PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

MARITZA LUNA VALENZUELA

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM CURSOS DE CIÊNCIAS E ENGENHARIA: introdução ao estudo de vetores

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2021

MARITZA LUNA VALENZUELA

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM CURSOS DE CIÊNCIAS E ENGENHARIA: introdução ao estudo de vetores

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática sob a orientação da Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

PUC-SP

2021

e-mail: maritzalunav@gmail.com

Sistemas de Bibliotecas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -
Ficha Catalográfica com dados fornecidos pelo autor

VALENZUELA, MARITZA LUNA
Um Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de professores em cursos de ciências e engenharia: introdução ao estudo de vetores / MARITZA LUNA VALENZUELA. -- São Paulo: [s.n.], 2021.
285p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática.

1. Formação de professores. 2. Teoria Antropológica do Didático. 3. Vetor. 4. Percurso de Estudo e Pesquisa. I. Silva, Maria José Ferreira da . II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática. III. Título.

CDD

MARITZA LUNA VALENZUELA

UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM CURSOS DE CIÊNCIAS E ENGENHARIA: introdução ao estudo de vetores

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR em Educação Matemática.

Aprovado em: 03/11/2021

BANCA EXAMINADORA

____
Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

____
Dra. Marianna Bosch Casabò – Universitat Autònoma de Barcelona

____
Dr. Saddo Ag Almouloud – Universidade Federal do Pará

____
Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho – PUC–SP

____
Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC–SP

AGRADECIMENTOS À CAPES

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e processo nº 88881.146034/2017-01. Agradeço à **CAPES,** pelo apoio PEC-PG, fundamental para a realização da pesquisa.

DEDICATÓRIA

A meus pais Cristóbal e Emperatriz

A meus irmãos Roxana e Milton

A Enrique, Rodrigo e Gianella

A Irene e Mario

À memória de Sabina, Francisco,

Alejandro e Nicolas

AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu capacidade intelectual para concluir esta pesquisa.

À minha família, em especial, ao meu pai Cristóbal e minha mãe Emperatriz, por tudo que me proporcionaram. Ao meu companheiro de vida Enrique e a meus filhos Rodrigo Enrique e Gianella Maritza por sua compreensão e por sempre me motivarem e me impulsionarem a chegar aqui. Aos meus sogros Irene e Mario pelo apoio.

Ao querido Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pelo cuidadoso trabalho de orientação, pelas lições e a amizade que pude compartilhar durante o doutorado.

À Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, por assumir a continuação da orientação e pela preocupação em relação ao avanço da tese.

À Professora Doutora Marianna Bosch, pela oportunidade de estágio na Universidade Ramon Llull no período que estive na Espanha e pelas orientações e, sobretudo, pelas importantes contribuições para a desenvolvimento da tese.

À equipe de pesquisadores da ASISTEMBE do projeto "Propuesta para enseñaza universitária basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo", especialmente à Professora Doutora Berta Barquero e aos professores Josep Gascón e Ignasi Balenza.

Ao Professor Francisco Ugarte Guerra, pelo apoio, orientações e importantes contribuições a este trabalho de tese.

Aos Professores Doutores Fumikazu Saito, Ana Lúcia Manrique, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pelos ensinos e orientações nas disciplinas do programa de doutorado da PUC-SP.

À Pontificia Universidad Católica del Perú, pelas informações que me permitiu acessar e, em especial, ao IREM-PUCP, pelo apoio para a participação em congressos e palestras no Peru.

Ao grupo GEDIM, pela acolhida nos seminários de pesquisa, pelas sugestões e pelos comentários que tanto contribuíram para o avanço da tese.

Aos meus padrinhos Ernesto Salinas e Juana Pino, pelo carinho e por sempre se preocuparem comigo.

Aos meus queridos amigos e familiares de Calca, Cusco, Arequipa, Lima, Rio de Janeiro e São Paulo, por sempre se preocuparem comigo.

E a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação, endereço meus sinceros agradecimentos.

Aos professores da Banca pelas contribuições no desenvolvimento dessa pesquisa.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

A autora

"A natureza está escrita em linguagem matemática."

Galileu Galilei

VALENZUELA, Maritza Luna. UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM CURSOS DE CIÊNCIAS E ENGENHARIA: Introdução ao estudo de vetores. 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021. 282p.

RESUMO

Esta pesquisa se insere no campo da formação de professores de Matemática para o ensino da geometria vetorial (vetor, propriedades e justificações), tendo como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático e, como participantes da pesquisa, estudantes de mestrado de Ensino de Matemática no Peru. A pesquisa tem como objetivo investigar como um dispositivo de Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) pode contribuir, em particular para esse grupo de professores em formação, para que tenham uma visão crítica, para que possam questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino com respeito ao objeto matemático vetor para assim poderem introduzir a geometria vetorial. O dispositivo PEP-FP mostra a transição do monumentalismo e das visitas das obras para o questionamento do mundo. E, para tanto, usa como metodologia de pesquisa do tipo qualitativa baseada na Engenharia Didática, e que possui quatro etapas: a primeira etapa é a análise preliminar, que é praxeológica e o estudo das três dimensões do problema didático (epistemológica, econômica e ecológica) e também aqui se fez a construção do modelo epistemológico de referência considerando as praxeologias que têm como razão de ser o objeto matemático vetor; a segunda etapa é o desenho e análise *a priori*, em que se planeja a proposta do dispositivo de PEP-FP; a terceira é a análise *in vivo* considerando as dialéticas fundamentais e a quarta etapa é a análise *a posteriori*. Como resultado temos que o PEP-FP contribuiu na formação deste grupo de estudantes de mestrado que, ao final, propuseram novas questões geratrizes para introduzir o estudo da geometria vetorial, além da metodologia para o estudo do objeto matemático. A metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho permitiu criar as condições para uma conexão entre o Modelo Epistemológico de Referência e o PEP-FP e trouxe contribuições para o Modelo Epistemológico Vigente para o ensino da introdução da geometria vetorial na formação de professores.

Palavras-chave: Formação de professores. Teoria Antropológica do Didático. Vetor. Percurso de Estudo e Pesquisa.

ABSTRACT

This research is part of the field of training mathematics teachers to teach vector geometry (vector, properties and justifications), having the Anthropological Theory of Didactics (TAD) as a theoretical framework, and students of the Master's Degree in Education as research participants. Mathematics of Peru. The research aims to investigate how a device of Study and Research Pathways for Teacher Education (PEP-FP) can contribute, in particular, for this group of teachers in training to have a critical view, to question, analyze, design and experiment teaching processes with respect to the vector mathematical object to introduce vector geometry. The PEP-FP device shows the transition between monumentalism and visits of works to questioning the world. For which it has a qualitative research methodology based on Didactic Engineering, which has four stages: the first stage is the preliminary analysis in which the praxeological analysis and the study of the three dimensions of the didactic problem (epistemological, economic and and also here the construction of the epistemological reference model was made considering the praxeology that has as its reason for being the vector mathematical object, the second stage is the design and analysis a priori, in which the proposal of the PEP- FP, the third is the in vivo analysis considering the fundamental dialectics and the fourth step is the a posteriori analysis. As a result, we have that the PEP-FP contributed to the formation of this group of master's students who, at the end, proposed new generating questions to introduce them to the study of vector geometry, in addition to the methodology for the study of the mathematical object. The research methodology used in this work allowed the conditions for a connection between the Epistemological Reference Model and the PEP – FP and brought contributions to the Current Epistemological Model for teaching the introduction of vector geometry in teacher education.

Key words: Teacher training. Anthropological Theory of Didactics. Vector, Study and Research Pathway

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADRO

LISTA DE ABREVIATURAS

AEP – Atividades de Estudo e Pesquisa
AL – Álgebra Linear
AMGA – Álgebra Matricial y Geometria Analítica
AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem
CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior
CC – Conhecimento do Conteúdo
CD – Conhecimento Didático
CT – Conhecimento Tecnológico
ED – Engenharia Didática
FP – Formação Professional
GA – Geometria Analítica
GAE – Geometria Analítica Espacial
GAP – Geometria Analítica Plana
GE – Geometria Euclidiana
MED – Modelo Epistemológico Dominante
MER – Modelo Epistemológico de Referência
MEV – Modelo Epistemológico Vigente
MPR – Modelo Praxeológico de Referência
MGA – Modelo na Geometria Analítica
MAL – Modelo na Álgebra Linear
MGS – Modelo na Geometria Sintética
OD – Organizações Didáticas
OM – Organizações Matemáticas
OMG - Organização Matemática Global
OML - Organização Matemática Local
OMP - Organização Matemática Pontual
OMR - Organização Matemática Regional
PEA-MAT – Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos
PEP – Percurso de Estudo e Pesquisa
PEP-FP - Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores
PUCP – Pontificia Universidad Católica del Perú
TAD – Teoria Antropológica do Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática está voltado para desenvolver o raciocínio e as habilidades dos alunos, além de servir como ferramenta para a modelação matemática de fenômenos naturais em distintas áreas do conhecimento. Essa modelação determina modelos da realidade, em particular de fenômenos físicos do mundo real, que podem solicitar uma representação em três dimensões por vetores porque envolve, além de comprimentos, uma direção e um sentido.

De acordo com Boyer (1998), desde o século XX a matemática é uma atividade altamente sofisticada a forma de se compreender suas definições não é fácil, embora venha de ideias focadas, em grande parte, nos conceitos de número, grandeza e forma encontrados desde os primeiros tempos da raça humana. Para Crowe (1967), o conceito de vetor tem sido extremamente útil em quase todos os ramos da ciência que o utilizam, pois contribui para o desenvolvimento de cálculo em várias variáveis, equações diferenciais, geometria diferencial, estática e física, assim como também para diferentes áreas de formações profissionais, como a engenharia, economia e as ciências exatas, como a física, a química e a matemática.

Somos conscientes de que a geometria tem sofrido, ao longo de sua história, e de acordo com Arezana (1997), notáveis mudanças na maneira de expressar suas propriedades como se vê, por exemplo, nos teoremas que percorrem 23 séculos entre o *Elementos* de Euclides até *a Geometria Algébrica* de Artin e a introdução de novos objetos matemáticos. Um desses objetos é o conceito de vetor, que contribuiu para o desenvolvimento de métodos vetoriais que foram lançados entre 1830 e 1880 e constituem uma obra que permitiu o desenvolvimento da análise com várias variáveis e originou a geometria diferencial e a análise vetorial, além de proporcionar um método analítico para o estudo de geometria.

A escolha de estudar vetores na geometria foi motivada por inquietações nascidas da minha prática como professora em uma disciplina do primeiro ciclo de graduação na área de ciências e engenharia da universidade peruana, além de minha trajetória como estudante. Minha primeira relação com provas e demonstrações que envolvem vetores na geometria foi na disciplina de Geometria Analítica do curso de bacharelado em Matemática da Universidade Nacional de San Agustín no Peru, como estudante, ministrada com aulas magistrais em que a formalidade das demonstrações foi, desde o princípio, a principal preocupação do professor.

Ao concluir a graduação, com a forte atração por estudar análise matemática, equações diferenciais e geometria, iniciei os estudos de mestrado em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Peru em que pesquisei Sistemas Dinâmicos, na parte da Dinâmica Simbólica, ao mesmo tempo que passei a trabalhar como chefe de prática na graduação em Estudos Gerais de Ciências na mesma universidade. Algumas das disciplinas que ensinava foram Matemática Básica, Cálculo I, II, III e IV (1997-2007) e que envolviam geometria e demonstrações que mobilizavam vetores.

Posteriormente, passei a trabalhar na mesma universidade como professora (2008 até agora), compartilhando a docência com mestres e doutores em matemática que refletiam a respeito das dificuldades que os alunos iniciantes encontravam em fazer provas e demonstrações em geometria, particularmente, as que usavam vetores na disciplina de Matemática Básica que, depois de uma mudança curricular e reestruturação de conteúdo em 2017, passou a ser chamada de Álgebra Matricial e Geometria Analítica.

A Pontifícia Universidade Católica do Peru, mais concretamente, o Instituto de Investigação em Educação Matemática (IREM-PUCP), preocupada com a melhoria do ensino de matemática, passou a organizar Colóquios de Educação Matemática convidando pesquisadores internacionais para apresentarem suas pesquisas em diferentes linhas, dentre elas as questões do ensino e da aprendizagem em geometria. E isso me motivou a iniciar o doutorado em Educação Matemática.

No doutorado, as reuniões de orientação com o professor Almouloud contribuíram para a escolha dos referenciais teórico e metodológico no sentido de compreender os fenômenos relativos à situação atual dos alunos na universidade peruana das áreas de ciências e engenharias, no que se refere às demonstrações envolvendo vetores. Além disso, as sugestões nas reuniões do grupo de pesquisa PEA-MAT ajudaram a aprofundar os estudos a respeito do objeto matemático vetor. Destaco ainda, nesse processo de motivação pessoal para a pesquisa, a importância da realização do estágio de doutorado que fiz na Universidade Ramon Llull em Barcelona, Espanha, e que me permitiu aprimorar questões teóricas a respeito da Didática da Matemática e da formação de professores nas reuniões do grupo de pesquisa ASISTEMBE, no Projeto "*Propuesta para una enseñanza universitaria* *basada en el cuestionamiento del mundo*", assim como da disciplina de mestrado *Análisis Cuantitativo*. Esta etapa permitiu o direcionamento do estudo, no sentido de me equipar teoricamente e buscar o desenvolvimento de um dispositivo teórico-metodológico.

A geometria vetorial é uma ferramenta frequentemente utilizada para resolver problemas de engenharia e de física. Na formação profissional no Peru, especificamente em graduações de ciências e engenharia, esse conteúdo está presente no currículo na disciplina de Álgebra Matricial e Geometria Analítica (AMGA) e será utilizado posteriormente nas disciplinas de Cálculo em Várias Variáveis, Cálculo Aplicado (Matemática Aplicada), Mecânica, Física etc.

De acordo com Arenzana (1997), os vetores fazem parte da expressão da geometria atual. As noções de produto escalar, produto vetorial, vetor tangente, gradiente de campos escalares ou fluxo de forças são básicas para expressar teoremas geométricos e resultados científicos desde que surgiram no século XIX nas pesquisas de William Rowan Hamilton e Hermann Grassmann, sobre operações como a adição e o produto de vetores, o que ampliaram seu estudo da dimensão dois para a dimensão três e depois para dimensões maiores.

No ensino atual de vetores, tanto na Geometria, como na Álgebra Linear, pesquisas como as de Dorier (1990), Bittar (1998) Sierspinska, Dreyfus e Hillel (1999), Dorier (2000), Dorier e Siepinska (2002), Cisse e Dorier (2014), Matos (2017), Roncaglio e Nehring (2019), entre outros, mostram que os alunos iniciantes têm dificuldades na compreensão e aprendizagem dos objetos desses ramos da matemática.

Celestino (2000) identifica que em algumas universidades públicas brasileiras, como UNICAMP e UNESP, os cursos de Álgebra Linear, Cálculo I, II, III e Geometria Analítica são as disciplinas que mais reprovam em cursos de ciências exatas, o que mostra ~~as~~ dificuldades no processo de aprendizagem de vetores. Essa realidade não é diferente no início do nível universitário no Peru na aprendizagem de Geometria Analítica e de Álgebra Linear.

Esta pesquisa de tese tem por objetivo geral propor um dispositivo didático de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP-FP) para a formação de professores de matemática peruanos referente ao ensino de vetores baseado na Teoria Antropológica do Didático (TAD), para fundamentar a base estrutural de nossa pesquisa para identificar os tipos de processos e as ferramentas matemáticas que nossos sujeitos utilizam no cumprimento de determinados tipos de tarefas e como articulam seus discursos tecnológicos-teóricos com base em uma organização didática proposta para o estudo de vetores. Essa proposta surgiu quando as condições permitiram delimitar nosso problema de pesquisa e propor a seguinte questão: **quais praxeologias matemáticas para o ensino de vetores são mobilizadas por professores peruanos em cursos de ciências e engenharia em uma formação continuada? Em que estas praxeologias podem contribuir para a prática desses professores e para o desenho, análise e implementação de novos processos didáticos?**

Considerando esse contexto, propusemos, a partir do objetivo geral, trabalhar na formação de professores de nível superior (alunos de mestrado em ensino de Matemática) com um estudo a respeito de vetores na disciplina de Geometria.

A metodologia que nos guiou está baseada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e foi desenvolvida em quatro fases: análises preliminares; desenho e análise a *priori*; implementação, observação e coleta de dados e análise a *posteriori*, validação e desenvolvimento.

Consideramos que as construções dos participantes durante o PEP-FP poderiam evidenciar elementos para responder nossa questão de pesquisa e, neste sentido, adotamos quatro dos cinco módulos[1] defendido por Ruiz-Olarría (2015) e que visam ajudar os professores a gerarem respostas para uma pergunta profissional inicial. A pesquisa foi experimentada com professores e alunos do mestrado de Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Peru e planejada, a princípio, para ser realizada presencialmente, mas em função dos acontecimentos em contexto mundial da COVID-19, foi aplicada de maneira virtual através da plataforma Zoom.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. Neste primeiro, a introdução, apresentamos nossa motivação pessoal e a pesquisa que desenvolvemos. No capítulo 2, apresentamos o referencial teórico e a revisão bibliográfica das pesquisas feitas em duas seções – primeiro, sobre a formação de professores com marco teórico da TAD, e que contribuiu para a escolha do referencial teórico e a metodologia do

[1] Serão descritos no capítulo 2, sessão 2.1, p. 31-32.

PEP-FP, e, a segunda, sobre pesquisas sobre objeto vetor. Depois, apresentamos ainda a justificativa e a metodologia de pesquisa.

O capítulo 3 apresenta o estudo e análise das três dimensões fundamentais do problema didático, isto é, para a formulação do problema didático, consideramos o problema docente inicial e as dimensões epistemológica, econômica e ecológica. Na dimensão epistemológica, discutimos o processo de construção do modelo epistemológico de referência e explicitamos a razão de ser do objeto matemático vetor. Na dimensão econômica ou institucional, fizemos uma análise dos documentos curriculares e livros texto em que o objeto vetor está presente nos diferentes níveis da educação peruana. Já na dimensão ecológica identificamos os níveis de codeterminação no contexto peruano e as condições e restrições que existem. Também apresentamos a proposta do Modelo Praxeológico de Referência.

No capítulo 4, desenhamos, formulamos o planejamento e analisamos *a priori* o disposto do PEP-FP, cuja fase experimental é discutida no final do mesmo, junto com a análise *a posteriori,* enquanto o capítulo 5 foi reservado às considerações finais e as perspectivas futuras.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, mostramos os movimentos que nos levaram a delimitar a problemática da pesquisa apresentando o referencial teórico, a revisão bibliográfica, a justificativa, a delimitação do problema de pesquisa e a metodologia utilizada.

2.1 Referencial Teórico

Consideramos a didática francesa por sua importância para estudar o papel do conhecimento matemático nos processos educacionais e por ser a base para o desenvolvimento da Didática da Matemática que se espalhou internacionalmente. De acordo com Florensa, Bosch e Gascón (2020), a primeira concretização formal dessa abordagem foi a formulação inicial da Teoria das Situações Didáticas[2], na década de 1980 por Brousseau, seguida pela Teoria da Transposição Didática, apresentada por Chevallard em 1985, que assumiu os princípios fundamentais da Teoria das Situações Didáticas para destacar a relatividade institucional do conhecimento matemático e distinguir as organizações de conhecimento existentes em instituições acadêmicas daquelas existentes em outras instituições, em particular, as escolas. De acordo com Gascón (1998):

> No âmbito deste novo programa de investigação e da teoria da transposição didática[3], a abordagem antropológica, nos seus desenvolvimentos mais recentes, leva o processo de estudo (institucionalizado) de obras matemáticas como o objeto principal de investigação. (GASCÓN, 1998, p. 2. tradução nossa)

A Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1999), surge com as teorizações dos processos de Transposição didática para explicitar a não possibilidade de interpretar a matemática que se estuda sem considerar os fenômenos relacionados aos processos de sua (re)construção desde a sua origem na instituição produtora dos saberes.

---

[2] A Teoria das Situações baseia-se em uma concepção construtivista – no sentido piagetiano – de aprendizagem, concepção que é caracterizada por Brousseau (1986) da seguinte forma: “O aluno aprende adaptando-se a um *milieu* que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem.”. (ALMOULOUD, 2007a, p 33)

[3] Um conjunto do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39)

Na TAD, de acordo com Chevallard (2019), toma-se como noções primárias os *objetos* $\boldsymbol{O}$, as *pessoas* X e as *instituições* I, considerando um objeto $\boldsymbol{O}$, como qualquer "entidade", material ou não, que exista para pelo menos uma pessoa X ou uma instituição I. A relação, em termos de conhecimento pessoal, é representada por $R(X, O)$ e indica que X conhece $\boldsymbol{O}$ se $R(X, \boldsymbol{O}) \neq \emptyset$, isto é, se $\boldsymbol{O}$ existe para X.

> Essa noção se estende às instituições ou, mais exatamente, a qualquer posição p em qualquer instituição I, que representamos por $R_I(p, \boldsymbol{O})$. Esta relação é a relação institucional das pessoas que ocupam a posição p em I com o objeto $\boldsymbol{O}$. Assim, podemos considerar a relação de um aluno X com o objeto $\boldsymbol{O} = \sqrt{2}$. (CHEVALLARD, 2019, p. 3)

No postulado de base da TAD, contrário à visão particularista do mundo social, como indica Chevallard (1999, p.2), "admite-se, com efeito, que toda atividade humana regularmente realizada pode ser descrita por um modelo único, que se resume aqui com a palavra *praxeologia*" – palavra de origem grega que reúne – "práxis", ou "saber-fazer", e que engloba tipos de tarefas e suas técnicas, e "logos", ou "saber", que engloba a tecnologia como uma justificativa racional para as técnicas e uma teoria que as justificam. Para Chevallard (1999), na raiz da noção de praxeologia se encontram os tipos de tarefas (T) como um conjunto de tarefas ($t \in T$) em que uma tarefa requer uma ação realizada de maneira específica por alguém. Tal ação é descrita por um verbo e identifica um gênero de tarefa como uma ação que agrupa tipos de tarefas. Por exemplo: *demonstrar que o centro de gravidade ou baricentro de um tetraedro regular é o ponto de concorrência das medianas* é um tipo de tarefa que pode ser resolvido por muitos processos ou técnicas. Assim, *demostrar* é um gênero de tarefa; mas *demonstrar utilizando vetores que o centro de gravidade ou baricentro de um tetraedro regular é igual ao ponto de concorrência das medianas* é uma tarefa do tipo determinar o centro de gravidade de um tetraedro regular.

A técnica (τ) é a maneira ou o processo utilizado para resolver uma tarefa específica e a tecnologia (θ) é um discurso racional cuja primeira função é justificar a técnica τ utilizada para executar uma tarefa enquanto a segunda função é explicar a técnica para que ela seja inteligível e, ainda, produzir técnicas mais eficientes e adaptadas a uma determinada tarefa. Finalmente, a teoria (Θ) é um discurso racional sobre a tecnologia, isto é, aquela que justifica e explica as afirmações da tecnologia.

Pode-se concluir que em torno de um tipo de tarefa (T) se encontram técnicas (τ) (pelo menos uma) para resolver suas tarefas que são sustentadas por uma tecnologia (θ) que, por sua vez, é explicada por uma teoria (Θ). Assim, a praxeologia $\wp = [T \ / \ \tau \ / \ \theta \ / \ \Theta]$ é constituída por um bloco prático-técnico $[T \ / \ \tau]$ e por um bloco tecnológico-teórico, $[\theta \ / \ \Theta]$.

Segundo Almouloud (2007), na TAD as praxeologias permitem modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática baseando-se em três postulados. O primeiro afirma que toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas. O segundo diz que o cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica enquanto o terceiro afirma que a ecologia das tarefas possibilita identificar as condições e restrições que permitem sua produção e utilização nas instituições.

Segundo Lucas e Gascón (2018), a finalidade de modelizar, de maneira explícita e contrastável, a atividade matemática enquanto uma atividade humana no conjunto de atividades inseridas nas instituições sociais conduziu a introduzir, na Teoria Antropológica do Didático, a noção chave de Praxeologia Matemática (PM) como uma ferramenta fundamental para modelizar a atividade matemática. O processo de estudo de uma PM e sua construção se chama praxeologia didática (PD), mostrando que essas praxeologias são aspectos inseparáveis da atividade matemática. Para Chevallard (1999), as praxeologias relacionadas a um conhecimento matemático são chamadas de praxeologias matemáticas ou organizações matemáticas (OM), com o seu estudo para o ensino sendo chamado de praxeologias didáticas ou organizações didáticas (OD).

As praxeologias ou organizações matemáticas, de acordo com o grau de complexidade de seus componentes, são classificadas como Organização Matemática Pontual (OMP) quando consideram apenas um tipo de tarefa, $[T \ / \ \tau \ / \ \theta \ / \ \Theta]$; Organização Matemática Local (OML) quando integram várias praxeologias pontuais específicas que atendem à uma mesma tecnologia, $[T_i \ / \ \tau_i \ / \ \theta \ / \ \Theta]$; Organização Matemática Regional (OMR) quando articulam praxeologias locais que são justificadas por uma mesma teoria matemática, $\left[T_{ij} \ / \ \tau_{ij} \ / \ \theta_j \ / \ \Theta\right]$ e, por fim, como Organização Matemática Global (OMG) quando reúnem diferentes praxeologias regionais integradas por várias teorias, $\left[T_{ijk} \ / \ \tau_{ijk} \ / \ \theta_{jk} \ / \ \Theta_k\right]$.

Para Barquero (2009), a proposta provisória da TAD é:

> descrever processos de modelização como processos de reconstrução e articulação de organizações matemáticas de complexidade crescente (pontuais, locais, regionais) que necessariamente tem que partir de questões problemáticas propostas por uma comunidade de estudo e para as quais requer repostas. Na realidade, estas questões constituem a “razão de ser” da construção das organizações matemáticas que são necessárias ser necessário (re)construídas. (BARQUERO, 2009, p. 68, tradução nossa).

Na TAD, Chevallard (2019) define as apostas didáticas (♥) como entidades praxeológicas conhecidas como obra (W) e que pode ser uma “obra matemática”, não necessariamente uma “obra de arte”. De maneira geral, uma obra é qualquer realidade criada por humanos com o objetivo de alcançar alguma função praxeológica. Ou, em outras palavras, uma aposta didática ♥ é uma obra W. Chevallard acrescenta a necessidade de ferramentas complementares para a análise apresentando a noção de sistema didático, isto é, a reunião de uma aposta didática ♥, um conjunto X de pessoas, $x \in X$ deve estudar ♥ e um conjunto Y de pessoas, $y \in Y$ deve ajudar os x a estudarem ♥. Esse sistema didático, denotado por $S(X, Y,$ ❤$)$, pode também ser representado por $S(X, Y, W)$ quando ♥ é uma obra específica W.

Para nossa investigação, a TAD proporciona uma noção muito importante que é o de paradigma didático que Chevallard (2013a) define como um conjunto de regras que podem ser apostas didáticas. Para o autor, o paradigma didático de visitas às obras ou monumentalismo acontece muitas vezes em sala de aula quando o conteúdo é apresentado pelo professor como um monumento para que seja admirado sem questionamento e sem qualquer motivação para que o aluno pesquise e questione. O autor apresenta, então, um contra-paradigma que denominou de questionamento do mundo por meio de um novo dispositivo didático denominado Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP que, de acordo com Chevallard (2011), teve sua origem no sistema de ensino francês, principalmente, nos colégios e liceus que, por regulamentação institucional, são norteados por Atividades de Estudo e Pesquisas (AEP).

Chevallard (2013a) afirma que o PEP é um dispositivo baseado no sistema de investigação “questão - reposta”, isto é, a partir de uma pergunta denominada questão geratriz (Q_0) – que pode ser uma tarefa –, é gerado um conjunto de novas questões $Q_1, Q_2, \cdots$ etc. na busca da resposta da questão inicial. As questões geratrizes podem ser abertas e indeterminadas, ou seja, um PEP aberto em contraste com o fechado, cuja questão conduz diretamente ao que se quer estudar. A indagação de X sobre Q_0 abre caminho para o PEP, pois de acordo com Chevallard (2019), a partir de sua apresentação se constitui um sistema didático em torno dela, $S(X, Y, Q_0)$, em que a aposta didática $\heartsuit$ é substituída por Q_0. Neste caso, X é um coletivo de estudantes, uma turma, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, jornalistas etc., enquanto Y é uma equipe, geralmente pequena, em que Y pode até ser um conjunto vazio de diretores de estudos, professor, tutor, orientador, diretor de pesquisa, diretor editorial etc. O objetivo da constituição deste sistema didático é estudar Q_0 ou, dito de outra maneira, investigar Q_0, isto é, buscar trazer à questão Q_0 uma resposta $R^{\heartsuit}$ que satisfaça certas restrições.

Utilizando as notações de Chevallard (2009b, p. 2), quando representa o PEP por um esquema Herbartiano[4] semidesenvolvido, temos: $[S(X, Y, Q_0) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$ com $M = \{{R^{\lozenge}}_1, {R^{\lozenge}}_2, \cdots, {R^{\lozenge}}_m, O_{m+1}, \cdots, O_n, Q_{n+1}, \cdots, O_p\}$. O meio didático M é constituído por todos os elementos disponíveis para o estudo de Q_0, inclusive pelas mídias acessíveis à comunidade de estudos, ou seja, por qualquer fonte de informação, como um livro, um artigo, uma página da web, um especialista, um professor etc.

De acordo com Bartolomé et al (2018) e Florensa et al (2016, 2018), a Teoria Antropológica do Didático propõe um formato instrucional geral denominado PEP baseado em processos de investigação a longo prazo gerados por uma questão problemática e geratriz aberta que deve desencadear uma avalanche de respostas parciais e novas perguntas derivadas que podem ser representadas através de um mapa questões-repostas (Q-A). Essa ideia de mapa foi introduzida na TAD por Jessen e Winsløw (2011) como uma ferramenta para a análise de PEP multidisciplinares para modelar como o conhecimento é construído durante o processo de estudo e representar uma “análise mais estável da questão geratriz em termos de questões derivadas e parciais e as respostas às quais elas podem levar" de acordo com Winsløw et al. (2013, p. 281). Outros trabalhos, como o de Jessen (2014) e de Rasmussen (2016), usaram esses mapas Q-A para descrever processos de ensino e de aprendizagem. Já Florensa, Bosch e Gascón (2017), baseados na hipótese de Winsløw, Matheron e Mercie (2013), postulam que os mapas Q-A são cruciais na formação de professores como uma representação parcial dos MER, porque, ao capturarem conhecimentos em termos de respostas, tornam-se uma ferramenta epistemológica interessante por seu caráter dinâmico e por destacar as conexões

[4] Em homenagem ao filósofo alemão Johann Friedrich Herbart.

funcionais entre noções que aparecem como descrições simples de grandes domínios de conhecimento.

Assim, o ensino por meio de um PEP consiste em direcionar um percurso de estudo que é, de acordo com Chevallard (2007, 2012), regulado por certas dialéticas[5], fundamentais consideradas gestos[6] de estudo e pesquisa. A **dialética do estudo e da pesquisa ou das perguntas e respostas** (D_1), considerada a base dos PEP, consiste em realizar uma investigação a respeito de Q_0 que requer a combinação do estudo das respostas $R_i^{\Diamond}$ com outras obras O_k com a formulação de outras questões Q_j (questões derivadas). Assim, a realização de um bom estudo requer a realização de uma investigação em torno das $R_i^{\Diamond}$ e das O_k que, consequentemente, gera estudos específicos.

A **dialética das mídias e meios ou da conjectura e da prova** (D_2) refere-se, de acordo com Otero et al. (2013), ao fato de que as respostas elaboradas em um PEP são produto de uma conjectura e, como tal, devem ser provadas. A elaboração das sucessivas respostas provisórias requer respostas pré-estabelecidas acessíveis por diferentes meios de comunicação e difusão. Tais mídias podem ser livros, artigos de pesquisa, notas de aula etc.

Na **dialética do indivíduo e do coletivo** (D_3), no âmbito de um PEP, é necessário realizar coletivamente o estudo e a investigação das questões e a produção de suas respostas, o que implica em distribuir tarefas e responsabilidades a cada indivíduo da comunidade de estudo, e que serão reincorporadas na elaboração da resposta $R^{\heartsuit}$. Para Chevallard (2012), cada indivíduo deve se considerar livre, ter autonomia para estudar e investigar as questões, mas sem deixar de contribuir para o todo (sinonímia).

A **dialética do paraquedista e dos caçadores de trufas** (D_4) refere-se ao sistema didático como uma metáfora à condição de exploradores assumida pelos indivíduos de uma comunidade de estudo durante o PEP. Os paraquedistas têm uma visão mais ampla já que veem tudo do alto, enquanto os caçadores de trufas têm que olhar de perto o que procuram, ou seja, uns inspecionam grandes áreas do

---

[5] A palavra dialética vem do grego e significa literalmente “técnica de conversação”.

[6] Gestos são ações ou práticas que ocorrem no desenvolvimento de uma aula.

conhecimento sem garantia de encontrarem as respostas procuradas, enquanto os outros se aproximam cada vez mais para detectar informações mais detalhadas e que fazem avançar a investigação ao mesmo tempo em que analisam sua utilidade.

A **dialética do tema e fora do tema ou de entrada e saída do sujeito** (D_5), em um ensino baseado em um PEP, propõe um estudo e uma investigação em princípio aberto, o que vai contra o postulado tradicional da escola de sempre ir pelo caminho mais curto, que conduz apenas a um objetivo conhecido e determinado de antemão. Assim, uma questão geratriz autêntica, vinculada a uma ou mais disciplinas, deve gerar uma busca por respostas não diretas ou lineares, o que, às vezes, requer sair do tema, até mesmo da disciplina, para se estudar determinados trabalhos potencialmente úteis para então reingressar no tema. Nesta dialética está centrada a raiz do trabalho codisciplinar.

A **dialética das caixas pretas e caixas claras** (D_6) refere-se aos conhecimentos que são relevantes ao estudo e precisam ser esclarecidos, deixando de lado outros que permanecem assim em uma caixa preta. Essa dialética se opõe ao hábito escolar que, em geral, aspira à clareza absoluta.

A **dialética da leitura e da escrita** (D_7) refere-se ao processo de evitar a transcrição formal das respostas já encontradas e relevantes ao estudo, tomando sua parte útil para reescrevê-las em notas de resumo, glossários etc. Essa dialética está relacionada à dialética anterior por ser necessário estabelecer a profundidade com que as respostas serão transcritas.

A **dialética da análise e síntese praxeológica e didática** (D_8) consiste em compreender a atividade matemática, as praxeologias matemáticas, a partir da análise didática que em seu componente epistemológico conduz a elaboração de um MER que indaga a respeito da gênese das praxeologias em jogo. Ela pode incluir ainda a produção, pessoal ou coletiva, de uma síntese dos conhecimentos envolvidos para identificar suas relações e a funcionalidade de cada um.

A **dialética de difusão e recepção** (D_9) corresponde, especialmente, à tarefa básica de disseminar e defender a resposta $R^{\heartsuit}$ ou qualquer outra resposta parcial construída pela comunidade de estudo que, uma vez construída, deve ser disseminada e conhecida por explicação de seus componentes e por justificativa das escolhas feitas. Não se trata de uma simples apresentação, mas de uma divulgação que considera o acolhimento dos outros indivíduos da comunidade de estudo, além de suas dúvidas, aceitações e resistências.

Para que um PEP aconteça, Chevallard (2009d) adverte que é necessário que a organização didática observe a dinâmica entre professor e aluno focando nas condições que a afetam simultaneamente, ou seja, nas suas funções didáticas. Para isso, o autor introduziu as definições de Mesogênese, Topogênese e Cronogênese. A primeira trata da produção de um meio M que proporcione as condições e materiais adequados para revelar cada uma das respostas $R^{\lozenge}{}_{i}$ que compõem a resposta $R^{\heartsuit}$, que comprove uma *dialética da mídia e do meios* necessários e que pressupõe que o meio seja construído durante o processo. A Topogênese tem a função de determinar a gênese dos equipamentos praxeológicos[7], ou seja, o *topos* está relacionado com a posição de X (aluno) e de Y (professor ou orientador) na instituição e de suas relações com as entidades praxeológicas construídas ou que serão construídas no PEP – segundo Bosch (2018), essa função está diretamente relacionada à dialética do indivíduo e do coletivo. Finalmente, a Cronogênese tem a função de determinar a gênese do tempo didático, isto é, o tempo da construção praxeológica e, a princípio, distingue um PEP dos episódios didáticos, mais facilmente identificáveis, o que provoca uma dilatação do tempo didático já que é preciso constituir M para poder produzir $R^{\heartsuit}$.

Por outro lado, uma proposta de formação de professores foi desenvolvida com base em formatos de *ensino baseado em investigação* em que professores, juntamente com educadores, abordam uma questão profissional aberta do tipo "como implementar modelagem no nível secundário?" ou “como ensinar funções?”, e que foram chamados de **Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP),** tendo sido desenvolvido por Ruiz-Olarría (2015) e implementado por Florensa, Bosch e Gascón (2020) considerando um processo que se desenvolve em cinco módulos. O primeiro, M_0, trata da formulação de uma questão geratriz (Q_0-FP) do tipo “como ensinar um conteúdo matemático específico?”. Essa questão, proposta pelos educadores no início do processo de estudo, deve ser respondida, pelo menos parcialmente, no final do processo de busca de informações

[7] Equipamento praxeológico é a amálgama de praxeologias e elementos praxeológicos que uma pessoa tem à sua disposição, ou seja, pode ativar em um determinado momento e em certas condições e restrições dadas. (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 93)

em diretrizes curriculares oficiais, propostas instrucionais e ementas, além de resultados de pesquisas educacionais e livros didáticos. No módulo seguinte, M_1, dá-se a experimentação do PEP, com os professores participantes sendo convidados a atuar como alunos desse PEP que é apresentado como uma possível resposta à questão proporcionada em M_0. Assim, uma pergunta inicial Q_0 é apresentada aos professores e eles são convidados a elaborar uma resposta na forma de um relatório escrito, com o objetivo principal da experimentação do PEP de fazê-los se sentir à vontade com uma possível atividade matemática pouco comum de ser encontrada em uma sala de aula normal.

No módulo M_2, uma vez que os professores tenham experimentado um PEP, eles são convidados a analisá-lo focando nas condições e restrições necessárias para implementar esse tipo de dispositivo de ensino nas escolas ou instituições educativas atuais. O módulo seguinte, M_3, trata de solicitar aos professores que desenhem um PEP para um grupo específico de alunos considerando o trabalho realizado nos módulos anteriores e um determinado conjunto de restrições institucionais como, por exemplo, um nível educacional específico ou certas condições escolares. No último módulo, M_4, os professores devem experimentar, gerir e analisar o PEP desenhado observando as dificuldades de ensino encontradas em função da atividade ser uma novidade em relação às práticas instrucionais atuais.

Assim, para o desenvolvimento da pesquisa, os constructos fundamentais da TAD, como as noções de praxeologia e organização praxeológica, ajudam para determinar o MER na dimensão epistemológica, para depois se realizar a análise das dimensões econômica e ecológica. Para o desenvolvimento do PEP-FP, consideramos quatro dos cinco módulos elaborados por Ruiz-Olarría (2015). Para as análises dos módulos desenvolvidos, levamos em conta as três funções didáticas: a cronogênese (avanço de estudo), a mesogênese (evolução do *milieu*) e a topogênese (evolução das responsabilidades entre posições de diretores de estudo e os componentes do PEP – professor e alunos). E, para conduzir o PEP, consideramos as dialéticas fundamentais.

2.2 Revisão da Literatura

Nesta seção, consideramos a revisão da bibliografia pesquisada em duas categorias: as que tratam da formação de professores apoiadas na TAD, em particular, aquelas ligadas à formação de professores através do desenvolvimento de um percurso de estudo e pesquisa, e, na última categoria, as pesquisas que desenvolveram algum MER com foco em vetores.

2.2.1 Pesquisas que tratam da formação de professores de matemática

Para a busca dessas pesquisas utilizamos o descritor “percurso de estudo e pesquisa para formação de professores de matemática” ou “percurso de estudo e pesquisa” nas línguas portuguesa, espanhola e inglesa. No banco de teses da CAPES[8], consideramos como filtros de busca “programas de educação matemática” e os anos 2015 a 2019. Essa busca resultou em 79 teses, mas depois da verificação das que tratavam, de fato, da formação de professores, ficamos com apenas duas. Continuamos a busca no Google Acadêmico com os descritores “*recorrido de estudio e investigación para formación de profesores*” e “*recorrido de estudio e investigación*” e que nos conduziram a outras duas pesquisas. Buscamos também na língua inglesa por meio da Internet, do Google Acadêmico e de consulta ao acervo de bibliotecas do Peru e da Espanha. Além disso, entramos em contato com pesquisadores da Espanha e tivemos acesso a uma tese e artigo. No total, consideramos seis trabalhos que apresentamos no Quadro 1 em que DO identifica os trabalhos que são de doutorado.

Quadro 1 – Trabalhos analisados que tratam de PEP-FP

Autor	Titulo	Nivel	Instituição	Ano
Ruiz-Olarría, R	Formación Matemática-Didáctica del profesor de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñaza	DO	Universidad Autonoma de Madrid	2015
Licera, R. M.	Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado”	DO	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ciencias Instituto de Matemáticas	2017
Florensa, I.	Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education	DO	Universidad Ramón Llull-Barcelona Ispanhia	2018
Sierra, e Gascón, J	Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración	Artigo		2018
Benito, R	Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: o ensino de cônicas	DO	PUC-SP	2019
Freitas, R	Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta.	DO	PUC-SP	2019

Fonte: Produção da autora

[8] https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

Na primeira parte de sua pesquisa, Ruiz-Olarría (2015) baseou-se no resultado de um estudo do Comitê de Educação da Sociedade Europeia de Matemática que discute a matemática a ser ensinada e que considera a matemática necessária para seu ensino. O Comitê se centrou em como a formação de professores de matemática pode influenciar suas relações com os conteúdos a serem ensinados, mas sem abordar uma multiplicidade de outras tarefas que constituem a profissão docente, e que a formação não pode ignorar. A autora afirma que esse relatório menciona que o "saber matemático é naturalmente um pré-requisito essencial para o ensino de matemática" (p.13), no entanto, ela ressalta que necessário não significa suficiente, uma vez que "o ensino eficiente de matemática, independentemente de quem sejam os alunos, também requer outros tipos de conhecimentos e habilidades" (p. 13) intimamente relacionados ao conhecimento matemático. Ruiz-Olarría considera, então, a distinção estabelecida pelo psicólogo educacional Lee Shulman (1987) entre "conhecimento de conteúdo", isto é, um conhecimento puramente matemático, e o "conhecimento pedagógico do conteúdo", que é o conhecimento de como a matemática é ensinada e aprendida, e ainda o "conhecimento pedagógico", ou seja, a forma geral de ensinar ou aprender qualquer disciplina.

A autora considera como ponto de partida o trabalho realizado pelos pesquisadores franceses Cirade e Chevallard a respeito do que eles chamam de «matemática para o ensino» e concordando que:

> Uma formação profissional que se pretende genuinamente universitária deve afastar a ilusão de uma aplicação fácil de saberes pré-fabricados e a ausência de um verdadeiro diálogo epistemológico, cultural e profissional permanente. Para isso é imprescindível poder contar com mecanismos de formação e investigação que permitam emergir os problemas da profissão para os estudar com os profissionais em formação, os seus formadores e os investigadores que concordem em se envolver na área de pesquisa fundamental para o desenvolvimento profissional. (RUIZ-OLARRIA, 2015, p. 14 - Tradução nossa)

A autora baseia-se também em resultados obtidos por seu grupo de pesquisa no âmbito da TAD no período de 2004 a 2011 em que foram desenvolvidos dois projetos de investigação baseados no ensino de modelização matemática no ensino médio e nos primeiros anos universitários, utilizando o dispositivo didático do PEP. Estes projetos centram-se na análise das condições de sua possibilidade e disseminação generalizada nos atuais sistemas de ensino.

A principal contribuição da pesquisa de Ruiz-Olarría consiste em enfatizar o caráter integrativo da didática da matemática ao explicitar o mecanismo que permite que tal disciplina trate de forma unitária o conjunto de questões que constituem o problema de ensino e, assim, unificar o processo de formação docente. Esse mecanismo é formulado em termos dos níveis de codeterminação didática e consiste em considerar como questões geratrizes da formação aquelas que emergem nos chamados níveis intermediários de codeterminação didática, ou seja, aqueles que correspondem ao disciplinar, à área e ao setor. Assim, a autora propõe uma estratégia metodológica para reconstruir uma praxeologia para o ensino por meio de um PEP-FP. Pela natureza exploratória de sua pesquisa, a autora levanta uma variedade de problemas que abrem novas e futuras linhas de trabalho, por exemplo, no que se refere à dialética entre a formulação de um problema da profissão docente e a consideração de um fenômeno didático. Muitas questões surgem também em torno da questão geradora Q_0-FP do REI-FP:

> Quais são as limitações da formação docente que não desafia o modelo epistemológico dominante nas instituições de ensino e reduz o estudo dos problemas da profissão docente a apenas perguntar "como ensinar uma determinada área do currículo escolar"?
> Que papel a pesquisa didática poderia desempenhar na formulação da questão Q_0-FP que serve como um ponto de partida para o PEP-FP?
> Em que medida e de que forma é adequado integrar na formação docente uma determinada análise dos fenômenos didáticos que, segundo a nossa estratégia metodológica, permite reformular os problemas de ensino como problemas de investigação didática? (RUIZ-OLARRIA, 2015, p. 274 - Tradução nossa)

A pesquisa de Licera (2017) tem como objetivo inicial analisar as respostas da problemática didática básica e que surgem de diferentes instituições escolares de ensino médio na Argentina, Chile, Espanha e França. Para isso, utilizou documentos curriculares e livros didáticos das redes de ensino consideradas. Esta análise foi enriquecida com respostas apresentadas por algumas investigações didáticas relativamente próximas ao problema do professor [9] em torno dos números reais no último estágio do ensino médio. As respostas permitiram distinguir as principais características do modelo epistemológico dominante para números reais nas

[9] O problema docente (ou problema do professor) se refere aos problemas que o professor levanta quando deve ensinar um conteúdo matemático aos seus alunos e eles se formulam com as noções disponíveis na cultura escolar, que em muitas ocasiões são importadas dos documentos curriculares (Gascón 2011, p.1).

instituições analisadas, ou seja, como são considerados os números reais e o que se faz com eles.

A autora afirma que, para identificar diferentes concepções institucionais para os números reais, utilizou um modelo epistemológico alternativo para os números reais que permaneceu implícito ao longo do primeiro capítulo do seu estudo. Do ponto de vista metodológico, essa situação é consistente com a especificidade da didática da matemática no sentido descrito por Guy Brousseau que, em outras palavras, diz que, em qualquer problema de ensino considerado, a análise didática começa por questionar o saber a ser ensinado, ou seja, por abordar a dimensão epistemológica do problema básico.

Ao contrário das instituições escolares analisadas, o MER desenvolvido apresenta o problema de medir grandezas contínuas e cálculos numéricos com medidas aproximadas no centro da atividade matemática em torno de números reais. Ao contrastar as razões de ser dos números reais que o MER propunha com as razões de ser oficiais das obras de matemática escolar, ficaram evidentes dois fenômenos didáticos principais que afetam o seu ensino e sua aprendizagem: a desarticulação entre números e medição de grandezas e a prevenção do problema causado pela utilização de números irracionais que fazem parte da dimensão econômica do problema de ensino. Uma vez que o conhecimento para ensinar números reais no ensino médio foi questionado, a dimensão ecológica do problema de ensino foi abordada através da identificação das restrições que explicam e determinam as condições em que esses números são ensinados (dimensão econômica) e como as restrições prejudicam outras organizações e formas de ensino, como as que surgem do MER construído. Além disso, a autora finaliza com uma proposta de percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores (PEP-FP) que, ao longo do seu desenvolvimento, gerou, como produto desse processo, praxeologias para o ensino, ou seja, uma organização matemática que engloba suas perguntas e respostas.

A pesquisa de Florensa (2018) tem como objetivo estudar em que medida a estrutura da TAD fornece as ferramentas epistemológicas e didáticas necessárias para apoiar o novo paradigma de questionamento do mundo. Para isso, Florensa estudou a implementação de Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) e o papel desempenhado pelos mapas pergunta-resposta (mapas de Q-R) no ensino de engenharia e na formação de professores. Mais especificamente, estudou as condições e restrições que permitem e dificultam a utilização dos mapas de Q-R e como eles ajudam a explicitar a razão de ser do conhecimento em jogo. Estudou também o papel da Engenharia Didática (ED) como uma ferramenta para os professores sistematicamente projetarem os processos de estudo de perguntas. Para abordar essas questões, Florensa realizou três estudos empíricos: um PEP implementado em um curso de Resistência de Materiais; um PEP em um curso de Elasticidade e um PEP em um curso para professores de matemática do ensino médio. Os resultados mostraram que os mapas de Q-R foram adotados por professores e alunos, com os professores os utilizando em conjunto com os pesquisadores no design dos PEP e suas análises. Os mapas de perguntas e respostas também foram utilizados pelos estudantes dos dois PEP implementados para descrever os caminhos seguidos durante o processo de consulta, bem como para comunicar seu progresso e para atribuir e compartilhar tarefas.

O autor concluiu que os mapas Q-R são uma ferramenta epistemológica produtiva nos processos de estudo em que o conhecimento a ser ensinado não é um corpo de conhecimento pré-estabelecido, mas uma questão aberta inicial. Além disso, a pesquisa mostrou que os mapas Q-R e a engenharia didática desempenham um papel crucial como ferramentas de comunicação quando o design, a implementação e a análise de PEP não são feitos exclusivamente por pesquisadores da TAD, mas por equipes mistas de professores e pesquisadores.

A pesquisa de Sierra e Gascón (2018) apresenta um dispositivo didático em processo de elaboração, com base na TAD cujo objetivo é avançar rumo ao paradigma de questionamento do mundo. Nesse trabalho, os autores descrevem parte de um PEP-FP relacionado aos sistemas de numeração, que foi realizado em um mestrado para professores do ensino médio, e que tiveram que mostrar uma estratégia para a construção de uma praxeologia matemática para o ensino. Tal estratégia consistiu em estender a rede de questões surgidas ao longo da experimentação a outras que fazem parte da razão de ser proposta para os sistemas de numeração na instituição que forma professores.

Para os autores, a maior parte das pesquisas que tratam da formação do professorado investigam caraterísticas pessoais, como as cognitivas ou motivacionais, ou aspectos didáticos que o professor deve gerir, como a organização e avaliação de tarefas, mas é difícil encontrar pesquisas que questionem a matemática escolar. Assim, os autores questionam a atividade matemática escolar para o ensino de sistemas de numeração que requer tomá-la como objeto de estudo em si e a descrevê-la em termos de sequências de praxeologias matemáticas, o que resulta na construção explícita de um MER que atribui a esta área da atividade matemática uma nova razão de ser, uma nova estrutura e uma nova relação com os demais blocos da matemática escolar. Para isso, os autores centraram seu trabalho na construção de praxeologias *para o ensino*, compreendidas como infraestruturas matemático-didáticas imprescindíveis para abordar o problema didático da formação do professorado e, assim, descrever e analisar a gênese e alguns desenvolvimentos possíveis dessas praxeologias baseadas em ampliações sucessivas do MER.

Benito (2019) focou sua pesquisa na formação inicial de professores de matemática para o ensino das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) apoiado na TAD com um grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe. A pesquisa teve como objetivo investigar de que maneira o dispositivo dos PEP-FP poderia ajudar esse grupo de futuros professores a questionar, analisar, desenhar e experimentar processos para o ensino de cônicas. O autor seguiu a metodologia de pesquisa qualitativa utilizada pela TAD que possui quatro fases. Na primeira fase, realizou as análises praxeológicas ou análises preliminares, em que fez um questionamento epistemológico do objeto matemático e da necessidade de introduzi-lo na escola, além de um estudo das condições e restrições oferecidas pelas instituições de ensino. Na segunda fase, fez uma análise *a priori* e o planejamento matemático e didático da proposta de intervenção; na terceira fase, implementou a experimentação e a análise *in vivo* e, na última etapa, fez a análise *a posteriori*, a validação das hipóteses de pesquisa e das propostas planejadas nas fases anteriores.

O autor desenvolveu um MER para as geometrias das cônicas e um PEP, que tinha como questão geratriz uma pergunta a respeito da construção de um fogão solar, e que foi aplicado em turmas de ensino médio e superior e forneceram elementos para o desenho da formação inicial. Para o autor, os resultados do PEP-FP contribuíram positivamente para a formação desse grupo de futuros professores que, ao final da formação, propuseram aulas em que as cônicas não eram abordadas apenas na Geometria Analítica e apresentavam estratégias de ensino que buscavam romper com o paradigma de visita às obras. Afirmou ainda que a metodologia de pesquisa utilizada forneceu condições para uma dialética entre o MER e o PEP-FP que auxiliou no planejamento das atividades da formação inicial, trouxe contribuições para uma reformulação do MER e proporcionou uma praxeologia para o ensino de cônicas na formação inicial de professores.

A pesquisa de Freitas (2019) no campo da formação inicial de professores de matemática, especificamente na Licenciatura em Matemática brasileira, desenvolveu um PEP-FP com estudantes (professores estagiários) de um curso de Licenciatura em Matemática na Bahia participantes de turmas de estágio curricular supervisionado.

A pesquisa de Freitas tinha como objetivos específicos a (re)construção de conhecimentos matemáticos e didáticos para o ensino de Geometria Analítica Plana do ponto e da reta, e que foram estruturados em etapas da pesquisa para analisar os modelos epistemológicos.

A autora indicou como resultados que os estudantes que participaram do processo de formação profissional, com aporte do dispositivo PEP-FP, mobilizaram e (re)construíram certos saberes docentes didáticos, pedagógicos e tecnológicos para a Geometria Analítica Plana, mais especificamente, a respeito de ponto e reta, e que o conjunto de condições e restrições do PEP-FP indicou que o dispositivo permite desenvolver vários PEPs para a formação profissional pontual ou regional a respeito de conhecimentos docentes para o ensino de objetos matemáticos.

Todos os estudos acima descritos reforçam a escolha de nossa metodologia de pesquisa e da importância do mapa de questões-repostas (Q-R). Nas seções seguintes, apresentamos as pesquisas que tratam de vetores.

2.2.2 Pesquisas em Educação Matemática a respeito de vetores

Para a busca de pesquisas que tratam de vetores, usamos os descritores “vetores”, “vetores na geometria”, “vetores na álgebra linear”, “vetores no espaço”, “vetores no plano”, vetores e suas aplicações” e “vetores no ensino de geometria”, “*teaching of vectors*”, “*vectores*”, “*enseñanza y aprendizaje de vectores*”, *“vectors*”, “*vecteur d'enseignement et d'apprentissage*”. Para esse levantamento, a primeira busca foi feita na biblioteca da PUC-SP, onde encontramos duas teses de doutorado de pesquisadores franceses a respeito de álgebra linear e uma dissertação brasileira em história do espaço vetorial.

No banco de teses da CAPES, com a palavra “vetores” encontramos 7.947 resultados em diferentes áreas, mas ao aplicar o filtro de “Ensino em Ciências e Matemática” e “Ensino”, reduzimos o total a 28 trabalhos, dos quais dois eram de doutorado e 26 de mestrado, mas quando focamos especificamente na área da Educação Matemática, encontrando apenas uma tese e uma dissertação. Encontramos diversas pesquisas em francês com as palavras “*vecteur”* e “*vecteur d'enseignement et d'apprentissage*” no website Google Acadêmico e, no meio delas, cinco teses de doutorado. Com as expressões em espanhol, encontramos no Google Acadêmico uma dissertação na Colômbia; uma tese de mestrado no catálogo *online* das bibliotecas das universidades do Peru, além de duas teses da Espanha disponibilizadas pelos próprios autores.

No Quadro 2, apresentamos as pesquisas que envolvem estudo de vetores, indicando por DO as de doutorado e por ME as de mestrado. Cabe ressaltar que as teses e dissertações apresentam o estudo do objeto vetor de forma mais aprofundada que nos artigos.

Entre as teses que tratam de vetores como um dos conteúdos de Álgebra Linear, a de Dorier (1990) tem como objetivo definir melhor como seu conteúdo é ensinado e avaliado no primeiro ano da universidade, observando os tipos de tarefas propostos e os procedimentos utilizados pelos alunos. Para desenvolver esse objetivo, o autor pesquisou o que é ensinado desde o início do século XX, considerando que a álgebra linear tem ferramentas não só para a maioria das teorias matemáticas, mas também para outros campos científicos (física, biologia, química, medicina, economia, estatística etc.). Como resultado, Dorier salienta que os conceitos iniciais de álgebra linear foram ensinados pela primeira vez em universidades nos anos cinquenta, mas que, no final da década de 1960, com a reforma da matemática moderna, tais conceitos foram introduzidos em salas de aula do ensino médio. No entanto, recentemente desapareceram quase que completamente deste ambiente. Para o autor, a ausência desse conteúdo nos currículos do ensino médio da França pode ser um reflexo das dificuldades relacionadas ao seu ensino, o que, porém, não pode ser confirmado por uma análise detalhada, mas apenas pela memória dos alunos que apresentaram um catálogo de erros persistentes.

Quadro 2 – Trabalhos analisados que tratam de vetores

Autor	Teses e dissertações	Ano	Curso	Instituição	Pais
Dorier, J.-L.	Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire: approches historique et didactique	1990	DO	Université Joseph Fourier	França Grenoble
Bosch, M	La dimensión Ostensiva en la Actividad Matemática	1994	DO	Universidad Autonoma	Espanha Barcelona
Bitar, M.	Les vecteurs dans l'enseignement secondaire –Aspect outil et objet dans les manuels – Etude de difficultés d'éleves dans deux environements: papier crayon et Cabri-géomètre II	1998	DO	Universite Josep Fourier	França
Pressiat, A.	Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison points-vecteurs.	1999	DO	Université de Paris VII Denis Diderot.	França Paris
Zornoff, P.	Uma investigação sobre as origens dos espaços vetoriais e a evolução da análise geométrica de Leibniz até Grassmann	1999	ME	UNESP	Brasil São Paulo
Hayfa, N.	La enseñanza de la noción de vector en el Líbano después de la reforma de 1998. Análisis antropológico y conceptual sobre una muestra de libros de texto y estudiantes franceses	2006	DO	Université Claude Bernard Lyon I & Saint – Joseph Beyrouth	França-Líbano
Ba, C.	Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique	2007	DO	Université Claude Bernard – Lyon 1 et l'Universite Cheikhanta Diop	França-Senegal
Zea, C. A.	La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático	2012	ME	Universidad del Valle facultad de Educación y Pedagogía	Colômbia
Guerato, E. T.	Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana	2012	ME	UNIBAN	Brasil São Paulo
Valencia, E.	Errores y dificultades de los estudiantes de ingeniería en el procedimiento para describir el espacio generado por un conjunto de vectores de R^n.	2015	ME	PUCP	Peru
Matos, F.	Praxeologias e Modelos Praxeológicos Institucionais: O caso da Álgebra Linear	2017	DO	UFPA	Brasil Pará

Fonte: Produção da autora

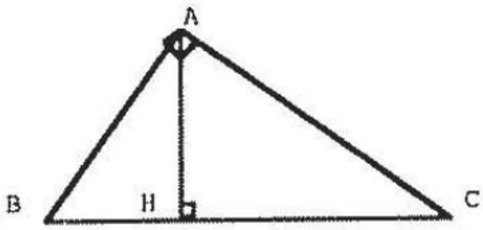
Além disso, Dorier (1990) afirma que, na década de 1990 no ensino francês, a introdução da álgebra linear é plenamente realizada nos primeiros níveis de ensino superior, no entanto, a experiência dos professores e dos alunos mostra que as dificuldades são numerosas e muitas vezes resistentes por seu aspecto formal, o que o autor acredita que tenha sido acentuado por seu desaparecimento do ensino médio. Assim, para Dorier, o ensino de álgebra linear apresenta dificuldades, em particular, o formalismo e a abstração que são rejeitados pelos alunos que, em alguns casos, é um obstáculo. E ele acrescenta que o desaparecimento no ensino secundário, não só da álgebra linear, mas também da álgebra formal juntamente com o estudo de estruturas ou de polinômios etc., agravou essas dificuldades.

Dorier afirma ainda que a Geometria é um terreno privilegiado para a Álgebra Linear, pois historicamente os dois domínios estão intimamente relacionados. Para o ensino, a geometria faz sentido nos conceitos de álgebra linear, enquanto o uso da ferramenta vetorial pode simplificar a resolução de muitos problemas de geometria. E o autor encerra seu estudo histórico com um breve panorama da evolução do ensino de álgebra linear na França até a última reforma do ensino médio e aulas preparatórias para a universidade. Na segunda parte de seu trabalho, o pesquisador investiga produções de alunos em álgebra linear e faz um teste de lógica e álgebra enquanto, na terceira parte, apresenta pistas e questões para que outros investiguem seguindo seus métodos ou apresentando novos olhares de algumas propostas gerais de Dorier para o Ensino de álgebra linear para iniciantes. Ao longo deste trabalho, também levantamos o problema da adaptação de certas ferramentas e métodos de ensino às especificidades do ensino superior e do caráter epistemológico de dois conceitos de álgebra linear. Em resposta a essa pergunta, propusemos especificamente a utilização de recursos dentro da própria matemática, e não o desenvolvimento de sequências de ensino.

A tese de Bosch (1994) abordou o problema do papel que os objetos ostensivos[10] desempenham na atividade matemática e a maneira como influenciam tanto o desenvolvimento da atividade como os objetos que são produzidos. A autora considerou o caso da proporcionalidade e apresentou alguns problemas de geometria cuja resolução faz apelo à representação figural que pode se tornar um obstáculo ao trabalho matemático, pois há o risco de se efetuar "leituras figurais" equivocadas que conduzem a igualdades inexatas, fato que releva como o modelo figural é um assunto delicado e que nada se perde ao substituí-lo por um modelo "simbólico". Por exemplo: se os triângulos BAC, BHA e AHC são semelhantes, então, demonstrar que $AH^2 = BH \cdot HC$, considerando a Figura 1, pode interferir na demonstração, pois ao tentar escrever as igualdades entre as razões baseando-se na figura, corre-se o risco de efetuar uma "leitura figural" errônea, que conduz à escritura incorreta da equação.

[10] *"Ostensivos" son las palabras, los grafismos, las escrituras, los gestos y todos los objetos materiales; las nociones, ideas, conceptos etc., serán entonces, simplemente, objetos no-ostensivos.* (Bosch 1994. p. 7)

Figura 1 - Figura de apoio à uma demonstração



Fonte: Bosch (1994, p 445)

No entanto, “esquecendo-se” do modelo figural, a autora mostra no modelo simbólico que a partir de $\sim\begin{cases} BHA \\ AHC \end{cases}$, pode-se representar a semelhança entre os triângulos BHA e AHC considerando a ordem dos vértices em relação aos ângulos, e que permite escrever diretamente que $\frac{BH}{AH} = \frac{HA}{HC}$ e assim obter a igualdade pedida.

Bosch (1994) indica que o modelo figural, que é pouco fiável, tende a prevalecer no ensino, para que o aluno possa ver uma realidade mais “concreta” e realista, e que o cálculo vetorial elementar é outro caso em que é preferível não tentar uma explicação geométrica a partir de uma figura. Por outro lado, a autora mostra exemplos em que o problema é apresentado por representações figurais, mas que as demonstrações usam propriedades de vetores sem necessidade de qualquer figura. Ela apresenta o exemplo: “seja um triângulo qualquer ABC e sejam I, J, K os pontos médios dos lados $[BC], [C, A], [A, B]$ respectivamente. Demonstrar que $[AI]$ e $[JK]$ têm o mesmo ponto médio” (BOSCH, 1994, p.446, tradução nossa). E, na sequência, a autora apresenta a seguinte solução:

> Seja O ponto médio de $[JK]$, temos; $2\overrightarrow{OK} + 2\overrightarrow{OJ} = \vec{O}$.
> Ao ser K o ponto médio de $[AB]$ e J o de $[AC]$, temos $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e $2\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.
> A igualdade inicial se converte em $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \vec{O}$.
> Como $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OC}$, temos $2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{O}$.
> Logo O é também o ponto médio de $[AI]$. (BOSCH,1994, p.446, tradução nossa).

A autora indica que esta não é uma solução muito precisa, pois o problema tem a intenção de que o aluno encontre um fio condutor ao analisar um modelo figural, mas a solução deriva de poucos princípios do cálculo vetorial elementar “cuja utilização não requer qualquer figura”. Além disso, a autora indica que “Dados os três pontos A, B e C, tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$; se I é o ponto médio de $[AB]$ (denota o segmento AB) e M é um ponto qualquer, então, $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$” (BOSCH, 1994, p.447). E a autora mostra ainda outros exemplos que envolvem vetores cuja resolução não depende de representações figurais, principalmente, para fazer demonstrações.

Bittar (1998) estuda o ensino de vetores no ensino médio (*secondaire*) francês com enfoque na dialética ferramenta-objeto[11] analisando esse conteúdo em manuais escolares e observando as dificuldades dos alunos em dois ambientes – lápis/papel e *Cabri Géomètre II*. A autora afirma que Sierpinska e seus colegas identificaram três modos de raciocínio (ou pensamento) que coexistem na álgebra linear: sintético-geométrico, analítico-aritmético e analítico-estrutural.

A pesquisa de Bittar (1998) não tinha por objetivo fazer um estudo em termos de transposição didática, mas examinar a situação já estabelecida no ensino secundário, nível em que a noção de vetor é ensinada de maneira concentrada no estudo do objeto já transposto. Para tanto, a autora formulou então suas hipóteses e questões focando nos registros da representação semiótica, presentes nesse nível de ensino em torno de vetores, bem como em sua função de ferramenta e objeto, e, para compreender as dificuldades dos alunos, realizou um estudo em termos de campos conceituais de acordo com Vergnaud.

Bittar (1998) considerou os diferentes quadros em que podemos encontrar soluções para problemas que envolvem vetores, como o da geometria (sintética) para o estudo de configurações em que o aluno deve identificar a igualdade de vetores observando direção, sentido e comprimento baseado em propriedades geométricas da figura ou em sua leitura. Embora propriedades possam ser fornecidas no enunciado do exercício, por exemplo a respeito de translação, a solução sempre resulta da observação da figura dada e a leitura da figura se resume, basicamente, a identificar subfiguras. No caso da geometria analítica, são definidas as coordenadas de um vetor e deve ser constatado que dois vetores são iguais quando têm as mesmas coordenadas e vice-versa. A respeito da geometria analítica e da geometria vetorial, a autora afirma que as noções de sistema de coordenadas e coordenadas de um ponto são ensinadas em anos anteriores, quando é definido o par base/coordenada de um vetor, o que torna possível a ligação entre essas duas áreas.

[11] No sentido de Douady (1986) *Jeux des cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, n2, pp. 5-31.

A pesquisa de Pressiat (1999) tem como objetivo estudar problemas epistemológicos e didáticos relacionados ao ensino de vetores em geometria ministrado na faculdade e no ensino médio, alertando que o trabalho não trata de álgebra linear, embora trate de algumas questões que surgem dela, mas que o foco está nas relações entre pontos e vetores. Observando o ensino de vetores no ensino médio francês, o autor constatou que eles são introduzidos como ferramentas para resolver problemas de geometria, o que o conduziu a investigar se tal ensino atinge seus objetivos, além de tentar traduzir as dificuldades dos alunos em relação às invariantes que eles constroem.

Pressiat (1999) observou que o ambiente do ensino médio na França pode ser dividido em quatro teorias – quatro estruturas -- essa área de estudos. Ele também identificou cada uma delas pelo nome dos conceitos básicos emblemáticos de cada teoria, o que resultou na nomenclatura teoria das situações didáticas, teoria dos campos conceituais, teoria da dialética ferramenta-objeto e teoria antropológica do didático. O autor estudou as organizações matemáticas relacionadas ao ensino da geometria usando cálculo vectorial, bem como as várias etapas que acompanharam o surgimento das noções de espaços afins e espaços vetoriais; em seguida, ele mostrou a influência dessas diferentes etapas na evolução dos programas educacionais na França ao longo do século passado. Esta influência foi especialmente marcada por um desequilíbrio entre a parte teórica (conhecimento) e a parte prática (saber fazer) do tratamento das questões da geometria elementar por vetores no ensino secundário francês.

A pesquisa de Zornoff (1999) apresenta um estudo histórico das origens do que hoje é conhecido como espaços vetoriais baseado no caminho traçado por Peano, ou seja, com uma visão para a constituição de vetores e uma estrutura precursora de espaços vetoriais de dimensão finita encontradas nas obras de Möbius, Hamilton e Grassmann. Estas estruturas são desenvolvidas por intermédio da análise vetorial e o trabalho mais próximo para a construção de espaço vetorial é o de Grassmann que, em sua obra *Ausdehnungslehre*, desenvolve a caracterização de Leibniz, que consiste na análise de problemas que descrevem a construção em termos totalmente geométricos. Essa investigação abrangeu, com maior profundidade, a primeira metade do século XIX, uma vez que a evolução histórica deve ser entendida como um *continuum* que une o passado ao futuro, atravessando por um ponto evanescente chamado presente.

O autor indica que podem existir vários caminhos que concorrem para o desenvolvimento da estrutura de espaços vetoriais e que uma dessas vias evolutivas é a que culmina na análise geométrica de Grassmann. No entanto, Peano é considerado o primeiro a apresentar, inclusive com notações, um sistema axiomático para espaços vetoriais. Assim, para a conclusão dessa gênese dos espaços vetoriais, Zornoff (1999) indica que foi o próprio Peano, nas considerações iniciais de seu trabalho de 1888, que credita a Gottfried Willhelm Leibniz (1646-1716), ao *Der Barycentricshe Calcul* de Augus Ferdnand Möbius, ao *Ausdehnungslehre* de Herman Grassmann e ao trabalho do Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) a respeito de quatérnios, as ideias que possibilitam o desenvolvimento de seu cálculo formal.

Ba (2007) centra seu estudo em aspectos epistemológicos e didáticos das relações entre a matemática e a física, por um lado, com respeito a vetores e translação e, por outro lado, às grandezas físicas vetoriais e ao movimento de translação. O autor enfatiza que a interação entre a matemática e outras ciências é um assunto rico que está presente em diferentes aspectos, de acordo com o contexto e a época

O autor realizou um estudo epistemológico e didático a respeito de vetores e translação relacionados aos conceitos físicos ensinados nas aulas do segundo ano do ensino médio na França e do primeiro ano do ensino médio no Senegal baseado em uma perspectiva antropológica para observar tanto a história do conhecimento acadêmico quanto a história do ensino e das condições de docência das noções matemáticas e físicas em questão. Durante o estudo, o autor analisou relatos de professores das duas disciplinas, além da relação dos alunos com elas. Ele também realizou um experimento interdisciplinar para tratar das ligações entre a física e a matemática, e concluiu que uma das noções mais elementares em que a interação entre a matemática e a física é possível e que é há tempos defendida pelos programas escolares é a noção de vetor.

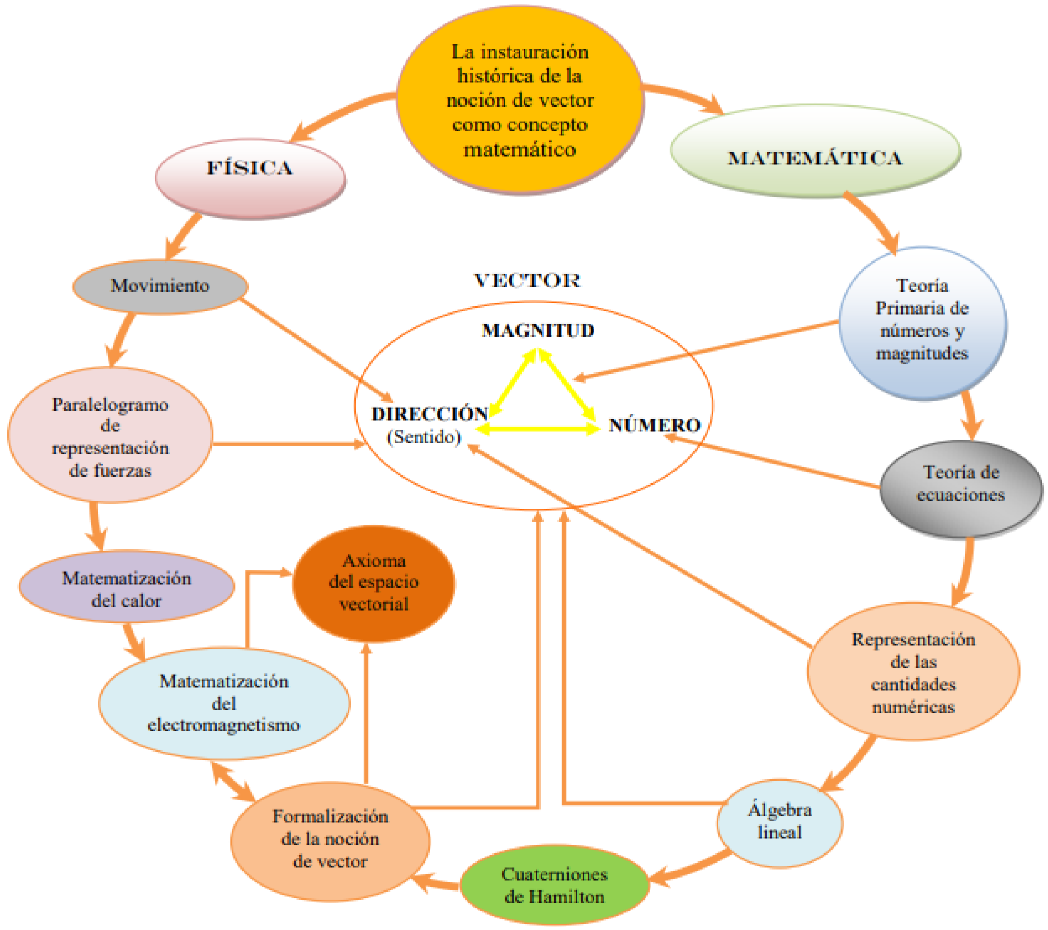
O objetivo da pesquisa de Hayfa (2006) foi estudar as condições de ensino e aprendizagem de vetor e seus efeitos em estudantes do ensino médio no Líbano. A autora observou que, no contexto de sua tese, a definição de vetor e suas propriedades parece fácil, mas sua utilização em exercícios e como ferramenta de solução de problemas não é evidente para os alunos. Por outro lado, a noção de vetor é considerada difícil e problemática por professores libaneses, inclusive quando se relaciona com álgebra vetorial e linear. Assim, a autora buscou investigar se a reforma de 1998, implementada em 2000 no Líbano, modificou o ensino de vetor e resolveu as dificuldades constatadas anteriormente.

O estudo de Hayfa (2006) foi realizado em aulas de Educação Básica (EB) e Educação Superior (ES) para os níveis EB8, EB9 e ES1 (sistema libanês de ensino) e se situa em um referencial teórico que apela à teoria antropológica do didático, à teoria dos campos conceituais, aos registros de representação semiótica e à noção de variável didática.

Hayfa (2006), baseado em uma revisão dos programas curriculares, concluiu que no currículo a anterior o objeto vetor era inserido no secundário como um objeto isolado, tendo um sentido em si mesmo, mas com um amplo campo de aplicação que mobiliza uma variedade de conhecimentos técnicos de diversas áreas, como geometria, geometria analítica e álgebra. Esses conhecimentos técnicos, geralmente, são acompanhados por uma diversidade de registros e referências – por exemplo, figuras ou dados observados no registro algébrico dos exercícios de um questionário proposto aos estudantes. Além disso, ele aponta a peculiaridade do vetor com as diferentes respostas obtidas a partir de uma soma de vetores ou produto escalar que é um número. Essa diversidade de quadros que contêm o vetor, de registros que indicam o vetor e de manipulações particulares com respostas de diferentes naturezas, contribui para tornar essa noção uma noção “distinta” na geometria, ou seja, um quadro espontâneo do vetor tal como é percebido pelo aluno.

Alguns aspectos da evolução conceitual da noção de vetor são apresentados por Zea (2012) por duas linhas de desenvolvimento histórico, a matemática e a física. No caso da física, o autor observou, especialmente, a modelagem de alguns fenômenos naturais, mas concentrou-se, de fato, no estudo matemático em que mostrou que a evolução da álgebra gerou um ambiente favorável para acomodar, estruturalmente, esse novo objeto de natureza não-numérica e apresenta o esquema apresentado na Figura 2.

Figura 2 - Esquema do estabelecimento da noção de vetor



Fonte: Zea (2012, p. 20).

Nesse esquema, o autor mostra que a matemática e a física convergem para a formalização da noção de vetor à medida em que são identificados os elementos de causalidade da tríade: grandeza, direção e número. Zea dedicou parte de sua tese ao livro *Elementary Treatise on Quaternions*, do matemático e físico escocês Peter Tait, por ser um texto-chave para se entender – como visto no esquema – o desenvolvimento da álgebra linear ao incorporar uma forma moderna para a definição de vetor e reutilizar a teoria dos quatérnios formaliza a noção de vetor.

No esquema da Figura 2, vê-se que Zea (2021), ao observar a parte da física, considera primeiro o estudo do movimento, destacando que Aristóteles afirmava não ser conveniente usar um raciocínio puramente geométrico para explicar um fenômeno físico. No entanto, Galileu superou este obstáculo ao evidenciar a necessidade de se interpretar os fenômenos físicos em uma linguagem matemática. Na sequência, quando Newton define as leis do movimento, ele contribui para a matematização do movimento, com a introdução de paralelogramos para representar forças. Já os estudos de Fourier que influenciaram a criação e o desenvolvimento de métodos vetoriais permitiram a matematização de fenômenos que produzem calor, enquanto as pequisas de Heaviside a respeito do tratamento matemático da teoria eletromagnética utilizando quatérnios, permitiu desenvolver um método vetorial para representar numerosas quantidades físicas em vetor, tornando assim mais acessível à comunidade física a representação de eletromagnetismo através da sua matematização que conduziu à formalização de vetores e aos axiomas de espaço vetorial.

Guerato (2012), em sua dissertação, apresenta um estudo de uma sequência de ensino em uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira para o ensino de uma abordagem vetorial na Geometria Ánalítica Plana baseada na teoria dos Registros de Representação Semiótica e em algumas etapas da engenharia didática como metodologia de pesquisa. Guerato (2012) considerou algumas atividades aplicadas aos estudantes e realizou análises comparativas entre a abordagem vetorial (na Geometria Sintética) e a abordagem cartesiana (na Geometria Analítica) para concluir que as duas abordagens são complementares e que nenhuma deve prevalecer sobre a outra.

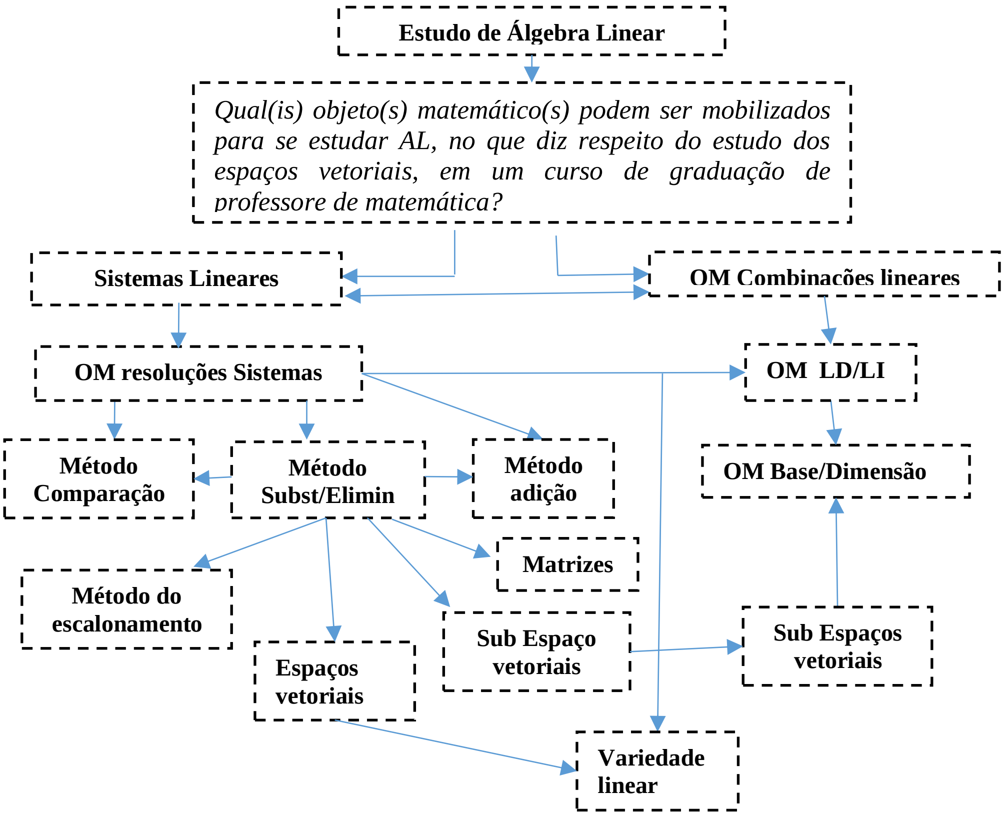
Valencia (2015), em sua pesquisa, descreve e explica os erros e dificuldades que os estudantes enfrentam ao descrever o espaço gerado por um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Para esse estudo o autor utiliza ferramentas do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS), os níveis de algebrização de Godino e outros, além da teoria dos Registros de Representação Semiótica em uma pesquisa exploratória. O autor identificou, descreveu e explicou os erros e dificuldades que os alunos apresentavam no momento de resolver sistemas de equações com parâmetros e variáveis.

Matos (2017) estudou vetores como parte do conteúdo da disciplina de Álgebra Linear para analisar as dificuldades de alunos no entendimento dos objetos apresentados. Os objetos sistemas lineares, matrizes, espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinações lineares, base e dimensão foram pesquisados a partir do estudo qualitativo de sistemas lineares, já que o autor pretendia tornar o conteúdo menos abstrato para os alunos que eram os sujeitos de sua pesquisa. O pesquisador propôs uma estrutura de conexões de conteúdos que nomeia um modelo epistemológico de referência composto por um sistema de tarefas constituídos a partir de um estudo histórico epistemológico, além da constituição de um percurso de estudo e pesquisa que foi utilizado como estratégia de ensino em um curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará por um período de 8 meses entre os anos de 2014 e 2015.

A fundamentação teórica baseou-se na Teoria Antropológica do Didático e o autor apresentou o esquema da Figura 3 para representar seu modelo epistemológico de referência mostrando os conteúdos que considerou.

Nesse esquema, o autor indica que houve ênfase nos sistemas lineares homogêneos porque eles são fundamentais no estudo de dependência linear, base e espaços vetoriais em que se prevê o trabalho com o tipo de tarefa: mostrar a partir de um sistema genérico que o método da adição é uma abstração do método de substituição e eliminação. Nas tarefas desse tipo, que trabalham com sistemas genéricos, é possível, por exemplo, deduzir o método de substituição dividindo o espaço em dois subespaços – o núcleo da matriz (sistema homogêneo) e outro gerado pela matriz transposta – o que conduz a tarefas que incluem operações com os vetores da base. Entendemos essa parte do modelo como um momento de trabalho com a técnica para a resolução da tarefa.

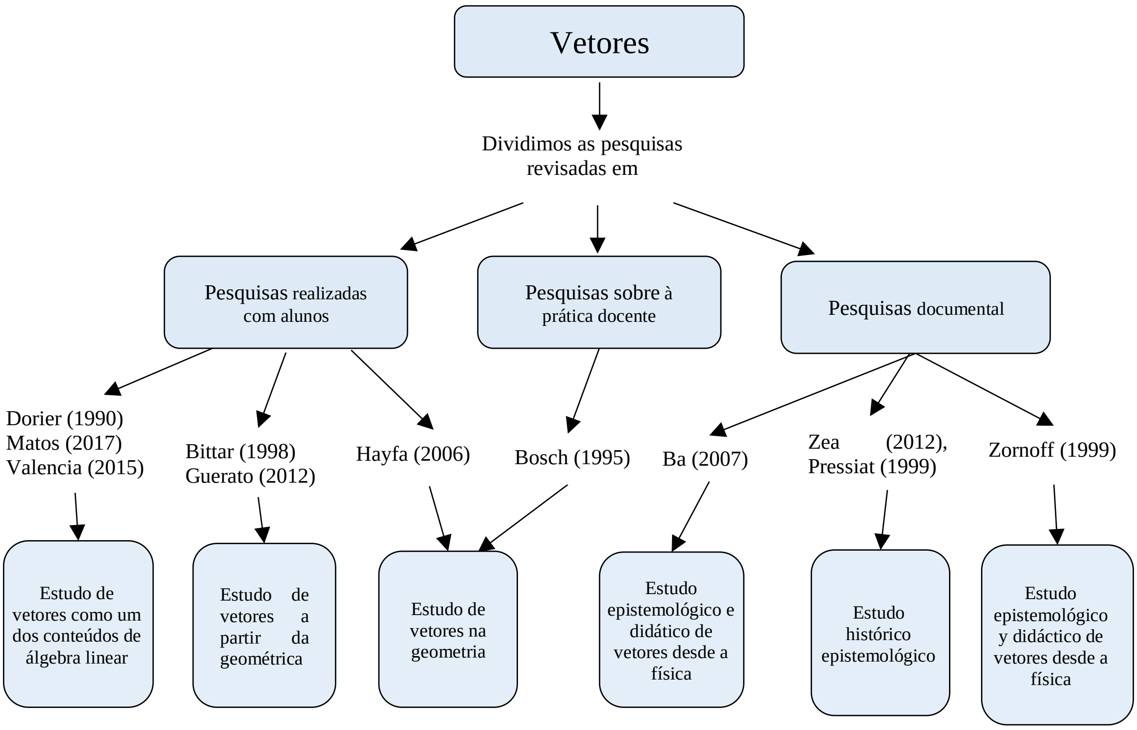
Figura 3 - Esquema de conexões das OMD



Fonte: Matos (p. 159, 2017)

Pudemos observar neste estudo de literatura que, de todas as pesquisas citadas, a única que explicita o paradigma de questionamento do mundo foi o trabalho de Matos (2017) desenvolvido para o ensino de álgebra linear – mais especificamente, para o estudo de espaços vetoriais. Além disso, vimos que os vetores são estudados em três campos: na geometria sintética, em que o vetor é considerado como segmento orientado e cumpre os postulados de Euclides; na geometria analítica, em que um vetor é considerado por coordenadas cartesianas, e na álgebra linear, em que o vetor é um elemento de um espaço vetorial. As pesquisas apresentadas ajudam ainda a identificar elementos para a construção do nosso MER para o estudo de vetores, pois todas fizeram um estudo histórico para mostrar a formalização da noção de vetor, o que nos possibilitou identificar elementos para a sua razão de ser. Na Figura 4 mostramos o resumo das pesquisas realizadas sobre vetores.

Figura 4 – Mapa das pesquisas realizadas sobre vetores



Fonte: Produção da autora

Na seguinte sessão apresentamos as justificativas para nossa investigação.

2.3 Justificativa

Minha experiência como professora nas áreas de ciências e das engenharias me permitiu observar que os alunos encontram dificuldades quando começam a estudar vetores, o que justifica o desenvolvimento da nossa pesquisa com professores e estudantes de mestrado em Ensino de Matemática com formação em matemática, pedagogia, engenharia etc., tendo em vista que muitos deles serão professores dos primeiros anos da formação universitária. Especificamente, o que deu origem a este trabalho foi observar o fraco desempenho dos alunos iniciantes, em ciências e engenharias, nas avaliações que incluem vetores, em especial, em questões que envolvem provas e demonstrações quando ministramos as disciplinas Geometria Analítica e Álgebra Matricial.

Além disso, em distintas conversas com colegas que lecionavam as mesmas disciplinas, notei as mesmas dificuldades e preocupação em saná-las. De fato, existe algo que gera estas dificuldades, ou uma incompletude na formação desses futuros profissionais. E é isso que tentaremos evidenciar em nossa pesquisa.

Na revisão do Currículo Nacional Peruano de 2016 para o ensino médio, o conteúdo de vetores é abordado na disciplina “*Ciencia Tecnologia y Ambiente*”, em que os alunos passam a conhecer as grandezas vetoriais e a distinguirem-nas das grandezas escalares. Por outro lado, as disciplinas que envolvem temas de geometria, como Movimento e Localização, em que predominam as operações na geometria analítica no Nível VI do ensino médio, são ensinadas no mesmo nível, mas de uma maneira distinta e desarticulada. Isto se deve em parte ao fato de a educação escolar peruana estar mais voltada para um ensino tradicional em que os alunos procuram obter diretamente o resultado do cálculo, sem uma preocupação com a razão do procedimento matemático.

As dificuldades dos alunos que apontamos e que dizem respeito à compreensão de noções referentes ao conceito vetor, e que derivam da abordagem estritamente axiomática dada na instituição, e que fazem parte de nossas preocupações, mostram-se também importantes para outros pesquisadores como Dorier (1990), Bosch (1994), Bitar (1998), Pressiat (1999), Zornoff (1999), Hayfa (2006), Ba (2007), Zea (2012), Valencia (205) e Matos (2017).

Pelos fatos apresentados, além, dos resultados encontrados em nossa revisão bibliográfica, consideramos que nossa investigação está justificada e assim enunciamos, no que segue, nosso problema de pesquisa e nossos objetivos.

2.4 Delimitação de Problema

Nas revisões feitas, até o momento, de investigações que tratam da formação de professores de matemática no marco da TAD – como as de Ruiz-Olarría (2015), Licera (2017), Florensa (2018), Benito (2019) e Freitas (2019) –, encontramos elementos para formular nossas questões de pesquisa: **quais praxeologias matemáticas para o ensino de vetores são mobilizadas por professores peruanos em cursos de ciências e engenharia em uma formação continuada? Em que estas praxeologias podem contribuir para a prática desses professores e para o desenho, análise e implementação de novos processos didáticos?**

Para responder às questões de pesquisa, temos como objetivo geral propor um dispositivo didático de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP-FP) para a formação de professores de matemática peruanos referente ao ensino de vetores em cursos de ciências e engenharia com o intuito de identificar as praxeologias matemáticas e didáticas que os docentes mobilizam nesse processo de formação.

Tal objetivo nos conduz aos seguintes objetivos específicos:

1. Estudar a dimensão epistemológica do problema didático de vetores para construir um modelo epistemológico de referência (MER);
2. Estudar a dimensão econômica do problema didático de vetores, com base no MER, para identificar o Modelo Epistemológico Vigente (MEV);
3. Estudar a dimensão ecológica do problema didático de vetores para identificar as condições e restrições para o seu ensino,
4. Desenhar, aplicar e analisar um dispositivo didático (PEP-FP) para professores cursando um mestrado em ensino de matemática, para identificar as praxeologias matemáticas que eles mobilizam e implementar o dispositivo didático do PEP como uma nova estratégia de ensino de vetores.

A seguir, apresentamos nossa metodologia de pesquisa.

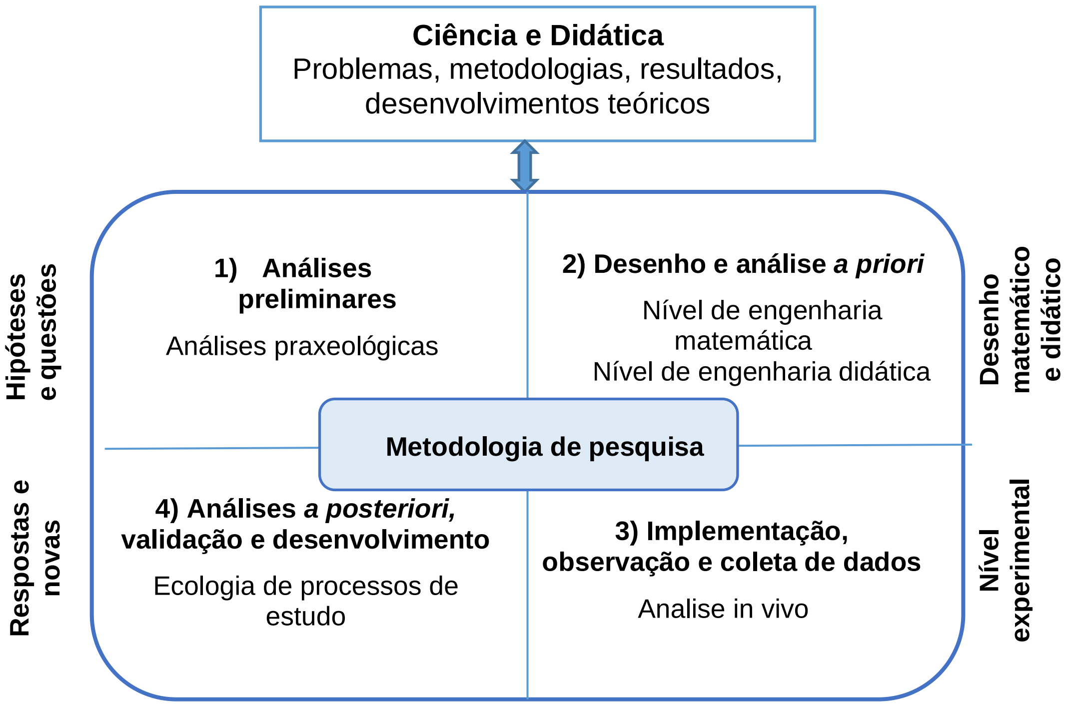
2.5 Metodologia

Nossa pesquisa será de cunho qualitativo, o que, de acordo com Creswell (2010), é um meio de se explorar e entender o significado que indivíduos ou grupos atribuem a um problema social ou humano. Para Garcia (2006), o adjetivo "qualitativo" é adequado às pesquisas que reconhecem:

> (a) a transitividade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori,* cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARCIA, 2006, p. 88).

Assim, nossa metodologia de pesquisa é qualitativa e desenvolvida baseada na TAD de acordo com Barquero e Bosch (2018) que, como mostra as fases da Figura 5.

Figura 5 - Metodologia de pesquisa da TAD



Fonte: Adaptado de Barquero e Bosch (2018, p.281). Tradução nossa

1. **Análises preliminares** que se caracterizam pelo estudo das três dimensões do problema didático de vetores e em que se identifica um MER na primeira dimensão que serve para o estudo das outras dimensões (econômica e ecológica) para identificar fenômenos didáticos.
2. **Análises *a priori*** baseadas no MER para a construção da pergunta geratriz Q_{0-FP}, para o PEP-FP cuja resposta gera uma sequência de questões derivadas que geram respostas que conduzem à resposta da questão inicial.

3. **Análise *in vivo*** para comparar a análise *a priori* com o processo real e compilação de dados para posterior análise.
4. **Análise *a posteriori*** para avaliar como a concepção alternativa de conhecimento proposta e a concretização do PEP-FP ajudam a superar os fenômenos didáticos anteriormente identificados.

A pesquisa foi feita com professores, alunos do mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Peru – PUCP, com projeto aprovado no comitê de ética dessa universidade e assinatura dos professores participantes de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (Anexo B).

Assim, os resultados desse estudo não serão generalizáveis a todos os estudantes de ciências e engenharia do Peru, mas entendemos que o estudo pode provocar reflexões, em nossa instituição, a respeito da formação de nossos estudantes sobre um tópico delicado: o estudo de vetores.

No próximo capítulo, apresentamos a primeira fase, a das análises preliminares em que estudamos as três dimensões do problema didático do ensino de vetores.

3 AS ANÁLISES PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos um estudo das três dimensões do problema didático do ensino do vetor. Na dimensão epistemológica, construímos um Modelo Epistemológico de Referência que nos ajudou a construir um Modelo Vigente no estudo econômico-institucional, além das condições e restrições institucionais no estudo ecológico que nos permitiu construir um Modelo Praxeológico de Referência.

3.1 As três dimensões do problema didático de vetores

Para caracterizar o objeto de estudo vetor na didática da Matemática, optamos pela perspectiva de Gascón (2011) que propõe um padrão heurístico para o desenvolvimento de problemas didáticos de investigação em Didática da Matemática -- ou simplesmente problema didático – baseado no estudo de três dimensões fundamentais considerando a TAD. Para o autor essas dimensões:

> Não devem ser tomadas como propriedades obtidas de uma análise *a posteriori* a respeito de problemas didáticos previamente definidos ou estabelecidos, mas como características *definitórias* e *constitutivas* da noção de problema didático segundo o ponto de vista da TAD. (GASCÓN, 2011, p. 205, tradução nossa).

O autor esclarece que, nesse sentido, devemos assumir que os problemas didáticos não são dados antecipadamente, mas que é importante identificar e enunciar "os problemas didáticos com as ferramentas que a TAD proporciona em seu estado atual de desenvolvimento" (p. 205).

Segundo Gascón (2011), o desenvolvimento de um problema didático pode ser representado esquematicamente por $\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$ em que P_1, P_2, P_3: representam as três dimensões fundamentais de um problema didático, -- respectivamente, epistemológica, econômica e ecológica; P_0 : representa uma formulação inicial, que Gascón chama de **problema docente** e que se refere aos problemas que o professor encontra quando tem que ensinar um conteúdo matemático aos seus alunos. Para Barquero, Bosch, Gascón (2013), os problemas docentes tratam, a princípio, do planejamento que o professor faz quando tem que ensinar um tema matemático. Para os autores, esses problemas são formulados com base na utilização de "*noções disponíveis* na cultura escolar importadas, habitualmente, dos documentos curriculares (como, por exemplo, as noções de motivação, aprendizagem significativa, individualização do ensino, aquisição de um conceito, abstração, competência etc.)" e ainda "normalmente, assumindo, sem questionar, não só as noções como também as ideias dominantes na citada cultura escolar [...], a forma como é interpretado na cultura escolar e a matemática envolvida no problema em questão. (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2013a, p. 3, tradução nossa).

Continuando com o esquema apresentado, P_δ representa o problema didático que contém as três dimensões, suas articulações e, provavelmente, novas questões. O símbolo $\hookrightarrow$ indica que uma formulação completa de P_{i+1} requer uma formulação prévia (pelo menos implícita) de P_i , ou seja, "cada uma das dimensões P_i é logicamente anterior à dimensão P_{i+1}, ou ao menos que P_i venha antes de P_{i+1} em um hipotético desenvolvimento virtual do problema". (GASCÓN, 2011, p. 206, tradução nossa). Já o símbolo $\oplus$ se refere à incompletude de P_0, como expressão de um problema e a necessidade de se adicionar, pelo menos, a dimensão epistemológica P_1 para que seja considerada como tal.

A primeira dimensão do problema didático, a epistemológica, de acordo com Gascón (2011), situa o que é matemático no centro do problema e trata da gênese e do desenvolvimento do saber. Para o autor, "na formulação de qualquer problema didático, o didata sempre utiliza, mesmo que implicitamente, uma descrição e uma interpretação – quer dizer, um modelo epistemológico – do âmbito matemático que está em jogo" (p. 208) e que se chama Modelo Epistemológico de Referência – MER, que é provisório e nos aponta não só a forma como se interpreta os conteúdos matemáticos, "mas também o porquê de se encontrar uns objetos e não outros" (p. 209). Além disso, há a importância da ampliação da matemática "ao integrar de maneira inseparável, na dimensão epistemológica, a gênese, o desenvolvimento, o estudo, a utilização e a transposição institucional do saber matemático". O MER, preferencialmente, deve ser explicitado por meio de praxeologias em uma investigação didática para permitir identificar a amplitude do âmbito matemático mais adequado para apresentar o problema didático; tornar visíveis os problemas didáticos para o investigador; identificar os tipos de problemas de investigação que podem ser apresentados e as tentativas de explicações que podem ser propostas. Para Gascón (2011, p. 210), "a dimensão epistemológica de um problema didático é uma dimensão nuclear visto que [...] impregna e condiciona fortemente as outras dimensões."

A segunda dimensão, a econômica [12] ou econômico-institucional, despersonaliza a problemática didática e delimita a unidade mínima de análise dos processos de estudo, pois trata das organizações e do funcionamento das organizações matemáticas e didáticas envolvidas no problema didático em uma instituição determinada. Para o autor, “a partir do ponto de vista da TAD, todo problema didático tem que fazer referência, de forma mais ou menos explícita, a todas as etapas da transposição didática, e deve conter uma praxeologia matemática suficientemente ampla.” (GASCÓN, 2011, p. 214). Ou seja, a partir do MER deve-se analisar o saber sábio (instituições produtoras do saber); o saber a ensinar (noosfera), o saber ensinado (escola, classe) e o saber aprendido, disponível (comunidade de estudo).

A terceira dimensão de um problema didático, a ecológica, “que inclui de certa forma as dimensões epistemológica e econômico-institucional”, considera “as restrições e condições impostas sobre as praxeologias em todos os níveis de codeterminação didática, desde os mais genéricos, como a sociedade e a civilização, até os mais específicos, como o tema e a questão matemática concreta.” (p. 217).

Como indicam Licera, Gascón e Bosch (2019) e Lucas e Gascón (2019), a organização das praxeologias matemáticas e praxeologias didáticas requerem que as condições específicas ou genéricas da disciplina sejam atendidas. Estas últimas decorrem da organização das atividades de ensino e de aprendizagem na escola, dos papéis atribuídos à escola na sociedade e até mesmo da forma como cada civilização conceitua as pessoas na sociedade. Os autores ressaltam ainda as condições que são impostas aos níveis de codeterminação didática, pois ao mesmo tempo que elas possibilitam o desenvolvimento de determinadas atividades, elas restringem o universo de ações possíveis. Os níveis de codeterminação didática são estruturados hierarquicamente e apresentados pelos autores por um esquema (Figura 6) baseados em Chevallard (2002).

Cada um desses níveis, propostos pela TAD, contribui para determinar “*a ecologia institucional das OM e das OD* tanto pelos pontos de apoio que oferece

---

[12] O termo *economia* é usado como uma acepção proposta por Molier (2007, p. 1098) em que se faz referência à economia de um organismo (ou sistema complexo qualquer) para referir-se à coordenação de componentes (ou subsistemas) que intervém em seu funcionamento (Apud. Barquero, Bosch, Gascón, 2013)

quanto pelas restrições que impõe." (GASCÓN, 2011, p. 217). Para Odum[13] (1988), é na dimensão ecológica que está presente o ecossistema como a unidade funcional básica na ecologia e que inclui tanto os organismos como o meio em que vivem, o habitat como o lugar que um organismo ocupa em um determinado ecossistema e o nicho como a função que esse organismo tem em seu habitat.

Figura 6 - Os níveis de codeterminação didática

Humanidade

↓↑

Civilização

↓↑

Sociedade

↓↑

Instituição

↓↑

Disciplina ⇔ Área ⇔ Setor ⇔ Tema ⇔ Questão

Fonte: Licera, Gascón, Bosch (2019, p. 7)

Chevallard (2002) classificou os itens da Figura 6 em dois níveis: os superiores, conformados por Civilização, Sociedade, Escola ou instituição, e os inferiores, conformados por Disciplina, Área, Setor, Tema e Questão. Nos níveis superiores, encontramos as restrições de tipos mais genéricos, em que a sociedade, por intermédio de instituições de ensino, organiza o estudo das diferentes disciplinas, enquanto os níveis inferiores correspondem às condições e restrições diretamente ligadas aos diferentes componentes de uma disciplina, de acordo com a maneira como ela é estruturada na instituição de ensino considerada.

Em nossa pesquisa, a formulação do problema inicial integra dois problemas que os professores enfrentam durante o exercício da docência: o que tenho que ensinar aos alunos a respeito de vetores no primeiro semestre de universidade na área de ciências e engenharia? Como devo ensinar esse conteúdo para que seja significativo para o aluno?

Para responder a essas questões, o professor deve se adaptar à instituição a que pertence e, portanto, às suas condições e restrições. Assim, consideramos, de

[13] A obra de Odum foi a primeira no sentido de popularização do conceito ecossistema, ou seja, foi o primeiro autor a trazer os aspectos técnicos e acadêmicos que envolviam esse conceito nas pesquisas, e os trouxe para um livro-texto utilizado hoje para fins didáticos (GOLLEY, 1993).

acordo com Chevallard (2013a) e Licera, Gascón, Bosch (2019), que o problema docente está emoldurado em uma instituição I (para nós, a universidade), sobre a qual pesa um conjunto de restrições K de todos os tipos e, dada uma obra O (para nós os vetores), temos que determinar as condições C que levam os sujeitos de I a encontrar, estudar e conhecer a obra O.

No caso do problema didático dos Vetores (doravante V), o esquema assume a seguinte forma: $\{[(\boldsymbol{P_0}(\boldsymbol{V}) \oplus \boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{V})) \leftrightarrows \boldsymbol{P_2}(\boldsymbol{V})\,] \hookrightarrow \boldsymbol{P_3}(\boldsymbol{V})\} \hookrightarrow \boldsymbol{P_\delta}(\boldsymbol{V})$.

Assim, definimos nosso problema inicial $\mathbf{P_0}(\boldsymbol{V})$: *o que tenho que ensinar a meus alunos em relação aos vetores e como devo ensiná-lo?* Para que esse problema inicial possa ser transformado em um problema de investigação didática, no ambiente da TAD, é preciso questionar o modelo de referência dominante para o ensino de vetores não só nas instituições escolares, mas também na noosfera[14] e nas pesquisas em educação matemática.

Dessa forma, a partir do esquema heurístico, para ampliar o problema docente $\boldsymbol{P_0}(\boldsymbol{V})$, estudamos a dimensão epistemológica $\boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{V})$ para explicitar um MER para o conceito de vetor a fim de explicitar sua relevância na atividade matemática globalmente considerada. A seguir, focamos na dimensão econômica, $\boldsymbol{P_2}(\boldsymbol{V})$, para incluirmos questões a respeito da organização e interpretação da obra V nos níveis da transposição didática na instituição universidade peruana . Na sequência, estudamos a dimensão ecológica, $\boldsymbol{P_3}(\boldsymbol{V})$, para identificar as restrições K e as condições C que permitem, restringem ou impedem a permanência de organizações matemáticas e didáticas, assim como seu possível desenvolvimento em uma direção determinada. Por fim, para completar o esquema, identificamos o problema didático $\boldsymbol{P_\delta}(\boldsymbol{V})$.

Assim, nas seções seguintes, apresentamos cada um dos estudos das três dimensões, de maneira ordenada, mas sem pretensões de completude, e iniciando com a dimensão epistemológica.

[14] A noção de *noosfera do sistema de ensino* foi introduzida por Chevallard (1985, 1991) no contexto da teoria da *Transposição didática* para designar a esfera em que se pensa o funcionamento didático (interação entre o sistema de ensino e meio social) e condiciona fortemente as caraterísticas e natureza do “conhecimento que deve ser ensinado” na escola.

3.2 A Dimensão Epistemológica para o ensino de vetores

A dimensão epistemológica $\mathbf{P_1}(\boldsymbol{V})$ do problema didático para o ensino de vetor é uma dimensão nuclear, porque impregna e condiciona fortemente as outras dimensões do problema didático, além de conter as questões a respeito da razão de ser dos vetores em setores determinados na instituição considerada. Esse estudo permite construir um MER como um instrumento para o pesquisador desconstruir e reconstruir praxeologias cuja divulgação intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar e ainda questionar a maneira como as instituições envolvidas na problemática didática interpretam o conhecimento matemático. Para Chevallard (1997), a análise epistemológica e a didática são articuladas por meio da noção de transposição didática que mostra que os didáticos herdaram dos epistemólogos a noção de *problemática* – em outras palavras, o conjunto de problemas da mesma natureza. Chevallard afirma ainda que o MER é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado e que ele influencia decisivamente:

- Na amplitude do campo matemático mais apropriado para levantar o problema didático em questão;
- Nos fenômenos didáticos *visíveis* para o pesquisador;
- Nos tipos de problemas de pesquisa que podem surgir, e
- Nas explicações provisórias que podem ser propostas, isto é, os tipos de soluções que serão consideradas *admissíveis*.

De acordo com Gascón (2011), é necessário construir um Modelo Epistemológico de Referência, preferencialmente explicito, com alcance local ou regional, formulado em termos de praxeologias no sentido da TAD. Para construir o MER, acompanhando a sugestão do autor, formulamos questões que consideramos adequadas para o nosso objeto de estudo: q_1: *o que é vetor?* q_2: *como se descrevem e interpretam os vetores?* q_3: *quais são os tipos de vetores e como podem ser estudados*? q_3: *na instituição matemática, quais questões, matemáticas ou extra matemáticas, os vetores respondem?* q_4: *o que se entende por estudar, aprender, ensinar e/ou aplicar vetores em uma situação?* E para responder a essas questões, construímos um MER baseado em um estudo histórico e epistemológico dos vetores e em suas articulações para identificar suas razões de ser identificando praxeologias.

Nas pesquisas estudadas no capítulo 2, observamos a utilização de vetores em áreas como física, mecânica, matemática e engenharias nos campos da Geometria Sintética, Geometria Analítica e álgebra linear. No primeiro caso, o vetor é tratado com aspectos da Geometria Sintética (GS), também conhecida como aquela que não utiliza medidas ou fórmulas, ou seja, aquela que trata do estudo de figuras planas ou espaciais cujas propriedades são demonstradas com base nos axiomas e postulados de Euclides. No caso da Geometria Analítica (GA), vimos que ela se desenvolveu graças às obras de Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), e que ela considera o sistema de coordenadas cartesianas como referencial. Já a Álgebra Linear (AL) aborda os vetores com temas como matrizes e determinantes. E todas estas observações conduziram ao estudo histórico que apresentamos no que segue.

3.2.1 Um Estudo Histórico da Gênese e Desenvolvimento de Vetor

As diferentes civilizações, como a dos sumérios, egípcios, gregos, entre outras, que viveram milhares de anos antes de Cristo utilizaram máquinas simples como rodas, balanças, arados, alavancas etc., por exemplo, para melhorar a agricultura, construir cidades e guerrear, e, de acordo com Ribeiro (1978), já aí se vê o surgimento da noção de vetor com o tratado de *The Mechanics*, primeiramente atribuído a Arquimedes, mas, de fato, escrito por Estratão (c. 287 a. C.), e que revela indícios de que na Grécia antiga já era utilizada a regra do paralelogramo para resolver alguns problemas da física.

Na primeira metade do século XIV, entre os diversos problemas da física, o grupo de sábios do *Merton College* de *Oxford*, conhecidos como *os calculadores*, desenvolveram estudos a respeito da variação de intensidades de "formas e qualidades" da Filosofia Natural e, como resultado, enunciaram o chamado Teorema de *Merton College*: dada uma qualidade uniformemente disforme em um intervalo de tempo, a sua quantidade total é igual à quantidade total da qualidade uniforme que afeta o corpo com a intensidade média da qualidade uniformemente disforme. (ROQUE, 2012, p. 255). Esse teorema se refere ao movimento retilíneo uniformemente acelerado que, em linguagem moderna, é descrito como um corpo em movimento retilíneo uniformemente acelerado que percorre, em um determinado intervalo de tempo, o mesmo espaço que seria percorrido por um corpo que se move com velocidade constante e igual à velocidade média do primeiro. No entanto, os estudiosos de Oxford não puderam fazer a demonstração deste resultado, que foi realizada por Oresme (1328-1383), da universidade de Paris, em sua obra *Tractatus de Latitude Formarum*, como se pode ver na Figura 7.

Figura 7 - Prova de Oresme para o teorema de Merton

Fonte: Oresme (1486, p. 10)

Tal estudo nos conduz a identificar o primeiro tipo de tarefa da Geometria Sintética:

T_{GS1}: **determinar a velocidade média de um corpo que percorre um espaço em movimento retilíneo uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo.**

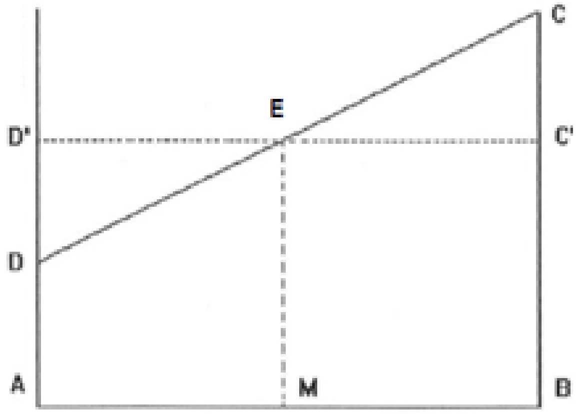
De acordo com Tarres (1997), Oresme considerou uma reta para desenhar as latitudes (segmentos de reta perpendiculares à reta do tempo), cujos extremos determinam uma reta que caracteriza o movimento estudado. Além disso, observou que a medida da área limitada por essas duas retas, em um determinado intervalo de tempo, representa a medida do espaço percorrido por um móvel em tal intervalo.

De fato, um movimento retilíneo uniformemente acelerado fica caracterizado por uma linha inclinada, como o segmento $\overline{CD}$[15] da Figura 8, portanto, o espaço percorrido pelo móvel corresponde à medida da área do trapézio $ABCD$. Por outro lado, essa área é equivalente a área do retângulo $ABC'D'$, em que o segmento $\overline{C'D'}$ representa a linha da velocidade de um movimento uniforme e cuja velocidade é representada pela medida do segmento $\overline{EM}$, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

---

[15] Um *segmento* de reta AB se pode denotar como AB ou $[AB]$.

Figura 8 - Figura para o teorema de Merton



Fonte: Adaptado de Tarres (2017, p. 90)

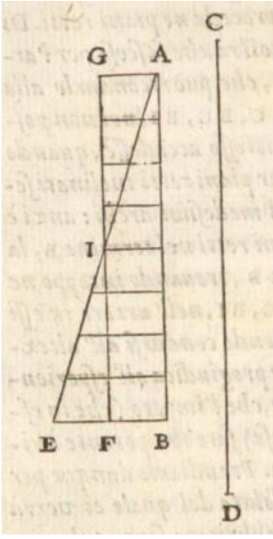
A equivalência dessas áreas pode ser observada quando notamos que $\overline{AD'}$ e $\overline{BC}$ são paralelos e intersectados por $\overline{DC}$ e que, por M, ponto médio de $\overline{AB}$, determina-se que o segmento $\overline{EM}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Portanto, podemos concluir que os triângulos *DED'* e *CEC'* são congruentes, o que significa que as áreas do trapézio e do retângulo são equivalentes. De acordo com Crombie (1974), a demonstração de Oresme que, em essência, explica o qualitativo pelo quantitativo, quebra as doutrinas tradicionais da época e abre caminho para a modernidade.

Podemos considerar o enunciado do grupo de Oxford como uma técnica para resolver esse primeiro tipo de tarefa e a demonstração de Oresme como um discurso tecnológico-teórico que a justifica. Esse teorema nos dá indícios de que, nessa época, já havia conhecimentos de posição, deslocamento, velocidade e aceleração de um corpo, embora evidentemente com outros nomes, e isto nos permite enunciar um segundo tipo de tarefa:

$\boldsymbol{T_{GS2}}$: **calcular o espaço percorrido por um corpo em movimento retilíneo uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo.**

Dois séculos depois de Oresme, Galileu (1564-1642) apresentou uma técnica para esse tipo de tarefa, e que trata do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) com o seguinte enunciado: “o tempo em que qualquer espaço é percorrido por um corpo inicialmente em repouso e uniformemente acelerado é igual ao tempo que o mesmo espaço é percorrido pelo mesmo corpo movendo-se com velocidade uniforme. O valor da velocidade uniforme é a média entre a maior velocidade e a velocidade imediatamente anterior à aceleração ter começado”. E Galileu demonstra esta ideia, como se vê na Figura 9, ainda dentro da Geometria Sintética.

Figura 9 - Esquema para o movimento uniformemente acelerado



Fonte: Galileu, 1638, p. 170

Nessa figura, o segmento $\overline{AB}$ representa o tempo em que o espaço $\overline{CD}$ é percorrido por um corpo que inicia seu movimento em repouso no ponto C e percorre o espaço com um movimento uniformemente acelerado. Traçando uma semirreta com origem em B, perpendicular ao segmento AB, é desenhado o segmento $\overline{BE}$ para representar a maior velocidade adquirida. Dividindo o segmento AB em pontos equidistantes é traçado, por cada um desses pontos, segmentos paralelos à semirreta para representar a velocidade em cada instante, o que permite delinear o segmento $\overline{AE}$. Considerando o ponto F como médio de $\overline{BE}$, são traçados os segmentos $\overline{FG}$, paralelo à $\overline{AB}$, e $\overline{GA}$, paralelo à $\overline{FB}$. Assim, como o lado FG do retângulo $ABFG$ intersecta o lado AE do triângulo ABE no ponto I, ao estendermos as paralelas até o segmento $\overline{GI}$, pode-se constatar que o retângulo $AGFB$ é equivalente ao triângulo AEB. Além disso, é verificado que a soma das medidas dos segmentos paralelos contidos no retângulo $AGFB$ é igual à soma das medidas dos segmentos paralelos contidos no triângulo AEB, pois os triângulos IEF e IAG são congruentes. Conclui-se, ainda, que os segmentos paralelos contidos no trapézio $AIFB$ são comuns a ambos.

É importante observar que as paralelas no triângulo AEB representam as velocidades no movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) e as paralelas no retângulo $ABFG$ representam as velocidades no movimento retilíneo uniforme (MRU). Além disso, o que é perdido no momento da primeira parte do movimento acelerado, representado pelas paralelas do triângulo IAG, é compensado pelo momento representado pelas paralelas do triangulo IEF. Assim, o espaço percorrido no intervalo de tempo AB é dado, em cada caso, pelas medidas das áreas do retângulo e do triangulo, que são iguais. Então, espaços iguais são percorridos em tempos iguais em ambos os casos, o que significa que a distância percorrida é proporcional ao tempo transcorrido que, em linguagem atual, pode ser representado por $e = vt$ em que e representa o espaço, v a velocidade e t o tempo.

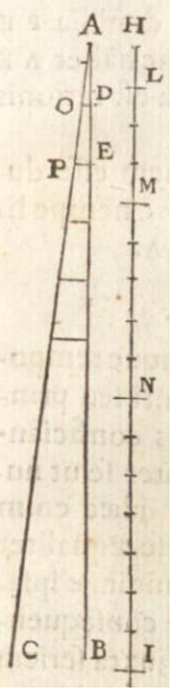
Duhem (1914) e Clagett (1968) indicam que o célebre "teorema da velocidade média", ou teorema de Merton, é uma antecipação da lei de queda uniformemente acelerada de Galileu, porém, apesar da semelhança gráfica dos teoremas de ambos os autores, o conteúdo é diferente, pois Oresme trata de leis formais, enquanto Galileu trata de leis da natureza. Cabe mencionar ainda que a matemática e a física, segundo a ideia aristotélica[16], desenvolveram-se de forma separada desde o tempo de Euclides até Galileu: enquanto a física se baseava em experimentações para explicar os fenômenos que acontecem e as causas que os ocasionam, a matemática era entendida como uma ciência auxiliar. Os fenômenos da queda livre de corpos e do movimento de projéteis têm sido objeto de estudos desde os tempos antigos, sendo um deles o de Aristóteles (384-322a.C.) que, embora sua filosofia tenha dominado até os últimos anos da idade Média, só conseguiu ter seus resultados aprovados pelos especialistas após a apresentação da primeira lei da física por Galileu, e que nos conduz ao terceiro tipo de tarefa da Geometria Sintética a respeito da queda livre de corpos.

$\boldsymbol{T_{GS3}}$: **determinar o espaço percorrido por um corpo em queda livre em um movimento retilíneo uniformemente acelerado.**

Galileu responde a essa tarefa enunciando que "o espaço percorrido em movimento uniformemente acelerado, para o movimento em queda livre de um corpo, é proporcional ao quadrado do tempo transcorrido" e associa a esse enunciado a Figura 10, ainda sem a utilização de vetor.

[16] Aristóteles sustenta que o físico experimenta com coisas da natureza, enquanto os geômetras teorizam sobre abstrações.

Figura 10 - Esquema de Galileu: teorema do movimento uniforme acelerado - queda livre



Fonte: Galilei, 1638, p. 171

Na figura, Galileu considera as semirretas AB e AC, com qualquer ângulo, traça o segmento DO, para representar a maior velocidade atingida no intervalo AD, e o segmento EP, para representar a maior velocidade atingida no intervalo AE, com AB e AE sendo paralelas. Traça então o segmento HI para representar a distância que o corpo, partindo do repouso em H, percorre com aceleração uniforme. Determina o ponto L para que o segmento HL represente o espaço percorrido durante o período AD, e o ponto M para que o segmento HM represente o espaço percorrido no intervalo de tempo AE. Assim, o espaço HM está para o espaço HL como o quadrado da razão entre os intervalos de tempo AE e AD ou, em linguagem atual, $\frac{HM}{HL} = \frac{AE^2}{AD^2}$.

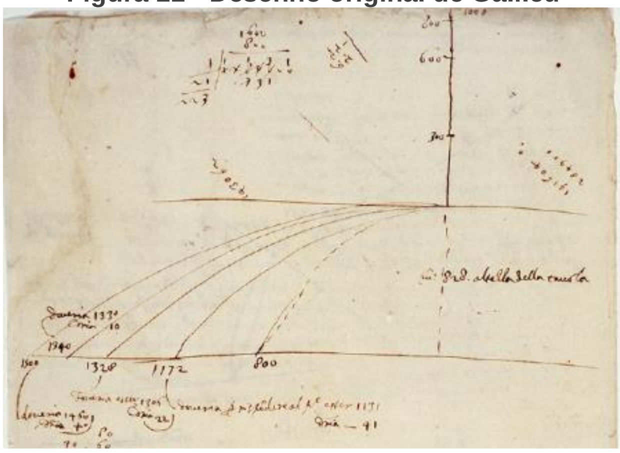
Para justificar esta igualdade, Galileu utiliza o resultado da tarefa anterior, $\boldsymbol{T_{GS2}}$, que afirma que as distâncias percorridas são equivalentes em situações em que o corpo cai do repouso com aceleração uniforme e velocidade inicial zero, que cai por um mesmo período, com velocidade constante igual a metade da maior velocidade adquirida no movimento acelerado. Logo, temos que as distâncias HM e HL são as mesmas que seriam percorridas, durante os intervalos AE e AD, respectivamente, por velocidades uniformes iguais à metade daquelas representadas por $\overline{EP}$ e $\overline{DO}$. Assim, os quadrados de AE e AD estão na mesma razão. Além disso, Galileu considera que as distâncias percorridas por duas partículas em movimento uniforme estão uma para a outra como o produto da razão entre as velocidades pela razão entre os tempos que, em linguajem atual, pode ser representada por $e = vt$.

Assim, em um movimento uniforme, a razão entre as velocidades é igual à razão entre os tempos, isto é, a razão entre EP e DO ou entre $\frac{1}{2}EP$ e $\frac{1}{2}DO$ é igual à razão entre AE e AD. Logo, podemos encontrar a razão entre os quadrados dos intervalos de tempos utilizados para percorrê-los: $\frac{HM}{HL} = \frac{EP}{DO} \times \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AD} \times \frac{AE}{AD} = \frac{AE^2}{AD^2}$. Baseado nesse resultado, Galileu pôde verificar que a constante de proporcionalidade dependia de uma aceleração igual para todos os corpos, ou seja, $d = kt^2$, mas como essa aceleração é a gravidade, temos o que utilizamos hoje, $d = \frac{1}{2}gt^2$.

Segundo Roque (2012), os estudos da queda livre de corpos e do movimento de projéteis podem sugerir uma influência direta das artes da guerra tendo em vista que no final do século XV haviam surgido armas de artilharia pesada ligadas a novas estratégias de defesa e que muitos desenvolvimentos teóricos de Galileu tiveram suas origens em conhecimentos de artesãos, arquitetos e engenheiros do século XVI que adquiriam status por atenderem às necessidades da arte da guerra e, na mesma época, surgem também os trabalhos de Tartaglia, que se dedicava ao estudo do movimento de projéteis.

Galileu evidenciou que a maioria dos fenômenos, que eram matematizados, não se restringiam a uma dimensão – como é o caso de determinar a velocidade de uma bola, que cai de uma mesa, antes de ela atingir o chão – e que parece descrever um movimento composto que apresenta uma trajetória semiparabólica (Figura 11) que ele chamou de projeção.

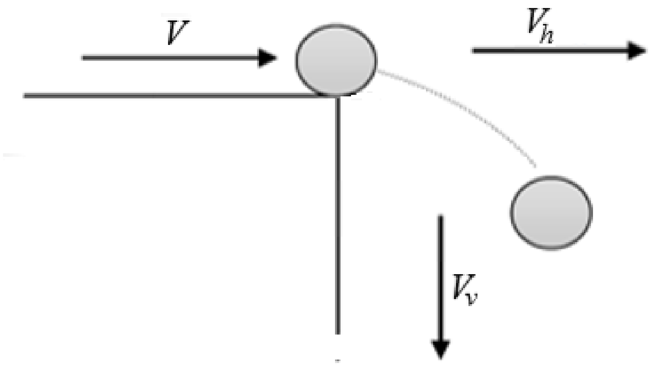
Figura 11 - Desenho original de Galileu



Fonte: Museo Galileo

Assim, o esquema de Galileu pode ser representado observando a decomposição do movimento em dois: um movimento na direção horizontal, V_h, e outro na direção vertical, V_v, como mostra a Figura 12.

Figura 12 - Representação da decomposição de um movimento



Fonte: produção da autora

Percebemos que os avanços de Galileu para identificar o comportamento de trajetórias de corpos em queda livre que ocorrem em duas direções conduz a dois tipos de tarefa.

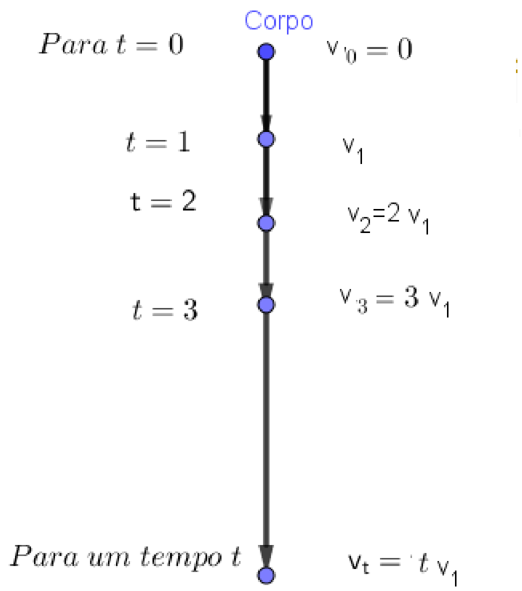
$\boldsymbol{T_{GS4}}$**: Representar por meio de uma figura a mudança de velocidade que um corpo atinge ao ser liberado de uma determinada altura.**

A técnica $\boldsymbol{\tau_{GS4}}$**:** *da queda livre de Galileu* permite perceber que o desenho da velocidade é tratado como um objeto que tem direção – neste caso, vertical. No momento em que o corpo é liberado, quando o tempo é $t = 0$, não temos ainda velocidade alguma e, portanto, o vetor é $V_v = 0$. Logo, quando o tempo é $t = 1$, é desenhado o vetor vertical com sentido ao chão V_1, pelo efeito da gravidade g da terra. O módulo é $|g|$.

Para o tempo seguinte também é o vetor paralelo ao anterior e no mesmo sentido, com o módulo do vetor velocidade $V_2 = 2V_1$ é incrementado ao dobro da velocidade V_1. Assim, para os seguintes tempos, a velocidade vertical é $V_v = tV_1$, como $V_1 = g$, então, $V_t = tg$. E na Figura 13, vemos que V_t tem o mesmo sentido e módulo que gt. A tecnologia na GS no desenho é a adição e o paralelismo de segmentos orientados.

$\boldsymbol{T_{GA1}}$**: determinar a velocidade de um corpo que está em queda livre depois de um tempo.** A técnica que dá solução à tarefa em GA é considerar vetores em direção vertical e sentido negativo, (Figura 13). Como a relação é dada por $\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, então $(v_x, v_y) = (0,0) + (0, -9{,}8)t$, ou seja, $(v_x, v_y) = (0, -9{,}8t)$.

Figura 13 - Representação de vetores em queda livre



Fonte: produção da autora

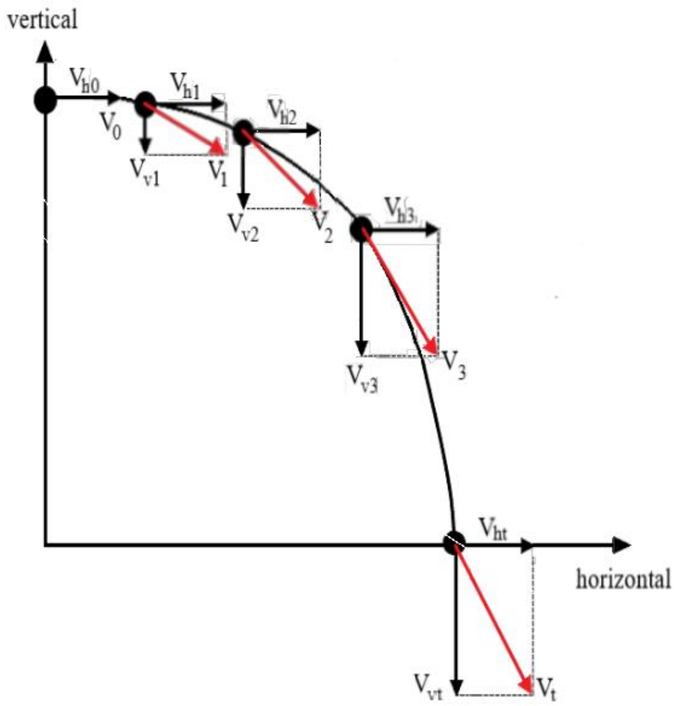
$\boldsymbol{T_{GS5}}$**: representar, por meio de uma figura, as velocidades que um corpo atinge ao partir de uma determinada altura com velocidade horizontal constante, descrevendo uma trajetória semiparabólica.**

A técnica $\boldsymbol{\tau_{GS5}}$ para o desenho inclui a análise do movimento que é composto de um movimento horizontal e outro vertical. No movimento horizontal, a velocidade é constante, isto é, $V_{h0} = V_{h1} = V_{h2} = \cdots = V_{ht}$.

Em relação ao movimento vertical, este é com aceleração constante. Particularmente neste caso, trata-se de um movimento de queda livre e a aceleração é chamada de gravidade. A velocidade inicialmente, quando o corpo é liberado, é zero. Em seguida, aumenta gradualmente com o tempo e observa-se que a velocidade o faz proporcionalmente à gravidade, $V_{v0} = 0$, $V_{v1} = g$, $V_{v2} = 2g$ ... $V_{vt} = gt$.

Para determinar a velocidade em cada instante de tempo, as velocidades horizontal e vertical naquele instante devem ser somadas vetorialmente. A Figura 14 mostra a representação.

Figura 14 - Movimento parabólico



Fonte: produção da autora.

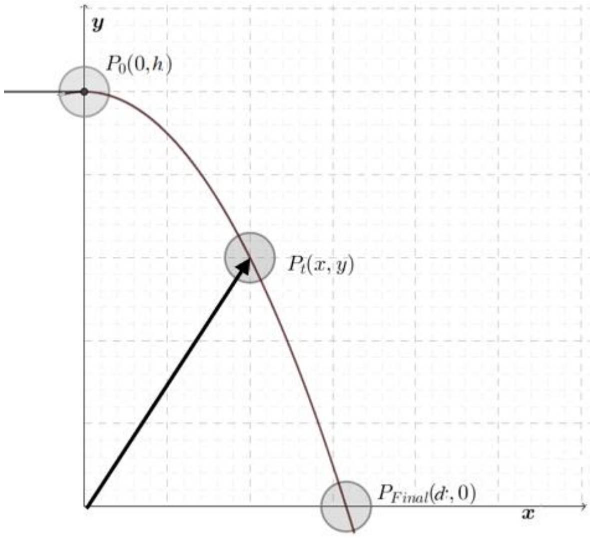
Para Roque (2012), os diagramas que Galileu utilizou para representar o movimento foram de suma importância para demonstrações de proposições de natureza geométrica. A autora afirma que a história tradicional, preocupada com a questão dos precursores, vê também aí um antecedente para o plano cartesiano. No entanto, as obras *Discurso sobre o método* e *A geometria*, de Descartes, já haviam sido publicadas, mas Galileu não estava a par desses trabalhos.

Considerando então o referencial cartesiano, podemos identificar um primeiro tipo de tarefa na Geometria Analítica em que um corpo em queda livre que atinge duas velocidades teriam suas direções representadas paralelamente ao eixo das abscissas e das ordenadas.

T_{GA2}: determinar a distância horizontal (d) que um corpo atinge quando é lançado de uma certa altura (h) com velocidade horizontal constante (v) descrevendo uma trajetória semiparabólica ao atingir o solo.

A técnica τ_{GA1} para resolver esta tarefa consiste em representar o movimento retilíneo uniforme na componente das abscissas e o movimento retilíneo uniformemente variado, que tem a ação da gravidade, na componente das ordenadas, baseado no que mostrou Galileu. O problema envolve um movimento parabólico, como na Figura 15.

Figura 15 - Posição de um corpo em queda livre



Fonte: produção da autora

Dado o ponto posição $P_t(x,y)$, o corpo inicia o movimento quando a componente do vetor posição é $P_0(0,y) = (0,h)$ e não só é $P_{Final}(d,0)$.

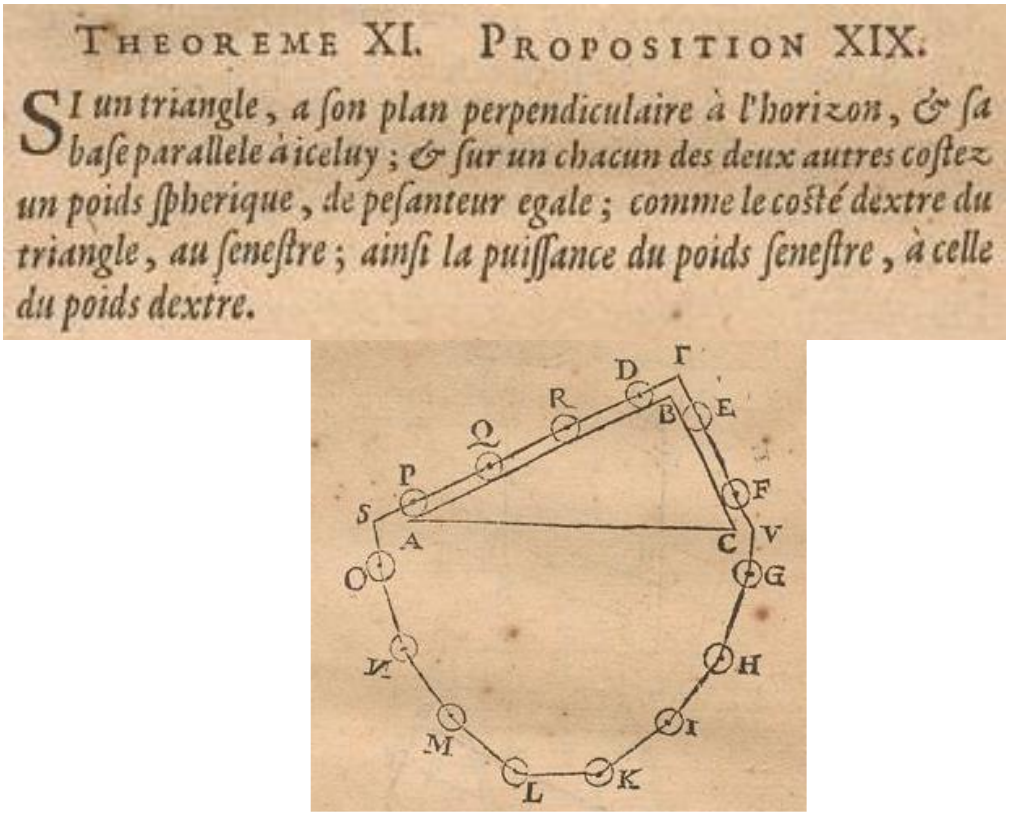
$$P_t(x,y) = (0,h) + (v,0)t - \frac{1}{2}(0,g)t^2$$

Quando o corpo está em movimento na posição $P_t(x,y) = (vt, h - \frac{1}{2}gt^2)$, cada componente da posição descreve um movimento horizontal e vertical. No movimento horizontal, $x = vt$, porém, no movimento vertical, $y = h - \frac{1}{2}gt^2$. Isto significa que as duas componentes do vetor dependem do mesmo tempo. Para calcular o alcance temos que $0 = h - \frac{1}{2}gt^2$, então, $h = \frac{1}{2}gt^2$ e, portanto, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Este tempo é o mesmo para determinar a distância horizontal. Assim, substituindo $d = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$, o alcance dependerá de qual será o tempo transcorrido. A técnica é justificada por adição de vetores e produto de um vetor por um escalar.

De acordo com Jeans (1953), Stevin, interessado em mecânica estática, apresentou, em 1586, a lei que atualmente denominamos de lei do paralelogramo de forças, sem qualquer experimento real, mas imaginando um experimento ideal cujo resultado pode ser previsto com facilidade, com o enunciado do teorema apresentado na Figura 16.

O teorema, acompanhado da figura chamada corrente de Stevin, afirma que, se uma corrente contendo quatorze elos igualmente espaçados sobre os lados de um triângulo retângulo está em equilíbrio quando quatro elos estão sobre o cateto maior e dois sobre o cateto menor, então, é inconcebível que comece a se mover espontaneamente. Caso isso acontecesse, seria realizado um movimento perpétuo, porque, neste caso, os dois elos da direita seriam incapazes de equilibrar os quatro da esquerda e, supostamente, os elos deveriam girar continuamente no sentido anti-horário.

Figura 16 - Teorema original de Stevin



THEOREME XI. PROPOSITION XIX.

SI un triangle, a ſon plan perpendiculaire à l'horizon, & ſa baſe parallele à iceluy; & ſur un chacun des deux autres coſtez un poids ſpherique, de peſanteur egale; comme le coſté dextre du triangle, au ſeneſtre; ainſi la puiſſance du poids ſeneſtre, à celle du poids dextre.

Fonte: Stevin (1634, p. 448)

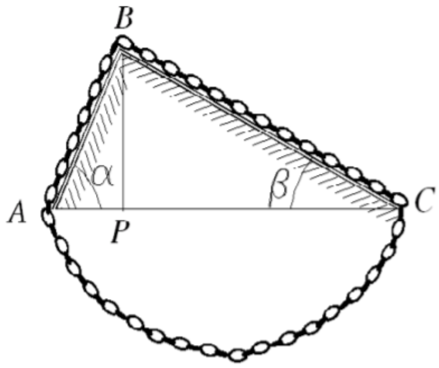
De acordo com Jeans (1953), Stevin imaginou uma cunha que se apoia firmemente no lado horizontal *AC* que, quando se apoia no vértice *B*, faz com que a corrente circular *ABCD* permaneça em repouso. Esse resultado seria impossível porque, até esse momento, a alternativa concebida era um movimento perpétuo que, desde os gregos, era um lugar comum na ciência. Para o autor, os escritos de Stevin de 1634 mostram que o pedaço pendurado da corrente, ADC, poderia ser removido sem alterar o equilíbrio do restante, ou seja, das partes AB e BC da corrente, pois as contas dessas partes são proporcionais aos comprimentos dos lados. Tal resultado, por um simples raciocínio matemático, conduz a uma regra para determinar o efeito de duas forças que atuam simultaneamente sobre um mesmo objeto.

Este engenhoso argumento apoia-se em uma mescla de conhecimento experimental (impossibilidade de movimento contínuo), de intuição e de suposição que tem importância sob dois aspectos: da ideia de um corpo submetido à ação simultânea de várias forças e de um resultado que foi indispensável para o progresso da mecânica. Esse teorema, que permite decompor as forças que atuam sobre um corpo, permite enunciar o seguinte tipo de tarefa na GS.

T_{GS6}: identificar e representar por meio de uma figura as forças que atuam, simultaneamente, na corrente de Stevin para fiquem em equilíbrio.

Para resolver essa tarefa é necessário identificar as direções em que as forças atuam, como no exemplo da Figura 17. Como mostrou Stevin, consideramos um triângulo ABC em que o conjunto de anéis da corrente, apoiados em cada lado do triângulo, é considerado um único objeto.

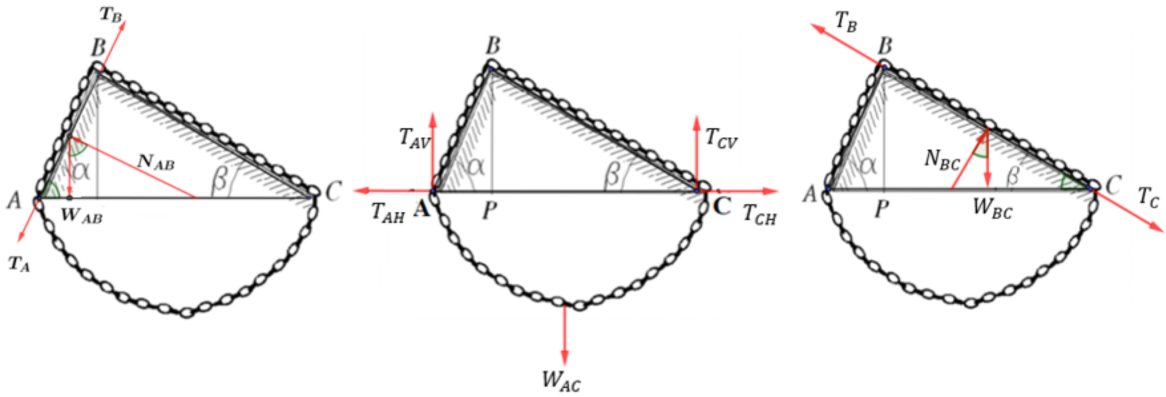
Figura 17 - Corrente de Stevin para a decomposição de forças



Fonte: Serrano (2010, p. 3).

Nessa figura, temos o triângulo ABC e, como a corrente está em dois de seus lados AB e BC, inferimos que sobre o lado AB atua uma força de tensão no ponto B que denotamos por T_B e outra no ponto A de sentido oposto, denotada por T_A. Cada anel da corrente, por sua vez, tem um peso que faz uma força para baixo, W_{AB}. Além disso, quando o corpo está na superfície, ela exerce uma força denotada por N_{AB} que forma com o vetor W_{AB} um ângulo α. A Figura 18 apresenta os detalhes da representação das forças no lado AB do triângulo. O lado AC, que está pendurando a corrente, apresenta as forças nos extremos. Para o extremo A, tem-se tensão na direção vertical T_{AV}, e a força da tensão horizontal, T_{AH}, enquanto para o extremo C existe a força na direção vertical e outra horizontal – respetivamente T_{CV} e T_{CH}. E no meio da corrente, pela tração e o peso das bolas, temos a força W_{AC} em direção vertical no sentido para baixo (Figura 18, lado AC).

Figura 18 - Representação de forças que atuam na corrente de Stevin



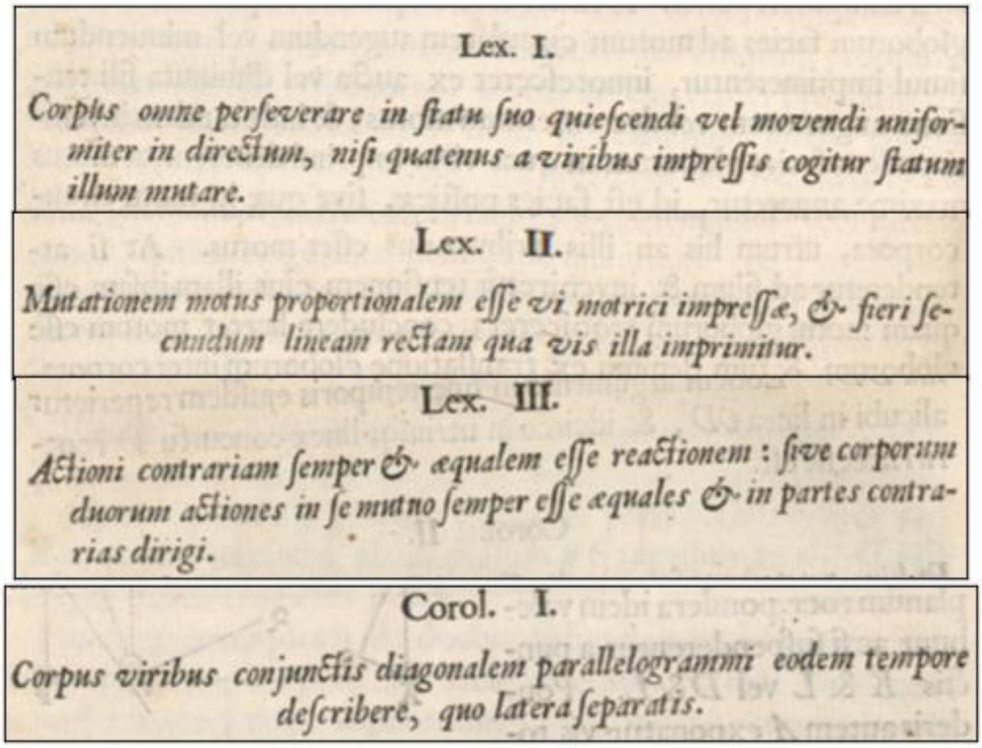
Fonte: adaptado de Serrano (2010, p. 3)

No lado BC, percebemos que no extremo B atua a força T_B e que no extremo C existe outra tensão T_c em sentido oposto a T_B. Devido ao peso dos anéis da corrente, há uma força peso W_{BC} e, no mesmo lado AB, os corpos na superfície provocam uma força no lado N_{Bc} na direção que forma um ângulo β com W_{AC}. Estas forças descritas fazem com que a corrente esteja em equilíbrio, como Stevin justificava.

De acordo com Jeans (1953), a utilização de vetores tem sua origem na Mecânica, um campo de conhecimento que teve notórios avanços no século XVI com relação à época de Arquimedes. O autor afirma que a mecânica, como uma nova ciência, ficou estabelecida na base das pesquisas de Stevin (1548 – 1620) e de Galileu que, embora contemporâneos e trabalhando de forma independente, têm resultados que se complementam.

No século XVII, aportes importantes de Newton (1642-1727) contribuíram para estabelecer a matematização do movimento. Em sua obra *Principia*, Newton propõe as três leis enunciadas na Figura 19 e um corolário que poderiam ser considerados como avanços em relação a Stevin, pois formalizam a regra do paralelogramo.

Figura 19 - Leis de Newton



Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex. III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Fonte. Newton (1686, p. 12-13).

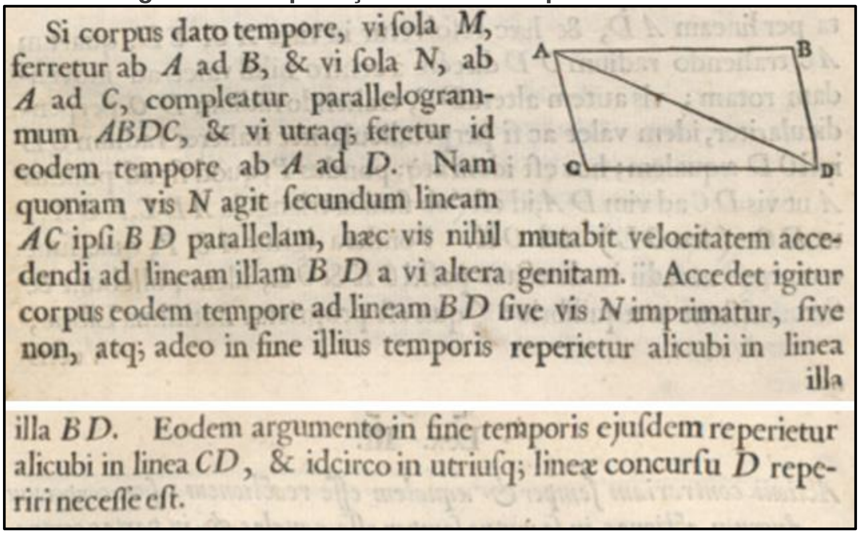
Essas leis indicam:

> Lei I. Todo corpo persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme a menos que seja compelido a modificar este estado pela ação de forças sobre ele.
> Lei II. A soma das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto de seu coeficiente de inércia pela sua aceleração.
> Lei III. A toda ação que um corpo exerce sobre um segundo corpo corresponde uma reação do segundo sobre o primeiro de mesma intensidade e sentido oposto. (ANTUNEZ, GALHARDI, HERNASKI, 2018, p. 331-332).

A segunda lei é também conhecida como lei da inércia e uma consequência dessas três leis é o corolário que se traduz na atualidade por: corolário 1. Se duas forças atuam em um corpo simultaneamente, a força resultante é descrita pela diagonal de um paralelogramo cujos lados descrevem as forças separadamente. Newton utiliza a Geometria Sintética para explicá-lo, como mostra a Figura 20, em que afirma que, se um corpo, em um dado momento, sofre a ação de uma única força M no ponto A, então, existe um movimento uniforme de A para B. E, se o corpo sofre a ação de uma única força N no mesmo ponto, existe, então, um movimento de A para C, o que determinaria assim o paralelogramo $ABCD$. Com isso, o referido corpo será movimentado por ambas as forças, ao mesmo tempo, na diagonal do paralelogramo de A para B, uma vez que a força N atua na linha AC, paralela a BD, que, de acordo com a segunda lei, não é alterada pela outra força. Portanto, o corpo alcançará a linha

BD ao mesmo tempo que a força N é aplicada e, no final, estará em algum lugar dessa linha.

Figura 20 - Explicação de Newton para o corolário



Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa

illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſq; lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt.

Fonte. Newton (1686, p. 13 -14).

Pela mesma razão, no final desse período, a força estará em algum lugar na linha CD, pela atuação da força M e, portanto, é necessário que esteja na intersecção B de ambas as linhas. Logo, continuará, em movimento retilíneo de A até D, de acordo com a primeira lei.

A versão moderna destas leis e do corolário na linguagem vetorial atual permite descrevê-las de forma mais condensada e transparente para o que realmente é importante para o movimento.

Lei I. Um corpo permanece em seu estado inicial de repouso ou se movimenta com velocidade uniforme a menos que sobre ele atue uma força exterior não equilibrada.

Lei II. A aceleração de um corpo é inversamente proporcional a sua massa e diretamente proporcional à força exterior resultante que age sobre ele: $a = \frac{\sum F}{m}$, ou seja, a soma das forças que atuam sobre um corpo é: $\sum F = F_{res} = ma$.

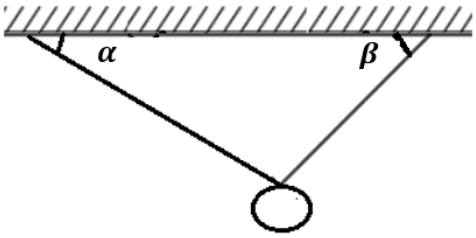
Lei III. As forças se apresentam sempre em pares. Se o corpo A exerce uma força sobre o corpo B, este exerce sobre A uma força de igual módulo e direção, mas de sentido oposto.

Na versão atual, descrevemos o corolário como: se duas forças atuam em um corpo simultaneamente, a força resultante é descrita pela diagonal de um paralelogramo; ao mesmo tempo, seus lados descrevem as forças separadamente.

Assim, considerando os vetores na GS, podemos formular a seguinte tarefa:

T_{GS7}: representar as forças que atuam simultaneamente em um corpo de peso W quando se encontra em equilíbrio como representado na Figura 21.

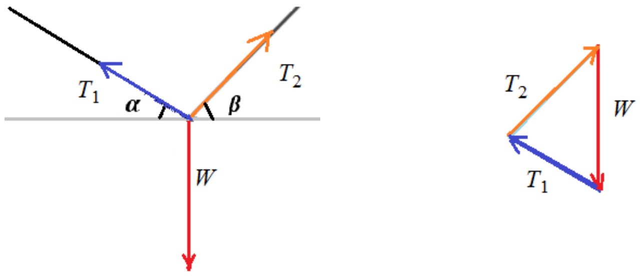
Figura 21 - Corpo suspenso no teto



Fonte: produção da autora

A técnica é identificar todas as forças que atuam em um corpo. Para isso observamos que a corda que forma um ângulo α com o teto sofre a tensão T_1, enquanto para a corda com ângulo β a tensão é T_2. Finalmente, o peso do corpo W é uma força em direção vertical e sentido para baixo. Pela Lei de Newton, se o corpo está em equilíbrio, então, a soma das forças é $T_1 + T_2 + W = 0$, como se mostra na Figura 22.

Figura 22 - Forças em equilíbrio



Fonte: produção da autora

Considerando um referencial cartesiano e aplicando o corolário formulado por Newton podemos identificar outro tipo de tarefa na GA.

T_{GA3}. determinar a força resultante quando duas forças atuam em um corpo simultaneamente.

Considerando que os módulos das tensões sejam T_1 e T_2, para encontrar ditos valores com relação ao peso do corpo W utilizando a lei de Newton de equilíbrio de forças temos:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$(-T_1 \cos\alpha, T_1 \operatorname{sen}\alpha) + (T_2 \cos\beta, T_2 \operatorname{sen}\beta) + (0, -W) = (0,0)$$

$$(-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta\,, T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta - W) = (0,0)$$

Identificando cada componente, temos na componente horizontal:

$$-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0$$

$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha$$

$$T_2 = T_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdots \ (1)$$

Na componente vertical:

$$T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta - W = 0$$

$$T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta = W \cdots \ (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \operatorname{sen}\beta = W$$

$$T_1 \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \right) = W$$

Desta maneira encontramos a tensão T_1:

$$T_1 = \left(\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta} \right) W \cdots \ (3)$$

Substituindo (3) em (1) , encontramos a tensão T_2:

$$T_2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta} \right) W$$

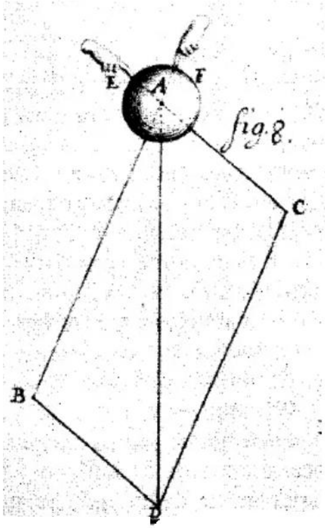
A técnica é justificada pela adição de vetores, igualdade de vetores e produto de vetores por um escalar.

Segundo Truesdell (1975), em 1687, ano em que foi publicado o *Principia,* Varignon[17] publicou seu projeto para uma nova mecânica (*Nouvelle Mécanique*) em que aplicou a regra do paralelogramo para forças baseado em uma visão aristotélica para a solução de problemas que não haviam sido pesquisados por Newton.

Em uma das ilustrações do paralelogramo de forças que apresentou (Figura 23), Truesdell (1975) indica com um dedo que a força atua de A para B e, com outro dedo, que a força que atua de A para C tem como resultante uma força de A para D.

[17] Pierre Varignon (1654-1722), publicou em 1687 seu tratado *Nouvelle mécanique* como resultado de um estudo geométrico que, contrário à opinião dos matemáticos franceses de sua época, escreveu as ideias apresentadas por Newton com a notação e a abordagem de Leibniz para a análise.

Figura 23 - Uma ilustração para o paralelogramo de forças



Fonte: Truesdell (1975, p. 148).

Em 1637, Descartes, em sua obra *Géométrie*, utiliza o termo "imaginário" para os números que são "nem raízes verdadeiras, nem raízes falsas (negativas) são sempre reais, às vezes imaginários" (DESCARTES, 1954, p. 380, tradução nossa).

No século XVIII, os números imaginários ficam estabelecidos e Leonhard Euler (1707-1783), em sua memória *De Formulis Differentialibus Angularibus* (1777), utiliza a notação i para se referir à unidade imaginária $\sqrt{-1}$ e, de acordo com Sanchez (2011, p. 3) escreveu: "a seguir, denotarei a expressão $\sqrt{-1}$ como i, resultando então que $ii = -1$". De acordo com Sanchez, até essa época os números complexos ainda não tinham uma teoria, mas esse desenvolvimento ocorreu por dois caminhos – por um lado, associados a uma interpretação geométrica e, por outro lado, como expansão do conceito de número existente até então. A representação geométrica para números complexos como pontos em um plano foi realizada, simultaneamente e sem qualquer conexão, pelo norueguês Caspar Wessel (1745-1818), o franco-suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o alemão Carl Friedich Gauss (1777-1855). Em 1797, Wessel apresentou em um documento para a reunião da Real Academia Dinamarquesa de Ciências uma interpretação geométrica dos números complexos com o objetivo de abordar:

> [...] a questão de como podemos representar uma direção analiticamente; isto é, como expressaremos linhas (segmentos retos) de tal maneira que em uma equação que resulta em uma linha desconhecida e outras linhas conhecidas, o comprimento e a direção da linha desconhecida possam ser expressos. (SÁNCHEZ, 2011, p. 5, tradução nossa)

Wessel definiu a adição de segmentos retos colocando o ponto inicial de um segmento no ponto final do outro e percebeu que a propriedade comutativa é viável.

A seguir, definiu a multiplicação de segmentos baseado em um sistema de eixos perpendiculares considerando $+1$ como unidade em um dos eixos e $+\epsilon$ como unidade no outro, e escreveu:

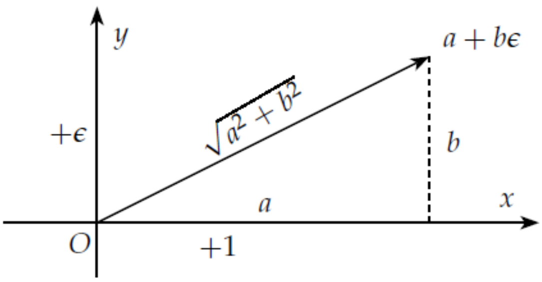
> Seja $+1$ a unidade retilínea positiva e $+\epsilon$ a outra unidade perpendicular à unidade positiva tomada anteriormente, ambas com a mesma origem; então o ângulo de direção de $+1$ é igual a 0° e, portanto, para -1 é 180°, para $+\epsilon$ é 90° e para $-\epsilon$ é −90° ou 270°. Pela regra de que o ângulo da direção do produto é igual à soma dos ângulos dos fatores, temos: $(+1)\cdot(+1) = +1$; $(+1)\cdot(-1) = -1$; $(-1)\cdot(-1) = +1$; $(+1)\cdot(+\epsilon) = +\epsilon$; $(-1)\cdot(+\epsilon) = -\epsilon$; $(+\epsilon)\cdot(+\epsilon) = -1$; $(+\epsilon)\cdot(-\epsilon) = +1$; $(-\epsilon)\cdot(-\epsilon) = -1$. A partir desse resultado, observa-se que ϵ é igual a $\sqrt{-1}$ e que a divergência do produto é determinada de tal maneira que nenhuma das regras operacionais comuns é violada. (SÁNCHEZ. 2011. p. 5, Tradução nossa)

Podemos identificar a partir desses resultados um novo tipo de tarefa na Geometria Analítica.

T_{GA4}: representar geometricamente números complexos em um referencial cartesiano.

Wessel também estabeleceu que qualquer segmento reto podia ser representado mediante a expressão $a + b\epsilon$ e representado geometricamente pela Figura 24.

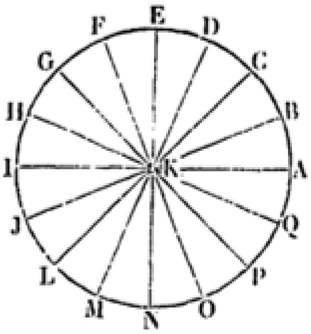
Figura 24 - Representação gráfica vetorial do número complexo de Wessel



Fonte: Sánchez (2011, p. 5)

Por outro lado, Argand, em seu ensaio *Essai d'une manière de representer les quantités imaginaires dans les contructions géométriques,* representa os números imaginários por meio de construções geométricas em um referencial, chamado plano de Argand, considerando as médias proporcionais entre quantidades de mesmo sinal: $-1 : +x :: +x : -1$ ou $+1 : +x :: +x : +1$ em que a quantidade x deve ser +1 ou –1. Dessa maneira, a questão de determinar a média proporcional entre duas quantidades de sinais diferentes fez com que Argand investigasse as quantidades que pudessem satisfazer a $+1 : +x :: +x : -1$, ou seja, as que solucionassem a equação a equação $x^2 = -1$. Para isso, ele explicou as ideias de grandeza absoluta e direção associadas às quantidades negativas afirmando que:

> [...] se tomarmos um ponto fixo K (fig 1) e adotarmos por unidade positiva a linha KA, considerada como tendo a direção de K para A, o que se poderá designar por $\overline{KA}$, para distinguir esta quantidade da linha KA em que consideramos somente a grandeza absoluta, a unidade negativa será $\overline{KI}$, o traço superior tendo o mesmo destino que aquele que está colocado sobre KA, e a condição que se trata de satisfazer será preenchida pela linha KE, perpendicular às anteriores e considerada como tendo a sua direção de K para E, e que expressamos também por $\overline{KE}$. (ARGAND, 1874, p. 6-7, tradução nossa)



Assim, a condição de proporcionalidade exigida para a quantidade x é satisfeita pelas linhas KE e KN e, portanto, as grandezas geométricas que satisfazem à proporção requerida são KE e KN que podem ser vistas como representações geométricas de $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

De acordo com Roque (2012), a representação de Argand para números negativos decorreu da concepção de uma oposição de sentido estabelecida a partir de um ponto neutro definido como ponto 0 como referencial que permite a escolha de um sentido que tornará um número positivo ou negativo. Para representar as quantidades imaginárias, obtém o mesmo sucesso combinando as ideias de grandeza absoluta e de direção que não é dada mais como oposição, pois como a proporção impõe a "+1 estar para +x, como essa quantidade está para –1", então, a direção deve ser uma perpendicular e por isso a multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida como uma rotação em torno de O. Nesse ensaio, Argand também propõe a ideia de módulo para números complexos e para vetores, bem como sua notação típica por uma seta acima dos pontos que representam suas extremidades: $\overrightarrow{AB}$.

Segundo Oliveira (2010, p. 47), vinte e cinco anos após o trabalho de Argand, o matemático Gauss (1777-1855) publicou, em 1831, o ensaio *Theorie Residuorum Biquadraticoruma* em que tratou da teoria das quantidades chamadas números imaginários, introduziu o termo "número complexo" e passou a usar a notação por pares ordenados, (a, b) para representar o número complexo $a + bi$, além de definir as operações entre números complexos representados por pares ordenados. Tais resultados nos permitem identificar outro tipo de tarefa na GA.

T_{GA5}: **representar números complexos como pares ordenados.**

Em 4 de novembro de 1833, Hamilton submeteu um artigo à *Royal Irish Academy* sob o nome de *Teoria das funções conjugadas, ou pares algébricos* em que definiu as operações de adição e multiplicação para pares ordenados e mostrou que o quadrado do par (0, 1) é o par (−1, 0), de modo que (0, 1) deve ser considerado como $\sqrt{-1}$. Assim, Hamilton introduziu os números complexos como uma álgebra formal de pares ordenados de números reais com as operações definidas como usamos atualmente:

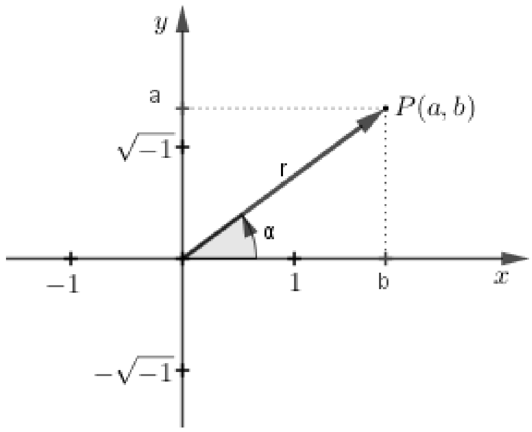
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$$
$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Além disso, ele qualificou o conjunto de pares ordenados como um corpo depois de observar algumas propriedades aritméticas para essas operações. Interpretou ainda o produto definido formalmente por grandezas orientadas no plano como um produto em que intervém uma rotação e sugeriu a extensão dessa operação para o espaço.

Para Sanchez (2011), Hamilton foi o primeiro matemático a tratar números complexos como pares ordenados, mas não fez outras publicações porque sua análise difere tanto do ponto de vista dos textos modernos quanto de seus contemporâneos algebristas de Cambridge que viam os números complexos como um mero conjunto de regras para manipulação simbólica sem sentido. O autor ressalta que Hamilton considerou a álgebra fortemente conectada à física em que a interpretação geométrica de números complexos fazia sentido como uma realidade material do mundo ao nosso redor. Ele acrescenta que Hamilton queria uma abordagem da álgebra como ciência (um conjunto de verdades que explicariam nossa realidade física) e que sua ambição, nesse sentido, era estabelecer uma referência objetiva para as equações de análises complexas. O autor ainda diz que, em sua essência, Hamilton, influenciado por Kant, considerava a geometria como a ciência do espaço e a álgebra como a ciência do tempo, o que contradizia a tendência dos algebristas britânicos da época.

Tait (1882) comenta que, por mais de um século e meio, a representação geométrica de quantidades algébricas, negativas ou imaginárias -1 e $\sqrt{-1}$, era um assunto de especulação entre matemáticos que propunham o uso de símbolos para designar o sentido e não o comprimento de uma linha reta. Há muito tempo dominava o princípio de que se media quantidades positivas ao longo de uma linha fixa em um determinado sentido e quantidades negativas no sentido oposto da mesma linha. Este método foi a base do método geométrico de Descartes, constantemente posto em prática em questões de Geometria Analítica e na matemática aplicada à Física – para representar o número $a + b\sqrt{-1}$, considera as quantidades reais no eixo das abscissas e as quantidades imaginárias no eixo das ordenadas (Figura 25) para representar esse número por um ponto $P = (a, b)$ no plano.

Figura 25 - Representação de um número complexo por vetor



Fonte: adaptado de Tait (1882, p. 3)

O ponto P determina um segmento com o ponto que representa a origem do referencial, cujo comprimento é dado por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, e uma direção que determina o ângulo (denotado por α) que forma com o eixo das abscissas. A percepção do triângulo retângulo conduz a observar que a tangente desse ângulo é $\frac{b}{a}$, ou em outras palavras, o ponto que representa o número (a, b) se descoloca no sentido anti-horário segundo um ângulo α.

Tais resultados conduzem à representação trigonométrica para os números complexos e Tait (1882) afirma que operar $\cos\alpha + \sqrt{-1}sen\ \alpha$ sobre uma reta do plano provoca um giro na direção positiva de um ângulo igual a α. Isto é:

$$\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}sen\ \alpha\right)\left(a + \sqrt{-1}b\right) = a\cos\alpha - b\ \text{sen}\ \alpha + \sqrt{-1}(a\ \text{sen}\ \alpha + b\cos\alpha)$$

que tem comprimento calculado por:

$[(a\cos\alpha - b\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + (a + b\cos\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ e a inclinação em relação ao eixo das abscissas por: $\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a\cos\alpha - b\,\mathrm{sen}\,\alpha}{a\cos\alpha + b\,\mathrm{sen}\,\alpha}\right) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\mathrm{tang}\,\alpha + \frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}\mathrm{tang}\,\alpha}\right) = \alpha + \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Esses avanços no estudo de números complexos conduzem à necessidade de se considerar elementos da trigonometria tanto para ampliar suas representações quanto para facilitar cálculos, o que conduz a um outro tipo de tarefa na GA.

$\boldsymbol{T_{GA6}}$: **representar um número complexo em sua forma trigonométrica**

A técnica para representar um número complexo $z = a + bi$ é determinar o módulo do número $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2} = r$ e o ângulo $\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

Portanto, $z = a + bi = r\cos\theta + \mathrm{isen}\theta$.

Pelo estudo gráfico em que Argand introduziu a notação $\overrightarrow{AB}$ para indicar um segmento com origem em A no sentido de B na direção determinada por AB, Möbius, Bellavitis e Hamilton definiram um segmento orientado. Möbius (1790-1868), em sua obra *Barycentrishe Calcul* (Cálculo do Baricentro), publicada em 1827, apresentou um sistema geométrico onde um segmento é representado pela diferença entre dois pontos, isto é, $AB = B - A$, que $AB + BA = 0$ ou $AB = -BA$ e, com isso, desenvolveu uma aritmética para segmentos de reta definindo a adição e a multiplicação por um número real. Podemos observar que, em essência, ele denota os vetores por letras do alfabeto vetores sem, no entanto, utilizar esse nome, porque seu objetivo era o estudo de centros de gravidade e Geometria Projetiva, o que conduziu a que ninguém percebesse a importância de tais cálculos.

Conforme Crowe (1994) na obra *Calcolo dele Equipollente* de Giusto publicada em 1833, Bellavitis (1803-1880) aproximou as definições de vetores do sentido euclidiano com uma explicação completa desse método considerando que:

> 1° Uma linha (reta) expressada usualmente por duas letras é entendida como tomada a partir da primeira letra até a segunda, assim AB e BA não podem ser considerados a mesma entidade, mas como duas quantidades iguais com sinais opostos.
> 2° Duas linhas são chamadas *equipolentes* se elas são iguais, paralelas e dirigidas no mesmo sentido.
> 3° Se duas ou mais retas são relatadas de tal forma que a segunda extremidade de cada reta coincide com a primeira da seguinte, então a linha, que juntamente com esta forma um polígono (regular ou irregular), e que é traçada a partir da primeira extremidade da primeira linha até a segunda da última, é chamada soma equipolente (composta equipolente).

> Esta é representada pelo sinal ≏ interposto entre as linhas combinadas, e o sinal indica a equipolência. Assim temos
> $AB + BC \bumpeq AC$,
> AB + BC + CD ≏ AD etc.
> Tais equipolências continuam verdadeiras quando substituídas por suas linhas ou por linhas respectivamente equipolentes a elas [...]. (CROWE, 1994, p. 52, tradução nossa).

O descrito no primeiro parágrafo permite identificar a noção de vetor na GS, mas sem explicitar o que é segmento orientado, embora aponte a noção de sentido em uma determinada direção e defina igualdade e adição de linhas. A seguir, ele descreve o caso para linhas em um plano cujas posições determinam ângulos entre elas:

> 1. Vamos nos restringir, agora, a linhas situadas no plano. A inclinação da linha AB é o ângulo HAB, que ela forma com a horizontal AH traçada da esquerda para a direita, qualificando como positivo os ângulos medidos da direita para cima e de 0º a 360º [...].
> 2. O ângulo ou inclinação de CD sobre AB é igual à inclinação de CD menos a de AB. (CROWE, 1994, p. 52, tradução nossa)

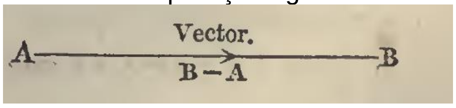
O autor apresenta, então, o seguinte teorema:

> *Teorema Fundamental*. Em equipolências, os termos são transpostos, substituídos, adicionados, subtraídos, multiplicados, divididos etc., enfim, sofrem todas as operações algébricas que seriam legítimas se se tratasse de equações, e as equipolências resultantes são sempre exatas. Como foi dito em 5°, as equipolências não lineares só podem ser referidas em números em um único plano. (CROWE, 1994, p. 53, tradução nossa).

Crowe (1994) conclui que Bellavitis descreveu entidades geométricas que são equivalentes, em comportamento, aos números complexos representados geometricamente, mas que não generaliza o produto de segmentos orientados.

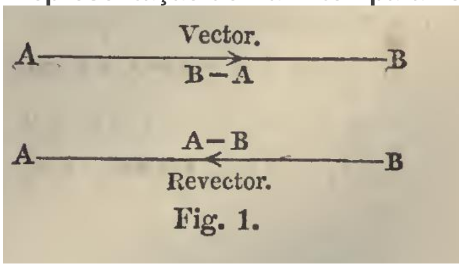
De acordo com Zea (2012), Tait sabe que apenas a definição não é suficiente. É necessário a incorporação de uma imperatividade relativa aos novos objetos considerando os pontos A e B no espaço e indicando que a expressão $\overline{AB}$ representa uma reta que depende de três valores (ou componentes), e por isso enuncia: “[...] todas as retas iguais e paralelas são susceptíveis de serem representadas por um mesmo símbolo, e este símbolo dependerá de três elementos numéricos. É sobre essa relação que uma reta é chamada vetor.” (TAIT, 1873, p. 8-9, tradução nossa).

Tait não usa a diferença entre o extremo B e a origem A, utilizado por outros pesquisadores, como na definição de vetor apresentada por Burali-Forti (1861-1931) e Marcolongo (1862-1943) em 1910 e a apresentada por Hamilton e Grasmann. No entanto, é Hamilton que introduz a palavra vetor afirmando que:

> Uma linha direita AB, considerada como tendo não apenas comprimento, mas também direção, é considerada um VETOR. Diz-se que seu ponto inicial A é sua origem, e seu ponto final é B. Um vetor AB é concebido para ser (ou construir) a diferença de seus dois pontos extremos; ou, mais plenamente, seja o resultado da subtração de sua própria origem de seu próprio termo; e, em conformidade com essa concepção, também é denotado pelo símbolo B-A: uma notação que será considerada extremamente útil devido às analogias que serve para expressar entre operações geométricas e algébricas.
>
> 
>
>
> (HAMILTON, 1866, p. 1, tradução nossa).

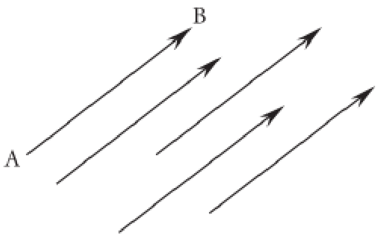
Também Hamilton define vetor nulo e vetor oposto ou revetor e explica que quando os pontos extremos A e B são distintos, o vetor AB ou $B - A$ é considerado um vetor real (ou efetivo), mas quando (como limite) esses dois pontos são concebidos para coincidir, o vetor AA ou $A - A$ é considerado nulo e que o vetor oposto é definido de modo similar a AB sendo BA representado por $A - B,$ e o ilustra com a Figura 26.

Figura 26 - Representação de Hamilton para vetor oposto



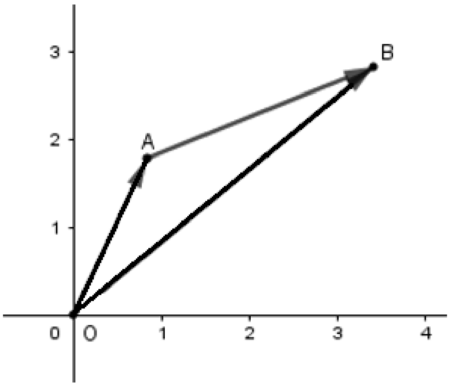
Fonte: Hamilton (1866, p. 1)

Cabe observar que a definição atual para vetor, na Geometria Sintética, é dada por:

> dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um vetor. Na Figura 1.3, todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor que será indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$, em que A é a origem e B é a extremidade do segmento. O vetor também costuma ser indicado por uma letra minúscula encimada por uma seta, tal como $\vec{v}$.
>
> 
>
>
> Figura 1.3
>
> (WINTERLE, 2014, p. 2-3)

Nessa definição observa-se claramente a diferença entre direção e sentido, embora o autor utilize a notação que persiste, $B - A,$ que conduz a uma interpretação operatória que não é definida para pontos, mas sim para vetores, ou seja, o vetor AB pode ser representado por $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ (Figura 27), de acordo com a definição de subtração (inverso aditivo) de vetores.

Figura 27 - Representação de vetor por soma de vetores



Fonte: produção da autora, 2021

Tait (1882) afirma que dois vetores são iguais se têm igual comprimento, são paralelos e têm o mesmo sentido, e ele os representa por $\overline{AB} = \alpha$. E estabelecendo sua igualdade com o vetor $\overline{CD}$, indica que: $\overline{AB} = \overline{CD} = \alpha$. Note-se que o autor utiliza o símbolo de igualdade, mas na atualidade usamos o símbolo de equivalência ou equipolência. Tal definição nos conduz ao tipo de tarefa:

$\boldsymbol{T_{GS8}}$: **determinar a igualdade de vetores.**

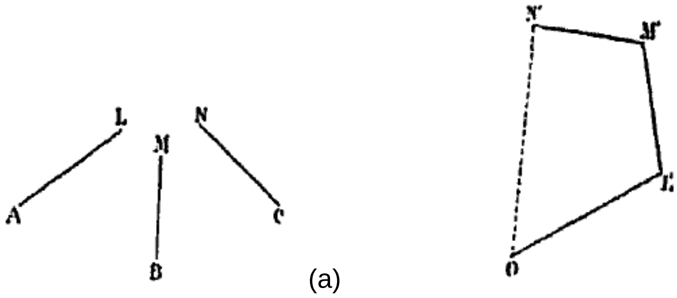
Mas quando se tem a decomposição de um vetor a igualdade de vetores é comparando cada uma das componentes, o que conduz a ter o tipo de tarefa na GA:

$\boldsymbol{T_{GA8}}$: **determinar a igualdade de vetores.**

Enquanto Hamilton trata a adição de vetores no plano através de um paralelogramo, Tait (1873, p. 9) a define considerando A, B e C três pontos quaisquer e estabelece que, se $\overline{AB} = \alpha$, $\overline{BC} = \beta$, $\overline{AC} = \gamma$, a relação $\alpha + \beta = \gamma$ representa que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, e a partir daí ele apresenta suas possibilidades. Por exemplo, se $A = C$, então, $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$ o que implica que $\overline{BA} = -\overline{AB}$ (observando que o signo "$-$" aplicado a um vetor produz o efeito de inverter o sentido do vetor). Tait afirma ainda que em um triângulo ABC, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$, e para um polígono, ele procede do mesmo modo, afirmando que $\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} + \overline{ZA} = 0$. Finalmente, ele conclui que $\overline{AB} + \overline{BC} + \cdots + \overline{YZ} = \overline{AZ}$. Estas relações parecem se apoiar nas regras do movimento estabelecidas nos Princípios de Newton, como a regra da composição das forças. Tait (1882) apresenta então um exemplo para a adição de três vetores, $\overline{AL} +$

$\overline{BM} + \overline{CN}$ (Figura 28a) afirmando que suas origens devem estar em um determinado ponto O (Figura 28b).

Figura 28 - Representação da adição de vetores segundo Tait na GS



(a) (b)

a b

Fonte: Tait (1882, p. 12)

Tait apresenta a solução em três passos: 1) fazer coincidir o ponto A com o ponto O e construir $\overline{OL}$ com o mesmo comprimento e paralelo a $\overline{AL}$; 2) fazer coincidir B com L´ e construir $\overline{L'M'}$ com o mesmo comprimento e paralelo a $\overline{BM}$; e 3) fazer coincidir C com M´ e construir $\overline{M'N'}$ com o mesmo comprimento e paralelo a $\overline{CN}$, concluindo que $\overline{ON'}$ representa a soma $\overline{AL} + \overline{BM} + \overline{CN}$.

Com isso podemos determinar mais um tipo de tarefa na GS:

T_{GS9}: **representar a adição de vetores na Geometria Sintética**

A técnica é pelo método do paralelogramo, identificando os segmentos orientados que estejam com origem em um mesmo ponto. Então, a adição é o segmento que forma parte do paralelogramo que tem o mesmo início que os vetores.

De acordo com Dorier (1997), a representação de números complexos por vetores no plano já era conhecida, mas estender os "números" bidimensionais para tridimensionais preservando as propriedades algébricas básicas dos números reais e complexos, tentada por muitos matemáticos, foi conseguida por Hamilton em sua obra *Elements of Quaternions*. De acordo com Sanchez (2011), Hamilton considerou as ternas $a + bi + cj$ em que a, b e c representam números reais e que $i^2 = j^2 = -1$ o que, por analogia com os números complexos, permitia a adição e a subtração sem problemas. No entanto, Hamilton teve dificuldade para definir o produto da tripla $a + bi + cj$, pois quando a elevou ao quadrado obteve:

$(a + bi + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij$ ...(*) cujo quadrado do módulo é: $(a^2 - b^2 - c^2 + 2abi + 2acj + 2bcij)^2$ ...(**)

$$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (2bc)^2$$

E, de fato, a lei dos módulos só seria satisfeita se o termo ij fosse simplificado em (**), estabelecendo que $ij = 0$, o que não estaria correto. E isto levou Hamilton a afirmar que:

> Às vezes, fui tentado a considerar $ij = 0$. Mas achei estranho e desconfortável, e percebi que a exclusão do termo indesejável poderia ser obtida assumindo algo que parecia menos violento para mim, ou seja, $ji = -ij$. Dessa maneira, considerei $ij = k$, $ji = -k$, considerando k ser nulo ou não. (SÁNCHEZ, 2011. p. 16, tradução nossa).

A solução de Hamilton mostra que a ordem do produto é rigorosamente respeitada quando os termos i e j estão envolvidos, isto é, que $2bcij$ deveria ser escrito como $bc(ij + ji)$ e, assim, a lei de módulos seria satisfeita assumindo-se que $ij + ji = 0$, desde que ij e ji não sejam nulos. Para generalizar, Hamilton considerou $ij = -ji = k$ e apresentou a seguinte expressão:

$(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz - cy)k$ (***) e assim verifica-se que para $k = 0$, a lei dos módulos é satisfeita com:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

Acontece, porém, que Hamilton assim obteve um primeiro membro da igualdade maior em $(bz - cy)^2$, e que representa o coeficiente de k em (***) no desenvolvimento do produto. Por isso ele considerou que não era possível $k = 0$, mas considerar $k \neq 0$ também não satisfazia porque o produto de triplas deveria ser outra tripla e o que ele encontrou foi um quarto termo. Este problema rendeu a Hamilton 10 anos de pesquisa e, em 1843, ele repensa sua proposta e considera quatro termos em lugar de três, tomando k como uma terceira unidade imaginária adicional a i e j. Assim, pondera ele que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e denomina essas novas expressões *quatérnios,* ou *números quatérnios.* Os quatérnios são números hipercomplexos da forma $q = a + bi + cj + dk$ em que a, b, c e d são números reais e i, j e k satisfazem a relação $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Além disso, Hamilton considerou que $i^2 = j^2 = -1$ e $ij = -ji = -1$, e assim fica evidente que $k^2 = -(ji)(ij) = -ji^2j = -j(-1)j = j^2 = -1$.

Para comprovar a lei de módulos, era preciso conhecer os valores de ik e kj e Hamilton concluiu que “provavelmente $ik = -j$, porque $ik = iij = i^2j = -1j = -j$; de modo similar, $kj = ijj = -i$", que é proporcionado pela propriedade associativa. Então, $ki = (-ji)i = -ji^2 = (-j)(-1) = j$. Em resumo, as “assunções” do produto (como Hamilton as chamava) para os quatérnios resultam em:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

Depois desse estudo de Hamilton, outros matemáticos como Wessel, Gauss, Argand, Mourey e Servois buscaram, por muitos anos, um sistema numérico que descrevesse pontos do espaço de forma similar aos números complexos como pontos do plano.

Os números definidos por Hamilton constituem uma nova álgebra que cumpre as propriedades fundamentais da aritmética tradicional, mas o produto de dois números quatérnios não é comutativo, o que contradizia todos os algebristas da época. Segundo Sanchez (2011), Hamilton estava absolutamente convencido de que os quatérnios se converteriam em uma ferramenta precisa para descrever a realidade do espaço físico e do tempo, considerando o tempo como um escalar e os pontos do espaço definidos por três coordenadas reais. Dessa forma, para especificar a operação necessária para converter um vetor em outro no espaço, era necessário conhecer quatro números – a relação entre a distância de um vetor ao outro, o ângulo entre eles, os módulos e a inclinação do plano em que estes vetores se encontram. No século XIX e durante vinte anos, Hamilton encaminhou o estudo dos quatérnios na álgebra de uma maneira equivalente aos Elementos de Euclides, que é o percursor do atual cálculo vetorial.

Em *Lectures on Quaternions* (1853), no momento de definir o produto dos elementos desse novo conjunto, Hamilton apresentou

$$H = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\ e\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\},$$

e denominou o número a como a parte escalar e $bi + cj + dk$ como a parte vetorial, ou quatérnio puro. Além disso, o produto dos quatérnions puros, isto é, $p = xi + yj + ck$ e $q = bi + cj + dk$ tem como resultado:

$$\begin{aligned} pq &= (xi + yj + zk)(bi + cj + dk) \\ &= -xb + xck - xdj - ybk - yc + ydi + zbj - zci - zd \\ &= -(xb + yc + zd) + (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k \end{aligned}$$

Isto quer dizer, então, o termo $xb + yc + zd$ é **um escalar,** o que na atualidade é conhecido como a definição de um produto escalar, e denotado por

$xb + yc + zd = \langle p, q\rangle$ e $(yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k = p \times q$ e, portanto, $pq = -\langle p, q\rangle + p \times q$.

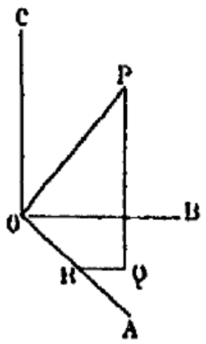
Atualmente, $\langle p, q \rangle$ é conhecido como o produto escalar de dois vetores e é definido por $\langle p, q \rangle$[18] $= xb + yc + zd$.

Para o tipo de tarefa sobre a representação de um vetor no espaço temos:

$\boldsymbol{T_{GS10}}$: **representar vetores no espaço na Geometria Sintética**

Podemos encontrar em Tait (1882, p. 13) uma tarefa quando estabelece uma proposição em que afirma que: "qualquer vetor pode ser decomposto em três componentes paralelos a três vetores fornecidos, e não dois a dois paralelos ou paralelos ao mesmo plano. Essa decomposição só pode ser feita de uma maneira". Tait, então, considerou três vetores fixos $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$ (Figura 29), e um vetor qualquer $\overline{OP}$, determinando o vetor $\overline{PQ}$ paralelo a $\overline{CO}$ de tal forma que o ponto Q pertença ao plano definido por BOA, e a seguir, determinando nesse plano, o vetor $\overline{QR}$, paralelo a $\overline{BO}$, de forma que R pertença a $\overline{OA}$. Por essa construção, tem-se que $\overline{OP} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP}$.

Figura 29 - Decomposição de um vetor



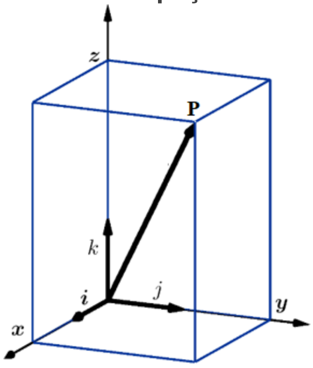
Fonte: Tait (1882, p. 13)

Depois dessa decomposição, o autor escreve, de forma geral, que $P = x\alpha + y\beta + z\gamma$, onde α, β e γ representam vetores não paralelos dois a dois e nem paralelos a um plano comum, e em que x, y e z são três valores numéricos que dependem do vetor. Podemos observar que os três vetores dados, $\overline{OA}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$, na atualidade são os eixos coordenados do referencial cartesiano no espaço. Tait (1882) afirma que, no caso de os três vetores serem unitários e perpendiculares entre si, Hamilton utiliza as letras $i,\ j, k$ para designar um sistema unitário-vetorial em que $P = xi + yj + zk$ (Figura 30) e, ainda, que os valores x, y, z representam as medidas de três arestas

[18] O produto escalar, que alguns autores denominam produto interno, denota-se por ●

consecutivas de um paralelepípedo retangular em que P representa o extremo do seu vetor-diagonal cujo comprimento é dado por $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Figura 30 – Representação de vetor no espaço em um referencial ortonormal



Fonte: produção da autora

O processo apresentado por Tait, isto é, a decomposição de um vetor que está em três dimensões considerando o referencial ortonormal, permite-nos considerar três tipos de tarefa na GA:

$\boldsymbol{T_{GA8}}$: **representar vetores no espaço na Geometria Analítica.**

$\boldsymbol{T_{GA9}}$: **representar graficamente a decomposição de um vetor no espaço.**

$\boldsymbol{T_{GA10}}$: **determinar o produto escalar de dois vetores**

A técnica utilizada para resolver esse tipo de tarefa é a identificada na pesquisa realizada por Hamilton que diz: dados os vetores $u=(a,b,c)$ y $v=(x,y,z)$, tem-se que $u \cdot v = ax+by+cz$.

$\boldsymbol{T_{GA11}}$: **Determinar a equação da reta, no espaço $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos A e B.**

Encontramos a técnica: a equação vetorial da reta está representada pela igualdade de vetores, então, $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}\,, t\epsilon\mathbb{R}$ onde P_0 é um ponto da reta e $\vec{a}$ é a direção da reta. Para isso, tomamos um ponto genérico $P(x,y,z)$ e, como ponto P_0, qualquer dois pontos A ou B. Deste modo, já temos $\overrightarrow{P_0P}$, por exemplo, se consideramos $\overrightarrow{AP}$. Agora, para obter o vetor direção $\vec{a}$, consideramos $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Deste modo a equação da reta ficaria $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}, t\epsilon\mathbb{R}$. Note-se que também é possível tomar como ponto P_0 o ponto B e, como o vetor direção, $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$, e que assim obtém-se outra forma de representar a equação da reta.

Depois da origem dos quatérnios atrair o interesse de muitos matemáticos, novos teoremas foram demonstrados por meio da análise vetorial, utilizando a parte vetorial dos quatérnios de Hamilton para representar quantidades físicas, isto é, $v = bi + cj + dk$. Mas foi o desenvolvimento da álgebra e da teoria dos determinantes de Josiah Willian Gibbs (1839-1903) e Oliver Heaviside (1850-1925) que permitiu definir o produto vetorial como conhecemos na atualidade, isto é, para os vetores $A = (x, y, z)$ e $B = (b, c, d)$, tem-se: $A \times B = (x, y, z) \times (b, c, d) = (xi + yj + zk) \times (bi + cj + dk) = (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k$

Ou $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b & c & d \end{vmatrix}$, ou seja, $A \times B = (yd - zc, -xd + zb, xc - yb)$[19].

Dessa técnica podemos propor o primeiro tipo de tarefa da álgebra linear, ou seja, considerar processos para calcular o determinante de uma matriz.

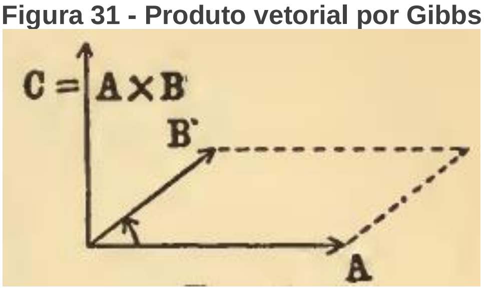
$\boldsymbol{T_{AL1}}$: **determinar o produto vetorial de dois vetores.**

Mas se consideramos a definição de produto vetorial na GA, temos a tarefa

$\boldsymbol{T_{GA12}}$: **determinar o produto vetorial de dois vetores**

Gibbs (1901) utiliza o produto vetorial para calcular a medida da área do paralelogramo determinado por dois vetores (Figura 31) na GS considerando que ela é igual ao módulo do vetor resultante dessa operação, ou seja, $M_{AP} = |A \times B|$.

Figura 31 - Produto vetorial por Gibbs



Fonte: Gibbs (1901, p. 61)

$\boldsymbol{T_{AL2}}$: **calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores**.

A primeira técnica que se apresenta diz que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são os lados que conformam um paralelogramo, então, a medida da área é o módulo do produto vetorial $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Também temos uma segunda técnica e que utiliza o módulo dos vetores,

[19] Alguns autores utilizam o símbolo × para indicar o produto escalar.

ângulo entre os vetores, razões trigonométricas e projeção ortogonal para determinar $|\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$.

Esta propriedade para vetores permite enunciar e demonstrar novos teoremas em análise vetorial.

Depois de definir produto escalar e produto vetorial, Gibbs, em seu livro *Vector Analysis*[20] de 1901, definiu produto misto para três vetores no espaço. Ele considerou o produto misto dos vetores A, B e C como sendo o produto escalar do primeiro vetor pelo produto vetorial dos outros dois vetores, e denotou:

$$[A, B, C] = A.(B \times C).$$

Se os vetores estiverem representados em função dos vetores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, temos: $[A, B, C] = A \wedge \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A.\left(\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}\vec{k}\right)$. Mas, como $A \cdot \vec{\imath} = A_1,\ A \cdot \vec{\jmath} = A_2,\ A \cdot \vec{k} = A_3$ vem que:

$$[A, B, C] = \left(\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} A_1 - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} A_3\right) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_2 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Portanto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_2 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$.

Tal definição nos conduz a um novo tipo de tarefa na álgebra linear.

$\boldsymbol{T_{AL3}}$**: determinar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^3$ que contém os pontos não colineares *A*, *B* e *C*.**

Na técnica da AL, consideramos em $\mathbb{R}^3$ um plano determinado por um ponto P_0 no plano e sua inclinação, que é especificada por seu vetor normal $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$. Neste caso, utilizaremos esta equação, chamada Equação normal do plano. Para isso, tomamos um ponto genérico $P(x, y, z)$ e, como ponto P_0, qualquer dos três pontos A, B e C. Deste modo, temos $\overrightarrow{P_0P}$, que podemos considerar, por exemplo, como $\overrightarrow{AP}$. Agora, para obter um vetor normal $\vec{n}$, temos que ter os vetores do plano que depois

[20] Desde a impressão de um pequeno panfleto sobre *The Elements of Vector Analysis* (1881-84), publicado por Edwin Bidwell Wilson (1901), aluno de J. Willard Gibbs na Universidade de Yale

multiplicaremos vetorialmente. Neste caso, podemos ter os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, por exemplo, podemos considerar $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Finalmente, a equação do plano é $\overrightarrow{AP} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0$. Assim, existirão diversas formas de solução, considerando que podemos assumir tanto o ponto P_0 como os vetores para a obtenção do vetor normal $\vec{n}$.

Na GA tem-se também o tipo de tarefa:

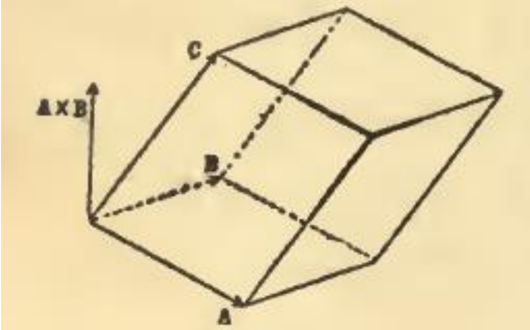
$\boldsymbol{T_{GA13}}$: **determinar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ que contém os pontos não colineares A, B e $\boldsymbol{C}$.**

Na GA, a técnica de solução, se consideramos a Equação Vetorial do plano com P_0 sendo um ponto e $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dois vetores contidos nele, dependerá dos parâmetros r e t, tal que, $\overrightarrow{P_0P} = r\vec{a} + t\vec{b}$, com $r, t \epsilon \mathbb{R}$. Depois, tomamos um ponto genérico $P(x, y, z)$ e, como ponto P_0, qualquer um dos três pontos A, B e C. Deste modo, temos o vetor $\overrightarrow{P_0P}$, por exemplo, ao considerarmos $P_0 = A$ e, assim, temos $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{AP}$. Agora, para os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos considerar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Deste modo, a equação do plano será $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC},\ com\ r, t \epsilon \mathbb{R}$. E isso mostra a existência de diversas formas de solução, considerando que podemos escolher de distintas maneiras tanto o ponto P_0 quanto os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$\boldsymbol{T_{AL4}}$: **determinar o produto misto.**

A partir da definição de produto misto, Gibbs (1901) apresenta sua interpretação geométrica (Geometria Sintética) considerando A, B e C como três vetores com a mesma origem, e que determinam um paralelepípedo (Figura 32) em que o módulo do produto vetorial $A \times B$ representa a medida da área do paralelogramo determinado por esses vetores, e que o módulo do produto escalar do vetor C pelo vetor $A \times B$ representa a medida do paralelepípedo. No entanto, Gibbs não apresenta sua demonstração.

Figura 32 - Representação de paralelepípedo para cálculo da medida de seu volume por Gibbs



Fonte: Gibbs (1901, p. 68)

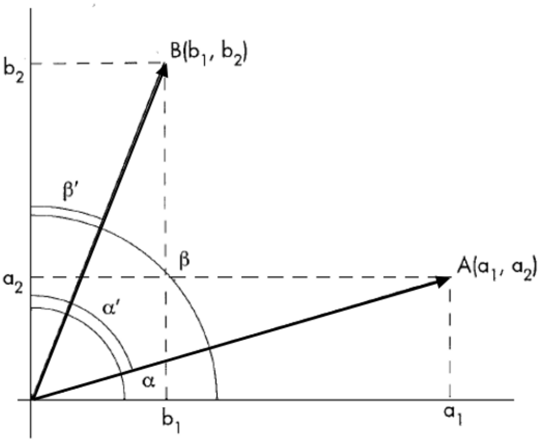
Essa definição nos permite elaborar um outro tipo de tarefa para a álgebra linear.

T_{AL5}: **calcular a medida do volume de um paralelepípedo determinado por três vetores de mesma origem no espaço.**

O desenvolvimento do produto escalar, segundo Arezana (1997), permite determinar a medida de um ângulo entre dois vetores no plano ou no espaço. A autora considera um referencial cartesiano no plano (Figura 33) para representar os vetores $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ e $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$. O vetor $\overrightarrow{OA}$ forma com os eixos ângulos de medidas α e α' de modo que $\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$, e o vetor $\overrightarrow{OB}$ forma ângulos de medidas β e β' de modo que $\beta + \beta' = \frac{\pi}{2}$. Podemos então deduzir que $\cos\alpha = \frac{a_1}{|\overrightarrow{OA}|}$, $\cos\alpha' = \frac{a_2}{|\overrightarrow{OA}|} = sen\alpha$,

$\cos\beta = \frac{b_1}{|\overrightarrow{OB}|}$ e $\cos\beta' = \frac{b_2}{|\overrightarrow{OB}|} = sen\beta$.

Figura 33 - Representação de ângulo entre dois vetores no plano cartesiano



Fonte: adaptado de Arenzana (1997, p. 63)

Considerando que o ângulo formado pelos dois vetores tem medida $\beta - \alpha$, podemos utilizar a fórmula trigonométrica $\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$ ou que é equivalente à $\cos(\beta-\alpha)=\frac{a_2b_2+a_1b_1}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|}$ que representa o produto escalar dos dois vetores e que nos permite concluir que $(\beta-\alpha)=\arccos\left(\frac{a_2b_2+a_1b_1}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|}\right)$.

Assim, como indica Arenzana (1997), a determinação da medida do ângulo formado por dois vetores no plano pode ser feita mediante uma fórmula algébrica que representa o produto escalar de dois vetores.

Tal resultado nos permite enunciar outro tipo de tarefa para a geometria analítica:

$\boldsymbol{T_{GA14}}$: **calcular a medida do ângulo determinado por dois vetores**

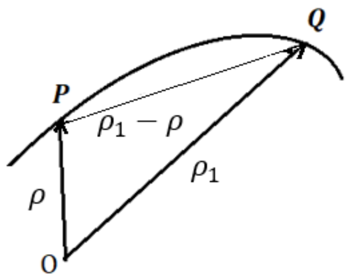
As tarefas para resolver esse tipo de tarefa com o vetor representado por coordenadas cartesianas pode modelar fenômenos físicos na Geometria Analítica, o que nos permite formular o seguinte tipo de tarefa na GA.

$\boldsymbol{T_{GA15}}$: **determinar uma expressão matemática para descrever o movimento de um corpo no espaço.**

Tait (1882, p. 36) usou como ferramenta para descrever o movimento o cálculo vetorial associado a algumas questões de cálculo diferencial, e a noção de curva e os lineamentos de fluxões de Newton baseados no cálculo diferencial e na dinâmica segundo as leis do movimento.

Para a definição geométrica de algumas curvas, o autor usou o cálculo diferencial no estilo de Newton, empregando combinações de vetores e funções escalares que, modernamente, correspondem às funções paramétricas de uma curva, e isto é escrito como: $\overline{OP}=\rho=\varphi(t)$ que, se estiver no espaço, é interpretada como $\varphi(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, em que t representa o tempo e $\varphi(t)$ é a posição de uma partícula. Para outro ponto Q da curva (Figura 34) considerando um tempo t_1 transcorrido, temos: $\overline{OQ}=\rho_1=\varphi(t_1)=\varphi(t+\partial t)$, em que ∂t representa um número qualquer e o deslocamento é $\partial\rho=\rho_1-\rho=\varphi(t+\partial t)-\varphi(t)$.

Figura 34 - O vetor deslocamento por Tait



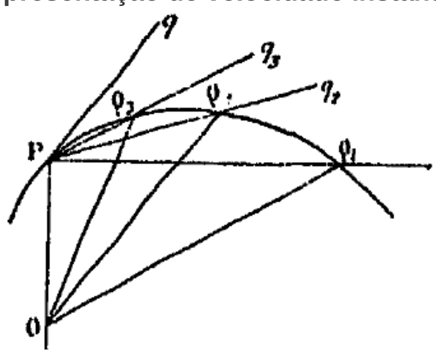
Fonte: adaptado de Tait (1882, p. 37)

Tait (1882) indica que, nesse caso, os vetores da função φ são constantes e os fatores que os multiplicam são variáveis apenas em função de t. Acrescenta ainda que desenvolver cada um desses fatores, de acordo com a fórmula de Taylor (reservando o caso de descontinuidade do valor de um ou mais deles no intervalo de t para t_1), implica que a função $\varphi(t + \partial t)$ deve ser, portanto, desenvolvida da seguinte forma: $\partial\rho = \frac{d\varphi(t)}{dt}\partial t + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}(\partial\rho)^2 + \cdots$ e que, ao aplicar o limite, conduz a:

$$lim\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\partial t=0} = \frac{\partial\rho}{dt} = \varphi'(t).$$

Concordando com Zea (2012), modernamente, o que temos é a derivada $\varphi'(t)$ da função vetorial $\varphi(t)$ que se define como a derivada de uma função real, ou seja, $\varphi'^{(t)} = \lim_{\partial t \to 0}\frac{\varphi(t+\partial t)-\varphi(t)}{\partial t} = \lim_{\partial t \to 0}\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}$. Se o limite existe, então $\varphi'(t)$ será tangente à curva percorrida por φ e a velocidade instantânea, obtida por Tait, é representada na Figura 35.

Figura 35 - Representação de velocidade instantânea por Tait



Fonte: Tait (1882, p. 40)

As grandezas vetoriais como aceleração, força etc. atualmente têm representação vetorial.

Os tipos de tarefas descritas permitem inferir a razão de ser dos vetores no modelo de Álgebra Linear, e é a formalização de vetores e axiomatização. De acordo com Zea (2012), os estudos de Tait contêm os princípios fundamentais para a construção da Análise Vetorial na Geometria Sintética e, em essência, os conceitos primitivos para a Álgebra Linear moderna. Além disso, que a noção de espaço vetorial foi apresentada nos trabalhos de Giuseppe Peano (1858-1932), em seu livro *Cálculo Geométrico*, em que apresenta a axiomatização da teoria contida em *Ausdehnungslehre* de Grassmann como estudamos na atualidade.

A razão de ser dos vetores em cada tipo de tarefas apresentadas até agora permite a solução dos problemas de movimento, queda livre e força que, em princípio, ainda não eram trabalhados com coordenadas naquele tempo, mas também apresentamos como essas mesmas tarefas podem ser feitas na Geometria Analítica. Também não havia à época a notação existente na atualidade, mas já eram evidentes os segmentos orientados, como pode ser observado nos tipos de tarefas. E, hoje em dia, os problemas podem ser trabalhados na Geometria Analítica com as técnicas que foram desenvolvidas intuitivamente e formalizadas, por exemplo, por Stevin e Newton.

Antes do século XIX, para alguns matemáticos como George Peacock (1791-1858), Augustus De Morgan (1806-1871) entre outros, existiam dois tipos de álgebras: a Álgebra Aritmética, que utilizava símbolos para representar números inteiros positivos e definir suas operações que cumpriam a propriedade de fechamento, e a Álgebra Simbólica, que utilizava as regras da álgebra aritmética, mas sem qualquer restrição como as que deviam ser cumpridas por qualquer outro tipo de álgebra.

Uma álgebra que se relaciona com vetores apresenta a particularidade de não estar em conformidade com as regras básicas dadas e em que os elementos são muito específicos, porque esses elementos descrevem não apenas números, mas também magnitudes não escalares.

Cabe mencionar que, no tempo de Euclides, ele tentou uma aproximação entre as grandezas e números em seu livro *V dos Elementos*, mas foi Descartes quem em seu livro *La Geometria* conseguiu uma correspondência entre número e as magnitudes com a introdução de seu *segmento unidade* tornando assim possível operar as magnitudes como se faz com os números, ao representar as soluções das equações.

Em resumo, apresentamos aqui os vetores sendo utilizados na solução de alguns tipos de tarefas por técnicas e discursos tecnológicos-teóricos utilizados por pesquisadores e estudiosos que mostraram o desenvolvimento do objeto matemático vetor iniciando com a Geometria Sintética, passando pela Geometria Analítica até chegar na Álgebra Linear.

Como síntese do que encontramos em nosso estudo histórico, construímos o Quadro 3, para mostrar o desenvolvimento do estudo de vetores.

Quadro 3 – Desdobramento histórico para o estudo de vetor

Período	Colaboradores	Contribuições
287 a C.	Gregos antigos	O método de paralelogramos para a adição de vetores
	Aristóteles (384-322 a. C)	O fenômeno da queda de corpos
XIV	Nicolas Oresme (1323-1382)	Demonstração do teorema da lei de movimento uniformemente acelerado
XVI-XVII	Galileu Galilei (1564-1642)	Formulação da lei da queda livre dos corpos
	Simon Stevin (1548 – 1620)	Equilíbrio de forças – corrente de Stevin
XVII	Isaac Newton (1664-1665)	Leis de Newton e corolário. Contribuições para o cálculo diferencial e integral e solução de problemas da física
XIX	Caspar Wessel (1745-1818)	Representação dos números complexos como vetores
	Jean Robert Argand (1768-1822)	
	Carl Friend Gauss (1831-1855)	
	William Rowan Hamilton (1805-1865)	Representação dos números complexos como par ordenado de números reais que conduz a estender os números bidimensionais para três dimensões. Introdução da palavra vetor
	Giusto Bellavitis (1803-1880)	Noções e definições básicas de vetor e operações
	Peter Guthrie Tait (1831-1901)	
	Hermann Grassmann (1809-1877)	Expansão do conceito de vetores de 2 dimensões para 3 dimensões
	August Ferdianad Möbius (1827)	Introdução da notação de segmentos orientados como vetores
	William Kingdon Clifford (1845-1879)	Decomposição do produto de dois quatérnios em produto escalar e produto vetorial
XX	Williard Gibbs (1839-1903)	Desenvolvimento da álgebra vetorial atual

Fonte: Produção da autora

No Quadro 4, resumimos os tipos de tarefas identificados nas Geometrias Sintética e Analítica e na Álgebra Linear.

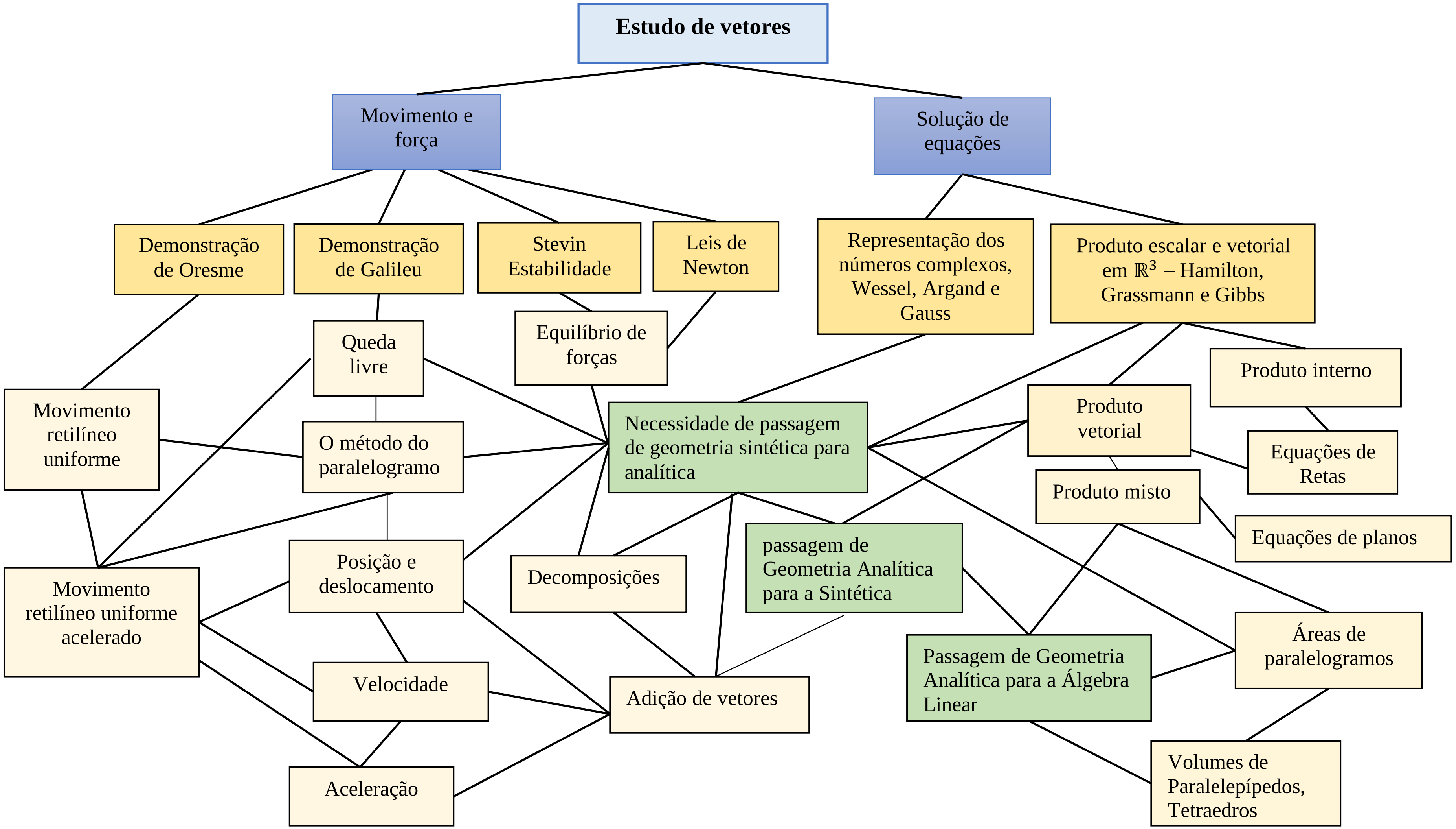
Quadro 4 – Resumos dos tipos de tarefas nos três modelos

Modelo	Tipos de tarefas
Geometria Sintética	T_{GS1}: determinar a velocidade média de um corpo que percorre um espaço em movimento retilíneo uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo. T_{GS2}: calcular o espaço percorrido por um corpo em movimento retilíneo uniforme acelerado durante um intervalo de tempo. T_{GS3}: determinar o espaço percorrido por um corpo em queda livre em um movimento retilíneo uniforme acelerado. T_{GS4}: representar por meio de uma figura a mudança de velocidade que um corpo atinge ao ser liberado de uma determinada altura. T_{GS5}: representar por meio de uma figura as velocidades que um corpo atinge ao partir de uma determinada altura com velocidade horizontal constante, descrevendo uma trajetória semiparabólica. T_{GS6}: identificar e representar por uma figura as forças que atuam, simultaneamente, na corrente de Stevin, para que fique em equilíbrio. T_{GS7}: representar as forças que atuam simultaneamente em um corpo de peso W quando se encontra em equilíbrio como representado na Figura 21. T_{GS8}: determinar a igualdade de vetores. T_{GS9}: representar a adição de vetores na Geometria Sintética. T_{GS10}: representar vetores no espaço na Geometria Sintética.
Geometria Analítica	T_{GA1}: determinar a velocidade de um corpo que está em queda livre depois de um tempo. T_{GA2}: Determinar a distância horizontal (d) que um corpo atinge quando é lançado de uma certa altura (h) com velocidade horizontal constante (v), descrevendo uma trajetória semiparabólica ao atingir o solo. T_{GA3}. determinar a força resultante quando duas forças atuam em um corpo simultaneamente. T_{GA4} : representar geometricamente números complexos em um referencial cartesiano. T_{GA5}: representar números complexos como pares ordenados. T_{GA6}: representar um número complexo em sua forma trigonométrica. T_{GA7}: determinar a igualdade de vetores. T_{GA8}: representar vetores no espaço na geometria analítica. T_{GA9}: representar graficamente a decomposição de um vetor no espaço. T_{GA10}: determinar o produto escalar de dois vetores. T_{GA11}: $d$eterminar a equação da reta no espaço $\mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos A e B. T_{GA12}: $d$eterminar o produto vetorial de dois vetores. T_{GA13}: $d$eterminar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^3$ que contém aos pontos não colineares A, B e $\boldsymbol{C}$. T_{GA14}: calcular a medida do ângulo determinado por dois vetores T_{GA15}: determinar uma expressão matemática para descrever o movimento de um corpo no espaço.
Álgebra Linear	T_{AL1}: determinar o produto vetorial de dois vetores. T_{AL2}: calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores. T_{AL3}: determinar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ que contém os pontos não colineares A, B e $\boldsymbol{C}$. T_{AL4}: determinar o produto misto. T_{AL5}: calcular a medida do volume de um paralelepípedo determinado por três vetores de mesma origem no espaço.

Fonte: Produção da autora

Na Figura 36 esquematizamos as conexões entre as Geometrias e a Álgebra linear encontrada em nosso estudo.

Figura 36 - Razão de ser dos vetores



Fonte: Produção da autora

Na sessão a seguir, apresentamos os modelos em que os vetores têm a razão de ser das tarefas para os tipos de tarefa encontrados na revisão histórica realizada, e que compõem nosso modelo epistemológico de referência.

3.2.2 O Modelo Epistemológico de Referência

Apresentamos o MER como um conjunto de modelos específicos relacionados às Geometrias e a Álgebra Linear consideradas, ou seja, o modelo da Geometria Sintética (GS), o modelo da Geometria Analítica (GA) e o modelo na Álgebra Linear (AL).

3.2.2.1 Modelo na Geometria Sintética

Para o modelo da geometria sintética, apresentamos organizações matemáticas pontuais que permitem o planejamento de organizações matemáticas locais no modelo didático de referência. Para o tipo de tarefa T_{GS1}: *determinar a velocidade média de um corpo que percorre um espaço em movimento retilíneo uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo*, selecionamos a seguinte tarefa.

t_{GS11}: *se um veículo percorre 200 km em movimento retilíneo uniformemente acelerado com velocidade inicial de 20 km/h e final de 90 km/h durante 2 horas, determine sua velocidade média.*

A técnica τ_{GS11} consiste em identificar as velocidades e aplicar o teorema de Merton e, portanto, a velocidade média é determinada pela média aritmética das velocidades inicial e final, ou seja: $v_m = \frac{v_{0+}v_f}{2} = \frac{20+90}{2} = 55$, logo a resposta é 55 km/h.

Se a tarefa envolve movimentos em direções diferentes, ou em duas dimensões, temos a seguinte tarefa: $\boldsymbol{t_{GS12}}$**:** *considerando um veículo que percorre uma distância durante 8 horas com velocidade constante de 30 km/h, determine a distância percorrida e a velocidade média nesse tempo.*

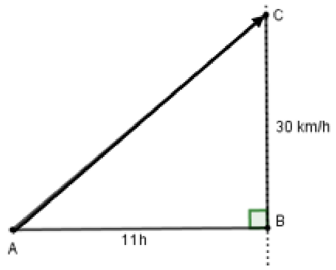
Para resolver essa tarefa, a técnica (baseada em Oresme) consiste em calcular a medida da área de um retângulo com lados medindo 8 e 30 km para concluir que o móvel percorreu uma distância de 340 km.

Essa técnica é justificada pela adição de vetores horizontais e multiplicação de um vetor por um escalar.

Para o tipo de tarefa T_{GS2}: *calcular o espaço percorrido por um corpo em movimento retilíneo uniformemente acelerado durante um intervalo de tempo*; apresentamos a seguinte tarefa: $\boldsymbol{t_{GS21}}$**:** *determinar a distância percorrida por um móvel em movimento retilíneo uniformemente acelerado que tem velocidade inicial 0 e velocidade final de 30 km/h durante 11 horas*.

A técnica para resolver esta tarefa, baseada na lei de Merton, conduz à representação de um segmento para ilustrar o tempo (segmento AB na Figura 37) e traçar, por um de seus extremos, uma reta perpendicular ao segmento, para representar a velocidade final v_f. Assim, $e = \frac{1}{2}v_f t = \frac{30(11)}{2} = 165\ km$. A técnica é justificada pelo produto de um vetor por um escalar.

Figura 37 - Figura para cálculo da distância percorrida

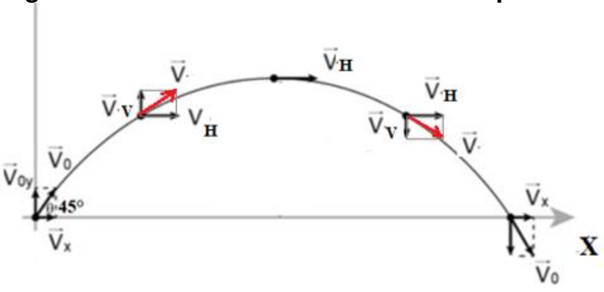


Fonte: Produção da autora

Para o tipo de T_{GS3}: *determinar o espaço percorrido por um corpo em queda livre em um movimento retilíneo uniforme acelerado.* Temos a tarefa t_{GS3}: *Uma pedra é soltada desde uma janela de um edifício e toca o chão 3s depois, determinar o espaço percorrido.* A técnica é utilizando o resultado de Galileu em que pelo efeito da gravidade o espaço percorrido é de forma vertical e determinado pela equação $d = \frac{1}{2}gt^2$, em que a gravidade é $g = 9.8\ m/s^2$, o tempo $t = 3s$, e d é o espaço percorrido. então temos $d = \frac{1}{2}(9.8)(3)^2 = 44.1$. Assim a pedra percorreu 44.1m de altura até chegar ao chão.

A tarefa seguinte agrupa as técnicas das $\boldsymbol{T_{GS4}}$ **e** $\boldsymbol{T_{GS5}}$**,** isto *é,* T_{GS4}*: representar por meio de uma figura a mudança de velocidade que um corpo atinge ao ser liberado de uma determinada altura e* T_{GS5}*: representar por meio de uma figura as velocidades que um corpo atinge ao partir de uma determinada altura com velocidade horizontal constante, descrevendo uma trajetória semiparabólica.* Nesta tarefa consideramos para um a representação por meio de uma figura das mudanças das velocidades em forma geral para um movimento parabólico, assim temos a tarefa: t_{GS4-5}: *uma bola é* *lançada para o chão com uma velocidade de 20 m/s e com um ângulo de 45° em relação ao chão. Descreva e represente graficamente as velocidades que atuam na trajetória até a bola chegar ao chão, como se vê na* Figura 38, que representa um movimento parabólico.

Figura 38 - Velocidades no movimento parabólico



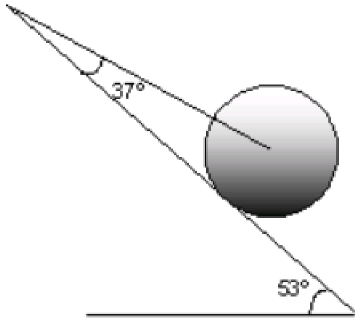
Fonte: Produção da autora

A técnica, neste caso, é de um movimento parabólico, e observa-se que é um movimento composto, com um na direção do eixo horizontal e outro, de eixo vertical. O movimento sobre o eixo horizontal é um movimento com velocidade constante, pelo qual a velocidade inicial v_h se mantém ininterruptamente. Já o movimento no eixo vertical inicia com uma velocidade v_v e que diminui até zero quando o objeto chega à sua altura máxima, e logo novamente se incrementa até chegar ao seu ponto final com uma velocidade com módulo igual ao da velocidade de início. Pode-se observar que o módulo da velocidade nas posições de igual altura são iguais.

A técnica se justifica com a adição (paralelogramo de velocidades) das velocidades horizontal e vertical para determinar a velocidade resultante em cada posição.

Para o tipo de tarefa T_{GS6}: *identificar e representar por uma figura as forças que atuam, simultaneamente, na corrente de Stevin para que fique em equilíbrio*, enunciamos a seguinte tarefa: $\boldsymbol{t_{GS51}}$**:** *para uma bola com peso de 10 quilogramas que está pendurada sobre um plano inclinado rugoso, como mostrado na Figura 39, identifique e desenhe as forças que atuam sobre ela de modo que ela fique em estabilidade*.

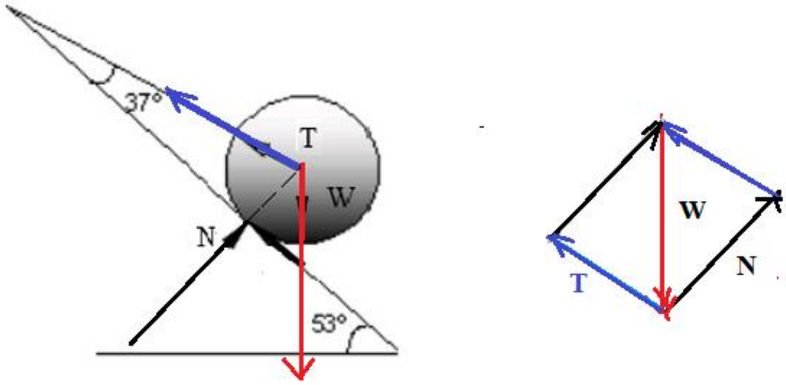
Figura 39 - Movimento de uma bola sobre um plano inclinado



Fonte: Produção da autora

Na Figura 40, podemos identificar o peso da bola exercendo uma força W no sentido vertical, a força de tensão (T) que evita que ela caia, a força de atrito em sentido oposto ao movimento da bola, e a força normal como uma força de reação do plano sobre a bola.

Figura 40 - Forças que atuam sobre uma bola em um plano inclinado



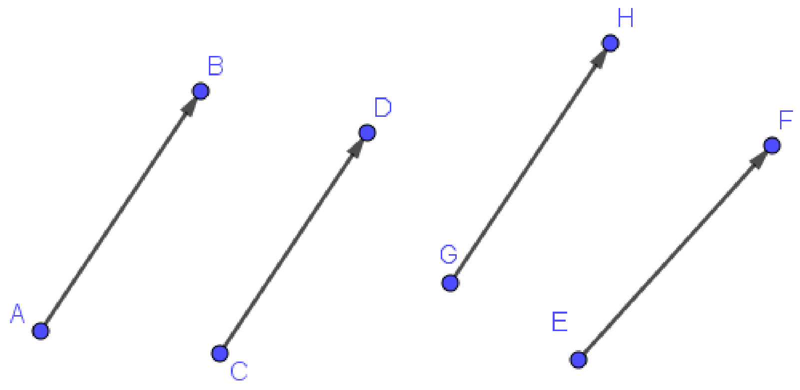
Fonte: Produção da autora

Na técnica para identificar as forças que atuam num corpo que é sujeitado por uma corrente, percebemos que as forças, para estarem em equilíbrio precisam ser somadas (as forças de tensão T e normal N) para darem como resultado uma forma de mesma direção e sentido contrário ao peso W. A técnica é justificada pela regra do paralelogramo de forças.

Para o tipo de tarefa T_{GS7}: *representar as forças que atuam em um corpo simultaneamente e a força resultante*; enunciamos a tarefa $\boldsymbol{t_{GS71}}$**:** *se uma pessoa tem um objeto em uma de suas mãos, qual é a força de reação ao peso do objeto*? A técnica $\boldsymbol{\tau_{GS71}}$ para resolver essa tarefa apela ao corolário das leis de Newton que diz que duas forças, de ação e reação, atuam entre o corpo e o objeto. A reação é a força gravitacional que atua sobre o objeto no sentido do chão, e que tem a mesma magnitude da ação e força do objeto, mas que atuam em sentidos opostos.

Para o tipo de tarefa T_{GS8}: *determinar a igualdade de vetores*, temos a tarefa $\boldsymbol{t_{GS81}}$ **:** *Dada a representação gráfica de quatro vetores no plano na Figura 41(considere cm como unidade de medida), determina se eles som iguais*.

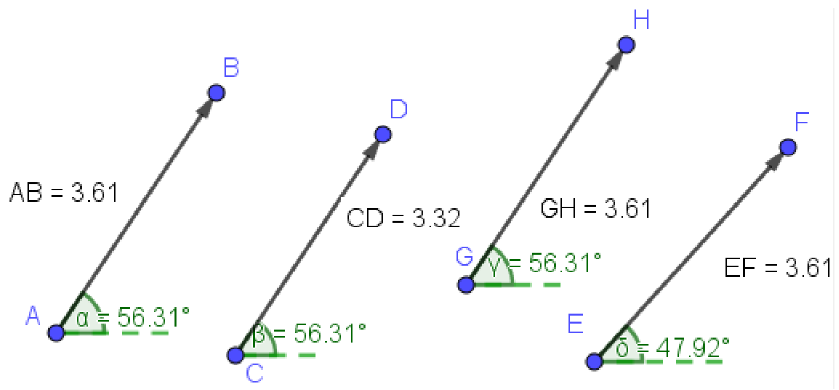
Figura 41-Determinar a igualdade de vetores



Fonte: Produção da autora

Como na GS considera o vetor como segmento orientado, a técnica de solução para esta tarefa consiste em determinar a medida de cada segmento e seu ângulo de cada vetor com respeito a uma linha horizontal como se mostra na Figura 42. Depois de medir (com régua e compasso) temos: AB mede 3,61cm e um ângulo de 56.31°, CD mede 3.32cm e 56.81°, GH mede 3.61cm e 56.31° e EF mede 3.61cm e 47.92°. Portanto, são iguais os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{GH}$.

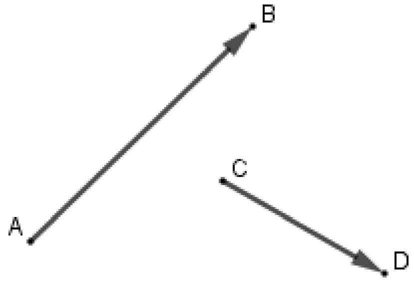
Figura 42 – Medida de segmentos e ângulos



Fonte: Produção da autora

Para o tipo de tarefa T_{GS9}: representar a adição de vetores na Geometria Sintética, consideramos a tarefa $\boldsymbol{t_{GS91}}$**:** Dados os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ na Figura 43, determinar a adição pelo método gráfico.

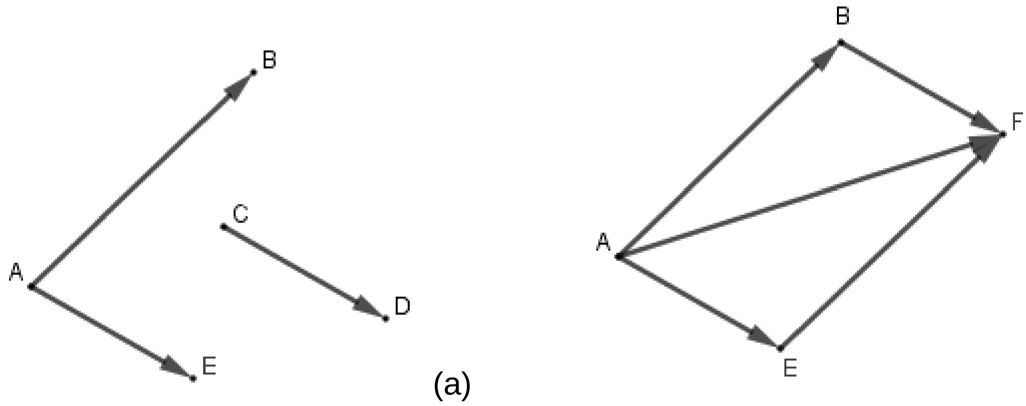
Figura 43 – Vetores no plano



Fonte: Produção da autora

A técnica de solução é utilizando o método do paralelogramo, que consiste em traçar os vetores a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, de modo que suas origens coincidam em um mesmo ponto, ou seja, traçar o vetor $\overrightarrow{AE}$ representante do vetor $\overrightarrow{CD}$. Depois traçamos os vetores paralelos $\overrightarrow{BF}$ e$\overrightarrow{EF}$ para construir o paralelogramo. A adição dos vetores será o vetor $\overrightarrow{AF}$ na diagonal do paralelogramo como se mostra na Figura 44(a) e (b).

Figura 44 – Adição de vetores na GS



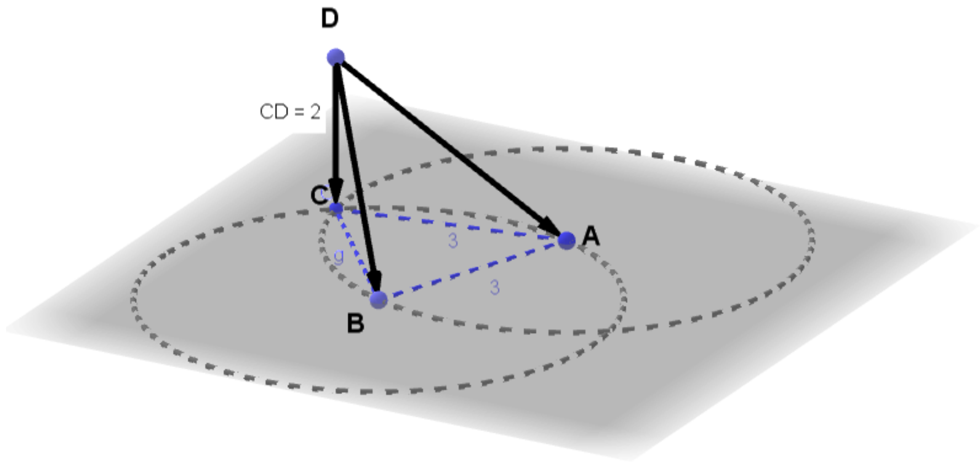
(a) (b)

Fonte: Produção da autora

Para o tipo de tarefa T_{GS10}: *representar vetores no espaço na Geometria Sintética*, consideramos a tarefa $\mathrm{t}_{\mathrm{GS}101}$: *sejam A, B e C pontos contidos no plano P, os quais têm a distância de 3cm entre eles, além disso, se tem o ponto D a 2cm de distância acima do ponto C. Representar graficamente todos os vetores que iniciam no ponto D.*

A técnica para a solução da tarefa inicia em determinar os pontos A, B e C no plano distantes um do outro em 3cm. Para isso, determinado o ponto A e, com ajuda de um compasso, traçamos a circunferência de centro A e raio 3cm e nela determinamos um ponto B. Com centro em B traçamos uma circunferência que passa pelo ponto A, que determina, em uma das intersecções das duas circunferências, o ponto C. Em seguida determinamos o ponto D, fora do plano a 2 cm do ponto C e os vetores $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$ como se mostra na Figura 45.

Figura 45 – Representação de vetores no espaço na GS

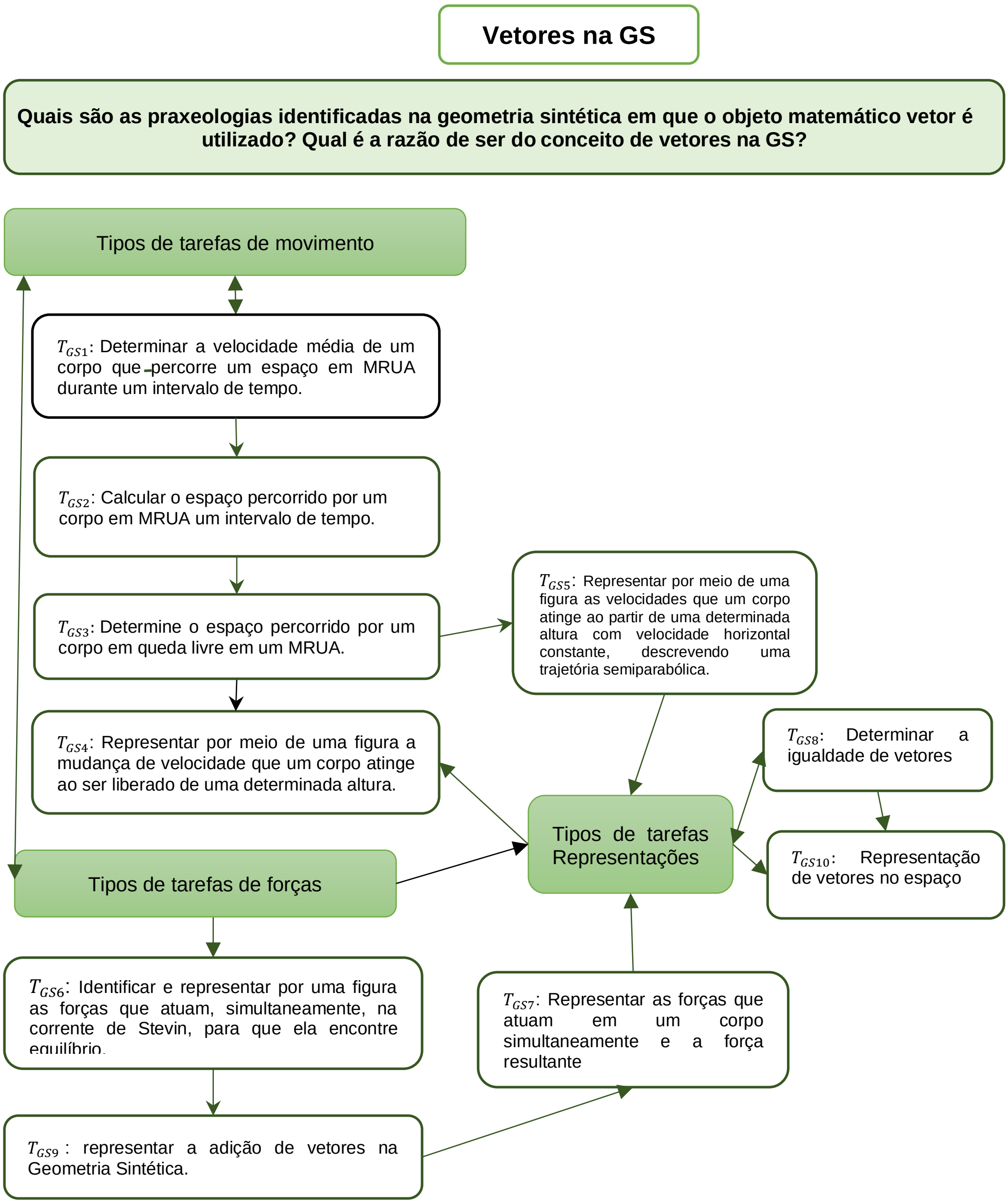


Fonte Produção da autora

De acordo com o observado na revisão das tarefas através do tempo, mais especificamente, a respeito do movimento retilíneo uniforme e uniformemente variado (queda livre) e o movimento parabólico assim como os problemas de equilíbrio de forças e suas representações, pode-se concluir que a noção de vetor estava presente nos estudos dos fenômenos físicos e, de forma simultânea, na matemática, observa-se a noção de vetor como representação de um segmento orientado, com a operação de adição pelo método do paralelogramo e o produto de um vetor por um escalar.

Os tipos de tarefas encontradas, por exemplo, nos movimentos semiparabólico e parabólico, apresentam a necessidade de identificarmos dois movimentos simultaneamente, onde o tempo é comum para os dois, isto é, a velocidade horizontal e vertical, que mostram uma das razões de ser dos vetores. Na Figura 46 apresentamos um resumo dos tipos de tarefas encontrados e suas conexões.

Figura 46 - Esquema para os tipos de tarefas de vetor na Geometria Sintética



Fonte: Produção da autora

No decorrer do tempo, com o avanço dos estudos e a criação de novas ferramentas matemáticas para resolver e justificar diferentes tipos de tarefas, foi necessário estabelecer um sistema referencial por coordenadas cartesianas para o plano e espaço.

3.2.2.2 Modelo na Geometria Analítica

Da mesma forma que no modelo anterior, para o modelo da Geometria Analítica apresentamos organizações matemáticas pontuais que permitem o planejamento de organizações matemáticas locais.

Para o segundo tipo de tarefa da Geometria Analítica, T_{GA1}: *determinar a velocidade de um corpo em queda livre depois de um tempo*, consideramos o contexto da tarefa anterior para enunciar a tarefa: t_{GA21}: *determine a velocidade para um tempo t*. Para responder à tarefa, consideramos o ponto $P(x,y)$ que descreve a trajetória pelos resultados de Galileu e temos $e = vt$ e, então, temos que o vetor velocidade é

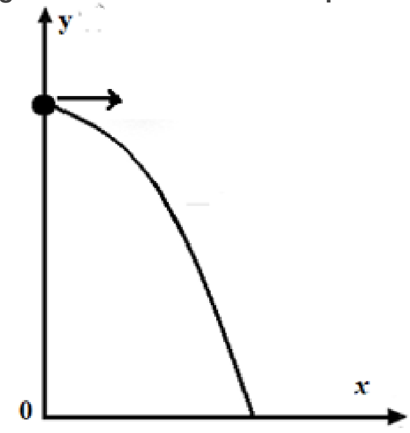
$\vec{v} = (\frac{x}{t}, \frac{y}{t})$=(22, 9,8t) para $t < 3.162s$.

O tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{GA2}}$: *Determinar a distância horizontal (d) que um corpo atinge quando é lançado de uma certa altura (h) com velocidade horizontal constante (v), descrevendo uma trajetória semiparabólica ao atingir o solo.* Enunciamos a tarefa t_{GA11}: *se uma bola é lançada da torre de Pisa com uma velocidade horizontal de 22 m/s e a uma altura de 49 metros do chão, qual a distância d em relação à base da torre que a bola ao cair?* A técnica para resolver esta tarefa consiste em considerar uma representação em um referencial cartesiano para a trajetória do corpo. Descreve-se um movimento semiparabólico, baseado nos resultados de Galileu, considerando a aceleração vertical constante, neste caso, a gravidade g. A coordenada na direção vertical é dada por $y = y_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$, enquanto a velocidade inicial vertical é $v_{oy} = 0$ e a altura inicial é $y_o = 49\ m$; então fazendo as devidas substituições, temos

$0 = 49 + 0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$, de onde $t = \sqrt{\frac{2(49)}{9,81}} = 3,162$.

Por outro lado, a velocidade que descreve o movimento na direção do horizontal (Figura 47) cumpre a fórmula $x = v_0 t$ que conduz a $d = (22)(3,162) = 70$. Deste modo, a bola cai no chão a 70 m do ponto diretamente abaixo do ponto do lançamento.

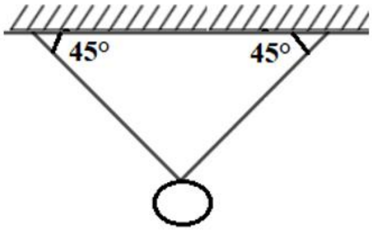
Figura 47 - Movimento semiparabólico



Fonte: Produção da autora

Para o tipo de tarefa T_{GA3}: *determinar a força resultante quando duas forças atuam em um corpo simultaneamente, incluindo uma figura,* apresentamos a tarefa $\boldsymbol{t_{GA31}}$*: um corpo está pendurado por duas cordas fixadas em um teto que formam 45°, como representado na Figura 48. Identifique as forças e determine a força resultante*.

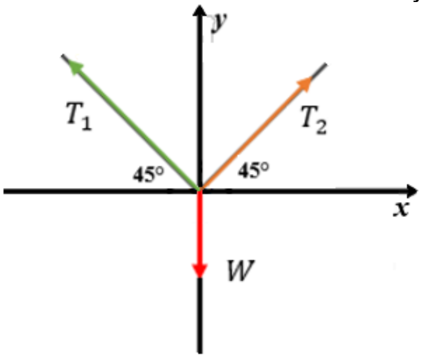
Figura 48 - Forças que atuam sobre um corpo



Fonte: Produção da autora

A técnica que resolve essa tarefa consiste em identificar que, na situação, acima do corpo atuam duas forças de tensão T1 e T2 que correspondem a cada uma das cordas que puxam o corpo e, por outro lado, o peso W dele. Para sua representação gráfica correspondente, geralmente coloca-se um sistema de referência sobre o corpo, se ditas forças, mostrando os ângulos que formam com os eixos (neste caso, as tensões que formam 45° com o eixo horizontal) e, por outro lado, o peso, que é vertical. Assim as forças são: $\vec{T}_1 = T_1(-cos\,45°, sen\,45°)$, $\vec{T}_2 = T_2(cos\,45°, sen\,45°)$ e $\vec{W} = W(0,-1)$ (Figura 49).

Figura 49 - Representação em referencial cartesiano de forças sobre um corpo



Fonte: Produção da autora

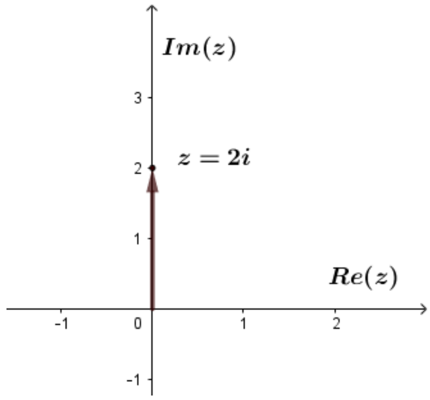
A força resultante é representada pelo vetor

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{W} = (-T_1 cos 45° + T_2 \cos 45°, T_1 sen 45° + T_2 sen 45° - W)).$$

Para o tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{GA4}}$: *representar geometricamente números complexos em um referencial cartesiano*, apresentamos a tarefa $\boldsymbol{t_{GA41}}$: *representar graficamente o número* $\sqrt[2]{-4}$**.**

Na técnica, para representar um número complexo deve-se identificar a parte imaginária e a parte real. Neste caso, temos $\sqrt[2]{-4} = 2i$, que é um número chamado imaginário puro que tem uma representação, no eixo vertical, como um segmento orientado que inicia na origem do eixo de coordenadas, e cujo ponto final é (0,2), como se mostra na Figura 50.

Figura 50 - Representação de um número imaginário puro



Fonte: Produção da autora.

$\boldsymbol{T_{GA5}}$: *representar os números complexos como pares,* a tarefas considerada é:

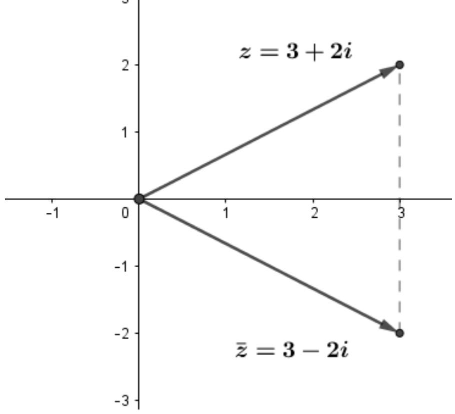
$\boldsymbol{t_{GA51}}$: *escrever o número 1+2i como par*.

Na técnica, um número complexo z=1+2i é associado ao vetor (1, 2).

Para a tarefa $\boldsymbol{t_{GA52}}$: representar graficamente o número 3+2i e seu conjugado.

A técnica é associar ao número z=3+2i o par (3, 2) e desenhar no plano cartesiano o segmento orientado com início na origem dos eixos de coordenadas e com extremidade no ponto (3, 2), conforme representado na Figura 45. Ao conjugado z= 3-2i do número complexo associa-se o ponto (3, -2) representado conforme a Figura 51.

Figura 51 - Representação de um número complexo e seu conjugado



Fonte: Produção da autora.

Tarefa $\boldsymbol{t_{GA52}}$**:** *representar graficamente o número* $5 + 2i$ *e seu conjugado.*

Para cumprir esta tarefa, utilizamos uma técnica que consiste em encontrar a forma binomial do número complexo, isto é, a parte real e a parte imaginária. Outra técnica consiste em encontrar o módulo e o ângulo, mas utilizando razões trigonométricas.

O tipo de tarefa T_{GA6}: *representar um número complexo em sua forma trigonométrica*, apresenta a tarefa t_{GA6}: *Escrever o número complexo* $z = \sqrt{3} + i$ *na forma trigonométrica*. A técnica é encontrar o módulo e o ângulo, $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1} = 2$ e ângulo $\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$ ou $\theta = \frac{\pi}{6}$ de modo que o número podemos representar como $z = 2(\cos 30° + isen30°)$ ou $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6})$

Para a tarefa T_{GA7}: *determinar a igualdade de vetores*, a tarefa considerada é $\boldsymbol{t_{GA71}}$**:** *com* $\vec{u} = (s, 4, 1)$ e $\vec{v} = (1, 7 - t, 1)$ sendo *dois vetores em* $\mathbb{R}^3$, *determine os parâmetros* t *e* s *para que os vetores v e u sejam iguais*. Esta tarefa permite identificar os vetores que são denominados livres e ajudam na resolução de problemas de localização em duas e três dimensões na GA. A técnica $\boldsymbol{\tau_{GA71}}$ é a utilização das propriedades da igualdade de vetores, isto é, dois vetores, $\vec{u}$, $\vec{v}$, são iguais se, e somente se, as componentes são iguais, ou seja, $(s, 4,1) = (1,7 - t, 1)$, então, $s = 1$ e $4 = 7 - t$ o que implica que $t = 3$.

O tipo de tarefa a seguir é T_{GA8}: *representar os vetores no espaço na Geometria Analítica*, e tem como tarefa, por exemplo, $\boldsymbol{t_{GA81}}$: *determine a posição de um avião no espaço no meio de um voo de um aeroporto a outro*. As coordenadas da localização de um avião com respeito a um aeroporto (como origem de coordenada) também pode ser decomposta em suas coordenadas de voo.

Também se tem a tarefa $\boldsymbol{t_{GA82}}$**:** *representar e determinar o deslocamento de uma pessoa que vai de uma cidade A para outra B, em direção norte e com velocidade constante de 60km/h durante 2 horas, e que depois continua de B para C em direção N45°E com a mesma velocidade durante uma hora.* A técnica é estabelecer um sistema de referência no plano com ponto de início A, depois determinar o comprimento ($e = vt$) da distância entre as cidades A e B. Neste caso particular, conforme a pessoa se move de A para B na direção norte, e considerando o sistema de referência no plano, a resposta seria (0,60(2)).

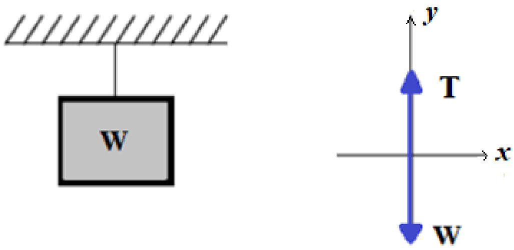
Para o deslocamento da cidade B para a cidade C, considerando a direção N45°L, temos então suas componentes horizontal e vertical, ou seja $(60(1) \cdot cos45°, 60(1) \cdot sen45°) = \left(\frac{60}{\sqrt{2}}, \frac{60}{\sqrt{2}}\right) = \left(30\sqrt{2}, 30\sqrt{2}\right)$. Finalmente, adiciona-se o deslocamento de A a B e de B a C, o que nos dá

$$(0, 120) + \left(30\sqrt{2}, 30\sqrt{2}\right) = \left(30\sqrt{2}, 120 + 30\sqrt{2}\right).$$

O tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{GA9}}$: *representar graficamente a decomposição de um vetor no espaço,* apresenta a tarefa $\boldsymbol{t_{GA91}}$: *identificar as forças que atuam num objeto de massa 15 kg que está pendurado no teto.*

Para responder a tarefa, temos a técnica: identificar as forças que participam para que o corpo fique suspenso, como representado na Figura 52, em que o corpo tem um peso de 15 kg que está sendo afetado pela gravidade da terra, que é um vetor vertical no sentido do chão, isto é, $\vec{g} = (0, -9{,}8) m/s^2$. Então, existe a força do peso que é resultado do produto da gravidade e da massa, $\vec{W} = m\vec{g}$. Logo, o vetor peso é $\vec{W} = 15\ \vec{g} = (0, -147)$, pelo produto de um escalar e um vetor.

Figura 52 - Decomposição de forças



Fonte: Produção da autora

Para que o corpo esteja suspenso por uma corrente, ele também exerce uma força em direção oposta à força de gravidade denominada tensão $\vec{T}$= (0, T), em que T é o módulo do vetor tensão, e à força do peso $\vec{W}$.

Para o tipo de tarefa T_{GA10}: *determinar o produto escalar de dois vetores.*, tomamos como exemplo temos a tarefa $\boldsymbol{t_{GA81}}$**:** *dados os vetores* $\vec{u}$ =(2, 3, 5) *e* $\vec{v} = (-1, 2, 5)$, *determine o produto escalar.* A técnica $\boldsymbol{\tau_{GA10-1}}$ é aplicar a definição de produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3, 5)(-1, 2, 5) = -2 + 6 + 25 = 29$. Podem surgir mais tarefas em que se aplica o produto escalar, por exemplo, tarefa $\boldsymbol{t_{GA10-2}}$**:** *dados os* *vetores* $\vec{u} = (2,3,5)$ *e* $\vec{v} = (-1,2,5)$, *encontrar a projeção do vetor* $\vec{u}$, *sobre* $\vec{v}$. Também como técnica utiliza-se a definição do produto escalar.

O tipo de tarefa T_{GA11}: *determinar a equação da reta no espaço* $\mathbb{R}^3$ *que passa pelos pontos* A *e* B, apresenta a tarefa t_{GA11-1}: *Determine a equação da reta que passa pelos pontos* $A(1,3,5)$ *e* $B(2,0,1)$. A técnica que permite resolver a tarefa é considerar um ponto genérico P de coordenadas (x,y,x) de modo que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$. A igualdade podemos escrever como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{AB}$, então $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, o que implica que

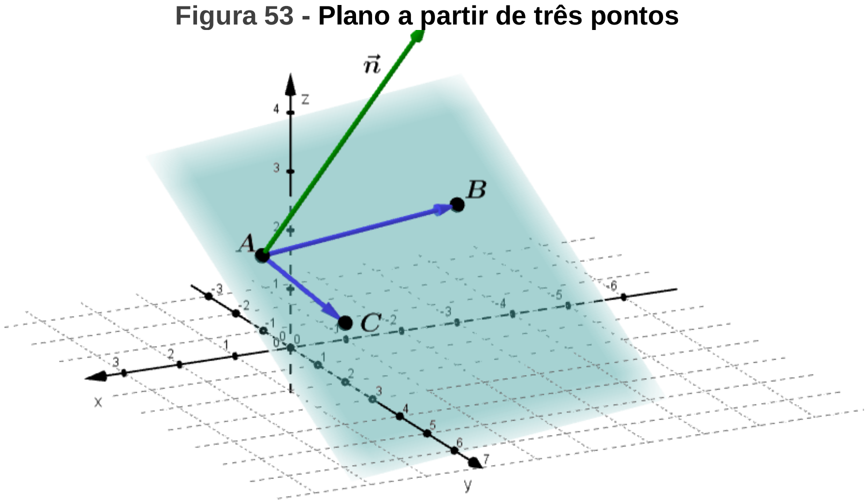
$$(x,y,z) = (1,3,5) + t(1,-3,-4) \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Para o tipo de tarefa T_{GA12}: *para os vetores no espaço, determinar o produto vetorial*, entre as tarefas temos $\boldsymbol{t_{GA12-1}}$: *dados os vetores* $\vec{u} = (2,3,5)$ *e* $\vec{v} = (-1,2,5)$ *determine o produto vetorial.* A técnica é aplicar a definição

$$\vec{u} \times \vec{v} = (5,-15,1).$$

O tipo de tarefa T_{GA13}: determinar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^3$ que contém aos pontos não colineares A, B e $\boldsymbol{C}$, apresenta como tarefa $\boldsymbol{t_{GA13-1}}$: *dados os pontos* $A(1,1\ 2)$, $B(-3,0\ 2)$ e $C(0,2,1)$ *determine a equação cartesiana do plano que os contêm*. Esta tarefa pode ser cumprida utilizando-se duas técnicas: Na técnica $\boldsymbol{\tau_{GA92}}$ justificada pela tecnologia de produto vetorial e produto escalar, primeiro determinamos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pelas suas coordenadas: $\overrightarrow{AB} = (-4,-1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,1,-1)$ (Figura 53). Depois calculamos o vetor normal que é definido pelo produto vetorial $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (1,-4,5)$.

Figura 53 - Plano a partir de três pontos



Fonte: Produção da autora

Em seguida, consideramos um ponto $P = (x, y, z)$ arbitrário do plano. Temos, então, o produto escalar $\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$. Temos que

$(1, -4,\ 5).\left((x,\ y,\ x) - (1,\ 1,\ 2)\right) = 0$, de onde $(1, -4,\ 5).(x - 1,\ y - 1,\ z - 2) = 0$. Assim, a equação cartesiana do plano é $x - 4y + 5\,z = -13$.

A segunda técnica, $\boldsymbol{\tau''_{GA13-2}}$, apoia-se na tecnologia de adição de vetores e do produto de um vetor por um escalar. Seja P_0 um ponto e $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores tais que

$\overrightarrow{P_0P} = r\vec{a} + t\vec{b}, \quad r, t \epsilon \mathbb{R}$, e com$P(x, y, z)$ sendo um ponto genérico. Consideramos três pontos A, B e C e se, por exemplo, $P_0 = A$, temos $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{AP} = (x - 1,\ y - 1, z - 2)$. Agora, para os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos considerar

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-3 - 1, 0 - 1, 2 - 2) = (-4, -1, 0)$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (0 - 1, 2 - 1, 1 - 2) = (-1, 1, -1)$. Assim, a equação do plano fica

$(x - 1, y - 1, z - 2) = r(-4, -1, 0) + t(-1, 1, -1), \quad r, t\epsilon\mathbb{R}$, ou seja, $(x, y, z) = (1, 1, 2) + r(-4, -1, 0) + t(-1, 1, -1), \quad r, t\epsilon\mathbb{R}$.

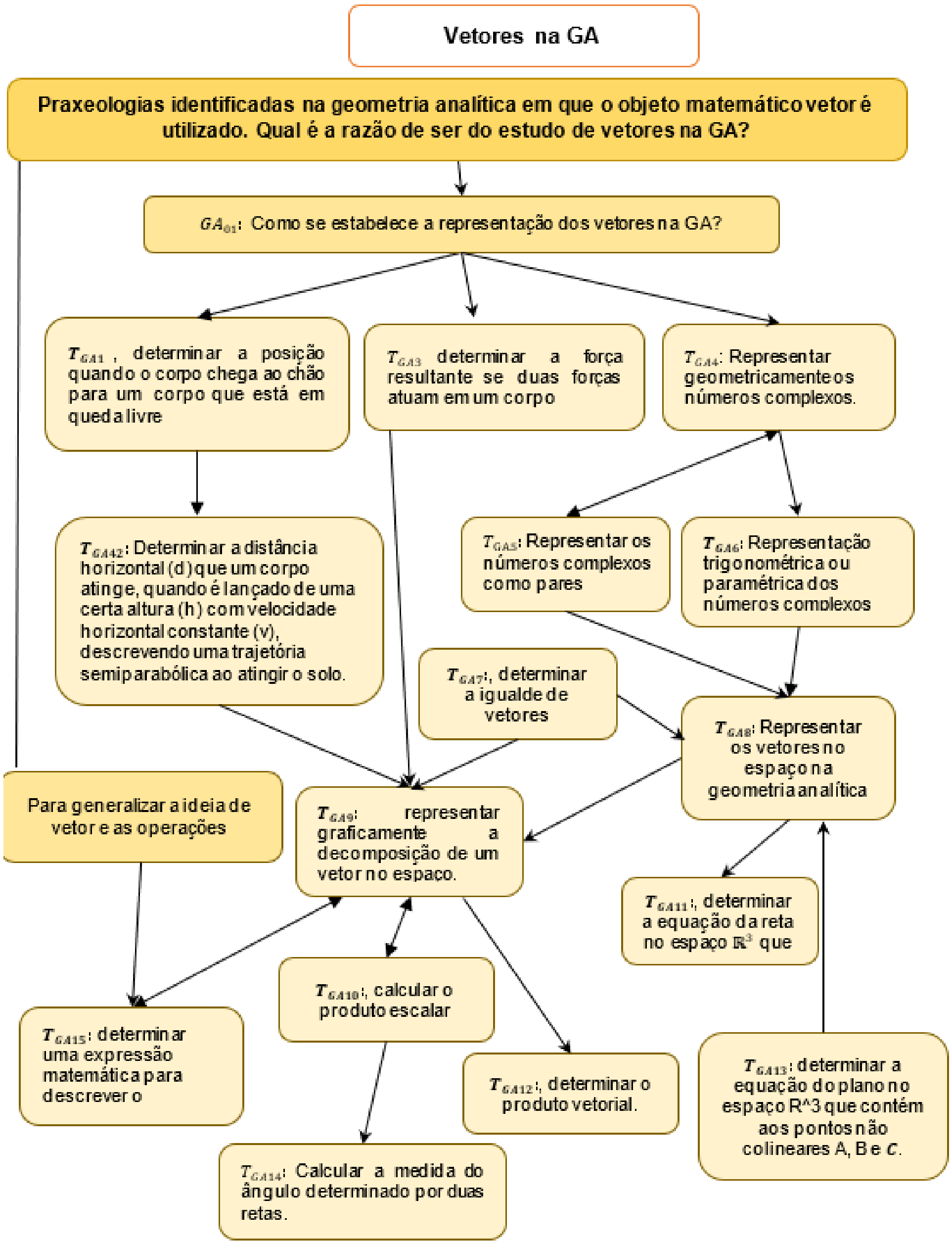
Em seguida, encontramos duas formas de processo de solução. Uma, por um lado, considerando um ponto P_0 e o vetor normal e, outra, por outro lado, considerando os vetores de direção $\vec{a}$ e $\vec{b}$.) Podemos observar que a tarefa apresenta duas técnicas, $\boldsymbol{\tau'_{GA13=1}}$, $\boldsymbol{\tau''_{GA13=2}}$ **,** com tecnologias diferentes, ambas conformando uma OML.

Na resolução de tarefas em GA, as coordenadas são estabelecidas em um mapa que desempenha o papel de sistema de coordenadas e ali realizamos a representação do vetor. Para a representação no espaço de um vetor, temos o seguinte tipo de tarefa:

Nos tipos de tarefa $\boldsymbol{T_{GA14}}$: *calcular a medida do ângulo determinado por duas retas* apresentamos o seguinte exemplo: $\boldsymbol{t_{GA14-1}}$**:** *calcular a medida do ângulo entre o eixo das abscissas e a reta* $r = (2, 1, 0) + t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Considerando o vetor diretor da reta (1, 1, 1), o vetor unitário na direção do eixo das abscissas (1, 0, 0) e utilizando propriedades de produto escalar podemos encontrar o cosseno do ângulo formado pelos vetores, isto é, $(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 0) = \sqrt{3}\ \cos(\alpha)$. Logo, se $1 = \sqrt{3}\ \cos(\alpha)$ então $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\alpha = \text{arccos}\ (\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Para o tipo de tarefa T_{GA15}: *determinar uma expressão matemática para descrever o movimento de um corpo no espaço*, escolhemos a tarefa t_{GA15-1}: *uma partícula em movimento parte de uma posição inicial* $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ *com velocidade* $\vec{v}(0) = (1, -1, 1)$ *em m/s. Determine a posição final depois de 5 minutos com aceleração constante.* Para resolver esta tarefa, tem-se as ideias de Euclides $\vec{r}(t) = (1,0,0) + t(1,-1,1) = (1 + t, -t, t)$ de modo que, depois de 5 segundos, a posição é $\vec{r}(5) = (6, -5,5)$. Podem surgir mais tarefas se a aceleração for variada e incluir outras técnicas de cálculo.

Figura 54 - Tipos de tarefa a respeito de vetores na Geometria Analítica



Fonte: Produção da autora

Na Figura 54 apresentamos um resumo das questões relacionadas à Geometria Analítica, que fazem parte do nosso MGA, e nela mostramos tipos de tarefas e tarefas em que a GA permite obter uma solução por componentes dos vetores, não apenas uma representação gráfica, além de equações algébricas como no caso da reta ou do plano.

Na seção seguinte, apresentamos as tarefas em que as operações de produto vetorial e produto misto podem fazer uso de elementos na AL.

3.2.2.3 Modelo na Álgebra Linear

Para o modelo na álgebra linear apresentamos organizações matemáticas pontuais que permitirão o planejamento de organizações matemáticas locais no modelo didático de referência.

Para o tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{AL1}}$: *determinar o produto vetorial de dois vetores.* Temos a tarefa $\boldsymbol{t_{AL11}}$**:** *determine um vector perpendicular à reta representada pela equação* $L_1 = \{r \mid r = t(1,2,4),\ t \in \mathbb{R}\}$ e $L_2 = \{r \mid r = s(-1,0,1),\ s \in \mathbb{R}\}$. Para resolver a tarefa a técnica é o produto vetorial. Denotemos por $\vec{u} = (1,2,4)$ e $\vec{v} = (-1,0,1)$ e, para calcularmos o produto desses dois vetores, utilizamos a seguinte técnica de determinante: $\vec{u} \times \vec{v} = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2i + 2j - 3k = (2,2,-3)$ e assim o vetor é $(2,2,-3)$.

Considerando o tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{AL2}}$: *calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores*, temos a tarefa: $\boldsymbol{t_{AL21}}$**:** *calcular a medida de área de um paralelogramo determinado pelos vetores* $\vec{u} = (3,2,1)$ *e* $\vec{v} = (-2,1,-1)$. Para calcular a medida da área na técnica $\boldsymbol{\tau_{AL2}}$, encontramos o produto vetorial de vetores $\vec{u} \times \vec{v} = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -3i + 1j - 7k = (-3,1,-7)$. Então, a medida da área é $\|(-3,1,-7)\| = \sqrt{59}$.

Para o tipo de tarefa T_{AL3}: determinar a equação do plano no espaço $\mathbb{R}^3$ que contém aos pontos não colineares A, B e $\boldsymbol{C}$, apresenta como tarefa $\boldsymbol{t_{AL31}}$**:** *dados os pontos* $A(1,1\ 2)$, $B(-3,0\ 2)$ e $C(0,2,1)$ *determine a equação cartesiana do plano que os contêm*. Esta tarefa pode ser cumprida utilizando-se duas técnicas: Na técnica

$\boldsymbol{\tau_{AL31}}$ justificada pela tecnologia de produto vetorial e produto escalar, primeiro determinamos os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pelas suas coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -1, 0) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1).$$

Depois calculamos o vetor normal que é definido como $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, que se pode utilizar elementos da AL, como o processo determinante de matrizes de ordem 2x2 é a ideia de 3x3 (uma técnica prática).

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (1, -4, 5)$$

Considerando um ponto $P = (x, y, z)$ arbitrário do plano. Temos, então, o produto escalar $\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$. Temos que $(1, -4,\ 5).\left((x,\ y,\ x) - (1,\ 1,\ 2)\right) = 0$, de onde $(1, -4,\ 5).(x - 1,\ y - 1,\ z - 2) = 0$. Assim, a equação cartesiana do plano é $x - 4y + 5\,z = -13$.

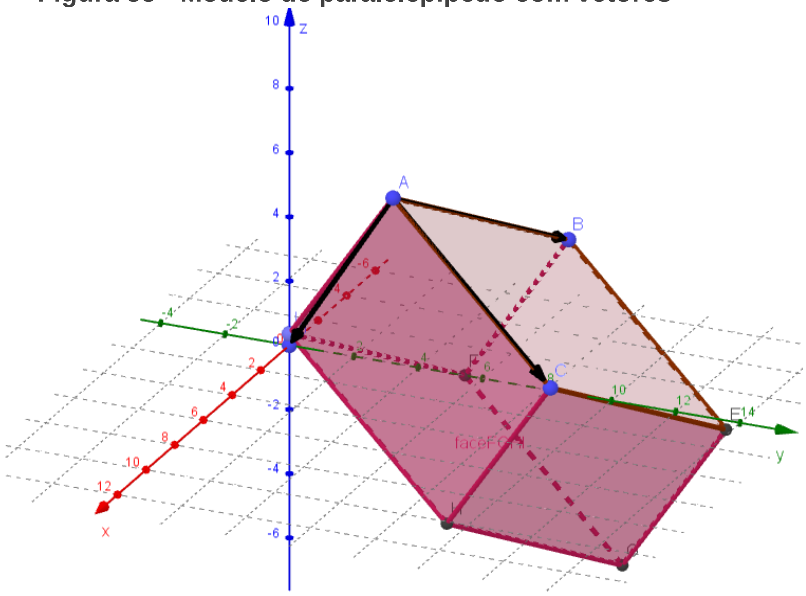
Para o tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{AL4}}$: *determinar o produto misto*, tomamos como exemplo a tarefa: $\boldsymbol{t_{AL41}}$**:** *determinar que o produto misto* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *de vetores* $\vec{u} = (1, 2{,}3)$, $\vec{v} = (0{,}1{,}4)$, e $\vec{w} = (-2, 1, 0)$ (com " $\times$ " denotando o produto vetorial e "$\cdot$" o produto escalar). A técnica $\boldsymbol{\tau'_{AL41}}$é aplicar a definição de produto misto então $\vec{u} \cdot [\vec{v} \times \vec{w}] = (1, 2{,}3) \cdot [(0{,}1{,}4) \times (-2, 1, 0)] \cdot= (1, 2{,}3) \cdot (-4, -8{,}2) = -14$. Também podemos calcular utilizando elementos de AL, isto, com a técnica $\boldsymbol{\tau''_{AL31}}$ com o determinante de uma matriz, como segue:

$$\vec{u} \cdot [\vec{v} \times \vec{w}] = det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -16 - (-6 + 4) = -14.$$

Para o tipo de tarefa $\boldsymbol{T_{AL5}}$: *calcular a medida do volume de um paralelepípedo, conhecendo seus quatro vértices.* Para esse tipo podemos ter a tarefa $\boldsymbol{t_{AL41}}$: *calcular a medida do volume de um paralelepípedo com vértices nos pontos* $A(4, 5, 7)$, $B(-6, 6, 2)$ e $C(2, 9, 1)$ *e D que está no eixo das ordenadas a 5 unidades da origem e arestas* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$. *Represente graficamente esse paralelepípedo.*

A técnica $\boldsymbol{\tau'_{AL51}}$ para resolver esta tarefa usamos o produto misto $\overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)$ considerando $\overrightarrow{AB} = (-10, 1, -5)$ e $\overrightarrow{AC} = (-2, 4, -6)$, $\overrightarrow{AD} = (-4, 0, -7)$ que podem ser vistos na Figura 55. A medida do volume é calculada por: $\left|\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right| = det\begin{pmatrix}-4 & 0 & -7\\ -10 & 1 & -5\\ -2 & 4 & -6\end{pmatrix} = \left(-4(14)-0+7(38)\right) = 210.$ Depois determinar o valor absoluto de esse número. Assim, a medida do volume é $210u^3$.

Figura 55 - Modelo de paralelepípedo com vetores

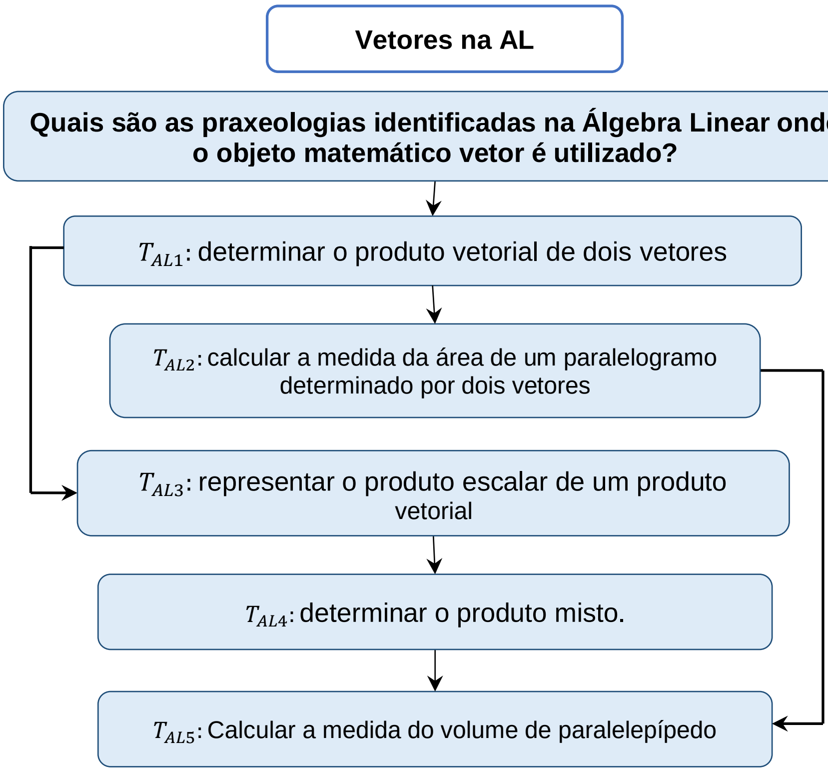


Fonte: Produção da autora

Outra técnica $\boldsymbol{\tau''_{AL51}}$ para a tarefa é considerar o volume como o produto da medida da área da base e a medida da altura. Para determinar a medida da área da base da pirâmide utilizamos o módulo $\left|\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\| sen\theta\right|$ e, para a altura, utilizamos a projeção AD com respeito a $\vec{u}\times\vec{v}$. Para resolver o tipo de tarefa de encontrar a medida de volume, como no paralelepípedo, podemos utilizar tecnologias da Geometria Analítica (GA) ou elementos de Álgebra Linear (AL), o que nos permite ter dois tipos de técnicas, o que admite a existência de organizações matemáticas locais.

A Álgebra Linear permite dar solução a tipos de tarefa considerando propriedades tais como determinantes de matrizes e combinação linear, o que mostra a razão de ser dos vetores na AL. As tarefas apresentadas permitem observar as organizações matemáticas pontuais e até locais, como na tarefa “determinar a equação do plano”. O esquema da Figura 56 mostra as questões que formam parte de MAL.

Figura 56 - Mapa de tipos de tarefas na Álgebra Linear



Fonte: Produção da autora

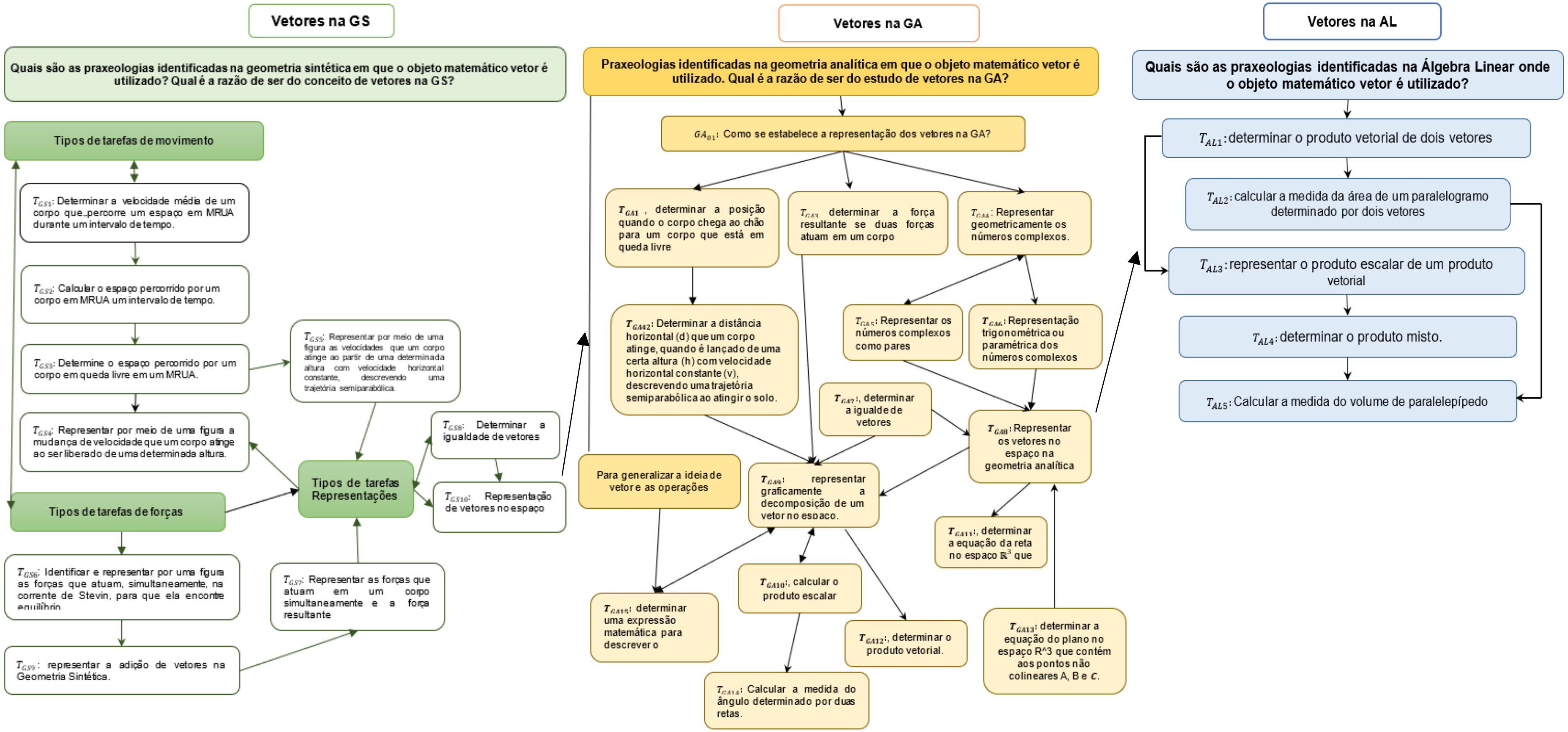
A instauração do vetor deu início ao cálculo vetorial, à análise vetorial e ao cálculo multivariado, que são campos da matemática para análises vetoriais multivariáveis reais em duas ou mais dimensões, e são uma abordagem da Geometria Diferencial, como um conjunto de fórmulas e técnicas para resolver problemas da engenharia e da física. Os tipos de tarefas identificados na física (movimento e equilíbrio de força) que inicialmente foram resolvidas com elementos da GS e com a ideia de vetor, isto é, foram explicadas no MGS, depois da construção e instauração dos vetores na GA, passam a ter um tratamento vetorial, no MGA, e que também pode ser resolvido com operações dentro da AL, no MAL. No Quadro 5, descrevemos algumas dessas operações e, na Figura 57, as diferentes tarefas e suas articulações.

Quadro 5 – Resumo de descrições e articulações a luz do MER

MGS	MGA	MAL
Permite representar com régua e compasso, realizar operações. Exemplo: o método do paralelogramo.	Permite sua decomposição	Permite um tratamento matricial e com propriedades da álgebra linear,
Não permite a localização precisa no espaço e mais dimensões	Depende do sistema de referência.	Depende do conjunto em que está definido.

Fonte: Produção da autora

Figura 57 - Esquema para o Modelo Epistemológico de Referência



Fonte: Produção da autora

Conclusões deste estudo

No estudo da dimensão epistemológica, construímos esquemas para os três modelos em que o objeto matemático vetor foi formalizado. Também tratamos de como eles ajudaram na resolução de problemas que envolvem vetores, explicitando a razão de ser em cada um dos modelos estudados GS, GA e AL bem como suas relações com outras áreas e conteúdos matemáticos. Podemos observar que na construção de MGS, os tipos de tarefas estão relacionados com problemas de Física como o movimento e a estabilidade de forças – o que deu origem à definição da regra do paralelogramo de velocidades na Mecânica com as leis de Newton a respeito de força. Portanto, no esquema, podemos ver objetos da Física que têm ligações com a mecânica que se desenvolveu baseada em vetores.

No início de nosso estudo, só se justificava o uso da noção de vetor com experimentos e as descrições correspondentes, por exemplo, a utilização dos paralelogramos de velocidade e equilíbrio das forças, o que permite identificar a utilização de ferramentas da GS, particularmente, utilizando os postulados de Euclides, podemos reescrevê-los em ternos vetoriais, considerando o vetor como um segmento orientado, o qual constitui nosso MGS (sem coordenadas).

No modelo MGA, em que o vetor é representado introduzindo a métrica euclidiana em um referencial cartesiano, é possível representar um vetor no plano a partir de sua representação por um par ordenado, $\vec{v} = (a, b)$ em R^2, ou por uma terna ordenada no espaço $\vec{v} = (a, b,\ c)$ em R^3. Se a medida do ângulo é conhecida, pode-se utilizar a parametrização apoiando-se em relações trigonométricas de maneira similar ao que se faz com os números complexos, o que revela a relação entre trigonometria, números complexos e álgebra.

Nosso MER tem construções e problemas no espaço que permitem identificar Organizações Matemáticas que mobilizam vetores em cujas organizações didáticas podem ser utilizados desenhos em papel, materiais didáticos ou um *software*, por exemplo. A construção de modelos de sólidos como uma pirâmide ou um tetraedro pode ser abordada na GS por construções com régua e compasso ou com um *software*. Em GA, a partir de coordenadas no espaço, a medida do volume de um sólido pode ser calculada com operações em AL. As tarefas que envolvem movimento permitem identificar grandezas como peso, velocidade e força que atuam em uma trajetória de um corpo em movimento etc.

O MER permite identificar as Organizações Matemáticas pontual, local e regional que mostramos no Quadro 6 junto com suas justificativas.

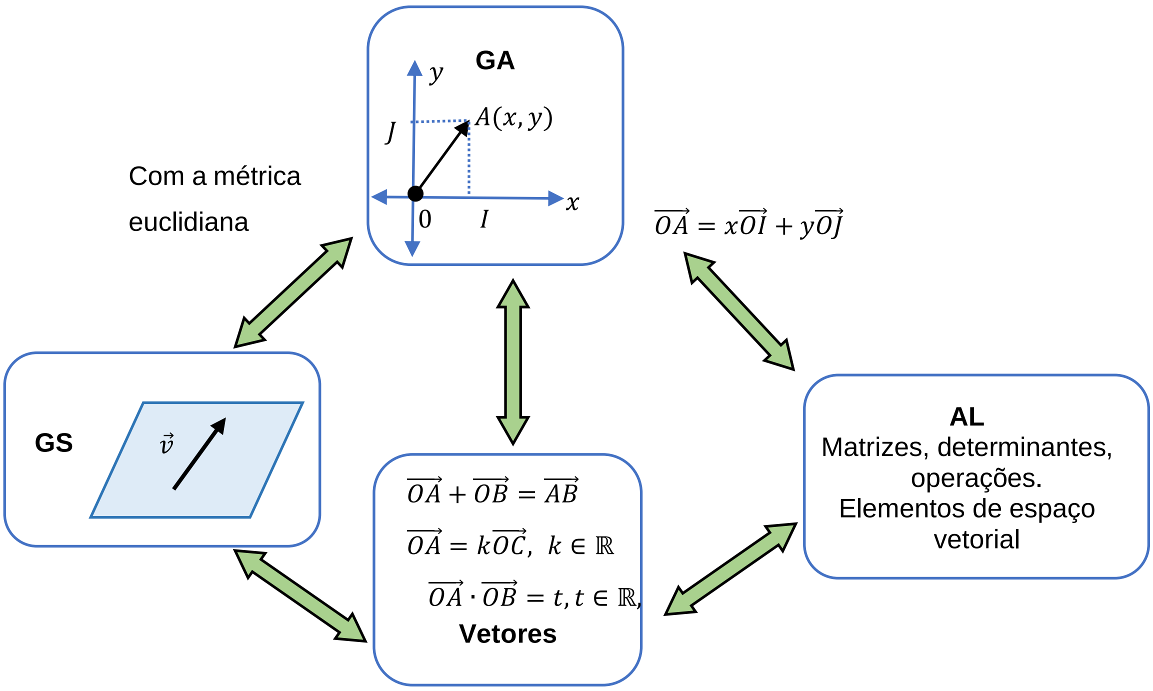
Quadro 6 – Organização matemática regional para vetores

Organização Matemática Regional			
OML1	OML2	OML3	OML4
Representações de vetores			
Como segmento orientado	Com coordenadas com ponto de início e final	Como vetor na representação gráfica de números complexos	Como vetor coluna ou elemento de um espaço vetorial
Justificativa			
Parte de uma reta e pode ser feito com régua e compasso	Estabelecendo um sistema de coordenadas.	No plano complexo (com coordenadas)	Propriedades da álgebra linear matrizes, determinantes, elementos do espaço vetorial

Fonte: Produção da autora

Finalmente, pelas operações produto escalar e produto vetorial com vetores, há a necessidade de algumas ferramentas da AL que fazem apelo a matrizes e combinação linear, como no exemplo da Figura 58 para o $\mathbb{R}^2$ que evidencia a extensão de algumas propriedades da Álgebra Abstrata.

Figura 58 - Esquema para representação de vetor



Fonte: Produção da autora

Também podemos inferir algumas vantagens e desvantagens no Quadro 7.

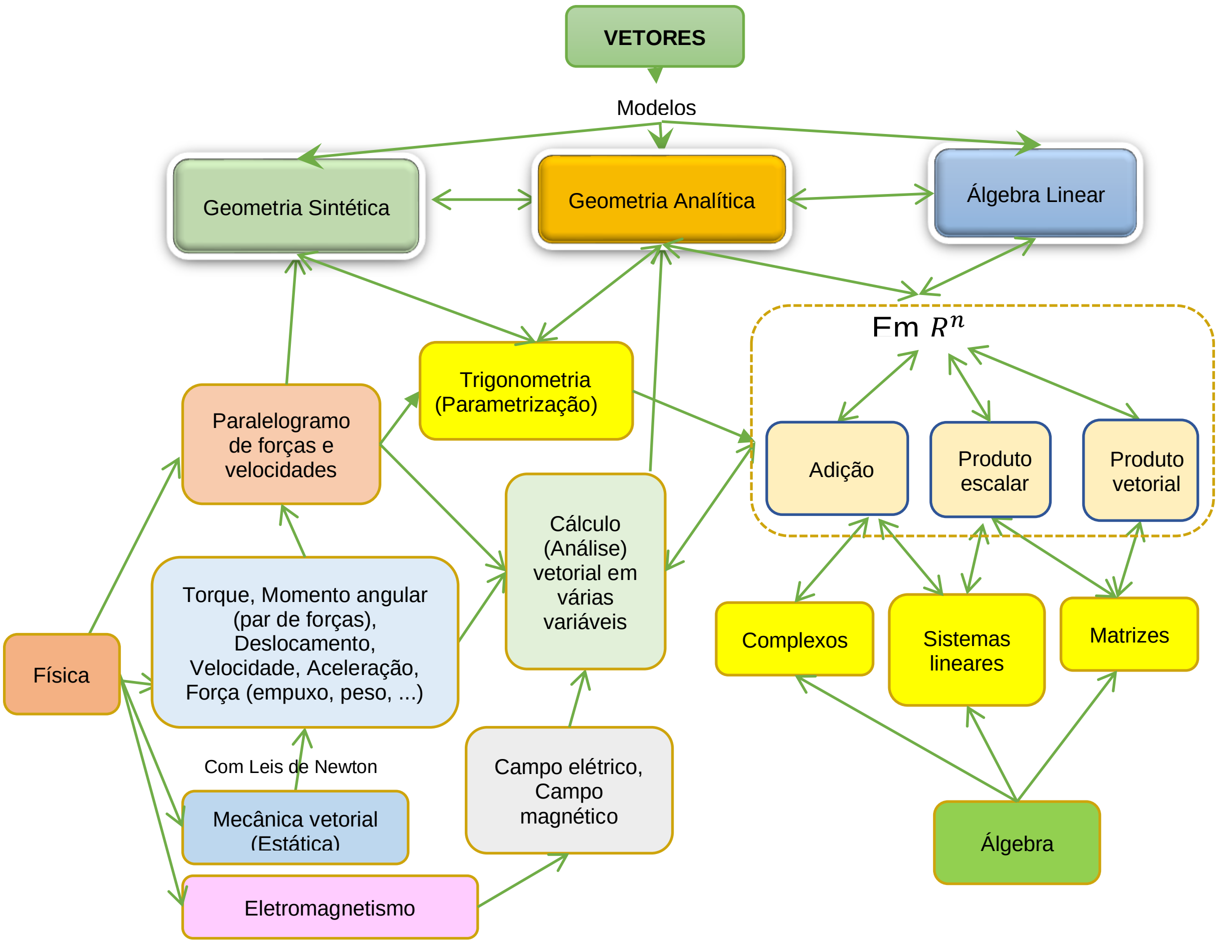
Quadro 7 – Algumas vantagens e desvantagens

	Vantagens	Desvantagens
MGS	A notação v de vetor é uma representação do tipo taquigrafia, e precisa dos postulados e propriedades para justificar algumas conjecturas	Em R^3 é difícil realizar as operações com vetores, pela falta de precisão
MGA	O sistema de coordenadas permite a representação e decomposição de vetores de R^2, R^3, para trabalhar em uma dimensão	Em algumas conjecturas, as coordenadas podem ter técnicas muito trabalhosas e conduzir a erros
MAL	As propriedades da AL permitem resolver problemas	Dificuldades para passar da representação geométrica para algébrica

Fonte: Produção da autora

Assim, as praxeologias descritas na GS, GA e AL contribuíram para a formalização da definição de vetor e de suas propriedades que permitem o estudo do cálculo vetorial e contribuindo também para o desenvolvimento da Matemática com o estudo da Geometria Diferencial, Geometria Riemaniana, Geometria Algébrica etc. e, ainda da programação computacional (Figura 59).

Figura 59 - Os modelos e suas relações com outros conteúdos



Fonte: Produção da autora

No próximo item apresentamos o estudo da dimensão econômica do problema didático dos vetores.

3.3 A Dimensão Econômica

A dimensão econômica-institucional $P_2(V)$ de um problema didático é a unidade mínima de análises dos processos de estudo. Do ponto de vista da TAD, todo problema didático deve fazer referência a todas as etapas da transposição didática (Figura 60) e deve apresentar praxeologias matemáticas suficientemente amplas, ou seja, praxeologias matemáticas locais associadas a praxeologias didáticas.

Figura 60 - Etapas da transposição didática - posição da comunidade de pesquisa

Fonte: Barquero, Bosch, Gascón (2013, p. 16)

Essa dimensão levanta questões a respeito do resultado que, em dado período histórico, é produzido pela ação da *transposição didática* nas praxeologias matemática e didática. Em nosso estudo, baseamo-nos nas seguintes questões:

QE_{21}: qual âmbito institucional precisa ser considerado para abordar o problema didático de vetores: a sala de aula, a universidade, o sistema de ensino de matemática, a Sociedade ou mesmo a Civilização? QE_{22}: qual o modelo epistemológico vigente para Vetores nas "instituições" estudadas? QE_{23}: quais dificuldades surgem quando pretendemos modificar as organizações matemáticas do problema de ensino de Vetores e quais possibilidades de organizações didáticas surgem? Estas questões permitiram construir um Modelo Epistemológico Vigente para o ensino de Vetores no contexto de uma universidade peruana tendo como referência o MER já construído. A resposta, $R_{21}(V)$, para a primeira questão é apresentada em duas seções: na primeira analisamos os vetores na estrutura do sistema educativo do Peru e no currículo do ensino médio peruano; na segunda tecemos algumas reflexões a respeito dos vetores no currículo da universidade peruana, além de apresentar uma análise dos livros didáticos mais utilizados no início dos Estudos Gerais de Ciências. Reservamos a terceira seção para as respostas $\boldsymbol{R_{22}(V)}$ e $\boldsymbol{R_{23}(V)}$ em que identificamos o modelo vigente, mas também as dificuldades e restrições que surgem ao pretender modificar as organizações matemáticas e didáticas.

3.3.1 Estrutura do sistema de educação no Peru

O sistema de educação no Peru estabelecido pela Lei Geral de Educação Nº 28044 (aprovada em julho de 2003) é organizado para responder aos objetivos e princípios da educação, bem como para se adaptar às necessidades e demandas do país e apresenta uma educação comunitária com dois níveis: a Educação Básica Regular e a Educação Superior. Embora nossa pesquisa trate do nível da Educação Superior, foi necessário analisar a Educação Básica Regular que tem como objetivo favorecer o desenvolvimento integral do aluno com uma abordagem inclusiva, obrigatória e gratuita quando fornecida pelo Estado, embora possa ser oferecida também por instituições particulares em todos os níveis.

A Educação Básica tem início com a educação primária, com alunos a partir dos 6 anos de idade, e tem duração de seis anos denominados graus e distribuídos em três ciclos: o ciclo III composto dos graus 1 e 2; o ciclo IV que inclui o 3º e o 4º graus e o ciclo V, que é constituído pelos 5º e 6º graus. A seguir, vem a educação secundária que tem 5 graus distribuídos assim: no ciclo VI, 1º e 2º graus, no ciclo IV, 3º e 4º graus e, finalmente, no ciclo V, o 5º grau. O Ensino Superior, orientado para a pesquisa, criação e disseminação de conhecimento bem como para a construção de habilidades profissionais de alto nível, está regulamentado pelas leis universitárias e pela lei do Ministério da Educação N° 30512 (PERU, 2017) que se refere aos institutos pedagógicos, tecnológicos e artísticos. Na Figura 61, mostramos o nível universitário, em vermelho, na estrutura do sistema educativo peruano.

Para melhor entendermos esse sistema, fizemos uma revisão dos documentos oficiais para a educação básica, especificamente, para a educação secundária, para identificar os conhecimentos que o aluno deve construir a respeito de vetor nas disciplinas Matemática, Ciência, Tecnologia e Ambiente.

Figura 61 - Estrutura do Sistema Educativo Peruano (Lei n. 28044)

ETAPAS	MODALIDADES (1)	NIVELES / PROGRAMAS	CICLOS	GRADOS
EDUCACIÓN BÁSICA	EDUCACIÓN BÁSICA REGULAR	EDUCACIÓN INICIAL	I	0 - 2 años
			II	3 - 5 años
		EDUCACIÓN PRIMARIA	III	1ro y 2do
			IV	3ro y 4to
			V	5to y 6to
		EDUCACIÓN SECUNDARIA	VI	1ro y 2do
			VII	3ro, 4to y 5to
	EDUCACIÓN BÁSICA ALTERNATIVA	PROGRAMAS DE EDUCACIÓN BÁSICA ALTERNATIVA DE NIÑOS Y JÓVENES ADULTOS PEBANA /PEBAJA	INICIAL	Dos Grados (Alfabetización)
			INTERMEDIO	Tres Grados (PostAlfabetización)
			AVANZADO	Cuatro Grados
	EDUCACIÓN BÁSICA ESPECIAL	INICIAL	I	0 - 2 años
			II	3 - 5 años
		PRIMARIA	III	1ro y 2do
			IV	3ro y 4to
			V	5to
EDUCACIÓN SUPERIOR	universitaria	universitaria	Se rige por Ley Específica	
	no universitaria	no universitaria	Pedagógica, Tecnológica y Artística.	

Fonte: Proposta de metas educativas e Indicadores até 2021, (PERU, 2010)

O ensino na Educação Básica do Peru

Para o Currículo Nacional da Educação Básica peruano (PERU, 2016a) e o Programa Curricular (PERU, 2016b), a Resolução Ministerial N° 649 de 2016 apresenta, para cada um dos níveis da educação inicial, primária e secundária, os programas curriculares, por ciclo, as competências e as capacidades relacionadas para a formação dos alunos.

O Currículo Nacional apresenta o perfil esperado para o aluno ao concluir a Educação Básica. Para a Matemática, o documento indica que os estudantes devem ser capazes de interpretar a realidade e tomar decisões baseadas em conhecimentos matemáticos. Para a área de Ciência e Tecnologia, que “o aluno investigue e compreenda o mundo natural e artificial utilizando o conhecimento científico em diálogo com o conhecimento local para melhorar a qualidade de vida e cuidar da natureza.” (PERU, 2016a, p. 9).

Para o planejamento das aulas, os professores devem considerar as aprendizagens descritas nesses dois documentos, ou seja, devem compreender a relação entre competências, abordagens (enfoques) transversais e o perfil do egresso, além de compreender as competências exigidas nos padrões (estândares) de aprendizagem peruanos, bem como analisar as diretrizes para o tratamento dos enfoques transversais para a tutoria e orientação educativa. Esses enfoques transversais são: interculturalidade e igualdade de gênero; ambiental; busca da excelência e orientação ao bem comum; de direito; inclusivo ou de atenção à diversidade.

Na busca de indícios a respeito do estudo de vetores observamos duas competências que estão ligadas a conhecimentos da área da Matemática e da área de Ciência e Tecnologia. Para o nível secundário, no que se refere à área de Matemática, identificamos as seguintes competências relacionadas aos seguintes tipos de tarefas: **T_1**: resolver problemas de quantidade; **T_2:** resolver problemas de regularidade, equivalência e variação de unidades de medida; **T_3**: resolver problemas de movimento, forma e localização e **T_4**: resolver problemas de gerenciamento de dados e incerteza.

Para o primeiro tipo de tarefa é esperado que o aluno apresente a resolução de problemas ou planeje novos problemas que o obriguem a construir e compreender as noções de número, sistemas numéricos, suas operações e propriedades. Além disso, as tarefas desse tipo devem lhe permitir dar sentido a esses conhecimentos no cotidiano e os utilizar para representar ou reproduzir relações entre os dados e as condições. Por outro lado, devem discernir se a solução deve ser dada por estimativa ou cálculo exato selecionando estratégias, procedimentos, unidades de medida e recursos diversos. Nesta competência, o raciocínio lógico é utilizado quando o aluno faz comparações, explica por analogias, induz propriedades de casos particulares ou exemplos durante a resolução da tarefa. Esta competência implica, por parte dos alunos, a combinação das seguintes capacidades: traduzir quantidades em expressões numéricas; comunicar sua compreensão de números e operações; utilizar estratégias e procedimentos de estimativa e cálculo, além de argumentar a respeito de relações e operações numéricas.

A respeito de padrões, ou seja, **T_2**, é esperado do aluno, em seu nível mais alto:

> Resolver problemas relacionados às relações entre quantidades ou fazer trocas financeiras, traduzindo-as em expressões numéricas e operacionais com números racionais e irracionais e modelos financeiros. [...]. Avaliar e determinar o nível de precisão necessária para expressar quantidades e medidas de tempo, massa e temperatura, combinando e integrando um amplo repertório de estratégias, procedimentos e recursos para resolver problemas, optando pelos ótimos. Fazer afirmações sobre a validade geral

> de relações entre expressões e operações numéricas e as justificar com demonstrações ou argumentos. (PERU, 2016a, p. 150. Tradução nossa).

Com relação às grandezas, é esperado dos alunos:

> Selecionar e usar subunidades e instrumentos pertinentes para estimar ou expressar o valor de uma grandeza derivada (velocidade, aceleração etc.) de acordo com o nível de precisão exigido no problema. Levantar e comparar afirmações sobre as propriedades de operações com raízes inexatas aproximadas e sobre a conveniência ou não de certas taxas de juros ou outras relações numéricas que descubram e que ainda as justifiquem[...]. Verificar a validade de uma afirmação em oposição a outra ou um caso especial por meio de exemplos, contraexemplos, seu conhecimento e raciocínio indutivo e dedutivo (PERÚ 2016b, p. 155. Tradução nossa).

Podemos observar que se espera que os alunos resolvam problemas e que, de alguma forma, justifiquem suas soluções com demonstrações ou argumentos usando as propriedades das operações, quantidades e medidas, o que equivale, na praxeologia matemática, a justificar a técnica utilizada, ou seja, a tecnologia.

Em Geometria no Plano e no Espaço, tanto para a Geometria Sintética quanto para a Geometria Analítica, é esperado que o aluno seja capaz de “resolver problemas de forma, movimento e localização”, **T_3**, o que consiste em:

> se orientar e descrever a posição e o movimento de objetos visualizando, interpretando e relacionando as características dos objetos com formas geométricas tridimensionais e bidimensionais – isto implica que faça medições diretas ou indiretas de superfície, perímetro, volume e capacidade de objetos, e que construa representações de formas geométricas para projetar objetos, planos e modelos usando instrumentos, estratégias e procedimentos de construção e medição. Descrever também caminhos e rotas usando sistemas de referência e linguagem geométrica. (PERU, 2016a. p. 163, tradução nossa).

Esta competência implica a combinação das capacidades de: modelar objetos com formas geométricas e suas transformações; comunicar sua compreensão sobre as formas geométricas; utilizar estratégias e procedimentos para orientar-se no espaço e argumentar a respeito de suas afirmações sobre relações geométricas. Além disso, no nível mais alto para esta competência é esperado:

> Resolver problemas que modelem as caraterísticas e localização de objetos com propriedades de formas geométricas, assim como sua localização e deslocamento usando coordenadas cartesianas, a equação da elipse e da circunferência, ou uma composição de transformações de formas bidimensionais. Compreender relações métricas entre elementos de polígonos inscritos, bem como a trajetória de objetos usando a equação da elipse e várias representações [...]. Levantar explicações sobre relações entre conceitos geométricos, deduzir propriedades e as sustentar com argumentos que demonstrem sua relevância conceitual (PERU, 2016b, p. 164, Tradução nossa).

Com relação à Geometria Sintética e à Geometria Analítica, os alunos de quinto grau (10 anos) devem desenvolver os seguintes equipamentos praxeológicos:

> Descrever a localização ou movimentos de um objeto real ou imaginário e representá-los usando mapas e planos em escala, proporções trigonométricas e as equações da parábola e da circunferência. Descrever as possíveis sequências de transformações sucessivas que dão origem a uma forma bidimensional.
> Expressar, com desenhos, construções com régua e compasso, material concreto e linguagem geométrica, sua compreensão de propriedades dos corpos de revolução ou formas compostas tridimensionais, bem como sua classificação, para interpretar um problema de acordo com seu contexto e estabelecer relações entre representações.
> Fazer e contrastar afirmações sobre relações e propriedades que descobre entre objetos, entre objetos e formas geométricas e entre formas geométricas, com base em experiências diretas ou simulações. Verificar a validade de uma afirmação em oposição a outra ou de um caso especial por meio de contraexemplos, conhecimento geométrico e raciocínio indutivo ou dedutivo. (PERU, 2016b, p. 169. Tradução nossa)

Por outro lado, na área de Ciências e Tecnologia os conteúdos estão presentes nos mais diversos contextos da atividade humana e ocupam um lugar importante no desenvolvimento do conhecimento e da cultura da nossa sociedade para transformar nossas concepções a respeito do universo e nossos modos de vida. As competências que os alunos devem desenvolver são: indagar mediante métodos científicos para construir conhecimentos; explicar o mundo físico baseando-se em conhecimentos sobre os seres vivos, matéria e energia, biodiversidade, Terra e universo, e desenhar e construir soluções tecnológicas para resolver problemas do seu entorno. Para desenvolverem a segunda competência, devem ser combinadas as capacidades de compreender e usar o conhecimento sobre os seres vivos, matéria e energia, biodiversidade, Terra e o universo e avaliar as implicações do conhecimento e do trabalho científico e tecnológico.

O nível excepcional de desenvolvimento de competência que se espera ao final de estudo implica que o aluno consiga:

> Explicar, com base em evidências com suporte científico, as relações qualitativas e quantificáveis estabelecidas entre as quatro forças fundamentais, as interconversões de energia e a organização do universo; entre o DNA, a expressão regulada de genes e funções bioquímicas; entre as mudanças físico-químicas da Terra e as mudanças na biodiversidade. Defender seu posicionamento frente às implicações sociais e ambientais das situações sócio- científicas ou frente às mudanças na visão de mundo ocasionadas pelo desenvolvimento da ciência e da tecnologia (PERU, 2016b, p. 185. Tradução nossa).

Na busca de evidências do ensino de vetores nessa área, analisamos um livro texto.

A Geometria Vetorial em Escolas Peruanas no Ensino Secundário

No quinto grau do nível secundário – equivalente ao último ano do ensino médio brasileiro – o material destinado aos alunos disponível no site do Ministério da Educação do Peru com o nome *Rutas de Aprendizaje* destaca como competência que o aluno seja capaz de explicar o mundo físico com base no conhecimento científico e apresenta, como exemplo, a tarefa apresentada na Figura 62, ligada ao movimento vertical e indicada como atividade para complementar a ideia científica a respeito de movimento e para desenvolver a competência de ser capaz de explicar o mundo físico com conhecimento científico. Essa tarefa apresenta o movimento de um paraquedas para que sejam identificadas grandezas como posição e velocidade.

Figura 62 – Tarefa a respeito de movimento

Los parapentes (paracaídas de pendiente)

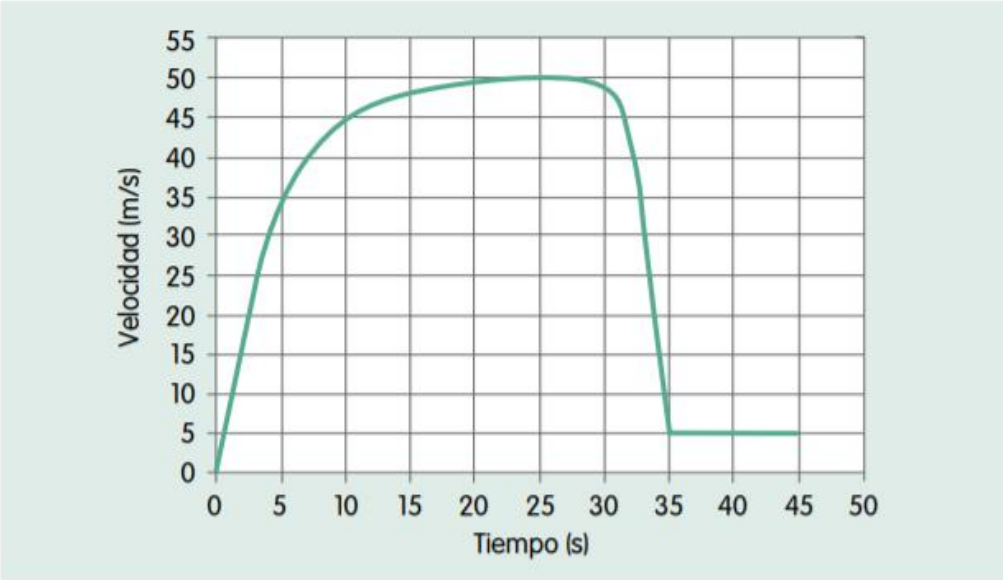
El *paracaídas* es un artefacto diseñado para frenar las caídas utilizando la resistencia generada mientras atraviesa el aire, logrando una velocidad de caída segura y prácticamente constante. Un paracaídas tiene un ala de nylon o seda que ocupa 35 m^2 aproximadamente. El ala tiene un pequeño agujero en el centro, que se mantiene cerrado mediante bandas elásticas, pero que se expande cuando se abre el paracaídas, minimizando así el tirón inicial de la desaceleración. Un *parapente*, a diferencia del paracaídas, tiene un ala flexible que se puede contraer o expandir desde 20 hasta 30 m^2 aproximadamente.

La velocidad, densidad, temperatura del aire, así como la turbulencia o la variación del área que ocupa el ala, afectan la capacidad de *sustentación* tanto del paracaídas como del parapente.

A partir del texto:

- ¿Qué se entiende por sustentación?
- ¿Qué sucede cuando el paracaídas o el parapente se abren?
- ¿Qué debe hacer el piloto del parapente para aumentar su velocidad de descenso?
- ¿Cómo afecta la temperatura del aire a la velocidad de descenso del paracaídas?

El movimiento del paracaidista se puede resumir en la siguiente gráfica de velocidad en función del tiempo:



A partir de la información proporcionada responda las siguientes preguntas:

- ¿En qué instante se abre el paracaídas?
- ¿Por qué a partir de un determinado instante la velocidad es constante?
- ¿Qué modelos físicos explican este movimiento?
- ¿Qué aceleración promedio se aplica cuando el paracaidista abre el paracaídas?
- ¿Qué distancia recorre en los últimos 10 segundos?
- ¿Cómo se podría calcular el espacio total recorrido por el paracaidista?

Fonte: Peru (2015, p. 78-79)

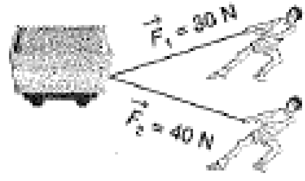
A tarefa é proposta e não é desenvolvida no site, mas permite inferir que o estudante precisa interpretar o gráfico para dar as repostas mobilizando conhecimentos do comportamento da velocidade em relação ao tempo, além de verificar se possuem conhecimentos a respeito de modelos da física para movimento e explicar aceleração, distância percorrida e seus cálculos.

O livro texto para o professor, disponível no site do Ministério da Educação do Peru com o nome *Rutas de Aprendizaje*, explicita o que é uma grandeza vetorial e como se faz a adição e subtração de vetores utilizando $\vec{a}$ como notação vetorial e $|\vec{a}|$ para representar o módulo do vetor a, como mostra o exemplo da Figura 63.

Figura 63 - As grandezas vetoriais no ensino médio

Las magnitudes vectoriales

Son aquellas **magnitudes físicas** que, además de tener **un valor numérico y una unidad**, necesitan de una **dirección y un sentido** para quedar correctamente definidas, como la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.



La adición y la sustracción de estas magnitudes no son operaciones algebraicas. Por ejemplo, considera a dos hombres que jalan una caja con fuerzas de intensidades de 30 N y 40 N, como muestra la figura. La fuerza neta sobre la caja no es 70 N, es decir: 30 N + 40 N ≠ 70 N.

Fonte: Peru (2012, p. 134)

Considerando esta revisão no currículo e os livros do aluno e do professor para o ensino médio, podemos encontrar indícios de que os alunos devem ter conhecimentos de GS, GA e de grandezas no final desse nível de ensino.

3.3.2 Os vetores no ensino Universitário do Peru

Depois de dezenove anos da conquista do Peru pelos espanhóis, surgiu a primeira universidade do continente denominada Universidade de Lima, criada pela Real Cédula de 12 de maio de 1551 e que, posteriormente, foi chamada de Universidade de San Marcos (UNMSM). No início, a universidade tinha as faculdades de Teologia e Arte e, no século XVII, incorporou as faculdades de Leis. Com o Regulamento para a Instrução Pública de 1850, surgiram duas efêmeras faculdades: a de Matemática e a de Ciências Naturais, que foram unificadas em 1862 sob o nome de Faculdade de Ciências Naturais e Matemática e que em 1876 passou a ser chamada de Faculdade de Ciências (UNMSM, 2020).

Outras universidades foram surgindo, como a Universidade de San Cristóba, na cidade de Huamanga, fundada pelo bispo Cristóbal de Castilla y Zamora no ano de 1677, e a Universidade de San Antonio Abad de Cusco, criada em 1692 por Breve Papal de Inocêncio XII, e que beneficiaram a nobreza colonial cujos filhos puderam juntar, aos seus títulos aristocráticos, diplomas acadêmicos para aumentarem seu *status* proeminente dentro da certificação social.

Em 1824 surgiu a Universidade Nacional de Trujillo para educar os jovens em defesa dos direitos sociais em uma nova história marcada pela liberdade e pela causa emancipatória subscrita por Simon Bolívar e, a seguir, a Universidade Nacional de

San Agustín de Arequipa, como a segunda da etapa republicana. Houve ainda a Universidade de Puno que, no entanto, teve vida curta.

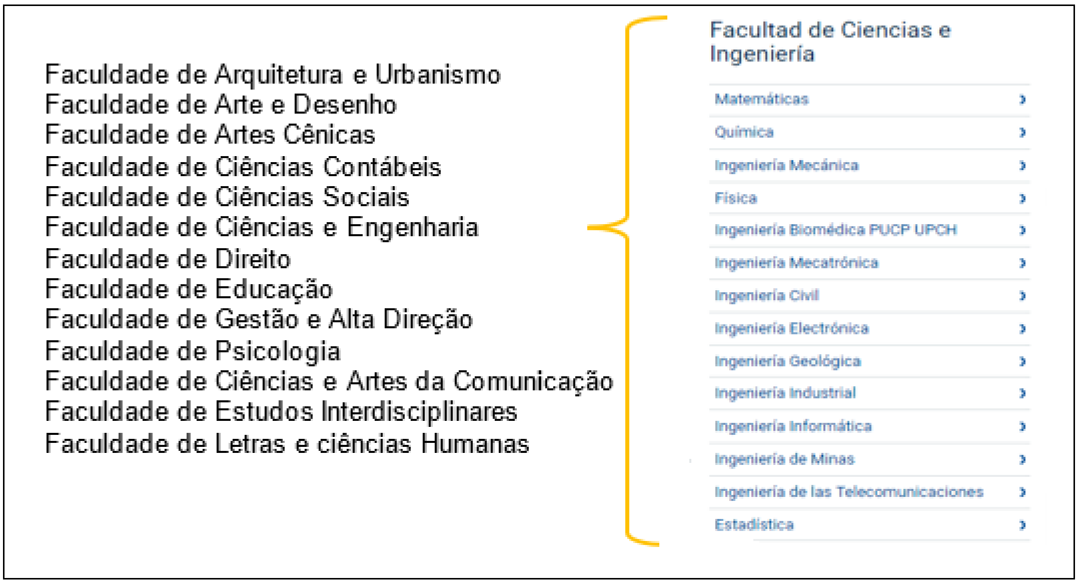
Em 1917 foi criada, em Lima, a Pontifícia Universidade Católica do Peru (PUCP) como a primeira universidade de caráter privado e com duas faculdades: Letras e Jurisprudência. Em 1933, a instituição abriu a Faculdade de Engenharia oferecendo apenas a especialidade em Civil e, em 1936, começou a funcionar a Seção Superior de Pedagogia (Secundária) que foi incorporada à Faculdade de Letras, em 1942, passando, então, a ser chamada de Faculdade de Letras e Pedagogia, mas que em 1947 tornou-se independente com a fundação da Faculdade de Educação. (PUCP, 2018).

Entre 1935 e 1962, a PUCP cresceu em número de estudantes, em carreiras e infraestrutura, e conseguiu sua consolidação como uma casa de estudos. Em 1970, o Programa Acadêmico de Estudos Gerais foi criado para proporcionar uma formação básica aos estudantes da PUCP, e que se tornaria, ao longo dos anos, uma das características mais marcantes da sua educação integral e humanística universitária. (PUCP, 2017). Nesse mesmo ano, consolidou-se o atual Departamento Acadêmico de Ciências (DAC) constituído por três seções: Física, Matemáticas e Química.

Em 1975, o matemático peruano Tola (1914 - 1999) introduz no ensino universitário peruano a Álgebra Linear e apresenta em seu livro intitulado *Álgebra Linear e Multilinear* a o estudo de vetores. (Castañeda et al, p.393, 2008).

Atualmente, a PUCP tem 13 faculdades e cada uma delas oferece carreiras ou especialidades. Por exemplo, a Faculdade de Ciência e Engenharia tem as carreiras de Matemática, Química, Física, Engenharia Mecânica, Engenharia Biomédica, Engenharia Mecatrônica, Engenharia Civil, Engenharia Electrônica, Engenharia Geológica, Engenharia Industrial, Engenharia Informática, Engenharia de Minas, Engenharia das Telecomunicações e Estatística (Figura 64).

Figura 64 - Especialidades da Faculdade de Ciências e Engenharia



Fonte: adaptado de PUCP (2019)

Para um estudante das ciências e da engenharia se formar em nível universitário no Peru, primeiro deve ter o grau de Bacharel e depois pode apresentar uma monografia para conseguir o título de profissional Licenciado ou Engenheiro. Considerando, por exemplo, a especialidade de Matemática, primeiro o estudante tem o grau de Bacharel em Ciências com especialização em Matemática e, depois da monografia, o grau de Licenciado em Ciências com especialização em Matemática. E o mesmo ocorre para as especialidades de Física e Engenharia Mecânica.

Dos 10 semestres exigidos para a formação universitária em ciências e engenharia no Peru, dois a quatro semestres são reservados aos Estudos Gerais:

> A Lei Universitária N° 30220 (artículo 41) dispõe a obrigatoriedade de estudos gerais (EEGG) de graduação, com uma duração não menor que 35 créditos, dirigidos à formação integral dos estudantes. Esta disposição substitui o ciclo de cultura geral, de duração e orientação a critério de cada universidade, previsto na lei anterior. (LEI 23733, 2014, art. 17, tradução nossa).

A Pontifícia Universidade Católica do Peru (PUCP) implementou os Estudos Gerais de Ciências (EEGGCC) há mais de 40 anos e, embora durante esse período os cursos de matemática tenham sofrido mudanças, é a universidade que atende aos requisitos da Lei Universitária por mais tempo, o que explica nossa escolha por essa instituição para nossa pesquisa, porque nos permite analisar as funções (nicho) que os vetores cumprem em um ambiente (habitat) estável. Nos Estudos Gerais de Ciências, as disciplinas são estudadas de acordo com o plano de estudo que descrevemos a seguir.

Análise de documentos oficiais

Para esta análise apresentamos os documentos da PUCP porque esta é a unidade acadêmica com mais de 40 anos de atividade e de referência para muitas outras universidades no Peru. Consideramos as ementas do primeiro semestre, quando são estudados os vetores, no período de 2001 a 2018. Observamos que no período de 2001 a 2016 os vetores estão presentes na disciplina de Matemática Básica sugerindo que o aluno seja orientado para a:

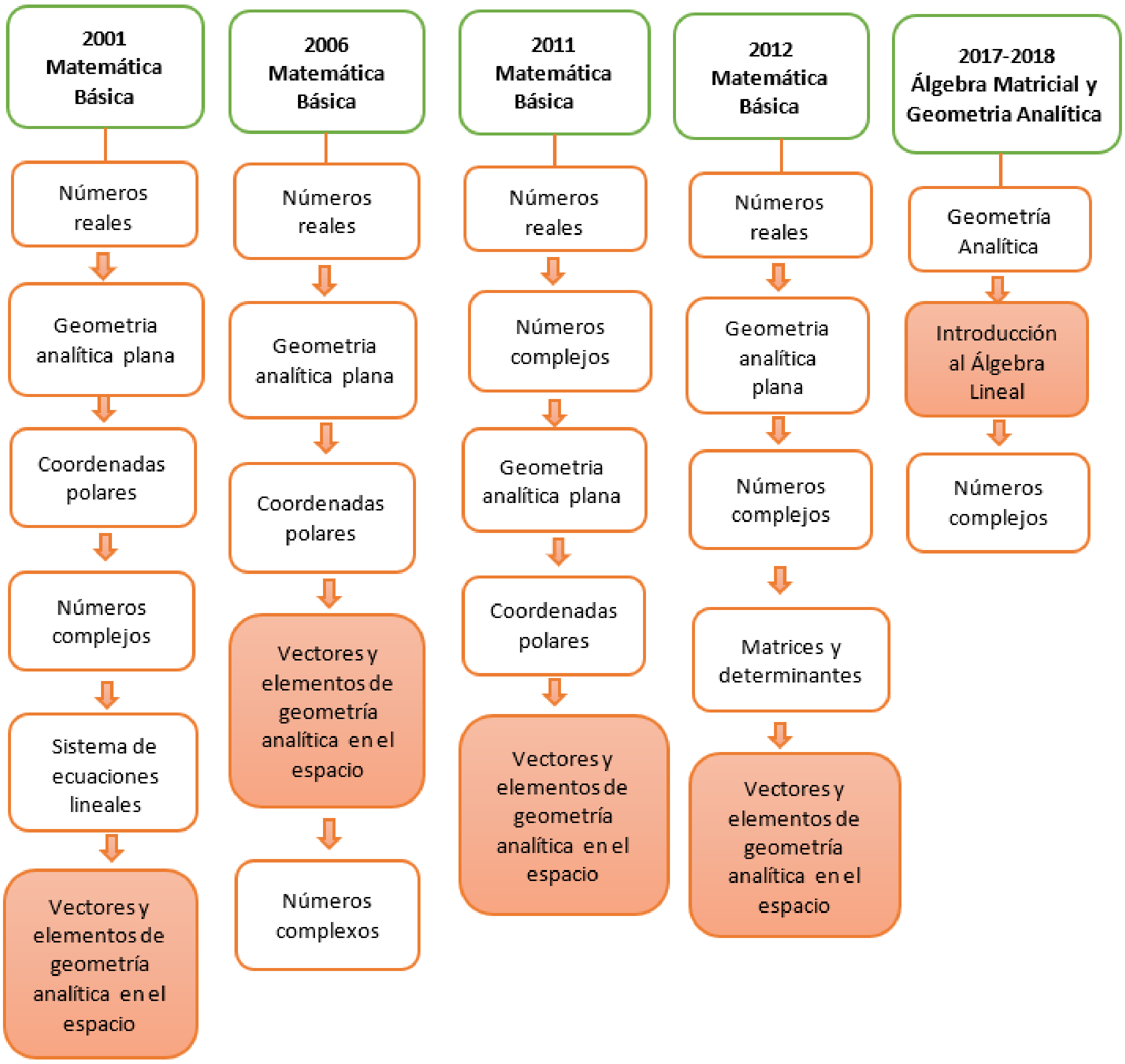
> aplicação de propriedades do sistema de números reais na resolução de equações e inequações em uma variável quando são fornecidos os elementos da geometria analítica plana, conceitos para as aplicações em ciências e engenharia e que são necessários em disciplinas de cálculo. Além disso, é estabelecida a relação entre o sistema de coordenadas retangular e o sistema de coordenadas polares, representando alguns locais geométricos de interesse nas aplicações. Também estão incluídos os vetores e elementos da geometria analítica em R^3; e, além disso, é feita sendo são apresentadas suas principais operações. (Ementa Matemática Básica, 2006, p.1, tradução nossa).

As últimas mudanças no currículo para o estudo de vetores foram realizadas em 2017 nos cursos do primeiro ciclo nas disciplinas Álgebra Matricial e Geometria Analítica (AMGA) e abrange os seguintes tópicos:

> [...] geometria analítica, com as definições e propriedades importantes de linha, circunferência, [...] e rotação dos eixos; álgebra matricial, que inclui definições e operações de vetores e matrizes aplicadas na resolução de sistemas lineares homogêneos e não homogêneos e que também inclui o cálculo de vetores e valores de uma matriz; números complexos e suas operações básicas. Neste curso, é proposta a aplicação de todos esses tópicos na resolução de problemas intra e extra matemáticos. (Ementa de

Nas mudanças dos conteúdos e de sua ordem ocorridas entre 2001 e 2018 (Figura 65), podemos observar que, de 2001 a 2016, o currículo não sofreu mudanças significativas, mas em 2017 houve uma importante alteração curricular e que vigorou até 2020. O conteúdo de vetor está ressaltado no esquema em vermelho em seu respectivo capítulo da ementa.

Figura 65 - Plano para o ensino de vetores no período de 2001 a 2018



Fonte: Produção da autora

A ementa da disciplina Álgebra Matricial e Geometria Analítica, dos anos 2017-2018 (Quadro 8) apresenta três tópicos – Geometria Analítica, Introdução a Álgebra Linear e Números Complexos –, sendo que, no segundo, estuda-se vetores.

Quadro 8 – Bibliografia da disciplina Álgebra Matricial e Geometria Analítica

Código	Disciplina	Pre-Req	Créditos	CH
1MAT04	**Álgebra Matricial e Geometria Analítica**	**---**	**4**	**56(P)**
Ementa	**Geometria Analítica, Introdução ao Álgebra Linear, Números Complexos**			
Bibliografia	GROSSMAN, S. I. & FLORES, J. J. Algebra lineal. México, D.F.: McGraw-Hill.2014. LARSON, R. Fundamentos de álgebra lineal (7a. ed.) Cengage. 2015 LEITHOLD, L. Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica, con ejercicios para calculadora y graficadora. Tercera edición. México, D.F.: Oxford University Press.2018 STEWART, J. PreCálculo: Matemáticas para el Cálculo. Sexta edición. México: Cengage Learning.2012 SWOKOWSKI, E. W. & COLE, J. A. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Decimotercera edición. México: Cengage Learning. 2011.			

Fonte: Ementa de Álgebra Matricial e Geometria Analítica, 2017

O novo plano curricular de 2017 alterou as ementas que focavam os conteúdos em termos de objetivos para ementas em termos de competências e resultados de aprendizagem como segue:

> O curso de Álgebra Matricial e Geometria Analítica contribuirá para o desenvolvimento das competências aprender a aprender e de comunicação em relação ao perfil do egresso de Estudos Gerais de Ciências, e com os objetivos (a) e (g) da ABET[21] – "capacidade de aplicar conhecimentos de matemática, ciências e engenharia" e "capacidade para comunicar-se eficazmente" –, na medida em que, ao terminar o curso, o estudante atinja os seguintes resultados de aprendizagem:
> 1. aplica os conceitos e as propriedades básicas de seções cônicas em problemas intramatemáticos.
> 2. aplica os conceitos, propriedades e operações de vetores em problemas intra e extramatemáticos.
> 3. interpreta geometricamente o produto escalar, produto vetorial e misto, combinação linear, subespaço gerado por um conjunto e conjunto linearmente independente.
> 4. calcula determinantes usando a definição e propriedades que permitam simplificar seus cálculos.
> 5. resolve sistemas de equações lineares usando determinantes ou o método de eliminação Gaussiana para resolver problemas intra e extramatemáticos.
> 6. utiliza as operações e as diferentes representações dos números complexos para resolver problemas intramatemáticos. (Ementa de Álgebra Matricial e Geometria Analítica, 2019).

Podemos observar que os resultados de aprendizagem nos pontos 2 e 3 se referem ao estudo de vetores e sua aplicação em problemas intra e extramatemáticos, o que permite olhar praxeologias que envolvem esses problemas nos livros texto.

A ementa de AMGA também descreve a estratégia de ensino para a disciplina indicando que: "as aulas serão expositivas, o docente apresentará não só a teoria, mas também exemplos e aplicações que ajudem o aluno a assimilar os conceitos". O uso de tecnologia está presente no material bibliográfico complementar e nas listas de exercícios no sentido de motivar a utilização de *softwares* matemáticos para que o estudante verifique seus procedimentos ou soluções dos exercícios ou problemas propostos. Além disso, a ementa recomenda que sejam realizadas práticas dirigidas no intuito de reforçar e complementar o processo de aprendizagem dos alunos, e ainda para o professor identificar o nível de conhecimentos dos estudantes para a retroalimentação correspondente.

As aulas são ministradas durante 17 semanas acadêmicas com cada uma tendo 4 horas teóricas e 2 horas de prática. Um cronograma é planejado desde o início do ciclo com reuniões da coordenação com os professores da disciplina em que a

---

[21] Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc.

distribuição semanal é realizada. Por exemplo, na disciplina AMGA, a parte correspondente ao tema específico de vetores (Quadro 9) está organizada para ocorrer em 3 semanas por 12 horas.

Quadro 9 – Programação para o capítulo de vetores para 2017-2018

Semana 1	
Aula 1: Vetores em dois e três dimensões. Representação como par e tripla e como segmento orientado livre. Operações de adição, subtração, multiplicação por um escalar. Interpretação geométrica. Vetores paralelos. Módulos	**Aula 2** Produto interno. Propriedades. Ângulo entre vetores. Vetores ortogonais no plano e no espaço. Caraterísticas de vetores perpendiculares no plano. Justificação de algumas propriedades geométricas usando vetores
Semana 2	
Aula 1 Projeção ortogonal e componente	**Aula 2** Produto vetorial. Propriedades
Semana 3	
Aula 1 Reta no espaço. Diversas equações. Localização	**Aula 2** Mais problemas

Fonte: Produção da autora

Os documentos oficiais da disciplina AMGA apresentam em suas bibliografias os livros didáticos que devem ser utilizados durante o semestre. Fizemos suas análises com as ferramentas da Teoria Antropológica do Didático (TAD) para identificar suas praxeologias matemáticas identificando os tipos de tarefas, os processos e as ferramentas matemáticas usadas para resolver uma determinada tarefa, ou seja, a técnica, bem como a existência de um discurso tecnológico-teórico.

Analisaremos os livros da bibliografia da disciplina Álgebra Matricial e Geometria Analítica, na próxima seção, mais especificamente, os capítulos que tratam de vetores.

Análise praxeológica dos livros didáticos

Consideramos que as praxeologias apresentadas no livro permitem descrever o modelo vigente do ensino na instituição. No entanto, apesar de o livro estar na bibliografia apresentada na ementa, o docente que ministra a disciplina tem liberdade de cátedra, pois desenvolve uma transposição didática interna que influencia nas organizações didáticas que adota.

Nossa análise foi realizada com base no trabalho de Almouloud (2015) com questões denotadas por QRI, com $I = 1, 2, 3{,}4$ de acordo com cada livro e do nosso MER. São elas:

QR1: De que maneira os autores introduzem o conteúdo de vetores?

QR2: Como a definição de vetores é apresentada no livro?

QR3: Como as propriedades de vetores são abordadas?

QR4: Quais praxeologias matemáticas são apresentadas para vetores?

Estas questões orientaram a análise para identificar as organizações matemática vigentes na instituição (PUCP) considerando todos os livros da ementa de AMGA e que serão apresentados na seguinte ordem: LDI dos autores Grossman e Flores; LD2 de Larson; LD3 dos autores Swkowski e Cole; LD4 de Steward e LD5 de Leithold.

Análise praxeológica sobre vetores no livro de Grossman e Flores (LD1)

No livro LD1 o tema de vetores é estudado no capítulo 2: vetores e matrizes (p. 45-174) e no capítulo 4: vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (p. 231-294).

Com relação à primeira questão, o LD1, no capítulo 2, introduz os vetores por meio de uma narrativa histórica sucinta em que indica que o estudo de vetores teve início, essencialmente, com o trabalho do matemático irlandês Sir William Hamilton e a criação dos quatérnios. Além disso, afirma que a utilização atual de vetores está relacionada à física clássica e moderna e às áreas de biologia e ciências humanas, mas não apresenta qualquer exemplo. A seguir, os autores relembram a solução de um sistema de três equações com três incógnitas para relacioná-la com um vetor.

A respeito de nossa segunda questão, no capítulo 2 os autores definem vetor linha como mostra a Figura 66, considerando n componentes ordenados.

Figura 66 - Definição de vetor linha para LD1[22]

Vector renglón de *n* componentes

Un vector de *n* componentes se define como un conjunto **ordenado** de *n* números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Fonte: Grossman e Flores (p. 46. 2014)

Na sequência, definem vetor coluna, como representado pela Figura 67, considerando também n componentes ordenados.

---

[22] Vetor linha de n componentes se define como um conjunto ordenado de n números escritos da seguinte maneira $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. (Tradução nossa).

Figura 67 - Definição de vetor coluna no LD1[23]

Vector columna de *n* componentes

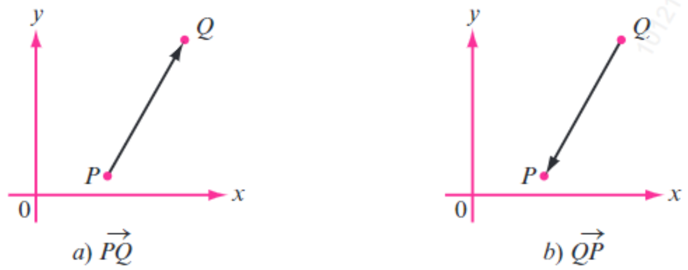
Un **vector columna de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Fonte: Grossman e Flores (p. 46, 2014)

Os autores também chamam os vetores de n componentes de n –vetor. As definições são apresentadas pelos autores no modelo MAL representadas por matrizes e informam que os vetores no plano e no espaço serão estudados no capítulo 4. Nesse capítulo, eles apresentam, em quatro seções, o estudo de vetores, e podemos observar, então, as técnicas, as tecnologias que o livro apresenta para resolver os tipos de tarefas. Na primeira seção, há a definição de vetores no plano, em MGA, por segmentos orientados, e que vem acompanhada de sua representação gráfica.

Definição. Dados dois pontos P e Q do plano, se diz um segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ como parte de uma reta que tem como ponto inicial P e ponto final Q (a).
Note que os segmentos $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{QP}$ têm orientação opostas (b). Diremos que são segmentos opostos.



Fonte: Grossman e Flores (2014, p. 232, tradução nossa)

Os autores afirmam que o referido segmento apresenta características importantes, como seu comprimento, direção e sentido. Observamos que esta primeira definição é realizada no modelo da GS, pois não considera o referencial

---

[23] Um vetor coluna de n componentes se define como um conjunto ordenado de n números escritos da seguinte maneira: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. (Tradução nossa).

cartesiano. Os autores apresentam então, a definição geométrica de vetor, como mostra a Figura 68. A definição algébrica de vetor é apresentada na Figura 69.

Figura 68 - Definição geométrica de vetor no LD1[24]

Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.

Fonte: Grossman e Flores (2014, p. 233)

Figura 69 - Definição algébrica de vetor[25]

Definición algebraica de un vector

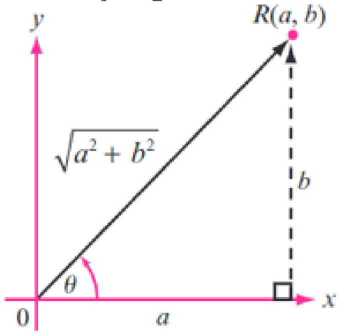
Un **vector** $\mathbf{v}$ en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b). Los números a y b se denominan **elementos** o **componentes** del vector $\mathbf{v}$. El **vector cero** es el vector $(0, 0)$.

Fonte: Grossman e Flores (2014, p. 233)

Consideramos que a definição traz elementos do MAL que os autores tentam conectar com o MGA ao indicarem que um vetor no plano cartesiano é um 2-vetor (notação que usam na seção 1.5).

Na sequência, os autores explicam que o vetor zero tem comprimento zero, pois, como os pontos inicial e final coincidem, não há direção nem sentido. Também explicam que, como um vetor é um conjunto de segmentos de reta equivalentes, pode-se determinar seu comprimento em qualquer uma de suas representações. Se o vetor é representado por $\overrightarrow{0R}$ ou $\boldsymbol{v} = (a, b)$, então, seu comprimento é representado e determinado por $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$, como mostra a Figura 70.

Figura 70 - Representação gráfica de vetor em GA no LD1



Fonte: Grossman e Flores (p. 234, 2014)

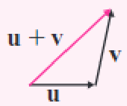
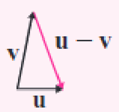
[24] **Definição geométrica de um vetor.** O conjunto de todos os segmentos de reta orientados equivalentes a um segmento de reta orientado dado se chama vetor. Qualquer segmento de reta nesse conjunto se denomina uma representação do vetor. (Tradução nossa).

[25] **Definição algébrica de um vetor.** Um vetor *v* no plano xy é um par ordenado de números reais (a, b). Os números a e b se denominam elementos ou componentes do vetor v. O vetor zero é o vetor $(0, 0)$. (Tradução nossa)

Os autores justificam que essa fórmula é resultado da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, e complementam afirmando que a direção do vetor $\boldsymbol{v} = (a, b)$ forma com o eixo x positivo um ângulo de medida θ, em radianos tais que $0 \leq \theta < 2\pi$ (por convenção) e que $\tan\theta = \frac{b}{a}$ com $a \neq 0$.

A respeito da terceira questão, os autores apresentam as operações de multiplicação de um vetor por um número real e adição de vetores, além da desigualdade triangular associada a representações gráficas. Em seguida, definem vetores unitários e introduzem vetores unitários ortogonais (i, j, k) com sua representação geométrica. Oferecem, então, um resumo das definições apresentadas, como mostra a Figura 71.

Figura 71 - Resumo de definições no LD1

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de componentes si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
Vector $\mathbf{v}$	Un objeto que tiene magnitud y dirección	$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$ o (v_1, v_2)
$\lvert\mathbf{v}\rvert$	Magnitud (o longitud) de $\mathbf{v}$	$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
$\alpha\mathbf{v}$	 $\mathbf{v}$ $\alpha\mathbf{v}$ (en este dibujo $\alpha = 2$)	$\alpha v_1\mathbf{i} + \alpha v_2\mathbf{j}$ o $(\alpha v_1, \alpha v_2)$
$-\mathbf{v}$	 $\mathbf{v}$ $-\mathbf{v}$	$-v_1\mathbf{i} - v_2\mathbf{j}$ o $(-v_1, -v_2)$ o $-(v_1, v_2)$
$\mathbf{u} + \mathbf{v}$	 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ $\mathbf{v}$ $\mathbf{u}$	$(u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
$\mathbf{u} - \mathbf{v}$	 $\mathbf{v}$ $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $\mathbf{u}$	$(u_1 - v_1)\mathbf{i} + (u_2 - v_2)\mathbf{j}$ o $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$

Fonte: Grossman e Flores (p. 239, 2014)

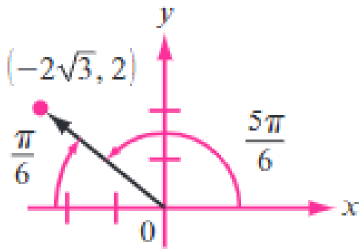
Nesse resumo podemos ver que as representações geométricas são feitas no MGS, mas as representações algébricas são apresentadas em relação ao referencial (i, j, k) no modelo MGA, que não são vistas nas figuras, o que pode confundir os leitores.

Para responder a quarta questão, na primeira seção, encontramos o primeiro tipo de tarefa T_1: calcular o módulo de um vetor, a que são relacionadas seis tarefas: “calcular o comprimento dos vetores $i)$ $\mathbf{v} = (2,2)$; $ii)$ $\mathbf{v} = (2, 2\sqrt{3})$; $iii)$ $\mathbf{v} = (-2\sqrt{3}, 2)$;

$iv)$ $\mathbf{v} = (-3,-3)$; $v)$ $\mathbf{v} = (6,-6)$; $vi)$ $\mathbf{v} = (0,3)$. (GROSSMAN; FLORES, p. 234, 2014, tradução nossa) que são resolvidas pela aplicação da definição de módulo de um vetor.

Também encontramos o tipo de tarefa T_2: *determinar a medida do ângulo que um vetor dado forma com o eixo das abscissas*, cujas tarefas são "*calcular a medida do ângulo dos vetores*: $i)\,\mathbf{v} = (2,2)$; $ii)\,\mathbf{v} = \left(2{,}2\sqrt{3}\right)$; $iii)\,\mathbf{v} = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$; $iv)\,\mathbf{v} = (-3,-3)$; $v)\,\mathbf{v} = (6,-6)$; $vi)$ $\mathbf{v} = (0,3)$ e que são resolvidas com a aplicação do arco tangente. Por exemplo, para a terceira tarefa, os autores apresentam a seguinte solução:

> o vetor se encontra no segundo quadrante e como $tan^{-1} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, da Figura 18 se tem que $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.



Fonte: Grossman e Flores (p. 234, 2014)

Em outro ponto do capítulo, os autores sugerem tarefas do tipo T_1 e T_2 para serem resolvidas com o auxílio de calculadoras.

Para a solução, podemos observar que, conhecendo as coordenadas do vetor, pode-se passar a GS, para utilizar razões trigonométricas em um triângulo retângulo para determinar que o vetor forma um ângulo que mede $\frac{\pi}{6}$ com o eixo das abscissas no segundo quadrante. Assim, o ângulo ficará determinado com a seguinte operação: $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Esta técnica pode ser utilizada também para determinar a direção de um vetor.

Depois, os autores apresentam um outro tipo de tarefa T_3: *calcular o módulo de um vetor que é multiplicado por um escalar*, com a seguinte tarefa: seja o vetor $\mathbf{v} = (1{,}1)$, calcular $|\mathbf{v}|$, $|2\mathbf{v}|$, $|-2\mathbf{v}|$. Uma técnica pode ser multiplicar cada coordenada do vetor por 2 ou -2 e, então, aplicar a definição de módulo. A outra pode ser calcular o módulo do vetor v e depois multiplicá-lo por 2.

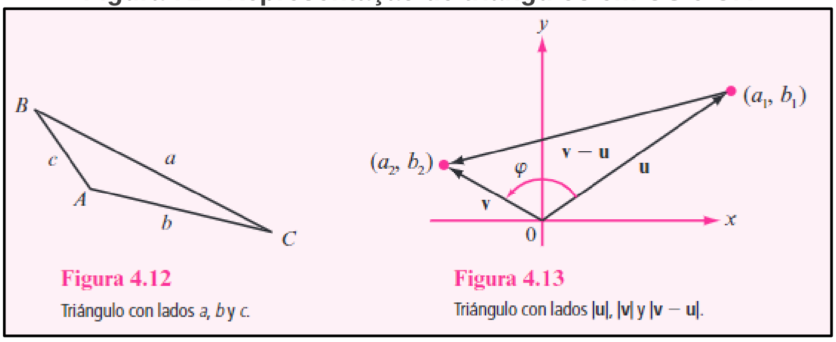
A seção fecha com problemas propostos que mobilizam diversas tarefas dos tipos de tarefas T_1: *dado um vetor por suas coordenadas, calcular seu módulo*, T_2:

determinar a medida do ângulo que um vetor dado forma com o eixo x; T_4: *determinar a adição de dois vetores;* T_5: *determinar a soma de dois vetores que estão multiplicados por escalares;* T_6: *determinar o vetor unitário de um vetor dado* e T_7: *determinar um vetor dados seu módulo e a medida do ângulo que ele forma com o eixo das abscissas.* Os autores apresentam ainda o tipo de tarefa T_9: *fazer uma demonstração,* como, por exemplo, a tarefa: *demonstrar que se* u *e* v *são diferentes do vetor zero,* então $|u + v| = |u| + |v|$, se e somente se, u é um múltiplo escalar de v.

Na seção 4.2 os autores definem produto escalar, apresentam suas propriedades e o relacionam com o MGA, além de enunciarem e demonstrarem o teorema 1: seja v um vetor. Então $|v|^2 = v \cdot v$. Demonstração: se $v = (a, b)$, então, $|v| = a^2 + b^2$ e $v \cdot v = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |v|^2$. (GROSSMAN; FLORES, p. 247, 2014, tradução nossa). Vemos que para fazer a demonstração aplica-se a definição de produto escalar e de módulo, e ainda que os autores não utilizam uma notação especial para esse produto para diferenciar, por exemplo, a multiplicação por escalar de outras multiplicações algébricas.

Em seguida, eles apresentam exemplos de vetores e ângulos para introduzirem o teorema 2: Sejam u e v dois vetores diferentes de zero. Se φ é o ângulo entre eles, então, $COS\ \varphi = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$. Para a demonstração, os autores representam dois triângulos (Figura 72) para utilizar a lei de cossenos em relação ao ângulo BCA, no primeiro triângulo, e obter $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ para ser relacionado com o outro triângulo com lados representados pelos vetores u, v e $u - v$.

Figura 72 - Representação de triângulos em GS e GA



Fonte: Grossman e Flores (p. 248, 2014)

Os autores utilizam um triângulo qualquer para recordar a lei dos cossenos e para a representação vetorial mostram que:

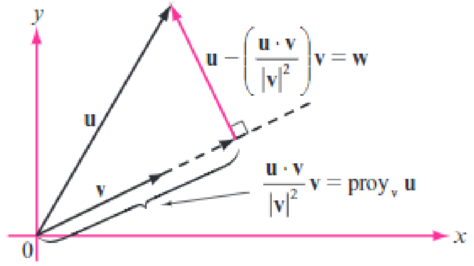
> Agora se colocam as representações de u e v com os pontos iniciais na origem de maneira que $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Então, da lei dos cossenos $|v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2|u||v| \cos \varphi$. Mas
>
> $$|v - u|^2 = (v - u) \times (v - u) = v \cdot v - 2u \cdot v + u \cdot u = |v|^2 + 2u \cdot v + |u|^2$$
>
> Assim, depois de subtrair $|v|^2 + |u|^2$ de ambos os lados da igualdade, se obtém-se $-2u \cdot v = -2|u||v|cos\varphi$, e o teorema fica demonstrado. (GROSSMAN; FLORES, p. 248-249, 2014, tradução nossa)

Para fazer a demonstração, os autores mostraram a equivalência da lei dos cossenos em GS e GA e aplicaram a definição de produto escalar e uma propriedade de módulo.

O conhecimento de ângulo permite estudar o paralelismo e o perpendicularismo de dois vetores e as propriedades cujas demonstrações ficam para o leitor, como, por exemplo, o teorema 3: se $\mathrm{u} \neq 0$, então, $\mathrm{v} = \alpha\mathrm{u}$ para alguma constante α, se e somente se, u e v são paralelos; ou o teorema 4: os vetores u e v diferentes de zero são ortogonais, se e somente se, $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = 0$.

Já o teorema 5 diz que: seja v um vetor diferente de zero. Então, para qualquer outro vetor u, o vetor $w = v - \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$ é ortogonal a v . E aí os autores apresentam a seguinte demonstração:

$$w \cdot v = \left[u - \frac{(u \cdot v)}{|v|^2} v\right] \cdot v = u \cdot v - \frac{(u \cdot v)(v \cdot v)}{|v|^2}$$
$$= u \cdot v - \frac{(u \cdot v)|v|^2}{|v|^2} = u \cdot v - u \cdot v = 0$$



Fonte: Grossman e Flores (p. 250, 2014)

Esta propriedade é demonstrada utilizando como técnica os resultados dos teoremas 1, 2, 3 e 4, mas é o leitor quem deve interpretar que, para demostrar que dois vetores são ortogonais, pelo teorema 4, o produto escalar é zero, $w \cdot v = 0$ e, que, então, a demonstração se reduz a justificar esse resultado. Podemos observar também que, na demonstração, os autores, apoiados na figura, falam de projeção ortogonal, o que até essa página do livro não havia ainda sido apresentada, mas ela aparece na página seguinte com o tipo de tarefa T_{14}: *calcular* $proj_v u$ *dados os vetores*

u e v. Daí apresentam a tarefa t_{141}: sejam $u = 2i + 3j$ e $v = i + j$. *Calcular a* $Proj_v u$. Com a solução: $Proj_v u = \frac{(u \cdot v)}{|v|^2} v = \left[\frac{5}{\sqrt{2}^2}\right] v = \left(\frac{5}{2}\right) i + \left(\frac{5}{2}\right) j$. (GROSSMAN; FLORES, p. 251, 2014, tradução nossa)

Como podemos observar, o LD1 apresenta um exemplo para aplicar a definição de projeção, mas para chegar ao resultado apresentado é necessário conhecer propriedades que os autores não explicitam na solução, provavelmente, por entenderem que o estudante a justificaria pela teoria apresentada anteriormente. Esse exemplo mostra a aplicação direta das definições de produto escalar, de módulo e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Os tipos de tarefa que apresentamos como exemplos e que também aparecem como problemas propostos podem ter solução utilizando-se as técnicas de produto escalar, ângulo entre vetores e módulo, e são os seguintes:

T_{10}: *determinar a medida do ângulo formado por dois vetores dados.*

T_{11}: *verificar o paralelismo de dois vetores dados.*

T_{12}: *verificar a ortogonalidade de dois vetores dados.*

T_{13}: *definir* $u \cdot v \cdot w$ *para três vetores dados.*

T_{14}: *calcular* $proj_v u$ *para os vetores* u *e* v *dados.*

T_{15}: *calcular a* $proj_{\overline{AB}} \overrightarrow{CD}$ *dados quatro pontos A, B, C e D,*

T_{16}: *estabelecer uma condição para* $a_{i,}, b_i, a_2$ *e* b_2 *que assegure que* v *e* $proj_v u$ *tenham a direções opostas sendo dados* $u = a_1 i + b_2 j$ *e* $v = a_2 i + b_2 j$.

T_{17}: *determinar o cosseno de cada ângulo de um triângulo dados os três pontos de seus vértices.*

T_{18}: *demonstrar propriedades.*

T_{19}: *Demostrar que a distância mais curta entre um ponto e uma reta é medida por um segmento que passa pelo ponto e é perpendicular à reta.*

T_{20}: *determinar a distância entre um ponto* P *e a reta que passa pelos pontos* Q *e* R *dados.*

Estas tarefas estão em GA e têm elementos de nosso MER.

Na seção 3 os autores apresentam vetores no espaço com todas as definições e propriedades em GA. Primeiro descrevem o sistema de coordenadas retangulares ou sistema de coordenadas cartesianas, e logo apresentam as definições de comprimento de um vetor, adição de vetores e vetor unitário para explicaram a direção de um vetor em $\mathbb{R}^3$ considerando o vetor unitário e os cossenos diretores. Eles apresentam a definição de paralelismo e ortogonalidade entre vetores, e o teorema para determinar a medida do ângulo entre dois vetores utilizando o produto escalar. Depois finalizam a seção com a definição de projeção. No entanto, eles não apresentam demonstrações, mas as deixam para os leitores, e os exemplos são semelhantes aos apresentados na seção anterior.

Os tipos de tarefa que aparecem nos exemplos e nos problemas propostos são:

T_{21}: *determinar a distância entre dois pontos dados.*

T_{22}: *determinar o comprimento e os cossenos diretores de um vetor dado na forma* $v = ai + bj + ck$.

T_{23}: *determinar um vetor unitário sob certas condições*. Dois exemplos para este tipo de tarefa são: t_{231}: *determinar um vetor unitário dados seus três ângulos diretores de mesma medida entre zero e* $\frac{\pi}{2}$. e t_{232}: *determinar um vetor de comprimento 12 que tenha a mesma direção de um vetor dado*.

T_{24}: *determinar um vetor unitário que tenha mesma direção do vetor* $\overrightarrow{PQ}$ *determinado por dois pontos* P *e* Q.

T_{25}: *determinar um vetor unitário no sentido oposto ao vetor* $\overrightarrow{PQ}$ *determinado por dois pontos* P *e* Q.

T_{26}: *determinar todos os pontos R tais que* $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ *dado o vetor* $\overrightarrow{PQ}$.

T_{27}: *justificar se é possível encontrar um vetor unitário baseado em três ângulos dados. Um exemplo de uma tarefa desse tipo é a tarefa* t_{27}: *demonstre que não existe um vetor unitário que tenha ângulos* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ *e* $\frac{\pi}{4}$.

Na seção 4 os autores definem o produto vetorial utilizando a representação algébrica de vetores no referencial ortonormal considerando $u = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ e $v = a_2 i + b_2 j + c_2 k$. Então, o produto vetorial de u e v, denotado por $u \times v$ é um novo vetor definido por $u \times v = (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$ (GROSSMAN; FLORES, p.269, 2014.Tradução nossa).

Os autores explicam que essa é uma maneira de calcular o produto vetorial, mas existem outras, uma delas, tida como mais simples, é $u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, pois $\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + j\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - c_1b_2)i + (c_1a_1 - a_1c_2)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k)$ que é igual a $u \times v$ de acordo com a definição. (IBID, p. 269)

Em seguida, eles apresentam o seguinte teorema para produto vetorial: se φ é um ângulo entre u e v, então, $|u \times v| = |u||v|sen\varphi$. E seguem adiante com sua demonstração:

> Não é difícil demonstrar (comparando coordenadas) que
>
> $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$ [...]. Então como $(u \cdot v)^2 = |u|^2|v|^2cos^2\varphi$ (do teorema 4.3.2, página 263),
> $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2 = |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2(1 - cos^2\theta)$
> $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 sen\,\varphi$
> E o teorema fica demonstrado depois de se aplicar a raiz quadrada a ambos os membros da equação. Observe que $sen\,\varphi \geq 0$ porque $0 \leq \varphi \leq \pi$. (GROSSMAN; FLORES, p. 271, 2014, tradução nossa)

A demonstração apresenta como técnica o método dedutivo (todas até aqui aplicam essa técnica) baseado em uma igualdade, que os autores deixam como problema proposto, mas no desenvolvimento seguinte aparece um erro, talvez de digitação, quando escrevem a identidade trigonométrica $1 - cos^2\theta$ em que o ângulo deveria ser φ.

Os autores mostram uma interpretação desse teorema para o cálculo da medida da área de um paralelogramo para, em seguida, apresentarem o produto misto e, por último, como calcular a medida do volume de um paralelepípedo.

Identificamos tipos de tarefa que em sua técnica utilizam o produto vetorial, como: T_{28}: *determinar o produto vetorial de dois vetores dados.* T_{29}: *encontrar dois vetores unitários ortogonais simultaneamente aos vetores u e v dados*. T_{30}: *calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores adjacentes.*

Para o tipo de tarefa T_{31}: *calcular a medida do volume de um paralelepípedo dados seus quatro vértices*, a tarefa t_{31}: *calcular a medida do volume do* *paralelepípedo determinado por* $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ *em que* $P = (2, 1, -1)$, $Q = (-3, 1, 4)$, $R = (-1, 0, 2)$ e $S = (-3, -1, 5)$ pode ser resolvida pela técnica de encontrar primeiro os vetores que determinam as arestas para então calcular o produto misto entre esses três vetores. Outra técnica é encontrar a medida da área de um dos paralelogramos que determinam uma das faces do paralelepípedo, calculando o produto vetorial entre os vetores que o determinam. Como o vetor resultante determina a direção da altura, ela será obtida pela projeção do terceiro vetor, usado para construir o paralelepípedo, na direção da altura. Finalmente, o módulo desse vetor dará a medida do volume.

Outro tipo de tarefa é T_{32}: *encontrar vetores unitários ortogonais sob condições dadas*, e uma de suas tarefas pode ser t_{332}: *determinar o seno do ângulo* φ *formado entre os vetores* $u = 3i + j = k$ e $v = -3i - 2j + 4k$. A técnica para resolver essa tarefa é aplicar o teorema a respeito de produto vetorial: se φ é um ângulo entre os vetores u e v, então, $|u \times v| = |u||v|sen\varphi$.

O livro também tem tipos de tarefas como T_{33}: *demonstrar propriedades que envolvem produto vetorial e produto escalar,* como, por exemplo a tarefa t_{331}: *demonstrar* $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$, e que vem acompanhada de uma sugestão dos autores para que o aluno escreva em termos de componentes para conseguir fazer a demonstração. Outra tarefa desse tipo é t_{333}: *demonstrar que, se* $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_3)$ *e* $w = (a_3, b_3, c_3)$, então: $u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Os tipos de tarefa aumentam em dificuldade em cada seção com algumas subtarefas que podem ser realizadas por diferentes técnicas, considerando que os autores apresentam o discurso tecnológico e teórico como exemplos de técnicas. Não encontramos tarefas que mostrassem a razão de ser de vetores em problemas extramatemáticos, embora as técnicas presentes no livro façam parte do nosso MER.

Análise praxeológica sobre vetores no livro de Larson (LD2)

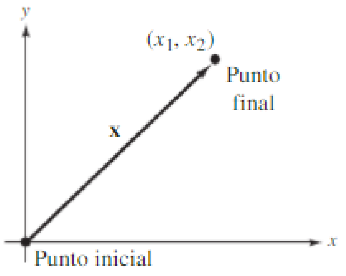
O segundo livro que consideramos é do autor LARSON (2015) e está na bibliografia da disciplina Fundamentos de Álgebra Linear. O compêndio tem oito capítulos: Sistemas de equações, Matrizes. Determinantes, Espaços Vectoriais, Espaços com produto interno, Transformações lineares, Autovalores e Autovetores.

Para responder a primeira questão de nossa análise, o tema é introduzido pelo autor afirmando que na física e na engenharia um vetor é caraterizado por duas quantidades (comprimento e sentido[26]) e representado por um segmento de reta orientado. Além disso, indica para os leitores notarem que há dois tipos especiais de vetores e suas representações geométricas.

A respeito da questão que trata da definição de vetor, o autor define vetores no plano como um segmento orientado, conforme representado na Figura 73.

Figura 73 - Definição de vetor no plano no LD2

Un **vector en el plano** se representa geométricamente por un **segmento de recta dirigido** cuyo **punto inicial** es el origen y cuyo **punto terminal** es el punto (x_1, x_2), como se muestra en la figura 4.1.



Fonte: Larson (p. 146, 2015)

A definição feita pelo autor está no MGA e o vetor é representado pelo mesmo par ordenado utilizado para representar seu ponto final, tendo em vista que o ponto inicial está na origem do referencial. Na sequência, Larson afirma que as coordenadas de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ são chamadas componentes do vetor $\mathbf{x}$ e segue apresentando algumas propriedades**.** Depois ele define vetor em $\mathbb{R}^n$ da mesma maneira como está no LD1, com vetor linha. Observamos que o autor representa o vetor pela letra x, sem a diferenciar da representação usual que atribuímos a um número real.

Quanto às propriedades no LD2, o autor apresenta as que se relacionam com a adição vetorial e a multiplicação de um escalar por um vetor no plano – como fechamento, comutatividade, associatividade, identidade aditiva, inverso aditivo de um vetor e fechamento da multiplicação por um escalar, e expõe a demonstração apenas para duas delas, sendo uma a propriedade associativa da adição como vemos aqui:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2)$$
$$= ((u_1 + v_1) + w_2, (u_2 + v_2) + w_2)$$
$$= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2))$$
$$= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2\ )$$
$$= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$ (LARSON, 2015, p. 146)

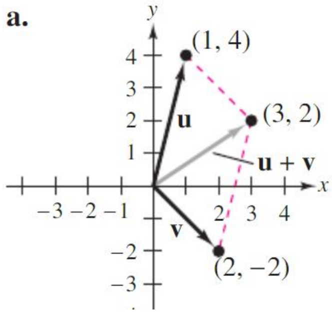
[26] Tradução da palavra inglesa “Direction”

De maneira semelhante, o autor também demonstra a propriedade distributiva da multiplicação por escalar sobre a adição. As outras propriedades são dadas em $\mathbb{R}^n$.

Quanto aos tipos de tarefa, identificamos T_1: *determinar as componentes de um vetor em um referencial cartesiano*, e que serve de suporte para o tipo T_2: *representar um vetor dado por um segmento orientado*, e, como tarefa, solicita a representação, por exemplo, do vetor $v = (2, -4)$.

Outro tipo de tarefa é T_3: *calcular a soma de dois vetores dados por suas componentes.* Desse tipo o autor apresenta a tarefa: *determinar a adição dos vetores* $u = (1, 4)$ *e* $v = (2, -2)$ seguida da solução $u + v = (1, 4) + (2, -2) = (3, 4)$ que está acompanhada da representação vista na Figura 74. Podemos observar que o autor utiliza os dois vetores, representados no plano cartesiano, para determinar o paralelogramo que é utilizado para fazer a adição solicitada, o que mostra a relação entre GA e GS.

Figura 74 - Representação gráfica para adição de vetores no LD2



Fonte: Larson (p. 147. 2015)

A resolução explicita tanto a técnica da regra do paralelogramo da GS, representando o vetor $u + v = (3, 2)$, quanto a técnica analítica

$$u + v = (1, 4) + (2, -2) = (3, 2)$$

e ainda apresenta outras tarefas desse tipo. O autor amplia também as tarefas desse tipo para o espaço apresentando os vetores por ternas ordenadas.

Outro tipo de tarefa identificado foi T_4: *representar graficamente um vetor multiplicado por um escalar* e que apresenta, por exemplo, a tarefa que dá o vetor $v = (2, 0, 1)$ e solicita a representação de $2v$. O autor indica múltiplos escalares quando se refere ao produto de um vetor por um escalar.

T_5: *dados três vetores, determinar quais são múltiplos escalares.*

O autor apresenta outro tipo de tarefa envolvendo a multiplicação de vetor por um escalar, mas agora para ser resolvido analiticamente. Uma tarefa desse tipo é dar as componentes dos vetores u e w e solicitar $\frac{1}{2}(3v + w)$.

Após o estudo de vetores no plano, o livro introduz espaços vetoriais. Consideramos que este livro apresenta o estudo de vetores às vezes no MGS, passa para o referencial cartesiano no MGA para depois generalizar no MAL para estudar espaços vetoriais. Os tipos de tarefas encontrados apresentam técnicas que podem ser justificadas pelas definições de vetor, de módulo de vetor, adição de vetores e de multiplicação de vetor por escalar, além de suas propriedades.

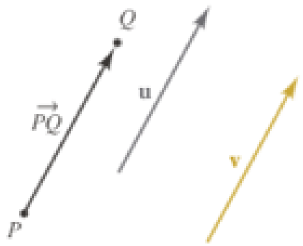
Análise praxeológica sobre vetores no livro de Swokowski e Cole (LD3)

O terceiro livro: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, LD3, dos autores Swokowski e Cole, publicado em 2011, considera o estudo de vetores no capítulo 7.

A respeito da primeira questão de nossa análise, os autores introduzem o tema explicando grandezas escalares e vetoriais e suas representações. Na sequência, apresentam a velocidade e a força como grandezas que mostram comprimento e direção e que frequentemente são representadas por um segmento orientado, ou seja, um segmento de reta em que se determina uma direção – na realidade, aqui os autores deveriam falar de sentido, pois qualquer segmento tem a direção da reta a ele associada.

Com relação à definição de vetor, os autores afirmam que o segmento orientado tem o nome de vetor e, em seguida, apresentam a Figura 75 e explicam que utilizaram $\overrightarrow{PQ}$ para denotar o vetor que tem ponto inicial P e ponto final Q, e que a direção será a seta em Q. Mas, na realidade, a direção desse vetor é dada pela direção da reta PQ e seu sentido é de P para Q, pois poderia ser determinado o sentido oposto, Q para P, sem que a direção fosse alterada.

Figura 75 - Igualdade de vetores no LD3



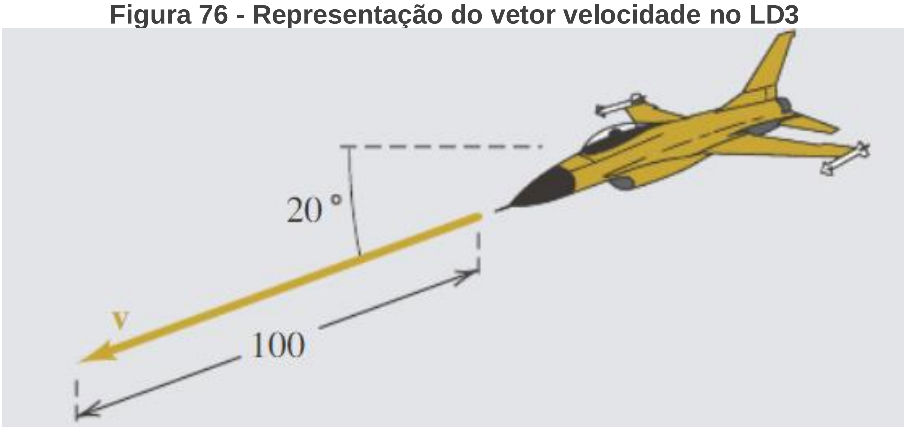
Fonte: Swokowski e Cole (p. 501, 2011)

Os autores afirmam que, como os vetores que têm o mesmo comprimento e direção (e sentido) são equivalentes, pode-se considerar que os vetores da Figura 69 são iguais, e escrevem $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ concluindo que "um vetor pode ser transladado de um lugar para outro sempre que não mude seu comprimento nem sua direção." (ibid, p. 501, tradução nossa). Esqueceram, porém, que o sentido caracteriza qualquer vetor – acreditamos que como o livro é uma tradução do inglês, quando os autores citam direção, estejam incluindo também o sentido.

No livro os autores apresentam um exemplo de um voo de avião para que seja compreendida a ideia de velocidade como uma grandeza não escalar em um contexto não matemático, e que identificamos como o tipo de tarefa:

T_1*: identificar e representar o fenômeno da velocidade de um corpo em movimento uniforme*. Como uma tarefa desse tipo, os autores apresentam: suponha que um avião desça a uma velocidade constante de 100mi/h com uma linha de voo que forma um ângulo de 20° com a horizontal (Figura 76). Aqui, os autores indicam que estas duas características estão representadas no vetor $\mathbf{v}$ de medida 100, e podemos observar, na figura, que a velocidade de 100 mi/h está representada pelo módulo do vetor velocidade com o avião sendo representado como um ponto no plano.

Figura 76 - Representação do vetor velocidade no LD3



Fonte: Swokowski e Cole (p. 501, 2011)

Para resolver essa tarefa, os autores definem medidas de grandezas vetoriais, além de módulo e adição de vetores representados por coordenadas cartesianas. Para definir a adição de vetores, eles relacionam o deslocamento de uma partícula em uma reta, mas escrevem "*Definición de* ***suma*** *de vectores*" (p. 503). As propriedades para a adição de vetores e para a multiplicação de um vetor por escalar são apresentadas, mas apenas a distributiva da multiplicação em relação à adição, $m(a + b) = ma + mb$, é demonstrada, e como vemos aqui:

> Demonstração. Sejam os vetores $a = \langle a_1, a_2\rangle$ e $b = \langle b_1, b_2\rangle$. Para provar a propriedade 5, temos:
>
> $$\begin{aligned} m(a+b) &= m\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle && \text{definição de adição} \\ &= \langle m(a_1 + b_1), m(a_2 + b_2)\rangle && \text{definição de multiplicação escalar} \\ &= \langle ma_1 + mb_1, ma_2 + mb_2\rangle && \text{propiedade ditributiva} \\ &= \langle ma_1, ma_2\rangle + \langle ma_1, mb_2\rangle && \text{definição de adição} \\ &= ma + mb && \text{definição de multiplicação escalar} \end{aligned}$$
>
> (SWOKOWSKI; COLE, p. 501, 2011, tradução nossa).

Consideramos que a técnica utilizada pelos autores mostra as tecnologias que justificam cada etapa da demonstração.

Na página 505 do livro, a utilização da propriedade da adição que garante a existência de elemento oposto permite a definição de subtração de vetores:

$$a - b = \langle a_1, a_2\rangle - \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_1\rangle.$$

Os tipos de tarefa apresentados no LD3 são semelhantes aos dos livros anteriores. E, a seguir, trazemos a descrição e mostramos algumas tarefas relacionadas à aplicação de vetores em um contexto não matemático.

T_2: *representar graficamente um vetor dado por suas coordenadas cartesianas.*

T_3: *determinar o vetor múltiplo escalar de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas.*

T_4: *calcular a soma de dois vetores dados por suas coordenadas cartesianas.*

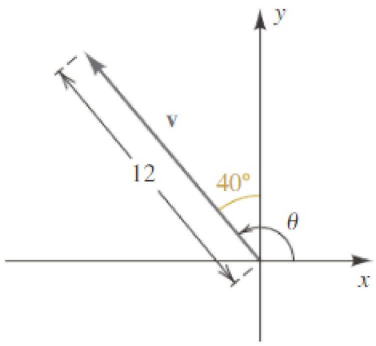
T_5: *representar em um referencial ortonormal um vetor dado por suas coordenadas cartesianas.*

T_6: *calcular a soma de dois vetores representados algebricamente em relação a um referencial ortonormal.*

T_7: *calcular o produto de um escalar por um vetor representado algebricamente em um referencial ortonormal.*

Identificamos também um tipo de tarefa em contexto não matemático: T_8: *determinar o vetor velocidade dados a velocidade, a direção e o sentido em um contexto real*, e a partir do qual apresentamos a tarefa:

> Se o vento sopra a 12mi/h na direção N40°O expresse sua velocidade como um vetor $\mathbf{v}$
>
> **Solução:** o vetor $\mathbf{v}$ e o ângulo $\theta = 90° + 40° = 130°$, como ilustrado na figura



Usando as fórmulas dos componentes horizontais e verticais com $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ teremos
$v_1 = \|\mathbf{v}\| \cos\theta = 12 \cos 130°$, $v_2 = \|\mathbf{v}\|\, sen\,\theta = 12 \text{ sen } 130°$
Em consequência,
$\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j$
$\mathbf{v} = 12 \cos 130°\, i + 12 \text{ sen } 130°\, j$
$\mathbf{v} = (-7.7)i + (9.2)j$
(SWOKOWSKI; COLE, p. 508, 2011, tradução nossa)

Na técnica que resolve essa tarefa são mobilizadas a decomposição de um vetor em dois vetores, que são representados em função do ângulo que formam com o eixo das abscissas, e, na forma algébrica, no referencial ortonormal, a soma de vetores e módulo de um vetor.

Outro tipo de tarefa é T_8: *determinar o vetor unitário de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas.*

Além dos tipos de tarefa até aqui identificados, encontramos outros, como T_9: *determinar o módulo do vetor resultante de dois vetores forças dos quais se conhece os módulos e o ângulo entre eles.*

T_{10}: *determinar o comprimento e a direção de um vetor resultante de dois vetores força dos quais se conhece o comprimento e a direção*.

T_{11}: *determinar a força resultante de dois vetores força que atuam sobre uma partícula na figura dada.*

T_{12}: *representar vetorialmente e determinar a posição de um corpo em movimento dada sua trajetória*

Na seção 4 os autores desenvolvem propriedades do produto escalar e definem ortogonalidade entre vetores, ângulo entre vetores e projeção entre vetores. E trazemos aqui a demonstração da propriedade: se θ é o ângulo entre os vetores a e b, e estes são diferentes de zero, então, $a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos\theta$

Demonstração: se a e b não são paralelos, temos uma situação semelhante à que ilustra a Figura 20. Então podemos aplicar a lei dos cossenos ao

> triângulo AOB. Como os comprimentos dos três lados do triangulo são $\|a\|$, $\|b\|$ e $d(A, B)$,
> $$[d(A, B)]^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$
> Usando a fórmula da distância e a definição da magnitude de um vetor, obtemos
> $$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$
> que se resume a
> $$-a_1 b_1 - a_2 b_2 = -2\|a\|\|b\| \cos\theta$$
> Dividindo por -2 os dois lados da última equação, temos
> $$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 2\|a\|\|b\| \cos\theta$$
> que é equivalente ao que desejávamos provar, porque o lado esquerdo é $a \cdot b$. (SWOKOWSKI; COLE, p. 516, 2011, tradução nossa)

A técnica consiste em determinar o módulo de vetores para aplicar a lei dos cossenos e desenvolver a solução, com as componentes dos vetores, para se chegar a uma relação e identificar o produto escalar.

Outros tipos de tarefa são:

T_{13}: *determinar o produto escalar de dois vetores.* Com a técnica de aplicar da definição de Produto escalar.

T_{14}: *determinar a medida do ângulo formado por dois vetores dados.* Com a técnica de aplicação do produto escalar, modulo de um vetor e razões trigonométricas $a_1b_1 + a_2b_2 = 2\|a\|\|b\| \cos\theta$.

T_{15}: *determinar a projeção de um vetor sobre outro dados dois vetores.* Com a técnica de produto escalar, módulo e a fórmula de projeção ortogonal.

T_{16}: *verificar a ortogonalidade entre dois vetores dados.* Com a técnica de verificar que o produto escalar igual é zero.

T_{17}: *determinar as componentes de vetor a sobre b.* Com a técnica de aplicar a fórmula de componente que implica aplicar o produto interno e módulo.

T_{18}: *determinar o trabalho realizado quando um corpo em movimento se desloca entre dois pontos dada a força constante e a direção.* Com a técnica de aplicar o valor absoluto do produto escalar, obtemos W= $F \cdot d$.

T_{19}: *demonstrar propriedades de produto escalar e módulo de vetores.* Com a técnica da aplicação de definições e propriedades de vetores.

Pelos tipos de tarefa, podemos perceber que o livro introduz vetores no MGS e passa para o MGA, onde encontramos a maioria das tarefas.

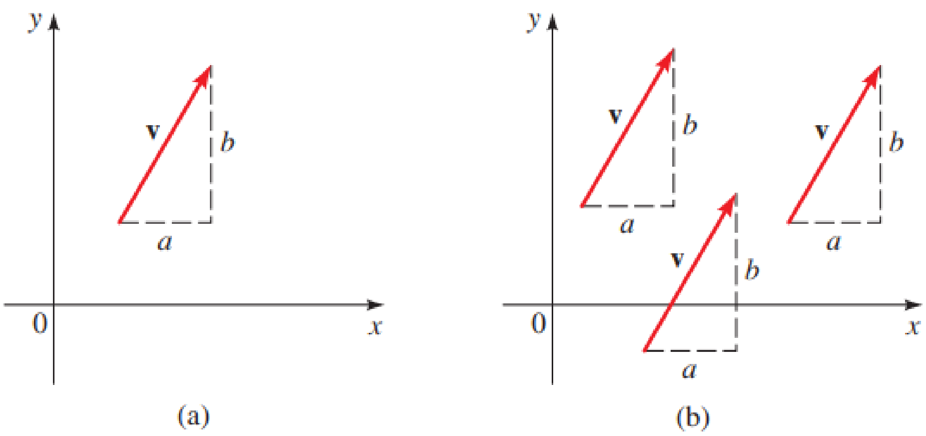
Análise praxeológica sobre vetores no livro de Stewart (LD4)

No quarto livro, *PreCálculo: Matemáticas para el Cálculo*, de Stewart publicado em 2012, o estudo de vetores está no capítulo 9 (p. 579-628) e destacamos que o livro apresenta, em sua parte final, todas as respostas para os problemas propostos.

Para a primeira questão da nossa análise, para introduzir vetores, o autor explica grandezas escalares e vetoriais e apresenta como exemplo as forças que atuam no movimento de automóveis, navios e veleiros.

Na seção 1, o autor define vetores como segmentos orientados e a adição de vetores pelo método do paralelogramo no MGS. A seguir, apresenta os vetores em um plano cartesiano explicando a suas componentes horizontal e vertical, como mostra a Figura 77.

Figura 77 - Interpretação de vetores no LD4



Fonte: Fonte: Stewart (p. 581, 2012)

Em seguida, na Figura 78, temos a definição de vetor a partir de suas componentes.

Figura 78 - Componentes de um vetor no LD4

FORMA COMPONENTE DE UN VECTOR

Si un vector **v** está representado en el plano con punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

Fonte: Stewart (p. 581, 2012)

Na sequência ele apresenta as definições de comprimento de um vetor e de adição e subtração de vetores, além da multiplicação de vetor por um escalar no MGA, e da seguinte forma:

Operações algébricas com vetores se $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ e $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1, b_1 \rangle + \langle a_2, b_2 \rangle$$
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1, b_1 \rangle - \langle a_2, b_2 \rangle$$
$$c\mathbf{u} = \langle \boldsymbol{ca_1}, \boldsymbol{cb_1} \rangle, \boldsymbol{c\epsilon}\mathbb{R}.$$ (STEWART, p. 582, 2012).

Podemos observar que o autor define diretamente a subtração de vetores sem apresentar a propriedade da existência do elemento oposto na adição, só as introduzindo na página seguinte

Nesta seção, o discurso tecnológico que o autor apresenta permite resolver tipos de tarefa tanto no contexto matemático quanto no contexto da física. No contexto matemático, identificamos os tipos de tarefas:

T_1: *determinar as componentes de um vetor dados seus pontos inicial e final.* T_2: *representar vetores dados seus pontos iniciais e finais em coordenadas cartesianas.*

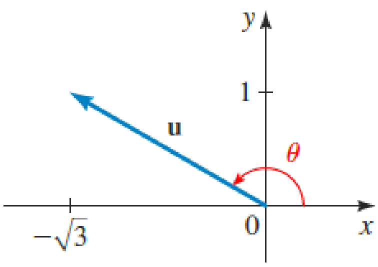
T_3: *determinar o módulo de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas*. T_4: *determinar a adição de dois vetores dados por suas coordenadas cartesianas.*

T_5: *determinar a multiplicação de um escalar por um vetor cujas coordenadas cartesianas são conhecidas.*

T_6: *determinar as componentes de um vetor dos quais são dados sua direção e comprimento*, como na seguinte tarefa:

Componentes e direção de um vetor
a) Um vetor v tem comprimento 8 e direção $\pi/3$. Encontre as componentes horizontais e verticais, e escreva $\mathbf{v}$ em termos de i y j.
b) Encontre a direção do vetor $\mathbf{u} = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
Solução:
a) Temos $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, onde as componentes estão dadas por
$a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4$ e $b = 8\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$
Portanto, $\mathbf{v} = (4, 4\sqrt{3}) = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$
b) Observar na figura que a direção θ tem a propriedade

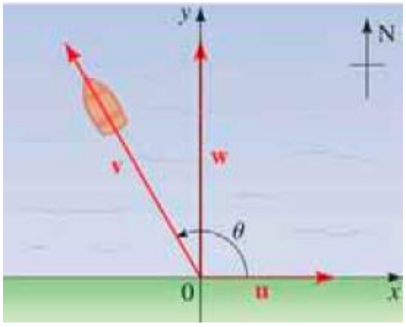
$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Então o ângulo de referência para θ é $\pi/6$. Como o ponto final do vetor $\mathbf{u}$ está no quadrante II, deduz-se que $\theta = 5\pi/6$. (STEWART, p. 584, 2012)

Para identificar a técnica que resolve a parte (a) da tarefa foi necessário mobilizar a relação entre suas componentes e relações trigonométricas para representar o vetor no referencial cartesiano e algebricamente em relação ao referencial ortonormal. Para a parte (b), foi necessário fazer uma representação gráfica da direção do vetor para relacionar seu ângulo com sua tangente e assim determinar a medida do ângulo que determina sua direção.

Entre os tipos de tarefa em contextos não matemáticos temos: T_7: *determinar a direção da velocidade final considerando que duas velocidades atuam sobre um móvel.* E aqui o autor apresenta uma tarefa desse tipo como sendo para usar vetores para modelar velocidade e força. Essa tarefa é:

> Calcular uma rota
> Uma mulher embarca em um bote na margem de um rio reto e quer desembarcar no ponto diretamente oposto na outra margem. Se a rapidez do bote é 10 mi/h e o rio corre à razão de 5 mi/h, em que direção ela deve dirigir o bote para chegar ao ponto desejado para desembarque?
> **Solução:**
> Escolhemos um sistema de coordenadas com a origem no ponto inicial do bote, como pode ser visto na figura.
>
> 
>
>
> Representamos com $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ as velocidades do rio e do bote, respectivamente. É claro que $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}$ e, como a rapidez do bote é 10 mi/h, temos $|\mathbf{v}|$=10 e, então,
> $$\mathbf{v} = (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j}$$
> em que o ângulo θ é como se mostra na figura. O curso verdadeiro do bote está dado pelo vetor $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Temos então
> $$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} + (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j} \\ &= (5 + 10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$
> Como a mulher deseja desembarcar em um ponto diretamente oposto ao ponto de embarque, a direção deve ter um componente horizontal de 0. Em outras palavras, deve-se escolher θ de modo que
> $$5 + 10\cos\theta = 0$$
> $$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
> $$\theta = 120°$$
> Portanto, ela deve dirigir o bote na direção $\theta = 120°$ (ou seja, N 30° E). (STEWART, p. 586, 2012).

Podemos ver que, por influência da matemática, o autor indica que o rio tem margem reta, o que não seria necessário informar por que podemos considerar que o bote parte de um ponto qualquer da margem do rio. A tarefa é resolvida no MGA e a técnica mobiliza conhecimentos de sistema de coordenadas cartesianas para descrever as componentes dos vetores de velocidade do bote e velocidade da água, além de conhecimentos de direção e de vetores unitários apoiados em uma ilustração. Esta tarefa apresenta elementos considerados em nosso MER e permite justificar uma das razões do estudo de vetores.

Os autores dividem os problemas e exercícios em três grupos: exercícios de conceitos, de habilidades e de aplicações. Para o primeiro grupo, identificamos os seguintes tipos de tarefa:

T_8: *determinar o ponto inicial e final de um vetor representado geometricamente.*

T_9: *determinar os componentes de um vetor e as coordenadas de seus pontos inicial e final representados graficamente.*

T_{10}: *calcular o comprimento de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas*.

T_{11}: *determinar a direção de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas*.

Para o grupo dos exercícios de habilidades, temos os seguintes tipos de tarefa:

T_{12}: *representar a soma de dois vetores representados graficamente.*

T_{13}: *representar a multiplicação de um vetor conhecido em sua representação gráfica por um escalar também dado.*

T_{14}: *converter um vetor escrito por suas componentes cartesianas para uma representação algébrica no referencial ortonormal.*

T_{15}: *calcular o módulo de um vetor dado no sistema de coordenadas.*

Do terceiro grupo – exercícios de aplicações –, identificamos:

T_{16}: *determinar as componentes horizontal e vertical sobre um corpo quando uma força externa atua sobre ele.*

T_{17}: *determinar as componentes do vetor velocidade de um avião que voa em uma direção e uma velocidade dadas;* uma tarefa desse tipo pode ser: um avião a jato está voando na direção N20°L a 500 mi/h. Encontrar as componentes norte e leste da velocidade.

T_{18}: *determinar as tensões que atuam sobre um corpo que está pendurado em um teto e pesa 100 lb dado o ângulo entre elas.*

Na segunda seção do estudo de vetores, o livro apresenta a definição de produto escalar e suas propriedades; entre elas, as que permitem determinar a medida do ângulo formado por dois vetores, determinar a ortogonalidade entre dois vetores, calcular os componentes de um vetor em relação a outro e, no final, define ainda a projeção de um vetor sobre outro, o produto escalar e o teorema do produto escalar que, com sua demonstração, permite encontrar o ângulo entre dois vetores, e, como consequência disso, caracterizar os vetores ortogonais. O produto escalar permite também definir o cálculo da componente $\mathrm{comp}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ e a projeção ortogonal $\mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$). de um vetor sobre outro. E é esse discurso tecnológico que será utilizado como técnica na resolução das tarefas nos tipos que identificamos na seção:

T_{19}: c *calcular o produto escalar de dois vetores dados por suas coordenadas cartesianas.*

T_{20}: *determinar a medida do ângulo entre dois vetores dados por suas coordenadas cartesianas.*

T_{21}: *determinar a projeção de um vetor sobre outros dados por suas coordenadas cartesianas*; e um exemplo de tarefa desse tipo é apresentado no livro:

> Sejam $\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$.
> Encontre $\mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
> Resolva $\mathbf{u}$ em $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, onde $\mathbf{u}_1$ é paralelo a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}_2$ é ortogonal a $\mathbf{v}$.
> **Solução:**
> Pela fórmula para a projeção de um vetor sobre outro se tem
> $$\begin{aligned}\mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\\ &= \left(\frac{\langle -2, 9\rangle\cdot\langle -1, 2\rangle}{(-1)^2+2^2}\right)\langle -1, 2\rangle\\ &= 4\langle -1, 2\rangle = \langle -4, 8\rangle\end{aligned}$$
> Pela fórmula se tem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, onde
> $$\mathbf{u}_1 = \mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle -4, 8\rangle$$
> $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathrm{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle - \langle -4, 8\rangle = \langle 2, 1\rangle$.

Na resolução da tarefa são mobilizadas a aplicação da definição de projeção de um vetor sobre outro e a decomposição de vetores.

Nos exercícios propostos identificamos alguns tipos de tarefas em contextos da física:

T_{20}: *determinar o trabalho realizado quando uma força dada move um corpo por uma determinada distância em linha reta*; uma tarefa desse tipo apresentada no livro é: a força $F = 4i - 7j$ move um corpo por uma distância 4 pés ao longo do eixo x no sentido positivo (os dois sentidos têm a mesma direção). Encontrar o trabalho feito se a unidade de força for a libra.

Na terceira seção do livro, o autor apresenta a geometria no espaço mostrando o referencial cartesiano e seus planos coordenados para então representar um vetor e uma aplicação para encontrar a equação de uma esfera. Além disso, traz tarefas a respeito do módulo de vetor.

Na quarta seção, vemos a definição do vetor no espaço de modo semelhante ao que utilizado no plano, com a definição de produto escalar, ângulo entre dois vetores, ângulos diretores de um vetor e a apresentação da propriedade de cossenos diretores. Os tipos de tarefa que o autor propõe são as mesmas apresentadas para o plano, mas suas tarefas agora tratam de vetores no espaço. No entanto, identificamos alguns tipos de tarefa específicos para o espaço como, por exemplo, T_{22}: *determinar a medida do ângulo central de um tetraedro determinado pelas coordenadas de seus vértices.*

Na quinta seção, o autor apresenta a esfera como aplicação de módulo de vetor, além de definir produto vetorial e produto misto, e aqui identificamos os seguintes tipos de tarefa:

T_{23}: *calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores dados em coordenadas cartesianas.*

T_{24}: *calcular a medida do volume de um paralelepípedo determinado por três vetores dados em coordenadas cartesianas.*

E, no final do capítulo, o livro traz uma lista de exercícios para a verificação de aprendizagem, todos no MGA.

Análise praxeológica sobre vetores no livro de Leithold (LD5)

O livro *Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica*, de Leithold, publicado em 1998, apresenta o estudo de vetores no plano no capítulo 10 na primeira seção (586-597).

Com respeito à primeira questão da nossa análise, o autor do LD5 introduz vetores explicando que as grandezas utilizadas, em geral, em aplicações matemáticas podem ter tanto quantidade ou intensidade quanto direção, exemplificando isto com velocidade, força, deslocamento e aceleração. O autor afirma que os físicos e engenheiros entendem por vetor um segmento reto orientado, que as grandezas que têm quantidade e direção se denominam vetoriais e que o estudo de vetores recebe o nome de análise vetorial.

Quanto à segunda questão, o vetor é definido como um segmento orientado que parte de um ponto P e chega até um ponto Q, denotado por $\overrightarrow{PQ}$. Em seguida, explica a igualdade de vetores como sendo aqueles que têm o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido e que são descritos como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Tais informações são acompanhadas de uma figura no MGS. O autor também explica que se utiliza do estudo analítico de vetores para representá-lo por suas coordenadas cartesianas e define um vetor no plano como "um par ordenado de números reais $\langle x, y\rangle$. Os números x e y são componentes do vetor $\langle x, y\rangle$." (LEITHOLD, p. 587, 1998, tradução nossa).

O autor define a adição de dois vetores (por sua soma) como mostra a Figura 79. Consideramos que o leitor deva entender que se refere ao resultado da adição de vetores

Figura 79 - Adição de vetores no LD5

DEFINICIÓN **Suma de dos vectores**

La **suma** de dos vectores $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$ es el vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ definido por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$$

Fonte: Leithold (p. 589, 1998)

A seguir, ele define a multiplicação de um vetor por um escalar e, com base nos exemplos dados, identificamos os seguintes tipos de tarefa:

T_1: *determinar a direção de um vetor dado por suas coordenadas cartesianas,* e cujas tarefas são resolvidas por técnicas que mobilizam módulo de vetor e ângulo formado por dois vetores.

T_2: *determinar o módulo da resultante de duas forças dadas que atuam sobre um corpo.*

T_3: *determinar a medida do ângulo que a resultante de duas forças dadas que atuam sobre um corpo forma com cada uma das forças no ponto em que atuam*. E aqui o autor apresenta um exemplo com tarefa que inclui T_2 e T_3:

> Duas forças de magnitudes 200 lb e 250 lb formam um ângulo de $\frac{1}{3}\pi$ entre si e estão aplicadas a um objeto no mesmo ponto. Determine (a) a intensidade ou módulo da força resultante e (b) o ângulo que forma a resultante com a força de 200 lb.

Solução: Veja a figura, onde os eixos foram escolhidos de modo que a representação da posição da força de 200 lb coincida com a parte positiva do eixo x. O vetor $\mathbf{A}$ representa esta força e $\mathbf{A} = \langle 200, 0\rangle$. O vetor $\mathbf{B}$ representa a força de 250 lb. Se $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2\rangle$, então

$b_1 = 250 \cos\frac{1}{3}\pi \quad b_2 = 250 \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi$

$= 125 \quad b_2 = 216{,}5$

De modo que, $\mathbf{B} = \langle 125;\ 216{,}5\rangle$. A força resultante é $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, e

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$ $=\langle 200, 0\rangle + \langle 125;\ 216{,}5\rangle$

$= \langle 325;\ 216{,}5\rangle$

$$\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \sqrt{(325)^2 + (216{,}5)^2}$$

$\approx 390{,}5$

Conclusão. A medida da força é 390,5 lb.

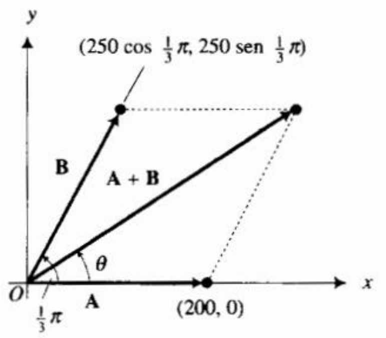
(b) Se θ é o ângulo que o vetor $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ forma com o vetor $\mathbf{A}$, então

$$\tan\theta = \frac{216{,}5}{325}$$

$$\tan\theta \approx 0{,}6662$$

$$\theta \approx 33{,}67°$$

Conclusão. A força resultante forma um ângulo de 33,67° com a força de 200lb. (LEITHOLD, 591, 1998, tradução nossa).



A técnica utilizada pelo autor para a parte (a) mobiliza decomposição de vetores, adição de vetores e módulo de vetor; para a parte (b) a determinação da medida de ângulos por razões trigonométricas no MGA.

Nos problemas propostos identificamos os seguintes tipos de tarefa:

T_3: *converter a representação de um vetor dado por coordenadas cartesianas para uma representação algébrica no referencial ortonormal.*

T_4: *determinar a soma de dois vetores dados em uma representação algébrica do referencial ortonormal.*

T_5: *determinar a multiplicação de um vetor dado algebricamente em um referencial ortonormal por um escalar dado.*

T_6: *representar na forma trigonométrica no referencial ortonormal vetores dados na forma algébrica nesse mesmo referencial.*

T_7: *determinar a velocidade resultante de duas velocidades que movem um corpo no sentido do Sul para o Leste e com uma velocidade na direção Leste,* e uma tarefa desse tipo é t_2: um nadador que pode nadar a uma velocidade de 1,5 mi/h em relação à água parte da margem Sul de um rio e se dirige ao norte. Se a corrente do rio flui para Leste a 0,8 mi/h: (a) em que direção vai o nadador? (b) qual é a velocidade do nadador em relação à terra? (c) se a largura do rio é de 1 milha, a que distância o nadador alcança a outra margem rio abaixo? Uma técnica para resolver essas tarefas (a, b ou c) é construir uma representação gráfica das forças que atuam sobre o nadador e considerar que a velocidade do nadador é a soma de sua velocidade à velocidade da água. Depois representar as componentes cartesianas de cada velocidade para realizar a adição e calcular seu módulo. O autor apresenta ainda tipos de tarefa relacionados a força e deslocamento.

Os cinco livros didáticos apresentam tipos de tarefas em contexto matemático (a maioria como exemplos ou exercícios) cujas tarefas são resolvidas por técnicas que são aplicação direta de definições e propriedades já apresentadas, mas nem todas demonstradas. Entendemos que os autores iniciam a apresentação dos conteúdos relacionados a vetores pelo bloco do saber (discurso tecnológico-teórico) para então apresentar o bloco do saber-fazer através de tarefas que se configuram como situações de aplicação dos modelos exemplificados. Consideramos ainda que os autores não apresentam situações que façam emergir qualquer questionamento sobre vetores nem sobre suas razões de ser.

A seguir, resumimos os tipos de tarefa apresentados em LD1, LD2, LD3, LD4 e LD5 em cinco grupos nomeados por GT_i com $i = 1, 2, \cdots, 5$.

($\boldsymbol{GT_1}$) *Cálculos diretos de vetores quando são conhecidas suas coordenadas e com aplicação das definições e propriedades.* Exemplos de tarefas deste grupo são:

T_{01}: *calcular o módulo de um vetor.*

T_{02}: *determinar a medida do ângulo que um vetor dado forma com o eixo das abscissas.*

T_{03}: *calcular o módulo de um vetor que é multiplicado por um escalar,*

T_{04}: *determinar a adição de dois vetores,*

T_{05}: *determinar a soma de dois vetores que estão multiplicados por escalares.*

T_{06}: *determinar o vetor unitário de um vetor dado.*

T_{07}: *determinar um vetor dados seu módulo e a medida do ângulo que ele forma com o eixo das abscissas.* Etc.

($\boldsymbol{GT_2}$) *Encontrar ângulos ou distâncias e que requerem definições e propriedades.*

T_{01}: *determinar cada ângulo de um triângulo dados os três pontos de seus vértices.*

T_{02}: *determinar a distância entre um ponto* P *e a reta que passa pelos pontos* Q *e* R *dados*. Etc.

($\boldsymbol{GT_3}$) *Cálculo da medida de área ou de volume envolvendo vetores.*

T_{01}: *calcular a medida da área de um paralelogramo determinado por dois vetores dados em coordenadas cartesianas.*

T_{02}: *calcular a medida do volume de um paralelepípedo determinado por três vetores dados em coordenadas cartesianas.* Etc.

($\boldsymbol{GT_4}$) *Fazer demonstrações de algumas propriedades e proposições envolvendo vetores.*

T_{01}: *demonstrar propriedades produto escalar e módulo de vetores.*

T_{02}: *demonstrar propriedades que envolvem produto vetorial e produto escalar.* Etc.

Consideramos como GT_5 o grupo de tarefas em que vetores são usados como ferramentas para resolver problemas da física, e que em alguns livros chamado de aplicações de vetores.

($\boldsymbol{GT_5}$) *Uso de vetores em problemas da física.*

T_{01}: *identificar e representar o fenômeno da velocidade de um corpo em movimento uniforme.*

T_{02}: *determinar o trabalho realizado quando um corpo em movimento se desloca entre dois pontos dadas a força constante e a direção.* Etc.

Cada um dos cinco livros apresenta um conjunto de tipos de tarefas que classificamos no Quadro 10.

Quadro 10 – Resumo de tipos de tarefas presentes nos livros didáticos

Livro	$\boldsymbol{GT_1}$	$\boldsymbol{GT_2}$	$\boldsymbol{GT_3}$	$\boldsymbol{GT_4}$	$\boldsymbol{GT_5}$
LD1	✓	✓	✓	✓	✓
LD2	✓	–	–	–	–
LD3	✓	–	–	✓	✓
LD4	✓	✓	✓	✓	✓
LD5	✓	–	✓	✓	✓

Fonte: Produção da autora

Na seção que segue apresentamos o modelo de referência vigente e as dificuldades que surgem quando pretendemos modificar as organizações matemáticas de vetores e as possibilidades de organização didática para o ensino de vetores.

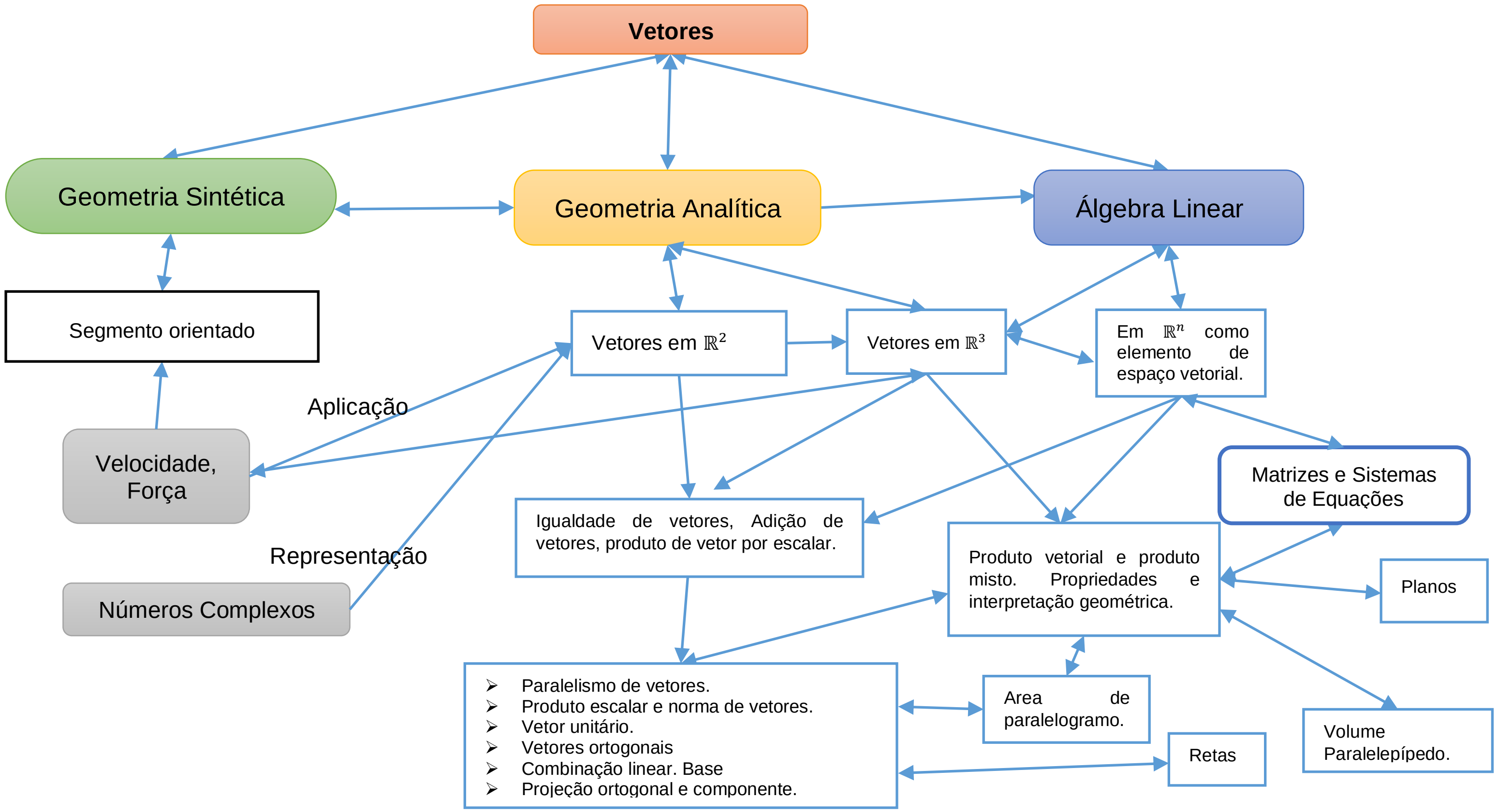
3.3.3 Identificação do Modelo Epistemológico Vigente (MEV)

Na TAD, o modelo epistemológico de referência (MER) é uma ferramenta central para analisar a epistemologia predominante na instituição pesquisada. Em nossa análise econômica-institucional pudemos ver que no movimento de transposição a revisão do Currículo Nacional Peruano e alguns tipos de tarefas para o ensino médio regular evidenciam que os estudantes devem ter noção de localização e de movimento, além da capacidade de distinguir tipos de grandezas relacionados ao MGS e MGA do nosso MER.

No primeiro ciclo da educação superior no Peru, a definição matemática de vetor é considerada nos programas curriculares da universidade como objeto a ser ensinado nas especialidades de matemáticas e ciências naturais. A instituição da disciplina Álgebra Matricial e Geometria Analítica permitiu, por meio de suas ementas, acesso aos conteúdos abordados e a revisão dos livros que constam de sua bibliografia e que tratam de vetores evidenciou que a noção de vetor é introduzida pela representação de uma grandeza enquanto o vetor é definido como segmento orientado no modelo MGS. Na sequência, em geral, os livros repetem os conteúdos no MGA e o ampliam no MAL. Todos os títulos analisados apresentam o discurso tecnológico e teórico através de definições e propriedades para, só então, apresentar tipos de tarefas, em exemplos ou exercícios, para que esses equipamentos (técnica e tecnologia) sejam aplicados. Entendemos que tal escolha não permite o desenvolvimento do saber-fazer pelo desenvolvimento de uma técnica ou da ampliação de uma técnica anterior pelo desenvolvimento de um discurso tecnológico que a justifique. Assim, não há também uma teoria que justifique a técnica, o que caracterizaria uma praxeologia matemática. Pelo contrário, os alunos memorizam regras, mesmo sem construir significado para elas, e as aplicam enquanto as lembrarem, e isto ocorre para todos os modelos.

A fim de resumir e organizar a apresentação do MEV encontrado, construímos o esquema apresentado na Figura 80 que representa o sistema de ensino de vetores para o primeiro semestre de nível superior apresentando as praxeologias identificadas em cada modelo descrito nos livros.

Figura 80 - MEV de vetores para o primeiro semestre do nível superior – disciplina AMGA - PUCP



Fonte: Produção da autora

Lucas (2015) afirma que tarefas isoladas, desarticuladas entre si e que não mostram a razão de ser geram problemas porque para os alunos elas não fazem sentido, e que esta é uma característica da pedagogia dominante que está relacionada ao monumentalismo, pois os conteúdos são estabelecidos de antemão para que o aluno possa visitá-los.

Tal pedagogia dificulta, inclusive, mudanças no contrato didático tradicional para permitir o compartilhamento de algumas responsabilidades com os alunos que atualmente são atribuídas com exclusividade ao professor.

De acordo com Bosh (2012), a mudança do contrato didático pode gerar dificuldades para estudantes e professores em termos de adaptação ao novo tipo de atividade. Também pode haver restrições institucionais em distintos níveis, pois as instituições de ensino superior esperam que o professor apresente os conteúdos predeterminados pela comunidade cientifica. Além disso, a resistência pode vir da epistemologia dominante nessas instituições a respeito do papel da matemática para o desenvolvimento das ciências – denominado aplicacionismo – e, por último, podem surgir da maneira como se dá a construção e transmissão do conhecimento a partir do paradigma de visita às obras.

Pelo estudo feito nesta dimensão, a razão de ser dos vetores no ensino superior é dotar os alunos de um discurso tecnológico teórico que possa ser aplicado tanto em matemática quanto em outras áreas, como a física.

Podemos concluir que, no ensino básico, os conhecimentos em jogo estão nos campos da GS e da GA, além da Física, principalmente quando relacionados a grandezas e, no ensino superior, além dos anteriores no campo da AL, com a necessidade de se abstrair os vetores em $\mathbb{R}^n$.

3.4 A Dimensão Ecológica

Esta dimensão apresenta questões que procuram identificar as condições cruciais à vida, à origem e ao desenvolvimento das praxeologias do ensino envolvidas em um determinado problema didático com o objetivo de esclarecer as restrições que impedem a propagação do conhecimento matemático. De acordo com Almouloud (2007), Chevallard introduziu a noção de habitat e nicho de um objeto matemático, considerando a primeira como o tipo de instituição em que se encontram os saberes relacionados a esse objeto e que, por sua vez, determina sua função, ou seja, seu nicho. Essas noções permitem observar como o saber matemático se estabelece como um modo particular do conhecimento por meio da ação humana em determinada instituição. Ainda segundo o autor, a análise ecológica busca responder às seguintes questões:

> O objeto do saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Tal objeto do saber é efetivamente trabalhado na escola? Se sim, em quais condições? Se não, quais são os motivos para ser deixado de lado? As respostas a estas questões permitem identificar a razão de ser desse objeto do saber na instituição escolar. (ALMOULOUD, 2015, p.15)

Vimos nos estudos anteriores que os vetores fazem parte das recomendações curriculares para o Ensino Superior peruano e estão presentes nos conteúdos de seus livros didáticos, o que nos permite tecer as seguintes questões para direcionarmos nosso estudo ecológico desse conteúdo matemático nessa instituição:

$\boldsymbol{Q_{31}(V)}$: Quais são as principais restrições que dificultam e até impedem a justificativa de praxeologias matemáticas sobre vetores nos anos iniciais de instituições educativas de nível superior?

$\boldsymbol{Q_{32}(V)}$: Em que nível da escala de codeterminação didática aparecem estas restrições e em que nível deveríamos situá-las, em cada caso, para podermos considerá-las como condições “modificáveis”? Quais os habitats e nichos relativos ao objeto matemático vetor?

Para construir a reposta $\boldsymbol{R_{31}(V)}$, baseamo-nos em Gascón (2011) quando ele afirma que na dimensão ecológica qualquer problema didático inclui, de certo modo, as dimensões epistemológica e econômico-institucional, pois do ponto de vista da TAD, todo problema didático é, até certo ponto, um problema de ecologia praxeológica ou, mais precisamente, que a didática se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas.

O MER que propusemos permite situar a razão de ser do vetor em problemas de grandezas vetoriais na física e na extensão da álgebra para maiores dimensões, o que requer um entorno que disponibilize aos alunos meios para trabalhar neste âmbito. Tais meios, no entanto, não estão disponíveis no nível superior, pois temos disciplinas com conteúdos desarticulados já no semestre inicial. Essa desarticulação constitui uma manifestação particular do fenômeno disciplinar escolar da matemática, de acordo com Chevallard (2002), que situa sua origem na atomização do material a ser estudado. Para o autor, tal fenômeno contradiz a ambição original para o ensino de matemática, estatística, geometria, álgebra etc., porque nos movimentos de desconstrução e reconstrução das obras a serem estudadas são construídos apenas fragmentos de um quebra-cabeça que jamais será reconstruído como um todo. Chevallard acrescenta que "o contraste é ainda mais marcante com a imagem que se pode traçar, grosso modo, para o 'dualismo dos problemas e da síntese' proposto por Georges Bouligand, e que anima a autêntica atividade matemática." (CHEVALLARD, 2002, p. 41-42, tradução nossa).

Baseado em nosso estudo econômico-institucional, vimos que existem restrições para o ensino de vetores, pois na revisão das ementas das disciplinas percebemos o foco em uma axiomática para vetores em que estão organizadas definições e propriedades em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, o que causa uma incompletude motivada pela epistemologia dominante. A incompletude provocada pelo foco em um estudo axiomático em que a razão de ser dos vetores é esquecida e o aluno só tem que memorizar propriedades para utilizá-las como técnicas rígidas e de pouca aplicabilidade em problemas de sua vida cotidiana.

Em relação à resposta da segunda questão $\boldsymbol{R_{32}(V)}$, consideramos o estudo da dimensão econômica em que os documentos oficiais e as ementas das disciplinas Álgebra Matricial e Geometria Analítica, e Matemática Básica mostram que os vetores estão presentes nos primeiros semestres das faculdades de ciências e engenharia.

Neste caso, a civilização é a cultura ocidental; a sociedade, de acordo com Chevallard (2001), está conformada pela noosfera[27] peruana. Nossa pesquisa é no chamado nível superior do sistema de ensino peruano, mais especificamente na universidade, onde os professores, para ensinar, cumprem os requisitos das leis universitárias[28]. A disciplina é Álgebra Matricial e Geometria Analítica e, pelos conteúdos da ementa, o objeto matemático corresponde ao domínio da Geometria e da Álgebra Matricial. O setor é a Geometria, com a introdução aos vetores e às suas

---

[27] Chevallard (1991) denomina de noosfera um conjunto composto por instituições que regulam e determinam a seleção e as modificações que o Saber Sábio sofrerá ao longo do processo transpositivo. Dentre as instituições que compõem a noosfera, podemos destacar, por exemplo, os cientistas, professores, políticos, livros didáticos, pais de alunos, entre outros.

[28] *Lei universitária peruana, artículo 17.2.3. Contar con el grado académico de Doctor o Maestro habiéndolo obtenido con estudios presenciales y haber desempeñado cargos de gestión en el ámbito público o privado o en el ámbito educativo, por un periodo mínimo de 10 (diez) año*s, p.5, 2021.

propriedades básicas, que pertencem, mais exatamente, à Geometria plana e no espaço. Por fim, o tema é os vetores.

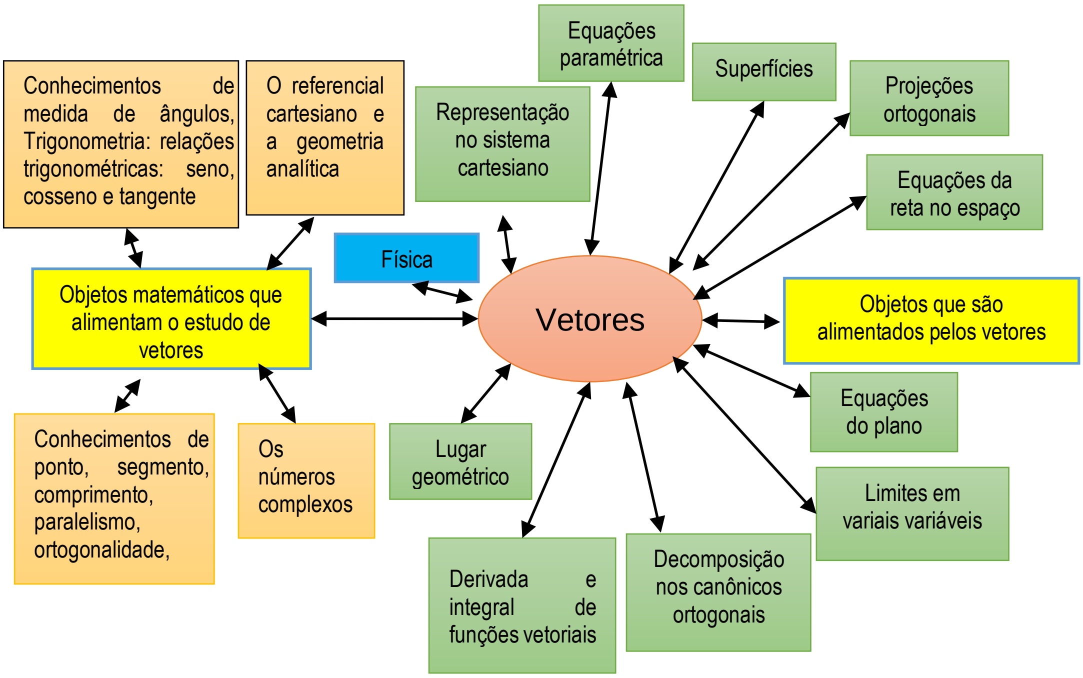
Bosch (2018) afirma que a escala de codeterminação didática é, antes de tudo, uma ferramenta para os pesquisadores em didática questionarem a realidade que almejam estudar, e que sua principal utilidade é ampliar nossa visão para certos campos empíricos que são tradicionalmente mantidos fora da perspectiva dos didatas e que, portanto, são tidos como certos. Além disso, a autora indica que muitas pesquisas em didática que focam nos níveis dos assuntos ou temas ensinados e aprendidos raramente questionam a estruturação específica das disciplinas, setores ou domínios a que essas questões ou temas pertencem.

Acreditamos que estas limitações estejam relacionadas à organização dos saberes causada pela transposição didática, pois a instituição tem a tarefa de apresentar o conteúdo de modo ordenado, o que se reduz à apresentação de regras prontas e estratégias simplificadas na tentativa de promover a aprendizagem do aluno.

Com respeito ao nicho e habitat, o desenvolvimento do MER no modelo da geometria sintética permitiu identificar os conteúdos específicos que se relacionam com vetores e na resolução de tarefas que envolvem velocidade, deslocamento e posição. Estes fenômenos físicos podem ser representados como segmentos orientados, junto com a adição pelo método do paralelogramo, mostrando a razão de ser dos vetores, mas para o estudo do deslocamento em queda livre e a estabilidade das forças foi necessário considerar os vetores no modelo da geometria analítica.

As representações dos números complexos permitiram o estudo dos quatérnios, desenvolvidos por Hamilton, e que contribuíram para definir as operações de produto escalar e produto vetorial. Na sequência, o produto escalar foi utilizado para obter o ângulo entre vetores, as equações da reta, a generalização até $\mathbb{R}^n$ e a projeção ortogonal. O produto vetorial ajudou a fazer emergir as propriedades para as equações do plano, as áreas de paralelogramos e, finalmente, o produto misto para o volume dos poliedros. As tarefas que estudamos permitem identificar os objetos matemáticos que alimentam os vetores, como, por exemplo, conhecimentos de medida de ângulo, ponto, segmento, reta etc. – e mostramos alguns deles na Figura 81.

Figura 81 - Esquema ecológico dos vetores



Fonte: Construção da autora

3.5 Síntese dos principais resultados deste capítulo

O estudo das três dimensões se refere à dimensão epistemológica que permitiu a construção de um modelo epistemológico de referência, o qual, por sua vez, permitiu identificar os tipos de tarefas na geometria sintética, na geometria analítica e na álgebra linear.

Na dimensão econômica, proporcionou-nos condições para identificação dos tipos de tarefa existentes nos cinco livros analisados, e a identificação das restrições e condições na dimensão ecológica.

Para o problema inicial docente “o que tenho que ensinar aos meus alunos em relação aos vetores e como devo ensiná-lo?”, e que se torna agora um problema didático, dispomos de um elemento de resposta provisório que é o MER construído, e tomamos como referência o trabalho de Ruiz-Olarría (2015), em relação à TAD, que propõe como dispositivo didático o Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP). No próximo capítulo, estudaremos esse dispositivo.

4 UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Neste capítulo, apresentamos, na perspectiva da TAD, os objetivos do nosso Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), as informações relevantes dos sujeitos da pesquisa e a análise *a priori* do PEP-FP, além de análise *in vivo* e análise *a posteriori*.

4.1 Objetivo do PEP-FP

O objetivo da pesquisa é investigar de que maneira o dispositivo do Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores pode ajudar um grupo de futuros professores ou professores em exercício a questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino referentes a vetores. Construímos o PEP de forma que permitisse vivenciar ferramentas da Geometria Vetorial que não são geralmente ensinados em matemática, mas que são utilizadas na física ou engenharia.

A respeito do PEP e de sua ecologia no ensino, em particular no ensino superior, Bosch (2020[29]) afirma que "os PEP são uma ferramenta de pesquisa e desenho para analisar as condições requeridas para se avançar para um novo paradigma do questionamento do mundo [...]" que "ligam, de forma dialética, o estudo das obras com a investigação de questionamento problemático", e ainda que "a implementação dos PEP, no nível universitário, defronta com muitas restrições que provêm, em sua maioria, do paradigma de visita às obras[30]" (BOSCH, 2020, Conferência, tradução nossa).

O PEP-FP foi desenvolvido no início do semestre da disciplina de Geometria Euclidiana no plano e no espaço ofertada no mestrado de Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Peru, em aulas remotas com apresentações dos avanços pelos alunos mediados e orientados pela professora pesquisadora. No final do PEP, as aulas de geometria continuaram de forma tradicional com outro professor, pois foi dado um prazo específico para a implementação do PEP-FP levando em

[29] Conferencia Cuestiones metodológicas en torno a los recorridos de estudio e investigación. Propuestas y problemas abiertos. PUCP Lima. Perú, 2020

[30] La implementación de los REI en el nivel universitario choca con muchas restricciones que provienen, en su mayoría, del paradigma de la visita de las obras. BOSCH, 2020, Conferência.

consideração a organização do curso, previamente definida pelo professor regente da turma.

4.2 Sujeitos da pesquisa e contexto institucional

Esta pesquisa tem como foco estudantes do programa do Mestrado em Ensino da Matemática da Escola de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica do Peru, e que podem, portanto, lecionar matemática no ensino dos primeiros anos do nível superior.

O programa visa formar professores, pesquisadores e outros professionais na perspectiva do construtivismo matemático. Eles devem ser capazes de criar conhecimentos a partir da pesquisa baseada na produção das comunidades de pesquisa e linhas de pesquisa da área, e tem como objetivo principal:

> estudar, a partir da didática da matemática, problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem da matemática nos níveis **básico e superior**. Para tal, os alunos receberão as ferramentas teóricas e metodológicas necessárias para que possam iniciar a investigação. Além disso, terão à sua disposição um corpo docente com vasta experiência em didática da matemática, matemática e investigação (PUCP, 2017a, p. 1, tradução nossa).

Após a conclusão do mestrado em ensino de matemática, o estudante:

> Terá conhecimentos que lhe permitirão compreender a matemática e reconhecer a natureza antropológica desta ciência.
> Estará preparado para desenvolver pesquisas com base nos referenciais teóricos e metodológicos da didática da matemática, que permitem explicar fenômenos que ocorrem no ensino e aprendizagem da matemática nos diferentes níveis de ensino e utilizar a tecnologia como meio de analisar, explicar e investigar os processos de ensino e aprendizagem da matemática, a partir da Didática da Matemática. (PUCP, 2017b, p. 1, tradução nossa).

Cabe ressaltar que alguns alunos do mestrado em ensino de matemática no Peru têm bacharelado em matemática ou em pedagogia (ensino médio) ou engenharia, podendo ser professores em exercício em graduação no nível superior de universidades nacionais ou privadas, e que outros são pré-docentes[31] na PUCP. Para poder ser professor de universidade, pelas leis peruanas atuais, é preciso ter o título profissional de licenciado na área e grau de mestre, conforme a Lei 30220, Capítulo VIII, artigo 82.1.

---

[31] A categoria de pré-docente na PUCP é também chamada “chefe de prática” – trata-se de um professor que ensina a parte pratica enquanto outro professor, pertencente à categoria de “docente”, ensina a teoria.

4.3 Análise a priori do PEP-FP

Consideramos o sistema didático $S(X, Y, O)$, de acordo com Chevallard (2013b), em que X representa o conjunto de alunos de mestrado em Ensino de Matemática da PUCP, Y é a professora pesquisadora e O é a obra que será estudada. Como trabalhamos com um PEP-FP, a obra é substituída pela questão geratriz e o sistema didático passa a ser representado por $S(X, Y, Q_0.)$, com o esquema Herbartiano semidesenvolvido: $[S(X, Y, Q_0.) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, em que, de uma maneira mais ou menos desordenada, o sistema didático cria o meio M para produzir a resposta final $R^{\heartsuit}$ para a Q_0 delineada pelo meio M. Na busca dessa resposta, o meio M é formado por questões e respostas derivadas da questão inicial e que denotamos por $\{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_{2,} \dots, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \dots\}$.

A questão geratriz para o desenvolvimento do PEP-FP foi formulada considerando elementos pesquisados na construção do nosso MER, mostrando que uma razão de ser dos vetores é resolver problemas envolvidos em alguns fenômenos como movimento (velocidade), forças etc.

Além disso, para a proposta da Q_0-FP que ocorre no módulo M_0, consideramos um princípio da aeronáutica e da náutica relacionado à Física que estuda as caraterísticas que permitem aviões e veleiros se deslocarem e que envolvem vetores. Os vetores também podem surgir em atividades de transporte e esporte, em eventos de competições náuticas – como Olimpíadas ou Jogos Pan-americanos – e permitem a implementação de pesquisas de controle automático, eletrônico etc. e a interdisciplinaridade de áreas como a engenharia, a física e a matemática.

Consideramos a seguinte situação:

Rina é professora universitária e ministrará, pela primeira vez, a disciplina de geometria vetorial para alunos do primeiro semestre de ciências e engenharia. O programa do curso prevê começar pela utilização de vetores e, depois de pensar muito sobre isso, Rina concluiu que seria muito interessante começar pelo estudo do movimento de veleiros. O que você acha da ideia da Rina? Como você acha que Rina deveria introduzir o tema dos vetores? Para dar a proposta, formulamos a seguinte questão. Como explicar o movimento dos veleiros para alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana?

Assim a questão $\mathbf{Q_0}$ que inicia o PEP-FP é:

$\mathbf{Q_0}$: Como explicar a movimentação dos veleiros para alunos do primeiro semestre de estudos gerais (ciências e engenharia) de uma universidade peruana?

Para dar a reposta $R^{\heartsuit}$, consideramos pertinente que o percurso focasse em três categorias que descrevemos: o significado do veleiro, o movimento do veleiro e como explicar o movimento do veleiro. Na primeira esperamos que o sujeito comece identificando o contexto, isto é, que procure os elementos que intervêm no movimento do veleiro. A segunda categoria tem por objetivo identificar elementos da física ou da engenharia que permitem o movimento, ou seja, mostrar a razão de ser do objeto vetor nas ciências e engenharia para justificar as possíveis conjecturas que surgem para explicar o movimento. A terça e última categoria tem por objetivo que o sujeito faça a transposição do saber a ser ensinado ao saber ensinado, quer dizer, que o sujeito conheça ou pesquise em livros ou na internet o objeto de pesquisa para explicitar o que tem que ensinar aos estudantes a respeito de vetores, além das interpretações no contexto.

No desenvolvimento do PEP, consideramos as dialéticas mesogênese e das mídias e meios para construir o meio e para elaborar as perguntas e respostas R_{ij} provisórias. No PEP, as praxeologias que foram construídas relacionando X (conjunto de professores) e Y (professor pesquisador) permitiram observar a topogênese. Já o tempo de trabalho do M produzirá a reposta $R^{\heartsuit}$ que nos permite observar a cronogênese

Para dar a reposta à questão, estruturamos 11 aulas remotas distribuídas em oito sessões de 2 horas cada e que envolveram trabalho em grupo e plenários que aconteceram pelo Zoom

A seguir, apresentamos cada uma das sessões planejadas com as atividades que foram desenvolvidas, os objetivos e a duração aproximada. Apresentamos ainda o mapa de Q-R que esperamos ter ao final de cada sessão, como parte das informações os grupos devem apresentar.

Sessão 1

No Quadro 11, revelamos o que foi planejado para a primeira seção do PEP-FP. Nesse sentido, apresentaremos no plenário o referencial teórico para desenvolver o PEP e o critério de avaliação, pois o percurso ocorreu em uma disciplina que exige avaliação. A seguir, solicitamos que respondessem um questionário inicial para determinarmos o perfil desses professores.

Quadro 11 – Plano para a sessão 1

Atividades	Objetivos	Tarefas envolvidas	Tempo
Plenário (todos) Introduzir referenciais teóricos para desenvolver o PEP Indicações e critérios de avaliação	Descrever o referencial teórico. Descrever o critério de avaliação por cada informação e apresentação	Identificar o paradigma do monumentalismo e introduzir o paradigma de questionamento do mundo	50 min
Atividade 1 Questionário inicial (individual)	Identificar que caraterísticas, formação, experiência dos participantes.	Participar no questionário virtual 1.	10min

Fonte. Produção da autora

No questionário da atividade inicial constavam as seguintes questões:

1) Idade do participante:

2) Indique sua especialidade e a instituição de ensino superior em que se formou.

3) Você já lecionou em uma instituição educacional. Marque o nível correspondente.

Primário ( ) Secundário ( ) Superior ( ) NA ( )

4) Indique os cursos que ministrou. Mencione os 5 mais relevantes.

5) Se você já utilizou algum software matemático, mencione em qual tópico você utilizou este software.

Com essas questões foi possível identificar algumas caraterísticas que nos permitiram conhecer, com mais precisão, os sujeitos que participaram do estudo, o que nos ajudou na análise dos seus conhecimentos e de suas reflexões.

Sessões 2 e 3

No Quadro 12 apresentamos as atividades previstas para os dois encontros com seus objetivos e as tarefas envolvidas.

Quadro 12 - Planos para as sessões 2 e 3

Atividades	Objetivos	Tarefas envolvidas	Tempo
Atividade 2(a) Informe (individual)	Identificar o contexto do problema e aproximar os participantes (alunos) com os elementos da questão $\mathbf{Q_0}$.	- Buscar informação no ambiente virtual individualmente. - Formular questões para ajudar a responder $\mathbf{Q_0}$	50 min
Atividade 2(b) (grupal) Informe (grupal)	Construir um esquema do mapa de questões. Justificar e descrever o processo	- Categorizar as questões em equipes (como máximo quatro alunos) - Buscar informação no ambiente virtual individualmente ou grupal.	100 min
Plenário 2(c) (Todos)	Apresentação dos esquemas e obtenção sugestões	- Socialização de informação e avanço de 7 equipes	50 min

Fonte. Produção da autora

A atividade 2(a) foi prevista para ser realizada individualmente para que pudéssemos obter uma variedade maior de questões que ajudassem a chegar a uma reposta à questão $\mathbf{Q_0}$.

Atividade 2(a) (Individualmente)
Para a seguinte situação:
Rina é professora universitária e ministrará, pela primeira vez, a disciplina de geometria vetorial para alunos do primeiro semestre de ciências e engenharia. O programa do curso prevê começar pelo uso de vetores e, depois de pensar muito sobre isso, Rina concluiu que seria muito interessante começar pelo estudo do movimento de veleiros.
O que você acha da ideia da Rina? Como você acha que Rina deveria introduzir o tema dos vetores (definir, desenvolver propriedades e exemplos)?
Para dar a proposta, formulamos a seguinte questão.
Como explicar o movimento dos veleiros para alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana?
Vamos denotar por Q_0 a questão dada.
i) Faça perguntas adicionais para que elas possam contribuir para responder Q_0 e denote-as por Q_1, Q_2 etc.
ii) As perguntas feitas devem ser registradas na plataforma virtual (Paideia).

Nossa expectativa era de que os participantes elaborassem questões relacionadas a conhecimentos gerais como, por exemplo, o que é um veleiro, tipos de veleiros, elementos que intervêm em seu movimento e como funcionam. Algumas questões que acreditamos que poderiam surgir foram:

Q_1: O que é um veleiro?

Q_2: Que tipos existem?

- Q_{21}: Quais partes o veleiro tem?
- Q_{22}: Que material se utiliza na construção de um veleiro?
- Q_{23}: Quais tipos de velas existem?

Q_3: Como funcionam os veleiros?

Q_4: Quais são os fatores que lhes permitem se movimentar?

- Q_{41}: Como as velas funcionam?
- Q_{42}: Para onde eles podem se mover?
- Q_{43}: Como alcançar a velocidade máxima?

Q_5 : Como explicar o comportamento do veleiro?

Q_6: Como explicar o funcionamento de um veleiro a qualquer pessoa?

Q_7: Quais conhecimentos deve ter um aluno para entender o funcionamento de um veleiro?

Q_8 : Que conhecimentos de matemática os alunos devem aprender (ou lembrar) para entender o funcionamento de veleiro?

etc.

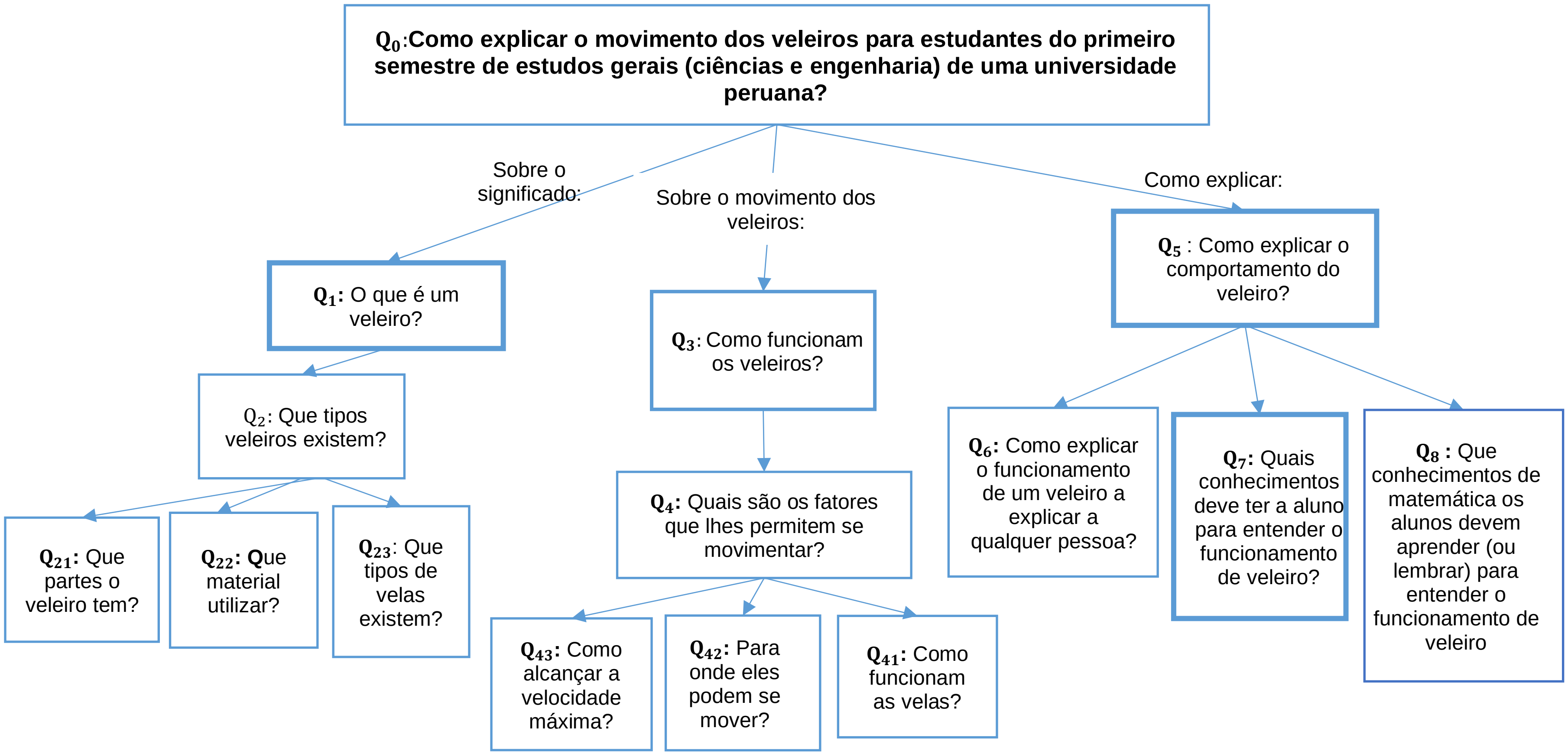
Após a elaboração das questões individualmente, os professores se reúnem em equipes (máximo de 4) para que realizem a atividade 2(b), passando para o plenário 2(c) ao fim do tempo estabelecido.

Atividade 2(b) (parte em grupo)
Considerando a atividade 2(a) categorizem as perguntas feitas nos seguintes grupos:
- No que diz respeito ao significado
- Com relação ao movimento
- Como explicar
Elabore um esquema com esta categorização. Depois grave o esquema no campus virtual.
Atividades 2(c) - plenário (apresentação de grupo)
Cada grupo deve apresentar o esquema construído. (no máximo 5 min por grupo)

O resultado esperado, de acordo com as perguntas formuladas e considerando as três categorias, é esquematizado[32] na Figura 82.

[32] Versão em espanhol no apêndice A.

Figura 82 - Mapa de questões *a priori*



Fonte: Produção da autora

As categorias permitiram desenvolver o percurso para sessões seguintes como descrevemos no Quadro 8.

Sessões 4 e 5

Se consideramos aspectos da primeira categoria – o que é um veleiro e que tipos existem - outras perguntas podem surgir.

Quadro 13 – Planos para as sessões 4 e 5 *a priori*

Questões norteadoras	Objetivos	Tarefas envolvidas	Tempo
Atividade 3(a) (Em grupo) Responder as questões (elaborar um informe com as fontes): Q_1: O que é um veleiro? Q_2: Que tipos veleiros existem? Q_{21}: Quais as partes de um veleiro? Q_{22}: Que material se utiliza na construção de um veleiro? Q_{23} : Que tipos de velas existem?	Identificar o contexto do problema e aproximar os participantes com os elementos relacionados com o veleiro	Buscar informação no ambiente virtual para responder as questões ou formular novas questões que ajudem a responder as questões solicitadas.	50 min
		Cada grupo deverá elaborar um relatório em que descrevera as respostas de cada pregunta	**50 min**
Atividade 3 (b) (Em grupo) Construir um esquema do mapa de questões.	Sintetizar a informação e construção do mapa de Q-R.	Construir o mapa de questões e repostas.	50 min
Plenário (Todos)	Apresentação dos esquemas	Socializar a informação e avanço	50 min

Fonte. Produção da autora

Apresentamos as tarefas relacionadas às atividades 3(a) e 3(b).

Atividades 3(a) (parte em grupo)

1) Considerando a primeira categoria da atividade 2(b), responda as perguntas feitas e, se não for possível, faça mais perguntas que ajudem a responder a essas perguntas (apresentar em um relatório seus achados e indicar as fontes).

2) Construa o mapa Q-R para esta categoria.

Atividades 3(b): plenário (apresentação de grupo)

Cada grupo deve apresentar o esquema construído. (10 min por grupo)

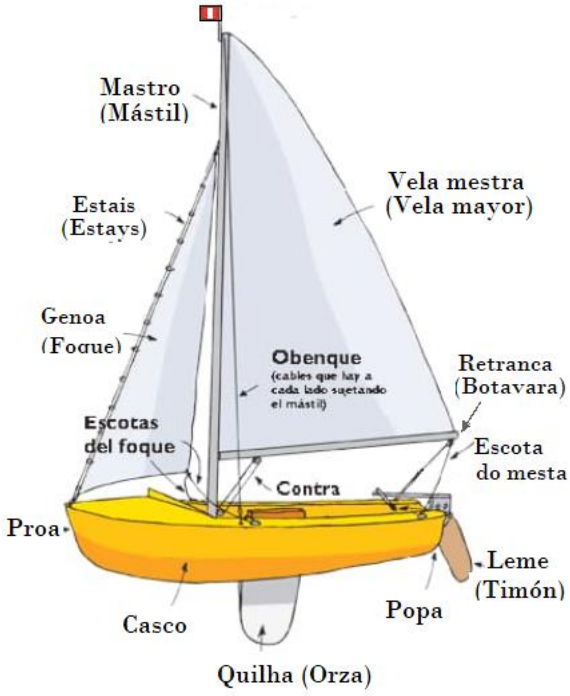
Esperávamos que as perguntas fossem respondidas, minimamente, como descremos *a priori*:

$\mathbf{Q_1}$: O que é um veleiro? $\mathbf{R_1}$**:** Os veleiros são máquinas essencialmente eficientes e otimizadas que em numerosas ocasiões adotaram soluções pioneiras nas indústrias aeronáutica e náutica.

$\mathbf{Q_2}$: Que tipos de veleiros existem? $\mathbf{R_2}$: Existem veleiros aquáticos e solares. Os aquáticos chamaremos de veleiros. Eles são os mais antigos e utilizam o vento para seu movimento, sendo ainda um meio de transporte aquático ($\mathbf{R_{2(1)}}$). Já nos veleiros solares, a ideia é aproveitar a energia solar para impulsionar uma grande vela implantada no espaço ($\mathbf{R}_{2(1)}$). Os veleiros de navegação têm as seguintes categorias: monocasco e multicasco, com este último, por sua vez, sendo subdividido em Catamarã (2 cascos) e Trimaran (3 cascos).

$\mathbf{Q_{21}}$**:** Quais são as partes de um veleiro? $\mathbf{R_{21}}$**:** as partes de um veleiro[33] são descritas de acordo com a Figura 83.

Figura 83 - Partes de um veleiro



Fonte: Adaptado de EEND (2020)

Proa é a parte da frente do veleiro onde ficam as velas da proa (genoa) e o balão. O proeiro é o tripulante responsável por organizar a subida ou a descida das velas.

Popa é a parte de trás do veleiro, geralmente onde fica o timão e o leme, submerso.

Mastro é a estrutura que sustenta as velas, é uma espécie de poste por onde as velas são hasteadas e baixadas.

Quilha ou orça é o contrapeso do veleiro que serve para manter a estabilidade do barco e garantir que rume para a frente, além de manter o veleiro na posição correta em caso de acidente (desvirá-lo em um capotamento).

Vela Mestra é a vela principal do veleiro, também chamada de Grande, que não é baixada em nenhuma condição de vento.

33 https://www.youtube.com/watch?v=e_CJO9ZjWaY&list=PLhLiH6qSUibQqcPqJmTg0ZBxmIZivFVLI (para espanhol) e https://www.youtube.com/watch?v=3oV3K5VvDOw (para português).

Roda de Leme, também chamada de timão, controla a direção do veleiro e, geralmente, é manuseada pelo comandante ou por um timoneiro para controlar o barco.

Adriças são os cabos responsáveis por subir as velas.

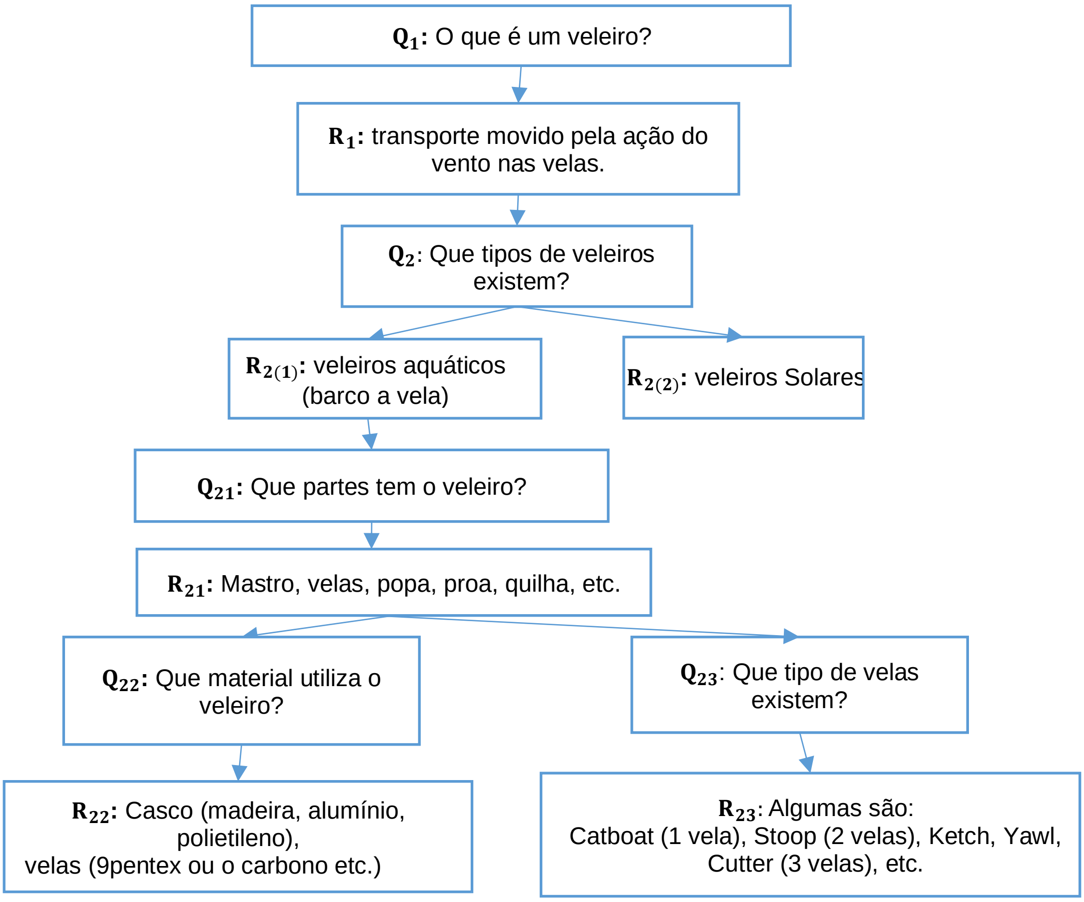
Escotas são os cabos responsáveis pela regulagem das velas genoa e balão. Cada vela tem sua própria escota.

$\mathbf{Q_{22}}$: Que material se utiliza para a construção de veleiro? $\mathbf{R_{22}}$**:** Cada parte pode ter um material distinto. Por exemplo, o casco pode ser de madeira, fibra de vidro, alumínio etc.; o mastro pode ser de madeira ou alumínio.

$\mathbf{Q_{23}}$: Que tipos de veleiros existem? $\mathbf{R_{23}}$: Existem muitos tipos, mas os mais conhecidos são Catboat (1 vela), Stoop (2 velas), Ketch, Yawl, Cutter (3 velas), etc.

No momento de responder às questões previamente colocadas, poderiam surgir mais questões, mas era preciso ter controle para que não perdêssemos o caminho. Apresentamos de maneira resumida o mapa de Q-R na Figura 84.

Figura 84 - Mapa de Q-R a respeito do significado de veleiro



Fonte: Produção da autora

Para as partes seguintes, consideramos os veleiros ligeiros que são utilizados para participar em esporte/lazer[34], porque eles se movem em função da força da água e do ar, enquanto o veleiro a motor tem mais elementos como, por exemplo, o motor.

Sessões 6 e 7

Consideramos os aspectos da segunda categoria, isto é, sobre o movimento de veleiros: **Como se movem os veleiros? Ou como funcionam os veleiros?** Para responder essa questão ou alguma similar surgem além das questões propostas, pode ser necessária a formulação de outras questões ligadas ao movimento. No Quadro 14, apresentamos mais detalhes.

Quadro 14 – Planos para as sessões 6 e 7 a priori

Questões norteadoras	Objetivos	Tarefas envolvidas	Tempo
Atividade 4 (a) (em grupos) Responder as seguintes questões: $\mathbf{Q_3}$: **Como se movem os veleiros?** Ou como funcionam os veleiros? $\mathbf{Q_4}$: Quais são os fatores que lhes permitem se movimentar? $\mathbf{Q_{41}}$: Como funcionam as velas? $\mathbf{Q_{42}}$: Para onde eles podem se mover? $\mathbf{Q_{43}}$: Como chegar à a máxima velocidade?	Identificar elementos da física como velocidade, força etc. (grandezas) que permitem o movimento do veleiro e das velas	- Buscar informação - Descrever os tipos de grandezas - Formular questões particulares sobre cada grandeza identificada.	50 min
Atividade 4 (b) (em grupo) Construir um esquema para o mapa de questões.	Sintetizar as informações e construção do mapa Q-R.	Construir o mapa de questões e repostas. (em quatro)	20 min
Plenário (todos)	Apresentação dos esquemas	- Socializar a informação e avanço - Assignar tarefa para a sessão 4	30 min

Fonte. Produção da autora

As atividades para as duas sessões são às seguintes:

Atividades 4(a) (parte em grupo)

3) Considerando a segunda categoria de atividade (2b), responda as perguntas formuladas e, se não for possível, faça mais perguntas para ajudar a responder as perguntas que formulamos.

4) Elabore o mapa Q-R para esta categoria.

Atividades 4(b): plenário (apresentação dos grupos)

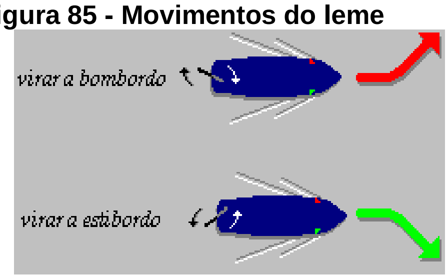
Cada grupo deve apresentar o esquema construído. (10 min por grupo)

[34] https://recifes.com/artigos/principais-classes-vela-seus-barcos

Para $\mathbf{Q_3}$: como funcionam os veleiros? A reposta ($\mathbf{R_3}$) pode ser: os veleiros mais simples são movidos pela ação do vento, isto é, eles utilizam a energia do vento para criar uma força propulsora. Então surge outra pergunta: $\mathbf{Q_4}$: Quais os fatores que permitem que se movimentem? $\mathbf{R_4}$: Os fatores são a força do vento nas velas, a água, as correntes etc. Logo, pode surgir a seguinte pergunta: $\mathbf{Q_{41}}$: como funcionam as velas? $\mathbf{R_{41}}$: a vela é o motor que extrai a energia do vento para impulsionar o barco, portanto, sua função é essencial em e seu ajuste e disposição corretos dependem da pessoa que dirige. Surgem as perguntas: $\mathbf{Q_{411}}$: por que uma vela gera uma força ortogonal ao ar? $\mathbf{Q_{411}}$: o movimento ocorre na direção do vento ou em sua direção oposta? $\mathbf{R_{411}}$: as condições favoráveis ocorrem quando o vento[35] vem pela popa. Mais uma questão: $\mathbf{Q_{412}}$: o que acontece se o vento for lateral? As outras questões que surgem também são $\mathbf{Q_{413}}$**:** em que parte da vela se concentra a maior força? Esta questão também gera mais questões: $\mathbf{Q_{4131}}$**:** em que parte da vela de forma triangular se concentra a maior força? $\mathbf{Q_{4132}}$**:** em que parte da vela de forma trapezoidal se concentra a maior força?

$\mathbf{Q_{42}}$: como se orienta a direção de um veleiro? $\mathbf{R_{42}}$: para orientar a direção de um barco, a vela usa o leme. Deslocando o leme para a esquerda, altera-se o rumo para bombordo (direita). Se o leme for deslocado para a direita, o rumo será a estibordo (esquerda), como mostra a Figura 85 (ABVC, 2020, p.1).

Figura 85 - Movimentos do leme



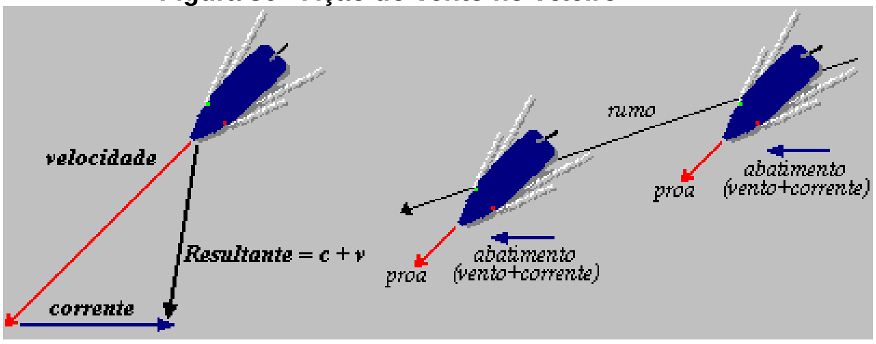
Fonte: ABVC (2020, p. 1)

Existem forças externas, como as correntes e o vento que provocam um ***abatimento*** ou ***deriva*** no rumo da embarcação. Não podemos, neste caso, abicar diretamente o objetivo e será preciso escolher uma direção cuja resultante esteja em função da força da corrente, velocidade do barco e distância a

[35] Na vela se produz o efeito Venturi que é explicado pelo princípio de Bernoulli e pelo princípio da continuidade da massa. Se o fluido mantém seu fluxo, mas a seção diminui, a velocidade aumenta após cruzar a constrição. Por outro lado, a corrente diminui à medida que a seção aumenta.

percorrer. Na Figura 86, ilustramos a **resultante** que é a soma vetorial da intensidade da corrente com a velocidade do barco.

Figura 86 - Ação do vento no veleiro



Fonte: ABVC (2020, p. 1)

Além disso, seguem muitas perguntas para casos particulares, por exemplo, a respeito do percurso dos veleiros, isto é, conhecendo algumas condições, pode-se encontrar a comprimento e direção.

Sessões 8 e 9

Estas sessões consideram aspectos da terceira categoria, ou seja, explicar o movimento dos veleiros baseado nas questões das categorias anteriores. Descrevemos no Quadro 15 as questões norteadoras, seus objetivos e as tarefas associadas para um veleiro simples, mas com uma vela maior, leme (timão) e orça.

Quadro 15 – Plano para as sessões 8 e 9

Questões norteadoras	Objetivos	Tarefas	Tempo
Q_5 : Como explicar o comportamento do veleiro? Q_6**:** Você pode explicá-lo para qualquer pessoa? Q_7 : De acordo com a idade do aluno, o que se pode explicar em relação ao movimento do veleiro? Q_8: Que conhecimentos deve ter o aluno? Q_9 : Que conteúdos de matemática seus alunos devem aprender (o lembra) o aluno?	Introduzir o objeto vetor como uma ferramenta que vai ajudar na solução das questões. Revisão de documentos oficiais, livros. Planejar que técnicas e tecnologias da geometria vetorial podem ser utilizadas para justificar o movimento e responder as conjecturas que surgiram na sessão 4. Pode usar software para formular ou explicar a resolução de conjecturas	- Buscar informação - Descrever os conteúdos, definições, propriedades de vetores. - Formular questões particulares sobre o objeto matemático que ajuda a responder a Q_9 .	80 min
Atividade 5 (b) (Em grupo) Construir um esquema do mapa de questões.	Sintetizar a informação e construção do mapa Q-R.	Construir o mapa de questões e repostas (em grupo)	40 min
Plenário (Todos)	Apresentação dos esquemas Aplicar tudo o que foi aprendido.	- Socializar a informação e avanço	80 min

Fonte: Produção da autora

Apresentamos as atividades que os sujeitos participantes devem resolver.

Atividades 5(a) (parte do grupo)
1) Considerando as categorias anteriores e o resultado da atividade (4), responda as questões formuladas na categoria 3 e, caso não seja possível, pode colocar mais questões para ajudar a responder a estas questões. 2) Formular conjecturas sobre o objeto matemático em estudo. 3) Prepare o mapa Q-R para esta categoria.
Atividades 5(b): Plenário (apresentação de grupo)
Cada grupo deve apresentar o esquema construído. (5 min por grupo)

Q_4 faz com que o sujeito tenha que formular a pergunta $\mathbf{Q_5}$: **Como explicar o comportamento do veleiro?** Para responder a esta pergunta é preciso considerar as respostas das seguintes questões:

$\mathbf{Q_{51}}$: O movimento seria na direção do vento ou na direção oposta ao vento? Depois de uma pesquisa, vê-se que a reposta pode ser “em condições favoráveis, quando o vento vem pela popa” (os navegantes dizem, porém, que este não é o quadro mais favorável para impulsionar um veleiro moderno). Mas, e se o vento estiver na lateral? Este caso requer alguns elementos que a Física ajuda a responder.

Da pergunta 5 podemos ter outras questões derivadas como, por exemplo,

$\mathbf{Q_6}$: você pode explicar o movimento do veleiro para qualquer pessoa? $\mathbf{R_6}$: o professor deve olhar o currículo correspondente ao nível dos estudantes (do nível básico ao superior).

$\mathbf{Q_7}$: quais conhecimentos deve ter o aluno? R_7 : para iniciar, o aluno deve ter os conhecimentos de física e de matemática envolvidos em nosso MED.

$\mathbf{Q_8}$ **:** quais conteúdos de matemática o aluno deve aprender ou mobilizar?

Para responder, consideramos o mapa da Figura 11 e, pelo menos, as seguintes perguntas, que aqui descrevemos de maneira sucinta.

$\mathbf{Q_{81}}$: o que orientam os documentos oficiais a respeito de vetores? $\mathbf{R_{81}}$**:** revisão de ementas e currículo nacional**.**

$\mathbf{Q_{82}}$**,** o que há nos livros didáticos a esse respeito? $\mathbf{R_{82}}$**:** livros com conteúdo de vetor.

$\mathbf{Q_{83}}$, que sugestão pode-se propor para ensinar esse conteúdo? $\mathbf{R_{83}}$: Uma Organização Didática com base em praxeologias matemáticas de aulas, livros e internet.

$\mathbf{Q_{84}}$: qual é a razão de ser dos vetores? O movimento dos veleiros permite estudar elementos indicados na $\mathbf{R_{84}}$: para o estudo do movimento temos que tratar de força e velocidade.

$\mathbf{Q_{85}}$: o que deve saber um professor a respeito de vetores? $\mathbf{R_{85}}$: possíveis razão de ser; conceitos matemáticos de outros conteúdos, definição e propriedades de vetores.

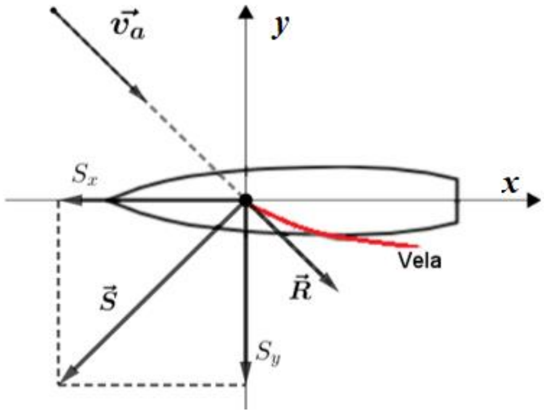
Dessa questão podem surgir novas questões relacionadas ao MER e ao MED, e que podem conduzir os professores a proporem um novo PEP.

Depois das análises do MER e do MEV, os professores podem responder à $\mathbf{Q_8}$ com a resposta $\mathbf{R_8}$: definição de vetor; definição das operações de adição e subtração de vetores; produto de um vetor por um escalar; paralelismo de vetores; produto escalar e norma de vetores; vetor unitário; vetores ortogonais; combinação linear; projeção ortogonal e componentes; produto vetorial etc.

Apresentamos o que pode ser esperado, *a priori*, dos professores para chegar a $\mathbf{R_5}$: consideramos um modelo físico simples de veleiro elementar com uma única vela, *a mestra* – ou seja, sem vela dianteira ou *foque*. Supomos também que o veleiro navega no sentido Leste-Oeste com um vento que sopra no sentido de norte ao sul. Além disso, consideramos, inicialmente, que a quilha está submersa na água e que é pesada, mas que, junto com a vela, dá estabilidade ao veleiro, em outras palavras, a vela e a quilha se comportam como as asas de um avião que permitem a estabilidade da nave.

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas para representar o veleiro (Figura 87), se ele recebe vento com uma velocidade $\vec{v}_a$, este vento produz duas forças aerodinâmicas, uma de sustentação, $\vec{S}$, perpendicular à $\vec{v}_a$ e outra de resistência, $\vec{R}$, na mesma direção e sentido de $\vec{v}_a$. No vetor $\vec{S}$ a componente S_x dá sustentação e é responsável por fazer avançar o veleiro, enquanto a componente S_y faz com que o veleiro tenda para o lado, o que é controlado e evitado pela quilha.

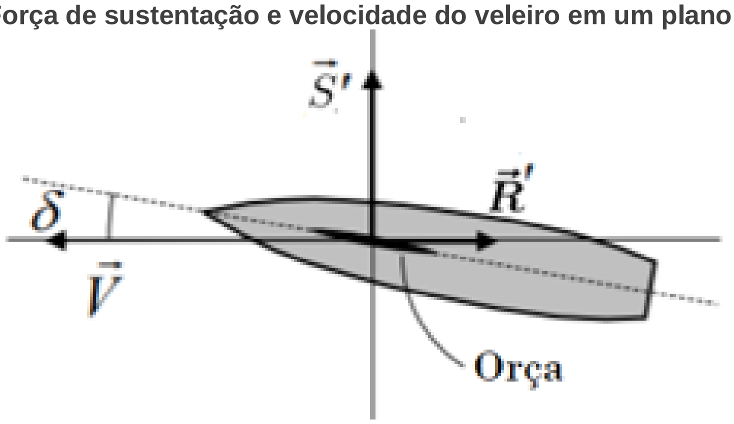
Figura 87 - Decomposição da força de sustentação do veleiro em um plano cartesiano



Fonte: Adaptado de OEF (2010)

No veleiro, a quilha (orça) que está abaixo dele forma com o eixo do veleiro um ângulo δ (abatimento) com a direção de movimento do veleiro (rumo) e sofre a ação de forças hidrodinâmicas, neste caso, de sustentação $\vec{S}'$ perpendicular à velocidade $\vec{V}$ do veleiro, e de resistência $\vec{R}'$ paralela à dita velocidade e no sentido oposto (Figura 88), no que também influem o casco e o próprio abatimento (OEF, 2010, p. 1).

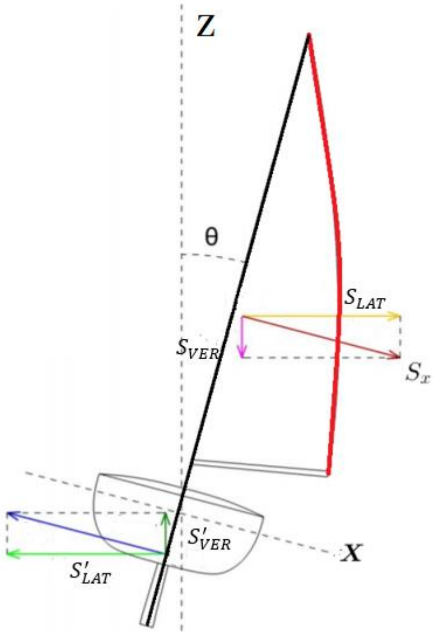
Figura 88 - Força de sustentação e velocidade do veleiro em um plano cartesiano



Fonte: Adaptado de OEF, 2010

Se o veleiro se inclina (θ), encontramos a força aerodinâmica (na vela) S_y e hidrodinâmica (dentro da água) $\vec{S}'$que se descompõem em função do ângulo, isto é, para a força S_y, temos as forças: $S_{LAT} = S_y \, cos\, \theta$ e $S_{VER} = S_y \, sen\, \theta$; para $\vec{S}'$, temos $S'_{LAT} = S_y \, cos\, \theta$ e $S'_{VER} = S_y \, sen\, \theta$ (o que representa S_{LAT} e S_{VER}, as componentes da força de sustentação vertical com respeito ao mastro do veleiro, como podemos observar na Figura 89 no espaço).

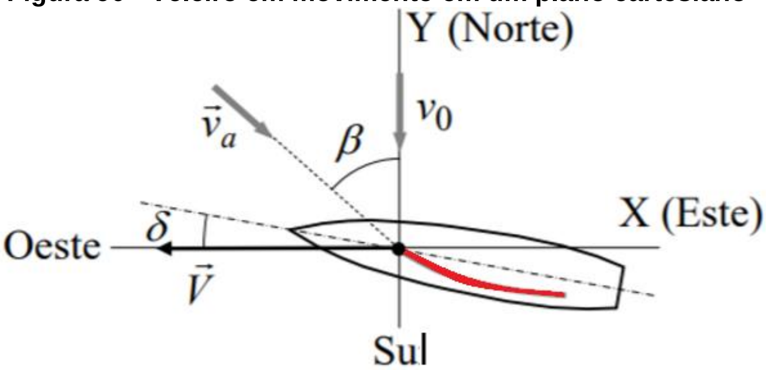
Figura 89 - Decomposição das forças de inclinação em um plano cartesiano



Fonte. Adaptado de Gómez (2014, p. 26)

Agora o aluno pode responder algumas perguntas, por exemplo, $\mathbf{Q_{422}}$: um veleiro está navegando com um vento que sopra de Norte para o Sul com uma velocidade inicial de 15 nós[36]. Nestas condições, navega para Oeste com velocidade de 18 nós e com um ângulo δ de abatimento, como representado na Figura 90. Qual é a velocidade ($\vec{v}_a$) do vento em relação ao veleiro? E qual é a rapidez (módulo de $\vec{v}_a$) e direção (ângulo β)?

Figura 90 - Veleiro em movimento em um plano cartesiano



Fonte: Adaptado de OEF (2010)

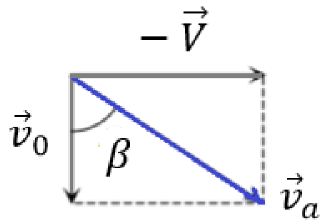
A solução que se espera é a aplicação de operações com vetores, isto é, se as velocidades do veleiro e do vento em relação ao mar são $\vec{V}$ e $\vec{v}_0$ respectivamente, a velocidade do vento em relação ao veleiro será $\vec{v}_a$, é $\vec{v}_a =$

---

[36] O nó é uma unidade náutica de medida de velocidade que equivale a 1 milha náutica por hora ou a 1,852 km/h.

$\vec{v}_0 - \vec{V}$ (Figura 91). A representação também permite encontrar a direção, para isso o ângulo é resultado de $\tan\,\beta$.

Figura 91 - Velocidade do vento em relação ao veleiro em plano cartesiano



Fonte: Produção da autora

Das questões formuladas, podemos inferir conjecturas que deverão ser justificadas com as propriedades de vetores, de modo que ajudem a responder a Q_0 – por exemplo, temos algumas propostas denotada $Q_{851}, Q_{852}, Q_{853}$.

$\mathbf{Q_{851}}$: Se o veleiro se move, então o aluno pode utilizar operações com vetores, tais como: adição, subtração, produto por um escalar etc. A partir daí, o que poderia afirmar? De que depende sua afirmação? E espera-se que os estudantes justifiquem suas respostas.

$\boldsymbol{Q_{852}}$: O que se pode afirmar da seguinte proposição: Se G é o centro vélico (centro das forças) da vela, então, é o baricentro da vela?

$\boldsymbol{Q_{853}}$: Quando um veleiro navega contra o vento, o que ele faz é um zigue-zague formando uma trajetória ortogonal por partes. O que se pode concluir a partir deste fato?

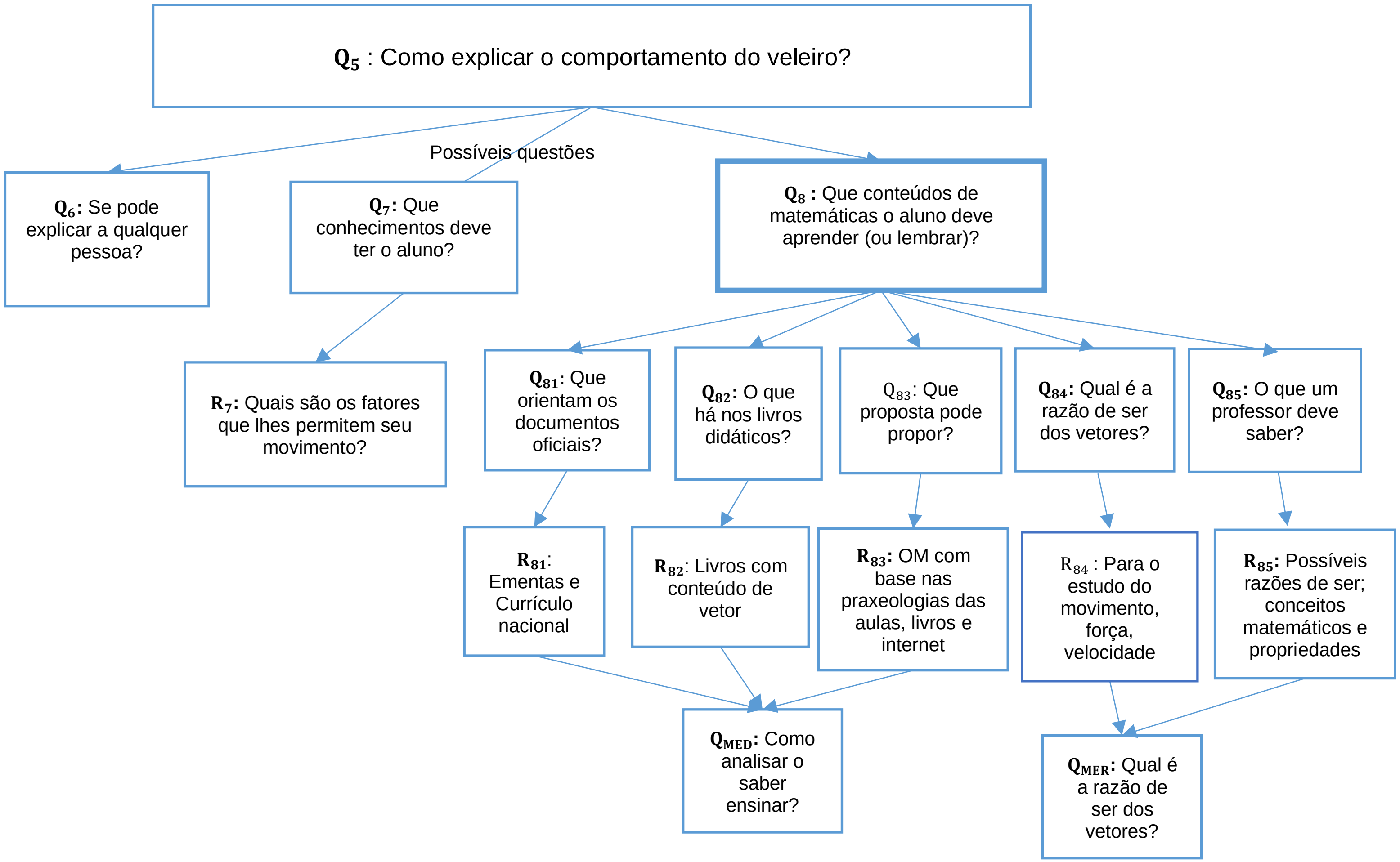
Na justificativa destas conjecturas e de outras que podem surgir, esperamos que os estudantes apresentem a solução que envolve algumas técnicas e tecnologias do MER construído, embora o uso de um *software* possa ajudar a explicar as respostas pretendidas.

A seguir, apresentamos um resumo das questões desenvolvidas nas sessões 6, 7, 8, 9, 10 e 11 (Figura 27) com as respostas finais que formam:

$[S(X, Y, Q_0.) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, em que $M = \{\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_{2,} \ldots, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots\}$.

No esquema apresentamos as possíveis questões que correspondem à terceira categoria.

Figura 92 - Mapa de questões



Fonte: Produção da autora

Depois de experimentado o PEP passamos para o modulo M_2 para analisar o PEP experimentado e explicitar as condições e restrições para sua implementação na instituição em que nossos sujeitos trabalham. A seguir, solicitamos que os grupos formulem um dispositivo para o mesmo objeto matemático, já no módulo M_3.

Sessões 10 e 11

Nestas sessões solicitamos a construção de um dispositivo didático para o ensino de vetores como uma possível alternativa para o estudo de geometria vetorial. No Quadro 16 apresentamos os objetivos, as tarefas e o tempo estimado para essas sessões.

Quadro 16 - Plano para a sessão para construir PEP

Questões norteadoras	Objetivos	Tarefas	Tempo
Em grupo construir outro dispositivo para o mesmo objeto de pesquisa	Aplicar tudo o que foi aprendido	Socializar a informação e avanços Tarefa em grupo para apresentar na sessão 6	130 min
Construir um possível mapa Q-R			
Plenário (Todos) análise da proposta	Apresentação dos esquemas	Socializar a informação	70 min

Fonte: Produção da autora

Nessas duas sessões foi previsto que os professores realizassem as atividades 6(a) e 6(b) e que os PEP propostos se relacionem com movimento de aviões, veleiro solar ou balística.

Atividades 6(a) (parte em grupo)

1) Desenhar um possível dispositivo para o ensino de geometria vetorial para alunos do primeiro semestre. Deve incluir um relatório descrevendo a razão de ser do objeto matemático.

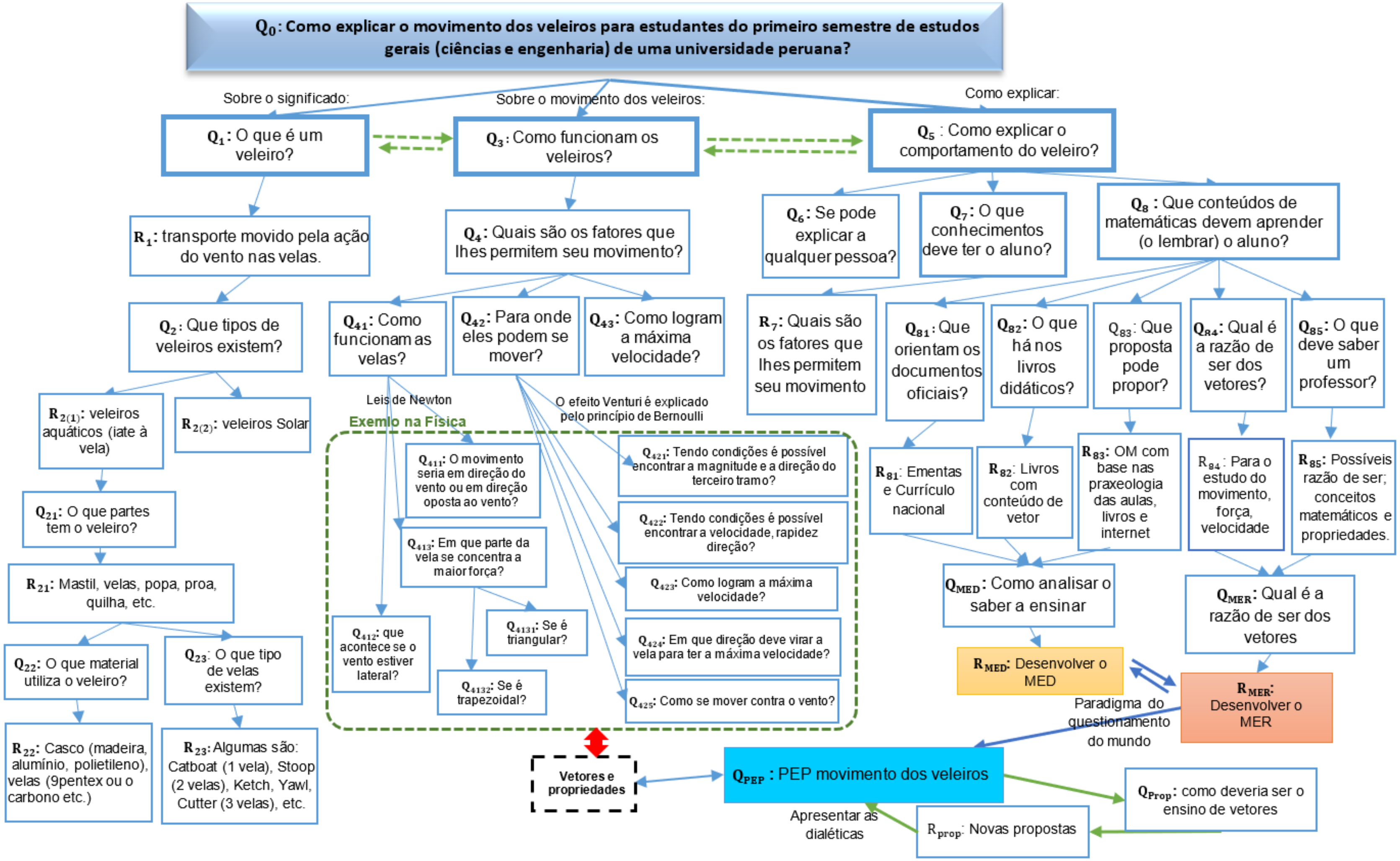
2) Elaborar um possível mapa de Q-R para o dispositivo desenhado

Atividades 6(b): Plenário (apresentação de grupos)

Cada grupo deve apresentar uma proposta de seu PEP e seu esquema (10 min por grupo).

Assim, finalizamos a análise a priori de nossa proposta para a formação de professores de matemática para o ensino de vetores baseado no dispositivo PEP-FP resumido na Figura 93.

Figura 93 - Mapa de possíveis questões *a priori* do PEP-FP



Fonte: Produção da autora

As dialéticas na análise a priori do PEP-FP

Na análise *a priori* prevê-se o desenvolvimento das dialéticas de perguntas e respostas (D_1) que devem aparecer de maneira natural no processo do PEP-FP para responder à questão geratriz $Q_{0-\mathrm{FP}}$, em que se requer a combinação das $\mathrm{R}_i^{\lozenge}$ às obras O_k e suas investigações para a introdução de vetor na geometria. A dialética das mídias e meios (D_2) deve se desenvolver na busca de respostas às questões relacionadas ao ensino de vetores, e que foram formuladas baseadas no movimento de veleiros. Neste processo, a distribuição de tarefas para pesquisar informações para as discussões em grupo permitiu observar a dialética do indivíduo e o coletivo (D_3). Para obter algumas respostas, além da busca de informações, foi necessário, por exemplo, encontrar e aproximar o ângulo adequado para se conseguir a maior velocidade, e cujo processo evidencia a dialética do paraquedista e do caçador de trufas (D_4).

Como a questão $Q_{0-\mathrm{FP}}$ não está diretamente ligada ao estudo de vetores em particular, mas exige explicar o fenômeno do movimento, é necessário ensiná-lo aos alunos. Assim, a questão geratriz do nosso PEP-FP está vinculada à outra disciplina, neste caso, a física, e mais especificamente, a mecânica. Consequentemente, isto exige do aluno a busca de resposta que não é direta ou linear e requer, às vezes, sair do assunto ou da disciplina, o que permite desenvolver a dialética do tema e fora do tema (D_5).

Os conhecimentos que permitem explicar o movimento, pelo menos os que são da área da física, podem não ser muito aprofundados para o caso de veleiros com motores ou outros elementos eletrônicos complexos, o que levaria alguns conhecimentos para um nível cinza, como indica a dialética das caixas pretas e das luzes (D_6).

Estabelecemos no PEP-FP categorias para o estudo do movimento que conduz ao estudo de vetores e de algumas de suas propriedades, o que nos permitiu dar uma razão de ser para o estudo desse conteúdo em geometria e compreender a realidade praxeológica, ou, em outras palavras, a dialética de análise e síntese, praxeológica e didática (D_8).

No desenvolvimento do esquema Herbartiano de questões e respostas, as obras permitiram dar a resposta $R^{\heartsuit}$ que conduziu à dialética de produção (difusão) e recepção (D_9). A produção do meio M, isto é, as condições e materiais que permitiram as respostas R_j, são elementos constitutivos da resposta $R^{\heartsuit}$, e a dialética das mídias e dos meios nos conduziram à dialética da Mesogênese.

Até aqui, realizamos as análises a *priori*. Na próxima seção, descrevemos e analisamos o módulo 1 (M1), a experimentação do PEP-FP que foi aplicado com os professores-alunos do mestrado de Ensino da Matemática da PUCP, além do módulo 2 (M2) do PEP-FP e o design dos PEP (M3) desenvolvidos pelos professores.

4.4 Fase experimental e análise *in vivo* do PEP-FP

A formação ocorreu como planejado em 11 encontros. Em cada um deles, tentou-se atingir os objetivos da formação, embora não tenhamos conseguido gravar completamente o trabalho das equipes em razão de problemas de conexão. Nesta sessão, apresentamos a fase experimental do PEP-FP e a análise com as 9 dialéticas e suas funções – mesogênese, cronogênese e topogênese – que serão utilizadas como principais ferramentas para a avaliação da nossa formação. Descrevemos, em primeiro lugar, o contexto em que o PEP-FP foi aplicado para conhecer as condições e restrições relacionadas ao percurso da pesquisa.

4.4.1 Desenvolvimento do experimento

O percurso teve início no dia 28/03/2021 durante o primeiro semestre do mestrado de Ensino de Matemática da PUCP, como parte da disciplina Geometria Euclidiana no Plano e no Espaço. Na primeira sessão, ocorreu a apresentação do professor da disciplina e da professora pesquisadora e foi explicado que a parte do PEP-FP seria desenvolvida pela professora pesquisadora, mas o restante – temas da geometria de incidência – seria ministrado pelo professor da disciplina.

Na primeira sessão (1), depois da apresentação dos professores, o professor regente da turma apresentou a ementa do curso e o trabalho que seria realizado pela pesquisadora, mais especificamente a metodologia de ensino do PEP. Além disso, fez-se a leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).

Vale ressaltar que todas as aulas foram realizadas via a plataforma virtual Paideia, que a PUCP proporcionou, e que possui ferramentas para criar videoconferências pelo Zoom e de pastas para registrar as atividades dos encontros. O Zoom permitiu criar grupos de professores para o trabalho durante o PEP. Os sujeitos da pesquisa utilizaram também o Google Drive [37] para escrever relatórios e documentos que pesquisavam nos prazos registrados na plataforma Paideia. Cada plenário foi gravado com as contribuições dos grupos.

A fase experimental do PEP- FP foi realizada em 11 encontros de 2 horas acadêmicas (50 minutos por hora) cada uma. Para cada avanço apresentado por cada grupo foi preciso dar algum tempo para a busca de informações ou revisão de literatura. Uma parte do percurso foi desenvolvida como atividade a cada encontro. Os professores organizaram essas atividades em categorias para respondê-las, o que influenciou as atividades do percurso e da disciplina.

A seguir descrevemos os encontros e o desenvolvimento do PEP-FP.

4.4.2 Informações do local e sujeitos da pesquisa

Participaram da pesquisa, inicialmente, 24 professores, mas apenas 20 a terminaram. Nas análises que realizamos, consideramos as produções de 14 professores que tiveram maior regularidade na fase experimental.

Os sujeitos se organizaram em quatro grupos que serão identificados por G1, G2, G3 e G4. Para o trabalho em grupo, cada professor tinha acesso permitido apenas à sua sala virtual na plataforma Zoom. Para as discussões coletivas havia uma sala em que todos podiam entrar.

Aplicamos um questionário de seis questões com o objetivo de traçar o perfil dos sujeitos da pesquisa. A primeira questão tratava da idade dos participantes e nos permitiu delimitar que a faixa estava entre 24 e 60 anos, com um professor com 60 anos e os outros entre 24 e 35. A segunda questão, a respeito da formação, permitiu constatar que cinco eram bacharéis em matemática, um era formado em Administração de Empresas, quatro em

[37] Google Drive é um serviço de armazenamento e sincronização de arquivos que foi apresentado pela Google.

Educação com especialidade em matemática para ensino médio e quatro em Engenharia.

A terceira questão solicitava o tipo de instituição educativa e o nível de ensino em que já trabalharam, e nos mostrou que nenhum deles havia atuado no nível primário (alunos de 6 a 11 anos), sete ensinam ou já ensinaram no nível secundário ou no ensino médio peruano (alunos de 12 a 16 anos), seis ensinam no nível superior na categoria de “chefe de prática”, isto é, não ensinam teoria, mas a prática com resolução de problemas e exercícios, e um ainda não havia atuado em nenhum dos três níveis. Para a quarta questão, relacionada ao tempo de magistério, dentre os sujeitos que trabalham no ensino secundário ou médio peruano, o professor de 60 anos tinha 24 anos de experiência, enquanto os outros seis participantes possuíam até 5 anos. O grupo que atua no nível superior registrou até 7 anos como chefe de prática.

Para a quinta questão, que tratou das disciplinas que ensinam, as repostas para o grupo de ensino secundário foram: Álgebra, Aritmética, Geometria, Raciocínio Matemático, Matemática Integrada, Matemática do Bacharelado Internacional e Matemática pré-universitária. Já para o grupo atuante no nível superior tivemos: Matemática Básica, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Álgebra Matricial e Geometria Analítica, Fundamentos do Cálculo, Álgebra Linear, Cálculo, Matemática Básica, Probabilidade e Estatística.

Finalmente, para a sexta questão, que diz respeito ao conhecimento e uso de recursos tecnológicos para o ensino de matemática, três indicaram que não utilizavam nenhum software, enquanto os outros nove conheciam o GeoGebra para o estudo de funções, domínio e imagem, translações, funções injetoras, exponenciais, logarítmicas, equações lineares, programação linear e gráficos em geral. Um deles conhecia o editor Látex e mesa eletrônica, outro, além do GeoGebra, conhecia o Cabri, o Mathlab, o GeoGebra Classroom e o Mathtype, usado geralmente para questões algébricas. Esse questionário nos permitiu ter informações a respeito do perfil dos sujeitos para observar o que conheciam de Geometria Vetorial e de vetor, mas a maioria nunca havia ensinado a teoria de Geometria Vetorial.

A seguir apresentamos o desenvolvimento do PEP- FP e a análise de cada uma das etapas.

4.4.3 Desenvolvimento do PEP-PF e análise *in vivo*

Para a análise *in vivo* consideramos as sessões 2 e 3, em que se discutiu e formulou as questões para cada grupo, e as sessões 4 a 9 para responder as questões que foram categorizados no plenário.

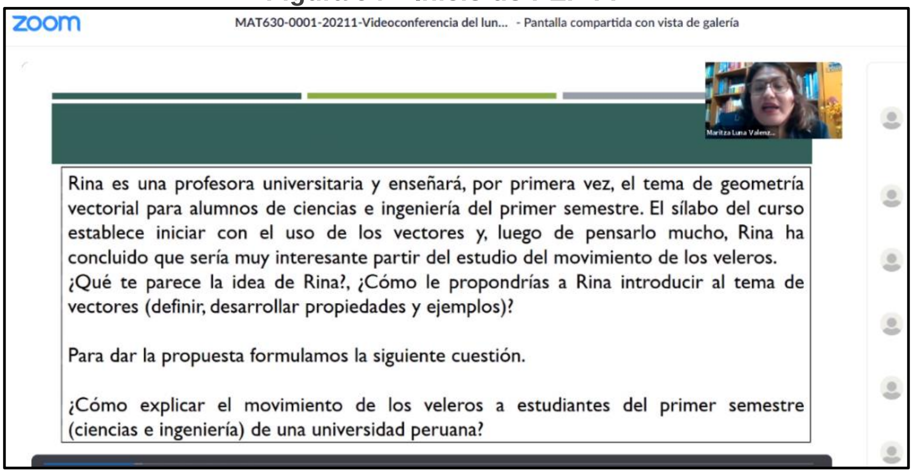
Início do módulo M1

Sessões 2 e 3 do PEP-FP

Lembramos que para estes encontros tínhamos programado a apresentação da formação e a aplicação de um questionário, além de introduzir, no segundo encontro, uma situação para implementar a questão geratriz.

No primeiro encontro do PEP – FP, apresentamos uma situação hipotética de uma professora que ensinará, pela primeira vez, uma disciplina para estudantes do primeiro semestre de nível superior da área de ciências e engenharia, e que solicita uma introdução à geometria vetorial focando na utilização de vetores e de suas propriedades. A situação que pede aos professores-alunos do mestrado para formular uma proposta de como explicar o movimento dos veleiros foi apresentada no Slides pela plataforma Zoom, como segue na Figura 94.

Figura 94 – Início do PEP-FP[38]



Fonte: Produção da autora

[38] Rina é professora universitária e ministrará, pela primeira vez, a disciplina de geometria vetorial para alunos do primeiro semestre de ciências e engenharia. O programa do curso prevê começar pelo uso de vetores. Depois de pensar muito sobre isso, Rina concluiu que seria muito interessante começar pelo estudo do movimento de veleiros. O que você acha da ideia da Rina? Como você acha que Rina deveria introduzir o tema dos vetores (definir, desenvolver propriedades e exemplos)? Para dar a proposta, formulamos a seguinte questão.
Como explicar o movimento dos veleiros para alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana?

Depois da leitura da situação, os 14 sujeitos da pesquisa se distribuíram em quatro grupos e cada um escreveu, individualmente, suas questões que, a seguir, foram compartilhadas e discutidas com os colegas dos seus respectivos grupos. A necessidade de respostas individuais foi imposta pela disciplina, tendo em vista que, como alunos de mestrado, precisam ser avaliados na disciplina.

No planejamento a *priori,* observamos que era preciso estabelecer alguma ordem de resposta às questões e, por isso, nós as numeramos na plataforma Paideia, colocando cada uma em uma pasta específica onde os professores deveriam postar suas produções. Tal organização conduziu os grupos a categorizar as questões antes de respondê-las.

O **grupo G1**, por exemplo, formado por quatro professores identificados por P_{11}, ..., P_{14} apresentaram as respostas individuais do Quadro 17 que foram identificadas, em vermelho, com a numeração que assumiram na sequência do trabalho (em azul se encontram as questões que foram dispensadas pelo grupo).

Quadro 17 – Questões formuladas pelos professores de G1

Grupo	Professor	Questão individual
G1	P_{11}	Q_{11}: O que é um veleiro? (Q_1) Q_{12}: Tipos de veleiro? Q_{13}: Quais são as características do Veleiro? (Q_{11}) Q_{14}: Que parte do veleiro permite que ele se mova? (Q_{12}) Q_{15}: O que influencia o movimento de um veleiro? (Q_2) Q_{16}: Que tipos de movimento um veleiro experimenta?
	P_{12}	Q_{21}: O que é um vetor? Q_{22}: Que dados do veleiro devemos ter para iniciar nosso estudo? (Q_3) Q_{23}: Tendo esses dados, como podemos apresentá-los à geometria vetorial? (Q_{31}) Q_{24}: Qual magnitude do vetor podemos levar em consideração para iniciar nosso estudo? (Q_{32}) Q_{25}: Quais operações devemos levar em consideração para o referido estudo? (Q_{33})
	P_{13}	Q_{31}: Em que direção o veleiro se moverá? (Q_{21}) Q_{32}: Quais fatores influenciam a direção do movimento do veleiro? Q_{33}: O peso do veleiro e as pessoas no veleiro influenciarão a velocidade que o veleiro irá experimentar? (Q_{22}) Q_{34}: A velocidade do vento influenciará no sentido do movimento do veleiro? (Q_{23})
	P_{14}	Q_{41}: Coloque o veleiro, os pontos de partida e de chegada no plano cartesiano (quadro de referência) e então responda (Q_{41}) qual é a localização de partida P_0 do veleiro? (Q_{411}) Qual é a localização final P_1 do veleiro? (Q_{412}) Eu sugiro que você coloque uma seta do ponto inicial ao ponto final (apontada para o ponto final) para responder às seguintes questões. Q_{42}: Quão longe o veleiro se moveu do ponto inicial ao ponto final? Você pode definir a direção usando os pontos cardeais ou um ângulo da horizontal. (Q_{42}) Q_{43}: Use os pontos cardeais (N-S-E-O) e responda: quando o veleiro viajou do local inicial para o local final, em que direção ele viajou? (Q_{43})

		Q_{44}: Desenhe um ângulo no sentido anti-horário a partir do semieixo x positivo até o vetor e indique a medida desse ângulo e responda em que direção o veleiro viajou? (Q_{44}) Q_{45}: Pode descrever o movimento do veleiro usando a distância percorrida e a direção? (Q_{45})

Fonte: Dados da pesquisa, Tradução nossa

Formular as questões individualmente obrigou o professor a sair do paradigma do monumentalismo enquanto a discussão em grupo permitiu observar que, em geral, os sujeitos iniciaram com questões a respeito do veleiro, do movimento, das grandezas etc. Apenas o professor P_{12} iniciou com uma questão a respeito de vetor, provavelmente buscando relacionar o movimento de veleiros à geometria vetorial. Para responder as questões propostas, o grupo G1 considerou quatro categorias (Quadro 18) justificando cada uma delas.

Quadro 18 – Questões organizadas por categorias do G1

Categoria 1: conceitos anteriores. Esta categoria é utilizada para conhecer as características do veleiro.	**Q_1: O que é um veleiro?** Q_{11}: Quais são as características do veleiro? Q_{12}: Que parte do veleiro permite que ele se mova?
Categoria 2: investigação prévia. Essas questões buscam saber a direção do movimento do veleiro e os fatores que afetam esse movimento.	**Q_2: O que influencia o movimento de um veleiro?** Q_{21}: Em que direção o veleiro se moverá? Q_{22}: O peso do veleiro e das pessoas que nele estão influenciam a velocidade que o veleiro irá experimentar? Q_{23}: A velocidade do vento influencia a direção do movimento do veleiro?
Categoria 3. conceitos de vetores. Esta categoria busca apresentar alguns conceitos básicos da geometria vetorial, bem como suas operações.	**Q_3: Quais dados do veleiro devemos ter para estudar o movimento do veleiro?** Q_{31}: Tendo dito dados sobre o movimento do veleiro, como podemos apresentá-los à geometria vetorial? Q_{32}: Que magnitude vetorial podemos levar em consideração para iniciar nosso estudo? Q_{33}: Quais operações de vetor devemos levar em consideração para este estudo?
Categoria 4. definição do vetor de deslocamento. Esta categoria busca definir um vetor com base em seu módulo e direção.	**Q_4: Qual é o vetor de deslocamento do veleiro?** Q_{41}: Considerando os pontos de partida e de chegada, coloque o veleiro no plano cartesiano (referencial) e, então, responda: Q_{411}: Qual é a localização de partida P_0 do veleiro? Q_{412}: Qual é a localização final P_1 do veleiro? Sugerimos que você coloque uma seta do ponto inicial ao ponto final (apontada para o ponto final) para responder às seguintes questões: Q_{42}: Quanto o veleiro se moveu do ponto inicial ao ponto final? Pode-se definir a direção usando os pontos cardeais ou um ângulo da horizontal. Q_{43}: Use os pontos cardeais (N-S-E-O) e responda: quando o veleiro viajou da localização inicial para a localização final, em que direção ele viajou? Q_{44}: Desenhe um ângulo no sentido anti-horário do semieixo x positivo para o vetor, indique a medida desse ângulo e responda em qual direção o veleiro viajou? Q_{45}: Você pode descrever o deslocamento do veleiro usando a distância percorrida e a direção?

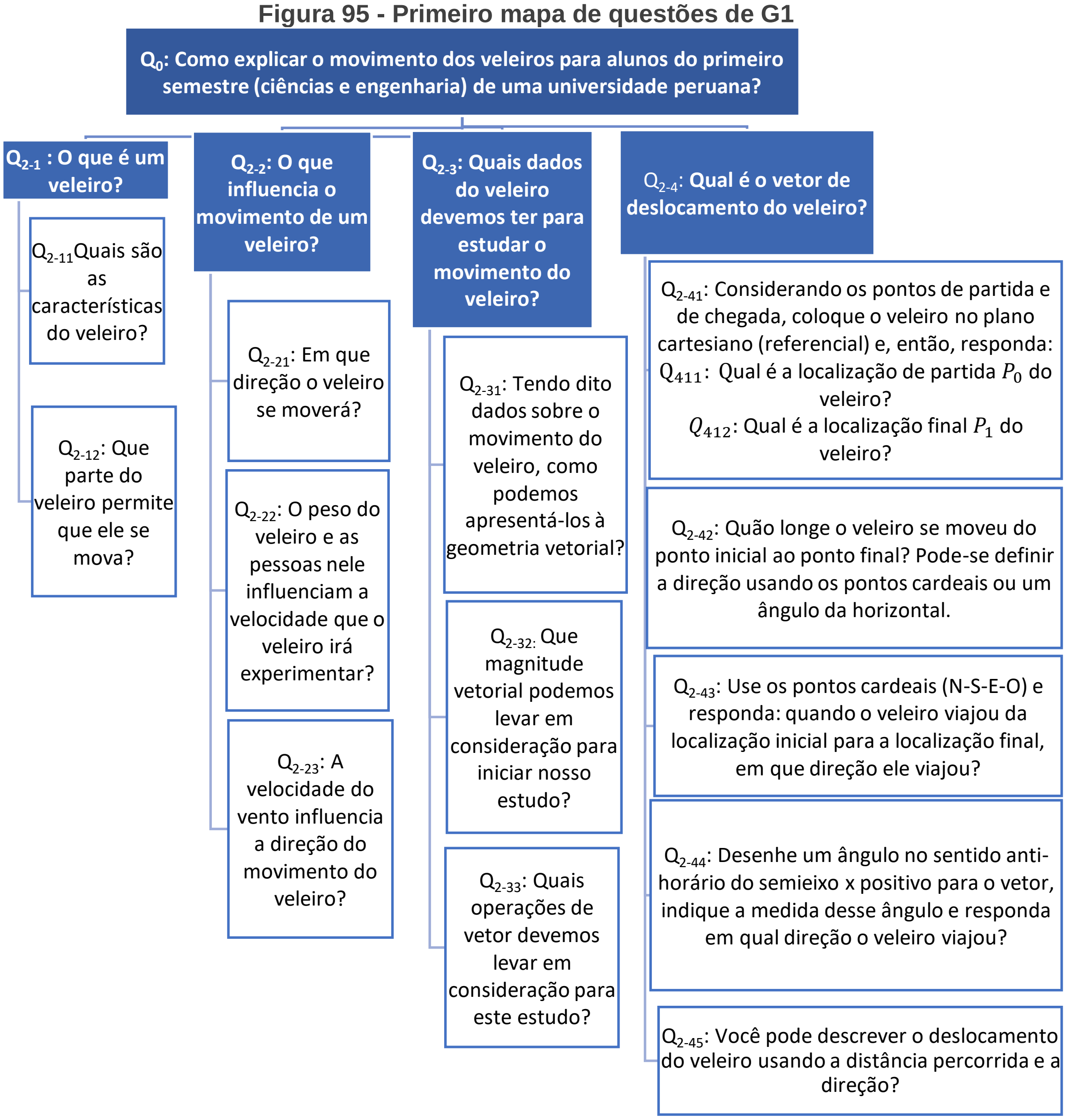
Fonte: Dados da pesquisa, Tradução nossa

Podemos observar que algumas questões foram dispensadas (azul no Quadro 12) durante a categorização e outras sofreram pequenas alterações em sua redação. Para desenvolver esta parte, os professores deste grupo consultaram as seguintes mídias:

> Matemática Básica: Geometria Analítica Vetorial, Indução Matemática, Sucessões e Série dos autores Venero, Saal e Aznaran, (2016);
> Fundamentos de Física de Serway e Vuille (2015, p. 57-60);
>
> Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos de. Silva e Almouloud (2013) conferência apresentada no VII Congresso Íberoamericano de Educação Matemática e Papel da teoria na Investigação em Educação Matemática e de Física de Wilson, Buffa e Lou (2007, p. 22-36). (DADOS DA PESQUISA)

Depois de algumas discussões, os integrantes do G1 construíram o mapa apresentado na Figura 90.

Figura 95 - Primeiro mapa de questões de G1



Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa.

Depois de construir um primeiro mapa de questões, o grupo continuou a discussão e considerou que precisava acrescentar mais três perguntas relacionadas à Q_3 a respeito do movimento do veleiro:

> Q_{32}: Qual é o conhecimento prévio que o aluno precisa ter para entender o movimento do veleiro?
>
> Q_{321}: Os alunos têm conhecimento da noção de plano cartesiano e de localização de pontos?
>
> Q_{322}: Os alunos têm conhecimento das relações trigonométricas no triângulo retângulo?
>
> Q_{323}: Os alunos têm conhecimento de geometria analítica?
>
> Q_{324}: Os alunos têm conhecimento de grandezas escalares e vetoriais? (DADOS DO G1, Tradução nossa)

Embora a resposta a questão Q_{32} faça apelo a alguns elementos do modelo de geometria sintética, a resposta da Q_{321} envolve elementos praxeológicos do modelo da geometria analítica de nosso MER.

Os professores do **G2** apresentaram**,** individualmente, as questões do Quadro 19.

Quadro 19 - Questões formuladas individualmente pelos professores de G2

Grupo	Professor	Questões individuais
G2	P_{21}	$Q_{2\text{-}11}$: Qual trajetória descreverá o movimento de um veleiro? $Q_{2\text{-}12}$: É possível definir um ponto inicial e um ponto final para o movimento descrito por um veleiro? (Q_{21}) $Q_{2\text{-}13}$: Como capturar corretamente as coordenadas dos pontos final e inicial em uma planilha de grade? (Q_{22}) $Q_{2\text{-}14}$: Como posso calcular a distância do ponto inicial ao ponto final do caminho descrito pelo movimento de um veleiro? (Q_{210}) $Q_{2\text{-}15}$: Como eu estabeleço o sentido e a direção do movimento descrito pelo movimento de um veleiro?
	P_{22}	$Q_{2\text{-}21}$: Vocês sabem o que é um veleiro? (Q_1) $Q_{2\text{-}22}$: Quais elementos da natureza estão envolvidos em seu movimento? $Q_{2\text{-}23}$: Como relacionar esses elementos às variáveis? $Q_{2\text{-}24}$: Como desenhar um esquema gráfico das variáveis envolvidas? $Q_{2\text{-}25}$: Como você priorizaria (dar condições, quais variáveis poderiam ser 0) as variáveis que influenciam o movimento? $Q_{2\text{-}26}$: Quais variáveis estão relacionadas ao conceito de vetor de acordo com suas características? (Q_{26})
	P_{23}	$Q_{2\text{-}31}$: Como explicar a incidência dos raios solares em direção à Terra e qual a sua representação geométrica? $Q_{2\text{-}31}$: Há mudanças de posição no movimento dos veleiros? $Q_{2\text{-}32}$: O veleiro fica sempre na mesma direção ou depende do movimento do ar?

Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa

Depois de algumas discussões, os professores do grupo distribuíram essas questões entre as três categorias descrevendo suas características como mostramos no Quadro 19 e onde podemos notar que eles formulam uma questão para a primeira categoria, mas não para as outras duas, ou seja, não explicitam a Q_2 e a Q_3. Além disso, eles mantêm da redação individual apenas as questões: $Q_{2\text{-}11}$, Q_{21}, Q_{22}, Q_{28} e Q_{210}, com as outras sendo desprezadas. Em cor azul estão as questões mantidas e, em verde, as que tiveram suas redações alteradas. No Quadro 20 se apresenta as categorias consideradas pelo G2.

Quadro 20 – Questões organizadas por categorias pelo G2

Categoria 1: Conhecimento prévio. É necessário ter certo conhecimento das características do problema, sendo estas da natureza do contexto do problema matemático e físico.

Q_{21}: Você sabe o que é um veleiro?

Categoria 2: Propriedades geométricas. Esta categoria justifica-se pela necessidade de representar as variáveis envolvidas no movimento no espaço.

Sistema de coordenadas

Q_{21}: Um ponto de partida e um ponto final podem ser definidos para o movimento descrito por um veleiro?

Q_{22}: Como capturar corretamente as coordenadas do final e dos pontos iniciais em uma planilha de grade?

Q_{23}: Você pode definir os movimentos dos veleiros usando os pontos cardeais, norte sul, leste, oeste?

Q_{24}: Se um veleiro se move de um ponto a outro, os pontos de localização do veleiro devem ser definidos em um sistema de coordenadas?

Q_{25}: Como definir um sistema de coordenadas que me permite visualizar o movimento dos veleiros?

Conceito de vetor

Q_{26}: Quais variáveis estão relacionadas ao conceito de vetor de acordo com suas características?

Q_{27}: Como eu estabeleço o sentido e a direção do movimento descrito pelo movimento de um veleiro?

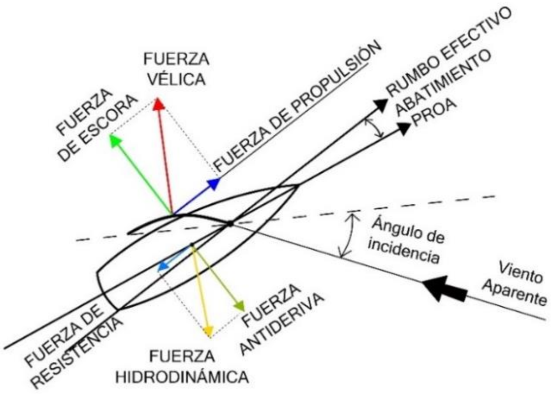
Q_{28}: Os movimentos dos veleiros me ajudarão a fazer operações de adição e subtração considerando a direção desses movimentos.

Magnitude de um vetor

Q_{29}: Como posso calcular a distância do ponto inicial ao ponto final do caminho descrito pelo movimento de um veleiro?

Q_{210}: Você pode usar fórmulas de distância entre dois pontos?

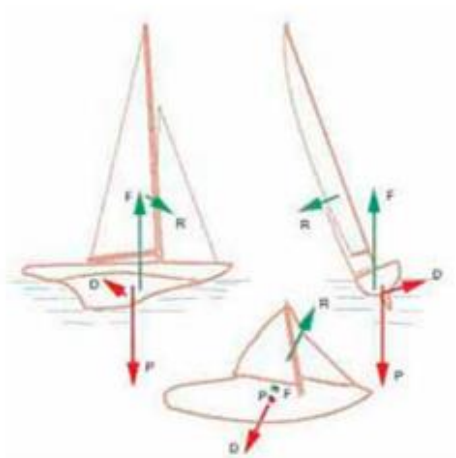
Categoria 3: Propriedades físicas. Essa categoria se justifica porque é necessário descrever os elementos envolvidos no movimento baseados na figura retirada de Masmar (2013)



Fonte: Dados da pesquisa

Quando os professores deste grupo consideraram as forças presentes no veleiro (Quadro 21), para iniciar o estudo em três dimensões, também identificaram elementos relacionados aos vetores.

Quadro 21 – Forças e vetores no espaço do grupo G2

FORÇAS RELACIONADAS A VETORES NO ESPAÇO	
	
Ao navegar, um veleiro está sujeito ao equilíbrio de 4 forças iguais e opostas duas a duas, e aos pares que se formam entre elas. Duas têm reações positivas: a resultante da vela R e a flutuabilidade F. As outras duas, negativas, são o peso do veleiro P e a resultante das forças dinâmicas exercidas sobre o casco D	Com as 4 forças R, F, P e D projetadas nos três planos, observamos: plano transversal: R e D, contribuem com um torque de inclinação equilibrado pelo torque de endireitamento F e P. No plano transversal, o torque de inclinação R e D é balanceado pelo torque de endireitamento F e P. No plano, quando o veleiro avança em linha reta, não há torque e R e D são opostos em relação ao mesmo eixo. F e P não têm influência. (MASMAR, 2013)

Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir, os professores do grupo G2 organizaram as questões relativas às propriedades físicas (Quadro 21) que permitem obter informações a respeito das variáveis que influenciam no movimento e nas unidades de medida e acrescentaram Q_{211}, Q_{212}... Q_{217}.

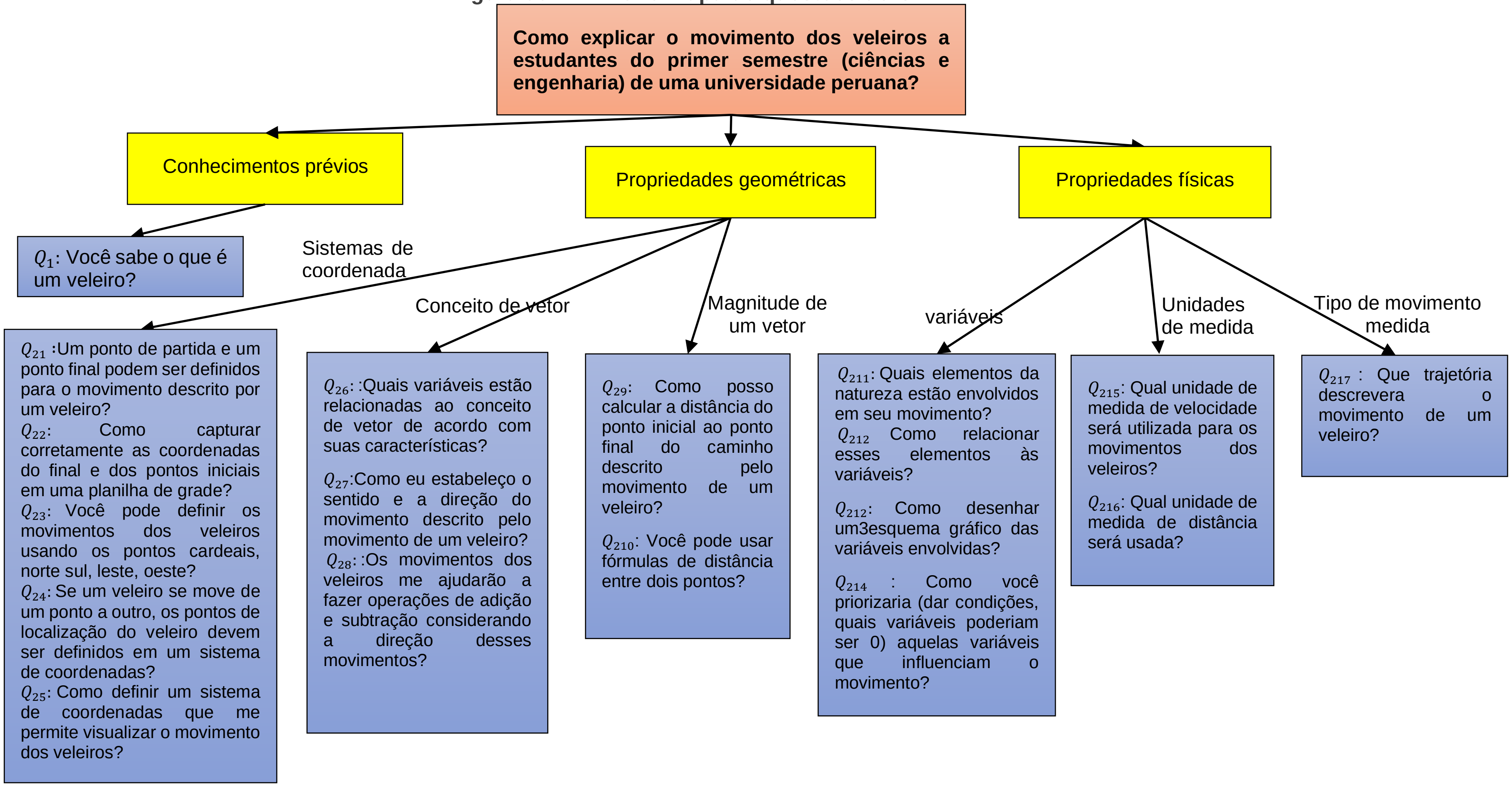
Quadro 22 - Questões do G2 sobre propriedades da física

Variáveis
Q_{211}: Quais elementos da natureza estão envolvidos em seu movimento? Q_{212}: Como relacionar esses elementos às variáveis? Q_{213}: Como desenhar um esquema gráfico das variáveis envolvidas? Q_{214}: Como você elegeria aquelas variáveis que influenciam o movimento?
Unidades de medida
Q_{215}: Qual unidade de medida de velocidade será utilizada para os movimentos dos veleiros? Q_{216}: Qual unidade de medida de distância será usada?
Tipo de movimento
Q_{217}: Qual trajetória descreverá o movimento de um veleiro?

Fonte: Dados da pesquisa

As questões foram apresentadas no mapa esquematizado na Figura 96 que permite visualizar as ligações entre as questões encontradas pelos professores.

Figura 96 – Primeiro mapa de questões do G2



Fonte: Dados da pesquisa

Depois da construção do mapa de questões, os integrantes deste grupo consideraram pertinente formular mais questões para estabelecer um sistema de coordenadas:

> Qual é o papel do orientador do veleiro?
>
> Que forças estão envolvidas no movimento de um veleiro?
>
> Quais vetores geram as forças que atuam no veleiro?
>
> Que força resultante gera o movimento do veleiro?
>
> Qual sistema de coordenadas seria utilizado para caracterizar o movimento do veleiro (posição, velocidade, direção, direção etc.).

Estas questões foram consideradas nas discussões subsequentes, embora não apareçam na Figura 90. Os professores deste grupo fizeram a busca de informação pela Internet e consideraram as seguintes mídias:

> Una introducción al arte de navegar (2010),
>
> Planeación Didáctica Argumentada para el concepto vector (2015), Desarrollo de un programa para el análisis del comportamiento mecánico de las velas en veleros (2016, p 28),
>
> Aplicación de las leyes de Newton (2019, p.141), Navegantes oceánicos (2020) e Masmar (2013). (DADOS DA PESQUISA).

A seguir, os participantes do **G3** consideraram, individualmente, as questões apresentadas no Quadro 23.

Quadro 23 – Questões formuladas pelos professores de G3

Grupo	Professor	Questão individual
G3	P_{31}	$Q_{3\text{-}11}$: Por que um veleiro está avançando? (Q_{16}) $Q_{3\text{-}12}$: Como devem ser feitas as velas para que o veleiro avance? (Q_{17}) $Q_{3\text{-}13}$: Além do vento para mover o veleiro, é necessário aplicar outra força? (Q_{18}) $Q_{3\text{-}14}$: Em que parte das velas deve o vento soprar para que o veleiro avance mais rápido? (Q_{19})
	P_{32}	$Q_{3\text{-}21}$: O que é um veleiro? (Q_{1}) $Q_{3\text{-}22}$: Como os movimentos de um veleiro são representados por vetores? (Q_{9}) $Q_{3\text{-}23}$: Quais propriedades de vetores são satisfeitas neste caso? (Q_{10}) $Q_{3\text{-}24}$: A velocidade com que o veleiro se move é afetada pelo movimento das ondas? (Q_{11})
	P_{33}	$Q_{3\text{-}31}$: O que acontece se a direção da viagem do veleiro for paralela à direção do vento? (Q_{12}) $Q_{3\text{-}32}$: O que acontece se a direção do barco a vela for perpendicular à direção do vento? (Q_{13}) $Q_{3\text{-}33}$: O que acontece se a força do vento não for necessária para o movimento do veleiro (pode-se considerar que não há vento)? (Q_{14}) $Q_{3\text{-}34}$: Você considera que é necessário ter uma pessoa para guiar o veleiro? (Q_{15})
	P_{34}	$Q_{3\text{-}41}$: Quais elementos são necessários para que um veleiro possa avançar? (Q_{2}) $Q_{3\text{-}42}$: Qual é a função do mastro e da vela? (Q_{3}) $Q_{3\text{-}43}$: Quem dá sentido e direção à vela? (Q_{4})

		$Q_{3\text{-}44}$: Por qual elemento matemático o sentido e a direção podem ser representados? (Q_5) $Q_{3\text{-}45}$: Em que direção o veleiro pode ir? (Q_6) $Q_{3\text{-}46}$: Como podemos calcular a distância do ponto inicial e final de um veleiro? (Q_7) $Q_{3\text{-}47}$: Como é chamada essa distância? (Q_8)

Após algumas discussões os professores do grupo G3 consideraram quatro categorias (Quadro 24) e indicaram uma primeira reposta, provisória, para explicar o movimento dos veleiros baseados em um exemplo. Observamos que os professores desse grupo utilizaram todas as questões individuais, salvo pequenas mudanças na redação.

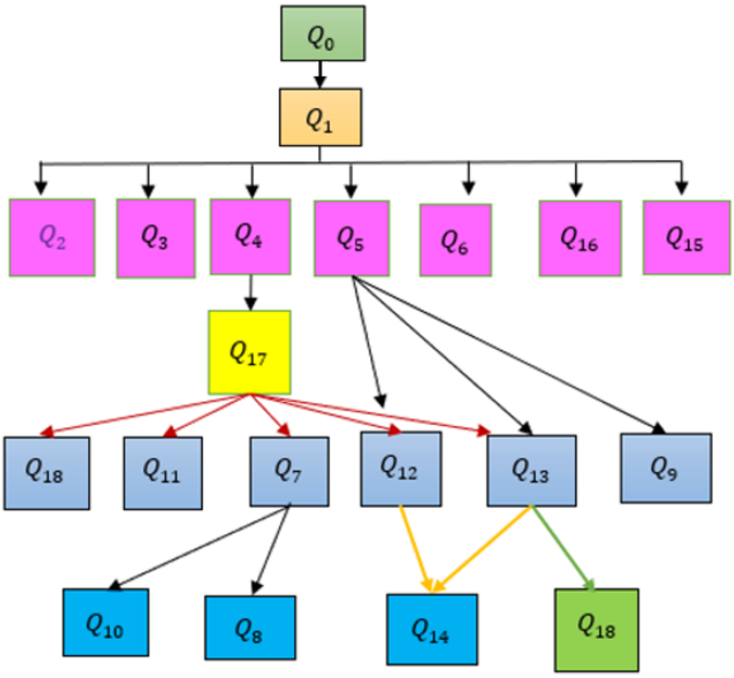
Quadro 24 – Categorias estabelecidas por G3

Conceitos Estas questões permitem recolher as noções ou ideias de sentido e direção.	Q_5: Por qual elemento matemático o sentido e a direção podem ser representados? Q_9: Como os movimentos de um veleiro são representados por vetores? Q_{15}: Você considera que é necessária uma pessoa para guiar o veleiro?
Características (propriedades) Recursos (propriedades) Perguntas foram feitas para identificar as propriedades como operações com vetores, módulo vetorial	Q_{10}: Quais propriedades de vetores são satisfeitas neste caso? Q_{11}: A velocidade com que o veleiro se move é afetada pelo movimento das ondas? Q_{12}: O que acontece se a direção da viagem do veleiro for paralela à direção do vento? Q_{13}: O que acontece se a direção da viagem do veleiro for perpendicular à direção do vento? Q_{17}: Como as velas devem ser organizadas para que o veleiro avance? Q_{19}: Em que parte das velas deve o vento soprar para que o veleiro se mova mais rápido.
Áreas de estudo As questões propostas nos permitem trabalhar com geometria vetorial.	Q_7: Como podemos calcular a distância do ponto inicial e final de um veleiro? Q_8: como é chamada essa distância?
Perguntas anteriores (previas) As questões permitem-nos saber quais os conhecimentos que os alunos têm sobre os veleiros, as suas funções, a sua utilização e os elementos que intervêm no seu movimento, de forma a podermos relacioná-los com o assunto a abordar.	Q_1: o que é um veleiro? Q_2: Para um veleiro avançar, quais elementos são necessários? Q_3: Qual é a função do mastro e da vela? Q_4: Quem dá significado e direção para a vela? Q_{16}: Por que um veleiro está avançando? Q_6: qual caminho o veleiro pode ir?
Exemplos Essas questões nos ajudam a entender de forma prática o movimento do veleiro e a esclarecer o conceito para que os alunos reforcem a teoria.	Q_{14} O que acontece se a força do vento não for necessária para o movimento do veleiro, pode-se considerar que não há vento? Q_{18}: Além do vento para mover o veleiro, é necessário aplicar outra força?

Fonte: Dados da pesquisa

Após a categorização, os professores do G3 elaboraram um mapa de questões (Figura 97) que tem como consequência imediata a questão Q_1 e as relações com as outras questões elaboradas para a busca da resposta de Q_0. Os professores colocaram o veleiro em laranja, os significados em roxo, as velas em amarelo e, em azul claro, suas organizações para identificar a direção e como são representadas, ficando em azul as propriedades de vetores e forças consideradas para o movimento e, por último, usaram verde para identificar as forças que atuam no movimento do veleiro.

Figura 97 - Primeiro mapa de questões do G3



Fonte: Dados da pesquisa

Para continuar o percurso, o grupo considerou formular uma questão adicional, que não está no mapa da Figura 91, mas que foi discutida no seguinte encontro, Q_{20}: na imagem você pode ver um veleiro em deslocamento. Que forças intervêm para mantê-lo em equilíbrio e tornar possível que ele se mova? Represente essas forças com vetores.

O grupo **G4** formulou as questões individuais apresentadas no Quadro 25.

Quadro 25 – Questões formuladas individualmente pelos professores de G4

Grupo	Professor	Questão individual
G4	**P_{41}**	$Q_{4\text{-}11}$: O que é movimento? Esse conceito terá relação com a orientação em que o veleiro segue? Ela pode mudar? (Q_1) $Q_{4\text{-}12}$: Haverá uma relação entre a distância e o deslocamento do veleiro? $Q_{4\text{-}13}$: Quanto tempo o veleiro pode levar para chegar a um determinado destino se não estiver em linha reta? O tempo será mais longo ou mais curto? (Q_3)

		Q_{414}: Podemos representar o movimento do veleiro denotando a direção em que ele se moverá?
	P_{42}	$Q_{4\text{-}21}$: Se você quiser virar à direita, como deve acertar a vela do seu veleiro? $Q_{4\text{-}22}$: Como você pode aproveitar o vento para que seu veleiro ganhe mais velocidade? (Q_2) $Q_{4\text{-}23}$: Se o seu veleiro estiver oposto à corrente do mar e sua força não for maior que a corrente, o que acontecerá com o seu veleiro? $Q_{4\text{-}24}$: Se você quiser atravessar um rio de uma ponta a outra, onde a corrente é perpendicular à sua direção, como será o movimento do seu veleiro no gráfico? (Q_4)
	P_{43}	$Q_{4\text{-}31}$: O que fatores você acha que dependem da direção em que um veleiro se move? $Q_{4\text{-}32}$: Como se move o veleiro com respeito ao vento para que ganhe mais velocidade?

Fonte: Produção da autora

Após discussões, o **G4** categorizou as questões considerando três aspectos: conceito, propriedades e área de estudo, conforme se vê no Quadro 26, onde podemos ainda notar que algumas questões (em azul) foram desprezadas ao mesmo tempo que, baseados nelas, foi acrescentada a questão Q_5.

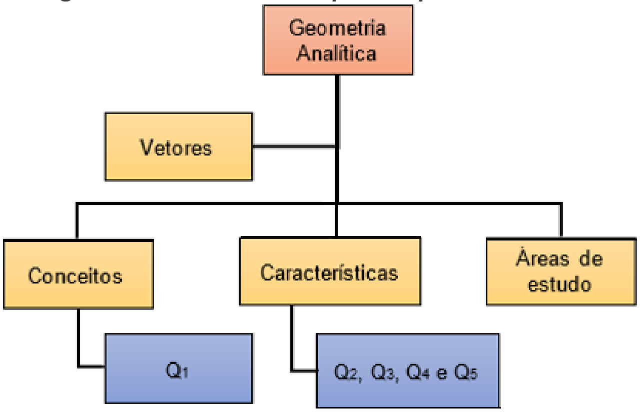
Quadro 26 - Questões por categorias de G4

Conceito Q_1: O que é movimento? Esse conceito estará relacionado à orientação em que um veleiro pode mudar?
Características (propriedades) Q_2: Como você pode aproveitar o vento para que seu veleiro ganhe mais velocidade? Q_3: Quanto tempo o veleiro pode levar para chegar a um determinado destino se não estiver em linha reta? O tempo será mais longo ou mais curto? Q_4: Se você quiser atravessar um rio de uma ponta a outra, onde a corrente é perpendicular à sua direção, como será o movimento do seu veleiro no gráfico? Que área de estudo poderia nos ajudar a responder a essa situação? Q_5: Como a onda afeta o movimento dos veleiros?
Áreas de estudo O grupo considerou que a questão Q_4 caracteriza a área de estudo. Q_6 : Se você quiser cruzar um rio de uma margem a outra onde a corrente é perpendicular à sua direção, como será o movimento do seu veleiro no gráfico? Que área de estudo poderia nos ajudar a responder a essa situação?

Fonte: Dados da pesquisa.

Este grupo considerou o vetor como parte da geometria analítica (Quadro 21). A Figura 98 nos permite observar que, esses professores em formação continuada, mobilizam apenas algumas possíveis praxeologias matemáticas no modelo de GA de nosso MER.

Figura 98 - Primeiro mapa de questões do G4



Fonte: Dados da pesquisa

Depois da construção do mapa, os professores continuaram as discussões e decidiram propor as seguintes questões que foram debatidas no encontro seguinte:

> Q6: Poderíamos representar o movimento do veleiro denotando a direção em que ele se moverá?
>
> Q7: É necessário entender o conceito de campos vetoriais para representar graficamente ondas e correntes de vento?

Os encontros E1 e E2 terminaram com a socialização de todas as questões em plenário com todos os professores. Eles concordaram em considerar as três categorias gerais: a primeira se refere a estudar os **significados** dos elementos inclusos; a segunda está ligada ao **movimento dos veleiros**, isto é, à identificação das praxeologias relacionadas ao movimento na física, baseadas em propriedades da geometria, em particular, a geometria vetorial, e a terceira, que diz respeito à necessidade de decidir o que **explicar e ensinar** aos alunos do primeiro semestre da universidade peruana, as propriedades de matemática, em particular de geometria. Em alguns casos, os grupos consideraram também a avaliação dos alunos. E, a partir daí, os grupos decidiram fazer as mudanças em seus quadros e esquemas.

Pudemos perceber que, além da busca de informações, novas questões foram elaboradas para tratar, por exemplo, de direção e sentido do veleiro (G1); da inclinação do veleiro e do torque produzido (G2); das forças que afetam o movimento do veleiro (G3) e do estudo das condições para o veleiro ter maior velocidade (G4). Pudemos observar também que os professores já estabeleceram algumas categorias e, por isso, propuseram iniciar com as questões sobre conceitos ou significado para conseguirem compreender os termos relacionados a veleiros.

Com relação às dialéticas e funções dialéticas, observamos, nestes dois encontros, a dialética das perguntas e respostas (D_1) aparecendo de maneira natural no processo de desenvolvimento do PEP-FP para responder à questão geratriz $Q_{0-\mathrm{FP}}$ que requer a combinação das $\mathrm{R}_i^\lozenge$ e as obras O_k para introduzir a geometria vetorial baseada no estudo de vetores. Todos os grupos iniciaram formulando as questões Q_ij, na busca de informações proporcionadas pelas mídias, contidas nas obras O_kij apropriadas. As mídias disponíveis são, em princípio, livros-texto impresso, a internet, artigos de pesquisa etc.

Para a dialética das mídias e dos meios (D_2) foram formuladas questões relacionadas ao ensino de vetores, como no G1, para o movimento dos veleiros. Também ocorreu um trabalho de distribuição de tarefas para pesquisar informações e discussões nos grupos, o que nos permitiu observar a dialética do indivíduo e do coletivo (D_3), principalmente nos quadros de questões individuais formuladas por cada professor e na categorização e criação de mapas de questões realizadas coletivamente em cada grupo.

Nos dois encontros seguintes, os grupos se reuniram pelo Zoom para discutir as respostas.

Sessões 4 e 5 do PEP-FP

Para esses encontros havíamos previsto a continuidade da discussão da segunda reunião e as atividades de categorizar as questões elaboradas e discuti-las coletivamente, além do retorno para o trabalho em grupo para agregar novas questões, construir o mapa de questões e respostas, finalizando o dia com a socialização do que seria produzido. Nos terceiro e quarto encontros tivemos os estudos das categorias que foram estabelecidas, ou seja, focou-se em primeiro lugar no estudo do significado de conhecimentos relacionados aos veleiros e nos fatores que permitem seu movimento, além de como “explicar” o assunto aos alunos. Logo no início do terceiro dia de atividades ocorreu o seguinte diálogo entre um dos professores e o professor regente no plenário:

> P_{21} do G2: Temos as questões e as categorias discutidas em grupo. Minha dúvida é se as respostas a estas questões deveriam ser escritas como os

> nossos alunos as responderiam considerando os seus conhecimentos ou deveriam ser escritas como nós, os professores, as entendemos.
>
> Professor: Neste caso, você é o aluno e a reposta sempre deve ser justificada.
>
> P_{22} do G2: Fizemos a busca nos livros e artigos e escreveremos as respostas de maneira simples para que o aluno consiga compreender.
>
> Professor: A reposta sempre é a que o grupo construiu.

Os professores tinham preocupação também com o tempo, porque as aulas eram de duas horas e fazer o mapa requer mais tempo, por isso consideramos dedicar dois encontros seguidos para que tivessem tempo para a busca de informações e o seu compartilhamento no drive.

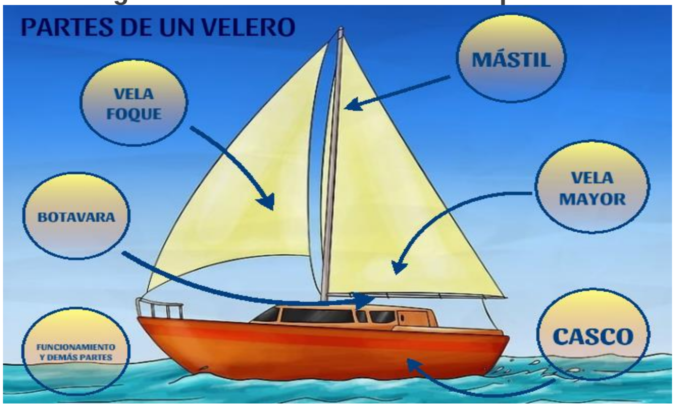
As discussões nos grupos tiveram início no sentido de compreender os conceitos relacionados aos veleiros para responder à questão: Q_1: o que é um veleiro? Que caraterísticas dos veleiros os alunos conhecem? A resposta foi obtida com os professores estudando obras que discutem as características de um veleiro, mais especificamente, os fatores que permitem seu movimento.

Assim, temos as respostas para a primeira categoria que tratou do significado do que é um veleiro e os elementos que permitem seu movimento. A respeito da primeira questão, **Q_1: o que é um veleiro**, percebemos que todos os grupos tiveram a noção de que os veleiros são impulsionados por uma força externa, a força do vento. Baseados nas repostas de cada grupo:

> R_{1-1}: É um barco impulsionado pela ação do vento sobre as velas.
>
> R_{2-1}: Veleiro é um termo que se refere a um barco impulsionado pela ação do vento sobre suas velas.
>
> R_{3-1}: Veleiro é um termo que se refere ao barco impulsionado pela ação do vento sobre suas velas. Deve-se lembrar que as velas são panos de diferentes tamanhos e formas que são amarrados ao mastro. Elas fazem parte de um sistema conhecido como cordame, e que permite o aproveitamento dos impulsos proporcionados pelo ar.
>
> R_{4-1}: Um veleiro é um barco em que a ação do vento sobre seu aparelhamento constitui a sua principal forma de propulsão.

Para a questão **Q_{11}: que tipos de veleiros existem,** o G1 afirmou R_{1-2}: Vela ligeira, veleiros desportivos, barcos a vela de corrida e veleiros tradicionais. Como consequência dessa questão, surgiram outras questões baseadas no tipo de veleiro de vela ligeira e desportivos, investigando seus componentes e os materiais utilizados em cada tipo de veleiro e que identificamos como **Q_{2-11}**. A resposta dada pelo G2 está na Figura 99.

Figura 99 - Partes de um veleiro por G2



Fonte: Dados da pesquisa

Resumidamente os grupos responderam:

> Vela: pedaço de lona ou outro tecido resistente que, desdobrado do mastro de uma embarcação, forma uma superfície que, ao ser pressionada pelo vento, impulsiona a embarcação e permite a navegação.
>
> Casco: parte fundamental do veleiro e que tem a missão de permitir que a embarcação flutue.
>
> Mastro: polo ou eixo vertical que segura as velas.
>
> Leme: seu objetivo é dar ao veleiro a capacidade de manobra.
>
> Retranca: poste horizontal que é preso ao mastro para segurar a vela grande.
>
> Quilha: tem como função manter e aumentar a estabilidade do veleiro.
> (DADOS DA PESQUISA, tradução nossa).

Surgiram ainda mais questões a partir de **$Q_{2\text{-}11}$**, como a apresentada pelo G2:

> $Q_{2\text{-}111}$: De que material é feito um veleiro?
>
> R_{112}: O capacete (casco) pode ser feito de fibra de carbono, vidro ou alumínio. A vela pode ser de poliamida ou poliéster.
>
>  
>
> Q_{1111}: Que tipos de capacete e quilha existem?
>
> Q_{1112}: Que tipos de leme (timão) existem?
>
> Q_{1113}: Que tipos de vela existem?
>
> R_{1113}: Vela maior– a vela grande presa ao mastro principal, e a vela buja – vela triangular orientada para a proa.
>
> Q_{1121}: Você conhece fibra de carbono ou fibra de vidro?
>
> Q_{2}: Que elementos da geometria apresentam as velas?
> (DADOS DA PESQUISA, tradução nossa).

O grupo formulou as questões sobre material do veleiro e das velas, mas consideraram primeiro identificar o que produz o movimento.

Para a questão Q_{12}, que trata das características de um veleiro, as respostas dos grupos foram semelhantes e mostramos aqui as respostas dadas pelo G1:

> R1-12: A ação do vento é sua principal forma de propulsão. Todo veleiro tem estabilidade, que é a tendência do barco de retomar sua posição inicial. Todos os veleiros possuem uma quilha, que é a espinha dorsal do casco, é a estrutura da qual tudo depende. Todo veleiro tem um *centerboard*, que é uma quilha muito leve, que serve para melhorar a velocidade do vento. Assim em resumo são: Estabilidade, propulsão, quilha e bolina.

Um professor do grupo G2 afirmou:

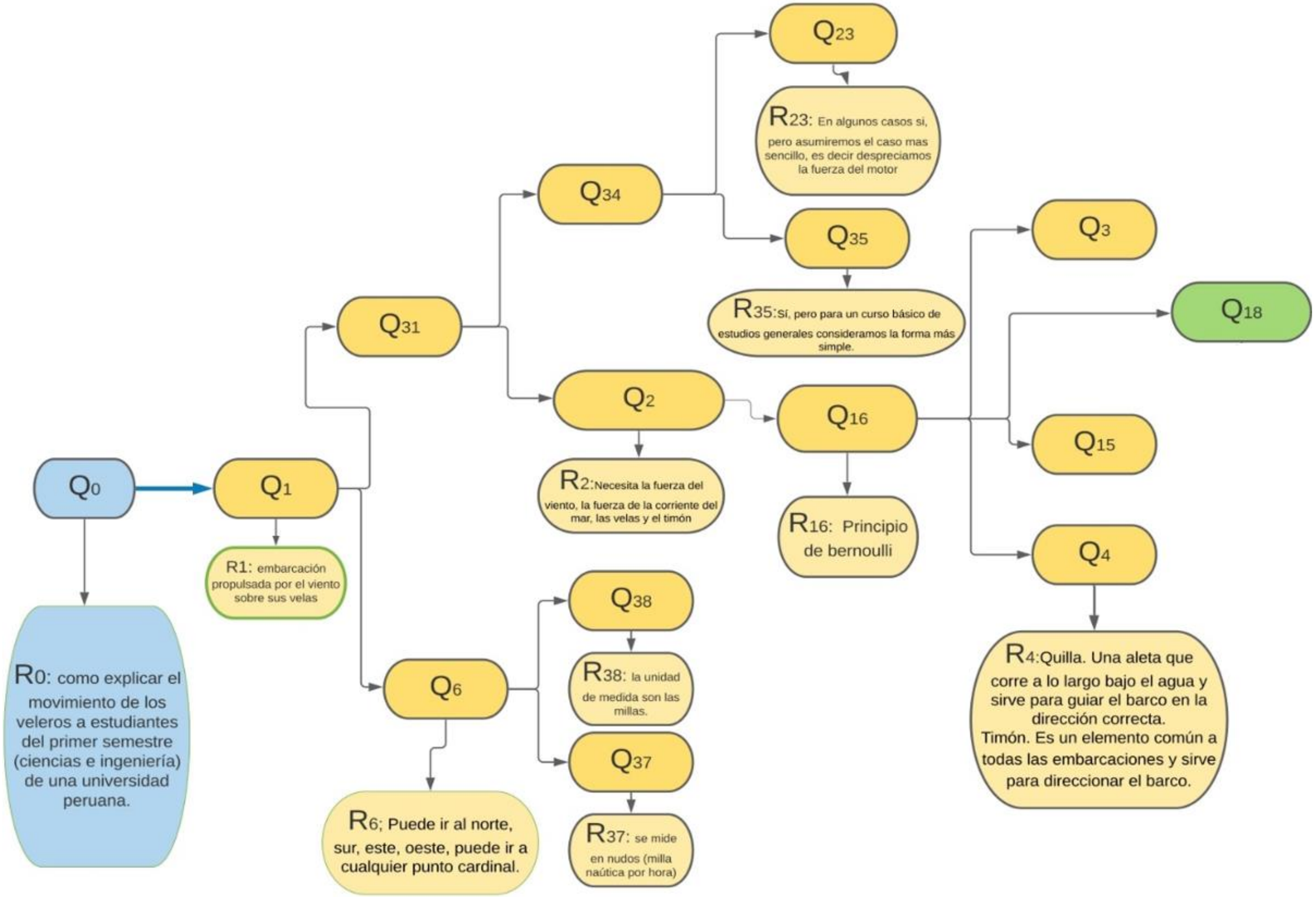
> *$P_{21:}$ Todo veleiro tem quilha, que é a estrutura sobre a qual está toda a estabilidade do veleiro, quer dizer, todas as outras partes estão sobre ela. E a orça, ..., que é como uma quilha menor, que ajuda na velocidade do veleiro (Dados da pesquisa. Tradução nossa)*

As respostas do grupo G3 sobre a função da vela

> Q_4 : Quem traz sentido e direção para a vela?
>
> R_4: A quilha, que é uma barbatana que corre debaixo da água e serve para guiar o barco na direção certa, e o leme, que é um elemento comum a todos os barcos e serve para dirigi-lo.
>
> Q_6: Em que direção o veleiro pode ir?
>
> R_6: Pode ir para o norte, sul, leste, oeste, pode ir para qualquer ponto cardeal.
> (Dados da pesquisa, Tradução nossa)

Consideramos que as pesquisas feitas pelos professores, nesta categoria, permitiram identificar as partes dos veleiros e algumas propriedades a respeito da navegação que são necessários para compreender o movimento dos veleiros na próxima categoria. Como exemplo apresentamos o mapa de questão do G3 na Figura 100.

Figura 100 - Segundo mapa de questões e respostas do grupo G3



Fonte: Dados da pesquisa

Sessões 6 e 7 do PEP-FP

Para a categoria movimento dos veleiros, a primeira questão **Q_2: O que faz com que o veleiro se mova,** surgiram respostas que trataram do fenômeno que permite os movimentos. Apareceram também novas questões para identificar as forças do vento. A resposta do G1 foi $R_{1\text{-}2}$: o movimento do veleiro se deve à ação do vento em seu cordame (vela). E o mesmo grupo disse o seguinte em termos de questões derivadas:

> $Q_{1\text{-}21}$: A velocidade do vento influencia o deslocamento do veleiro?
>
> $R_{1\text{-}21}$: Sim, a velocidade do vento influencia a força que o vento exerce sobre a plataforma (aparelho).
>
> $Q_{1\text{-}22}$: A massa do veleiro e da sua carga influenciam a velocidade do veleiro? $R_{1\text{-}22}$: Sim, devido a $F = m \cdot a,$ uma maior massa terá maior aceleração, o que impacta na velocidade.
>
> $Q_{1\text{-}23}$: Os fenômenos meteorológicos influenciarão o movimento do veleiro? $R_{1\text{-}23}$: Os fenómenos meteorológicos, como o "*el niño*", manifestam-se com ventos alísios que dão origem a uma alta velocidade ao veleiro.
> (DADOS DA PESQUISA, tradução nossa).

O aluno P_{22} acrescenta "*a cidade de Lima está constantemente afetada pela corrente do "niño", que se manifesta com os ventos e é quando devemos aproveitar para experimentar a navegação."* (Dados da pesquisa, t*radução nossa*).

Podemos observar que surgem nas questões os fenômenos de deslocamento, velocidade e força que no MER mostramos como algumas das razões de ser dos vetores.

Para a questão **Q_2**, o G2 deu $R_{2\text{-}2}$: aqueles produzidos pela natureza ou pela ação humana: o vento e a força do mar, descritos na física. E essa resposta conduziu à seguinte questão $Q_{2\text{-}21}$: quais princípios da física estão relacionados a esses elementos? O grupo considerou questões que abordavam forças em equilíbrio, peso e impulso.

> $Q_{2\text{-}211}$: Que condição explica o equilíbrio no veleiro?
>
> $R_{2\text{-}211}$: A adição das forças envolvidas é igual a zero.
>
> $Q_{2\text{-}212}$: Onde este princípio se aplica ao seu equilíbrio?
>
> $R_{2\text{-}212}$: Aplica-se sobre as forças verticais.
>
> $Q_{2\text{-}2121}$: Quais forças atuam sobre o equilíbrio?
>
> $R_{2\text{-}2121}$: Peso do veleiro e impulso (empuxo) do mar.
>
> $Q_{2\text{-}221}$: Qual princípio físico explica a flutuabilidade do veleiro?

R_{2-221}: Princípio de Arquimedes.

Q_{2-2211}: Como este princípio se aplica à sua flutuabilidade?

R_{2-2211}: Em flutuabilidade, que é a tendência de um fluido exercer uma força que sustenta um corpo que está sobre ele, a estabilidade se refere à capacidade de um corpo retornar à sua posição original após uma inclinação em relação a um eixo horizontal.

Q_{2-2212}: Quais forças atuam em sua flutuabilidade?

R_{2-2212}: Impulso da água e peso do veleiro

Q_{2-2213}: Que conceito matemático é aplicado para estudar essas forças?

R_{2-2213}: O conceito de vetor relacionado a torques verticais.

Q_{2-23}: Qual princípio físico explica a ação do vento no veleiro?

R_{2-23}: Princípio de Bernoulli.

Q_{2-231}: Como este princípio se aplica à navegação?

R_{2-31}: O vento produz duas forças aerodinâmicas: uma de sustentação perpendicular à velocidade do vento e outra de resistência e que tende a deslocar o veleiro para o lado.

Q_{2-232}: Que forças atuam sobre a vela?

R_{3-232}: Força do vento.

Q_{2-234}: Que conceito matemático é aplicado para estudar este princípio?

R_{2-234}: O conceito de vetor

Q_{2-235}: Que elementos devidos à ação humana intervêm no movimento?

R_{2-235}: Manobra do leme e o ponto de partida.
(Dados da pesquisa, tradução nossa).

Com a identificação das forças que participam no movimento dos veleiros, esse grupo percebeu a necessidade dos vetores, o que será discutido na próxima categoria.

O G3 construiu a respostaR_{3-2}: precisa da força do vento, da força da corrente do mar, das velas e do leme, e que os conduziu às questões:

Q_{3-21}: O que traz sentido e direção para a vela?

R_{3-21}: A quilha, que é uma barbatana que corre debaixo d'água e serve para guiar o barco na direção certa. Além disso, o leme, que é um elemento comum a todos os barcos e serve para dirigir o barco.

Q_{3-22}: Por qual elemento matemático o sentido e a direção podem ser representados?

R_{2-22}: Vetores.

Q_{3-23}: Em que direção o veleiro pode ir?

R_{3-23}: Pode ir para o norte, sul, leste, oeste; para qualquer ponto cardeal.

Q_{3-24}: A velocidade com que o veleiro se move é afetada pelo movimento das ondas do mar?

$R_{3\text{-}24}$: Sim, mas a força das ondas atua como uma força de fricção em alguns casos.

$Q_{3\text{-}25}$: O que acontece se a direção do curso do veleiro for paralela à direção do vento?

$Q_{3\text{-}26}$: O que acontece se a direção da viagem do veleiro for perpendicular à direção do vento?

$Q_{3\text{-}47}$: O que acontece se a força do vento não for necessária para o veleiro se mover?

$R_{3\text{-}47}$: Não haveria deslocamento; o barco estaria à deriva pela força da corrente do mar.
Fonte. Dados da pesquisa, Tradução nossa.

O grupo não conseguiu responder as questões $Q_{3\text{-}25}$ e $Q_{3\text{-}26}$ porque antes tinham que explicar o Princípio de Bernoulli, e que assim foi descrito:

> O vento circula mais rápido na faixa externa da vela (aquela que está para fora do barco) e mais lento na parte interna, onde a vela infla. Conforme você vai mais rápido do lado de fora, não pode empurrar a vela com tanta força, enquanto do lado de dentro, uma força maior é gerada contra a vela, o que compensa a velocidade mais lenta. Portanto, a vela recebe uma força maior do lado interno, e é isso que faz com que o veleiro avance. Na verdade, é a mesma coisa que acontece com um guarda-chuva em um dia chuvoso e ventoso quando entra um pouco de vento e notamos que a parte do tecido sobe como se o guarda-chuva quisesse se levantar. (Dados da pesquisa, tradução nossa).

As questões que surgiram conduziram a propriedades da física, entre elas, o princípio de Bernoulli, e que não foram respondidas por implicar na mobilização de vetores.

A reposta do grupo G4, $R_{4\text{-}2}$: para se mover, o barco utiliza a força do vento que assim cria uma força propulsora, em outras palavras, as velas dos veleiros, da mesma forma que as asas das aeronaves, geram uma força de sustentação que se deve às diferenças de pressão entre as faces opostas de seus perfis aerodinâmicos.

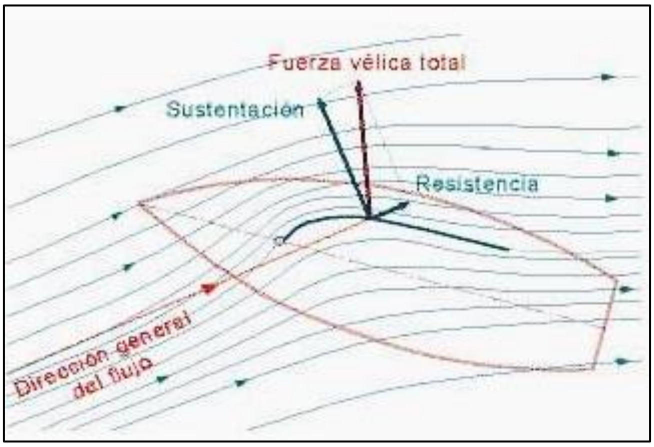
E para mostrar as forças identificadas, o grupo apresentou as seguintes questões e respostas acompanhadas de uma figura.

$Q_{4\text{-}21}$: Quais forças estão envolvidas no movimento de um veleiro?

$R_{4\text{-}21}$: Estão envolvidas forças de suporte (sustentação), força vertical, resistência e direção geral do fluxo.

$Q_{4\ \text{-}211}$: Esse conceito está relacionado à orientação para qual um veleiro pode mudar sua direção?

$R_{4\ \text{-}211}$: Sim, pois com essas forças podemos mudar a direção do veleiro e mantê-lo em equilíbrio. O movimento de todas as embarcações no mar é o resultado de todas as forças que atuam sobre elas.

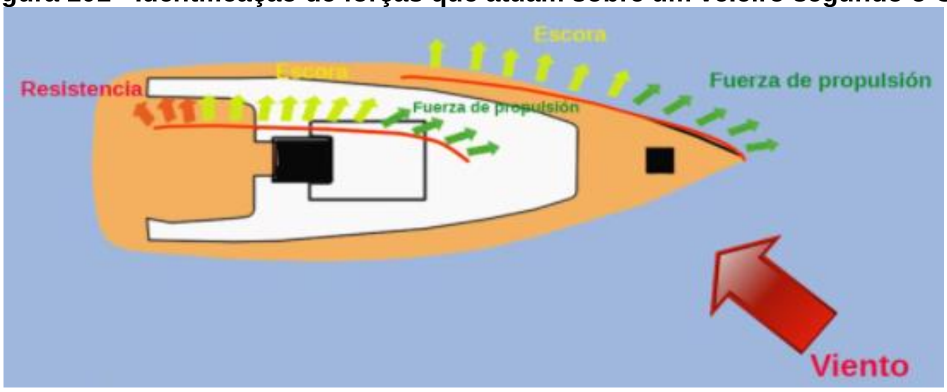


Fonte: Dados da pesquisa (tradução nossa)

Como já havia identificado as forças, o grupo continuou pesquisando as forças que definem a direção para descrever o movimento, e apresentou, então, a Figura 101 juntamente com a questão:

> $Q_{9.1}$: Esse conceito estará relacionado à orientação em que um veleiro pode mudar de direção? O respondido $R_{9.1}$: Sim, pois com essas forças podemos mudar a direção do veleiro e mantê-lo em equilíbrio. O movimento de todas as embarcações no mar é o resultado de todas as forças que atuam sobre elas.

Figura 101 - Identificação de forças que atuam sobre um veleiro segundo o G4



Fonte: Dados da pesquisa

Para concluir o grupo afirmou:

> o movimento de um Veleiro, em termos simples, é determinado pela força do vento, a força do mar (correntes marítimas), força de fricção, com a qual a direção do vento e, portanto, a força do vento não necessariamente determina a direção do movimento do veleiro. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

Nesta categoria, os grupos formularam questões para identificar elementos da física que atuam no movimento – como forças, velocidades e o teorema de Bernoulli – e constataram que, para dar as respostas é necessário utilizar conceitos da matemática, concretamente, vetor, o que justifica a razão de ser dos vetores do nosso MER.

Sessões 8 e 9 do PEP-FP

Para última categoria, que trata da questão **Q_3: como explicar o comportamento do veleiro,** o grupo **G1** apresenta $R_{1\text{-}3}$: graças ao impacto do vento sobre o veleiro, poderemos notar o deslocamento do veleiro – o que faz surgir as seguintes questões:

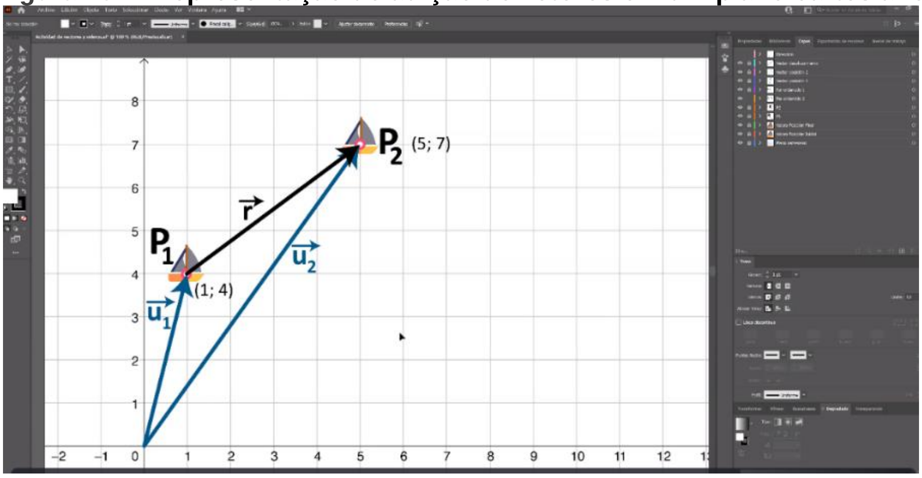
> $Q_{1\text{-}31}$: Como o professor explicaria o funcionamento de um veleiro para um aluno? $R_{1\text{-}31}$: O funcionamento de um veleiro pode ser explicado pelo uso de vetores.
>
> $Q_{1\text{-}32}$: Qual é o conhecimento prévio que o aluno precisa ter para entender o movimento do veleiro?
>
> $R_{1\text{-}32}$: São necessárias noções de trigonometria, geometria plana e geometria analítica.
>
> $Q_{1\text{-}33}$: Que conhecimentos de matemática ou física os alunos devem aprender para compreender o funcionamento do veleiro?
>
> $R_{1\text{-}33}$: Quantidades escalares e vetoriais, bem como operações vetoriais. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

Podemos notar que nas respostas para $Q_{1\text{-}31}$ e $Q_{1\text{-}32}$ o grupo explicita a necessidade de conhecimentos matemáticos e explicam:

> P_{12}: Para explicar o movimento dos veleiros, que se produz graças ao impacto do vento sobre o veleiro e depende do peso dos distintos tipos ... é preciso identificar as grandezas, em particular, as grandezas vetoriais.
>
> P_{11}: Preparamos tarefas com ilustração no software para uma melhor compreensão. Demos aos alunos uma folha com os pontos em que o veleiro inicia e termina – esses pontos não estão na origem do sistema de coordenadas cartesianas –, mas pedimos que eles esses pontos e os expressem como pares ordenados. A partir desta tarefa, podemos pedir o desenho do vetor $\vec{u}_1$ desde a origem até P_1 e $\vec{u}_2$, e também da origem até P_2. Outra tarefa é que os alunos desenhem $\vec{u}_2$-$\vec{u}_1$. E, depois, que eles determinem o comprimento e a direção, para que, na sequência, consigam definir $\vec{r} = P_1P_2$ e que é o segmento orientado, ou seja, um vetor (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

A solução foi apresentada pelo professor P_{11} que utilizou a Figura 102, construída por meio de um *software*.

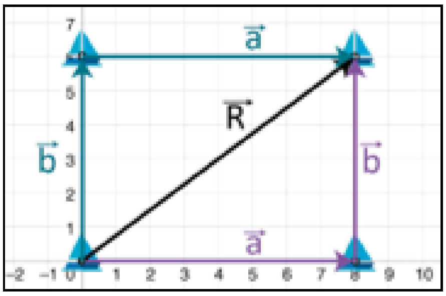
Figura 102 - **Representação de adição de vetores em um plano cartesiano**



Fonte: Produção de aluno do G1

Para explicar o movimento do veleiro, o G1 precisou definir vetor, vetor unitário, módulo de um vetor e como representá-lo graficamente, além de algumas propriedades. A definição de vetor foi exibida na GS como segmento orientado e o restante foi apresentado na GA. Durante a discussão para verificar a comutatividade para a operação de adição de vetores, o aluno P2 apresentou a seguinte questão:

> $Q_{1\text{-}41}$: Um veleiro inicia uma jornada partindo do ponto C e navegando 8 km para o leste. No segundo dia, ele navega 6 km ao norte. Demonstre que, se você executar os percursos na ordem inversa, sempre partindo do ponto C, o vetor de deslocamento resultante será o mesmo que o do outro sentido do trajeto.
>
> $R_{1\text{-}41}$: Graficamente, de acordo com a primeira propriedade comutativa de adição, obteríamos o seguinte vetor de deslocamento: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{R}$. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

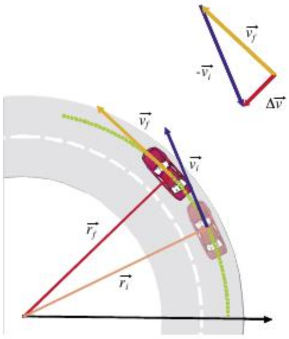


(Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

Os professores do G1 apresentaram ainda uma tarefa a respeito de aplicativos para descrever o deslocamento de veleiros, quando seu movimento é circular:

> **$Q_{1\text{-}42}$**: Você sabe como os aplicativos de navegação como *Waze* ou Google Maps conseguem descrever o momento?

R1-42: Sim, o Waze e o *Google Maps* utilizam vetores que servem como um indicador da direção e direção de todas as ruas e avenidas existentes, e com base nos vetores é possível encontrar o verdadeiro deslocamento que um veículo deve seguir

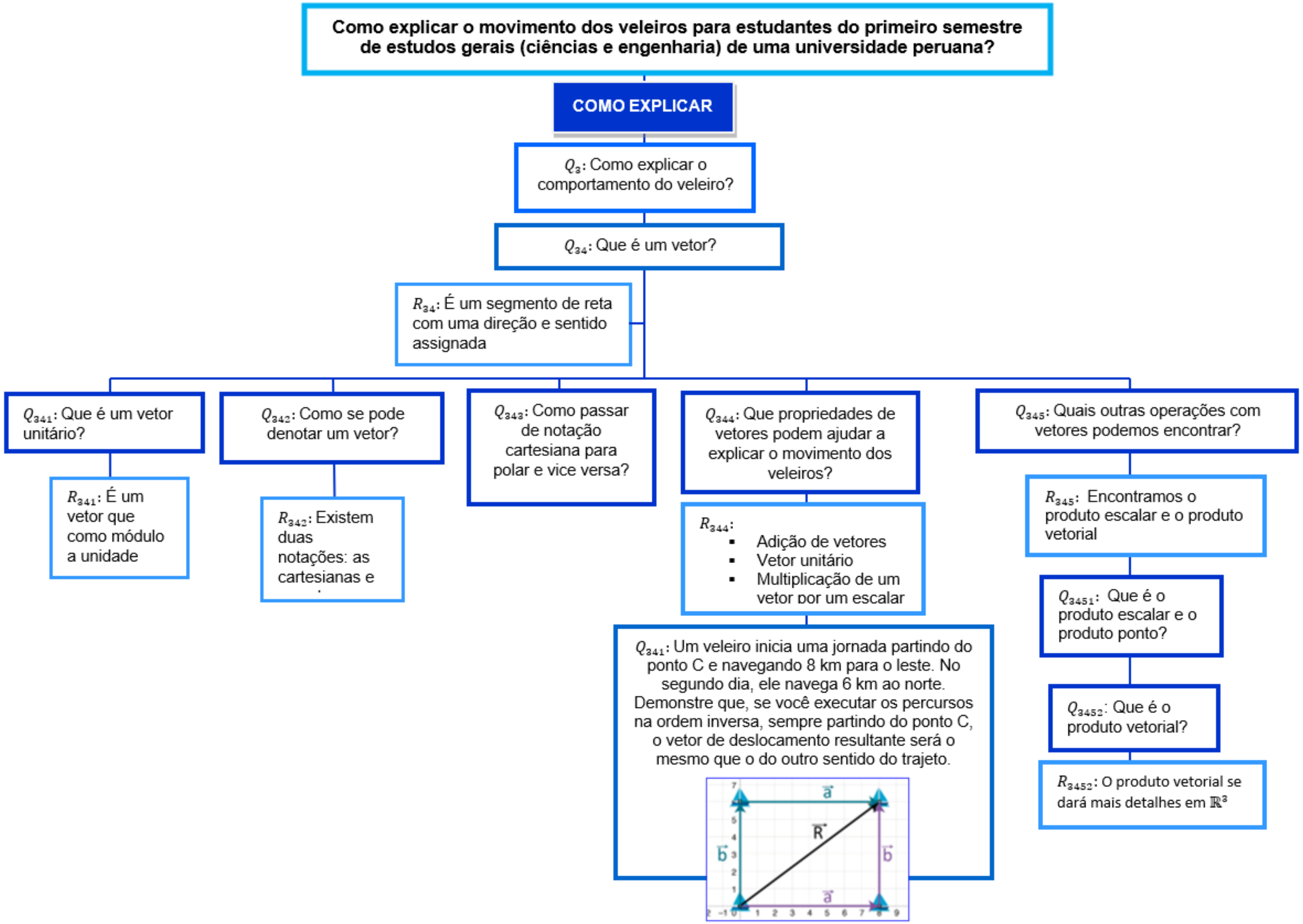


.
(Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

A figura apresentada pelo G1 nessa resposta para descrever o movimento circular de um veleiro mostra a origem da força centrípeta e da força tangencial cujo deslocamento é descrito por coordenadas cartesianas como uma generalização do método de Galileu para movimentos parabólicos, e descrito em nosso MER.

A Figura 103 mostra o plano seguido pelo G1 para responder as questões.

Figura 103 - Mapa resumo de questões e respostas de G1



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos perceber que sugerem questões cujas respostas mobilizam técnicas de aplicação da definição do vetor e adição de vetores, que são organizações matemáticas pontuais.

A resposta do **G2** para a questão da segunda categoria é **R2-3**: o movimento de um veleiro pode ser explicado pela mudança de posição. Eles também apresentaram a revisão de livros de matemática para justificar as técnicas que utilizaram. Dessa resposta derivaram outras questões para explicar o movimento de um veleiro.

> Q_{2-21}: Como você descreveria o caminho que o movimento de um veleiro deve seguir?
>
> R_{2-21} : Diferentes trajetórias podem ser descritas, mas, em particular, nós nos concentraremos nas lineares.
>
> Q_{2-22}: Os movimentos do veleiro podem ser definidos usando os pontos cardeais, norte sul, leste, oeste?
>
> R_{2-23}: Sim, podem, se levarmos em consideração um ponto de referência, como o ponto de partida do movimento.
>
> Q_{2-24}: Um ponto de partida e um ponto final podem ser definidos para o movimento descrito por um veleiro?
>
> R_{2-24}: Sim, é possível quando se leva em consideração um ponto de referência.
>
> Q_{2-31}: Como capturar corretamente as coordenadas dos pontos final e inicial em uma planilha de grade?
>
> R_{2-31}: Dividindo a folha em partes que representem uma unidade de medida em escala.
>
> Q_{2-32}: Se um veleiro se move de um ponto a outro, os pontos de localização dos veleiros podem ser definidos em um sistema de coordenadas?
>
> R_{2-32}: Sim, podem, por exemplo, tomando o ponto de partida como origem das coordenadas. (Fonte. Dados da pesquisa, Tradução nossa).

Essas questões abordam tipos diferentes de trajetórias e são respondidas em GA. Uma delas foi apresentada pelo professor P_{23} do G2:

> P_{23}: Os veleiros se destacam por seu deslocamento no mar devido à ação do vento. Nós nos perguntamos: de que forma essa ação gera o avanço do veleiro? A maioria dentre nós intuiu a resposta: “porque o vento empurra”. Isso fica evidente quando o vento está vindo de popa (traseira do veleiro). Mas será possível mover-se contra a direção do vento considerando-se:
> 1) Um veleiro com uma ou duas velas?
> 2) O mar em repouso? (Fonte: dados da pesquisa, tradução nossa).

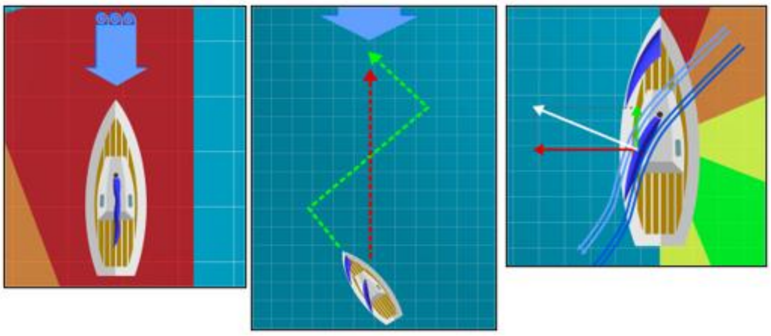
A resposta dessa tarefa foi assim apresentada:

> P_{23}: Será que o veleiro que se encontra contra o vento não vai a lugar nenhum?

> P_{22}: O movimento contra o vento é em zigue-zague para que o vento, por ser um fluido a que se aplica o princípio de Bernoulli, gere o componente vetorial que empurra o veleiro para a frente. Pode-se modelar aproximadamente as forças que interagem devido ao vento e que permitem que o veleiro se mova contra a direção do vento. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

As mídias permitiram a busca de informação e o grupo mostrou a Figura 104, mas sem qualquer referência a um caso concreto nem quando a apresentou em plenário.

Figura 104 - Movimento de um veleiro do G2

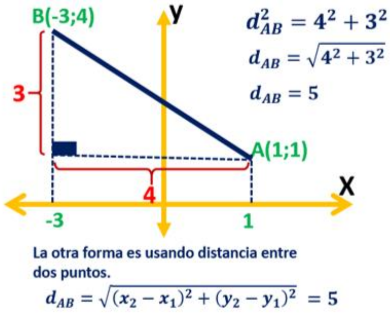


Fonte: Dados da pesquisa

O G2 só explicou os fenômenos apelando ao sistema de coordenadas cartesianas em tarefas que consideram o deslocamento e a representação gráfica de forças, o que mostra uma razão de ser dos vetores comtemplada no nosso MER.

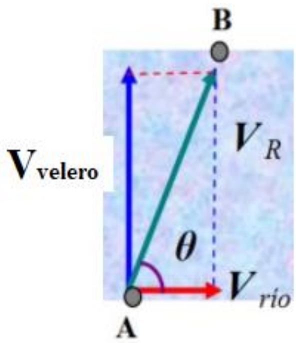
O G3, antes de explicar o movimento, não havia respondido à questão da terceira categoria, porque precisava primeiro estudar vetores. Os integrantes do grupo iniciaram respondendo a questão $Q_{3\text{-}31}$: como podemos calcular a distância do ponto inicial e final de um veleiro? com a tarefa $Q_{3\text{-}32}$: se considerarmos a posição inicial de um veleiro no ponto A(1,1) e, depois, ele se mover em linha reta até o ponto B(-3, 4), que distância total ele terá percorrido? A técnica (Figura 105) consiste em localizar os pontos em um referencial cartesiano e aplicar a fórmula para calcular a distância entre dois pontos:

Figura 105 - Adição de vetores em um plano cartesiano - G3



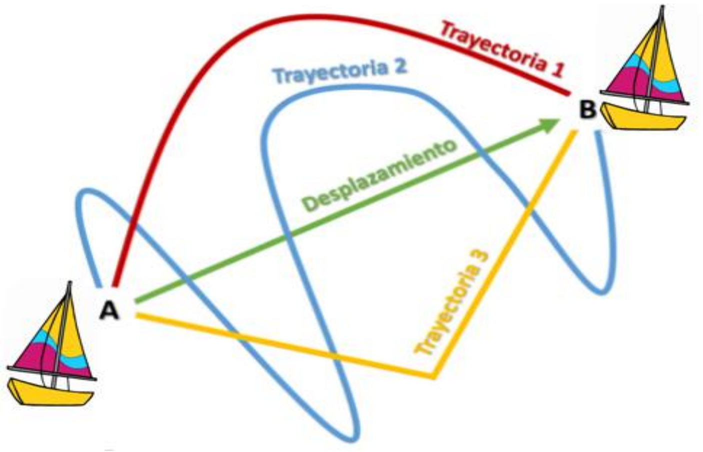
Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, eles indicaram as questões $Q_{3\text{-}32}$: como representamos a direção e o comprimento do deslocamento de um veleiro no plano cartesiano? e $Q_{3\text{-}33}$: quais são os elementos de um vetor**?** Para a questão $Q_{3\text{-}34}$: a velocidade da água influenciará no deslocamento dos veleiros, apresentaram a resposta $R_{3\text{-}34}$: a velocidade da água influencia no deslocamento do veleiro e propuseram a tarefa:

> **A tarefa:** Um veleiro está prestes a cruzar um rio navegando perpendicularmente à corrente com uma velocidade constante de 2m/s. O veleiro parte de A, porém, termina em B, um ponto a jusante, devido à corrente que o desviava. Se a velocidade da corrente for 0,8 m/s e todas as velocidades forem consideradas constantes, encontre a velocidade e a direção do veleiro conforme visto por um observador parado na costa.
>
> **Solução**
>
> Um observador parado na costa veria como o veleiro é desviado de acordo com a velocidade VR resultante. Para encontrar a resposta, precisamos somar vetorialmente a velocidade do veleiro em relação à água e a velocidade da corrente, que chamamos de rio V:
>
> *VR = V veleiro + V rio*
>
> Na figura (que não está em escala), os vetores foram somados para se obter VR. Neste caso, o teorema de Pitágoras pode ser aplicado para obter sua magnitude:
>
> 
>
>
> $VR^2 = 2^2 + 0.8^2 = 4.64$
>
> VR = 2.15 m/s
>
> A direção em que se desvia o veleiro da direção perpendicular se calcula facilmente, notando que:
>
> θ = arctg (2/0.8) = 68.2º
>
> Então o nadador desvia 90º – 68.2º = 27.2º do seu endereço original.
>
> (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

No G3 as questões se relacionaram a deslocamento e comprimento de vetor no MGA, no entanto, para a velocidade final o grupo utilizou o método do paralelogramo de velocidades da GS. O G4 considerou que para explicar o movimento é preciso identificar as características e propriedades de um veleiro, além de prever eventos como o vento, a corrente do mar ou rio, a segurança e o tempo de deslocamento de um ponto ao outro, mostrando a Figura 106.

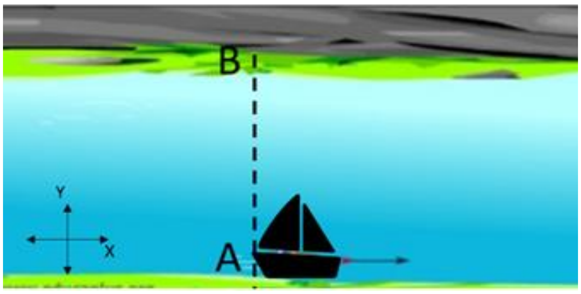
Figura 106 - Tipos de trajetória - G4



Fonte: Dados da pesquisa

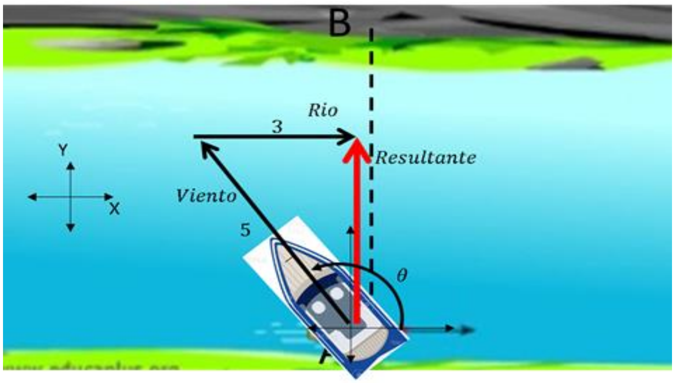
Para explicar o movimento o grupo considerou a seguinte tarefa:

> Um aluno quer atravessar um rio com um veleiro. Se o rio tem uma velocidade de v = 3 m/s e o vento tem uma velocidade de 5 m/s, então, a direção do vento deve formar um certo ângulo com o eixo x (a direção do vento não deve ser paralela ao eixo y) para que o aluno possa chegar à margem oposta. Considere a figura abaixo supondo que a direção e sentido da proa do veleiro tenham a mesma direção do vento.



(Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

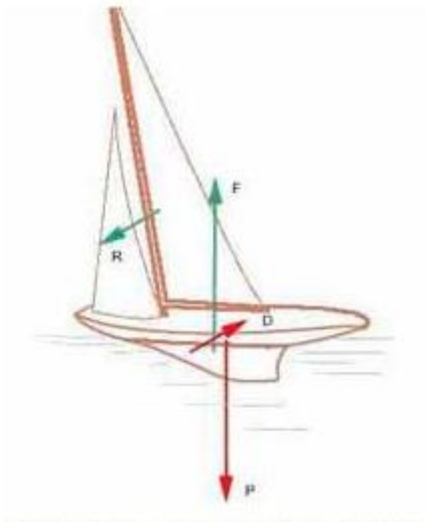
Para responder essa questão o grupo considerou que como a direção do vento deve ser paralela ao eixo y, então, o veleiro terminará a vários metros do ponto B, devido à ação do rio, e que, por isso, a direção do vento deve ser adequada para poder alcançar o ponto B. E eles apresentaram:



> Nesse sentido, devemos considerar nesta situação que a direção (sentido) do movimento do Veleiro NO é necessariamente a mesma direção da PROA do veleiro. Então, dado que duas forças atuam sobre o veleiro – o vento e o rio –, concluímos que a direção do movimento do veleiro segue a resultante de ambas as forças, de forma que, para o veleiro se deslocar de A para B, é necessário que a direção do vento forme um ângulo de 127 graus com o eixo x, para que a resultante de ambas as forças sejam paralelas ao eixo y. Desta forma, o aluno poderá alcançar a margem oposta. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

A resposta que o G3 apresentou para a questão Q_{3-25}: como as forças que atuam em um veleiro podem ser representadas para mantê-lo equilibrado durante a navegação, foi a seguinte:

> Enquanto o veleiro está navegando, ele é submetido a 4 forças iguais e opostas duas a duas, e que são a força A, resultante da vela R, e a flutuabilidade F, com as outras duas sendo P, o peso do veleiro, e D, resultante das forças dinâmicas. Considerando tudo isso, qual é a soma de forças **R + F +P +D = 0** e das velocidades do vento $\vec{v}$ e do veleiro $\vec{u}$? Observa a figura e responde.



> Se a trajetória do vento e do veleiro não forem paralelas, como encontramos o ângulo formado pelos vetores das velocidades do vento $\vec{v}$ e do veleiro $\vec{u}$? Olhe para a ilustração e responda. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

Depois de cada grupo apresentar seus estudos e repostas para as questões das três categorias, eles indicaram que o movimento dos veleiros aponta para a necessidade de identificar as forças que atuam no movimento de um veleiro e que elas só podem ser estudadas com vetores.

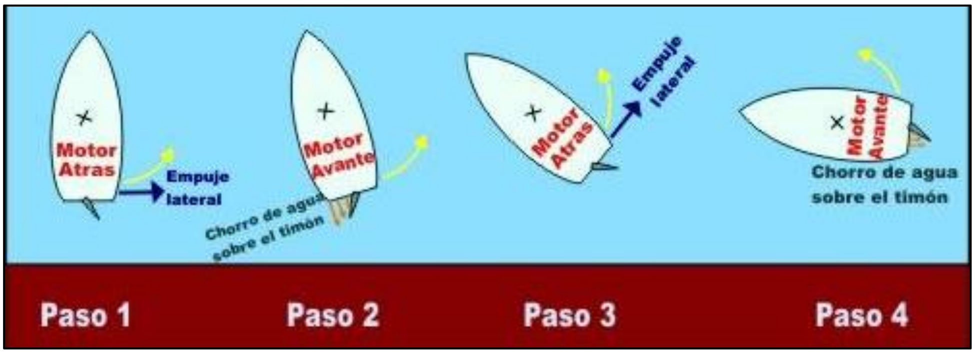
Pudemos observar, então, que no desenvolvimento do módulo M1 a dialética do **indivíduo e do coletivo** aconteceu desde o primeiro encontro, e tanto nas discussões ocorridas em cada sala dos grupos quanto nos plenários durante a busca de respostas para as questões apresentadas. E que, nas

questões e respostas baseadas na questão geratriz, tal dialética surgiu apenas parcialmente nas respostas.

No PEP vivenciado pelos professores, a dialética **mídia-meio** pôde ser identificada quando os grupos de professores construíram um meio, com novos questionamentos e respostas, baseando-se nas mídias que utilizaram, como livros, artigos e informações em páginas da *WEB*, para estudar o movimento de um veleiro que envolve vetores. Durante esse processo, os diferentes grupos visitaram obras como a decomposição de vetores, medida de deslocamento, adição de vetores e propriedades de vetores no plano e no espaço. A troca de informações de cada grupo, no plenário, permitiu a evolução do meio de cada grupo.

Nestes encontros, os alunos tiveram que formular algumas conjecturas a respeito de vetores e, por exemplo, o G1 considerou questões como conjecturas e, após as discussões, apresentou três exemplos e suas respostas. A primeira delas foi: existe alguma teoria física que relacione uma mudança de direção de um veleiro aos vetores? E seguiu-se aí a questão:

> Q_{1-36}: como explicar a mudança de direção do veleiro usando vetores?
> R_{1-36}: os navios tendem a mudar de direção, deslocando-se para um lado ou outro, devido ao efeito conhecido como 'empuxo lateral' da hélice. Normalmente, este é um movimento que se tenta corrigir com pares de hélices em contrarrotação, ou seja, que giram em direções opostas. Em veleiros com um único eixo, isso não pode ser corrigido, mas, em troca, esse fenômeno pode ser usado para fazer o barco girar sobre si mesmo no caso de precisar manobrar em muito pouco espaço em um porto lotado ou em um canal estreito.



> Com efeito, graças à questão da estática do fluido, por meio de uma pressão feita pelo leme do navio, podemos gerar uma força chamada empuxo lateral, que explicaremos matematicamente na conjectura a seguir.
>
> Q_{1-361}: Como podemos explicar a virada do veleiro fisicamente?
> R_{1-361}: Através da utilização de conceitos físicos de hidrostática e dinâmica de fluidos – para ser mais exato, o princípio de Bernoulli e a geometria do

veleiro – podemos observar como conduzimos a corrente de água em direção ao leme criando um jato d'água que gera uma pressão sobre ele (o que acontece é uma pressão que leva a um empuxo lateral).
Tendo obtido o empuxo lateral, graças à definição de torque, podemos estudar o movimento do veleiro. O torque é considerado uma magnitude vetorial ou, sendo mais preciso, poderíamos defini-lo como o momento de força ou momento dinâmico. Ou seja, o torque é a medida da força aplicada a uma haste e usada para girar um objeto. Este momento de força é medido em newtons / metro. $\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F}$. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

Na sequência o G1 apresentou a segunda conjectura: é possível explicar a virada de um veleiro matematicamente, também por meio de questões e respostas.

Q_{1-362}: Como podemos explicar a virada do veleiro matematicamente?

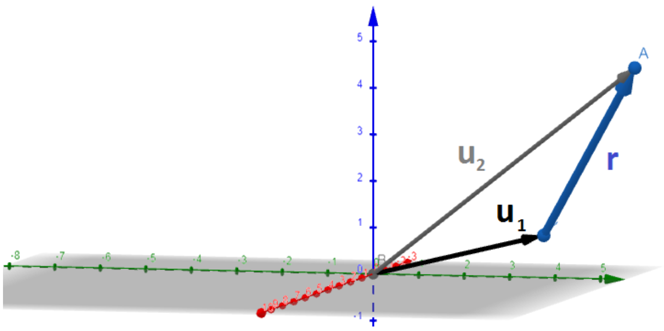
R_{1-362}: Após a obtenção do empuxo lateral, graças aos conceitos físicos da pressão exercida no leme, podemos obter a força lateral do veleiro. Depois disso, podemos aplicar o produto vetorial.
Utilizaremos a fórmula: $\vec{\tau} = \vec{r}x\vec{F}$
Onde:
$\vec{r} = r_x i + r_y j + r_z k$ e $\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$
Desta maneira:

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(r_y F_z - r_z F_y\right)i + (r_z F_x - r_x F_z)j + (r_x F_y - r_y F_x)k$$

Graças a isso podemos calcular a aceleração angular $\vec{\alpha}$ e sua integral em relação ao tempo é a velocidade angular $\vec{\omega}$, bem como a posição angular $\vec{\theta}$
Como vimos, graças ao torque, é possível calcular como o veleiro vai girar por meio de um produto vetorial.

Q_{1-37} O que aconteceria se o veleiro se movesse no rio Amazonas[39], navegasse em diferentes posições e desejasse calcular seu vetor de deslocamento? Observe o gráfico (considerando o porto de partida como a origem).

R_{1-37}: Nesse caso, para determinar o vetor de deslocamento em R^3 levando em consideração que o veleiro está localizado em diferentes posições, um terceiro eixo também é necessário.



[39] O rio Amazonas nasce em terras peruanas, mais precisamente na montanha Nevado Mismi (Cordilheira dos Andes), na porção sul do país, a uma altitude de 5.500 metros.

O vetor de deslocamento é determinado pela diferença dos vetores de posição:

$$\vec{r} = \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}$$
$$\vec{r} = 5i + 7j + 5k - (i + 4j + 1k)$$
$$\vec{r} = 5i + 7j + 5k - i - 4j - 1k$$
$$\vec{r} = 4i + 3j + 4k$$

(Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

A terceira e última conjectura desse grupo foi: a encosta do rio não é 100% confiável, pois o valor é muito alto, 0,8m, seguida das seguintes questões e respostas.

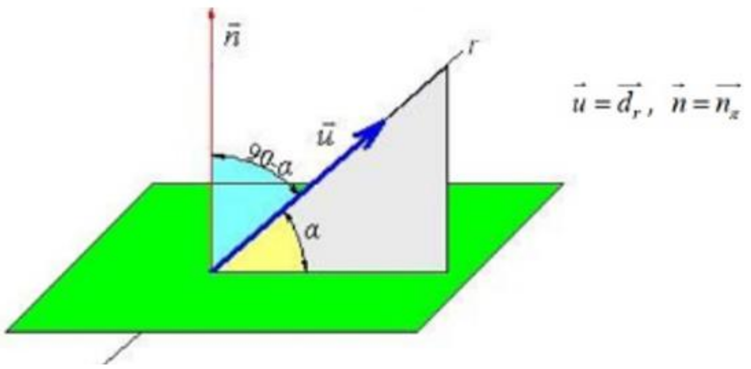
Q_{1-38}: Qual é a inclinação do rio?

R_{1-38} : Para isso devemos saber qual é o ângulo que o vetor de deslocamento forma com o plano xy, para o qual devemos levar em consideração o seguinte conceito:

Em um plano π, cujo vetor normal é $\overrightarrow{n_x}$ e uma reta r, de vetor diretor $\overrightarrow{d_r}$. O ângulo α entre a reta e o plano é definido como o ângulo formado por r e sua projeção ortogonal em π. E esse ângulo acaba sendo o ângulo complementar do menor dos ângulos formados por um vetor normal ao plano e um vetor diretor da reta.

Recordando que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\alpha,$ teremos que:

Se α é o ângulo formado por uma reta e um plano, $sen\alpha$ é o valor absoluto do produto escalar do vetor direcionador da reta e do vetor normal do plano, dividido pelo produto dos módulos de ambos os vetores: $sen\alpha = \frac{|\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi}|}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{n_\pi}|}$



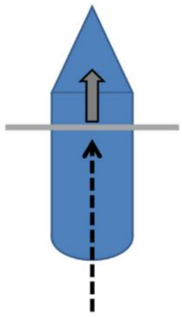
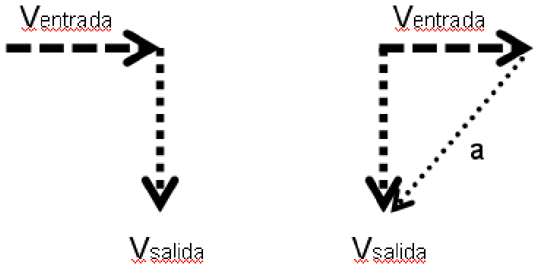
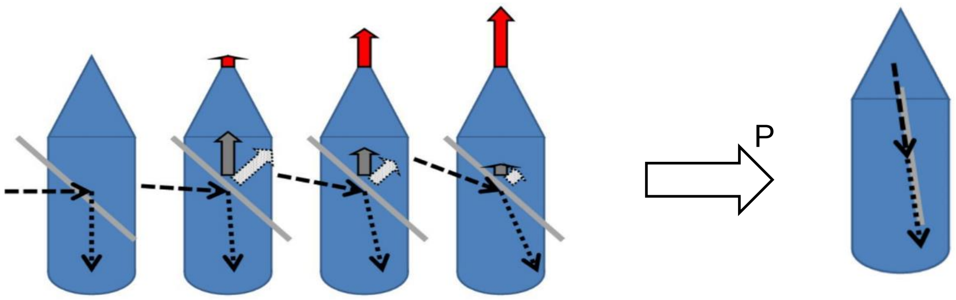
No nosso caso, $\overrightarrow{d_r}$ seria nosso vetor de deslocamento $\vec{r}$. O vetor normal estaria no eixo z e, então, nós o chamamos os de $\overrightarrow{n_z}$:

$$sen\alpha = \frac{|\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_z}|}{|\vec{r}||\overrightarrow{n_z}|} = \frac{|(4i + 3j + 4k) \cdot (nk)|}{|4i + 3j + 4k||nk|} = \frac{4n}{\sqrt{41}n} = \frac{4\sqrt{41}}{41}$$
$$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{4\sqrt{41}}{41}\right) = 38{,}66°$$
$$m = tan 38{,}66° = 0{,}8$$

Podemos ver que o valor da inclinação é muito alto, o que é irreal e indica que nossa conjectura estava correta. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa)

O G2 também apresentou algumas conjecturas, que mostramos no Quadro 27 e que estão relacionadas ao movimento do veleiro e às propriedades de vetores.

Quadro 27 - Conjecturas propostas pelo G2

Conjectura sobre movimento do veleiro
1. O veleiro pode viajar mais rápido do que a velocidade do vento? 1.1 Se o veleiro receber o vento de popa em toda vela, será capaz de navegar mais rápido que o vento? Não será mais rápido. Por exemplo, se você pegar um carrinho de supermercado e correr atrás dele, empurrando-o a 10 km/h, qual será a velocidade do carrinho? Será de 10 km/h porque, se o carrinho andasse mais rápido que isso, você não conseguiria alcançá-lo e não continuaria dando-lhe velocidade. Então, 10 km/h seria a velocidade máxima. No nosso caso, é o mesmo: se o vento nos empurra para a popa, o barco avança, mas se em algum ponto o barco correr mais rápido que o vento, ele deixa o vento para trás e diminui a velocidade. 
1.2 Se o veleiro receber um vento cruzado, ele pode ir mais rápido que o vento? Sim, com um certo ângulo. Quando o vento entra lateralmente, a vela sofre um impulso perpendicular para a frente. Mas agora vamos olhar com atenção para o vento que entra e o vento que sai. O vento entra com certa velocidade no sentido à direita e sai para baixo. Os diagramas a seguir representam isso. O primeiro mostra como o desenhamos com a vela e o barco, enquanto o segundo o reordena de modo que seja fácil para nós adicionarmos vetores.  Observe que se houve uma mudança na velocidade é, necessariamente, porque houve uma certa aceleração. V_{entrada} + a = $V_{\text{saída}}$. O veleiro mudou de direção porque sofreu uma força na mesma direção e sentido da aceleração aplicada pelo vento. E isto, no fundo, nada mais é do que a **Primeira Lei de Newton**. Se a vela aplicou uma força ao vento, então, o vento aplicou uma força à vela, como nos diz a **Terceira Lei de Newton**. Então temos que a vela muda a direção do vento (ou seja, ela acelera), dando-lhe uma força; portanto, a vela recebe a força de reação, que dividida pela massa do navio nos dá uma aceleração, conforme nos esclarece a **Segunda Lei de Newton**. Se o vento empurra a vela, está acelerando. O que o vento proporciona à vela, então, não é velocidade, mas aceleração. 
Conjecturas sobre propriedades de vetores:
Como determinar o ângulo entre dois vetores no espaço tridimensional?

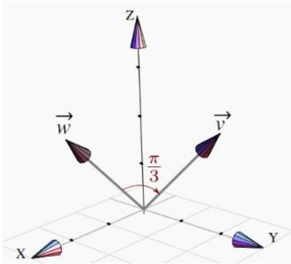
Para formar o ângulo entre dois vetores u e v, interceptamos os vetores por meio de paralelos em seus pontos iniciais, então, estes formam um plano no qual podem formar um triângulo. Daí, aplicando a lei dos cossenos a ele, obtemos:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

Também podemos considerar os valores extremos de θ= 0° o θ= 180°

Sean $\vec{w} = (2,0,2)$ y $\vec{v} = (0,2,2)$ entonces el ángulo entre $\vec{w}$ y $\vec{v}$ *es*

$$Cos\ \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \Longrightarrow \theta = arcos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right) = arcos\left(\frac{1}{2}\right)$$

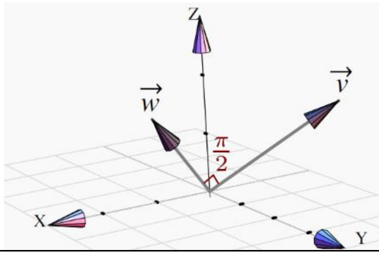


2) Que condições devemos ter para que dois vetores sejam ortogonais ou perpendiculares? Podemos encontrar o ângulo usando a fórmula $\vec{u}\bullet\vec{v} = 0$. Sejam $\vec{w} = (1, 0, \sqrt{2})$ e $\vec{v} = (-2, 1, \sqrt{2})$, então, $\vec{w}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, pois $\vec{u}\bullet\vec{v} = -2 + 2 = 0$.

3) Se tivermos dois vetores, no mesmo plano, é possível encontrar outro vetor ortogonal a ambos e, se possível, como seria?

Se for possível, então, dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{u} = (v_1, v_2, v_3)$ há outro vetor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ tal que $\vec{n} \perp \vec{u}$ e $\vec{n} \perp \vec{v}$. Então, podemos tomar como candidato o vetor:

$$\vec{n} = (\mathrm{u}_2\mathrm{v}_3 - \mathrm{u}_3\mathrm{v}_2\ ,\ \mathrm{u}_3\mathrm{v}_1\ - \mathrm{u}_1\mathrm{v}_3,\ \mathrm{u}_1\mathrm{v}_2 - \mathrm{u}_2\mathrm{v}_1\ )$$



Fonte: Dados da pesquisa

O G3 não especificou conjecturas, mas apresentou uma questão e sua resposta (Quadro 28) associada às forças que atuam no movimento do veleiro.

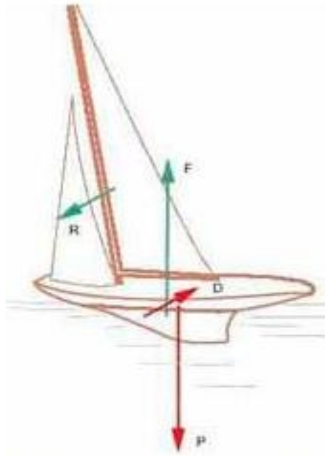
Quadro 28 – Algumas conjecturas do G3

Q_{3-25}: Como as forças que atuam em um veleiro podem ser representadas para mantê-lo em equilíbrio durante a navegação?

R_{3-25}: Enquanto o veleiro está navegando, ele é submetido a quatro forças iguais e opostas dois a dois, e que são a resultante da vela R e a flutuabilidade F, com as outras duas sendo P o peso do veleiro e D a resultante das forças dinâmicas, por isso temos

R + F +P +D = 0.

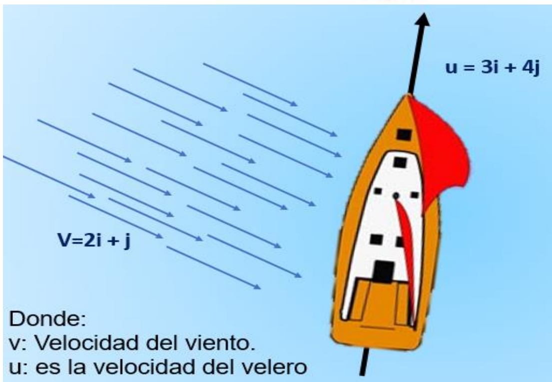
Agora, se a trajetória do vento e do veleiro não forem paralelas, como encontramos o ângulo formado pelos vetores da velocidade do vento $\vec{v}$ e da velocidade do veleiro $\vec{u}$? Analise a ilustração e responda.



Sabe-se que $cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$ determina o ângulo formado por dois vetores, então, para o exemplo, como sabemos que

$u = 3i + 4j$ e $u = 2i + j$, podemos aplicar diretamente $cos\theta = \frac{(3,4)\cdot(2,1)}{\|(3,4)\|\|(2,1)\|}$, $cos\theta = \frac{10}{5\sqrt{5}}$ e, portanto,

$\theta = arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = 26{,}56°$.

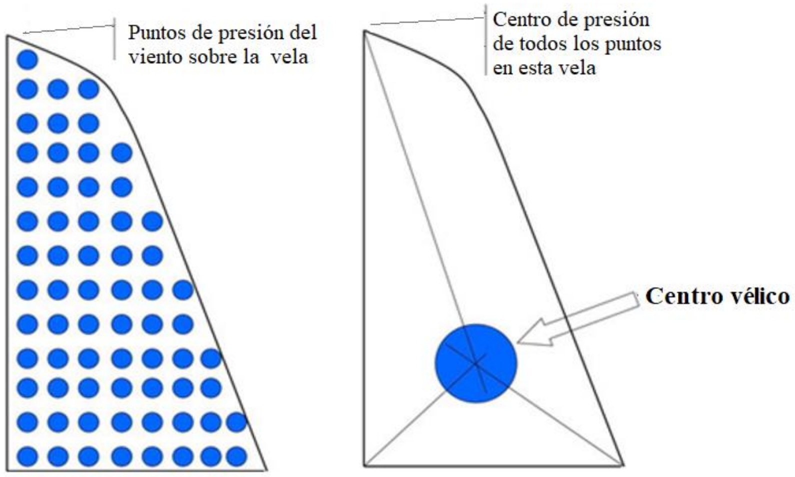


Fonte: Dados da pesquisa

Já o grupo G4 apresentou apenas uma questão com a respectiva resposta (Quadro 29) para tratar do tipo de vela.

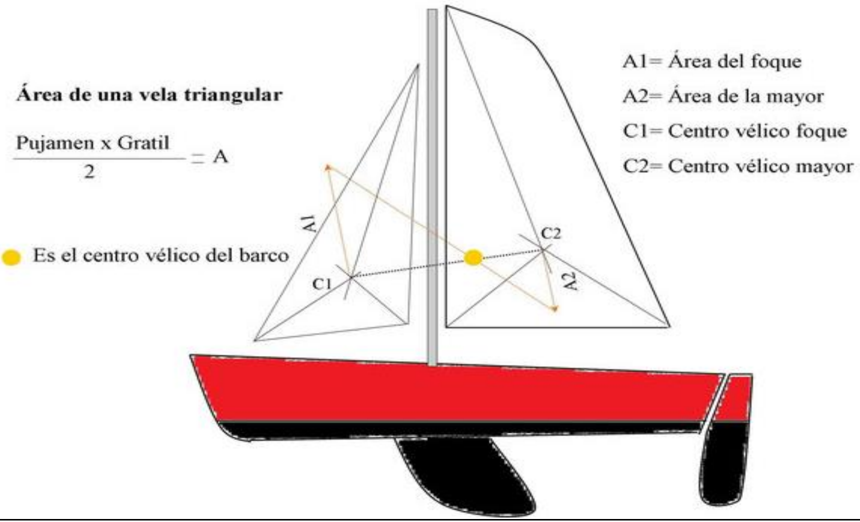
Quadro 29 – Centro velico da vela do G4

Q4-24: Existe um centro de pressão na vela de um veleiro. Como podemos provar isso?
R4-24: A vela de um veleiro sofre o efeito do vento, que exerce sua pressão por toda a superfície da vela. Então o centro da vela é o ponto onde poderíamos concentrar todos esses pontos de pressão e o resultado seria o mesmo, ou seja, este ponto seria o ponto de aplicação da resultante da soma de todas as forças aerodinâmicas de empuxo e sucção que afetam a vela.



Para provar isto, temos que realizar o seguinte processo:

1) Encontramos o centro vélico da vela, que basicamente coincide com o seu centro geométrico;
2) Calculamos a superfície (área) de cada uma das velas;
3) Os centros vélicos de cada vela são unidos por um segmento;
4) Uma perpendicular a este segmento é desenhada em cada extremidade do segmento;
5) Na perpendicular que parte do centro vélico da buja (jib), é dada a escala e o valor da área da vela maior;
6) Na perpendicular que parte do centro vélico da vela maior, é dada a escala e o valor da área da buja;
7) As extremidades destas duas perpendiculares são unidas e onde se corta o segmento que une os centros velicos de cada vela, que é o centro velico do nosso barco

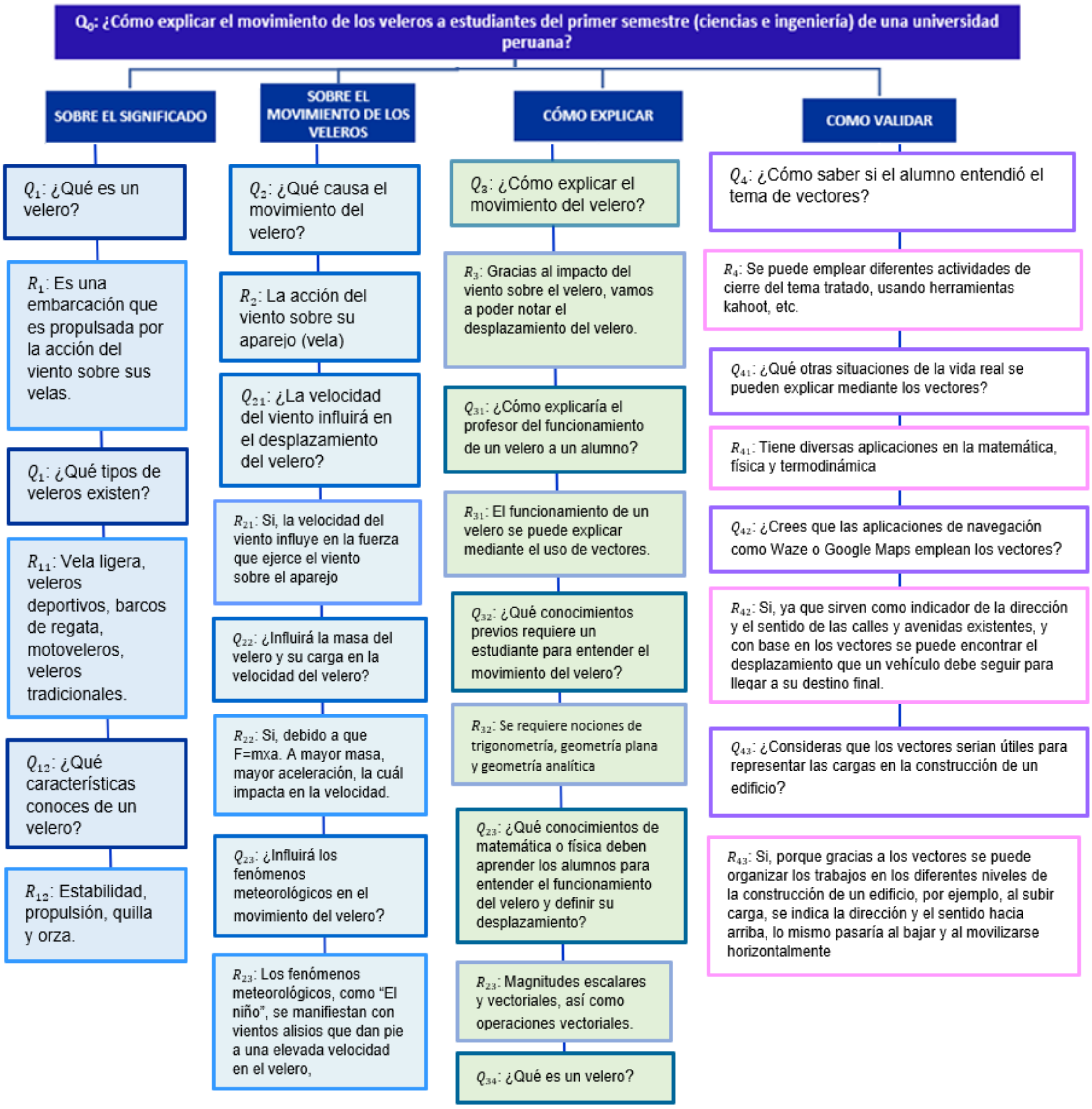


Fonte: Dados da pesquisa

No final desta sessão, os professores apresentaram os mapas de questões – e aqui mostramos especificamente os mapas do G1 e G4.

O G1, além de trazer o mapa, sugeriu que, depois de ensinar o conteúdo, a professora Rina deveria avaliar seus alunos com algumas questões que envolvessem contextos. Os professores também apresentaram indícios de mudança do paradigma da maneira de trabalhar com seus alunos, como pode ser observado na Figura 107.

Figura 107 - Mapa de questões sobre a categoria de como explicar do G1



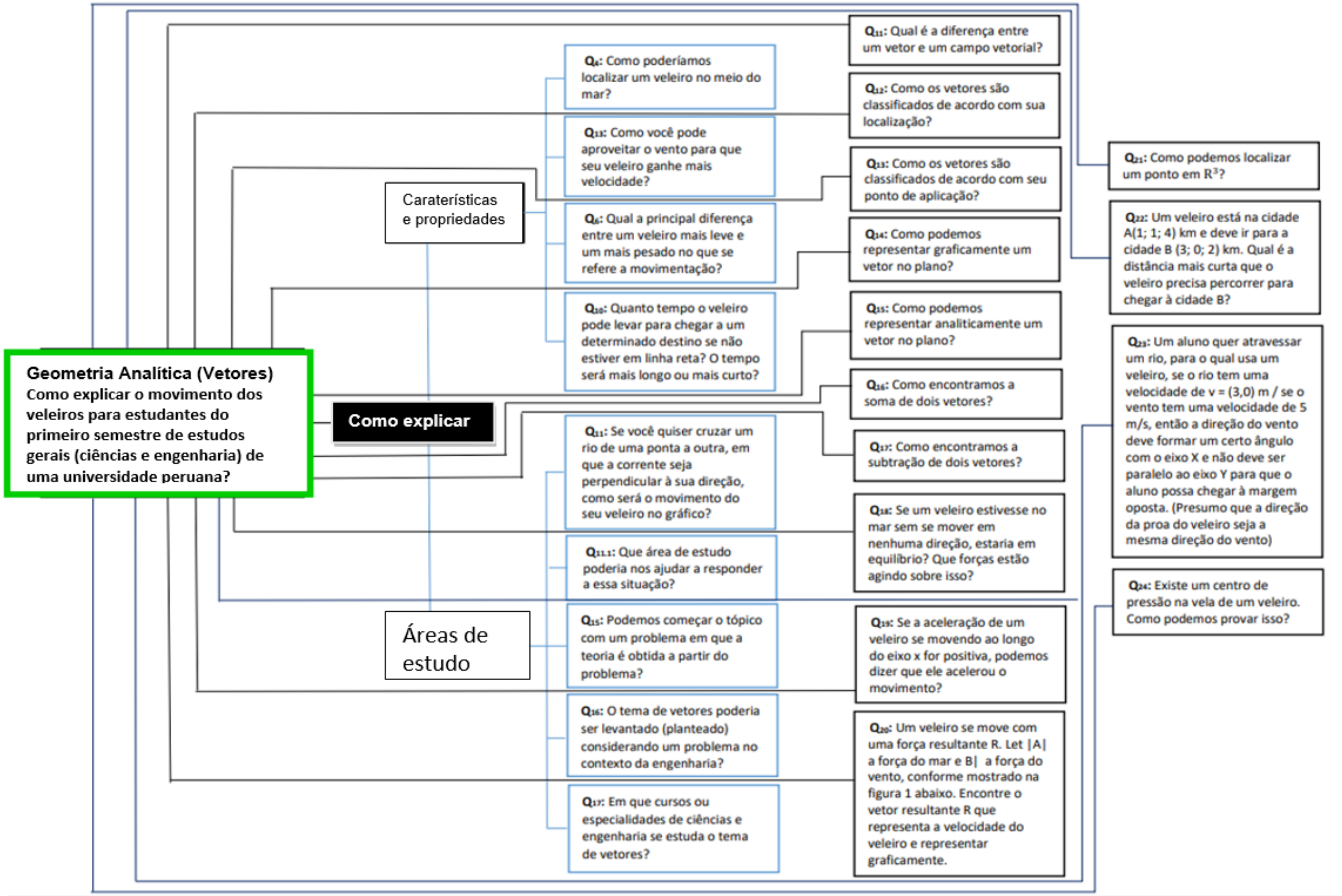
Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 108, temos o mapa de questões e respostas para esta última categoria produzido pelo G4.

Ao finalizarmos este percurso de estudo e pesquisa, observamos que os quatro grupos explicam deslocamento e velocidade, mas também mostram interesse em identificar outros fatores que participam no movimento. O G1 iniciou considerando explicar o sentido e direção dos veleiros, e conseguiu explicar que, graças ao torque, é possível esclarecer como o veleiro vai mudar de direção (virar para a esquerda ou para a direita) utilizando o produto vetorial. O G2 iniciou analisando a inclinação dos veleiros e, ao final da pesquisa, analisou ainda como o veleiro pode se deslocar mais rápido que a velocidade do vento. O G3 pesquisou como o movimento das forças que atuam sobre um veleiro podem garantir estabilidade à embarcação. O G4 (Figura 103) iniciou estudando como o veleiro pode ter maior velocidade e depois observou que, nesse sentido, a vela é o componente mais importante na embarcação.

Podemos concluir que os professores detectaram a necessidade da utilização dos vetores para explicar alguns fenômenos relacionados ao movimento dos veleiros e que, assim, conseguiram ajudar a professora Rina.

Figura 108 - Mapa de questões e respostas do G4



Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa

Sessões 10 e 11 do PEP-FP

Nos dois encontros, os grupos trabalharam a proposta de uma nova questão Q_0 para desenvolver um PEP para o estudo de vetores, neste caso para seus próprios alunos. Lembrando que no PEP-FP, é no módulo M_3 que se realiza o desenho de um PEP, considerando os aspectos trabalhados nas fases anteriores do dispositivo para alunos de um nível educativo específico e para determinadas condições escolares – em nosso caso, estudantes do primeiro semestre da PUCP. Nessa situação, os professores tiveram que ajudar uma professora a iniciar seu curso de geometria vetorial. A proposta de novas questões também fez com que cada grupo pesquisasse tipos de praxeologias matemáticas que mobilizassem alguma razão de ser para o estudo de vetores.

Os professores apresentaram os PEP propostos em cada grupo. O G4 apresentou o que se refere ao movimento com trajetória parabólica que um passarinho faz em um jogo de nome *Angry-Birds* (Figura 109).

Figura 109 - Movimento dos pássaros

Fonte: Dados da pesquisa.

Um aluno do grupo G4 indicou:

> **P43:** Para ajudar a professora Rina, foi necessário fazer um pouco de pesquisa para encontrar um exemplo que pudesse ser útil à introdução do assunto dos vetores e suas propriedades. Para isso chegamos ao tema da nossa pergunta: **Q0:** Qual movimento os pássaros descrevem no jogo *Angry Birds*? (Dados da pesquisa, tradução nossa)

Outro aluno do grupo afirmou:

> **P42:** É verdade que para o estudo deste tópico é necessário entender de que jogo estamos falando e como ele funciona. Por esse motivo, vamos dividir as seguintes questões em três categorias principais:
> Sobre o significado: entenda o que é jogo e como ele funciona; explore ideias iniciais sobre vetores.
> Sobre o movimento dos pássaros no jogo: exercícios envolvendo diretamente o uso do movimento dos pássaros no jogo, aplicando o conhecimento inicial dos vetores e realizando alguns cálculos.

Como explicar: aplicação das propriedades dos vetores que podemos observar no jogo (Dados da pesquisa, Tradução nossa)

Como podemos observar, os professores desse grupo seguiram as mesmas categorias desenvolvidas no PEP-FP. Para a categoria significado consideram as perguntas e respostas que conduzem ao estudo de vetores.

Q03: O que um jogador precisa fazer para vencer?

R03: É necessário acertar o salto e destruir todos os inimigos à frente, usando o pássaro como objeto que realizará um movimento parabólico que é controlado pelo jogador.

Q04: Que conhecimento prévio os jogadores usam para passar para o próximo nível?

R04: É necessário ter uma noção de ângulos para pensar qual é a melhor abertura para lançar o pássaro; é preciso ter o conhecimento de força para pensar, dependendo do alvo, se deve usar uma força maior ou menor; é necessário conhecer o sentido para que possa aplicar o sentido correto para atingir o alvo pretendido. Ou seja, quando você conhece a ideia de movimento horizontal e vetores, pode jogar este jogo de uma forma mais inteligente. (Dados da pesquisa, Tradução nossa)

Para a segunda categoria:

Sobre o movimento

Q05: O que é movimento?

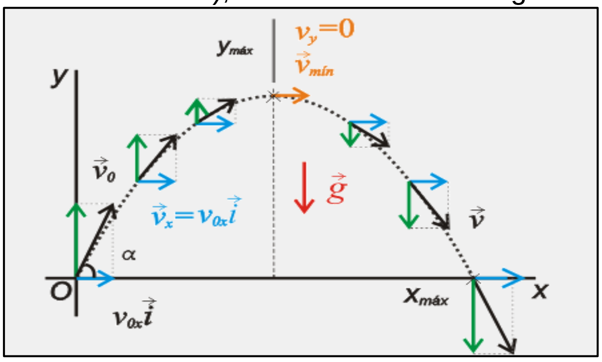
R05: Movimento refere-se à mudança de posição de uma parte ou do todo de um corpo. Os tipos de movimentos variam de acordo com a natureza do objeto que está sendo observado. Além disso, a trajetória deve ser sempre levada em consideração em relação ao tempo decorrido e à posição de referência inicial.

Q06: O que entendemos por vetor?

R06: Um segmento de linha no espaço que começa de um ponto e vai até outro ponto é chamado de vetor, e tem direção e sentido. Os vetores em física têm a função de expressar as chamadas magnitudes vetoriais.

Q07: O que é movimento parabólico? Por que o movimento em *Angry Bird*s é parabólico?

R07: É um movimento que resulta da união de dois movimentos: o movimento retilíneo uniforme (componentes horizontais) e o movimento vertical (componentes verticais), como se mostra na figura a seguir.

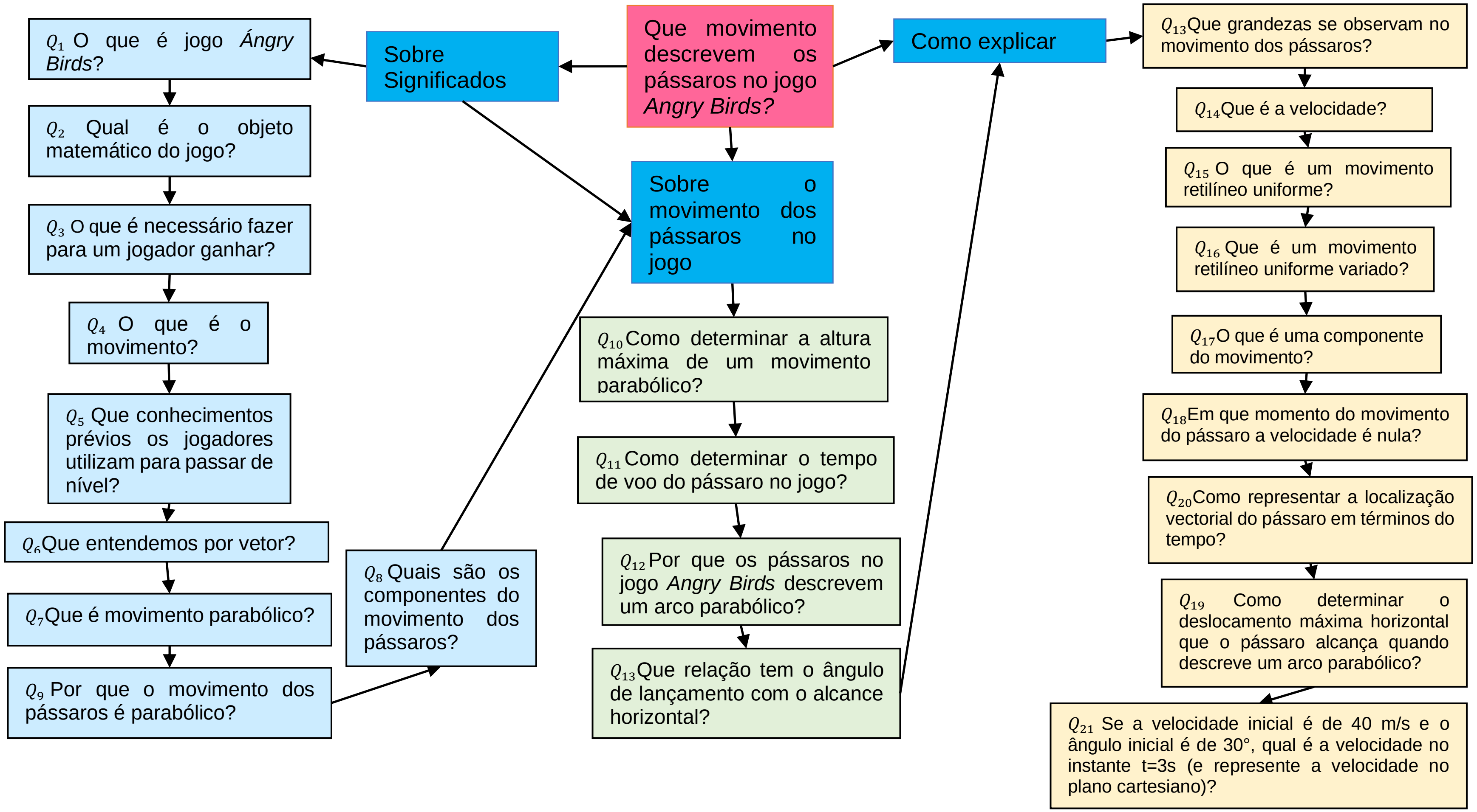


(DADOS DA PESQUISA, tradução nossa)

A respeito do estudo do movimento, os professores do G4 consideraram os vetores, e podemos ver que o comportamento desses vetores é representado de maneira pontual no trajeto do pássaro no jogo. Entendemos que o G4 considera o movimento que foi estudado sobre tarefas de movimento parabólico e queda livre em nosso MER, o que permite identificar a razão de ser dos vetores.

Na Figura 110, o grupo apresentou um mapa de questões e respostas relacionadas ao significado do jogo e que permitem obter informações, baseadas na pesquisa, com o objetivo de fazer uma proposta que mostre uma a razão de ser dos vetores.

Figura 110 - Mapa de questões do grupo G4



Fonte: Dados da pesquisa, Tradução nossa

Podemos observar que nas questões que o G4 apresenta com referência ao movimento retilíneo uniforme e ao movimento parabólico, estes tipos de tarefa foram mostrados em nosso MER.

Para a questão que o grupo indica com relação ao alcance da altura máxima no voo dos pássaros, é preciso considerar uma velocidade inicial, um ângulo adequado e a gravidade, o que faz referência ao movimento parabólico estudado por Galileu.

Para explicar como se produz o movimento do pássaro no jogo, o G4 considerou as questões e respostas para explicar os elementos necessários para os movimentos retilíneo uniforme, retilíneo uniforme variado, composto e ainda a representação vetorial com relação ao tempo e a trajetória, entre outras questões.

Um dos professores do G4 falou em experimentar esse PEP no centro educacional em que trabalha, afirmando:

> P_{41}: Acredito ser uma boa alternativa para ingressar no ensino da geometria vetorial, uma vez que os alunos têm a oportunidade de visualizar uma situação mais específica, muitas vezes já conhecida por eles e, assim, fazer com que entendam melhor o assunto que vai ser implementado. (Dados da pesquisa, tradução nossa)

A respeito de restrições ou condições das instituições em que trabalham dois professores afirmaram:

> P_{43}: Acho que o fato de analisar no campo conceitual de alguma disciplina da área da matemática pode levar muito tempo, então se você aplicasse, não conseguiria cobrir todos os conteúdos.
>
> P_{42}: No meu caso, como trabalho como professora do ensino básico numa escola particular, implementar novas formas é mais difícil, visto que são mais fechados para as novidades, e que nós, como professores, temos que estar mais atentos e seguir o que o governo indica para o ensino, e que é o que a escola segue. Até acredito que os professores tenham um pouco de liberdade para tentar ministrar os temas, e pode-se aproveitar essa abertura para tentar implementar novas formas de ensino (Dados da pesquisa, tradução nossa)

Outro professor sugere o GeoGebra como uma ferramenta que pode ser utilizada no ensino:

> P_{21}: Para trabalhar com a criação dos vetores e visualizá-los de uma forma mais eficaz, o Geogebra é a melhor opção. Ele também é um quadro branco digital, que pode servir para desenhar os vetores de uma forma mais fácil de se visualizar. (Dados da pesquisa, tradução nossa)

O G3 apresentou outra proposta para o PEP, associando a questão geratriz a outro jogo que mobilizaria o estudo de forças (Figura 111).

Figura 111 - Proposta de PEP-FP sobre o jogo cabo de guerra

Q_0: Como explicar como os alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana podem ganhar no jogo cabo de guerra?

Fonte: Dados da pesquisa

O jogo cabo de guerra, também conhecido como jogo da corda, foi desenvolvido nas questões, mas elas foram apenas parcialmente respondidas. A seguir mostramos na Figura 112 as questões que o G3 formulou.

Figura 112 - Mapa de questões para o jogo cabo de guerra

Como explicar como os alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana podem ganhar no jogo cabo de guerra?

- SIGNIFICADO
  - Q_1: Que é uma corda?
  - Q_{11}: As cordas são únicas?
  - Q_{12}: De que materiais a corda pode ser feita?
  - Q_{13}: Por que não há cordas de metal para este jogo?
  - Q_{14}: Que utilidade têm as cordas?
- SOBRE O JOGO DA CORDA
  - Q_2: Que é o jogo da corda?
  - Q_{21}: Quais são as regras do jogo?
  - Q_{22}: Quantos participantes é preciso para jogá-lo?
  - Q_{23}: Há alguma restrição para o jogo?
  - Q_{24}: A corda do jogo tem restrições?
  - Q_{25}: Quem ganha o jogo?
- COMO EXPLICAR
  - Q_3: Como explicar o jogo da corda?
    - Q_{31}: Qual é a altura da corda no jogo?
    - Q_{32}: O que acontece se um dos jogadores está perto da terra?
    - Q_{33}: Qual deve ser a localização das oito pessoas do time para que ganhem o jogo?
    - Q_{34}: Podem jogar três equipes?
    - Q_{35}: Pode uma terceira equipe de 1 só pessoa jogar contra equipes com 5 pessoas cada um?
    - Q_{36}: Por que pensam que quando puxam a corda não afundam?
  - Q_4: Que outros jogos você conhece que envolve cordas?

Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa

Identificamos nas questões apresentadas na Figura 106 as questões Q_{32}e Q_{33} em que o grupo apresenta tipos de tarefa e em que se solicita estabelecer os vetores tensão. Também na tarefa Q_{35} encontramos uma terceira tensão. No tipo de tarefa que se deduz de Q_{36} é a presença do peso da pessoa que puxa para abaixo.

Os outros grupos formularam questões relacionadas ao movimento de aviões e de corrida de carros como, por exemplo, a questão geratriz do G2: **Q_0: Como explicar a movimentação de aviões para alunos do primeiro semestre (ciências e engenharia) de uma universidade peruana?** O grupo supôs que os alunos poderiam utilizar simuladores disponíveis na Internet para responder essa questão.

Podemos observar que os desenhos estão contemplados dentro das praxeologias que estudamos para a construção do nosso MER, isto é, com tarefas ligadas ao movimento retilíneo, movimento parabólico e à força, a partir da física.

4.5 Análise a posteriori do PEP-FP

No módulo M1, verificamos que os professores, desde o início do estabelecimento de uma questão geratriz, formularam questões derivadas que permitiram identificar a necessidade de se conhecer alguns significados, alguns fenômenos físicos relacionados ao movimento. Também foi imprescindível recorrer certas propriedades da matemática. No processo da busca de significado sobre veleiro, partes do veleiro, tipos de veleiro, os professores também tentaram compreender como se produz o movimento. Os encontros seguintes foram a respeito das questões da física e, para conseguir explicar as relações, eles apresentaram alguns exemplos que envolvem as forças do vento, da água, o peso do veleiro, as velocidades etc. Isto conduziu à busca de conteúdos da física, o que os direcionou ao estudo dos vetores e suas propriedades.

Consideramos que uma das restrições mais frequentes foi a interrupção das sequências das atividades pela desconexão da internet de alguns professores. No início da discussão, cada grupo dividia as tarefas de busca de informação entre os participantes, de modo que as fez com que os grupos às vezes não conseguissem responder todas as questões. Além disso, pelo contexto da pandemia os professores não podiam acessar as bibliotecas físicas.

Outra restrição foi que os professores não estavam acostumados a ter uma questão geratriz. Eles gastaram muito tempo na parte das definições e propriedades. Um grupo trouxe um livro para mostrar as propriedades de vetores e depois explicou o movimento como uma aplicação de vetores. Esses professores estavam profundamente acostumados ao ensino tradicional.

Para o módulo M2 os professores, quando apresentaram os PEP desenvolvidos sobre a situação hipotética para ajudar a professora Rina, tiveram que levar em consideração o conteúdo a abordar no primeiro semestre. Para isso, fizeram uma revisão das ementas das disciplinas dos primeiros semestres das universidades peruanas e descobriram que o conteúdo está presente no primeiro semestre da PUCP como parte da disciplina de Matemática Básica, o que foi visto também em outras universidades peruanas.

Para o **módulo M3,** a professora pesquisadora distribuiu para todos os grupos a tarefa de formular uma proposta alternativa para ajudar a professora Rina no ensino de vetores. Os professores foram para seus devidos grupos discutir a tarefa. Nesta altura, todos buscaram informações e listaram livros e artigos na internet. E assim identificamos a mobilização das mídias.

Depois de apresentarem o planejamento, os grupos consideraram diferentes questões geratrizes, e mostraram a razão de ser dos vetores para o movimento retilíneo uniforme, movimento parabólico e equilíbrio de forças.

Como a atividade estava inserida dentro de curso de mestrado, era preciso fazer avaliações, que foram agendadas ao longo do semestre, com uma delas senda no início das atividades. Apresentamos aqui os dados desta primeira avaliação que ocorreu quando os alunos iniciavam o estudo dos vetores.

Como Chevallard (1999) afirma, é preciso organizar um tempo para observação e análise e não fazer um juízo de valor a partir de uma avaliação. Ele considera avaliações uma necessidade relativa, de uso social, que sempre avalia de um determinado ponto de vista. No entanto, como o PEP-FP ocorreu como parte de uma disciplina onde é imperativo avaliar os avanços dos alunos, foram formuladas duas questões, uma tratando da identificação de temas de matemática e física em jogo nas diferentes situações com a segunda sendo sobre uma aplicação desses temas na resolução de um problema, como mostra o Quadro 30 que revela as respostas individuais.

Quadro 30 - Questões como parte da avaliação contínua dos professores

Questão 1

Responda às seguintes perguntas justificando sua resposta.

a) Considerando o trabalho em grupo:
i) Mencione os temas de matemática e, particularmente, de geometria que são necessários para descrever o movimento (definições, propriedades, teoremas etc.).
ii) Para descrever o movimento, indique quais elementos da física estão envolvidos e como são definidos.
b) Justificando adequadamente, indique a verdade ou falsidade das seguintes afirmações:
i) O veleiro com vela única (sem motor) move-se apenas com a presença do vento.
ii) Para um veleiro se mover, precisa apenas de uma direção e sentido.

Questão 2

Dada a seguinte situação

Será realizada uma regata no Peru que começa na praia de El Chaco na Baía de Paracas e que seguirá por uma distância de D km, onde os velejadores encontrarão boias coloridas que sinalizarão o final da regata. Temos que o veleiro se move a uma velocidade constante na direção N45°W por um tempo C. Por outro lado, a velocidade do vento é de 8 km/h na direção S60°W. Determine, então, a velocidade da água do mar. Para a distância D e o tempo C, escreva seu código de aluno e considere $\mathrm{D} = a_1 + a_8$ y $\mathrm{C} = a_6 + a_7$.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8

Para resolver o problema, responda o seguinte:

a) Indique o que você precisa saber sobre o movimento de um veleiro para resolver o problema.
b) Descreva quais elementos de geometria você precisa para resolver o problema.
c) Explique a solução do problema.

Fonte: Dados da pesquisa

Os resultados obtidos foram de alguma forma os esperados, considerando as apresentações dos grupos. Dentre todas, destacamos na Figura 113 a resposta do professor P_{21} do G2:

Figura 113 - Resposta do professor P21, do G2 para a questão 1 parte a(i)

Pregunta 1. Responda, considerando las discusiones realizadas durante las clases

a) Considerando el trabajo grupal:

i) Mencione los 5 temas de la matemática y en particular de la geometría que usted considera lo mas importantes para describir el movimiento (definiciones, propiedades, teoremas, etc.).

- Geometría Analítica: Manejo del sistema de coordenadas cartesianas (ubicación de puntos inicial y final del movimiento tomando en cuenta un punto de referencia para el origen de coordenadas)

- Teorema de Pitágoras, para poder determinar el desplazamiento a partir de las coordenadas de los puntos inicial y final del movimiento sin utilizar fórmulas, luego se deduciría la fórmula respectiva.

- Geometría Analítica: Fórmula para calcular la distancia entre dos puntos.

- Trigonometría: Manejo de ángulos en el sistema sexagesimal (es lo que se utiliza usualmente) y razones trigonométricas; para determinar la dirección y sentido.

- Geometría Vectorial: Concepto de Vector, para representar las diferentes magnitudes físicas que intervienen en el movimiento. Suma de vectores, para calcular los posibles vectores resultantes de los vectores que actúan en el movimiento del velero.

Fonte: Dados da pesquisa

Para a parte seguinte da questão, apresentamos a resposta do professor P41 do G4 (Figura 114) como exemplo das respostas padrão dadas por mais de 70% dos professores.

Figura 114 - Resposta do P_{41} do G4 para a questão 1, parte a(ii)

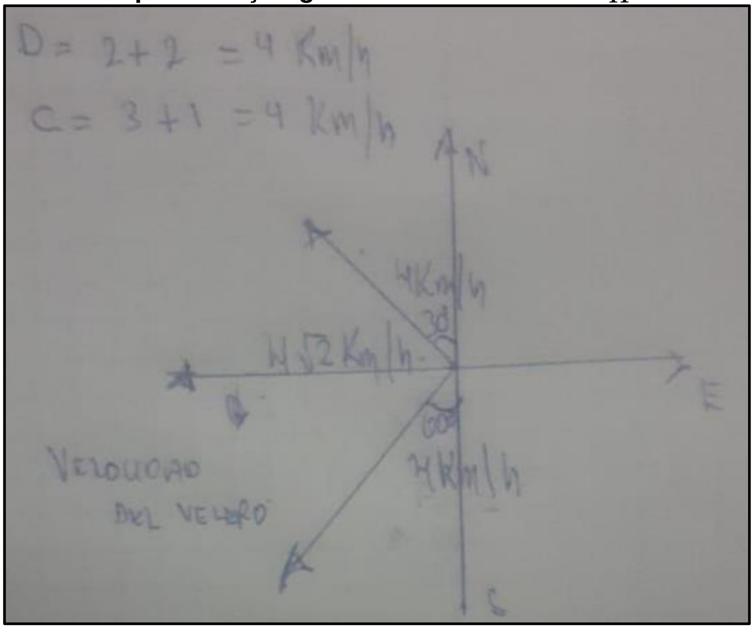
ii) Para describir el movimiento, indica 5 temas de la física que intervienen y explica cómo intervienen.

1. Dirección en Vectores. (Cuando deseamos saber hacia dónde se dirige el velero)
2. Módulo de vectores (Para saber el valor de las fuerzas que afectan al velero)
3. Sistemas de Referencia (Para poder conocer la ubicación de un móvil, se puede utilizar el sistema cartesiano, el sistema polar, etc)
4. Cinemática (MRU, MRUV) Con ello podemos conocer el cambio de rapidez del velero
5. Dinámica (Para conocer la relación de las fuerzas que intervienen afectando el velero y que relación guardan con la masa del velero)

Fonte: Dados da pesquisa

A solução do P_{12} do G1 chamou nossa atenção, porque ele fez os cálculos e obteve o módulo dos vetores de 4 unidades, além de ter aplicado o método do paralelogramo sem especificar qualquer escala na representação gráfica dos vetores (Figura 115):

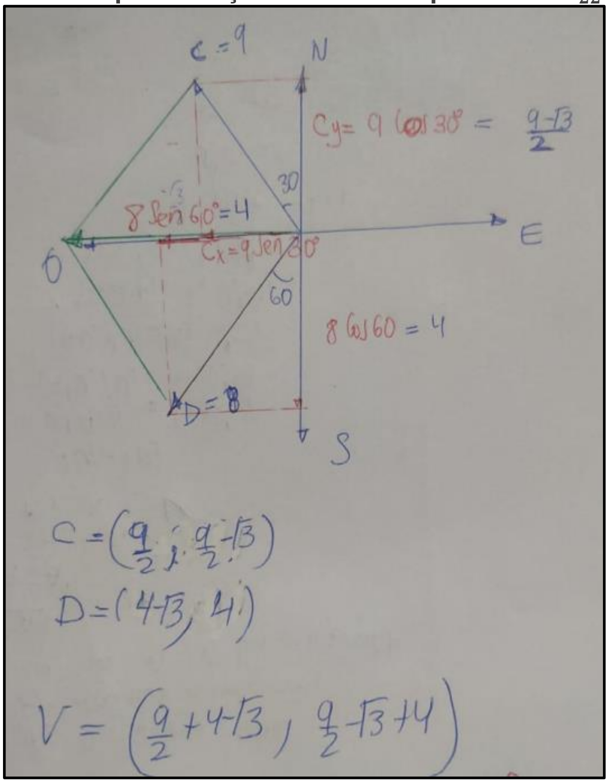
Figura 115 - Representação gráfica dos vetores de P_{11} do G1



Fonte: Dados da pesquisa

Outro exemplo, apresentado pelo P_{22} do G2 (Figura 116) mostra o referencial cartesiano, mas também não utiliza escala.

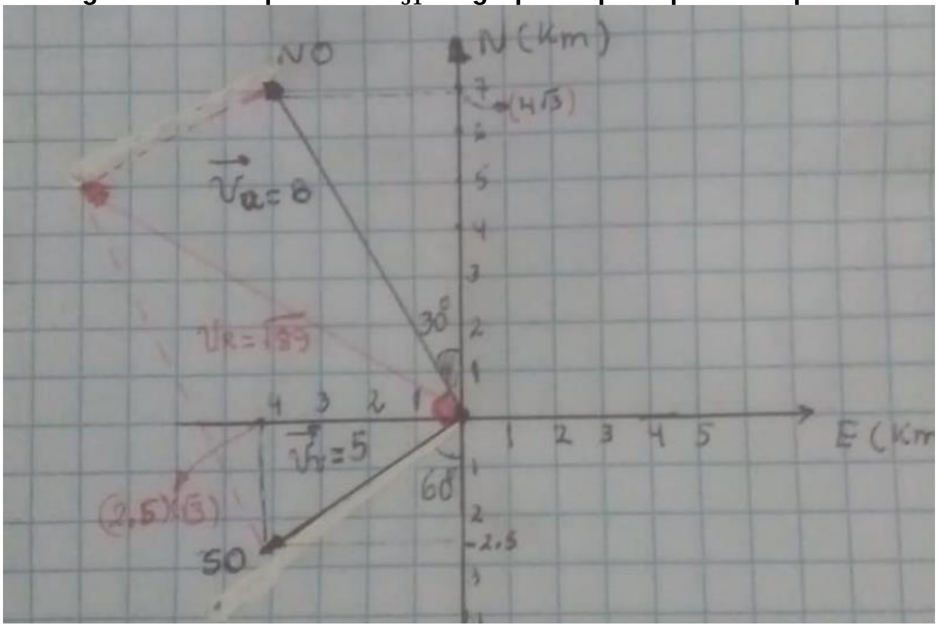
Figura 116 - Representação de vetor do professor P_{22} do G2



Fonte: Dados da pesquisa

Apenas o professor P_{31} do grupo G3 utilizou coordenadas (Figura 117) explicando o processo e as construções que fez.

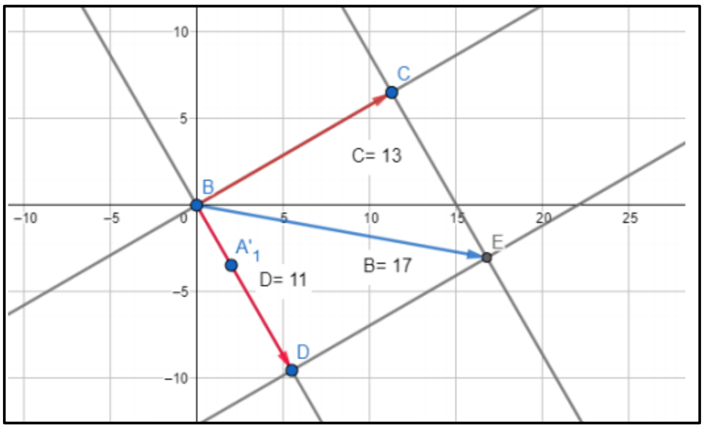
Figura 117 - Resposta do P_{31} do grupo G3 para questão 2 parte c



Fonte: Dados da pesquisa

Apenas um dos professores utilizou o GeoGebra (Figura 118) explicando o processo e as construções que fez.

Figura 118 - Resposta do P_{14} de G1 da questão 2, parte c, com GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que, nas tarefas desta avalição, os professores utilizam a técnica de adição de vetores pelo método do paralelogramo em GS e GA.

Na avalição final da disciplina, cada professor resumiu a resposta final do PEP-FP. A título de exemplo apresentamos dois desses resumos. O primeiro é de um aluno do grupo G4 que afirma:

> P_{42}: Para explicar o movimento dos veleiros podemos dividir o assunto em 3 pontos principais:

1º ponto: a respeito do significado, em que o professor fará perguntas com o objetivo de que a turma tenha conhecimento do que é um veleiro, como funciona, os diferentes tipos de veleiros, quais são as partes de um veleiro etc.
2º ponto: buscar entender o movimento dos veleiros – quais fatores permitem que o veleiro se mova, o que acontece com o veleiro se o mar ou o rio estão parados (não há movimento de ondas), mas há movimento do vento.
3º ponto: como explicar o movimento dos veleiros – considerando que os alunos já sabem o que é um veleiro e os fatores que o fazem se mover com o mar e o vento, é hora de aplicar as propriedades e conhecimentos para entender como os veleiros se movem.
Neste último ponto, vamos apresentar as propriedades, saber o que são vetores e como os veleiros se conectam com isso. Aplicar a teoria para que os alunos possam entender, a partir de uma perspectiva mais científica, como os veleiros se movem. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

Além disso, o aluno do G2 indica:

P_{23}: O movimento dos veleiros pode ser explicado desenvolvendo o tema vetorial em R^2 e R^3. O movimento do veleiro se deve à ação do vento sobre seu cordame (vela) e é uma boa aplicação para desenvolver o tema de vetores. Para abordar esta questão, devemos levar em conta uma série de questões sobre o significado e o movimento dos veleiros, devemos também saber explicar o assunto e como validar o que aprendemos em aula. Vamos ver esses pontos em detalhes.
Em relação ao significado, podemos explicar o que é um veleiro, os tipos de veleiro e suas características.
Em relação ao movimento dos veleiros, você pode desenvolver questões como a causa do movimento dos veleiros (o que causa esse movimento?), bem como os fatores que influenciam o movimento.

Para explicar o movimento dos veleiros, uma série de conceitos podem ser introduzidos, tais como a definição de vetor, representação de vetor, vetor unitário, propriedades de vetores, operações com vetores. Você pode até mesmo cobrir R^3, desenvolvendo o produto escalar e produto vetorial. Por fim, é conveniente validar os conhecimentos ministrados na aula por meio da aplicação de questionários e atividades vetoriais adicionais. (Fonte: Dados da pesquisa, Tradução nossa)

Finalmente, outro aluno pontua que:

P_{31}: Este curso tem como objetivo promover o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos que envolvam aspectos conceituais, processuais e de aplicação dos tópicos de geometria vetorial. Ao longo do curso, espera-se que os alunos estabeleçam conexões dos conteúdos da unidade curricular com contextos de outras ciências através de aplicações, usos e modelos. (Fonte: Dados da pesquisa, tradução nossa).

Enquanto eles apresentavam, a professora formadora, perguntou se eles podiam trabalhar o PEP em outras disciplinas, e os professores indicaram que é possível, mas que precisam de tempo e planejamento, porque os PEP apresentados mostram a utilidade do objeto matemático nos problemas com contextos de outras ciências e que os livros o fazem como exercícios de aplicação.

Com relação às dialéticas, a dialética das perguntas e das respostas (D_1) foi desenvolvida no processo do PEP-FP durante a busca de resposta para a questão geratriz $Q_{0-\mathrm{FP}}$, que requer a combinação das respostas $\mathrm{R}_i^{\lozenge}$ com as obras O_k e toda a pesquisa feita por cada grupo para conseguir estudar vetor e introduzir a Geometria Vetorial. Cada um dos quatro grupos apresentou as questões Q_ij com as respectivas repostas provisórias $\mathrm{R}_{ij}^{\lozenge}$ aportadas pelas mídias. As mídias utilizadas descritas por cada grupo foram, principalmente, livros-texto impressos, a Internet, artigos de pesquisa etc. e que permitiram identificar a dialética das mídias e dos meios (D_2), também conhecida como da conjectura e da prova. Além disso, nos encontros os quatro grupos formularam algumas tarefas em que os alunos procuraram as informações para obter as respostas e levar ao grupo para as discussões, o que nos permitiu observar a dialética do indivíduo e do coletivo (D_3),

Nos grupos, quando respondiam as questões referente ao movimento, os alunos apresentavam, por exemplo, questões relacionadas à direção e ao sentido, inclinação do veleiro, forças que afetam o movimento. Além disso, cada grupo, quando formulou a questão de investigação, buscou informações auxiliares por meio de pesquisa na internet e livros, para conseguirem encontrar um problema que pudesse levar ao estudo dos vetores. No caso do G4, eles encontraram também o melhor ângulo para o jogo *Angry Birds*. E nós identificamos esse comportamento como sendo o de caçadores de trufas (D_4).

Como indicamos no início das análises, a questão $Q_{0-\mathrm{FP}}$ não está diretamente ligada ao estudo do objeto matemático em particular, mas como envolve a necessidade de explicar o fenômeno do movimento e provoca seu estudo, podemos dizer que se trata, a princípio, de uma pesquisa aberta. Assim a questão geratriz neste PEP-FP vincula-se a outra disciplina diferente da geometria; neste caso, a física. Esta perspectiva às vezes requer sair do assunto ou da disciplina, o que permite identificar a dialética do tema e fora do tema (D_5).

No caso do veleiro de uma vela, tínhamos, no início do PEP, algum conhecimento sobre como a vela funcionava. Mas percebemos após as investigações e respostas apresentadas pelos alunos que, na realidade, esse saber era desconhecido ou não lembrado, e isso nos permitiu entrar na dialética de caixas pretas e claras. E como conseguiram dar reposta às questões apresentadas e explicaram as propriedades de vetores, observamos o desenvolvimento da dialética da leitura e da escrita (D_7).

Ao acontecer a dialética do indivíduo e do coletivo (D_3), a professora pesquisadora – ao acompanhar o descrito pelos grupos e os processos relacionados aos seus questionamentos -- identificou a dialética topogênese.

Considerando a evolução do *milieu* pela incorporação do objeto vetor e as respostas parciais, encontramos a mesogênese da investigação e, ao vermos cada conhecimento ser incorporado ao *milieu* e confrontado com os conhecimentos existentes, conseguimos identificar que nos PEP desenvolvidos pelos professores foi observada a razão de ser do nosso MER.

O desenvolvimento do PEP foi pela modalidade virtual e muitas vezes os professores perdiam, por momentos, as conexões da internet ou se conectavam pelo celular e a internet ficava lenta, o que provocava uma demora e afetava o planejamento dos tempos da atividade (cronogênese), de maneira que a professora formadora precisava reformular o tempo limite para a entrega dos relatórios.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

O objetivo desta investigação foi propor um dispositivo didático de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP-FP) para a formação de professores de matemática peruanos referente ao ensino de vetores em cursos de ciências e engenharia no intuito de identificar as praxeologias matemáticas e didáticas que esses docentes mobilizam nesse processo de formação. Este trabalho foi desenvolvido com um grupo de professores, estudantes do mestrado em Ensino da Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Peru (PUCP) e, por causa da pandemia do COVID 19, ocorreu remotamente via plataforma Paideia.

As leituras e revisões das pesquisas e nossas preocupações com a formação de professores nos levaram a procurar respostas às seguintes questões: **quais praxeologias matemáticas para o ensino de vetores são mobilizadas por professores peruanos em cursos de ciências e engenharia em uma formação continuada? Em que estas praxeologias podem contribuir para a prática desses professores e para o desenho, análise e implementação de novos processos didáticos?**

Para buscar respostas a esta questões definimos alguns objetivos específicos. Nosso primeiro objetivo específico foi estudar a dimensão epistemológica, identificando os saberes e as razões de ser dos vetores, buscando investigar na história a gênese e o desenvolvimento do conceito de vetor. Nessa busca, encontramos indícios de noções de vetores desde tempos antigos como na Grécia, mas foi no século XIV que o estudo dos movimentos descritos em alguns teoremas, como, por exemplo, qualidades uniformemente disformes em um intervalo de tempo (que na atualidade é movimento retilíneo uniformemente acelerado e que foi demonstrado por Oresme) permitiu identificar tipos de tarefas que podem ser resolvidas com elementos da geometria sintética – por exemplo, calcular o espaço percorrido por um corpo com esse tipo de movimento.

Os fenômenos de movimento, como a queda livre, têm sido estudados desde os tempos antigos. Embora a filosofia de Aristóteles (287 a. C) tenha dominado até os últimos anos da idade Média, seus resultados nunca convenceram os especialistas até a apresentação da primeira lei da física por Galileu no século XVI. Esta lei permitiu identificar o tipo de tarefa relacionada à determinação do espaço percorrido por corpos em queda livre. Estes avanços deram lugar à representação da decomposição do movimento na direção horizontal e vertical e que deu origem ao estudo, em um referencial cartesiano particular, do movimento parabólico para determinar a velocidade em cada intervalo de tempo. A utilização do método do paralelogramo de velocidades permitiu identificar a razão de ser do vetor na geometria analítica.

No século XVII, os estudos a respeito de forças que atuam sobre um corpo, feitos por Stevin e por Newton, para que fique em equilíbrio utilizando o método do paralelogramo de forças representado na geometria sintética. Dizendo de outra forma, se duas forças atuam em um corpo simultaneamente, a força resultante é descrita pela diagonal de um paralelogramo cujos lados descrevem as forças separadamente. Newton utiliza a geometria sintética para mostrar que para encontrar este resultado é preciso identificar as componentes das forças que atuam sobre um corpo, e esses cálculos são feitos na geometria analítica, mostrando a razão de ser dos vetores na geometria analítica.

No século XIX, tem-se o trabalho de Bellavitis em 1833 que, no sentido euclidiano, fez a aproximação das definições de segmento orientado quando dois segmentos são equipolentes e se obtêm a adição de vetores. Também se tem a introdução da palavra vetor em 1853 por Hamilton, que durante vinte anos estudou os quatérnios para que no processo do produto entre dois elementos se conseguisse identificar o produto escalar e o produto vetorial. De acordo com Sanchez (2011), os quatérnios eram uma ferramenta para descrever a realidade do espaço físico e do tempo que considerava o tempo como um escalar e definia os pontos do espaço por três coordenadas reais.

Ainda no século XIX, tem-se a introdução da notação de $\overline{AB}$ por Tait em 1873 e que representa uma reta que depende de três valores (ou componentes). A notação moderna de vetor como segmento orientado é $\overrightarrow{AB}$ introduz Argand em 1874. Depois, Tait em 1882, apresentou a decomposição de um vetor em três componentes paralelos a três vetores fornecidos – e não mais como dois a dois paralelos ou paralelos no mesmo plano. Outros avanços do estudo de vetores foram os trabalhos de Grassmann para o produto escalar e vetorial.

No século XX, continuaram os trabalhos de Burali-Forti (1861-1931) e Marcolongo (1862-1943) que, em 1910, formalizaram as propriedades dos vetores.

Além disso, os estudos de Tait sobre vetores abrangeu a inclusão dos princípios fundamentais para a construção da Análise Vetorial na geometria sintética e, em essência, os conceitos primitivos para a Álgebra Linear moderna. Depois de definidos produto escalar e produto vetorial, Gibbs, em seu livro *Vector Analysis* de 1901, definiu produto misto para três vetores no espaço. Ele considerou o produto misto dos vetores A, B e C como sendo o produto escalar do primeiro vetor pelo produto vetorial dos outros dois vetores. Além disso, a noção de espaço vetorial foi apresentada nos trabalhos de Giuseppe Peano (1858-1932), em seu livro *Cálculo Geométrico*, em que trouxe a axiomatização da teoria contida no *Ausdehnungslehre* de Grassmann, como ainda estudamos na atualidade.

A construção de um modelo epistemológico de referência (MER) explicitou a razão de ser do objeto matemático vetor na geometria sintética, na geometria analítica e na álgebra linear e permitiu encontrar três modelos. O primeiro é o modelo da geometria sintética em que os vetores são estudados com base em elementos dos cinco postulados de Euclides e o método do paralelogramo. O segundo modelo vem da geometria analítica que, com base em um referencial cartesiano, no plano ou no espaço, permite representar um vetor por suas coordenadas e sua decomposição. Além disso, suas propriedades e os produtos escalar e vetorial ajudam a resolver problemas, como encontrar medidas de ângulos, de áreas e de volumes. Por último, o modelo da álgebra linear, que considera como elementos propriedades como a combinação linear, as matrizes e suas propriedades.

Para desenvolver o segundo objetivo específico – estudar a dimensão econômica-institucional do problema didático de vetores – baseando-se em nosso MER, fizemos uma revisão de documentos oficiais, isto é, o Currículo Nacional da Educação Básica peruana vigente (PERU, 2016a) e o Programa Curricular (PERU, 2016b) e, para o nível superior, revisou-se as ementas do primeiro semestre da universidade peruana. O estudo realizado revelou que os vetores são estudados na Educação Básica para identificar grandezas vetoriais e determinar elementos do movimento que podem ser representados em um sistema de coordenadas cartesianas. No nível superior, para o primeiro semestre da universidade, considerou-se as ementas da Pontifícia Universidade Católica do Peru, em que temos a unidade acadêmica de Estudos Gerais Ciências com mais de 40 anos, sendo referência no Peru. Consideramos, então, as ementas de 2001 até 2016 da disciplina de

Matemáticas Básicas e de 2017 até 2018 da disciplina de Álgebra Matricial e Geometria Analítica (AMGA) em que os vetores fazem parte dos conteúdos estudados.

A revisão das ementas de AMGA apoiou-se em cinco livros didáticos. Observamos como o conceito de vetor era introduzido, as definições apresentadas, as propriedades estudadas e as praxeologias matemáticas em jogo no estudo do objeto matemático vetor. Observamos que os livros introduzem uma narrativa histórica e exemplos de grandezas (LD1), discutindo como o vetor é caraterizado na física e na engenharia (LD2) e apresentam exemplos para identificar grandezas (LD3, LD4 e LD5), representando ainda os vetores como segmentos orientados. Em seguida, os livros definem comprimento e representam vetores no referencial cartesiano, definem a adição de vetores, o produto de um escalar por um vetor e as propriedades para essas operações. Depois, eles definem o produto escalar de dois vetores, a projeção ortogonal, o produto vetorial e o produto misto e, como aplicações dessas operações, temos a área de um paralelogramo e o volume de um paralelepípedo. O desenvolvimento do curso é feito com exemplos e aplicação de vetores por meio de problemas contextualizados na física ou na própria matemática.

Observamos que, em geral, os livros analisados apresentam o ensino do discurso tecnológico sem explicitá-lo, o que dificilmente mostra a razão de ser dos vetores no estudo empreendido, o que contrasta com o surgimento deste objeto matemático na história, e como mostra nosso MER. Nessa análise, conseguimos identificar o modelo epistemológico vigente (MEV) na disciplina de AMGA de ciências e engenharia que tratam de vetores no espaço por meio de sua organização didática e matemática, além de mostrar a razão de ser do objeto matemático vetor na instituição universitária peruana no primeiro semestre da universidade.

Ao desenvolver o terceiro objetivo específico, consideramos o MER e a dimensão econômica, percebendo que existem restrições para o ensino de vetores, pois na revisão das ementas das disciplinas foi identificado que o foco do ensino está em uma axiomática para vetores em que estão organizadas as definições e propriedades em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^n$, o que causa uma incompletude motivada pela epistemologia dominante. A incompletude é provocada pelo foco no estudo axiomático em que a razão de ser dos vetores foi esquecida e o papel do aluno é o de memorizar propriedades para utilizá-las como técnicas rígidas.

Considerando a escala dos níveis de codeterminação, percebemos que, nos níveis assunto ou tema, a obras analisadas raramente questionam a estruturação específica das disciplinas, setores ou domínios a que essas questões ou temas pertencem. Inferimos que este problema está relacionado à organização dos saberes causada pela transposição didática, pois apresenta-se nessas obras o conteúdo de modo ordenado que se reduz à apresentação de regras prontas e estratégias que podem interferir pouco na aprendizagem do aluno.

No nicho e habitat, com base em nosso MER, identificamos os conteúdos específicos que se relacionam com vetores e tarefas que envolvem velocidades, deslocamento e posição. Os fenômenos da física podem ser representados como segmentos orientados, junto com a adição de vetores pelo método do paralelogramo, mostrando a razão de ser dos vetores. Para o estudo do deslocamento na queda livre e na estabilidade das forças foi necessário considerar os vetores no modelo da geometria analítica, e para área e volume, no modelo da álgebra linear.

Esses estudos das três dimensões contribuíram para o desenho da formação continuada, com base no dispositivo Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) que foi aplicado em um grupo de professores enquanto alunos de um mestrado em ensino de matemática de uma universidade peruana.

O MER foi a base para a formulação da questão geratriz cujas ideias iniciais foram desenvolvidas durante meu estágio na *Universidad Ramon Llull*, no grupo de pesquisa ASISTEMBE do projeto *Propuesta para enseñaza universitária basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo*, com a contribuição dos professores doutores Marianna Bosch, Berta Barquero, Josep Gascon e Ignasi Balenza. As ideias do desenho se concretizaram na qualificação com as sugestões dos professores da banca.

O processo de desenho da formação permitiu responder o objetivo específico quatro colocado em prática no mestrado em Ensino de Matemática. Os encontros para o desenvolvimento da pesquisa tiveram uma duração de 22 horas, e fizeram parte da Disciplina de Geometria Euclidiana no Plano e no Espaço, contando com a participação de vinte e quatro professores, estudantes do mestrado, dos quais catorze foram considerados para as análises por terem maior frequência de participação. As aulas foram realizadas de maneira sincrônica pela plataforma virtual Paideia que a

PUCP disponibilizou, e que permitiu as videoconferências pelo Zoom e a criação de pastas em que os professores registravam suas produções.

Para o desenvolvimento desta formação consideramos o acesso às diferentes mídias que puderam ser encontradas na internet e que ajudaram na busca de informação, como livros, pesquisas, periódicos, vídeos etc. Para organizar os documentos e informações, os professores utilizaram o Google Drive, para anexar as gravações das apresentações das videoconferências. As produções dos professores registravam o acesso nas mídias a cada encontro na plataforma Paideia.

A instabilidade de conexão da internet e a não permissão da gravação das reuniões completas em salas divididas no Zoom foram pontos que não favoreceram a coleta completa de dados. Alguns professores tiveram às vezes problemas de conexão e perderam parte da discussão. No transcurso do PEP-FP estas dificuldades foram superadas com a organização interna dos grupos, pois todos os integrantes discutiam os avanços enquanto um deles integrava toda informação em um relatório.

Depois da fase experimental e dos resultados da nossa pesquisa baseada no dispositivo didático do PEP-FP, consideramos que os professores vivenciaram um percurso para o ensino de vetores, reconheceram uma das razões de ser dos vetores, ou seja, determinaram as forças e velocidades que atuam no movimento de um corpo em movimento. O PEP-FP baseou-se no paradigma de questionamento do mundo, considerando uma situação hipotética de uma professora iniciante que instiga os professores a responderem à questão geratriz: como explicar o movimento dos veleiros a estudantes do primeiro semestre de uma universidade peruana? Isto permitiu identificar elementos da Física, como os fenômenos das forças e velocidades, para descrevê-los por meio do objeto matemático vetor e de suas propriedades. Para responder à questão geratriz, precisou-se também realizar uma revisão de documentos oficiais e livros para que a resposta fosse adequada ao que é previsto para o primeiro semestre do curso ciências e engenharia da PUCP.

Inferimos pelos resultados alcançados que o percurso tenha ajudado os professores deste grupo a refletirem, pois na aplicação do PEP, no módulo 1, eles ainda não tinham a experiência com a dinâmica que envolveu a pesquisa. No módulo 3, momento da criação da questão geratriz, eles conseguiram apresentar a razão de ser dos vetores e pesquisaram além do movimento no equilíbrio das forças. O não desenvolvimento do módulo 4 limitou a implementação do PEP-FP, porque os professores nesse momento não ensinam no primeiro semestre em nível universitário.

Consideramos que o percurso do estudo e pesquisa sobre os vetores mostrou um âmbito mais amplo da relação da matemática com a física e em que se abordou um problema multidisciplinar e transdisciplinar que envolve, por exemplo, a física, e os participantes mostraram isso, ao usar conceitos tanto da física quanto da matemática.

Podemos afirmar ainda que esse tipo de trabalho, em particular com estudantes de mestrado, em que os grupos de discussão são formados por sujeitos de diferentes especialidades (matemáticos, engenheiros, administradores de empresas e pedagogos) e que, a princípio, pareciam não ter afinidade, mas ao final encontraram um objetivo comum, que era ajudar uma pessoa – neste caso, a professora Rina – a dar resposta a um problema que-envolve uma situação hipotética. Este problema os levou a se interrelacionar, a aprender mais uns com os outros, a partir de perspectivas distintas, primeiramente para a interpretação do fenômeno, segundo para a busca especializada de informação e, terceiro, para conseguir organizar por categorias suas respostas ao problema. Além disso, na formação observou-se que os estudantes do mestrado estavam muito identificados de alguma forma com a professora iniciante no ensino superior, o que permitiu que cada grupo conseguisse uma integração para dar a reposta.

No PEP-FP inicia-se com uma questão problemática que conduz ao paradigma do questionamento do mundo e, em seu desenvolvimento, preserva-se uma certa tensão entre dois paradigmas, isto é, entre o paradigma das visitas às obras e o questionamento do mundo na pesquisa e na formação de professores. Na pesquisa observamos que a questão era apresentada para deixar o modo tradicional de estudo e ensino de vetores e para resolver problemas não só matemáticos, mas, também na física – como um problema de meios de transporte ou do esporte. Ao solicitar explicação, o grupo foi conduzido à ampliação dos conhecimentos para além da matemática dos fenômenos físicos que envolve o movimento dos veleiros, e isso foi o que permitiu a mudança para o paradigma do questionamento do mundo.

Na formação, observou-se que também existir essa tensão, porque os estudantes não estavam familiarizados à ideia de questionar e pesquisar para obter informação sobre o movimento dos veleiros para justificar quais elementos da física interferem e quais elementos da matemática permitiriam descrever esse movimento. Observamos que, para responder ao problema, os grupos consideraram três categorias: a primeira se refere aos significados e conceitos necessários para compreender o movimento dos vetores; a segunda, aos fenômenos da física que originam o movimento, e a terceira categoria, a como explicar esse movimento aos alunos. Para essa última categoria, um grupo mostrou de maneira mais evidente essa tensão porque, na parte matemática, as propriedades do objeto vetor foram apresentadas de maneira muito abstrata, porém, nos outros grupos, cada propriedade foi descrita em articulação com o contexto do problema do movimento dos veleiros, conseguindo assim uma coexistência entre paradigmas para a resolução de um problema.

Acreditamos que os plenários em que cada grupo apresentou seus avanços permitiram olhar as perspectivas que cada grupo adotava e fez surgir novas questões que contribuíram para responder à problemática em jogo. Além disso, ajudaram a mostrar que o estudo de vetores tem um sentido mais amplo, além da parte abstrata, porque foi evidenciada a mudança entre os paradigmas da visita às obras ou monumentalíssimo e o paradigma do questionamento do mundo.

Cabe mencionar que esta experimentação, por ser a primeira vez que foi por nós aplicada, proporcionou-nos muita aprendizagem, além de elementos que puderam ser considerados para uma próxima aplicação do PEP-FP, na modalidade à distância, porque permitiu identificar elementos para uma melhor organização a respeito das questões de discussão na parte sincrônica e da distribuição de tarefas nos grupos nas partes assincrônicas com a implementação de foros de discussão. Consideramos que as ferramentas tecnológicas permitiram uma melhor estruturação da informação para a produção dos estudantes e a gravação das discussões dos plenários.

Para o desenvolvimento desta investigação, a Teoria Antropológica do Didático foi muito importante. Para conseguirmos o alcance dos resultados, as fases da metodologia e a pesquisa da engenharia didática dentro da TAD permitiram associar ferramentas como MER e MEV para o desenho do PEP-FP, para estudar e apresentar os vetores do ponto de vista epistemológico e explicitar as condições e restrições para seu ensino no nível superior. Além disso, as dialéticas, sob o marco da TAD, permitiram fazer as análises dos experimentos e foram fundamentais para nossa pesquisa.

Pontuamos que a metodologia de investigação, no sentido de Barquero e Bosch (2018), desenvolvida neste trabalho pode servir para novas pesquisas em formação de professores inicial ou continuada do ensino médio ou superior das diferentes áreas da matemática, física e engenharias.

Finalmente, como perspectiva para futuras investigações a partir deste trabalho, consideramos a continuação da pesquisa sobre o PEP e PEP-FP de maneira presencial, semipresencial e a distância com diferentes conteúdos que integrem as disciplinas nas ciências e engenharias e, também, de diferentes níveis educativos. A nova realidade, permite que a formação à distância desenvolva mais ferramentas de apoio para o ensino e pesquisa, além de interrelações com pessoas que se encontram em diferentes lugares, o que pode ser utilizado favoravelmente para o trabalho de PEP e PEP-FP.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. **A. Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

______. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. UNIÓN, **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, p. 09-34. 2015.

______. Articulação entre História e Educação da Matemática: Aspectos teórico-metodológicos para o ensino. **Educação Matemática** epistemologia, didática e tecnologia. Editora Livraria da Física. São Paulo, p. 181-227, 2018.

ANTUNEZ, GALHARDI, HERNASKI, As leis de Newton e a estrutura Espaço-temporal da Mecânica Clássica. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 40, nº 3, www.scielo.br/rbef DOI: http://dx.doi.org/1590/1806-9126-RBEF-2018-0003 2018, p. e3311-1- e3311-10

ARENZANA, V. El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. **Revista Suma** v. 25, 61-70. 1997.

ABVC, **Associação Brasileira de Velejadores de Cruzeiros.** Breve curso de navegação à vela. Disponível em <http://www.novaabvc.com.br/informacoestecnicas/5/regulagem-e-manuseio-de-vela> Acesso em 30 de maio de 2020.

BA, C. **Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique.** Tese (Doutorado). L 'Universite Claude Bernard – Lyon 1 et l'Universite Cheikhanta Diop – Dakar. 2007.

BARQUERO, B. **Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas**. Tese (Doutorado) – Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Matemàtiques, Espanhia , 2009.

BARQUERO, B.; BOSCH, M. Engenharia Didática como Metodologia de Pesquisa**: De Situações Fundamentais a Percursos de Estudo e Pesquisa**. **A Teoria Antropológica do didático: Princípios e Fundamentos**. Curitiba - Brasil. 2018.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación.** 2011. http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/BarqueroBoschGascon-CITAD-III-2011.pdf

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 1, pp. 1-28, 2013.

BARTOLOME, E.; FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. **European Journal of Engineering Education,** 44(3), 330–346.

BARON, M. **Curso de História da Matemática** Origens e Desenvolvimento do Cálculo, Ed. Universidad de Brasilia, 1985.

BENITO, R. **Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: O ensino de cônicas.** Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em

Educação Matemáticas Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCPSP, São Paulo, 2019.

BITTAR, M. **Les vecteurs dans l'enseignement secondaire –Aspect outil et obje dans les manuels – Etude de difficultés d'éleves dans deux environements: papier crayon et Cabri-géomètre II.** Tese (Doutorado). Universite Josep Fourier. Francia.1998.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIDEDO, V. L.; WETZLER. H. G. **Álgebra Linear**. 3. Ed. São Paulo; Harper & Row do Brasil, 1980.

BOSCH, M. **La Dimensión Ostensiva en la Actividad Matemática. El caso de la proporcionalidad.** Tesis de Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.1994.

______. Study and research paths: A model for inquiry. **ICM 2018 Rio de Janeiro**. p. 4001-4024. 2018

______. Conferencia: Cuestiones metodológicas en torno a los recorridos de estudio e investigación. Propuestas y problemas abiertos. PUCP Lima. Perú, 2020.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemática secundaria. Em M. J. Gonzales, M. T. Gonzáles & J. Murillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIII**, pp. 89 -113. Santander: SEIEM. 2009.

BURALI-FORTI, C.; MARCOLONGO, R**. Èlèments de Calcul Vectoriel**. Avec de Nombreuses Applications a la Géométrie, a la Mecanique et a la Physique Mathematque. Paris. 1910.

CELESTINO, M. R. **Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: As Pesquisas Brasileras na Decada de 90.** 114f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade de São Paulo. 2000

CLAGETT, M. **Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions: A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as Tractus de confurationibus qualitatum et motuum**, The University of Wisconsin Press, Wisconsin. Madson: The University of Wisconsin Presss, 1968.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saberenseñado. Buenos Aires: Aique]. 1985.

______. **La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné.** Grenoble, La pensée Sauvage. 1991.

______. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-265, 1999.

______. **Organiser l'etude. 3. Ecologie & regulation.** Curso dado na XIe École d'Été de didatique des mathématiques. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvege. p.41-56. 2002.

______. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. Actas de congreso: Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, pp. 705-746. 2007.

______. **Introduction à la théorie anthropologique du didactique / Introdução à teoria antropológica do didático**. Slides bilíngue: Francês/ português. 2011

______. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Année**. 2012. Disponivel em : <https://docplayer.fr/79632148-Umr-adef-yves-chevallard-theorie-anthropologique-du-didactique-ingenierie-didactique-du-developpement-annee.html>

______. **Curso impartido en las I Jornada de Estudio en Educación Matemática**. Universidad de Cordova. Cordoba. Argentina. 2013a.

______. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **REDIMAT—Journal of Research in Mathematics Education**, *2*(2), 161–182. 2013b. Disponivel em <https ://doi.org/10.4471/redim at.2013.26> Acesso em: 20 abr. 2020.

______. **La notion de PER : problèmes et avancées**. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2018.

______. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD**. 2009c. Disponível em: <http://www.ardm. eu/book/export/html/676>. Acesso em: 24 jun. 2019.

______.On using the ATD: Some clarifications and comments. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n.4, p. 001-017, 2019.

COSTA, V. A.; ARELAGO, M.; OTERO, M. R. Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad. **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria.** Vol. 8, Nº 3, p.146-161. 2015.

CROMBIE, A. C. Historia de la ciencia: De San Agustín a Galileo (II Vols). Madrid España. 1974.

CROWE, M, **History Of Vector Analysis**, segunda edição. New York. 1985.
DEMANDA, F., WAITS, B., FOLEY, KENNEDY, D. **Precálculo.** Pearson Educación. 2007. Disponivel em: https://www.pieresko.net.ar/libros/matematica/Kennedy%20-%20PRECALCULO.pdf

DESCARTE, R. La Geometrie. Livre Troisiesme. 1937. Traducción inglesa de David Eugene Smith y Marcia L. Latham, The Geometry of René Descartes. Dover Publications, Inc, Nova York 1954.

DORIER, J. L., **Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire : approches historique et didactique**. Tese (Doutorado), Institut Fourier (Grenoble). França. 1990.

DORIER, J. L., SIERPINSKA, A.; Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. The Teanching and learning of Mathematical at Uniniversity level: An ICMI Stady. P55-273. 2002

DORIER, J., L. **On the Teaching of Linear**, Mathematics Education Library. França. 2000.
Cisse, B. A., Dorier, J-L. The teaching of vectors in mathematics and physics in France during the 20th century. **Journal of Innovative Technology and Education**. no. 1, p. 1-10. 2014.

DUHEM, P. **La Théorie Physique.** Son objet et sa structure. Bibliothèque de Philosophie Experimentale. Paris. 1914.

EEND, **Escuela Náutica, Formación Nautica**. Disponivel em: < https://nauticaformacion.es/cuales-son-las-partes-de-velero-tipos-de-velas-nomenclatura-nautica/> Acesso em: 30 maio. 2020.

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Formación didáctica del profesorado universitario: análisis de un curso.** En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 237-246). Zaragoza: SEIEM. (2017).

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.; WINSLØW, C. Study and research paths: A new tool for design and management of project based learning in engineering. International Journal of Engineering Education, 34(6), p. 1848–1862. 2018.

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.; MATA, M. SRP design in an Elasticity course: The role of mathematic modelling. **In First conference of international network for didactic research in university mathematics**. Montpellier, France. Retrieved from hal-01337877. 2016.

FLORENSA, I. **Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and techer education**. Doctoral Thesis. Univeritat Ramon Llull. Barcelona/Espanha, 2018.

FREITAS, R. **Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta.** Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemáticas Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCPSP, São Paulo, 2019.

GARCIA, A.V.M. História Oral e Educação Matemática. In: Marcelo de Carvalho Borba e Jussara de Loiola Araújo (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, p. 79-100, 2006.

GARCIA, L, BARQUERO, B. FLORENSA, I. BOSCH, M. Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de investigación en Educación Matemática*. 15. 75-9. 2019

GASCÓN, J. Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 18, n. 1, p. 7-34, 1998.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,** 14(2), 203-231. 2011.

GASCÓN, J. NICOLAS, P. Economía, ecologia y normativida en teoría antropológica de lo didáctico. **Educação Matemática Pesquisa**. Vol. 21, n. 4, p. 036-052. Brasil, 2019c.

GASCÓN, J. SIERRA, T. A. Los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado y la construcción de praxeologías matemáticas para la enseñanza. El caso de los sistemas de numeración. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Vol., n° pp. 1- , 200. 2018.

GROSSMAN, S. FLORES, J. J.; **Álgebra Lineal**. Sexta edição. McGraw-Hill Interamericana. México. 2104.

GRUENBERG, K. W., WEIR, A. J. **Linear Geometry**. Graduate Texts in Mathematics. Springer Science+ Business Media, Llc. 1977.

GUERATO, E. T., Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana. Dissertação da Universidade Bandeirante de São Paulo. Brasil. 2012.

GOMEZ, B. **Estudio del plano vélico y procedimiento de diseño de las velas**. Aplicación al velero Escuela "Barcelona". Proyecto final de carrera. Facultat de Nàutica de Barcelona. Departamento de Ciencia e ingeniería náutica. Universitat Politècnica de Catalunya. España. 2014.

JEANS, J., **Historia de la Física.** Primeira edição em espanhol. México.1953.

JESSEN, B. E. How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting? **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,** 19, 199–224. 2014.

JESSEN, B. E.; WINSLØW, C. Research and study course diagrams as an analytic tool: The case of bidisciplinary projects combining mathematics and history. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, et al. (Eds.), **Un panorama de la TAD. Proceedings of the 3rd international conference on the anthropological theory of didactics.** p. 685–694. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica. 2011.

HAYFA, N. **La enseñanza de la noción de vector en el Líbano después de la reforma de 1998. Análisis antropológico y conceptual sobre una muestra de libros de texto y estudiantes franceses**. Tese (Doutorado). Universite Claude Bernard Lyon I & Universite Saint – Joseph Beyrouth (Liban). 2006.

LARSON, R. **Fundamentos de álgebra lineal** (7a. ed.) Cengage. 2015

LEITHOLD, L. **Matemáticas previas al cálculo: funciones, gráficas y geometría analítica, con ejercicios para calculadora y graficadora**. Tercera edición. México, D.F.: Oxford University Press.2018

LICERA, R. M. **Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado.** (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. 2017.

LICERA, R. M., GASCÓN, J., BOSCH, M. Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los Números Reales. **Revista Contexto de Educación** Vol. 26 (año 19) P. 13-26. Argentina. 2019.

LUCAS, C., GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico del cálculo diferencial elemental. **Avances de Investigación en Educación** Matemática (AIEM). v. 16, p. 40-56. 2019.

MATOS, F. C. **Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear.** Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em ciências e Matemáticas Universidade Federal do Pará Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, Pará, 2017.

MOORE, G. The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940. **Historia Mathematica** Vol. 22, p. 262-303. Canadá. 1995.

MUSEO GALILEO (Biblioteca Nazionale Centrale, Florence Istituto e Museo di Storia della Scienza). "Working Level of Folio 116v". Florencia. Recuperado em: <http://www.imss.fi.it/ms72/HTML/F116_V/M116_V.HTM>. Acesso em 02 de maio de 2020.

ODUM, E. P. **Ecologia** – Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.

OEF, **Olimpiadas Escolares de Física**, Una introducción al arte de navegar, Universidad de Alicante 2010. Disponível em < https://rsef.es/images/Problemas/OEF2010/P1-OEF-2010.pdf > Acesso em 20 de junho de 2020.

OLIVEIRA, C. N. C. Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos, 2010. 191, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

ORESME, N. **Tractatus de Latitudinus Formarum**.Original University of the California. 1486.

PEANO, G. Operazine della Logica Deduttiva. In: **Opere Scelte**. Roma : Cremonese, v.1, p. 1-19. 1957.

PERU, **Currículo Nacional de la Educación Básica, 2016a**: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf Acesso em 30 de abril de 2020.

PERU, **Programa Curricular Peruano**, 2016b. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf Acesso em 30 de maio de 2019.

PERU, **Propuesta de metas educativas e indicadores al 2021**, 2010. Disponível em: <http://www.minedu.gob.pe/pdf/propuesta-de-metas-educativas-indicadores-2021.pdf> Acesso em 30 de março de 2019.

PERU, **Ciencia Tecnología y Ambiente.** Secundaria 5. Manual docente de Ciencia, Tecnología y Ambiente para quito de secundaria. Ministerio de Educación. Santillana. Lima-Perú, 2012.

PERU, **Ley Universitari, 2014** disponible en: http://www.minedu.gob.pe/reforma-universitaria/pdf/ley_universitaria.pdf.

PERU, **Rutas del Aprendizaje,** Área Curricular Ciencia Tecnología y Ambiente. Ciclo VII, 3°, 4° y 5° grados de Educación Secundaria, MINEDU Perú, 2015. Disponível em: http://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-secundaria-cienciayambiente-vii.pdf Acesso em 20 de março de 2020.

PERU, **Reglamento de la ley N° 30512, ley de Institutos y Escuelas de Educación Superior y de la Carrera Pública de sus Docentes**. 2017. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/0B0iwhkiy8Sn1R2lXTGluZGVubnc/view> Acesso em 30 de março de 2020.

PRESSIAT, A. **Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison points-vecteurs.**. Université de Paris VII Denis Diderot. Thèse de doctorat. Spécialitè : Didactique de Mathématiques. 1999.

PUCP, Sobre el programa, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas Escuela de Posgrado PUCP. 2017a, Disponivel em< https://posgrado.pucp.edu.pe/maestria/ensenanza-de-las-matematicas/sobre-el-programa/> Acceso em10 de setembro 2018.

PUCP, Perfil del postulante, Maestría en Enseñanza de las Matemáticas Escuela de Posgrado PUCP. 2017b, Disponivel https://posgrado.pucp.edu.pe/maestria/ensenanza-de-las-matematicas/perfil-postulante/ Acceso em10 de setembro 2018.

PUCP, **Facultades, Carreras.** Disponível em: <https://www.pucp.edu.pe/pregrado/carreras/por-facultad/> Acesso em 10 de setembro de 2019.

PUCP, **Historia de la PUCP**. Disponível em: <http://100.pucp.edu.pe/historia/historia-de-la-pucp/> revisado em 10 de outubro de 2018.

PUCP, **Nuestra Universidad, Historia, Orígenes.** 2017. Disponível em: <https://www.pucp.edu.pe/la-universidad/nuestra-universidad/historia/origenes/> Acesso 10 de outubro de em 2018.

PUCP d, **Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica**. Recuperado de: http://facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/informacion-para-el-estudiante/sumillas/ Acesso em 30 junho de 2019.

RASMUSSEN, K. The direction and autonomy of interdisciplinary study and research paths in teacher education. **REDIMAT—Journal of Research in Mathematics Education**, 5(2), p. 158–179. 2016.

RONCAGLIO, V.; NEHRING, C. M. **Registros de Representação Semiótica. Conversão e tratamento em Vetores**. Brasil. 2019.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

RUIZ OLARRIA, A. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza**, tese Doutoral Universidad Autónoma de Madrid, Hispania. 2015.

SÁNCHEZ, J. M. Historias de Matemáticas Hamilton y el Descubrimiento de los Cuaterniones. **Revista de Investigación Pensamiento Matemático**- Número 1. 2011.

SIERSPINSKA, A, DREYFUS, T, HILLEL, J. Evaluation of a teaching design in linear Álgebra: the case of linear transformations, **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 19, (1), 41-76. 1999.

STEVIN, S. **Les Oeuvres Mathematique de Simon Stevin de Bruges: Ou sont inserées les memoires mathematiques, esquelles s'est exercé le tres-haut & tres illustre prince**, Maurice de Nassau. 1634.

STEWART, J. **PreCálculo: Matemáticas para el Cálculo**. Sexta edición. México: Cengage Learning.2012

SWOKOWSKI, E. W. & COLE, J. A. **Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica**. Decimotercera edición. México: Cengage Learning. 2011.

UNMSM. **Universidad Nacional Mayor de San Marcos**, Historia, Recuperado em : < http://www.unmsm.edu.pe/home/inicio/historia> revisão 01 de maio 2020.

TARRÉS, J. Historia de las Matemáticas. Matemáticas y Movimientos en el siglo XIV. **Revista de Investigación Pensamiento Matemático**. Volumen VII, Número 2, pp. 087-100. 2017.

TRUESDELL, C. **Essays in the History of Mechanics**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 1968.

WINSLØW, C.; BARQUERO, B.; DE VLEESCHOUWER, M.; HARDY, N. An institutional approach to university mathematics education: From dual vector spaces to questioning the world. **Research in Mathematics Education,** 16(2), 95–111. https ://doi.org/10.1080/14794 802.2014.91834 5. 2014.

WINSLØW, C., Matheron, Y., & Mercier, A. Study and research courses as an epistemological model for didactics. **Educational Studies in Mathematics**, 83(2), 267–284. https ://doi.org/10.1007/s1064 9-012-9453-3. 2013.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**, 2.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

ZEA, C. A. **La instauración histórica de la noción de vector como concepto matemático.** Dissertação (Mestrado). Universidad del Valle facultad de Educación y Pedagogía Programa Académico Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali. Colômbia. 2012.

ZORNOFF, P. **Uma investigação sobre as origens dos espaços vetoriais e a evolução da análise geométrica de Leibniz até Grassmann.** Dissertação (Mestrado). Universidade Estatual Paulista. Instituto de Geociência e Ciências Exatas Campus de Rio Claro. 1999.

ANEXO A – Ementa de Álgebra e Geometria Analítica

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES
ÁREA DE INGENIERÍA

SÍLABO
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

I. DATOS GENERALES

1.1. Departamento Académico	:	ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA			
1.2. Semestre Académico	:	2018– I			
1.3. Código de asignatura	:	EG-AC-202			
1.4. Ciclo	:	I			
1.5. Créditos	:	04			
1.6 Horas semanales totales	:	06			
1.6.1	Horas de teoría y práctica	:	HT 2 – HP 4	:	
1.7. Requisito(s)	:	Ninguno			
1.8. Docentes	:				

II. SUMILLA

La asignatura se ubica en el área de estudios generales del Plan Curricular de Estudios y es de carácter teórico-práctico. Comprende: Nociones de lógica y sistemas numéricos dando énfasis a los números naturales, reales y complejos. También estudiamos los polinomios en una variable, los vectores en y tópicos básicos de la Geometría Analítica y Vectorial: distancia entre dos puntos, la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. Los contenidos son: Nociones de lógica y sistemas de números,

Polinomios en una variable, Vectores , Tópicos de Geometría Analítica y Vectorial.

III. COMPETENCIA Y SUS COMPONENTES COMPRENDIDOS EN LA ASIGNATURA

3.1. **Competencias**

Genera en el alumno hábitos de estudio, análisis y reflexión exponiendo los tópicos de la sumilla en forma teórica y práctica los cuales serán reflejados a través de las aplicaciones de estos temas a las Ingenierías y a la vida cotidiana.

3.2. **Capacidades**

- Usa de manera razonada las proposiciones y leyes lógicas en la vida diaria, así como en el proceso deductivo de las propiedades que se obtienen y demuestran a lo largo de todo el curso.
- Aplica con soltura las propiedades de los números naturales, reales y complejos en la solución de los problemas de aplicación.
- Aplica correctamente las propiedades de los vectores y polinomios en la solución de los problemas cuya formulación contengan estos temas.
- Comprende la aplicación de las propiedades de los elementos de la Geometría analítica para usarlos en su campo de acción.

Actitudes y valores

- Actitud de curiosidad e investigación académica
- Actitud de liderazgo. Compromiso con su vecindario, con su país
- Respeto a la persona y a la naturaleza
- Búsqueda de excelencia.

Ejes trasversales

- Investigación formativa
- Responsabilidad social
- Liderazgo

IV. PROGRAMACION DE CONTENIDO

UNIDAD I NOCIONES DE LOGICA Y SISTEMAS DE NUMEROS				
CAPACIDAD				
SEMANA	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	HORAS LECTIVAS
1	Nociones de Lógica. Proposiciones simples y compuestas. Tautologías, contradicciones y contingencias. Implicación y equivalencia lógica. Leyes lógicas. Cuantificadores universal y existencial.	Expositiva participativa y taller sobre Métodos de demostración. Expositiva participativa y taller sobre conjuntos.	Desarrollo de la práctica dirigida N°1.	3 3
2	Conjuntos inductivos. Números naturales. Inducción matemática. Demostraciones por inducción matemática. Sumatorias y propiedades. Número combinatorio y propiedades. Binomio de Newton.	Expositiva participativa y taller sobre conjuntos inductivos.	Desarrollo de la práctica dirigida N°2.	2 4
3	Números reales, propiedades. Solución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado y racionales. Valor absoluto. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Máximo entero. Ecuaciones e inecuaciones con máximo entero.	Expositiva participativa y taller sobre Métodos de demostración.	Desarrollo de la práctica dirigida N°3.	2 4
4	Números complejos, operaciones, conjugado y módulo de un numero complejo. Forma binomial y forma polar. Potencia y raíces de un número complejo. Teorema de Moivre. Forma exponencial de un número complejo y logaritmo de un número complejo. EVALUACION CONTINUA 1	Expositiva participativa y taller sobre el axioma del supremo.	Desarrollo de la práctica dirigida N°4	2 4

UNIDAD II POLINOMIOS EN UNA VARIABLE				
CAPACIDAD				
SEMANA	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	HORAS LECTIVAS
5	Polinomios en una variable real o compleja. Operaciones con polinomios. Algoritmo de la división de polinomios. Teoremas del residuo y del factor.	Expositiva participativa y taller sobre división de polinomios.	Desarrollo de la práctica dirigida N°5.	2 4
6	Máximo Común Divisor. Teorema Fundamental del álgebra. Número de ceros de un polinomio. Teorema de factorización única. Multiplicidad de un cero de un polinomio.	Expositiva participativa y taller sobre factorización de polinomios.	Desarrollo de la práctica dirigida N°6.	2 4
7	Relaciones entre raíces y coeficientes. Raíces complejas y conjugadas. Raíces de la forma $a+\ b$. Raíces enteras y raíces racionales. EVALUACION CONTINUA 2	Expositiva participativa y taller sobre cálculo de raíces de polinomios.	Desarrollo de la práctica dirigida N°7.	2 4
8	EVALUACIÓN PARCIAL			6

UNIDAD III VECTORES EN R^2				
CAPACIDAD				
SEMANA	CONTENIDOS CONCEPTUALES	CONTENIDOS PROCEDIMENTALES	ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE	HORAS LECTIVAS
9	Vectores en R^2. Operaciones suma y producto por un escalar. Norma o longitud de un vector, propiedades. Producto escalar, propiedades.	Expositiva participativa sobre prueba de las propiedades del producto escalar.	Desarrollo de la práctica dirigida N°8.	2 4
10	Proyección ortogonal. Componentes. Ángulo entre vectores. Paralelismo y ortogonalidad de vectores. Aplicaciones.	Expositiva participativa y taller sobre proyección ortogonal y propiedades.	Desarrollo de la práctica dirigida N°9.	2 4

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

El principio de movimiento de veleros contra el viento. Las fuerzas que actúan sobre el casco y las velas del yate. 2020 fest-bilet.ru School of Survival - Armas. Orientación. Equipo. Abrigo. Comida. Trampas
https://fest-bilet.ru/es/ukrytie/princip-dvizheniya-parusnyh-sudov-protiv-vetra-sily-deistvuyushchie-na.html

Una Introducción al arte de navegar – Universidad de Alicante – 2010
https://rsef.es/images/Problemas/OEF2010/P1-OEF-2010.pdf

PRECALCULO - Demana - Waits - Foley - Kennedy – 2007
https://www.pieresko.net.ar/libros/matematica/Kennedy%20-%20PRECALCULO.pdf

Mecánica Vectorial para Ingenieros – Beer – Johnston - 2007
https://seguiremosestudiandoingenieriacivil.files.wordpress.com/2017/06/mecnica-vectorial-paraingenieros-8-edicion.pdf

Escuela de estudios generales - Área: ingeniería 2018 - UNMSM
https://viceacademico.unmsm.edu.pe/wp-content/uploads/2018/05/INGENIERIA.pdf

Anexo B – Termino de Consentimento livre e Esclarecido

O presente termo de consentimento livre e *esclarecido (TCLE) tem por objetivo esclarecer aos participantes da pesquisa intitulada:* ***Percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores em cursos de ciências e engenharia: Introdução à geometria vetorial***, sob responsabilidade da doutoranda **Maritza Luna Valenzuela**, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), a respeito dos procedimentos de pesquisa, conforme a resolução nº 196/1996 do Conselho Nacional de Saúde (CNS) que regulamenta as pesquisas envolvendo seres humanos.

Objetivos da pesquisa: Elaborar, aplicar e analisar um PEP que envolvendo vetores no espaço que permita aos alunos dos cursos de ciências e engenharia a (re)construção de saberes/conhecimentos relativos a esse conteúdo.

Participação: ao concordar em participar da pesquisa, me disponho para responder aos questionários referente à minha trajetória profissional e acadêmica, e também a respeitos dos meus conhecimentos que envolvem a temática da pesquisa.

Confidencialidade do Estudo: os registros da sua participação são mantidos em sigilo, e somente os pesquisadores responsáveis terão acesso às informações. Nas publicações resultantes deste estudo, a identificação dos participantes não será revelada e os resultados serão relatados de forma sumariada preservando o anonimato da pessoa.

Benefícios: os benefícios para os participantes é de ter uma significativa contribuição para sua formação acadêmica, além da contribuição para melhorar os processos de ensino e aprendizagem de geometria durante sua formação.

Participação voluntária: toda participação é voluntaria**,** não havendo penalidades para aqueles que decidam não participar desse estudo. Ninguém será penalizado se decidir não participar do estudo em qualquer época, podendo retirar-se da participação da pesquisa, sem correr riscos e sem prejuízo pessoal.

Certificação: todos que aceitarem e participarem do estudo, tendo frequência mínima de 75% nas sessões de formação inclusive nas atividades à distância, receberão o atestado dessa participação emitido pelo Programa de Estudos Pós-

Graduados em Educação matemática da PUC-SP, para os devidos fins e comprovação de sua participação no projeto.

Após conhecer e entender os objetivos da pesquisa, bem como estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências), **AUTORIZO**, por meio do presente termo a pesquisadora **Maritza Luna Valenzuela** realizar fotos, gravação de áudio e vídeo, coleta de produção escrita das sessões de ensino e das atividades realizadas, que se façam necessárias para colher o meu depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo libero a utilização das imagens (fotos), áudios, vídeos e/ ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências) em favor dos pesquisadores da pesquisa, acima especificados, obedecendo ao que está previsto na legislação que resguardam os direitos das crianças e dos adolescentes (estatuto da criança e do adolescente- ECA, lei nº 8.069/1990), dos direitos dos idosos (estatuto do idoso, lei nº 3298/1999, alterado pelo decreto nº 5.296/2004).

Esta pesquisa foi aprovada por um Comitê de Ética em Pesquisa – CEP da PUC/SP, que é um colegiado interdisciplinar e independente, com função pública, que deve existir nas instituições que realizam pesquisas envolvendo seres humanos no Brasil, criado para defender os interesses dos participantes da pesquisa em sua integridade e dignidade, contribuindo dessa forma, no desenvolvimento da pesquisa dentro de padrões éticos (Normas e Diretrizes Regulamentadoras da Pesquisa Envolvendo Seres Humanos - Res. CNS/MS nº 466/2012 complementada pela Res. CNS/MS nº 510/2016).

Em caso de qualquer dúvida, o CEP da PUC/SP se reúne à Rua Ministro de Godói, 969 – sala 63 C, no Bairro de Perdizes, CEP: 05.015-001, no Município de São Paulo. Podendo ser contatado pelo telefone: (11) 3670-8466, ou pelo e-mail: cometica@pucsp.br.

Esclarecemos que sua participação no estudo é voluntária e, portanto, você não é obrigado(a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pelo Pesquisador(a). Caso decida não participar do estudo, ou resolver a qualquer momento desistir do mesmo, não sofrerá nenhum dano. Os pesquisadores estarão a sua disposição para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

____

Assinatura do pesquisador

Eu aceito participar da pesquisa, que tem o objetivo aplicar um percurso de estudo e pesquisa. Entendi as coisas ruins e as coisas boas que podem acontecer. Entendi que posso dizer “sim” e participar, mas que, a qualquer momento, posso dizer “não” e desistir sem que nada me aconteça. Os pesquisadores tiraram minhas dúvidas e conversaram com os meus pais e/ou responsáveis. Li e concordo em participar como voluntário da pesquisa descrita acima. Estou ciente que meu pai e/ou responsável receberá uma via deste documento.

São Paulo, ____de _________ de 2021

____

Assinatura do participante

Contato com o Pesquisador Responsável:

Caso necessite de maiores informações sobre o presente estudo, favor ligar para o pesquisador:

Telefone: (11) 94548-7968