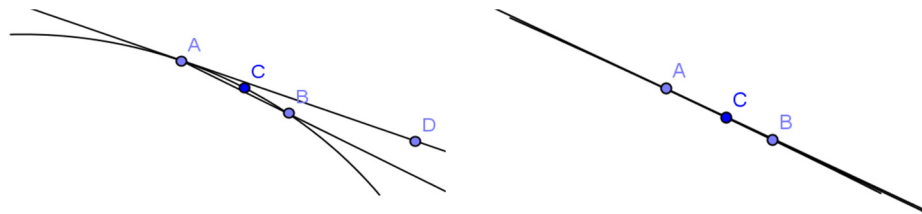
Figura 16 - Razão de Igualdade entre a tangente e a secante no Geogebra



Fonte: Autor

Também se movimentarmos o ponto C notaremos que, à medida que ele é movido para baixo, a curvatura do arco vai diminuindo até desaparecer. Dessa maneira, a curva, a secante e a tangente estarão sobrepostas, ou seja, em razão de igualdade.

Figura 17 - Razão de Igualdade entre a tangente, a secante e o arco no Geogebra



Fonte: Autor

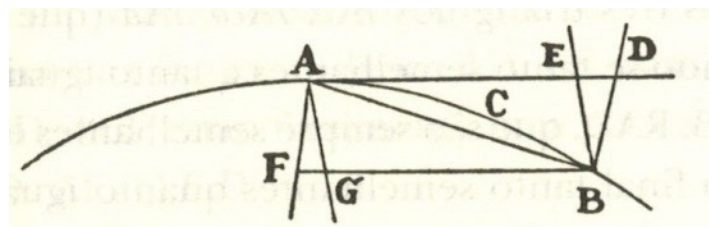
Do Lema VII, decorrem três corolários:

Corolário I: Assim, se através de B traçarmos BF , paralelamente à tangente, sempre cortando qualquer reta AF , passando por A , em F , esta linha BF estará, ao final, em razão de igualdade com o arco evanescente ACB ; porque, completando o paralelogramo $AFBD$, ela está sempre em razão de igualdade com AD .

Corolário II: E se por B e A forem traçadas mais linhas retas, como BE , BD , AF , AG , cortando a tangente AD e sua paralela BF , a razão final de todas as abscissas AD , AE , BF e BG , e da corda e do arco AB , entre qualquer um deles, será a razão de igualdade.

Corolário III: E, portanto, em todo o nosso raciocínio sobre razões finais, podemos livremente usar qualquer uma dessas linhas no lugar de qualquer outra. (NEWTON 2012, p. 75)

Figura 18 - Ilustração dos corolários decorrentes do Lema VII



Fonte: Newton (2012, p. 75)

Nos três corolários, Newton utiliza as propriedades do paralelogramo para a demonstração, pois em todo paralelogramo, os lados opostos são paralelos e congruentes. Pelo Corolário I, $\overline{BF}$ está em razão de igualdade com o arco ACB , pelo fato de estar em razão de igualdade com sua tangente $\overline{AD}$, pois são lados

opostos do paralelogramo $AFBD$. No Corolário II, ao traçar as linhas $\overline{AG}$ e $\overline{BE}$, formou-se o paralelogramo $AGBE$, logo temos que, $\frac{BE}{AG} = \frac{BD}{AF}$ e $\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{BG}$, garantindo o que Newton afirma no Corolário III, a respeito de usar qualquer linha no lugar de outra.

No Escólio da Seção I, Newton destaca alguns aspectos importantes do método utilizado:

- O que foi demonstrado para linhas curvas e superfícies pode ser aplicado às superfícies curvas e aos sólidos;
- Os lemas foram demonstrados de maneira diferente da utilizada pelos antigos geômetras (demonstrações *ad absurdum*), que, segundo ele, eram tediosas;
- As demonstrações se diferem do método dos indivisíveis, pois são mais curtas e reduzidas aos limites das somas e razões;
- Não se refere a indivisíveis, mas a quantidades divisíveis evanescentes¹⁰;
- Não se refere à soma e razões de determinadas partes, mas sempre aos limites das somas e razões;
- A força de cada demonstração depende sempre do método exposto nos lemas anteriores.

¹⁰ Quantidades tão pequenas quanto se queira, isto é, infinitesimais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir do levantamento bibliográfico e da investigação realizada nesta pesquisa, compreendemos a necessidade de destacar alguns aspectos a respeito das contribuições de Isaac Newton para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

O contexto no qual o cálculo de Newton, conhecido como método das fluxões, se desenvolveu não era estritamente matemático, mas envolvia seus estudos em filosofia natural, acerca dos problemas relacionados ao movimento dos corpos. No século XVII, a filosofia natural passou por diversas mudanças, de maneira tal, que os filósofos naturais desse período, incluindo Newton, foram aos poucos deixando de lado as ideias aristotélicas, principalmente, no que diz respeito ao cosmos e às concepções de movimento. Dentre as principais mudanças, podemos destacar a valorização da matemática e sua utilização para explicar os fenômenos da natureza. Com essa nova visão, a matemática se desenvolveu de maneira significativa nesse período.

Dentre os problemas mais importantes da matemática do século XVII, dois deles foram o ponto de partida para o surgimento do cálculo infinitesimal: o problema da tangente a uma curva (o que hoje conhecemos como diferenciação) e o problema da quadratura das curvas (o que hoje conhecemos como integração), que consistia em determinar a área abaixo da curva. A resolução desses problemas teve a contribuição de vários filósofos naturais e matemáticos, entre eles, René Descartes, Bonaventura Cavalieri, John Wallis e Isaac Barrow, os quais foram de grande influência no trabalho de Newton. A partir dos estudos de seus predecessores, Newton desenvolveu o método das fluxões, apresentado no tratado de outubro de 1666.

Apesar de outros matemáticos terem dado suas contribuições para os problemas da tangente e da quadratura das curvas, Newton parece ter sido o primeiro a perceber a natureza inversa desses problemas (o que hoje conhecemos como o Teorema Fundamental do Cálculo), bem como a desenvolver um método geral. De maneira independente, Gottfried Wilhelm Leibniz também chegou às mesmas conclusões que Newton, cerca de dez anos depois, porém, foi o primeiro a publicar o seu método.

Nos *Principia*, Newton expõe o método das fluxões de maneira diferente da apresentada no tratado de outubro de 1666, denominando-o como *o método da primeira e última razões de quantidades*. A fim de demonstrar seu método, Newton usou a geometria clássica, deixando de lado o silogismo de Aristóteles, utilizando o método axiomático de Euclides. Nesse tratado, são apresentados diversos problemas referentes à tangente a uma curva e à quadratura das curvas (sempre relacionados ao movimento dos corpos), os quais são resolvidos pelo método da primeira e última razões.

Assim sendo, retomamos aqui a questão formulada para esta pesquisa: *o que era realmente o cálculo em sua origem?*

Considerando todas as reflexões apresentadas neste trabalho, podemos dizer que, em sua origem, o cálculo desenvolvido por Newton consistia em um método geral para a determinação da tangente à uma curva e da área abaixo da curva, sendo que um processo era o inverso do outro e tinha como objetivo resolver problemas relacionados ao movimento dos corpos.

Diante do que expomos aqui, vale ressaltar a necessidade de um olhar mais cuidadoso para o relato tradicional da história da matemática que, embora tenha sua contribuição, se baseia na matemática que conhecemos hoje (ROQUE, 2012). Essa abordagem, muitas vezes, dá a entender que os conceitos matemáticos surgiram exatamente como os conhecemos hoje e, na maioria das vezes, não têm relação com as outras áreas do conhecimento. No que diz respeito ao desenvolvimento do Cálculo, os problemas centrais estavam relacionados à Física e à Astronomia que, no tempo de Newton, faziam parte da Filosofia Natural, além de não estarem associados ao conceito de função, como é estudado hoje nas universidades. Nesse sentido, concordamos com Sad (2002), que destaca a importância de uma análise na qual seja feita uma ligação entre a matemática e outras áreas da ciência.

Por fim, esperamos que os resultados obtidos nesta pesquisa possam contribuir para outros estudos referentes à contribuição de Newton para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, A. M. *O que é história da ciência*. 1.^a edição. São Paulo: Brasiliense, 1994.

ALVES, L. L. S. *Derivadas Como no Tempo de Newton e Leibniz*. Artigo, Curso de Matemática, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2008.

BARON, M. E. *Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Unidade 3: Newton e Leibniz*. Editora da Universidade de Brasília: Brasília, 1985.

BASSALO, J. M. F. *A Crônica do Cálculo: II. A Época de Newton e Leibniz*. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 18, nº 3, setembro, 1996.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2.^a edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

_____. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Cálculo*. 1.^a edição. São Paulo: Atual, 1993.

CARVALHO, R. M. de. *A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo*. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

COHEN, I. B. e WESTFALL, R. S. *Newton: textos, antecedentes e comentários*. 1.^a edição. Rio de Janeiro: Contraponto: EDUERJ, 2002.

CONTIERI, R. P. *Disputa entre Newton e Leibniz sobre o Cálculo: uma divergência, analisada sobre as correspondências na Royal Society*. Dissertação (Mestrado em História da Ciência) – PUC-SP, São Paulo, 2006.

DOMINGUES, H. H. *Cavalieri e os Indivisíveis*. Fundamentos de matemática elementar – Vol. 10. 5.^a edição. São Paulo: Atual, 1993.

Euclides. *Elementos de Geometria*. Versão latina de Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1994.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5.^a edição. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GRANDE, A. L. *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC-SP, São Paulo, 2013.

NEWTON, I. *Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural – Livro I*. 2.^a edição, 2.^a reimpressão. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2012.

PIRES, J. A. L. *Cálculo Diferencial: estudo histórico sobre a evolução do Cálculo Diferencial no século XVII*. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2004.

PORTO, C. M. *A física de Aristóteles: uma construção ingênua?* Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 31, nº 4, São Paulo, outubro/dezembro, 2009.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. 1.^a edição. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

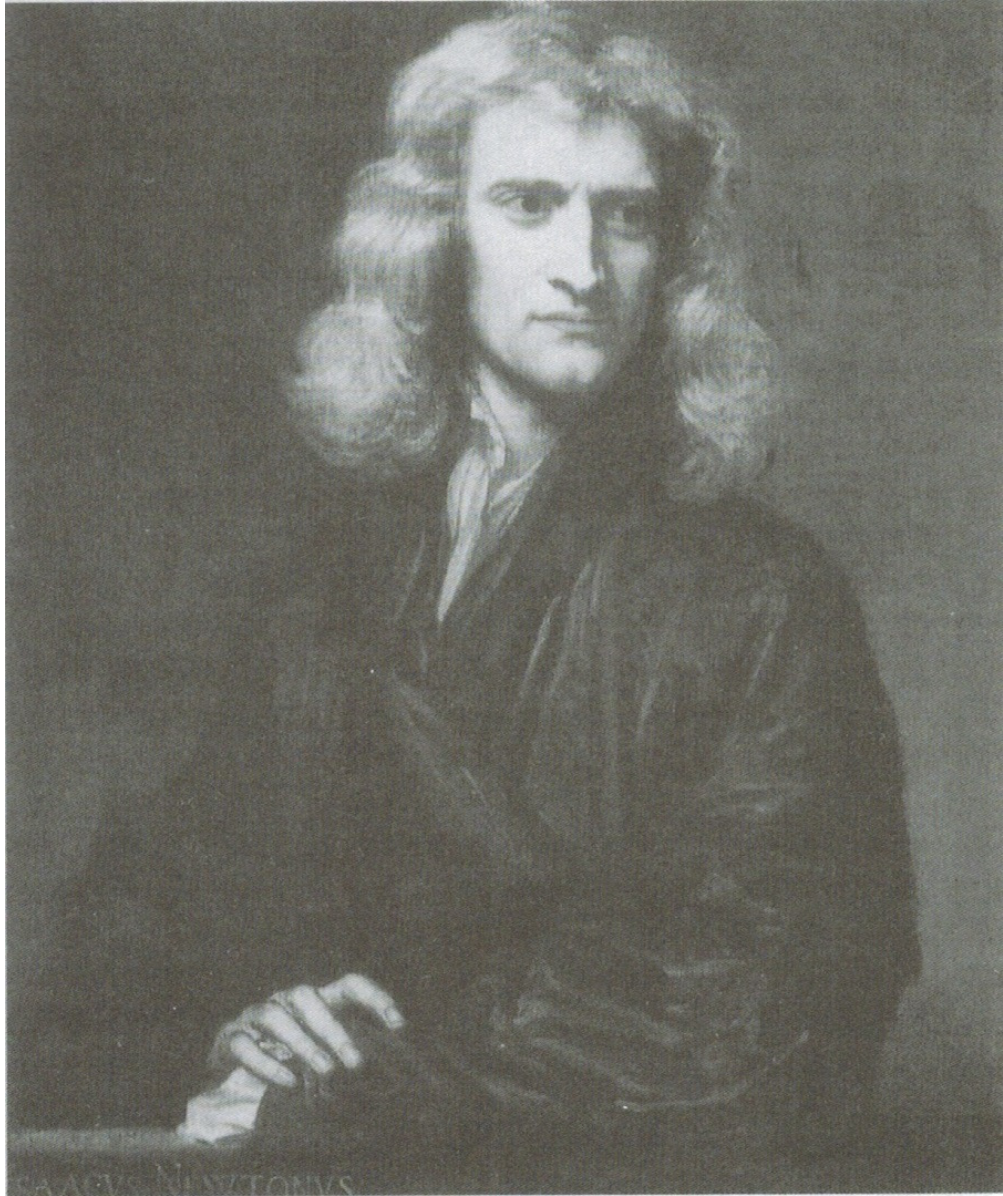
SAD, L. A. *Problemas Epistemológicos no Período de Emergência do Cálculo Infinitesimal*. Revista Brasileira de História da Matemática – vol. 2, nº 3, abril, 2002, p. 65-91.

SANTOS, W. C. *As ideias envolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo, de Arquimedes a Newton a Leibniz*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC-SP, São Paulo, 2011.

STRUICK, D. J. *História concisa das matemáticas*. 2.^a edição. Lisboa: Gradiva, 1992.

WESTFALL, R. S. *A vida de Isaac Newton*. 1.^a edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

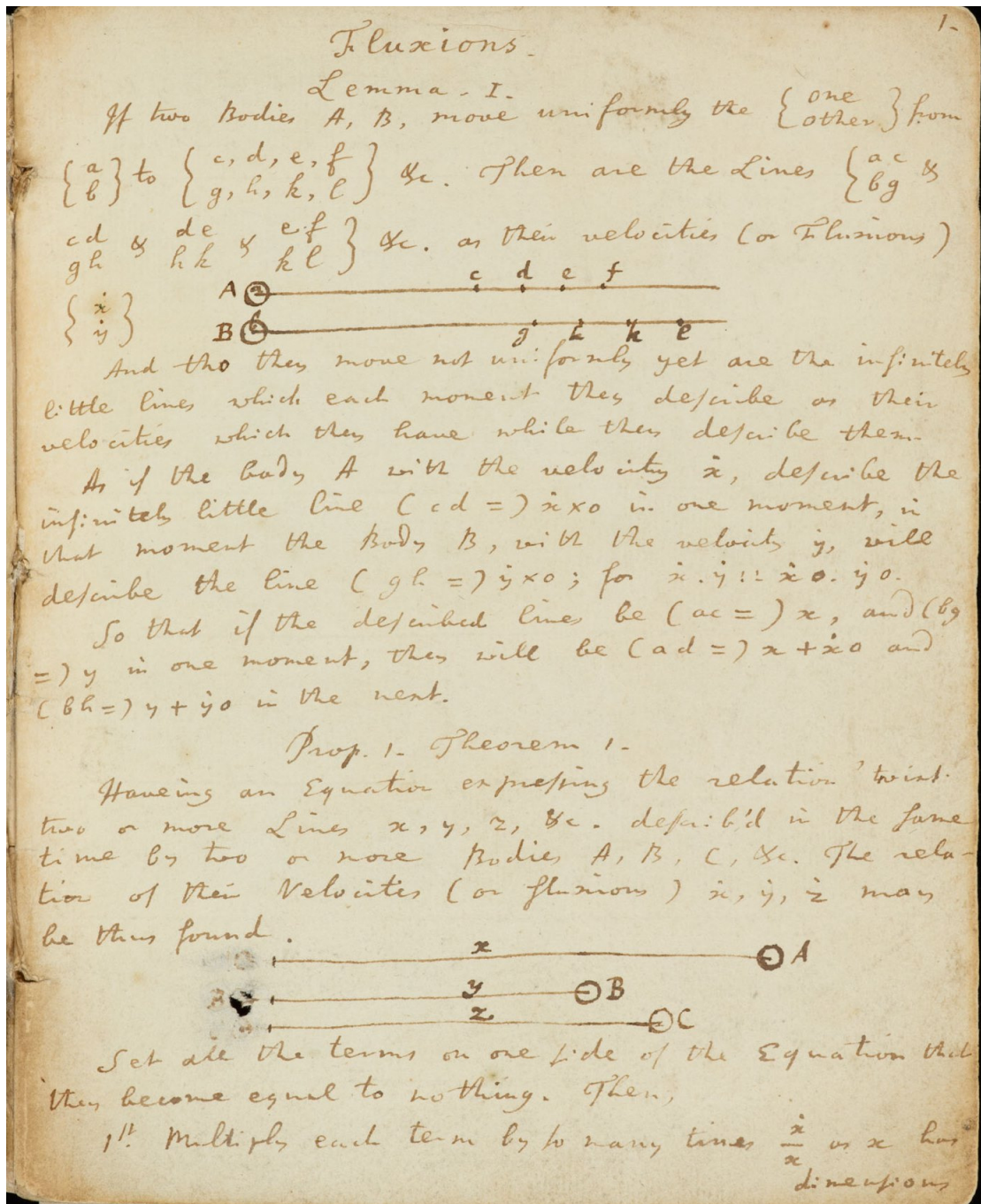
ANEXO A – Retrato de Newton



Newton aos 46 anos. Retrato pintado por Sir Godfrey Kneller, 1689.

Fonte: Westfall (1995)

ANEXO B – Página do Tratado dos Métodos das Séries e Fluxões



Página de Tractatus de methodis serierum et fluxionum

Fonte: Cambridge Digital Library

Disponível em: <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03960/3>.

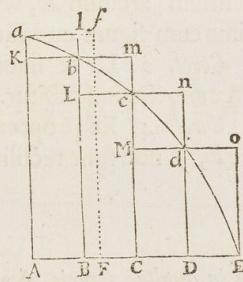
Acesso em: 07 out. 2014.

ANEXO D – Página dos *Principia*

[27]

Lemma II.

Si in figura quavis $AacE$ rectis Aa , AE , & curva A^cE comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq; Ab , Bc , Cd , &c. sub basibus AB , BC , CD , &c. æqualibus, & lateribus Bb , Cc , Dd , &c. figuræ lateri Aa parallelis contenta; & compleantur parallelogramma $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus angeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta $AKbLcMdD$, circumscripta $Aalbmcnd oE$, & curvilinea $AabcdE$, sunt rationes æqualitatis.



Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum $Kl + Lm + Mn + Do$, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum summa Aa , id est rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. Q. E. D.

Lemma III.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam ^{rationes} æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inæquales, & omnes minuantur in infinitam.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum $FAaf$. Hoc erit majus quam differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ, at latitudine sua AF

E 2

in

Página dos "Principia"

Fonte: Cambridge Digital Library

Disponível em: <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/77>.

Acesso em: 07 out. 2014.