PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

MILENKO SCHIAVETTI BASILIO KOVACEVIC

GEOMETRIA ESFÉRICA: O ELO ENTRE MATEMÁTICA E ASTRONOMIA

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2020

MILENKO SCHIAVETTI BASILIO KOVACEVIC

GEOMETRIA ESFÉRICA: O ELO ENTRE MATEMÁTICA E ASTRONOMIA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE** em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Benedito Antônio da Silva.

PUC-SP
2020

E-mail: kovaceinvestimentos@aol.com

Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica para Teses e Dissertações com dados fornecidos pelo autor

k75g Schiavetti Basilio Kovacevic, Milenko
Geometria Esférica: O Elo entre Matemática e Astronomia / Milenko Schiavetti Basilio Kovacevic. -- São Paulo: [s.n.], 2020.
98p. ; cm.

Orientador: Benedito Antônio da Silva.
Dissertação (Mestrado em Educação:Matemática) -- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática, 2020.

1. Geometria Esférica. 2. Astronomia. I. da Silva, Benedito Antônio. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós Graduados em Educação:Matemática. III. Título.

CDD

MILENKO SCHIAVETTI BASILIO KOVACEVIC

GEOMETRIA ESFÉRICA: O ELO ENTRE MATEMÁTICA E ASTRONOMIA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE** EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

____

Dra. Ana Lúcia Manrique (Pelo orientador) – PUC-SP

____

Dra. Maria José Ferreira da Silva – PUC-SP

____

Dra. Sonia Pitta Coelho

Ao meu pai, que me ensinou os nomes das primeiras estrelas,

com as quais hoje ele habita

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – **CAPES** pelas bolsas cedidas – Número do Processo 88887.163129/2018-00 que foi de extrema importância para a realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

É com muita sinceridade que escrevo esse agradecimento a todos e a todas que direta ou indiretamente colaboraram para esta empreitada.

Em especial ao meu orientador Professor Dr. Benedito Antônio da Silva que desde os primeiros momentos sempre foi muito cordial, compreensivo, empático e paciente. Não tenho palavras para mensurar todo o sentimento de gratidão a ele.

Estendo os meus agradecimentos à Professora Dra. Maria José Ferreira da Silva pelo acolhimento, as suas contribuições à minha pesquisa foram inúmeras. O mesmo sentimento de gratidão, reservo às Professoras Dra. Sônia Pitta Coelho e Dra. Ana Lúcia Manrique, que gentilmente aceitaram fazer parte de minha banca, cuja contribuição fora valiosíssima e compreensiva.

Agradeço a todos os demais Professores do EDMAT, por todos os ensinamentos.

A todos os meus companheiros de pós-graduação, sejam eles mais distantes ou mais próximos, me acompanharam, me auxiliaram a trilhar o meu crescimento não só acadêmico, mas também como ser humano.

Aos que acreditaram em mim enquanto profissional da Educação e me estimularam a entrar no Mestrado, Cintia Acioli e Leandro W. Martins.

A minha mãe Marija Kovacevic, por seu apoio incondicional.

Ao meu filho Oliver, meu inseparável companheiro que assistia desenhos até a madrugada na mesma mesa que eu estudava.

Por fim, à minha esposa Gisele Schiavetti Basilio Kovacevic, que ficou do meu lado em momentos mais difíceis e mais felizes da minha vida. Sem ela esse trabalho nunca amanheceria.

Per Aspera ad Astra

KOVACEVIC, M. S. B. Geometria Esférica: O Elo entre Matemática e Astronomia. 2020. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2020. 103 páginas.

RESUMO

Esta pesquisa investigou os conhecimentos a serem mobilizados que são necessários para estudos de Astronomia Posicional nos anos finais da Educação Básica, empregando interdisciplinaridade de Geometria Esférica. Buscamos elucidar a razão de ser da Astronomia, partindo de uma concepção de educação que se entenda como um processo integral que reúne diversas áreas de conhecimento. Recorremos a um estudo bibliográfico, desenvolvido com base em produções textuais que contemplam a Astronomia Posicional em seu contexto histórico de origem e apresentamos um estudo histórico sobre o ensino da Geometria Esférica nas disciplinas Matemática e Astronomia nos currículos nacionais. O referencial teórico baseia-se na Teoria da Transposição Didática e na Teoria Antropológica do Didático. Sob esta ótica, diferentes objetos de ensino têm inter-relações hierárquicas que permitem identificar suas respectivas estruturas ecológicas na gênese de conceitos matemáticos apoiados na ideia de nicho, habitat, cadeia alimentar e ecossistema.

Palavras-chave: Geometria Esférica; Astronomia Posicional; Organização Matemática; Organização Didática.

ABSTRACT

This research investigated the knowledge to be mobilized that is necessary for Positional Astronomy studies in the final years of Basic Education, employing interdisciplinarity of Spherical Geometry. We sought to elucidate the raison to be of Astronomy, starting from a concept of education that is understood as an integral process that brings together various areas of knowledge. We engaged a bibliographic study, developed on the basis of textual productions that contemplate Positional Astronomy in its historical context of origin and we present a historical study on the teaching of Spherical Geometry in the disciplines of Mathematics and Astronomy in national curricula. The theoretical framework is based on the Theory of Didactic Transposition and on the Anthropological Theory of Didactics. Under this perspective, different teaching objects have hierarchical interrelations that allow identifying their respective ecological structures in the genesis of mathematical concepts supported by the idea of niche, habitat, food chain and ecosystem.

Keywords: Spherical Geometry; Positional Astronomy; Mathematical Organization; Didactic Organization.

AVANT-PROPOS

Cette recherche a examiné les connaissances à mobiliser qui sont nécessaires pour les études d'astronomie positionnelle dans les dernières années de l'enseignement de base, en utilisant l'interdisciplinarité de la géométrie sphérique. Nous avons cherché à élucider la raison d'être de l'astronomie, en partant d'un concept d'éducation qui est compris comme un processus intégral qui rassemble différents domaines de connaissance. Nous recourons à une étude bibliographique, développée à partir de productions textuelles qui contemplent l'Astronomie Positive dans son contexte historique d'origine et présentons une étude historique sur l'enseignement de la Géométrie Sphérique dans les disciplines des Mathématiques et de l'Astronomie dans les programmes nationaux. Le cadre théorique est basé sur la théorie de la transposition didactique et sur la théorie anthropologique de la didactique. Dans cette perspective, les différents objets d'enseignement ont des interrelations hiérarchiques qui permettent d'identifier leurs structures écologiques respectives dans la genèse des concepts mathématiques soutenus par l'idée de niche, d'habitat, de chaîne alimentaire et d'écosystème.

Mots clés : géométrie sphérique ; astronomie positionnelle ; organisation mathématique ; organisation didactique.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Exemplo de pseudoesfera. Fonte: Coutinho (2001, p. 41)......................... 71

Figura 2: Disco de Poicaré. Fonte: Coutinho (2001. p. 45) 72

Figura 3: Esfera. Fonte: Software Mathematica 73

Figura 4: Toro. Fonte: Software Mathematica 74

Figura 5: Toro duplo. Fonte: Software Mathematica 74

Figura 6: Triangulo esférico. Fonte: produção do autor.. 76

Figura 7: marcação dos ângulos de triângulo esférico. Fonte: Software Mathematica 76

Figura 8: Triângulos polares. Fonte: Produção do autor 77

Figura 9: Círculo máximo e círculo menor. Fonte: Produção do autor 79

Figura 10: Esfera celeste. Fonte: Segan; Pejovic, 2006... 81

Figura 11: Comprimento da sombra nas diferentes estações. Fonte: Produção do autor 83

Figura 12: Mapa de Fusos Horários. Fonte: Dayspedia 83

Figura 13: Elementos de triângulo esférico. Fonte: Produção do autor 84

Figura 14: Elementos de Triângulo de Posição. Fonte: Kepler; Saraiva (2017)........ 87

Figura 15: Dedução para δ e φ positivos (caso mais geral do hemisfério norte). Fonte: Kepler; Saraiva (2017).. 88

Figura 16: Dedução para δ e φ negativos (caso mais geral do hemisfério sul). Fonte: Kepler; Saraiva (2017).. 88

Figura 17: Um astro no instante do nascer ou do ocaso. Fonte: Kepler; Saraiva (2017) 89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Número de aulas semanais do curso secundário do Ginásio Nacional em 1901 44

Quadro 2 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1915 46

Quadro 3 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1925 47

Quadro 4 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1931 48

Quadro 5 - distribuição das aulas semanais das diferentes disciplinas, curso ginasial, segundo reforma de 1942 50

Quadro 6 - Currículo do Liceu Victor Hugo de Marselha 53

Quadro 7 - Grande curricular dos cursos de licenciatura em Matemática analisados 56

Quadro 8 - Esboço do ecossistema, com indicações das articulações existentes 83

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 PROBLEMÁTICA 18

2.1 Estudos referentes à astronomia posicional e às geometrias não-euclidianas 18

2.2 Delimitação do problema 23

2.3 Metodologia da pesquisa 26

2.4 Referencial teórico 28

2.5 Transposição Didática e a problemática ecológica 29

2.6 Teoria Antropológica do Didático 34

3 ESTUDOS PRELIMINARES 38

3.1 Astronomia 38

3.2 Astronomia e Geometria Esférica na história da educação brasileira 40

3.3 Ensino de astronomia e geometria na Legislação Brasileira Atual 58

3.4 Geometria Esférica e Astronomia em livros didáticos e paradidáticos 61

CAPÍTULO 4: CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA O ENSINO DE ASTRONOMIA POSICIONAL 65

4.1 Um breve histórico acerca das geometrias 65

4.1.1 Os Elementos 65

4.1.2 Geometria Hiperbólica 69

4.1.3 Geometria Elíptica 72

4.1.4 Geometria Esférica 75

4.2 Conteúdos para o ensino de Astronomia Posicional 80

4.2.1 Fórmulas de trigonometria esférica 84

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 92

REFERÊNCIAS 94

LEGISLAÇÃO CONSULTADA 97

1 INTRODUÇÃO

O meu interesse pela Astronomia vem de longa data. Durante as noites de verão, estreladas e quentes, quando meu pai me ensinou os nomes populares das estrelas que fazem parte do aglomerado Plêiades, ainda nem ingressando no ensino básico, eu já sabia que a Astronomia iria me acompanhar por toda a vida. Contudo, era preciso chegar até o ensino médio para descobrir que, por trás da Astronomia existia, para mim, um universo paralelo, oculto e, de beleza e elegância, entrelaçado intrinsicamente – o mundo da Matemática. Na escola, estudamos tópicos como conjuntos, funções e seus gráficos, equações de primeiro e segundo grau, as noções básicas de análise, Geometria Euclidiana elementar e rudimentos de trigonometria. Antes de começar a estudar Astronomia em meu país de origem, no segundo ano do ensino médio, eu tinha ideia que toda a matemática girava em torno desses assuntos, por ventura de forma mais complexa, não obstante, permanecendo dentro do mesmo arcabouço com o qual estava familiarizado. Foi quando eu descobri que a Astronomia *é* Matemática, em sua mais esplêndida forma.

A Astronomia é considerada uma das mais antigas ciências por ser a pioneira na utilização do método experimental em observação de fenômenos celestes. A partir de observações das mudanças da aparência da Lua, de minguante à lua cheia, do Sol e de outros corpos celestiais surgiram os primeiros calendários. Quando os astrônomos do antigo Egito e Babilônia começaram a medir as distancias angulares entre as estrelas, a trigonometria surgiu (TARDI, 1948). Com o passar dos séculos, os instrumentos de medição e observação avançaram e hoje nos permitem observar até os pontos mais distantes. Mesmo com todo esse aparato tecnológico atual, a geometria esférica tem um papel fundamental não apenas na Astronomia que lhe deu origem, mas também em outras áreas avançadas do conhecimento humano.

Na escola, a Matemática geralmente é ensinada de forma desvinculada de outras disciplinas, situação que não promove pontos de ligação entre matemática e geografia, por exemplo. Os alunos, quando estudam o globo terrestre, trabalham com pontos, linhas e ângulos sobre a esfera e com a projeção cartográfica de Mercator. A geometria com a qual o discente tem contato formal é a geometria plana e espacial, os conhecimentos geométricos abordados em sala de aula se restringem às relações lógicas de uma geometria dedutiva que tem sua origem na Grécia antiga. Tais saberes fundamentaram soluções e se mostraram suficientes para o entendimento dos problemas das Ciências da Natureza até o século XVII. Contudo, observando a superfície terrestre com sua forma elipsoidal, a esfera celeste e tantos outros objetos encontrados na natureza, é possível observar algumas dificuldades para construir alguns conceitos de Geometria sustentada nos postulados da Geometria Euclidiana, pois o estudo da Geometria Esférica não está explicito no currículo de Matemática do Ensino Básico. Astronomia, embora apresentada como competência específica no BNCC (2018) e no Currículo Paulista (2020), não é inclusa como disciplina de ensino na grade curricular. Por essa razão, levanta-se a seguinte questão: Qual é o modelo geométrico apropriado para representação da superfície do planeta Terra e da esfera celeste? É uma projeção sobre um plano ou uma folha retangular, ou em uma esfera? Nesse caso, a Geometria Esférica é fundamental para se pensar uma concepção do Universo e da Terra como sua parte e buscar elucidar tais questões. Astronomia posicional, que estuda posição, distâncias e movimento dos astros e outros objetos celestes, bem como sistemas de tempo e sistemas de coordenadas, se alicerça na geometria esférica para análise *a posteriori* das observações astronômicas.

Um levantamento preliminar permitiu arrolar uma quantidade pouco significativa de estudos acerca do ensino de geometrias não euclidianas, levando-nos à seguinte indagação: Por que a geometria esférica, que já era conhecida dos gregos desde Anaximandro que viveu no século VI a.C. é tão pouco estudada? A partir dessa pergunta, considerando que dentre Astronomia existe singularidade entre Geometria Esférica e Astronomia Posicional, originou-se o tema desta pesquisa e formulou-se a seguinte questão: **Quais são os conhecimentos essenciais que tornam possível o ensino de Astronomia Posicional no Ensino Médio?** Para respondê-la, investigamos se existia nos currículos nacionais o ensino de Astronomia e de Geometria Esférica, como disciplinas especificas e dentro das disciplinas correlativas, e verificamos quais são os conhecimentos necessários para que tal ensino seja realizado no atual Ensino Médio. Trata-se, portanto, de uma pesquisa bibliográfica e documental de caráter qualitativo, que está estruturada em três capítulos.

Apresentamos no primeiro capítulo estudos preliminares importantes para a conjuntura de nossa problemática. Apresentamos estudos a respeito das geometrias não-euclidianas, a questão e o objetivo de pesquisa, bem como a metodologia e os fundamentos teóricos da pesquisa.

No segundo capítulo abrangemos nossas considerações a respeito de Astronomia, e levantamos dados sobre o ensino de Astronomia e de Geometria Esférica na história da Educação Nacional. Ainda nesse capítulo apresentamos a análise de alguns livros didáticos e paradidáticos relevantes à Astronomia e à Geometria Esférica.

No terceiro capítulo apresentamos o estudo do objeto matemático e abordamos elementos para o ensino de Astronomia Posicional.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais acerca da pesquisa e analisamos se os objetivos foram alcançados.

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos estudos a respeito das geometrias não-euclidianas, a questão e o objetivo de pesquisa, bem como a metodologia e os fundamentos teóricos da pesquisa.

2.1 Estudos referentes à astronomia posicional e às geometrias não-euclidianas

Nesta parte do trabalho fizemos um levantamento de pesquisas que tratam de Astronomia Posicional e de Geometrias Não-Euclidianas. Durante a pesquisa por trabalhos relacionados a nosso objeto, recorremos a ampliação de sua abrangência buscando por temas que, além das palavras-chave “Geometria Esférica” e “Astronomia Posicional”, também incluíssem os seguintes descritores: “Astrometria”, “Astronomia de Posição” e “Trigonometria Esférica”. Os descritores “Astronomia Posicional”, “Astrometria” e “Astronomia de Posição” retornaram 42 resultados, no entanto, todos relativos à área de conhecimento de Astronomia e Geociências, enquanto os descritores “Geometria Esférica” e “Trigonometria Esférica” retornaram 18 resultados na área de Educação Matemática, dos quais apresentaremos as dissertações de Martos (2002), Pataki (2003), Prestes (2006), Reis (2006), Alves (2008), Andrade (2011) e Brum (2013). Também apresentaremos artigos publicados em periódicos, de Lénárt (1996), Almouloud (2004), Kaleff (2004), Leite (2004), Chassot (2011) e Matos e Silva (2011).

Martos (2002), usando como referencial teórico as ideias de Vygotsky acerca de “linguagem”, ou seja, os instrumentos linguísticos do pensamento e da experiência sociocultural da criança, desenvolveu um trabalho em grupo com alunos do Ensino Fundamental, acreditando que as atividades que utilizavam a manipulação de materiais concretos instituem um dos mecanismos que possibilitam melhor entendimento de conceitos relativos à geometria esférica. Reis (2006) sugere a utilização dos *“Softwares de Geometria Dinâmica” – Cabri Géomètre, Geometriks, Scetchpad e Cindarella*, como recursos a serem destinados ao ensino e a aprendizagem de geometria, levando em conta a sua interatividade além de permitirem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades.

O trabalho de Pataki (2003) tem por objetivo levar a professores de Matemática uma proposta interdisciplinar, que relaciona Geometria Esférica e Geografia. O trabalho proporciona aos professores envolvidos reflexões e questionamentos a respeito de alguns aspectos do ensino de Geometria Esférica:

> Trata-se de um tema que visa a interação entre alguns campos do conhecimento, tais como Geometria, Trigonometria, Geografia e História, contextualizando, proporcionando reflexões e questionamentos aos professores e possibilitando a cumplicidade entre o aprender esses conhecimentos e os diferentes olhares que teremos do nosso dia-a-dia (PATAKI 2003, p. 17).

De acordo com a autora na Educação Matemática a interdisciplinaridade surge como um critério central de escolha entre vários conceitos matemáticos e suas diferentes formas de pensamento com diversas áreas de conhecimento, que permitem a contextualização das respetivas ações pedagógicas.

A Geometria ocupa ponto central na evolução da própria Matemática. Por meio dela foram desenvolvidos conceitos como abstração, generalização, dedução e prova. Adquirindo intuição espacial e conhecimento de vários conceitos geométricos, os alunos podem chegar a uma compreensão mais profunda da natureza. Todavia, na visão de Almouloud (2004), apesar da Geometria ser um ramo importante da Matemática, seu ensino é caracterizado pela falta de correlação com outras áreas de conhecimento, o que impede uma visão mais ampla por parte do estudante, pois:

> A grande parte dos professores que hoje estão em atividade tiveram uma formação de base muito precária em Geometria. Além disso, os cursos de formação inicial de professores - tanto os cursos de magistério como os de licenciatura - continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria, e, também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido ainda, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria. (ALMOULOUD, 2004, p. 1).

É importante destacar que nas duas últimas décadas foram criadas, no âmbito escolar, oportunidades para a inclusão de conteúdos advindos das geometrias não euclidianas, aos conhecimentos geométricos escolares considerados como adequados à formação de alunos para o século XXI. Como destaca Kaleff (2004),

> Frente a estas novas perspectivas educacionais, no âmbito de vários projetos realizados [...] e destinados à melhoria do ensino e da aprendizagem da Geometria Escolar, buscaram-se desenvolver ações e materiais pedagógicos de forma a permitir a emergência de um acervo de instrumentos facilmente manipuláveis e de baixo custo, os

> quais objetivam dar ênfase ao desenvolvimento de habilidades introdutórias à aprendizagem de conceitos euclidianos e não-euclidianos (KALEFF 2004, p. 2).

A autora se apoia no modelo de Van Heile para o desenvolvimento do pensamento em Geometria que considera visualização, a análise e a organização informal das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico euclidiano como passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito que, por sua vez, precedem o nível formal que possibilita a introdução aos conhecimentos geométricos não-euclidianos. Contudo, a autora aponta os possíveis obstáculos cognitivos sobre as representações matemáticas presentes em situações-problema introdutórias às geometrias não-euclidianas:

> Foi constatado que, até mesmo no âmbito da formação de professores de Matemática, apresenta-se uma ampla gama de procedimentos cognitivos, os quais podem vir a problematizar a implementação de novos conhecimentos geométricos na escola [...] relacionados a representações semióticas, principalmente àquelas expressadas na forma de expressões euclidianas, tanto apresentadas na linguagem natural (por meio do emprego de expressões homônimas às euclidianas) como em desenhos, gráficos e diagramas (com características euclidianas), os quais se apresentam intervenientes em processos de resolução de problemas (KALEFF, 2004, p. 2).

Desta forma, o emprego de qualificações e de representações gráficas, comumente utilizadas para construir e nomear figuras euclidianas, aparentemente influencia negativamente a construção de novos conhecimentos de geometrias não euclidianas.

O estudo de Leite (2004), que foi realizada com um grupo de 17 professores de Ensino Fundamental II que lecionam na rede pública há mais de 10 anos, constatou que 76% dos pesquisados afirmam:

> [...] que o Sol é plano assim como a Terra, e que mesmo conhecendo o modelo teórico que diz que o nosso planeta é esférico, eles não conseguem explicar por que isso é possível. Eles não concebiam um universo tridimensional e não sabiam como se posicionar nele. Como consequência eles têm dificuldades de explicar a seus alunos fenômenos como as estações do ano, as fases da Lua e os eclipses (LEITE 2004 p. A15).

De acordo com a autora, ficou evidente que a falta de conhecimento de Geometria Esférica implica também na baixa qualidade do ensino de Astronomia, já que para localizar um objeto celeste precisamos optar por um sistema de coordenadas esféricas.

Bongiovani (2010) fez um relato histórico sobre tentativas no passado de demonstrar o quinto postulado de Euclides por meio de demonstrações indiretas. Essas demonstrações, em vez de conduzir a uma contradição, formaram a base de geometrias não-euclidianas:

> As Geometrias não Euclidianas têm uma história repleta de hesitações, dúvidas e contradições que só foram eliminadas após um longo trabalho de reflexão e apuramento. É uma história de 20 séculos que rompe com a crença de que a geometria euclidiana é única. Ela se confunde com a história do quinto postulado de Euclides. O fracasso de todas as tentativas de provar esse postulado levou lentamente a uma nova concepção da Matemática em que todos os elementos de uma teoria devem ser cuidadosamente explicitados (BONGIOVANI, 2010, p.37).

Ao apresentar uma proposta para o estudo de Geometria Esférica para o ensino médio, Lénárt (1996) pondera que esta geometria auxilia na compreensão de conceitos euclidianos, pois o aluno pode ser levado a fazer comparações ao expandir as definições euclidianas para a Geometria da Esfera, bem como a compreender como um sistema de axiomas pode ser modelado em vários campos de estudo. O autor concebeu a “Esfera de Lénárt” – um material didático em formato de esfera, projetada para visualizar triângulos e outros polígonos esféricos com seus respeitivos ângulos e arestas.

Alves (2008) explora o estudo da posição relativa de duas ou mais esferas e as relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas. Este estudo constitui-se na fundamentação matemática necessária para o entendimento de alguns sistemas modernos de navegação por satélite, em especial do Sistema de Posicionamento Global – GPS. Além do mais, apresentam-se a utilização do globo terrestre e questões que envolvem, por exemplo, o cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, ou ainda, a confecção de mapas por meio de diversas projeções.

Chassot (2011) afirma que a Geometria Esférica, por se tratar de um assunto pouco explorado entre professores do Ensino Médio, é considerada tema de complexidade bastante alta. Todavia, a história da Educação Matemática mostra que muitos conteúdos como números complexos, polinômios e geometria analítica, já foram considerados de compreensão difícil, e hoje constam sem qualquer questionamento nos currículos de Matemática.

Camargo (2012), em sua dissertação, cita que as Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Estado do Paraná propõem o ensino das geometrias não-euclidianas no Ensino Fundamental e Médio. Para o Ensino Médio, são destacadas as geometrias Hiperbólica, Elíptica, Projetiva e Fractal. Com essa proposta, surgiram questionamentos acerca de quais estratégias de ensino quais podem ser desenvolvidas para se buscar uma melhor compreensão dos seus conceitos básicos.

Prestes (2006) também investiga a interdisciplinaridade da Geometria Esférica e a Geografia, a favor do estudo da geografia do globo terrestre e em particular o estudo de mapas.

Brum (2013) elaborou uma sequência didática para alunos do Ensino Médio, utilizando o modelo globo terrestre e da pseudoesfera para mostrar a existência de diversos modelos geométricos e identificar conceitos de Geometria Euclidiana, Esférica e Hiperbólica.

A relação entre Geometria Esférica e Geografia ainda está presente na pesquisa de Andrade (2011). A pesquisadora estruturou uma sequência didática com base nas atividades de alunos do Ensino Médio, relacionadas às situações quando os conhecimentos da Geometria Euclidiana não são suficientes para resolução de problema em questão. Ademais, as referidas situações favorecem aprendizagem da Geometria Esférica e mostram que é possível coadunar conteúdos dessa geometria com atividades da Geografia, como, por exemplo, para calcular a menor distância entre dois pontos no globo terrestre e identificar analogia entre reta no plano e circunferência na esfera.

Já Matos e Silva (2011), discutem as reformulações da Matemática que afetam, interferem e modificam propostas curriculares para o ensino de Geometria no Brasil e em Portugal. De acordo com autores, as mudanças nos currículos de Geometria ocorridas desde o início da Matemática Moderna[1] são identificadas pelos pesquisadores como um “problema que atravessa os dois países”, de tal forma que estes não sigam de maneira linear as recomendações internacionais, antes procedem

[1]De acordo com Matos e Silva (2011), o Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional de reformulação do ensino de matemática escolar que surgiu na década de 1960. As mudanças propostas pelo Movimento defendiam a unificação dos diferentes campos da matemática, fundamentadas no rigor da teoria dos conjuntos e da álgebra, para o ensino e a aprendizagem de Matemática, aproximando o ensino realizado na educação básica àquele desenvolvido na Universidade.

de forma diversificada, com maior ou menor sucesso, adaptando-se às contingências de cada sistema de ensino.

A inquietude com ensino de geometrias não-euclidianas no país, incentivou estudos sobre diferentes razões da pertinência dessas geometrias na escola, levando os pesquisadores a apresentar ferramentas que pudessem desvendar o mito de complexidade a respeito de geometria esférica. Para mais, as atividades na sala de aula, como sugerem Andrade (2011) e Brum (2013), podem instigar o ensino de geometria esférica, quando os conhecimentos de geometria plana não são satisfatórios.

Uma vez feito levantamento bibliográfico, no tópico a seguir delimitaremos o problema da nossa pesquisa.

2.2 Delimitação do problema

A revisão bibliográfica aponta no interesse de pesquisadores em geometria esférica, em maior parte na concatenação dessa geometria com estudos relacionados a geografia. Decerto que a curvatura da Terra precisa ser considerada para qualquer cálculo feito com rigor relacionado a distância entre dois pontos na Terra, como, por exemplo, para funcionamento preciso do Sistema de Posicionamento Global feito por satélites (GPS), como alegou Alves (2008).

Concordamos com Leite (2004) quando relata que a tendência de observar o mundo natural em termos de senso comum até na atualidade nos leva a acreditar que o Sol realmente nasce e se põe, que as estrelas giram em torno da Terra, que a Terra é plana e o centro do universo. Todas essas crenças são muito resistentes, mas nenhuma é tanto como a de que o universo existe como extensão do ambiente terrestre, de forma que as leis da geometria euclidiana sejam validas em qualquer região exatamente como na Terra.

Contudo, não precisamos inferir a geometria do universo para demonstrar as limitações da geometria euclidiana. A essência dessa explanação pode ser ilustrada pela situação seguinte. Imaginamos que um cartografo equipado com os melhores instrumentos percorre 10 km sucessivamente em três direções: sul, oeste e norte. A questão que surge é, se o cartografo, em seguida, percorrer 10 km para leste, ele terminará o passeio exatamente no ponto de partida, fechando um quadrado de 10 km de lado? Se a Terra fosse plana, a resposta seria sim, e o cartografo percorreria um quadrado perfeito. Todavia a Terra, em grosso modo, é uma esfera, e a sua geometria não é euclidiana. Se a caminhada do cartografo começou no hemisfério norte, caminhou primeiro no sentido do equador, ao longo de um meridiano, em seguida para oeste, ao longo de um paralelo, depois para norte, ao longo de outro meridiano, ficando no fim desse terceiro trecho mais próximo do ponto de partida, porque os meridianos convergem para o polo. Desta maneira, seu último trecho seria de aproximadamente[2] 9,80 km. Para um ponto de partida no hemisfério sul o último trecho seria superior a 10 km por causa da divergência dos meridianos do Polo Sul ao equador.

Esse exemplo mostra, de forma implícita, que a prática da navegação exige conhecimentos de geometrias não euclidianas, mais especificamente, de geometria esférica. No entanto, ainda no período da navegação primitiva, que se baseava na observação do ambiente, durante as primeiras saídas dos marinheiros para alto mar ou em caravanas de camelos pelo deserto de Saara, eram o Sol ao meio dia e a Estrela do Norte, que determinavam o percurso desses viajantes. Para medir a distância entre o Sol ou outro astro e o horizonte, ou entre dois astros, não podemos relativizar o céu como um plano, mas sim como uma esfera. Por essa razão, de acordo com Tardi (1948), ainda os antigos gregos dividiam a geometria em “geometria do quintal” que servia para medições de alcance visível a olho nu e a “geometria do céu”, para distâncias além de horizonte[3].

O método de navegação em que o navegante determina sua posição ou obtém outras informações uteis para determinação do seu deslocamento, por meio de observação dos astros, é o que chamamos a *Navegação Astronômica.* Uma das mais antigas instruções preservadas que ponderava a posição do Sol e da Estrela do Norte para navegação no Mediterrâneo, é a obra Périplo (Navegação Circular) de Pseudo-Cílax[4], da segunda metade do século IV a.C. Contudo, *O Almagesto* do astrônomo e

---

[2] Esse cálculo é aproximado para as latitudes de 25º N ou 25º S. Em situações especificas, quando o ponto de partida é o Polo Norte ou o Polo Sul, o passeio terminará a 10 km da distância, porque o ponto de partida seria alcançado já no terceiro passo.

[3] Para uma pessoa de 1,80 metros localizada na extremidade do mar, o horizonte é de aproximadamente 4789 metros.

[4] O *Périplo de Pseudo-Cílax* é uma obra em grego antigo, datada no final do século IV a.C. ou princípios do século III a.C., que descreve um périplo com instruções de navegação marítima ao redor do mar Mediterrâneo, incluindo o mar Negro e as costas da África, para além das Colunas de Hércules. na

geógrafo alexandrino Ptolomeu, que no século II compilou um extenso catálogo estelar e uma lista de aproximadamente 8000 lugares com coordenadas geográficas é que serviu de base para a Navegação Astronômica.

Com a invenção da bússola magnética e do astrolábio no século XIII, a navegação se tornou dependente de conhecimentos de Geometria Esférica e de Astronomia. O astrolábio como precursor do sextante, servia para medição da altura de corpos celestes, ou seja, para determinar a latitude do observador. Para tal, era necessário conhecer a declinação em todos os momentos (o arco do meridiano do astro compreendido entre o plano do equador celeste e o astro), para que as tabelas[5] com esses dados fossem calculadas previamente para o período em que a viagem estava prevista. O cálculo é feito por fórmulas de trigonometria esférica e a ciência que engloba todos os cálculos relativos à movimentação de astros é a Astronomia Posicional. Embora na atualidade as embarcações e aeronaves se apoiam no sistema GPS para navegação, os mesmos obrigatoriamente precisam portar um sextante, um cronômetro (relógio de alta precisão), uma bússola e um anuário náutico com efemérides, para se precaver de uma eventual situação de pane elétrica a bordo.

A relevância da Geometria Esférica para navegação foi abordada de forma sutil nas pesquisas de Pataki (2001), Andrade (2011) e Brum (2013). Contudo, nenhuma das pesquisas explorou a sua origem: a Astronomia. Na Astronomia Posicional, a Geometria Esférica é uma ferramenta, uma engrenagem que a faz funcionar e para a navegação é a Astronomia Posicional que se torna a ferramenta. Entendemos que a pertinência de nossa pesquisa para a área de Educação Matemática amplifica as discussões a respeito do ensino e aprendizagem da Geometria Esférica alicerçando-se na sua transdisciplinaridade. Assim sendo, formulamos à seguinte questão de pesquisa: **Quais são os conhecimentos**

---

antiga navegação dos fenícios, gregos e romanos um périplo era documento manuscrito que registrava, em uma sequência, os portos e os pontos geográficos costeiros, com as distâncias aproximadas entre eles (SEVARLIC, 1972).

[5] A navegação astronômica é baseada em métodos pelos quais a posição de uma nave é determinada pela observação de corpos celestes (Sol, Lua, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno e cerca de cinquenta estrelas mais brilhantes). Os dados básicos para o cálculo da posição do observador são a altura do corpo celeste acima do horizonte - coordenadas do horizonte, que é angular e determinado por um sextante. Outra informação importante para o cálculo da posição do observador é a posição de um corpo celeste no céu, calculado antecipadamente para diferentes posições e idades, publicado na forma de tabelas - efemérides. Todos os observadores que medem a mesma altura do mesmo corpo celeste ao mesmo tempo estão no mesmo paralelo da Terra. As primeiras tabelas de declinação para navegação foram as *Tabulae Alfonsianae* de 1248 (SEVARLIC, 1972).

essenciais que tornam possível o ensino de Astronomia Posicional no Ensino Médio?

Desta maneira, o objetivo geral deste trabalho é investigar a razão de ser da Astronomia e implicitamente da Geometria Esférica no Ensino Médio, ou seja, justificar sua existência no currículo nacional. Para a compreensão da razão de ser da Astronomia, é preciso partir de uma concepção de educação que se entenda como um processo integral que reúne diversas áreas de conhecimento, isto é, de pensar na educação como em um ecossistema.

2.3 Metodologia da pesquisa

No concernente à metodologia adotada, a presente pesquisa possui um recorte qualitativo, uma vez que o interesse é compreender questões que examinam a realidade tratada. Nessa perspectiva, os dados foram levantados a partir de técnicas de pesquisa documental e bibliográfica, haja vista que explora na literatura o aprofundamento do assunto por meio de fontes específicas. Entendemos que a pesquisa bibliográfica na perspectiva das autoras Marconi e Lakatos (2011, p. 43-44), representa:

> [...] o levantamento de toda a bibliografia já publicada em forma de livros, revistas, publicações avulsas e imprensa escrita. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto com tudo aquilo que foi escrito sobre determinado assunto.

Tendo como fonte livros didáticos e paradidáticos, enquadra-se aqui Gil (2002, p. 44), que define como livros de leitura corrente, na medida em que abrange também “as obras de divulgação, isto é, as que objetivam proporcionar conhecimentos científicos ou técnicos”.

Para análise da fonte bibliográfica, nos baseamos na análise do conteúdo que, segundo Vergara, (2005, p. 15), “[...] é considerada uma técnica para o tratamento de dados que visa identificar o que está sendo dito a respeito de determinado tema”. Sobre essa técnica Bardin (1977, p.44) conceitua:

> Um conjunto de instrumentos metodológicos que se aplicam a conteúdos e continentes amplamente diversificados com um fator comum – a hermenêutica controlada baseada na dedução, é o que cauciona o pesquisador o condão de extrair dos materiais investigados as estruturas traduzíveis em modelos de rigor científico. Esse instrumento polimorfo e polifuncional, além de suas funções

> heurísticas e verificativas tem a função interpretativa entre as intuições ou hipóteses de partida e as compreensões definitivas.

Bardin (1977) também assinala que se suprimirmos da análise de conteúdo a sua função de inferência e se limitarmos as suas possibilidades técnicas apenas à uma das suas técnicas – a análise categorial ou temática, podemos, efetivamente, identificá-la à análise documental. De fato, Bardin define a análise documental como

> [...] Uma operação ou um conjunto de operações visando representar o conteúdo de um documento sob uma forma diferente da original, a fim de facilitar num estado ulterior, a sua consulta e referenciação (BARDIN, 1977, p.45).

O tratamento da informação contida nos documentos acumulados, a análise documental tem por objetivo dar forma conveniente a representar de outro modo a informação, por intermédio de processos de transformação. Nesse sentido, a escolha de narrativa histórica nesse capítulo para analisar a documentação sobre o nosso objeto de pesquisa uma vez que permite a representação de documento ao observador de uma configuração variável, de tal forma que este obtenha o máximo de informação com o máximo de pertinência.

Em sentido desenvolvido, a análise documental permite passar de um documento primário, para um documento secundário; este seria a representação do primeiro documento em forma de resumos, isto é, em "representação condensada da informação" (BARDIN, 1977, p.46). Ademais, o objetivo de análise de conteúdo "é a manipulação de mensagens [...] para evidenciar os indicadores que permitam inferir sobre uma outra realidade que não é da mensagem" (BARDAIN, 1977, p.46). Desta forma, a finalidade da análise de conteúdo é produzir inferência, trabalhando com vestígios e índices postos em evidência por procedimentos quais nos permitem entender a realidade baseando-nos em critérios estabelecidos com referência em estudos da área.

Seguindo essas orientações, a nossa escolha de corpus documental para análise, é coerente com critérios postulados pela autora. Destarte, apresentaremos a base teórica para nossa pesquisa.

2.4 Referencial teórico

Nesse tópico, apresentamos as teorias que darão alicerce para nossa pesquisa: Transposição Didática (1994) e a Teoria Antropológica de Didático (1996) de Yves Chevallard.

Destacamos aqui uma reflexão de Chevallard (2001) sobre o ensino da matemática na França:

> O programa de matemática de 10 de julho de 1925 para as classes de matemática comporta ainda quatro domínios que ressaem quase inteiramente nas matemáticas mistas: geometria descritiva e geometria métrica, cinemática, estática, cosmografia. A estática desaparecerá no começo dos anos 1960, a cinemática no meio dos anos 1980. A astronomia, presente por um longo tempo nos últimos anos do Ensino Médio "Literário" (voltado à literatura), desaparecerá por sua vez com os programas de 1994. Os autores (anônimos) de uma obra de preparação para o exame final do ensino médio, publicado no começo dos anos 1940, indicavam: O programa relativo à Geometria Descritiva e à Geometria Métrica do Curso de Matemática Elementar é muito restrito e se presta pouco à resolução de problemas. Na verdade, depois de 10 anos, o número de problemas dado sobre este tema nos Exames é quase nulo (CHEVALLARD, 2001, p.8).

Podemos refletir da discussão de Chevallard que na França em razão da forte influencia de enciclopedismo no ensino em uma relação de *copiar/colar* entre professor e aluno, as "matemáticas mistas" se dissolveram ao longo do tempo. Ademais, Chevallard explica (2001, p.1-2):

> Então não podemos esperar, sem se mostrar cientificamente ingênuo e politicamente irresponsável, que a problemática, tão estranha às nossas velhas sociedades fundadas sobre a docilidade da massa face à autoridade de poucos, da desconstrução/reconstrução das obras substitui silenciosamente uma tradição secular na qual o aluno e o estudante esperam sem piscar, segundo a imemorável problemática da cópia de obras e do mimetismo cultural, que o professor ensina – ou melhor, mostra – o que deve ser feito, como e por que fazer assim. De maneira geral, a introdução e implementação no ensino secundário da matemática de um número de organizações didáticas concebíveis – e, de tal ou tal ponto de vista, desejáveis – se esbarram nas restrições que distorcem a estrutura suprimindo as funções, desde que deixem de ser apenas um world on paper, um mundo sobre o papel.

Decerto que o autor se refere no peso de ensino secular, com papel de professor – detentor de saber e aluno como um receptor *ad-hoc*, na qualidade de ensino de matemática atual nas escolas francesas.

O ensino de matemática e suas disciplinas correlatas – citadas por Chevallard como “matemáticas mistas”, e a sua inserção no currículo nacional, é o assunto que abordamos no capítulo II. Como o nosso interesse nessa pesquisa é acerca de ensino de Astronomia, para qualquer cálculo relativo as observações celestes, Geometria Esférica é indispensável. Partindo da hipótese que essa disciplina merece seu espaço no ambiente de Ensino Médio nacional, nos trechos a seguir exploramos essa hipótese, alicerçados nas teorias de Yves Chevallard.

2.5 Transposição Didática e a problemática ecológica

Entre o conhecimento acadêmico e o conhecimento a ser ensinado, existe uma transição para que esse se torne um objeto de aprendizagem, acessível aos alunos. As transformações sucedidas nessa transição, chamadas de “transposição didática”, serão realizadas em duas etapas: a primeira é aquela que fará o conhecimento escolar passar ao conhecimento a ser ensinado, que leva à definição dos programas de ensino de cada disciplina escolar, e a segunda, a transposição interna, que faz esse conhecimento passar a ser ensinado, ao conhecimento realmente ensinado. Essa segunda transposição é aquela que cada professor faz em suas aulas de acordo com seus alunos e as limitações que lhe são impostas.

Os fenômenos da transposição didática segundo Chevallard (1994), como ferramenta de trabalho do investigador, residem em seu abrangente poder de elucidação por uma razão especifica – em transparência da problematização que permeia nossa relação cultural com o mundo:

> O questionamento em torno do tema da transposição didática, precisamente, teve a virtude de abrir um novo caminho de problematização, de abrir um caminho de investigação a partir de um ponto de partida que não tinha sido reconhecido como tal, e que tudo nos levou, culturalmente, a ignorar. Surpresa divina, proporcionou ao pesquisador novas questões, fora de sintonia com a cultura da instituição. Só isso, creio eu, seria suficiente para explicar o entusiasmo gerado, bem como a resistência que surgiu desde o início CHEVALLARD, 1994, p.2, tradução nossa).

Ademais, no processo de ensino e de aprendizagem existe transformação de diferentes saberes a um objeto de ensino, que passa por modificações entre a sua origem e o seu destino:

> [...] Da matemática dos matemáticos à matemática ensinada - na escola primária e em outros lugares, até a própria Universidade - há

> uma "distância". [...] É aqui que entra em jogo a ilusão da transparência, que encerra a questão mesmo antes de ter sido colocada. Para cada um de nós, culturalmente, esta distância é evidente. Não teria outro significado do que este, que por sua vez se dá por não-objectável - culturalmente falando. Uma criança de dez anos, argumentar-se-á, não é um matemático no poder da sua arte; a matemática que um afirma ensinar não pode ser aquela que vive nas mãos do outro (CHEVALLARD, 1994, p.3, tradução nossa).

A teoria da transposição didática questiona o que parece óbvio, sobre o conhecimento presente nos sistemas didáticos (e por isso quebra uma certa ilusão de transparência), sobre o fato de objetos idênticos poderem viver com nomes diferentes, ou mais genericamente sobre a inclinação para ver apenas o que as instituições apontam como sendo de interesse. Olhar de uma certa distância é a única maneira de ver com precisão os efeitos das instituições. O conhecimento matemático é mais frequentemente produzido fora da escola e está sujeito a uma série de adaptações antes de ser aceito para o ensino: os objetos matemáticos criados pelos matemáticos não são os que são ensinados na escola. O objetivo da teoria da transposição didática é precisamente descrever e explicar os fenômenos de transformação do conhecimento desde sua produção até seu ensino (CHEVALLARD, 1994).

Ademais, Chevallard (1982) define o *sistema didático* ou mais amplamente *o sistema de ensino* como um sistema aberto, cuja sobrevivência pressupõe a sua compatibilidade com o ambiente no qual está inserido de acordo com os requisitos que acompanham e justificam o seu projeto social. Contudo, existe a disparidade entre o sistema didático e a prática de ensino dos professores:

> Mas há aqui um paradoxo: a sua resposta consiste precisamente, em parte, em não ouvir a pergunta. A ficção de conformidade instala-se e persiste porque o conhecimento a ensinar (e o conhecimento académico de que deriva pela designação) é rapidamente esquecido, durante o processo de transposição, como ponto de partida, objeto de referência, fonte de normatividade e fundamento de legitimidade. Geralmente permanece fora do campo de consciência do professor como tal: a consciência didática está fechada, porque o sistema didático está aberto (CHEVALLARD, 1982, p.4).

Em sentido restrito, a transposição didática refere-se, portanto, à transição do conhecimento acadêmico para o conhecimento ensinado. No entanto, é o confronto destes dois termos, a distância que os separa, para além do que os une e exige que sejam confrontados, que nos dá a melhor compreensão da especificidade do tratamento didático do conhecimento. É assim que a teoria da transposição didática permite a distinção entre conhecimento acadêmico produzido, por exemplo, por matemáticos, conhecimento a ser ensinado definido pelo sistema educacional, conhecimento ensinado pelo professor e, finalmente, conhecimento aprendido pelos alunos. Este trabalho de transposição é uma construção social feita por muitas pessoas diferentes dentro de várias instituições: autoridades políticas, matemáticos, professores e suas associações definem as questões do ensino e escolhem o que deve ser ensinado, bem como sob que forma. Este nível de organização institucional é o que Chevallard chama de *noosfera*, estabelece os limites, redefine e reorganiza o conhecimento em contextos social, histórica ou culturalmente determinados, que tornam possíveis ou não certas escolhas:

> Se, em certos momentos históricos, o currículo "se move"; se, regularmente, ele absorve fluxos de conhecimento de fora (e cuja integração bem sucedida é frequentemente acompanhada pela criação endógena de objetos de conhecimento "secundários" e inter-relações específicas que constituem novas associações), é porque entre o conhecimento ensinado e o conhecimento "secular" a que se refere, a distância deve ser bastante curta. Em outras palavras, é apropriado que o conhecimento ensinado e o conhecimento que serve, de certa forma, como garantia epistemológica aos olhos da sociedade, sejam suficientemente semelhantes [...] O principal fato é que o conhecimento determinado não vive apenas sob as três espécies identificadas - aquelas de conhecimento aprendido, conhecimento a ser ensinado e conhecimento ensinado. Ou, dito de outra forma: ele não vive apenas nas instituições particulares que são a comunidade acadêmica, a noosfera (da Escola) e a Escola. Ele vive num conjunto de instituições ao mesmo tempo. Com poucas exceções, há uma multilocalização institucional do conhecimento. (CHEVALLARD, 1994, p.7, 21, tradução nossa).

De acordo com o pensamento do autor, o objeto matemático Geometria Esférica existe em “currículo em movimento” desde o século XIX. O estudo histórico que fizemos em primeiro capítulo nos permite a identificar a aplicabilidade desse conhecimento em diferentes objetos de conhecimentos “secundários” e inter-relações entre esses conhecimentos – geometria esférica e astronomia, cosmografia, mecânica celeste, geografia, entre outros. No entanto, no que se refere o termo “distancia” em análise de Chevallard, entre o conhecimento a ensinar e o “campo de consciência do professor”, ao longo do século XX ilusão de transparência era onipresente, ora por favorecimento do ensino das humanidades, ora por escasso de docentes qualificados. A questão que surge a partir daqui é quais são os fatores que determinam o que é para ser ensinado nas escolas? Por que ensinamos as matemáticas? Chevallard (1989, p.1-2, tradução nossa) responde:

> Para dar sentido à questão em apreço, esta pode ser comparada com questões semelhantes relacionadas com outros conhecimentos. Por que não há educação médica ou jurídica no ensino secundário geral? Por que não há mais ensino de retórica?
>
> Questões subjacentes a uma primeira distinção: a do ensino profissional (medicina, direito), por um lado, e a do ensino geral (retórica), por outro. E que conduzem a uma nova questão, relacionada com a transposição didática do conhecimento: como é que o conhecimento que dá o seu conteúdo ao ensino geral é "escolhido" num determinado momento? (...) Condição quase sempre realizada, este conhecimento é escolhido a partir do que temos chamado conhecimento académico, com forte legitimidade cultural.

Esse apontamento de Chevallard sobre *transposição didática do conhecimento* é em convergência com a nossa análise no primeiro capítulo – ao longo de século XIX e durante do século XX, até as Leis de Diretrizes e Bases de 1961 e 1971, o domínio cultural sobre o que era ensinado nas instituições do Ensino Secundário era fundamental. O olhar da elite cultural brasileira no ensino secundário era focado sobre línguas e ciências humanas, justamente às matérias que tradicionalmente garantiam ingresso no ensino superior. A existência da Geometria Esférica como saber acadêmico sempre figurava no currículo nacional, mas raramente chegava de ser saber ensinado. Nesse sentido, a escolha do currículo em uma determinada época baseia-se também nos fatores sociológicos e não apenas acadêmicos:

> [...] Outros critérios desempenharão um papel: é necessário convencer a sociedade, e continuar a convencê-la, de que o conhecimento matemático (ou qualquer outro assunto que desejemos) tem um título eminente a ter lugar na educação geral: daí os discursos apologéticos (...) A existência de tais discursos é uma condição essencial para a emergência e manutenção do ensino de uma disciplina no ensino secundário geral. A apologética comum, pelo menos numa posição ofensiva, baseia-se em dois argumentos solidários: a disciplina a ser promovida, seja ela qual for, seria mais útil para a sociedade como um todo, cujo progresso e sucesso dependeriam dela; e mais útil, ao mesmo tempo, para cada membro da sociedade (CHEVALLARD, 1989, p.2, tradução nossa).

Essa difusão social das disciplinas ensinadas segundo Chevallard (1989, p.4, tradução nossa) se enraizou no ensino secundário desde a época da Escolas Centrais[6] e continua influenciando o ensino das disciplinas matemáticas na atualidade:

---

[6] A Revolução Francesa foi determinante para a promoção de ensino secundário francês moderno. A legislação nesse período previa a transformação da juventude francesa por meio de uma educação universal, gratuita e independente da influência religiosa. Essas propostas foram materializadas com a

> Esse caráter do ensino é permanente. Ao contrário da lei ou da medicina, que o profano pode não saber, mas que, durante séculos, foram familiarizados na vida da população, (...) os usos das disciplinas matemáticas são, socialmente falando, e até hoje, quase invisíveis e, portanto, culturalmente frágeis.

Desta maneira, o que a educação matemática resolve é menos um problema específico de formação, do que um problema da ecologia social e cultural do conhecimento: tornar o conhecimento matemático visível para todos, segundo Chevallard (1989) para assegurar as condições culturais para uma sobrevivência do ensino das matemáticas socialmente indispensável. Se a estrutura do sistema didático não está relacionada a nenhuma função "intelectual" da matemática, que, de alguma forma, possa explicá-la, ou pelo menos explicar que pode ter despertado, no passado ou em outro lugar, um interesse sensato nessa estrutura (CHEVALLARD, 2007).

O olhar antropológico sobre o saber sugere, segundo Chevallard (1992) uma nova epistemologia, que está preocupada não apenas com construção dos saberes, mas sobre sua utilização, seu ensino e sua aprendizagem. Ao referir à Transposição Didática como uma noção que apoia compreensão dos percursos pelos quais os saberes passam até se tornarem objeto de ensino, Chevallard (1996) chama atenção para as etapas e os agentes envolvidos nessa transformação:

> O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas há também o objeto "escola", o objeto "professor", o objeto "aprender, o objeto "saber", o objeto "dor de dente", o objeto "fazer pipi", etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p.127).

Nesse sentido, os elementos do conhecimento são produtos de construções humanas, seu lugar e função variam de acordo com lugares, sociedades e períodos.

---

criação das *Escolas Centrais*, que substituíram os colégios já existentes. O programa direcionado para essas escolas previa o ensino de física, química, anatomia, história natural, belas letras, línguas antigas, línguas modernas, legislação, agricultura, comércio, artes e ofícios, matemática e desenho. Esses principais objetos de instrução foram mantidos com implementação obrigatória de bibliotecas em todas as escolas (KOVACEVIC, 2019).

2.6 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático, como ampliação da Transposição Didática, permite analisar o papel desses elementos e as relações estabelecidas com o saber de forma mais sistemática e dinâmica. A partir desta teoria, é possível analisar os processos de transposição de maneira detalhada. O núcleo da teoria está em considerar o estudo das relações mantidas entre objetos, pessoas e instituições a partir da problemática ecológica, baseada num conjunto de questões persistentes: o que existe ou não existe? O que deve existir? O que poderia existir? Quais são as condições que favorecem, permitem ou, pelo contrário, dificultam ou mesmo impedem a existência de tal objeto? (CHEVALLARD, 1997 apud ARTAUD et al., 2016). As respostas dadas a tais perguntas trazem à luz as condições de existência da matemática no sistema educativo, que incidem sobre a própria matemática, bem como sobre os sistemas em que vivem.

Em linha com o pensamento da autora, é a transposição didática que nos permite identificar os saberes envolvidos que originam a existência do objeto matemático Geometria Esférica, como objeto de ensino, isto é, o que determina a sua ecologia didática. Todavia, é ainda necessário que sejam atendidas outras condições para que um objeto de ensino possa existir ou continuar existindo. A existência da Geometria Esférica como objeto de ensino sugere a existência de outros saberes presentes ou não nas disciplinas ensinadas que a contem, como explica Chevallard (1996, p.134-135):

> Ecologicamente, a sua existência apela geralmente a outros tipos de sistemas didáticos que reunirão, por exemplo, no que diz respeito à escola primária, o mesmo aluno e o mesmo saber à volta de outros professores.

A problemática ecológica apresentada pelo autor amplia o campo de análise como também permite abordar os problemas que se estabelecem entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Segundo Almouloud (2007), os objetos possuem inter-relações hierárquicas que permitem evidenciar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos, quais possibilitam o controle didático do professor e cognitivo do aluno, controle sem o qual o contrato de ensino não seria possível.

Na mesma linha de pensamento, as relações hierárquicas entre objetos quando observadas na matemática, por exemplo, ao introduzir o conceito de triangulo esférico, conceitos como ângulo, diâmetro (da esfera e do círculo), superfície, dentre outros, precisavam ser mobilizados. Para apresentar o triangulo esférico em nosso segundo capítulo, ainda era preciso evocar quais diferentes intersecções entre um plano e uma esfera possam existir. É nesse sentido que a estrutura ecológica do objeto matemático triangulo esférico é evidenciado.

O tipo de interrogatório que está na origem da TAD exige uma distinção mais precisa entre objetos que parecem ser os mesmos, mas que não vivem da mesma maneira de uma instituição para outra, uma vez que não exercem a mesma função. Além disso, para descrever e analisar a gênese e a evolução dos elementos do conhecimento em uma determinada instituição, bem como as relações pessoais e institucionais com esses elementos, é necessário desenhar um modelo desses elementos de saber. A dificuldade é que nenhum elemento de saber pode ser totalmente isolado, mas é sempre parte de um agregado. Dentro da TAD, um avanço significativo veio com a modelagem de tais agregados em termos de praxeologias feitas dos dois componentes: *práxis* (prática) e *logos* (razão). Este modelo surgiu inicialmente de uma tentativa de descrever a atividade matemática em relação com o conceito de relações institucionais e com a utilização da noção de ostensivo.

A noção de *praxeologia* insiste nas técnicas, que permitem realizar certos tipos de tarefas, trazendo à luz a pluralidade de técnicas para um tipo de tarefa, escondidas dentro da subordinação a um sistema didático. Por outro lado, insiste na função tecnológica do saber – para produzir, justificar e tornar as técnicas compreensíveis. Isso aponta para um sistema de condições e constrangimentos que condicionam a existência ou ausência de tal técnica, em tal instituição. Um elemento de saber é antes de tudo um discurso que torna possível justificar, produzir, tornar compreensíveis as técnicas e não apenas o que a cultura designa como óbvio sob o rótulo de “saber”. Neste sentido, a práxis refere-se à prática, ao saber-fazer de algum modo, enquanto o logos se refere à razão, a teoria, ao discurso que descreve, legitima e explica à práxis. Sendo assim, uma praxeologia não abrange o estudo da prática humana, mas a “ciência”, pessoal ou institucional, de uma determinada prática. É, portanto, relativa à pessoa que a utiliza ou à instituição em que pode viver. A utilização da noção de praxeologia dá um modelo fundamental para apreender os elementos de saber, para estudar as suas transformações e para dar conta do que se faz com eles em qualquer instituição em particular. (CHEVALLARD, 1994 apud ARTAUD et al., 2016).

Trazer a noção de *ecossistema* permite ao pesquisador da didática da matemática considerar, em relação à matemática, vários novos objetos fora da matemática afastando a ilusão de transparência. A ideia de ecossistema é utilizada por Chevallard (1991) para identificar um conjunto de saberes que ali vivem e evidenciar como esses saberes interagem entre si. Segundo Almouloud (2014, p.114):

> [...] introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinara a função desse saber, ou seja, determinara seu nicho.

Desta maneira, um ecossistema consideramos como “ambiente” que reúne as condições ecológicas onde um objeto (matemático) pode viver, definido como um sistema de seres e relacionamentos, o habitat como um “lugar” onde podemos encontrar o objeto matemático com todos os objetos com quais tal objeto interage, enquanto o nicho está relacionado com o seu lugar funcional.

O ponto de vista ecológico é hoje um posicionamento essencial no uso de técnicas de análise com ferramentas da Teoria Antropológica de Didático. Seu campo de intervenção foi ampliado e enriquecido. Os vários trabalhos que consistem em determinar as condições ecológicas de existência dos objetos matemáticos conduziram finalmente a um esquema estruturante em nove níveis, chamados níveis de co-determinação didática que vão do nível mais específico (sujeito, tema, setor, domínio, disciplina) ao nível mais genérico (pedagogia, escola, sociedade, civilização). Este esquema estruturante tem-se revelado mais produtivo nos últimos tempos, trazendo à luz os elementos mais determinantes que constrangem os sistemas didáticos (ARTAUD et al., 2016).

De acordo com Artaud et al. (2016), um objeto (matemático) não vive isoladamente, portanto é preciso identificar, ou até mesmo fazer viver, um complexo de objetos em torno do tal objeto. É nesse sentido que a problemática ecológica aparece de maneira mais explícita, uma vez que convém examinar os diferentes ambientes em que encontramos o objeto matemático e os saberes com os quais ele interage, isto é, seus *habitats*. Em linha com o pensamento da autora, no próximo tópico analisaremos a hipótese de *habitat* para o estudo de Astronomia Posicional que abriga como objetos todos os saberes que determinam a sua existência enquanto objeto de ensino, ou ainda, se necessário, permitir que esses saberes existam. Portanto, com base na teoria de Chevallard procuramos evidenciar quais saberes determinam a existência da Geometria Esférica como objeto de ensino, bem como se tais saberes estão presentes ou são reconhecidos pelo seu *habitat*.

Apresentados o referencial teórico, o problema de pesquisa e a metodologia adotada, no próximo capítulo, iniciaremos os estudos preliminares relevantes à continuação da pesquisa.

3 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos campos de estudo da Astronomia com ênfase na Astronomia posicional, apresentamos um estudo histórico sobre o ensino da Geometria Esférica nas disciplinas como a Matemática, a Astronomia, a Cosmologia, entre outras, nos currículos nacionais e da França ao longo do período entre séculos XIX e XXI e ressaltamos como na atualidade os documentos oficiais sugerem o ensino de Astronomia. Por fim, completamos o capítulo apresentando alguns livros didáticos e paradidáticos sobre o tema.

3.1 Astronomia

Astronomia é uma ciência natural que estuda corpos celestes, seus movimentos, distâncias, dimensões, massas, a sua natureza física e propriedades químicas, a sua formação, bem como a origem, a formação e o desenvolvimento do Universo. Por ter um objeto de estudo tão vasto, a Astronomia é dividida em várias áreas. De acordo com Sevarlic (1972), Green (1998) e Segan (2006), as principais divisões da Astronomia são: Astronomia Posicional, Mecânica Celeste, Astronomia Teórica, Astrofísica, Astronomia Estrelar e Cosmologia. Utilizaremos, a seguir, as definições desses autores para cada uma das áreas da Astronomia.

Astronomia posicional ou Astrometria é um ramo da astronomia que estuda a posição, as distâncias e o movimento dos astros e outros objetos celestes, bem como a definição do Tempo Universal (UTC). Embora a natureza do tempo seja uma questão mais profunda e filosófica, o termo *tempo* em astronomia, refere-se à periodicidade e é definido como repetições periódicas de um certo evento que pode ser um simples batimento do pêndulo de um relógio, o cruzamento do Sol com o meridiano do observador, ou ainda algo mais sutil, como a transição dos elétrons entre diferentes órbitas.

Do ponto de vista de um observador na Terra, os objetos celestes têm movimento aparente, por causa da rotação e da translação do nosso planeta, além do seu movimento real, em relação a uma referência que serve para definição do sistema de coordenadas de posição e de uma escala de tempo adequada. Dessa forma, podemos definir o sistema de coordenadas como horizontal (relativas a horizonte do observador), equatorial (relativas ao equador), eclíptico (relativas à eclíptica), geocêntrico (relativas à Terra), heliocêntrico (relativas ao Sol), galáctico (relativas ao centro da galáxia) e os sistemas do tempo como tempo do observador (relativo ao ponto de observação), tempo médio (relativo a média dos tempos do ponto de observação e do Tempo Universal tempo estelar (relativo a distância angular da Terra a um astro), tempo dinâmico (relativo às variações gravitacionais), tempo coordenado (relativo as geodésicas), ou tempo atômico (relativo às caraterísticas de um certo elemento).

Os métodos da Astronomia posicional são estritamente matemáticos. Fundamentados em teorias de geometrias Euclidiana e não-euclidianas e nas leis da mecânica. Os dados coletados dos movimentos transitórios e rotacionais captados em observações feitas com instrumentos astronômicos e geodésicos, são transformados em coordenadas dos pontos na Terra e dos objetos celestes, determinando suas exatas trajetórias e distâncias, como também em várias constantes cósmicas.

Antes do descobrimento do radar, os procedimentos da astronomia posicional eram os únicos que existiam para calcular a distância de qualquer objeto astronômico relativa a observador na Terra. Ainda hoje, por meio dos radares podemos apenas medir distancias dos objetos dentro do sistema solar. Para objetos distantes como astros, a astronomia posicional continua a ferramenta principal.

A Mecânica celeste é um ramo da astronomia estuda os movimentos e as formas dos corpos celestes sob a ótica das leis da mecânica. Diferente da Astronomia posicional que tem por objetivo determinar as posições relativas dos astros e as variações dessas posições em diferentes escalas de tempo, a Mecânica celeste analisa forças gravitacionais e não gravitacionais e sua influência na dinâmica dos astros.

A Astronomia teórica usa os modelos analíticos da Astronomia posicional para determinar a posição dos corpos celestes em qualquer momento no passado, na atualidade e no futuro, bem como os modelos das outras ciências, como os da física e da química para descrever objetos e fenômenos astronômicos.

Astrofísica é o ramo da astronomia que emprega os princípios da física e da química para determinar a natureza dos corpos celestes, em vez de suas posições ou movimentos no espaço.

O campo da Astronomia estelar é o estudo da origem, da formação, da evolução e do destino das estrelas e dos mecanismos pelos quais elas vivem e interagem com seu ambiente estelar.

A Cosmologia reúne as ciências naturais no estudo da origem, da estrutura e da evolução do universo como um todo.

Ao considerar que a Astronomia tem um papel relevante para o ensino e na formação integral, inspirando os jovens às carreiras cientificas e tecnológicas, Santos e Krupek (2014, p. S/N) afirmam:

> Considerando a importância da Astronomia em nosso dia a dia e por ser esta uma ciência apaixonante, de sonhos, de constantes atualizações e descobertas e ainda, uma ciência que estimula ativamente a curiosidade, esta gera indagações, busca soluções, auxilia na compreensão e reflexão dos fenômenos astronômicos ocorridos no cotidiano, bem como a interferência que esses fenômenos exercem em nossa vida e por fim, aguça a curiosidade dos alunos.

Ademais, como destacam os autores, a Astronomia é fundamental para compreensão de Universo sem fronteiras, de conscientização dos ritmos de vida e de fenômenos naturais, como a duração dos dias, semanas, meses e anos.

Feita apresentação acerca campos de estudo da Astronomia, apresentaremos um estudo histórico sobre o ensino de Astronomia e de Geometria Esférica na história da educação nacional.

3.2 Astronomia e Geometria Esférica na história da educação brasileira

Ao longo desta pesquisa, pudemos observar que diversos estudos acerca da história da educação brasileira apontam as marcas da colonização europeia no ensino secundário, dentre eles Barros (2017), Bontempi (2014), Souza (2008), Nunes (2000). Para mais, o estudo de Kovacevic (2019), aborda as influências francesas nessa etapa de ensino.

Segundo Kovacevic (2019), a educação à francesa no âmbito da educação brasileira teve como porta de entrada iniciativas educacionais de D. João VI com vistas a retomada do processo de modernização do país, com convites a professores franceses para participar da *Missão Artística Francesa*[7]. Além disso, Nunes (2000), afirma que desde na educação jesuítica o *modus parisiensis*[8] era o modelo de ensino adotado.

Santos (2015) defende que o Período Joanino[9] inaugurou "uma nova era para o setor da aprendizagem profissional", setor esse que sofreu diversos danos no período anterior a chegada de D. João VI em razão de investidas contra a estrutura e o desenvolvimento do país, sendo o golpe final marcado pela "expedição do Alvará de 5 de janeiro de 1785, que obrigava o fechamento de todas as fábricas no país, salvo aquelas em que se tecessem fazendas grossas de algodão, próprias para o vestuário dos negros" (SANTOS, 2015, p. 207). O autor ainda afirma que nesse período a educação não era difundida em caráter de igualdade na sociedade brasileira, sendo ofertada de acordo com grupos sociais.

Essa ação discriminatória da oferta de ensino culminou na escassez de mão de obra no país, o que levou D. João VI a implantar o modelo de aprendizagem compulsória, em que jovens e crianças eram obrigados por juízes a aprenderem ofícios, trabalharem como artífices ou encaminhados aos arsenais militares (SANTOS, 2015).

O autor ainda afirma que, com vistas a reorganizar a sociedade brasileira, a reestruturação do Ensino no Brasil passava por diversas modificações:

---

[7]A Missão Artística Francesa em 1816, que fora articulada pelo Marquês de Marialva, ministro das Relações Exteriores de Portugal e representante do príncipe D. João VI em Paris. Este, influenciado pelo então Conde da Barca, convidou um grupo de artistas e artífices franceses bonapartistas a realizar um projeto de ensino artístico no Brasil tendo como "mola propulsora o desenvolvimento dos ofícios, a profissionalização para empregos públicos, o progresso da agricultura e da mineralogia com interessados no aprimoramento da indústria, do comércio e das artes, fundamentais para as terras portuguesas no continente americano" (DIAS, 2006, p. 304 in KOVACEVIC, 2019). Segundo Dias (2006), os franceses foram responsáveis por introduzir o primeiro sistema de ensino superior acadêmico, concretizado com a fundação da Academia de Belas Artes em 1826. Esta foi liderada por Le Breton e contou com subsídios da Coroa Portuguesa. O empreendimento foi concluído dez anos após o projeto inicial e resultou na Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios; sua função foi renovar as artes, rompendo com a tradição barroca e fortalecendo o estilo neoclássico no Reino Unido de Portugal.

[8] Em 1530, os colégios parisienses estão divididos em classes, inventadas pelos Irmãos da Vida Comunal, seus superiores são os "principais", seus horários e disciplinas estão definidos, e os alunos devem aprender latim e grego e explicar os principais autores. Este conjunto de elementos, denominado *modus parisiensis*, serve de modelo tanto para os colégios jesuítas quanto para os colégios protestantes (NUNES, 2000, p. 37).

[9] O Período Joanino refere-se à transferência da corte portuguesa para o Brasil entre 1808 e 1821. Durante esse período, D. João VI governou Portugal e o Brasil a partir da cidade do Rio de Janeiro, estabelecendo pela primeira e única vez na história a sede de uma corte europeia à uma colônia.

> A primeira ação concreta para dar uma nova organização à aprendizagem de ofícios ocorreu em 1826, quando foi apresentado o Projeto de Lei sobre a Instrução Pública no Império do Brasil, que consistia em estabelecer uma lei que organizasse o ensino público em todo o país, em todos os níveis; fato até então inédito na história da educação brasileira (SANTOS, 2015, p. 205).

Esse projeto dividia os vários graus de ensino entre diferentes modalidades de estabelecimento de ensino, tais como:

> Pedagogias, destinado ao primeiro grau; Liceus, utilizados para o segundo grau; Ginásios, encarregados de transmitir conhecimentos relativos ao terceiro grau; e por fim, as Academias, responsáveis pelo ensino superior (SANTOS, 2015, p. 209).

De fato, a confiança da educação brasileira aos franceses resultou com o primeiro sistema de ensino superior no país, com a fundação da Academia de Belas Artes (DIAS, 2006).

Para mais, Kovacevic (2019) afirma que a educação francesa foi incorporada a sociedade brasileira de modo que o Brasil se tornou um país francófilo e, consequentemente, francófono, o que acabou por influenciar o currículo do ensino secundário brasileiro, nas primeiras décadas do século XX.

Nesse sentido, como pudemos notar, embora o Brasil tivesse sua descoberta legitimada por Portugueses, os laços entre Franca e Portugal fizeram do Brasil um território cuja educação fosse pavimentada nos moldes franceses, em razão da consagração de sua cultura, legitimada em grande parte do mundo pelo período das Luzes[10]. Como afirma Kovacevic (2019, p. 47-48):

> O modelo liceal francês (...) serviu como modelo para criação de várias instituições de ensino secundário ao longo de século XIX, oferecendo formação humanista – com base de ensino em línguas e em literatura. O colégio Pedro II, fundado em 1837, por exemplo, seguia integralmente o currículo francês. Todavia, o acesso aos estudos secundários era reservado ao um grupo social muito restrito – jovens herdeiros das famílias dos industriais, grandes comerciantes, oligarcas agrários, ou seja, os sujeitos com distinção cultural de uma elite, que procurava nas escolas secundárias a preparação para os cursos superiores.

[10] A questão social da educação foi levantada com grande pertinência pelo Movimento das Luzes. Enquanto Montesquieu buscava o espírito das leis Rousseau desenvolvia o conceito de contrato social como resultante de uma educação que fortalecesse o amor-próprio dos indivíduos harmonizados a partir de um Estado Forte. Kant e posteriormente Hegel acentuaram a profunda relação entre a educação da subjetividade e a subordinação a Razão, ou seja, a institucionalização como meta e construção sociopolítica e jurídico-ética. Um processo progressivo de transformação das consciências individuais culminaria na formação do Estado como Espírito Objetivo construído com base no Espírito Subjetivo e culminando no Espírito Absoluto (MAGALHÃES, 2004).

A autora acrescenta que:

> Os alunos que passaram pelas poucas instituições do ensino secundário durante a Primeira República brasileira receberam uma formação mais literária do que científica (...) A base dessa formação compreendia os estudos de latim, língua portuguesa, línguas modernas, com destaque para francês, inglês e alemão. O estudo das línguas foi complementado pelo estudo de literatura, história, geografia e filosofia. O currículo também abarcava matemática (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria), mecânica, astronomia, física, química e história natural, no entanto, apenas em forma de ensino complementar importante, mas não fundamental (KOVACEVIC, 2019, p. 48).

O currículo que vigorava na França no final do século XIX era o da Lei Goblet, de 30 de outubro de 1886, que garantia escola gratuita, educação obrigatória e ensino público laico. Esse currículo, segundo Heurdier e Prost (2014) compreendia os estudos das seguintes disciplinas: ensino moral, ensino da língua francesa com leitura em voz alta de ao menos mais uma língua viva, literaturas antigas e modernas, geografia e cosmografia, história nacional e história geral, aritmética, elementos de geometria, química, física e história natural, noções de direito, desenho, música e ginástica.

O currículo no Brasil teve sua primeira uniformização com o Decreto nº 981, de 08 de novembro de 1890. Como assinala Silva, essa lei, conhecida como a reforma Benjamim Constant propôs mudanças nos ensinos primário (de 7 a 13 anos) e secundário (de 13 a 15 anos), priorizando disciplinas científicas como Matemática e Física, em detrimento às disciplinas da área de humanas – que eram o foco das escolas de primeiras letras, criadas no Império. A reforma "da clara orientação positivista buscou ampliar a formação cientifica na educação secundaria", incluindo no plano de estudos, entre outros:

> Aritmética e álgebra elementar, geometria geral e seu complemento das teorias rigorosamente indispensáveis ao estudo da mecânica geral [...] astronomia (precedida da trigonometria esférica), geometria celeste e noções sucintas de mecânica celeste (gravitação universal) (SILVA 1969 apud SOUZA, 2008, p.98-99).

Segundo a autora, "tal plano de estudos levou a um grau extremo a tendência ao enciclopedismo" (SOUZA, 2008, p. 98), a mesma tendência que na época dominava na educação francesa. De acordo com o Novo Dicionário de Pedagogia e de Instrução Primária de F. Buisson (1911) as reformas aplicadas no sistema de estudos clássicos da França já foram planejadas e exigidas pelos colaboradores da Enciclopédia, estimulando

> [...] o progresso da educação, [...] por causa da influência geral que exerce sobre o espírito francês, ao defender a ciência, tanto no seu estudo teórico como nas suas aplicações práticas, ao popularizar o conhecimento técnico, ao glorificar as artes industriais e ao preparar assim o advento de uma educação científica e positiva em vez de uma educação exclusivamente literária e puramente formal (BUISSON, 1911, s.p., tradução nossa).

No entanto, como explicam Heurdier e Prost (2014), o ensino enciclopédico sobrecarregava as matérias, quanto os programas de estudo, quais deveriam ser “flexíveis e simplificados”. Uma miríade de temas estudados não era “apropriada para o espírito de quatorze anos, quais foram trazidas demasiadamente cedo aos alunos do ensino secundário” (HEURDIER; PROST, 2014, p.86).

Para mais, as orientações a respeito do ensino das ciências previstas pela reforma Benjamim Constant não chegaram a se consolidar. Como afirma Kovacevic (2019, p.49)

> Ao longo da Primeira República, as disciplinas cientificas – mecânica, astronomia, física, química e história natural – tiveram suas aulas gradualmente reduzidas e redistribuídas para os anos finais. Por consequência, considerando o razoável número de abandonos antes de finalizar o curso, a educação científica no domínio do ensino secundário era modesta. Dessa forma, podemos concluir que as transformações que caracterizaram esse período ocorreram no âmbito de currículo humanista – em disciplinas como língua portuguesa, literatura, história e geografia.

O quadro 1 mostra o número de aulas semanais do curso secundário do Ginásio Nacional em 1901, e a destinação dos anos finais para as ciências:

Quadro 1 - Número de aulas semanais do curso secundário do Ginásio Nacional em 1901

Matérias	Series e horas semanais					
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano	6º ano
Português	3	3	2	2	-	-
Literatura	-	-	-	-	2	2
Francês	4	3	2	1	-	1
Inglês	-	3	3	2	1	1
Alemão	-	-	-	3	3	2
Latim	-	-	2	3	3	1
Grego	-	-	-	3	3	2
Lógica	-	-	-	-	-	3
Geografia	3	3	2	-	-	1
História	-	-	-	3	3	3
Matemática elementar	4	3	4	4	-	2

Mecânica e	-	-	-	-	3	-
Física e Química	-	-	-	-	4	3
História Natural	-	-	-	-	2	5
Desenho	3	3	3	2	-	-

Fonte: Peixoto (193- apud SOUZA, 2008, p.101).

O currículo de matemática do Ginásio Nacional apresentado no quadro 1, de acordo com Souza (2008), compreendia, entre outros, desenho geométrico (estudo das retas, curvas, figuras planas, sólidos geométricos, ângulos planos e esféricos), como também o uso de aparelhos de precisão e de medição – réguas, compassos, quadrantes e sextantes. Esse currículo competia com o currículo de matemática nos liceus e escolas normais da França na época, que segundo Buisson (1911) visava o uso prático das medições geométricas, como por exemplo, "a determinação prática das coordenadas de um ponto no mar, por meio de use de sextante" (s.p., tradução nossa). Para tal, seria "necessário abandonar a geometria clássica de Euclides em favor de geometria igualmente rigorosa, mas mais real e francamente experimental [...] que estimula o aluno a se acostumar a primeiro pesquisar experimentalmente a natureza do lugar e suas características" (BUISSON, 1911, s.p., tradução nossa).

Ainda em Buisson (1911, s.p., tradução nossa):

> Esquece-se com demasiada frequência que a geometria pura é uma ciência de base experimental e que, por mais completa ou rigorosa que seja a sua apresentação, é impossível escapar às noções a priori fundamentais cuja preexistência na mente deve ser assumida. Se este é o caso de um estudo aprofundado de geometria pura, é ainda mais verdadeiro que este é o caso quando se trata de ensino com tendências essencialmente utilitárias.

O curso de navegação, que era obrigatório nos liceus do litoral francês, era um exemplo dessa tendência utilitária do ensino de geometrias, nesse caso da geometria esférica, considerando essas aulas mais adequadas à profissão de marinheiro ou pescador em vez de aulas sobre "significados abstratos de pontos, retas, superfícies e figuras geométricas" (BUISSON, 1911, s.p., tradução nossa).

De acordo com Souza (2008) a reforma do ensino secundário e superior, no Brasil, protagonizada pelo ministro Carlos Maximiliano (Decreto nº 11.530, de 18 de março de 1915) manteve a prioridade do ensino humanista nas instituições do ensino secundário. Os programas para o ensino de línguas buscavam colocar o estudante secundarista em contato com a cultura francesa, inglesa e alemã, eliminando a obrigatoriedade do grego nos currículos. Como apresentado no Quadro 2, o ensino de matemática foi dividido em quatro disciplinas – aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

Ao que tudo indica, o ensino humanista reforçava a aquisição de saberes “que se prestavam à manutenção de uma posição social bem definida” (SOUZA, 2008, p.107). O distanciamento em relação ao ensino das ciências, como aponta a autora, devia-se às barreiras que historicamente diferenciavam essas duas modalidades de ensino no país. Consequentemente, no Congresso de Instrução Superior e Secundaria realizado no Rio de Janeiro em 1922, surgiram as teses sobre o curso do ensino secundário dividido em dois ciclos – um de ciências e outro de letras, versando dessa forma a “seriação preferível no ensino de humanidades” (SOUZA, 2008, p.109).

Quadro 2 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1915

Matérias	**Series e horas semanais**				
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Português	3	3	3	-	-
Francês	3	3	3	-	-
Inglês ou Alemão	3	3	2	-	-
Aritmética	3	3	-	-	-
Álgebra	-	-	3	-	-
Geometria Plana	-	-	3	-	-
Geometria Esférica e no Espaço	-	-	-	3	-
Trigonometria	-	-	-	3	-
Geografia	3	-	-	-	-
Corografia[11] e Cosmografia	-	3	-	-	-
História Universal	-	-	-	3	-
Física e Química	-	-	-	3	3
História Natural	-	-	-	-	3

Fonte: Brasil (1917 apud SOUZA, 2008, p. 106).

A reforma Sampaio Dória (Decreto nº 3.356 de 31 de maio de 1921) manteve o número de aulas de Cosmografia em três, no entanto, com aulas programadas apenas para o 1º e o 2º ano do ensino secundário. Por outro lado, o ensino de matemática voltou a ser compilado em uma matéria só, com quatro aulas semanais.

Já a Reforma João Luiz Alves, conhecida por Lei Rocha Vaz (Decreto nº 16.782–A de 13 de janeiro de 1925) enfatizou a frequência obrigatória no curso secundário e redefiniu, como mostra o Quadro 3, o programa de estudos, ampliando o número de disciplinas científicas.

[11] De acordo com Sevarlic (1972), Corografia é o estudo de uma região ou área geográfica particular que explicita por meio de códigos as suas características mais notáveis. Destarte, Cosmografia Geográfica estuda a interposição entre os conhecimentos terrestres e celestes relativos à Geografia.

Como explica Souza (2008) a redistribuição do número de aulas semanais para cada disciplina buscou garantir equilíbrio entre estudos literários e científicos. Contudo, mesmo considerada ampla, essa reforma "[...] pouco alterou a estrutura do ensino secundário" (SOUZA, 2008, p.119).

Quadro 3 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1925

Matérias	**Series e horas semanais**					
	1o	**2o**	**3o**	**4o**	**5o**	**6o**
Português	3	3	3	3	3	-
Latim	-	3	3	3	3	-
Francês	3	3	3	-	-	-
Inglês	3	3	3	-	-	-
Filosofia	-	-	-	-	3	-
História da Filosofia	-	-	-	-	-	3
Sociologia	-	-	-	-	-	3
Instrução Moral e Cívica	3	-	-	-	-	-
História do Brasil	-	-	-	3	-	-
Aritmética	3	3	-	-	-	-
Álgebra	-	-	3	-	-	-
Geometria Plana	-	-	3	-	-	-
Geometria Esférica e no Espaço	-	-	-	3	-	-
Trigonometria	-	-	-	3	-	-
Geografia	3	-	-	-	-	-
Cosmografia	-	-	-	-	3	-
Corografia	-	3	-	-	-	-
Física	-	-	-	3	3	-
Química	-	-	-	3	3	-
Desenho	3	3	3	3	3	-
História Universal	-	-	-	3	-	-

Fonte: Peixoto (193- apud SOUZA, 2008, p. 111).

Em curso dividido em seis anos de estudos, para alunos entre 11 e 17 anos de idade, a referência nacional foi mais uma vez assinalada nas disciplinas de ensino das humanidades, isto é, nas disciplinas de línguas, Geografia e História. Para mais, a introdução da disciplina Instrução Moral e Cívica no primeiro ano de ensino secundário atendia apelos do nacionalismo crescente no país na década de 1920. O ensino de matemática, quanto ao número de aulas semanais, tinha relativamente o mesmo peso que o estudo de Latim. No entanto, os estudos de Aritmética, Álgebra, Geometrias e trigonometria eram complementados com o número expressivo de aulas de desenho.

Destarte, durante o período da Primeira República (1889 – 1930) o ensino de Geometria Esférica fazia a parte de currículo de todas as reformas do ensino nacional, ora como disciplina individual, ora integrando as aulas de Astronomia, Cosmografia e

Corografia. Contudo, nesse período o currículo se aplicava a um número reduzido de instituições de ensino secundário que foram regularmente inspecionadas pelo governo e recebiam notas de “regular”, “bom” a “excelente” enquanto, em contrapartida, existia uma multiplicidade de instituições com pouca uniformidade e fiscalização precária. Para mais, existia escassez de professores secundaristas em relação ao conteúdo ministrado, pois:

> Parte dos professores catedráticos era formada nas faculdades tradicionais (Direito, Medicina e Engenharia) mas muitos não tinham sequer uma formação superior, o que dirá uma preparação pedagógica mesmo no curso normal. A maioria dos mestres era autodidata [...] tidos como mestres do notório saber. [...] Nesse cenário multifacetado, num tempo em que as ciências de referência estavam iniciando o processo de institucionalização no país, os programas oficiais mantinham-se como uma referência legitima (SOUZA 2008, p.116).

Consequentemente, havia variações do currículo de uma instituição a outra, reservando aos colégios de referência nacional atender um público escolar específico, oriundo das “elites dirigentes”.

O período entre os anos 1930 e 1960, de acordo com Souza (2008), é considerado como um período de consolidação e ao mesmo tempo de redefinição da educação secundaria no Brasil. As duas reformas estabelecidas durante o governo Vargas (reforma Francisco Campos, em 1931, e reforma Capanema, em 1942) fixaram a estrutura organizacional e ratificaram o projeto cultural de formação da juventude colocando “em destaque as exigências do mundo contemporâneo, a qualidade de uma educação fundada nos processos de aquisição dos conhecimentos e no desenvolvimento de capacidades como solução de problemas e adequação a situações novas” (p. 147-148). A maior inovação da reforma Francisco Campos foi a distribuição mais equilibrada entre estudos literários e científicos e a revitalização do cientificismo. No quadro 4 apresentamos o currículo de acordo com a reforma de 1931.

Quadro 4 - Número de aulas semanais do curso secundário segundo a reforma de 1931

Matérias	**Series e horas semanais**				
	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	5º ano
Português	4	4	3	3	-
Francês	3	3	2	1	-
Inglês	3	3	2	1	-
Latim	-	-	-	3	3
História da Civilização	2	2	2	2	2
Geografia	3	2	2	2	2

Geofísica e Cosmografia	-	-	-	3	-
Matemática	3	3	3	3	3
Ciências Físicas e Naturais	2	2	-	-	-
Física	-	-	2	2	2
Química	-	-	2	2	2
Desenho	3	3	2	2	2
História Natural	-	-	2	2	3
Música (Canto Orfeônico)	3	3	2	2	2

Fonte: Afrânio Peixoto (1917 apud SOUZA, 2008, p.153).

O Ensino das Ciências Físicas e Naturais estudava Astronomia e Cosmografia, desta vez em interdisciplinaridade com geografia, que tinha por objetivo:

> [...] dar a conhecer, a princípio, a estrutura física da terra, o relevo do solo, o litoral, e clima, a hidrografia, os recursos naturais. (...) Em conexão coma a astronomia e a física, tratará da posição da terra no Universo. Utilizar-se-á sempre dos mapas como o mais importante de seus meios de expressão (BICUDO, 1942 apud SOUZA, 2008, p. 157).

O curso de desenho, entre outros, complementava as aulas de geometria, geografia e astronomia e compreendia registro em mapas das reproduções após as excursões realizadas em observações astronômicas.

De acordo com Souza (2008), o ensino de matemática fundamentava-se em princípios pedagógicos modernos, visando o desenvolvimento de habilidades intelectuais, como o rigor no raciocínio, a capacidade de resolver e agir, a faculdade de compreensão e de análise das relações quantitativas e espaciais. A carga horária de Matemática no currículo de 1931 era predominante, com três aulas semanais ao longo de todos os anos do ensino secundário, e seus estudos eram baseados nos conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometrias (plana, esférica e espacial).

A reforma levada a termo pelo ministro Gustavo Capanema em 1942, denominada Lei Orgânica do Ensino Secundário (Decreto-lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942) assinalou as finalidades diferentes do ensino primário e secundário. Como explica Souza (2008, p.171):

> [...] Enquanto o primeiro destinava-se a adaptar o ser humano às exigências da sociedade e socializá-lo, o segundo tinha a função de formar nos adolescentes uma solida cultura geral, marcada pelo cultivo a um tempo das humanidades antigas e das humanidades modernas, e bem assim, de neles acentuar e elevar a consciência patriótica e a consciência humanística.

No que diz respeito a organização escolar, a reforma Capanema padronizou dois tipos de estabelecimentos de ensino secundário: o ginásio, destinado a ministrar o curso de primeiro ciclo e o colégio, compreendendo, além o curso ginasial, os cursos do segundo ciclo (sem sentido). No Quadro 5 mostramos a distribuição das aulas de cada disciplina no curso ginasial.

Quadro 5 - distribuição das aulas semanais das diferentes disciplinas, curso ginasial, segundo reforma de 1942

Matérias	Series e horas semanais			
	1ª serie	2ª serie	3ª serie	4ª serie
Português	4	3	3	3
Francês	3	2	2	2
Inglês	-	3	2	3
Latim	2	2	2	2
História Geral	2	2	-	-
Geografia Geral	2	2	-	-
Geografia do Brasil	-	-	2	2
Matemática	3	3	3	3
Ciências Físicas e Naturais	-	-	3	3
Trabalhos Manuais	2	2	-	-
Educação Física	2	2	2	2
Desenho	2	2	1	1
História do Brasil	-	-	2	2
Música (Canto Orfeônico)	2	2	2	2

Fonte: Brasil (1952 apud SOUZA, 2008, p. 176).

De acordo com Souza (2008, p.171), a reforma Capanema “recuperou de certa forma, para esse ramo do ensino médio, as tradições solapadas pela Reforma de Francisco Campos”. O programa articulava disciplinas como Geografia, História, Ciências Físicas e Naturais e Matemática envolvendo elementos extraídos das ciências, como pressuponha a moderna pedagogia.

Ainda em relação a organização escolar, as modificações curriculares compreendiam dois cursos – o cientifico e o clássico, atendendo dessa maneira uma diversificação dos cursos do ensino superior, o primeiro mais afinado às ciências e o segundo mais afinado às letras. A legislação de ensino organizou também o Ensino Normal, para a formação de professores habilitados a lecionar no ensino elementar, e o Ensino Agrícola, que compunha o ensino regular oferecido às alunas, futuras professoras rurais, e criou o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial – SENAC. No entanto, as modificações nos programas ocorriam apenas na densidade dos conteúdos de cada disciplina, preservando a concepção norteadora da ordenação curricular. O quadro 6 demonstra distribuição das aulas do curso científico:

Quadro 6: Distribuição do tempo escolar no ensino secundário, curso científico, segundo reforma de 1942

Matérias	**Series e horas semanais**		
	1º ano	2º ano	3º ano
Português	3	3	3
Francês	2	2	-
Latim	-	-	-
Espanhol	2	-	-
Matemática	4	4	3
Física	3	2	3
Química	3	3	3
Biologia	-	3	3
História Geral	2	2	-
História do Brasil	-	-	3
Geografia Geral	2	2	-
Geografia do Brasil	-	-	4
Filosofia	-	-	4
Desenho	2	2	2

Fonte: Brasil (1952 apud SOUZA, 2008, p. 183).

De acordo com Souza (2008) a reforma Capanema, durante vigência de duas décadas, deixou marcas duradouras na estruturação da educação secundaria no país possibilitando no período entre 1940 e 1960 uma educação de qualidade, especialmente nos ginásios e colégios públicos. Todavia, o ingresso nas tais instituições era condicionado com teste de admissão limitando dessa maneiro o acesso a educação de qualidade para muito poucos. Como assinala Nunes (2000, p. 35-36) "[...] os relatos apaixonados dos antigos adolescentes dos anos 50 e 60 sobre o "velho" e "bom" ginásio dos "anos dourados" contrastam com análises dos educadores que no mesmo período denunciavam as suas misérias e os seus equívocos".

As mudanças no ensino secundário francês no período entre os anos 1930 e 1960 ocorriam principalmente na área de organização escolar. De acordo com a Organização Geral do Ensino Público (Lei estadual francesa de 15 de outubro de 1941) o ensino secundário compreendia o ensino liceal[12], colegial e ensino técnico.

[12] Como explicam Heurdier e Prost (2014), entre 1802 a 1959, o termo "liceu" referia-se a instituições financiadas pelo Estado que cobriam todo o ensino médio longo para alunos à partir de 11 anos da idade, (da sexta série à *terminale*), em oposição aos "colégios", que também podiam compreender todo o ciclo secundário longo, porém financiados pelo município.

Os liceus comportavam classes de filosofia e classes de matemática, como também as classes preparatórias para o ensino superior e Grandes Escolas[13]. Os colégios dividiam seus estudos entre modernos e clássicos, enquanto o ensino técnico instruía os alunos para profissões de comércio, indústrias, artesanato rural e cursos profissionalizantes afins (HEURDIER e PROST, 2014). Das matérias que aportavam Geometria Esférica tanto nos liceus como nos colégios vigoravam Astronomia de Posição, Cosmografia, Mecânica Celeste e Geografia, com "utilização de conhecimentos matemáticos já adquiridos para resolução de problemas concretos da vida prática" (HEURDIER e PROST, 2014, p.110, tradução nossa).

Essas disciplinas, embora ainda em vigor no currículo do ensino médio francês, deixaram de ser ensinadas na década de 1980, permanecendo apenas nos *Lycés des Métiers*[14] voltados a Astronomia. Em *paper "Sobre a versatilidade na educação escolar"*[15] (1996) Yves Chevallard questiona o ensino das geometrias não-euclidianas no ensino médio como parte dos programas que muitos professores abandonam, provocando eventual criação de uma nova disciplina escolar especializada nessa matéria. E conclui:

> [...] não cabe aos professores decidir, a partir de sua posição particular, o que é matemática, gramática ou história. Sua visão das coisas, em si mesmas legítimas, não é garantia da fidelidade epistemológica aos saberes que elas reivindicam. Pelo contrário, em livro publicado recentemente por um matemático (George A. Jennings, *Geometria Moderna com Aplicações*, Springer-Verlag, 1994), o autor apresenta como uma "introdução à teoria e aplicações da geometria *moderna* - *grosso modo"*, como a geometria se desenvolveu desde Euclides. Existe, é claro, um capítulo sobre geometria euclidiana, que não esquece nem a teoria das transformações nem algumas das aplicações mais clássicas (como o planímetro); mas também um capítulo sobre geometria *esférica*, com problemas de navegação e a questão do movimento dos planetas; um capítulo sobre geometria projetiva; e finalmente um capítulo sobre a geometria da Relatividade Especial (CHEVALLARD, 1996, tradução nossa).

O autor ressalta o fenômeno de "retração disciplinar" em razão de "purificação epistemológica". Durante um longo período de tempo, a disciplina de matemática ensinada nos liceus franceses incluiu o conhecimento que a maioria dos professores

---

[13] De acordo com o Ministério de Educação Nacional da França uma *Grande École* é um "estabelecimento de ensino superior que recruta seus alunos por concurso e assegura a formação de alto nível", oferecendo a seus alunos grande prestígio.

[14] Liceus profissionalizantes.

[15] Tradução nossa; o título original do *paper* é *Sur la polyvalence dans l'enseignement scolaire.*

de hoje considerariam como não fazendo parte da matemática, isto é, da *sua* matemática - do que eles consideram ser matemática. O currículo de matemática incluía ao lado de aritmética, álgebra, trigonometria e geometria, geometria descritiva, geometria esférica, cinemática, estática, cosmografia - todas disciplinas “matemáticas” que desapareceram do currículo secundário sem serem substituídas. Embora essas disciplinas permaneceram abrangentes, de acordo com Chevallard, sendo o perfil dos professores de estudos primários majoritariamente enciclopédicos e minoritariamente versáteis, as disciplinas caraterizadas como interdisciplinares deixaram de ser ensinadas.

Todavia, em meados dos anos 2000, ocorreu uma reviravolta na França, e a Astronomia voltou a vigorar nos liceus franceses. O quadro 7 mostra o currículo do curso científico atual do Liceu Victor Hugo, da cidade de Marselha, onde são administrados os três últimos anos do ensino secundário aos adolescentes com idades compreendidas entre 15 e 18 anos.

Quadro 6 - Currículo do Liceu Victor Hugo de Marselha

Matéria ensino obrigatório comum
Matemática
Física – Química
Astronomia e Ciências da Terra
História e geografia
Francês
Filosofia
Línguas vivas I
Línguas vivas II
Matéria optativa para o ano de *Terminale*
Matemática
Física – Química
Astronomia e ciências da Terra
Matérias facultativas
Latim
Grego
Línguas vivas III
Artes

Fonte: Academie-d´aix-Marseille, Place Lucien Paye 13621, Aix en Provence

Ademais, em nossa busca por conteúdos dos currículos de Astronomia na França, encontramos no site do Ministério da Educação Nacional e da Juventude[16] recomendações a respeito de ensino dessa disciplina nas instituições do ensino

[16] *Ministiére de l’Education Nationale et de la Jeunesse* – https://www.education.gouv.fr acesso em 20/08/2019.

básico, nos colégios e liceus. Dos temas[17] recomendados para o ensino de astronomia nos liceus, destacamos: Orbita da Terra – cálculo das posições dos planetas no sistema heliocêntrico e das distancias, processamento dos dados oriundos de observações astronômicas, história da Astronomia desde Erastóstenes até a modernidade, trabalhos práticos, espectrografia, entre outros. De forma que todos os cálculos das posições e das movimentações dos corpos celestes são feitos por aplicações de fórmulas da Geometria Esférica, ou, mais precisamente, da Trigonometria Esférica, podemos concluir que o estudo dessa disciplina atingiu certa regularidade na França.

Como mencionamos anteriormente, as Leis Orgânicas da Reforma Capanema vigoraram no país por duas décadas – entre 1942 e 1961, quando foram substituídas pela primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 4.024/61), considerada a mais importante dentre as impactantes reformas do sistema educacional brasileiro ocorridas ao longo do século XX. Todavia, as recomendações sobre o currículo escolar aparecem de forma pouco elaborada no texto da lei, como podemos ver nos artigos 33 a 36 do Capítulo 1, que regulariza ensino médio:

> Art. 33. A educação de grau médio, em prosseguimento à ministrada na escola primária, destina-se à formação do adolescente.
> Art. 34. O ensino médio será ministrado em dois ciclos, o ginasial e o colegial, e abrangerá, entre outros, os cursos secundários, técnicos e de formação de professôres para o ensino primário e pré-primário.
> Art. 35. Em cada ciclo haverá disciplinas e práticas educativas, obrigatórias e optativas.
> § 1º Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino.
> § 2º O Conselho Federal e os conselhos estaduais, ao relacionarem as disciplinas obrigatórias, na forma do parágrafo anterior, definirão a amplitude e o desenvolvimento dos seus programas em cada ciclo.
> § 3º O currículo das duas primeiras séries do 1° ciclo será comum a todos os cursos de ensino médio no que se refere às matérias obrigatórias.
> Art. 36. O ingresso na primeira série do 1° ciclo dos cursos de ensino médio depende de aprovação em exame de admissão, em que fique demonstrada satisfatória educação primária, desde que o educando tenha onze anos completos ou venha a alcançar essa idade no correr do ano letivo.

[17] http://www.educasources.education.fr/selection-detail-139049.html acesso em 20/08/19.

Ademais, nos artigos 44 a 46 do Capítulo II da Lei, que regulariza Ensino Secundário, a Lei admite variedade de currículos:

> Art. 44. O ensino secundário admite variedade de currículos, segundo as matérias optativas que forem preferidas pelos estabelecimentos.
> § 1º O ciclo ginasial terá a duração de quatro séries anuais e o colegial, de três no mínimo.
> § 2º Entre as disciplinas e práticas educativas de caráter optativo no 1º e 2º ciclos, será incluída uma vocacional, dentro das necessidades e possibilidades locais.
> Art. 45. No ciclo ginasial serão ministradas nove disciplinas.
> *Parágrafo único.* Além das práticas educativas, não poderão ser ministradas menos de 5 nem mais de 7 disciplinas em cada série, das quais uma ou duas devem ser optativas e de livre escolha do estabelecimento para cada curso.
> Art. 46. Nas duas primeiras séries do ciclo colegial, além das práticas educativas, serão ensinadas oito disciplinas, das quais uma ou duas optativas, de livre escolha pelo estabelecimento, sendo no mínimo cinco e no máximo sete em cada série.
> § 1º A terceira série do ciclo colegial será organizada com currículo aspectos linguísticos, históricos e literários.
> § 2º A terceira série do ciclo colegial será organizada com currículo diversificado, que vise ao preparo dos alunos para os cursos superiores e compreenderá, no mínimo, quatro e, no máximo, seis disciplinas, podendo ser ministrada em colégios universitários (LDB 4.024/61).

Para atender a Lei, o Conselho Federal de Educação – CFE, a quem competia definir disciplinas obrigatórias e optativas, publicou em 1962 as orientações para a organização dos quadros curriculares do ensino secundário ginasial e colegial (QUEIROZ; HOUSOME, 2018). Segundo as definições da CFE as disciplinas obrigatórias para o Ginasial e Colegial eram: Português, História, Geografia, Matemática e Ciências Físicas e Biológicas. As disciplinas complementares para o Ginasial e Colegial eram: Desenho e Organização Social e Política Brasileira, ou Desenho e uma Língua Estrangeira Moderna (inglês, francês, espanhol), ou Filosofia e uma Língua Estrangeira Moderna. Os estabelecimentos de ensino poderiam escolher uma das seguintes disciplinas: Línguas estrangeiras modernas, Música (canto orfeônico), Artes industriais, Técnicas comerciais, Técnicas agrícolas, Grego, Desenho, Mineralogia e Geologia, Estudos Sociais, Psicologia; Lógica, Literatura e Artes (QUEIROZ; HOUSOME, 2018).

No que se refere ao ensino de Astronomia e Geometria Esférica, nesse período, não existia uma uniformidade e varia de uma a outra instituição de ensino. Alguns dos colégios tradicionais de São Paulo, como por exemplo Liceu Pasteur, que com a LDB/61 ganhou status de colégio de ensino experimental, manteve as tradições de modelo de ensino francês e nas décadas de 1960 e 1970 administrava aulas de Astronomia. Ademais, com a lei das Diretrizes e Bases 5.692 de 11 de agosto de 1971, houve integração das disciplinas cientificas Física, Química e Biologia, sucumbindo o espaço para as aulas de Astronomia, deixando dessa maneira o ensino de Geometria Esférica apenas para professores entusiasmados.

Na atualidade, com crescimento constante da popularidade da Astronomia, aos poucos essa ciência está retomando seu devido lugar na educação. Um considerável número de colégios conta com secções para atividades extracurriculares em Astronomia, com participações ativas nas olimpíadas de Astronomia e Astronáutica[18].

Terminamos esse tópico com uma breve análise da grade curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática, oferecidos pelas faculdades da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Universidade de S. Paulo e Universidade Federal de Rio Grande do Sul, das quais apresentamos as disciplinas no quadro.

Quadro 7 - Grade curricular dos cursos de licenciatura em Matemática analisados

UFRJ	UFRGS	USP
Cálculo de Uma Variável I	Computador na mat. Elem. I	Ótica
Introdução a computação	Geometria I	Geometria analítica
Geometria euclidiana	História da educação	Cálculo de uma variável I
Vetores no R2 e R3	Intr. aos números racionais	Gravitação
Cálculo de uma variável II	Intr. às funções algébricas	Intr. a álgebra linear
Fund. Sociológicos da Ed.	Org. da escola básica	Cálculo de uma variável II
Números inteiros	Psicologia da educação I	Matemática na educ. básica
Álgebra linear	Educação mat. e docência	Intr. as medidas em física
Calc. de várias variáveis I	Filosofia da educação	Estatística para licenciatura I
Psicologia da educação	Fundamentos de aritmética	Álgebra I
Introdução à física I	Geometria II	Calc. de várias variáveis I
Mecânica da partícula	Intr. aos núm. reais e compl.	Estatística para licenciatura II
Teoria de anéis e grupos	Psicologia da educação II	Introdução à análise
Calc. de várias variáveis II	Vetores e geom. Analítica	Calc. de várias variáveis 2
Educação brasileira	Álgebra I	Fisca do calor
Filosofia educ. ocidental	Álgebra linear I	Cálculo numérico e aplicacão
Intr. a eletromagnetismo	Cálculo A	Álgebra II
Matemática na escola	Educação mat. e docência II	Mecânica
Fun. da Aritmética e Álgebra	Intr. as func. transcendentes	Didática

[18] http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/34240 acesso em 20/08/2019.

Didática	Cálculo B	Geomet. e desenho geomet. I
Matemática finita	Combinatória I	Geomet. e desenho geomet. II
Informática ap. no ensino	Educação mat. e docência 3	Eletricidade e magnetismo I
F. de funções e conjuntos	Física I	Políticas e org. da ed. Básica
Didática da matemática I	Álgebra II	História da matemática I
Probabilidade e estatística	Educação contemporânea	Metod. do ensino de mat. I
Análise real	Física II	Geometria III
Didática da matemática II	Aplicações da matemática	Metod. do ensino de mat. II
Fund. da Geometria	Combinatória II	Elementos da teoria dos conj.
Análise Complexa	Educ. mat. e tecnologia	Fund. de astronomia (opt.)
Evolução da ciência e matem.	História da matemática	Meteorologia física (opt.)
Profissão docente (opt.)	Educação especial	Conc. de astronomia para lic.
Estrut. algébricas (opt.)	Probabilidade e estatística	Geometria projetiva (opt.)
Geom. não-euclidiana (opt)	Análise real I	Geom. não-euclidiana (opt.)

Fonte: Prospectos informativos das faculdades UFRJ, UFGRS e USP.

De acordo com o quadro 7, no que diz respeito ao ensino de Geometria Esférica e Astronomia, podemos afirmar que os cursos de licenciatura de UFRJ e USP já oferecem a disciplina geometria não-euclidiana, embora em forma optativa. Ademais, o curso de licenciatura da USP oferece, também em forma optativa, as disciplinas Astronomia e Conceitos de Astronomia para licenciatura. Desta forma, os alunos que escolheram essas disciplinas durante os estudos já adquirem o conhecimento do conteúdo relativo da Geometria Esférica. Contudo, um docente ainda deveria entender as estruturas de disciplina, os princípios de organização conceitual e as teorias alternativas e como elas podem se relacionar com questões de currículo e de ensino.

Quanto a grade curricular das todas as três faculdades que escolhemos como exemplo para formação docente em matemática, nenhuma delas oferece explicitamente o ensino efetivo da Geometria Esférica, ainda que esse objeto matemático pode aparecer nas aulas da História da Matemática, no entanto apenas em forma narrativa. Ressaltamos que nessas faculdades também é possível cursar o bacharelado em Astronomia.

Mediante o apresentado, reparamos idas e vindas de ensino de Geometria Esférica e disciplinas relativas à Astronomia ao longo do tempo nos conteúdos estabelecidos por lei. Ademais, como explicou Souza (2008), até meados do século

XX, as instituições de Ensino Secundário escasseavam de professores pertinentes para levar a qualidade do ensino de ciências exatas à ciências humanas, o que vai ao encontro de Buffon e Neves (2017, p.5) [...] “ao ressalvarem que os professores de Ciências, além de carecer de uma formação adequada, também não têm consciência de suas insuficiências”.

Ao considerar que a Astronomia tem um papel relevante para o ensino integral, apresentaremos no próximo tópico como os documentos oficiais que regem o Brasil conscientizam o Ensino de Astronomia e Geometria na atualidade.

3.3 Ensino de astronomia e geometria na Legislação Brasileira Atual

Com objetivos de apresentar uma proposta nacional para a construção de uma base única para o ensino fundamental foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN nos anos de 1997 e 1998 para a 1ª a 8ª Série (faixa etária entre 5 e 15 anos) e em 1999 para o ensino médio (faixa etária entre 14 e 18 anos), pelo Ministério da Educação e Desporto. A nossa investigação tem como uma de suas referências iniciais, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), no que se refere ao Ensino Fundamental II, os PCN-Matemática – 5ª a 8ª Séries, atualmente 6º ao 9º ano, por se tratar do documento norteador para o ensino de matemática aos discentes, disposto da seguinte forma:

> [...] fruto da criação e invenção humanas, a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve-se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico (p. 25).

Os PCN de Matemática (BRASIL, 1998) também apontam que, historicamente, a matemática foi construída como resposta à perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como a sua importância em organização de projetos de natureza interdisciplinar, que integrem conteúdos da Matemática com outras áreas do currículo, como o da Geografia (p. 138). A interdisciplinaridade da Astronomia é justamente o que os PCN do Ensino Médio (BRASIL, 2000) defendem. Na elaboração do programa de ensino de disciplinas de Ciências de Natureza e Matemática, “[...] está se levando em conta o fato de que elas incorporam e compartilham, de forma explicita e integrada, conteúdos de disciplinas afins, como Astronomia e Geologia” (p. 23). Quando se trata do estudo de Universo, Terra e vida, os destaques são na Terra e no Sistema Solar:

> Conhecer as relações entre os movimentos da Terra, da Lua e do Sol para a descrição de fenômenos astronômicos (duração do dia e da noite, estações do ano, fases da lua, eclipses etc.).
> Compreender as interações gravitacionais, identificando forças e relações de conservação, para explicar aspectos do movimento do sistema planetário, cometas, naves e satélites (BRASIL, 2000, p. 79).

Sendo assim, é possível ressaltar que, para o estudo compreensível de designados fenômenos astronômicos, que pertencem à área do conhecimento de Astronomia Posicional, o estudo de Geometria Esférica é imprescindível.

Ainda no levantamento das referências, desta vez na Base Nacional Curricular Comum – BNCC da educação básica atualmente vigente, os conteúdos de Astronomia para os anos iniciais estão na área de ciência da natureza no eixo: Terra, constituição e movimento. Na BNCC os conteúdos de Astronomia estão presentes nos primeiros ciclos do ensino fundamental e incluem movimentos da Terra, Lua, estações do ano, movimento aparente do Sol, e o Sol como fonte de energia (BRASIL, 2017). Já na BNCC para o Ensino Médio, Astronomia é considerada como uma competência específica:

> Construir e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar decisões éticas e responsáveis. Ao reconhecerem que os processos de transformação e evolução permeiam a natureza e ocorrem das moléculas às estrelas em diferentes escalas de tempo, os estudantes têm a oportunidade de elaborar reflexões que situem a humanidade e o planeta Terra na história do Universo, bem como inteirar-se da evolução histórica dos conceitos e das diferentes interpretações e controvérsias envolvidas nessa construção (BRASIL, 2017, p. 539).

E mais “elaborar explicações e previsões a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais”. (BRASIL, 2017, p. 543).

A respeito das habilidades relativas à BNCC, existem tópicos como, reconhecer as linhas traçadas nos globos terrestres e planisférios para facilitar a localização, identificar características da Terra como seu formato esférico, com base na observação, manipulação e comparação de diferentes formas de representação do planeta (mapas, globos, fotografias, etc.). Além disso, defendem que:

> Os estudantes, com maior vivência e maturidade, têm condições para aprofundar o exercício do pensamento crítico, realizar novas leituras do mundo, com base em modelos abstratos, e tomar decisões responsáveis, éticas e consistentes na identificação e solução de situações-problema. Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2016, p. 537; 517).

Desta forma, tem-se a hipótese de que, em um contexto mais amplo, o pensamento geométrico também abrange Geometria Esférica, construindo – se tornando então – a ponte entre Matemática e Astronomia Posicional.

Por sua vez, o Currículo Paulista (SÃO PAULO – ESTADO, 2020) compreende Terra e Universo como objeto de conhecimento de uma das unidades temáticas organizadas no ensino fundamental de ciências. De acordo com o currículo, as habilidades a serem desenvolvidas nessa temática são:

> Compreensão do sistema Terra, Sol, Lua e de suas características, assim como as de outros corpos celestes, envolvendo a construção de descrições e explicações sobre suas dimensões, composição, localização e movimentos e forças que atuam entre e sobre eles. A unidade prevê o desenvolvimento de habilidades associadas ao estudo do céu, do planeta Terra e dos fenômenos celestes [...] reconhecendo outras formas de conceber o mundo, de modo a valorizar a pluralidade de conhecimentos (SÃO PAULO – ESTADO, 2020, p. 377).

Destarte, o currículo promove o pensamento espacial que tem por fim a compreensão do Universo como um todo e a posição humana dentro dele:

> Nos Anos Iniciais, a curiosidade dos estudantes pelos fenômenos celestes pode ser o ponto de partida para explorar atividades de observação do céu, a fim de estimular o desenvolvimento do pensamento espacial, que será ampliado e aprofundado nos Anos Finais com o uso de modelos explicativos e discussões acerca da posição do nosso planeta e do papel da espécie humana no Universo. Também se promove, nos Anos Finais, a compreensão do planeta

> como um sistema amplo, no qual ocorrem diferentes fenômenos, o que permite discutir ainda os princípios da sustentabilidade socioambiental (SÃO PAULO – ESTADO, 2020, p. 378).

Como no Currículo Paulista a matemática é uma matéria transdisciplinar que permite a articulação tanto horizontal (durante o mesmo ano letivo) como vertical (entre os anos anteriores e seguintes) com as demais áreas de conhecimento, visando o desenvolvimento das competências especificas, entendemos a geometria esférica de suma importância para compreensão do espaço e do Universo em diferentes contextos. Assim, no próximo tópico, buscaremos como a geometria aparece em livros didáticos e paradidáticos a fim de observar se está relacionada ou não à astronomia.

3.4 Geometria Esférica e Astronomia em livros didáticos e paradidáticos

Pretendemos nesse tópico observar como a Geometria Esférica e a Astronomia são abordadas em livros didáticos e paradidáticos encontradas no Brasil e no Exterior. Optamos por tal ampliação de análise por motivo de baixo número de publicações sobre o tema no país.

O livro *Convite às geometrias não-euclidianas* de Lázaro Coutinho (2001), segundo o próprio autor, é destinado a alunos de Ensino Médio ou a “qualquer outro interessado em geometria – a tomar conhecimento das ‘estranhas’ geometrias não-euclidianas”, que dividem ~~a~~ sua posição igualitária com outras geometrias, abrindo ao leitor novas e abrangentes perspectivas de concepção da matemática. Ao longo do livro, o autor tece uma narrativa histórica, partindo de *Elementos* de Euclides, passando pela Geometria Hiperbólica e, chegando na Geometria Elíptica, para fundamentar a importância da Geometria Esférica para a navegação marítima, trazendo para o leitor diversos exemplos práticos para ~~a~~ sua aplicação. Para o autor, a abordagem da Geometria Esférica em sala de aula não significa descartar a Geometria Euclidiana. A abordagem de outras geometrias possibilita relacionar a Geometria a um campo atual e ativo de pesquisa cientifica que vai além das ideias apresentadas por Euclides 2700 anos atrás. Aprender uma nova Geometria de certa forma resgata a Geometria Euclidiana, pois para apreensão de conceitos em Geometria Esférica é preciso ter a base de conhecimento, ou seja, os conceitos da Geometria Euclidiana.

O livro *Fundamentos de Matemática: Didática da Matemática* de Waldemar de Maio e Ana Chiummo (2012) enfatiza a nova “Geometria Conceitual” com suas aplicações e a importância de o aluno “pensar logicamente”. O estudo de geometria nos anos finais de Ensino Básico (Ensino Médio), segundo autores, é centrado na terminologia correta e na axiomática, como estrutura dedutiva da geometria. Essa ênfase no processo dedutivo requer também o conhecimento, pelo aluno, de recursos da álgebra, abrindo com essa conjuntura a porta para primeiras demonstrações dos teoremas que analisam as propriedades geométricas. O estudo da história da geometria e a introdução das geometrias não euclidianas mostram a geometria em outra luz – como expressão da criatividade e um tema interessante, trazendo uma “pitada” oculta de beleza e elegância.

Em *Geometrias no euclidianas* de Luis A. Santaló (1961) os alunos do ensino secundário encontram os fundamentos da Geometria Projetiva, das cônicas, da Geometria Hiperbólica com propriedades gráficas, ângulos e distancias, áreas e curvas especiais, como também a interpretação projetiva da Geometria Elíptica. Esse livro didático originalmente foi publicado pela Editora Universitária de Buenos Aires e fazia a parte da coleção de livros para o Ensino Médio argentino (faixa etária entre 14 e 19 anos).

O livro *Geometry of Geodesics* de Herbert Busemann (2005) é voltado para os alunos de pré-graduação e de graduação e traz uma abordagem detalhada de geometrias não-euclidianas, e noções de espaços métricos e isometria. Embora sua primeira impressão data ainda de 1955, o foco do livro é na interdisciplinaridade das geometrias, com exemplos de aplicação em diferentes áreas de interesse: de desenho das geodésicas à análise de multidimensionais espaços de Minkowski.

O *Astronomy* de Robin M. Green (1984, reimpressão 1998) é um livro didático europeu sobre fundamentos da Astronomia. Os cálculos provenientes das observações astronômicas, das posições e de movimentação dos objetos celestes são feitos por meio de fórmulas de trigonometria esférica, e seu desenvolvimento tem destaque no livro. O público de *Astronomy* são os alunos do ensino médio voltado para ciências da natureza e os alunos de graduação que têm Astronomia na sua grade curricular.

As mesmas fórmulas de trigonometria esférica encontramos em *Astronomia e Astrofísica* de Kepler e Saraiva (2017), com uma serie de exemplos práticos para sua utilização (como por exemplo, o cálculo da hora de nascer e de pôr de Sol em um determinado lugar). Ressaltamos aqui que o *Astronomia e Astrofísica*, que é uma publicação do Departamento de Astronomia do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, é uma das raras publicações nacionais, caracterizada pela amplitude e riqueza dos temas abordados, voltadas designadamente para os alunos de graduação em referidos cursos.

Por fim, escolhemos a *Astronomia Geral*[19] de B. Sevarlic e Z. Brkic (1972). Pelo seu conteúdo, os temas abordados, o público, entre outros, a *Astronomia Geral* de Sevarlic e Brkic é análogo a *Astronomia e Astrofísica* de Kepler e Saraiva. No entanto, optamos por mencioná-lo nesse trabalho tendo em vista a importância que essa publicação representou para mim quanto aluno da Faculdade de Matemática em Belgrado.

De acordo com Buffon e Neves (2017), as pesquisas realizadas em Ensino de Astronomia entre anos 1990 e 2010, além de encontrar escassez de livros didáticos sobre o tema, mapearam os erros conceituais nesses materiais, bem como concepções prévias ou espontâneas de estudantes e de professores acerca da Astronomia, no ambiente escolar. Contudo, segundo autores, uma vez que começaram a surgir propostas de cursos de aperfeiçoamento docente e maneiras de inserir a Astronomia nas diferentes modalidades de ensino, direcionou os pesquisadores a apresentar instrumentos que pudessem proporcionar a ampliação da Astronomia na sala de aula.

Com descrito acima, no próximo capítulo apresentaremos os conhecimentos de geometria esférica necessários para o ensino de Astronomia Posicional.

[19] Tradução nossa; o título em sérvio do livro é *Opšta Astronomija.*

CAPÍTULO 4: CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS PARA O ENSINO DE ASTRONOMIA POSICIONAL

Neste capítulo, apresentaremos um breve histórico acerca das geometrias: euclidiana, hiperbólica, elíptica e esférica, como o caso especial da geometria elíptica. Ademais, desenvolvemos fórmulas da trigonometria esférica, essenciais para a navegação marítima, como também para todos os cálculos relacionados às posições e movimentos dos objetos celestes, da Terra e dos planetas do sistema solar, cometas, asteroides e todos os objetos observáveis no céu. Esses cálculos são base para a disciplina de ensino Astronomia Posicional.

4.1 Um breve histórico acerca das geometrias

4.1.1 Os Elementos

Os Elementos (ΣΤΟΙΧΕΙΑ) de Euclides por mais de 22 séculos contribuíram à humanidade com inestimável valor não apenas científico, mas também cultural. Até o ano 1900 o número de edições dessa obra monumental ultrapassava 17000[20], desde a sua primeira impressão em 1482, com traduções em praticamente todas as línguas do planeta. A fundamental característica, que torna este livro tão famoso, é sua estrutura lógica de teoremas e problemas, que influenciou o pensamento científico ao longo de 2000 anos, mais do que qualquer outra obra, o que o torna o mais antigo trabalho científico ainda em uso, apresentado em 13 livros. Embora a grande porção da geometria encontrada nos livros de matemática tenha emergido nos seis primeiros livros dos Elementos, a geometria ensinada na atualidade é o legado de matemático David Hilbert. A contar dos tempos dos antigos gregos, matemática vem acumulando teoremas, e destarte a maioria delas tenham sido provadas, no final do século XIX faltava consenso de como foram originalmente demonstradas, e se de fato foram demonstradas. O método hipotético-dedutivo, na visão de Hilbert, deveria demonstrar conclusivamente a resposta na qualquer pergunta matemática, sem contradição, a partir apenas dos axiomas básicos[21]. Os axiomas, como hipóteses fundamentais, são

---

[20] (BILIMOVIC, 1949).

[21] Em 1931 matemático Kurt Gödel publicou o livro *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* – Sobre as Proposições Indecidíveis no *Principia Mathematica*

considerados auto evidentes e aceitos como alicerces da Matemática. Decerto, a Geometria, do mesmo modo que as outras áreas de matemática, precisa dos axiomas para a sua edificação logica subsequente, e como os axiomas de geometria surgiram nos Elementos, dedicamos esse tópico a essa obra.

O primeiro livro de Elementos começa com uma série de definições que explicam os primeiros conceitos geométricos, como ponto, linha, plano, ângulo, círculo e assim por diante. Com base na tradução de Elementos de Euclides por Anton Bilimovic (1949, p.5, tradução nossa), aqui estão algumas das definições:

1. Ponto é um lugar único no espaço que não tem partes nem grandeza alguma.
2. Linha é um comprimento sem largura.
3. As extremidades de uma linha são pontos.
4. Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos dela mesma.
5. Uma superfície é o que tem comprimento e largura.
6. As extremidades de uma superfície são linhas.
7. Uma superfície plana é uma superfície que jaz igualmente com suas linhas retas.
8. Um ângulo em um plano é a inclinação mútua de duas linhas em um plano que se cruzam e não se encontram na mesma reta.
9. Um círculo é uma figura plana bordada por uma única linha (chamada periferia) de modo que todas as linhas retas desenhadas a partir de um ponto, localizado dentro da própria figura, até aquela linha (à periferia do círculo) são iguais.
10. Este ponto é chamado o centro do círculo.
11. O diâmetro de um círculo é qualquer linha reta que passa pelo centro do círculo e é delimitada de cada lado pela periferia do círculo; ela reparte o círculo em dois semicírculos.

e Sistemas Relacionados, que continha os teoremas da indecidibilidade, provando ser tarefa impossível criar um sistema matemático completo e consistente.

Notamos que estas não são definições estritas, mas apenas explicações de objetos geométricos elementares intencionados a criar uma representação intuitiva desses conceitos na consciência humana.

Euclides dividiu o ponto de partida dos *Elementos* em axiomas e postulados[22], dos quais os postulados são de teor explicitamente geométricos. Nas várias transcrições dos *Elementos*, o número de postulados e axiomas não é o mesmo, mas é comumente aceito que Geometria baseada em Euclides têm nove axiomas e cinco postulados.

De acordo com Bilimovic (1949, p.6, tradução nossa) aqui estão os postulados na forma em que Euclides os deu:

> I. Supõe-se que é possível construir uma linha reta de qualquer ponto para qualquer outro ponto.
> II. Supõe-se que qualquer reta, seguindo a sua direção, pode ser estendida indefinidamente.
> III. Supõe-se que em um plano em torno de cada um dos seus pontos pode-se descrever o círculo de qualquer raio.
> IV. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

Para a evolução posterior da geometria, é muito importante o quinto postulado de Euclides, que em sua versão original, diz:

> V. Se uma reta que cruza as outras duas retas coplanares de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que soma de dois ângulos retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos internos (BILIMOVIC, 1949, p.6, tradução nossa).

[22] Embora em vários contextos “axioma” e “postulado” são usados como sinônimos, a diferença essencial entre dois é baseada no fato de que os axiomas são aplicados como pressupostos teóricos que não são provados ou demonstrados, necessários para a construção ou aceitação de uma teoria de qualquer área de conhecimento. Por outro lado, os postulados são as proposições fundamentais restritas exclusivamente ao campo da geometria.

Por sua natureza, os postulados são reivindicações estritamente geométricas. São explicitados em forma de exigências ou suposições que enfatizam seu caráter construtivo. Os três primeiros postulados são de fato de caráter construtivo e foram base para teoria das estruturas geométricas durante séculos. Os dois últimos postulados, no entanto, não podem ser considerados de caráter construtivo. Na geometria moderna o quarto postulado é uma afirmação a ser comprovada. Contudo, a complexidade do quinto postulado, qual é equivalente ao axioma das paralelas[23] – de acordo com o qual por um ponto exterior a uma reta apenas passa uma outra reta paralela à dada –, despertou a atenção de matemáticos e os forçou a tentar derivá-lo de outros axiomas da geometria. Dessa maneira, se o quinto postulado pode ser provado, ele não poderia mais ser considerado um postulado, mas sim um teorema. Por mais de dois mil anos, os matemáticos de todos os países onde os *Elementos* eram conhecidos tentavam encontrar provas do quinto postulado de Euclides. A despeito de ensaios, o erro lógico comum na demonstração incluía um "Cavalo de Troia", ou seja, uma suposição equivalente ao postulado V, que afirma o mesmo o que o postulado, apenas de uma maneira diferente.

Vale ressaltar que a partir dos axiomas e postulados de Euclides nem toda afirmação pode ser derivada. Essa exiguidade foi notada pela primeira vez pelo matemático grego Arquimedes, que, em sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro,* expandiu a lista de postulados geométricos, introduzindo os cinco postulados a seguir para estabelecer a geometria métrica:

- De todas as linhas que têm fins comuns, a linha reta é a mais curta.
- As duas linhas que têm extremidades comuns e estão no mesmo plano não são iguais se ambas são convexas e uma delas é englobada pela outra.
- Da mesma forma, de todas as áreas que possuem uma área plana periférica comum, o plano é o menor.
- E duas areas que possuem uma área plana periférica comum não são iguais se ambas forem convexas e uma delas (ou uma parte dela) for coberta pela área e pelo plano periférico.

[23] Axioma de Playfair: dada uma reta e um ponto exterior, existe uma e uma só reta contendo o ponto e paralela à reta dada.

- De duas linhas desiguais, duas superfícies desiguais ou dois corpos desiguais, a grandeza maior será menor que a grandeza obtida pela multiplicação da grandeza menor pelo número necessário de vezes.

Dos listados, o último postulado, em termos numéricos, pode ser formulado da seguinte maneira:

*Dados os números reais **a** e **b** com **0** < **a** < **b**, existe algum inteiro positivo **n** tal que **na** > **b***

Esse postulado, também conhecido como a propriedade arquimediana ou Princípio de Arquimedes, é ingrediente fundamental na construção da reta real.

Depois de Arquimedes, as tentativas de suplementar os fundamentos da geometria euclidiana não contribuíram com nada revolucionário até o final do século XIX, quando Hilbert definiu princípios da base lógica da geometria, invocando um sistema de axiomas a partir do qual todos os teoremas podem ser derivados, sem recorrer à obviedade de representações gráficas. Hilbert identificou 20 axiomas independentes e os classificou em cinco grupos – os da Incidência, da Ordem, da Congruência, das Paralelas, e da Continuidade. Na parte de Axiomas das Paralelas, Hilbert deu a solução para o problema do postulado V de Euclides, provando que esse postulado não é uma consequência dos quatro grupos restantes de axiomas, ou seja, esse é realmente um axioma, não um teorema[24].

4.1.2 Geometria Hiperbólica

Na terceira década do século XIX, Nikolai Lobachevsky e Janos Bolyai, independentemente um do outro, propõem basear a teoria das paralelas em um axioma que nega o quinto postulado euclidiano, construindo uma teoria logicamente válida quanto a geometria euclidiana. De acordo com Cajori (2007, p. 398)

---

[24] De acordo com Freeman (2003, p. 26) "[...] este axioma é, na realidade, conhecido por *Axioma de Paralelismo de Hilbert,* e é uma simplificação do axioma de paralelismo de Playfair [...], com omissão da parte respeitante à existência de paralela. Na presença dos restantes axiomas, o axioma de Hilbert é equivalente ao postulado original de Euclides".

> [...] Lobachevsky construiu uma geometria imaginaria, como a chamou, e descrita por W. K. Clifford[25] como bastante simples, ou seja, Euclides sem a hipótese viciosa. Uma parte notável desta geometria é isso, por um ponto um número indefinido de retas pode ser traçado no plano (CAJORI, 2007, p.398).

Sendo assim, a Geometria de Lobachevsky é uma geometria baseada na axiomática de Hilbert, a partir dos quais os mais importantes teoremas geométricos pudessem ser deduzidos, e no Axioma de Lobachevsky:

Na geometria hiperbólica existe uma reta **l** *e um ponto* **P** *não pertencente a* **l** *de tal modo que existem, pelo menos, duas retas distintas paralelas a* **l** *que contém* **P***; o ponto* **P** *e a reta* **l** *diz-se que tem propriedade de Lobatchevsky.*

Desta forma, a geometria hiperbólica diverge da geometria euclidiana em um único axioma, contudo, os teoremas da geometria são verdadeiros tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica.

Um sistema semelhante de geometria foi deduzido por Janos Bolai na Hungria, que o chamou da “geometria absoluta”. Em 26 páginas, como apêndice de livro de seu pai, Farkas Bolyai, intitulado *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae ... introducendi,* Janos Bolyai apresentou uma geometria alternativa e consistente, “que possa corresponder à estrutura do universo e libertar matemáticos para estudar conceitos abstratos, independentemente de qualquer conexão possível com o mundo físico”[26]. De um mundo geométrico em que se podia confiar plenamente na intuição baseada em representações que criam os sentidos, Bolyai entrou em um mundo que existe além do alcance de nossa experiência. Portanto, não é de surpreender que suas ideias não recebam destarte o reconhecimento que lhe pertence.

De acordo com Cajori (2007, p.399)

> (...)Enquanto Lobachevsky desfrutou a prioridade da publicação, pode-se dizer que Bolyai desenvolveu mais cedo o seu trabalho,

---

[25] Filósofo e matemático britânico que, influenciado pelas geometrias não euclidianas de Bernhard Riemann e Nikolay Lobachevsky, escreveu *"On the Space-Theory of Matter"* (1876). Ele apresentou a idéia de que matéria e energia são simplesmente diferentes tipos de curvatura do espaço, antecipando assim a teoria geral da relatividade de Albert Einstein (CAJORI, 2007).

[26] https://www.britannica.com/biography/Janos-Bolyai acesso em 25/08/2009

> convencendo-se do caráter não-contraditório da sua nova geometria antes de 1925, existindo alguma dúvida se Lobachevsky alcançou este ponto em 1926 (CAJORI, 2007, p.399).

Todavia, tanto as pesquisas de Bolyai como as de Lobachevsky permaneceram em quase completo esquecimento, até que em 1866 a *Geometrische Untersuchungen* de Lobachevsky foi traduzida para o francês, e quando em 1891 George Bruce Halsted, então da Universidade do Texas, "tornou esses tratados facilmente acessíveis ao leitor americano pelas traduções editadas do *The Science Absolute of Space de J Bolyai* e o *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* de 1840" (CAJORY, 2007, p.399).

Os modelos de representação do espaço hiperbólico foram desenvolvidos no século XIX, dos quais Coutinho (2001) destaca o modelo de pseudoesfera, de Eugenio Beltrani, apresentado na figura 1:

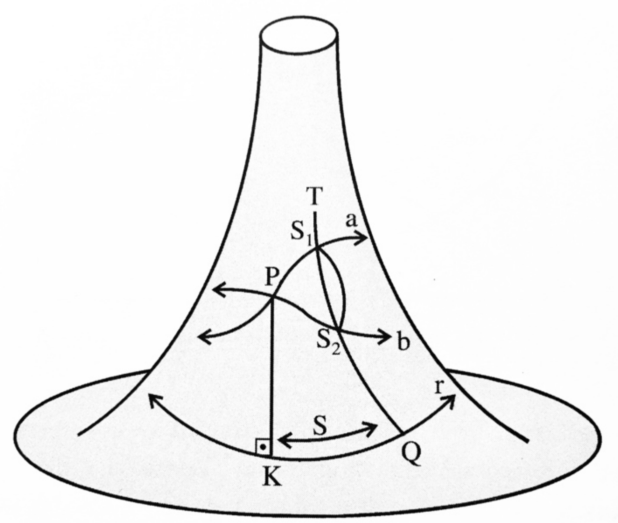

Figura 1: Exemplo de pseudoesfera. Fonte: Coutinho (2001, p. 41)

Na figura 1, por um ponto **P** fora da reta **r**, passam duas paralelas, **a** e **b**. Na geometria hiperbólica, existem infinitas retas distintas que passam por **P** e que não interceptam **r**, de modo que o postulado V de Euclides é falso.

Um modelo plano para Geometria Hiperbólica foi apresentado pelo matemático Henri Poincaré, conforme figura 2:

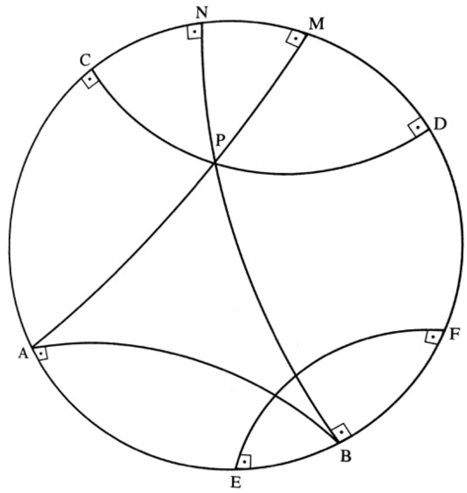

Figura 2: Disco de Poicaré. Fonte: Coutinho (2001. p. 45)

No Disco de Poincaré, as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo, que representa o plano hiperbólico. **AB** e **EF** são retas secantes e **AM** e **BN** são retas paralelas a reta **AB**.

4.1.3 Geometria Elíptica

O termo *geometria não-euclidiana,* de acordo com Cajory (2007), é devido a matemático alemão Karl Friedrich Gauss que estudou essa ideia por mais de 30 anos, no entanto, sem publicar sobre o assunto. Como relata Cajory (2007, p.400)

> (...) Em 1829 escreveu a F. Bessel[27], dizendo que "sua convicção era de que não podíamos descobrir completamente *a priori* a geometria e isso se tornou, se possível, ainda mais firme", e que "se o numero é meramente o produto da nossa mente, o espaço também possui uma *realidade além* de nossas mentes da qual não podemos ordenar totalmente com leis *a priori".*

As pesquisas de Gauss, Lobachevsky e Bolyai constituíram o primeiro período da história das geometrias não-euclidianas. O segundo foi marcado pelo Bernhard Riemann, que, ainda na época quando era aluno de Gauss, estabeleceu a geometria a partir de um novo ponto de vista. Durante a apresentação da sua dissertação em 1854, ele definiu o campo da geometria que, posteriormente, será chamada da Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica, considerando, em particular, as ideias hoje chamadas de variedades múltiplas, métrica riemanniana e curvatura. Riemann

[27] Astrônomo alemão cujas medições de posições para cerca de 50.000 estrelas e métodos rigorosos de observação (e correção de observações) levaram a astronomia a um novo nível de precisão. Ele foi o primeiro a medir com precisão a paralaxe e, portanto, a distância de uma estrela diferente do Sol.

demonstrou que os espaços curvados existem intrinsecamente, como objetos da sua própria criação, sem um espaço plano que os continha. O que precisamos para definir esse espaço é uma regra de medir distância entre dois pontos quaisquer desse espaço, ou em outras palavras, precisamos definir uma *métrica.* Desta maneira, como relata Cajory (2007, p.401) "[...] Riemann explicou estas suas ideias do espaço, ensinando-nos a distinguir entre as noções de "ilimitado" e de "extensão infinita"". Na Geometria de Riemann os pontos definem-se da mesma forma que na geometria plana, mas as retas não – elas dependem do tipo de superfície em que estão traçadas.

Um modelo comum para a geometria euclidiana é a "superfície plana". Por outro lado, o modelo mais simples para geometria elíptica é uma esfera, onde as retas (retas não-euclidianas) são "círculos maiores" ou "círculos máximos" (como o equador ou os meridianos no globo), enquanto os pontos opostos são congruentes. As superfícies de Riemann encontram-se no cruzamento entre várias áreas. Do ponto de vista topológico, uma superfície de Riemann é uma variedade topológica bidimensional, e como tal é classificado por um único invariante, o número de furos nela existentes. Este número de furos é chamado de genus da superfície. Por exemplo, uma esfera tem o genus zero enquanto um toro tem o genus um, conforme figuras 3 e 4:

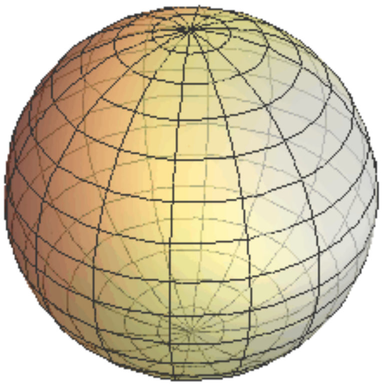

Figura 3: Esfera. Fonte: Software Mathematica

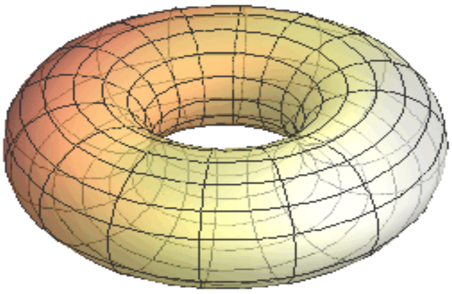

Figura 4: Toro. Fonte: Software Mathematica

Enfatizamos que estamos considerando aqui a superfície da esfera e do toro, e não o seu interior. O próximo exemplo é um *wienerbrød*[28]*,* ou seja, o toro duplo, que tem o genus 2, conforme a figura 3:

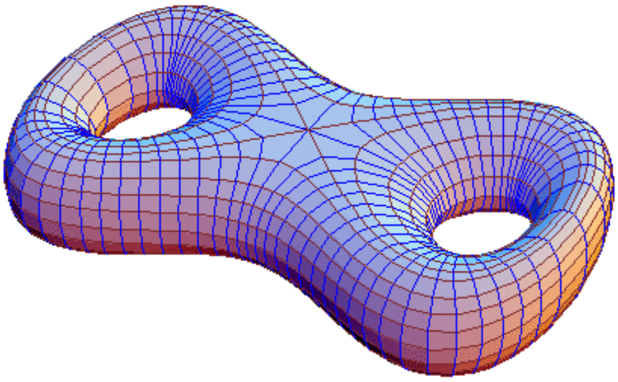

Figura 5: Toro duplo. Fonte: Software Mathematica

Ademais, como uma superfície é uma variedade de dimensão dois, ela é semelhante com um plano euclidiano. Por exemplo, a superfície de um globo pode ser representada por uma coleção de mapas, que em conjunto formam um atlas do globo. Ainda que nenhum mapa específico seja suficiente para cobrir toda a superfície do globo, qualquer lugar do globo estará em pelo menos um dos mapas.

No que diz respeito ao quinto postulado de Euclides, na Geometria Elíptica esse foi substituído pelo Postulado de Riemann:

Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto em comum.

Desta maneira podemos resumir que a diferença essencial entre geometria euclidiana e não euclidiana é a natureza das retas paralelas. Na geometria euclidiana,

---

[28] Doce típico dinamarquês, semelhante a pretzel.

se tomarmos a reta **l** e o ponto **P**, que não está em **l**, então podemos construir apenas uma reta que passa por **P** que é paralela a reta **l**. Na geometria hiperbólica, em contraste, existem infinitas que passam por **P** paralelas a **l**, enquanto na geometria elíptica não existem retas paralelas.

4.1.4 Geometria Esférica

Como enfatizamos no tópico anterior, o modelo mais simples para geometria elíptica é uma esfera, considerando-se substancial para essa geometria a superfície da esfera, e não o seu interior, isto é, não estamos observando esfera como um solido. Ademais, esfera é uma superfície bidimensional continuada, e, segundo a definição de Riemann, não é mais de extensão infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim ilimitada. A Geometria esférica é definida na *superfície* da esfera. O que a torna diferente da Geometria Euclidiana é o fato que na esfera não existem linhas retas. Analogia às retas no plano são os círculos máximos na esfera.

Abordaremos os fundamentos de Geometria Esférica, essenciais para o ensino de Astronomia Posicional, tais como: círculo máximo, o arco e o polo do círculo máximo, triangulo esférico, distância entre dois pontos em uma superfície esférica, entre outros, bem como fórmulas da trigonometria esférica, derivadas da geometria analítica.

A intersecção entre uma esfera e um plano é um círculo. Se o determinado plano atravessa o centro da esfera, o círculo resultante é denominado por *círculo maior* ou *círculo máximo.* Todas as outras intersecções entre esfera e plano são *círculos menores*. É evidente que os diâmetros da esfera e do círculo máximo são congruentes. A intersecção entre dois planos que atravessam o centro da esfera corresponde ao diâmetro da esfera. Portanto, os pontos da intersecção de dois círculos máximos são *diametralmente opostos.*

Existe apenas um círculo máximo que passa por dois pontos não-diametrais. O *arco do círculo máximo* corresponde a menor distância entre dois pontos na esfera. O ponto na esfera equidistante de todos os pontos de determinado círculo máximo é denominado por *polo* desse círculo. Três pontos na esfera pertencentes ao mesmo círculo máximo são analogia aos três pontos colineares em plano. A figura formada pelos arcos de três círculos máximos, que une três pontos distintos sobre uma esfera, e não pertencentes a um mesmo círculo máximo, denominamos *triangulo esférico,* conforme figura z:

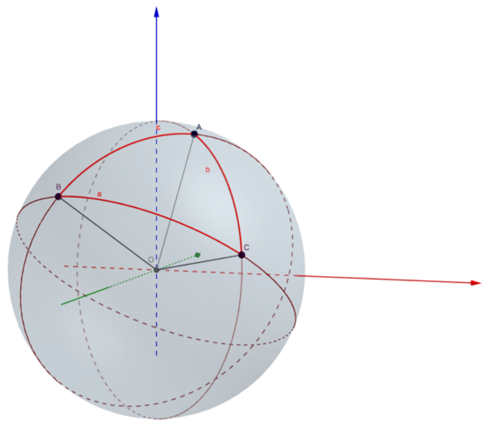

Figura 6: Triangulo esférico. Fonte: produção do autor

É comum marcação dos ângulos de triangulo esférico com letras romanas maiúsculas, e os lados com letras minúsculas, como mostra a figura z:

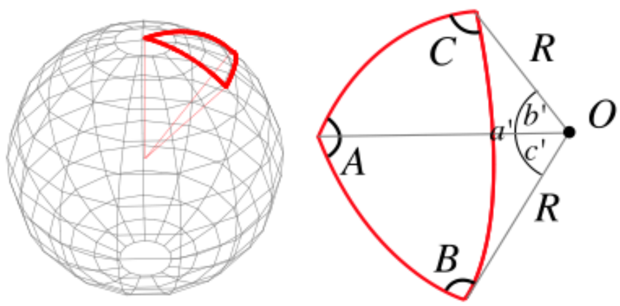

Figura 7: marcação dos ângulos de triângulo esférico. Fonte: Software Mathematica

Entre dois pontos dum círculo máximo sempre consideraremos o arco menor, portanto menor que π. O *ângulo esférico* formado por arcos de dois círculos maiores é o ângulo entre seus planos pertencentes. Isto é equivalente a ângulo formado por *tangentes* de dois círculos maiores em seu ponto de intersecção.

A Geometria esférica impõe que a soma dos ângulos internos de um triangulo esférico não é constante, isto é, varie entre $180º$ e $540º$, tendo um valor fixo dependente do triângulo considerado. Portanto, dado um triangulo esférico ABC, o máximo que se pode afirmar sobre a soma dos seus ângulos se resume com seguinte dupla desigualdade:

$$180º < A + B + C < 540º$$

Em relação a soma dos lados $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, tendo em vista que cada um dos lados é menor de π, temos:

$$180^{\underline{o}} < a + b + c < 360^{\underline{o}}$$

Dois triângulos esféricos são mutuamente polares se cada vértice de um é o polo de uma aresta do outro, e o comprimento do arco em radianos dessa aresta é suplementar ao ângulo interior em seu polo. Em uma esfera, o triângulo polar fica no mesmo hemisfério do triângulo original.

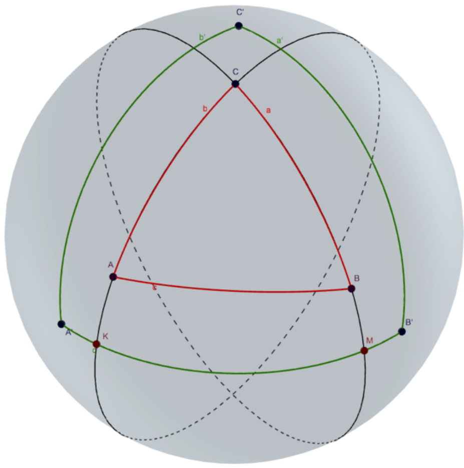

Figura 8: Triângulos polares. Fonte: Produção do autor

Seja ABC um triângulo esférico (figura 6). Os pontos $C', B'\ A'$ representam *polos* dos arcos AB, AC e BC, respetivamente. Triangulo esférico $A'B'C'$ formado com esses pontos é *mutuamente polar* ao triangulo ABC. Os vértices $A\ B$ e C são os polos das arestas do triangulo $A'B'C'$. Vamos analisar a figura 6. Continuação dos arcos CA e CB até intersecção com aresta $A'B'$ resultará em pontos K e M. Como A' e B' são polos das arestas CB e CA, segue $A'M = B'K = 90^{\underline{o}}$. Portanto, comprimento do arco

KM em radianos é igual ao ângulo C de triângulo ABC. Também, como é $A'K + KM = 90º$, temos:

$A'K = 90º - C$, e, portanto,

$c' = A'B' = A'K + KB' = 90º - C + 90º$, e em seguida

$c' + C = 180º$

Analogicamente, podemos denotar todas as outras relações de dois elementos:

$a' + A = 180º, a + A' = 180º$
$b' + B = 180º, b + B' = 180º$
$c' + C = 180º, c + C' = 180º$

Triângulos esféricos, como e triângulos planos possuem suas peculiaridades. Uma delas já mencionamos, que a soma de seus ângulos varia entre $180º$ e $540º$. Ao contrário do triangulo da geometria plana, o qual pode ter apenas um ângulo reto, os esféricos podem ter os três ângulos retos, ou as três arestas, medindo cada uma $90º$. Assim, os triângulos esféricos classificam-se em relação aos ângulos, como:

Retângulo – um ângulo reto,

Birretângulo – dois ângulos retos, e

Trirretângulo – os três ângulos retos.

Em relação as arestas, como:

Retilátero – um lado medindo $90º$,

Birretilátero – dois lados medindo $90º$ cada um, e

Trirretilátero – cada um dos lados medindo $90º$.

Convém notar que, se um triangulo esférico é um trirretângulo, também é trirretilátero simultaneamente. É importante destacar que *cada um dos elementos* dum triangulo esférico se encontra entre 0 e $180º$, portanto, em I ou II quadrante. Nessa área o sinal do cosseno inverso é inalterado e o do seno inverso não. Logo, para cálculo de um determinado elemento é preciso usar as fórmulas quais resultam em cosseno e não em seno, para evitar a duplicidade do resultado.

Até agora, nós observamos apenas os arcos dos círculos máximos – as geodésicas. Para completar o sistema de coordenadas esféricas, introduziremos o *círculo menor.* A intersecção entre um plano e uma esfera, desde que o plano não atravessa o centro da esfera, e denominada por *círculo menor.* Na figura 7 encontram-se representados o círculo menor AB e círculo o maior CD, que são paralelos e têm seus polos nos pontos P e N, tendo *r* o raio do círculo menor, $AO = 1$ e $AP = \theta$ arco de círculo maior, conforme figura 9:

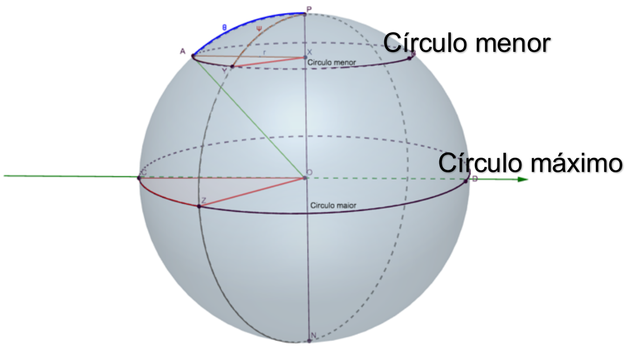

Figura 9: Círculo máximo e círculo menor. Fonte: Produção do autor

Do triangulo plano AOX temos:

$$\overline{AB} = \overline{AO}\ sen\ \sphericalangle A\hat{O}X, \qquad ou\ r = 1\ \times\ sen\ \theta$$

Seja agora Y, um ponto qualquer de círculo menor AB. Círculo Máximo que atravessa polo P e ponto Y cruza o círculo máximo CD em ponto Z, ou $PY = \theta$. Como P é o polo e ângulo esférico $APY = \psi$, procede $\sphericalangle COZ = \psi$. Como AX e YX respetivamente são paralelos com CO e ZO, decorre $\sphericalangle AXY = \psi$, e, portanto, o comprimento de arco AY do círculo menor é:

$$AY = r \sphericalangle AXY = \psi\ sen\ \theta.$$

O ângulo θ é a *distância polar* dos pontos de círculo menor e ψ é ângulo esférico subentendido do arco AY. O comprimento AY da figura 3, não representa a menor distância entre esses dois pontos. O comprimento de arco AY do círculo máximo é o menor. De fato, o arco de círculo menor não componha triangulo esférico qual é sempre formado pelos arcos de três círculos máximos.

Entendemos que fundamentos da Geometria Esférica descritos acima, têm função de liga entre elementos necessários para o ensino de Astronomia Posicional, o que debateremos nos próximos tópicos deste capítulo.

4.2 Conteúdos para o ensino de Astronomia Posicional

Um curso de astronomia posicional para o Ensino Médio pode conter os seguintes conteúdos: movimento aparente dos astros, movimento de satélites naturais e artificiais, sistemas de coordenadas relativas ao centro de galáxias, centro do sistema solar e geocêntricas, tempo e sistemas do tempo.

Como explicam Kepler e Saraiva (2017), uma vez que a Terra apresenta um movimento de rotação, a impressão de observador localizado sobre a superfície terrestre é que os astros se movem com o passar das horas. Como se trata de uma falsa impressão, chamamos esse fato de movimento aparente dos astros, ao contrário de movimento de satélites, que é verdadeiro. Contudo, em dois casos as trajetórias calculamos por meio das técnicas oriundas dos conhecimentos de geometria esférica. Neste trabalho focaremos apenas em movimento aparente dos astros e tempo e sistemas do tempo.

As tarefas pertinentes a esses conteúdos compreendem a computação do horário de nascer e ocaso do Sol e da Lua, as datas e horários dos eclipses, a transição dos astros e satélites pelo meridiano do observador, a distância dos planetas do Sistema Solar e das estrelas mais próximas, o cálculo de ângulo paralático, entre outros.

Em consequência às enormes distâncias dos corpos celestes, não podemos estipular suas distâncias por observação direta; portanto, na primeira aproximação, consideramos todas elas a distâncias iguais, considerado que estão na superfície de uma abóbada imaginária, chamada esfera celeste, projetada nas direções em que as vemos da Terra, como mostra a figura 10:

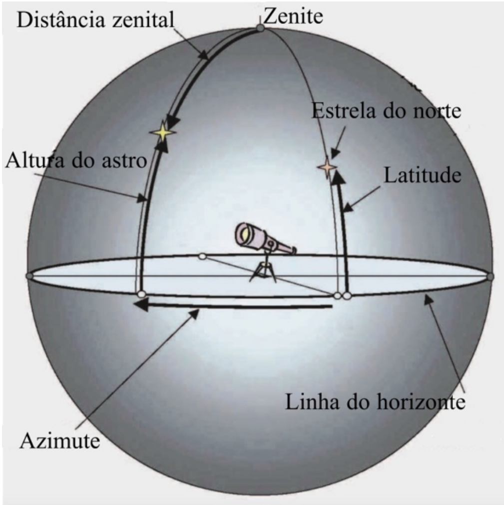

Figura 10: Esfera celeste. Fonte: Segan; Pejovic, 2006

Todos os objetos visíveis no céu são projetados na esfera celeste, inclusive o Polo Norte, o Polo Sul e o Equador, formando, dessa maneira, os polos celestiais e o equador celeste. Observando as mudanças dessas projeções, estudamos efetivamente as movimentações dos corpos celestes. O sistema de coordenadas é definido com a escolha para o centro da esfera: se a preferencia para o centro for o lugar do observador, o sistema de coordenadas é topocêntrica; se for o centro da Terra, geocêntrica; se for o centro do Sol, heliocêntrica; e se for o centro da galáxia, galáctica. Ademais, de acordo com a escolha do plano de referência, definimos o sistema de coordenadas como sistema horizontal, que tem por referencia o plano horizontal do observador, ou como sistema equatorial, como novamente implícito pelo próprio nome, tem por referência o plano que contém o equador da Terra e o equador celeste. Para interligar coordenadas de dois sistemas de coordenadas diferentes[29], bem como para calcular as coordenadas esféricas dos corpos celestes quando observados, é necessário vincular essas coordenadas com expressões analíticas. As coordenadas se conectam como elementos de triângulos esféricos na esfera celeste. Esse triângulo denominamos triângulo de posição.

[29] As coordenadas no sistema horizontal são o azimute (A), que é o ângulo do objeto ao longo do horizonte, e a altura (h), o ângulo entre o objeto e o horizonte local do observador. O sistema equatorial de coordenadas, assim como o horizontal, é também baseado em dois ângulos: a ascensão reta (α), analogamente ao azimute no sistema horizontal, é contada ao longo do plano equatorial, e a declinação (δ), o ângulo entre o plano equatorial e a direção à estrela. Para fins de cálculos de posição dos astros, também é definido o ângulo horário (H), que é o ângulo entre o meridiano horário deste astro e o meridiano astronômico do observador.

Quanto ao tempo e movimentação relativa dos astros podemos sugerir a tarefa a seguir:

Quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte na cidade de São Paulo e em uma certa data do ano?

Com intuito de resolver esse problema, evocamos os conhecimentos prévios que precisam ser mobilizados para sua solução, e idearmos o ecossistema pertinente. Na abordagem proposta por Chevallard (1994), a partir de um conjunto de condições, analisaremos a nossa hipótese para relações entre os objetos envolvidos no estudo da Astronomia Posicional, conforme o esboço do ecossistema a seguir:

Quadro 8: Esboço do ecossistema, com indicações das articulações existentes

Geometria Esférica

ASTRONOMIA POSICIONAL	Conhecimento do contexto – objetos Trigonometria – Articulação Geometria e Geometria Analítica Tempo – Articulação Física Globo terrestre – Articulação Geografia Ferramenta – Lousa ou *software* de geometria

Aplicabilidade de Geometria Esférica para solucionar o problema

No quadro 8, ilustramos um ecossistema bastante resumido, com foco nas inter-relações entre várias disciplinas. Destacamos que astronomia posicional não é uma ciência singular, mas é uma disciplina de ensino, e, como tal, depende das ligações às outras disciplinas, bem como de conhecimento de contextos por trás das articulações entre elas. Por exemplo, ao inserirmos articulação com geografia, nos referimos aos conhecimentos prévios adquiridos nas aulas de geografia, para compreensão e contextualização das tarefas relacionadas a astronomia posicional. No que diz respeito ao problema apresentado, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte na cidade de São Paulo e em uma certa data do ano, seria necessário conhecer seguintes contextos geográficos: a movimentação do Sul durante o ano se modifica e a sua altura varia nas diferentes estações do ano, como também varia o comprimento da sombra na Terra, como mostra a figura 11:

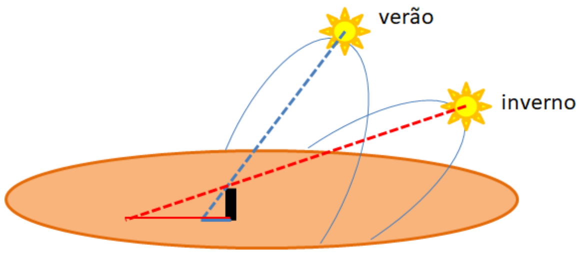

Figura 11: Comprimento da sombra nas diferentes estações. Fonte: Produção do autor

Ademais, é necessário conhecimento do globo terrestre, o que são meridianos e paralelos e como localizar coordenadas de um ponto específico no globo, ou seja, a latitude e a longitude de qualquer ponto situado sobre a superfície terrestre. Também é necessário conhecer fusos horários e a sua divisão pelos meridianos, como mostra a figura 12:

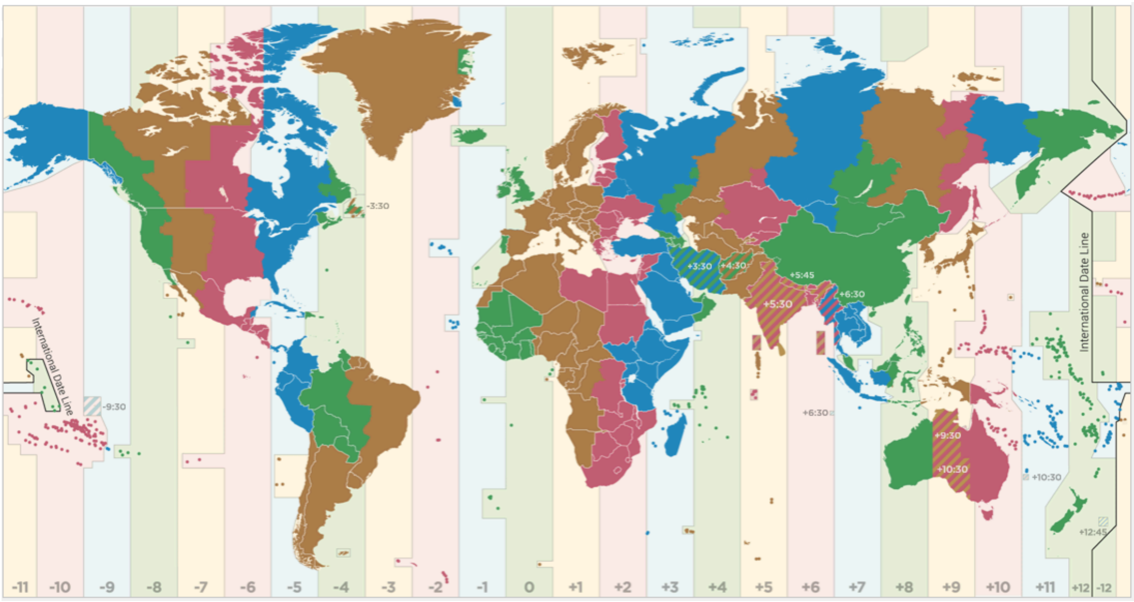

Figura 12: Mapa de Fusos Horários. Fonte: Dayspedia

Outrossim, os conhecimentos a respeito de propriedade do tempo, como uma grandeza física, requerem a compreensão do tempo não apenas em um contexto cronológico, mas também em contexto de conjuntura tempo-espaço e movimentação.

Outro conhecimento prévio para o ensino de Astronomia Posicional é de campo de Geometria Analítica. Constatamos que, de ponto de vista do observador situado na Terra, todas as projeções na esfera celeste se encontram na mesma distancia, de maneira que a sua posição mútua não pode ser expressada em unidades métricas. Nesse ponto que Geometria Esférica entra na cena. Depreendemos que a razão de ser para que Geometria Esférica se torne ensinável sobrevêm de Astronomia

Posicional, o que é em sintonia com teorias de Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que explicitam “[...] que a razão de ser de uma obra matemática em sua origem não é a mesma para que esta se torne um objeto matemático ensinável em uma instituição de ensino” mas se ajusta às variáveis epistemológicas. Em outras palavras, se em sua origem a razão de ser de Geometria Esférica pertencia a ecossistema de navegação, com surgimento de Astronomia Posicional, embora continua vivendo, deixou de ser exclusivamente vivendo no ecossistema de navegação. Nessa perspectiva, inferimos que variáveis epistemológicas evidenciam o conhecimento multidisciplinar referente ao ensino de Geometria Esférica, e, para mais, a sua transdisciplinaridade. Os conhecimentos de trigonometria, oriundos da Geometria Analítica, quando aplicados na esfera, possibilitam o pleno ensino de Astronomia Posicional.

As fórmulas de trigonometria esférica, que necessitamos para resolver o exemplo de problema enunciado, encontramos no trabalho de Andrade (2011) e no Coutinho (2001). Contudo, nenhum dos autores demonstra essas fórmulas. Sendo assim, no próximo tópico apresentaremos essa demonstração.

4.2.1 Fórmulas de trigonometria esférica

Uma maneira de desenvolver fórmulas trigonométricas válidas à esfera é a partir de um triangulo esférico, como exibido na figura 13:

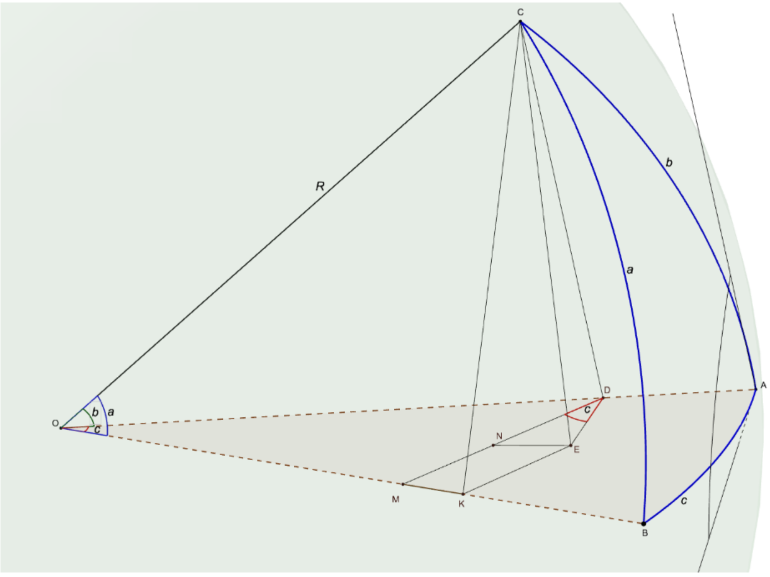

Figura 13: Elementos de triângulo esférico. Fonte: Produção do autor

Na figura 13, seja O centro da esfera e ABC um triangulo esférico com arestas a, b e c. Conectando os vértices A, B e C com o centro O teremos os raios $OA = OB = OC = R.$ O ponto E é a intersecção entre semirreta perpendicular e plano $AOB.$ Do ponto E, ainda no plano $AOB,$ construímos segmentos ED e EK perpendiculares sobre raios OA e $OB,$ e em seguida construímos os segmentos DM e $EM,$ paralelos com EK e $KM,$ respetivamente. Agora podemos reconhecer seis triângulos retângulos planos: $\Delta COK, \Delta COD, \Delta DOM, \Delta EDN, \Delta ECK, \Delta ECD$. Os ângulos centrais $\sphericalangle COK, \sphericalangle COD\ e \sphericalangle KOD$ em radianos correspondem aos arcos a, b e $c.$ O ângulo A do triangulo esférico ABC é igual ao ângulo do diedro CDE. Também são iguais o ângulo esférico B e ângulo do diedro $CKE.$ Empregando as fórmulas da trigonometria plana, neste ponto podemos fundamentar as fórmulas quais relacionam ângulos e arestas do triangulo esférico.

Primeiro calculamos segmento EC partindo dos triângulos $\Delta ECK\ \ e\ \Delta ECD$:

$$EC = CK\ sen\ B = R\ sen\ a\ sen\ B$$

$$EC = CD\ sen\ A = R\ sen\ b\ sen\ A$$

Partindo do princípio de equivalência de equações temos:

$$sen\ a\ sen\ B = sen\ b\ sen\ A$$

E repetindo o mesmo procedimento:

$$sen\ b\ sen\ C = sen\ c\ sen\ B$$

$$sen\ c\ sen\ A = sen\ a\ sen\ C.$$

Podemos ver, escrevendo essas fórmulas em forma diferente, que em um triangulo esférico ABC de lados $a, b\ e\ c,$ a razão entre o seno de um ângulo e o do seu lado oposto é a mesma para os três ângulos e os respetivos lados opostos:

$$\frac{sen\ A}{sen\ a} = \frac{sen\ B}{sen\ b} = \frac{sen\ C}{sen\ c}$$

Em trigonometria esférica, essas fórmulas são conhecidas pelo nome de *fórmulas de seno.*

Da figura 4, é evidente a igualdade

$$OK = OM + MK$$

Expressando segmentos OK, OM e MK por meio das funções trigonométricas sobre ângulos e arestas dos triângulos planos ΔCOK, ΔCOD, ΔDOM, ΔEDN, ΔECK, ΔECD, temos:

$$OK = R\ cos\ a,$$

$$OM = OD \cos c = R \cos b \cos c,$$

$$MK = NE = ED \operatorname{sen} c = CD \cos A \operatorname{sen} c = R \operatorname{sen} b\ sen\ c \cos A$$

Novamente, seguindo o princípio de equivalência de equações temos:

$$\cos a = \cos b \cos c + sen\ b\ sen\ c \cos A,$$

$$\cos b = \cos c \cos a + sen\ c\ sen\ a \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b \cos C.$$

Em outras palavras, em um triangulo esférico cosseno de um lado é igual a soma de produtos de cossenos dos lados opostos e dos senos dos mesmos lados multiplicados por cosseno do ângulo formado por esses lados. Essas são as *fórmulas do cosseno,* também conhecidas como *Fórmula Fundamental.*

A demonstração da fórmula fundamental pode ser desenvolvida de forma mais elegante por meio de vetores, no entanto, escolhemos a demonstração trigonométrica para ilustrar a proximidade das geometrias euclidiana e esférica, e elucidar que os conhecimentos mobilizados para essa demonstração estão no domínio da geometria euclidiana e geometria analítica.

Lembramos que um triângulo esférico, situado na esfera celeste, denominamos Triângulo de Posição, como mostra figura 14[30]:

---

[30] Para elaborar esse exemplo, nos apoiamos no livro *Astronomia e Astrofísica* de Kepler e Saraiva (2017).

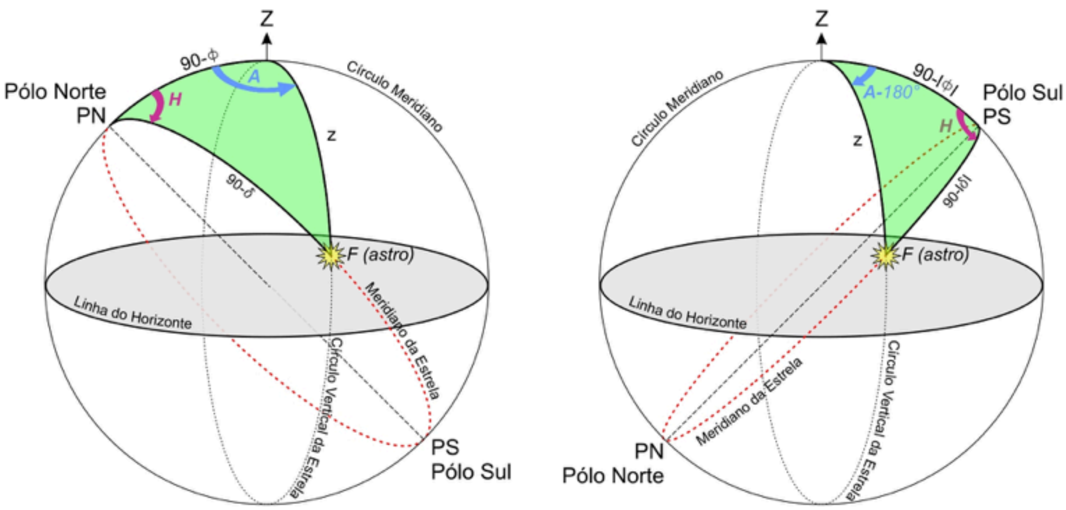

Figura 14: Elementos de Triângulo de Posição. Fonte: Kepler; Saraiva (2017)

Como mostra figura 14, triângulo de posição na esfera celeste tem por vértices: o astro, o polo elevado e o zênite. De acordo com Kepler; Saraiva (2017), "[...] Zênite é um ponto imaginário, localizado sobre a esfera celeste, interceptado pela vertical traçada a partir da cabeça de um observador e "a latitude de um lugar é igual à altura do polo elevado". Dessa maneira, os lados e ângulos do triângulo de posição são:

- arco entre o zênite e o polo elevado = $90° - |\varphi|$
- arco entre o zênite e astro = z
- arco entre o polo elevado e o astro = $90° - |\delta|$
- ângulo com vértice no zênite = A (no hemisfério norte) ou $A - 180°$ (no hemisfério sul)
- ângulo com vértice no polo elevado = H
- ângulo com vértice na estrela

O triângulo de posição é usado para derivar as coordenadas do astro quando conhecida a posição geográfica do lugar, ou determinar as coordenadas geográficas do lugar quando conhecidas as coordenadas do astro. Também permite fazer as transformações de um sistema de coordenada para outro (determinar coordenadas do sistema equatorial a partir das do sistema horizontal e vice-versa).

Usando a fórmula dos cossenos no triângulo de posição podemos tirar duas relações entre distância zenital (z), azimute (A), ângulo horário (H), e declinação (δ), nos sistemas de coordenadas, para o hemisfério norte e para o hemisfério sul, conforme figuras 15 e 16:

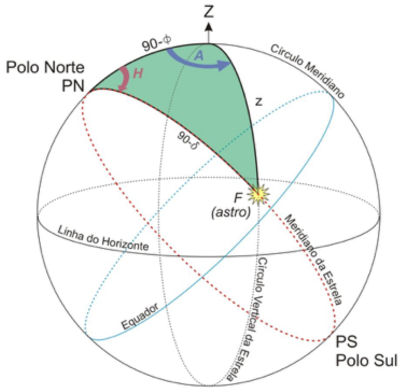

Figura 15: Dedução para δ e φ positivos (caso mais geral do hemisfério norte). Fonte: Kepler; Saraiva (2017)

$$\cos z = \cos(90° - \varphi)\cos(90° - \delta) + \operatorname{sen}(90° - \varphi)\operatorname{sen}(90° - \delta)\cos H$$

$$= \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H$$

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi\cos z + \cos\varphi\operatorname{sen} z\cos A$$

Invertendo essas relações para isolar H e A temos:

$$\cos H = \cos z\sec\varphi\sec\delta - \tan\varphi\tan\delta$$

$$\cos A = \operatorname{sen}\delta\operatorname{cosec} z\sec\varphi - \tan\varphi\cot z$$

A fórmula dos senos nos dá:

$$-\cos\delta\,/\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} z\,/\operatorname{sen} H$$

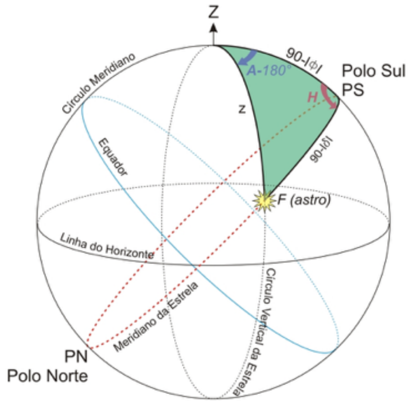

Figura 16: Dedução para δ e φ negativos (caso mais geral do hemisfério sul). Fonte: Kepler; Saraiva (2017)

$$\cos z = \cos(90° - |\varphi|)\cos(90° - |\delta|) + \operatorname{sen}(90° - |\varphi|)\operatorname{sen}(90° - |\delta|)\cos H$$

$$\cos(90° - |\delta|) = \cos z\cos(90° - |\varphi|) + \operatorname{sen} z\operatorname{sen}(90° - |\delta|)\cos(A - 180°)$$

Lembrando que:

$$cos\ (90° - |\varphi|) = sen\ |\varphi| = -sen\varphi$$
$$cos\ (90° - |\delta|) = sen\ |\delta| = -sen\ \delta$$
$$sen\ (90° - |\varphi|) = cos\ |\varphi| = cos\ \varphi$$
$$cos\ (A - 180) = -cos\ A$$

As equações acima ficam: $cos\ z = sen\ \delta\ sen\ \varphi + cos\ \delta\ cos\ \varphi\ cos\ H$

e

$$sen\ \delta = sen\ \varphi \cos z + \cos \varphi\ sen\ z \cos A$$
$$cos\ A = (sen\ \delta - sen\ \varphi\ cos\ z)/(cos\ \varphi\ sen\ z)$$

que são idênticas às deduzidas para o hemisfério norte.

Analogamente podemos mostrar que essas fórmulas são válidas para qualquer latitude e declinação.

Colocando em prática, esse procedimento nos permite resolver diversos problemas acerca de posição dos astros, como, por exemplo, determinar o ângulo horário de um astro no instante do nascer ou do ocaso, quando sua distância zenital é $90°$, pois ele se encontra no horizonte. Da relação que isola o ângulo horário, obtemos a situação, conforme figura 17:

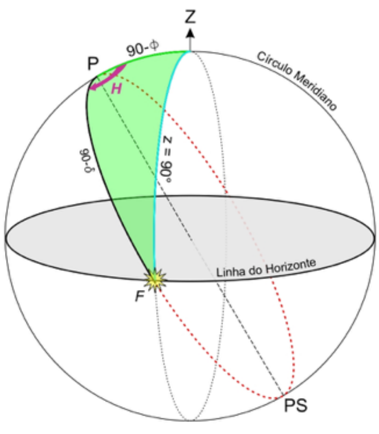

Figura 17: Um astro no instante do nascer ou do ocaso. Fonte: Kepler; Saraiva (2017)

Como $cos\ 90° = 0$, no nascer e no ocaso a fórmula $cos\ H = cos\ 90°\ sec\ \varphi\ sec\ \delta - tan\ \varphi\ tan\ \delta$ se reduz a: $cos\ H = -tan\ \varphi\ tan\ \delta$

Com esta fórmula podemos responder à questão inicial, quanto tempo o Sol permanece acima do horizonte em um certo lugar e em uma certa data do ano, pois para qualquer astro o tempo de permanência acima do horizonte será 2 vezes o ângulo horário desse astro no momento do nascer ou ocaso.

O azimute do astro no nascer (ou ocaso) também pode ser calculado facilmente usando a fórmula em que temos o azimute em função de $\delta, z\ e\ \varphi$:

$$cos\ A = sen\ \delta\ cosec\ z\ sec\ \varphi - tan\ \varphi\ cot\ z$$

Como $cosec\ 90° = 1$ e $cot\ 90° = 0$, no nascer e no ocaso a fórmula se reduz a $cos\ A = sen\ \delta\ sec\ \varphi$

Destarte, apresentamos tarefa a seguir:

Quanto tempo permanecerá o Sol acima do horizonte em São Paulo, cuja latitude é $23{,}55^{\underline{o}} S$*, no dia do Solstício de verão no hemisfério sul, em que a declinação do Sol é de* $-23^{\underline{o}}\ 27'$?

Usando a fórmula acima, $cos\ H = -tan\ (-23{,}55°)\ tan\ (-23°\ 27') = -0{,}2504 \rightarrow H = 104{,}5\ °$

O tempo total que o Sol fica acima do horizonte será $2\,H = 209° \approx 14\,h$.

Especificamente, em São Paulo, o Sol estará acima do horizonte aproximadamente $14\ h\ e\ 10\ min$ em 21 de dezembro, e $10\ h\ e\ 10\ min$ em 21 de junho. Percebemos que a diferença de 10 minutos é devida á definição de que o dia começa com a borda superior do Sol no horizonte, e o dia termina com a borda superior do Sol no horizonte, e não o centro do disco solar, como assumido na fórmula acima.

O azimute do Sol no nascer (ou ocaso) também, nessa data, será:

$$cos\ A = sen\ \delta\ sec\ \varphi$$

$$cos\ A = sen\ (-23°\ 27')\ sec\ (23{,}55°) = -0{,}46$$

Logo $A = 117°$ (nascer) ou $243°$ (ocaso) o que significa que nasce entre o leste e o sul e se põe entre o oeste e o sul.

Com essa demonstração, entendemos que o ambiente de Astronomia Posicional é um habitat para o ensino de Geometria Esférica, na medida em que permitiu as inter-relações entre objetos no quadro 6, reconhecendo como os objetos todos os saberes matemáticos e das disciplinas geometria analítica, física e geografia, que determinam a existência da Geometria Esférica como objeto de ensino. Alicerçados nas teorias de Chevallard (1994), identificamos os diferentes saberes em interação, abrindo caminho para analisar a transformação do objeto de saber Geometria Esférica em um objeto a ser ensinado, no caso a duração do dia em uma cidade em uma determinada data, sabendo as suas coordenadas geográficas.

Com o que foi descrito acima, entendemos que os conhecimentos necessários para o ensino de Astronomia Posicional foram apresentados. Sendo assim, no próximo capítulo, apresentaremos as considerações finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A intenção desta pesquisa foi em evidenciar os elementos substanciais para que o ensino de Astronomia Posicional seja possível no curso de Ensino Médio brasileiro. Em razão de amplitude do campo de estudos da Astronomia, do tempo disponível que uma pesquisa de mestrado acadêmico permite, ficamos frente a frente com desafio de produzir uma pesquisa bibliográfica com destaque justamente nos elementos de base. O nosso enfoque em coadunar Geometria Esférica com Astronomia Posicional justifica-se na gênese dessas duas disciplinas, a primeira é a ferramenta da outra, ou seja, Astronomia Posicional é uma aplicação da Geometria Esférica. Devido ao empenho de introduzir o maior número possível de termos relacionados à astronomia descritivamente, o método usado é matematicamente simples, e compreende trigonometria sobreposta na superfície esférica.

Para averiguar se existem condições para o ensino de Astronomia Posicional, de ponto de vista curricular, analisamos as reformas nos currículos do ensino nacional e a legislação vigente – BNCC. Verificamos que as instituições de ensino secundário brasileiro mantinham em sua cultura escolar educação à francesa, que norteava as reformas do Ensino Nacional desde começo do século XIX. Seguindo os currículos da França, as tendências curriculares referentes à astronomia, encontram-se em todos os currículos nacionais, a partir da reforma Benjamin Constant, em 1895. A astronomia moderna está fundamentalmente ligada às ciências matemáticas e às da natureza. Segundo BNCC (2018), essa conexão se baseia na inter- e transdisciplinaridade da Matemática, dissolvendo, entre outros, divisão errônea de astronomia em astrometria e astrofísica. Embora a introdução do experimento matemático na astronomia tenha sido feita há muito tempo, a introdução de experimentos das outras ciências era muito mais difícil devido à sua abstração metodológica um pouco menor. Como explica Segan (2006), o experimento físico é particularmente bem-sucedido, no entanto, o significado e as características ocultas e latentes (por exemplo, singularidade, não-identidade etc.) do experimento físico em pesquisa astronômica por algum tempo exercerão grande pressão sobre a divisão de astronomia acima mencionada.

Revistar Astronomia como matéria de ensino na história, demanda um exercício complexo de maneira a elencar toda a panóplia da educação e de sua história, de modo a tecer nexos baseados em um enquadramento de elementos, oriundos de distintos ecossistemas, coadunados a uma dialética entre realidade-objeto. Entendemos que para este estudo o melhor alicerce teórica era Transposição Didática e Teoria Antropológica do Didático, como a sua extensão, de Yves Chevallard, justamente em razão da complexidade de Astronomia e da sua atual aparência em diversas matérias de ensino, mas não como uma disciplina específica. Concluímos que ecossistema habitável para Astronomia Posicional comporta, em grosso modo, Geometria Analítica, Geografia e Física, e que todas estas disciplinas de ensino possuem Geometria Esférica como o elo de ligação.

Em continuação da nossa pesquisa, podemos propor trabalho acerca de base de conhecimento dos professores para o ensino de Astronomia Posicional no Ensino Médio, com sugestão de poliedro esférico como o modelo epistemológico de referência.

Acreditamos que a nossa pesquisa, criada principalmente como uma tentativa de reivindicar Astronomia à ensino em forma integral, pode auxiliar professores de matemática, geografia e ciências, a introduzir os conceitos interdisciplinares abordados neste trabalho, em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Talita Carvalho Silva de. *A base de conhecimento para o ensino de sólidoa arquimedianos.* Tese de Doutorado. São Paulo: PUC/SP, 2015.

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática.* Editora UFPR, Curitiba: 2014.

_______________. *A Geometria na escola básica: que espaços e formas têm hoje?* SBEM 2004. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas redondas/mr21-Saddo.doc. Acesso em: 30/01/2019.

http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mr.html

ALVES, S. *Geometria Não Euclidiana.* São Paulo: IME-USP: material para oficina; Semana da Licenciatura, 2008.

ANDRADE, Maria Lucia Torelli de. *Geometria Esférica: Uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no Ensino Básico.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2011.

ARTAUD, M et al. *Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques.* In ARDM, 2016.

BARDAIN, Laurence. *Análise de Conteúdo.* Lisboa: Edições 70, 1977.

BARROS, Fernanda. *O tempo do Lyceu em Goiás: Formação humanista e intelectuais (1906-1960).* Jundiaí: Paco editorial, 2017.

BILIMOVIC, Anton. *Euklidovi Elementi.* Belgrado: Editora Naucna Knjiga, 1949.

BONGIOVANI, V. *De Euclides às geometrias não euclidianas.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática. São Paulo: v.1 nº 22, 2010.

BONTEMPI JÚNIOR, Bruno. *Aspectos históricos da escola em São Paulo.* In Revista do Arquivo Municipal: Departamento do Arquivo Histórico de São Paulo. v.205., p.1-191, 2014.

BRUM, W. P. *Abordagem de conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio usando uma sequência didática.* Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Blumenau: FURB, 2013.

BUFFON, Alessandra Daniela; NEVES, Marcos Cesar Danhoni. *A Educação para Astronomia no Ensino Fundamental: Uma reflexão entre professores e pesquisadores.* Revista Ensino, Saúde e Ambiente – V10, p. 1-26. Maringá: 2017.

BUISSON, Ferdinand Édouard. *Nouveau Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire.* PARIS: Librairie Hachette, 1911.

BUSEMANN, H. *The Geometry of Geodesics.* New York: Dover Publications, 2005.

CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CAMARGO, K. C. A. *A expressão gráfica e o ensino das geometrias não euclidianas.* Dissertação de Mestrado em Ciências e Matemática. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.

CHASSOT, A. *A alfabetização científica: questões e desafios para a educação.* Ijuí: Unijuí, 2011.

CHEVALLARD, Yves. *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1991.

________________. *Pourquoi la transposition didactique ?* Grenoble, Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, 1982.

________________. *Pourquoi enseigne-t-on les mathématiques ?* Marseille, colloque Finalités des enseignements scientifiques, 1989.

________________. *Les processus de transposition didactique et leur théorisation.* In *La transposition didactique à l'épreuve.* Grenoble, La Pensée Sauvage, 1994.

________________. *Sur la polyvalence dans l'enseignement scolaire.* Séminaire codisciplinaire de recherche et de développement de l'IUFM. Marseille, 1996.

________________. *Organiser l'étude : 3. Ecologie & régulation.* Cours donné à la XIe école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, 2001.

________________. *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* In *Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico*, Universidad de Jaén, 2007.

CLIFFORD, William Kingdon. *On the Space-Theory of Matter.* In CAJORI, Florian. *Uma História da Matemática.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

COUTINHO, Lazaro. *Convite às Geometrias Não-Euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

DIAS, Elaine. *Correspondências entre Joachim Le Breton e a corte portuguesa na Europa. O nascimento da Missão Artística de 1816.* Anais do Museu Paulista: História e Cultura Material, vol.14 no.2. São Paulo: Jul/Dec. 2006.

DK. *Dictionary of Universe.* London: A Penguin Company, 2007.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa.* São Paulo: Atlas, 2001.

GREEN, R. M. *Astronomy.* Glasgow: University of Glasgow, 1998.

HEURDIER, Lydie; PROST, Antoine. *Les politiques de l'educacion em France.* Paris: La documentacion Française, 2014.

HILBERT, David. *Fundamentos da Geometria.* Lisboa: Gradiva, 2003.

KALEF, A. M. *Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias não Euclidianas.* Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos. Congresso Brasileiro de Extensão Universitária, nº 2. Belo Horizonte: 2004.

KEPLER, S.; O. SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e Astrofísica.* Porto Alegre: Departamento de Astronomia – Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

KOVACEVIC, Gisele Schiavetti Basilio. *A política cultural francesa e o Lyceu Franco-Brasileiro de S.Paulo como um modelo de ensino secundário para o Brasil.* Dissertação de Mestrado em Educação: História, Política, Sociedade. São Paulo: PUC/SP, 2019.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina. De Andade. *Metodologia Cientifica: teoria da ciência e prática da pesquisa.* 17. Ed. Petropolis: Vozes, 2000.

LEITE, C. A *Lua, em show real e virtual.* Jornal O Estado de S. Paulo, p. A-15, 27/10/2004.

LEIVAS, J. C. P. *Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria.* Revista SBEM-RS, nº 13, v.1. Porto Alegre: 2012.

LÉNÁRT, I. *Euclidean and non-euclidean geometries*. Berkley: Keypress Academy, 1996.

MAGALHÃES, Justino. *Tecendo Nexos. História das Instituições Educativas.* Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2004.

MAIO, Waldemar de.; CHIUMMO, Ana. *Fundamentos de Matemática – Didática da Matematica.* São Paulo: Editora LTC, 2012.

MARTOS, Z. G. *Geometrias não-euclidianas: uma proposta metodológica paras o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação matemática. Rio Claro: 2002.

MATOS, J. M.; SILVA, M. C. L. *O Movimento da Matemática Moderna e diferentes propostas curriculares para o ensino de geometria no Brasil e em Portugal*. Rio Claro: Bolema, v. 24, n. 38, p. 171-196, abr. 2011.

NUNES, Clarice. *O "velho" e "bom" ensino secundário: momentos decisivos.* Rio de Janeiro: Revista Brasileira de Educação, nº 14, 2000.

PATAKI, Irene. *Geometria Esférica: uma conexão com a geografia.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2003.

PRESTES, I. C. R. *Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2006.

QUEIROZ, Maria N. A.; HOUSOME, Yassuko. *As disciplinas científicas do ensino básico na legislação educacional brasileira nos anos de 1960 e 1970*. Belo Horizonte: Ensaio – Pesquisa em Educação em Ciências, vol.20, 2018.

REIS, J. D. S. *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: 2006.

RUDAUX, Lucien; VAUCOLEURS, Gérard de; TARDI, Pierre. *Astronomie – Les ásteres, l'Universe.* Paris: Editora Librarie Larousse, 1948.

SANTALÓ, Luis A. *Geometrias no euclidianas*. Buenos Aires: Editorial Universitária de Buenos Aires, 1961.

SANTOS, Jailson Alves dos. *A trajetória da educação profissional.* In: *500 anos de Educação no Brasil.* p. 205-224. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

SANTOS, Márcia Fabiane de Azevedo dos; KRUPEK, Rogério Antonio. *Astronomia: por que e para quê aprendê-la.* In *Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor PDE.* Paraná: Secretaria da Educação, 2014.

SEVARLIC, Branislav; BRKIC, Zaharije. *Opsta Astronomija.* Belgrado: Editora Savremena Administracija, 1972.

SOUZA, Rosa Fátima de. *História da organização do trabalho escolar e do currículo no Século XX: (ensino primário e secundário no Brasil).* São Paulo: Cortez, 2008.

VERGARA, Sylvia Constant. *Métodos de pesquisa em administração.* São Paulo: Atlas, 2005.

LEGISLAÇÃO CONSULTADA

BRASIL. Decreto nº 981, de 8 de Novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Decreto nº 3.890, de 1º de Janeiro de 1901. Approva o Codigo dos Institutos Officiaes de Ensino Superior e Secundario, dependentes do Ministerio da Justiça e Negocios Interiores. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1900-1909/decreto-3890-1-janeiro-1901-521287-publicacaooriginal-1-pe.html Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Decreto nº 21.241, de 4 de Abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Decreto-Lei nº 383, de 18 de Abril de 1938. Veda a estrangeiros a atividade política no Brasil e dá outras providências. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-383-18-abril-1938-350781-publicacaooriginal-1-pe.html Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Lei nº 4.024, de 20 de Dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L4024.htm Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de Agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L5692.htm Acesso em 22/07/2019.

BRASIL. Ministério de Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 1998.

___________________. Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio. Brasília: MEC, 2000.

___________________. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2016.

SÃO PAULO (estado). Currículo Paulista. São Paulo: 2020.

SÃO PAULO (estado). LEI N. 1.750, DE 8 DE DEZEMBRO DE 1920. Reforma a Instrucção Publica do Estado. Disponível em: https://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/lei/1920/lei-1750-08.12.1920.html Acesso em 22/07/2019.