Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC-SP

Ederson Sales Pastor

Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP

Mestrado em Educação Matemática

São Paulo
2020

Pontifícia Universidade Católica de são São Paulo

PUC-SP

Ederson Sales Pastor

Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP

Mestrado em Educação Matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima.

São Paulo
2020

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Ederson Sales Pastor

Data: _____/_____ 2020.

e-mail: ederson_pastor@hotmail.com

Ederson Sales Pastor

Análise de questões de trigonometria propostas aos alunos do Ensino Fundamental pelo SARESP

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática.

Aprovado em: _____/_____/

BANCA EXAMINADORA

Dr. Gabriel Loureiro de Lima
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Dra. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP)

Dra. Eloiza Gomes
Instituto Mauá de Tecnologia

Agradeço à ***Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior*** *(CAPES) pela concessão da Bolsa de Estudos que contribuiu para a realização desta pesquisa.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo seu amor paternal, que me faz seguir em frente diante de desafios como este, do mestrado acadêmico.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), por proporcionar um ambiente de aprendizagens enriquecedoras por meio da excelência da coordenação do programa, da secretaria e dos professores.

Ao Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, inspiração para todos que desejam trilhar o caminho da pesquisa em educação matemática.

Ao Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima, por ter aceitado esta orientação diante das mudanças que surgiram. Já o admirava quando foi meu professor, em uma formação da qual participei na escola em que trabalho; hoje, a admiração só aumenta, assim como minha gratidão.

À diretora da Escola do Serviço Social da Indústria (SESI) de Birigui (SP), Silvia Cristina Dias, por compreender quando precisei me ausentar da unidade e por ser uma das pessoas que mais me motivam a crescer e a me tornar um professor melhor. Seus conselhos continuam fazendo toda a diferença. Muito obrigado, de coração!

À coordenadora Luzilene Zucolotto Escardovelli, pelo companheirismo nesta jornada do mestrado e pela sensibilidade até mesmo chorei em sua sala. Muito obrigado, Lu!

Ao professor Luiz Alexandre de Oliveira Polatto: seu percurso de mestrado foi uma inspiração, e sua disposição em me ajudar neste período foi de muita importância. Muito obrigado, amigo!

À professora Santa Barbosa da Silva Neta: este mestrado é resultado de nossos almoços juntos. Foi a pessoa que mais acreditou neste projeto, antes mesmo de eu me inscrever. Tinha mais certeza de que daria certo do que eu mesmo. Muito obrigado, moça!

Aos meus colegas do SESI Birigui, essa equipe que me ensina tanto. Como é bom e significativo caminhar com vocês. Juntos somos fortes!

Aos meus alunos do SESI Birigui, em especial ao estudante Guilherme Alexandre, pela ajuda com os recursos tecnológicos.

À minha família, por me apoiar e por compreender as renúncias que precisei fazer neste período.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo investigar quais conjuntos de tarefas estão presentes nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, propostas pelo SARESP nos anos de 2010 a 2018, e quais conjuntos de técnicas, tecnologias e teorias podem ser mobilizadas por estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental na resolução dessas questões. Apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) para o desenvolvimento da análise praxeológica das questões propostas pelo SARESP selecionadas para este trabalho. Após o desenvolvimento da análise praxeológica das questões, buscamos aplicá-las a estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede estadual de ensino do estado de São Paulo a fim de observar e identificar as mobilizações, por parte dos alunos, das técnicas, das tecnologias e das teorias nas resoluções das questões propostas, e, para isso, recorremos à metodologia de pesquisa qualitativa. Após o desenvolvimento do trabalho, concluímos que as questões propostas pelo SARESP selecionadas para esta investigação partem do mesmo tipo de tarefa, sendo que, para a resolução, são necessárias as mesmas mobilizações de técnicas, as quais, por sua vez, são justificadas pelo mesmo discurso teórico-tecnológico. Identificamos também que um grupo considerável de alunos participantes de nossa investigação apresentaram corretamente as mobilizações das técnicas relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, mas apresentaram erros ao realizarem as operações aritméticas.

Palavras-chave: Análise praxeológica. Trigonometria no triângulo retângulo. SARESP.

ABSTRACT

This dissertation aims to investigate which sets of tasks are present in the questions related to trigonometry in the right triangle, proposed by SARESP in the years 2010 to 2018, and which sets of techniques, technologies and theories can be mobilized by 9th grade students of elementary school in solving these mathematical issues. We rely on the Anthropological Theory of Didactics (TAD) for the development of the praxeological analysis of the questions proposed by SARESP selected for this work. After the development of the praxeological analysis of the questions, we sought to apply them to students of the 9th grade of elementary school in two schools of the State Education Network of the State of São Paulo in order to observe and identify the mobilizations, by the students, of the techniques, technologies and theories in the resolution of the proposed questions and for that we resort to qualitative research methodology. After the development of the research, we concluded that the questions proposed by SARESP selected for this investigation start from the same type of task and for the resolution, the same mobilizations of techniques are necessary, which in turn are justified by the same theoretical-technological discourse. We also identified that a considerable group of students participating in our investigation correctly presented the mobilizations of the techniques related to trigonometry in the right triangle, but presented errors when performing the arithmetic operations.

Keywords: Praxeological analysis. Right triangle. SARESP.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – EXEMPLO DE QUESTÃO DO SARESP DE 2009. 44
FIGURA 2 – QUESTÃO 1. 51
FIGURA 3 – QUESTÃO 2. 52
FIGURA 4 – QUESTÃO 3. 54
FIGURA 5 – QUESTÃO 4. 55
FIGURA 6 – QUESTÃO 1. 58
FIGURA 7 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 59
FIGURA 8 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 60
FIGURA 9 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 61
FIGURA 10 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 62
FIGURA 11 – QUESTÃO 2. 62
FIGURA 12 RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 63
FIGURA 13 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 64
FIGURA 14 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 65
FIGURA 15 – QUESTÃO 3. 66
FIGURA 15 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 67
FIGURA 16 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 68
FIGURA 17 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 69
FIGURA 18 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 70
FIGURA 19 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 70
FIGURA 20 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 70
FIGURA 21 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 71
FIGURA 22 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 71
FIGURA 23 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 72
FIGURA 24 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 72
FIGURA 25 – QUESTÃO 4. 73
FIGURA 26 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 74
FIGURA 27 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 74
FIGURA 29 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 75
FIGURA 30 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 75
FIGURA 31 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES. 76

FIGURA 32 – RESOLUÇÃO DESENVOLVIDA POR UM DOS ESTUDANTES........76

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – RESULTADO DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL NO SARESP EM 2018 57

LISTA DE QUADROS

QUADRO1 – CLASSIFICAÇÃO E DESCRIÇÃO DOS NÍVEIS DE PROFICIÊNCIA DE MATEMÁTICA 11
QUADRO 2 – DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA ANÁLISE COM A TEMÁTICA: SARESP E MATEMÁTICA 14
QUADRO 3 – DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA ANÁLISE COM A TEMÁTICA: TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO. 18
QUADRO 4 – DISSERTAÇÕES SELECIONADAS PARA ANÁLISE COM A TEMÁTICA: ANÁLISE PRAXEOLÓGICA. 22
QUADRO 5 – VALORES PARA SENO, COSSENO E TANGENTE DE ALGUNS ÂNGULOS NOTÁVEIS 31
QUADRO 6 – ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA QUESTÃO 1 51
QUADRO 7 – ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA QUESTÃO 2 53
QUADRO 8 – ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA QUESTÃO 3 54
QUADRO 9 – ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DA QUESTÃO 4 55
QUADRO 10 – PERCENTUAL DE ACERTOS E ERROS DA QUESTÃO 1 58
QUADRO 11 – PERCENTUAL DE ACERTOS E ERROS DA QUESTÃO 2 63
QUADRO 12 – PERCENTUAL DE ACERTOS E ERROS DA QUESTÃO 3 66
QUADRO 13 – PERCENTUAL DE ACERTOS E ERROS DA QUESTÃO 4 73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 14
3 O OBJETO MATEMÁTICO 26
3.1 BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA 26
3.2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 28
3.3 ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM BASE NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO...31
4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA...40
4.1 ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS...40
5 METODOLOGIA DA PESQUISA 46
5.1 ABORDAGEM QUALITATIVA 46
5.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS..47
6 ANÁLISE DE DADOS...51
6.1 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS QUESTÕES SELECIONADAS..51
6.2 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DOS ESTUDANTES..67
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 78
8 REFERÊNCIAS...83

1 INTRODUÇÃO

Ser professor sempre foi uma das certezas que tive ao longo da vida. Desde que escolhi “o que fazer quando crescer”, ainda criança, nos primeiros anos escolares, identificava em mim a motivação para lecionar; mas foi no 9º ano do Ensino Fundamental que me decidi pela Matemática.

Isso ocorreu por causa das aulas de relações trigonométricas no triângulo retângulo na escola em que estudava, em Avanhandava, uma pequena cidade no interior de São Paulo. Seria impossível me esquecer do dia em que a professora de Matemática nos tirou da sala de aula e nos levou ao pátio da escola com transferidores, fitas métricas e palitos. Tivemos a liberdade de decidir, entre paredes, caixa d’água e cestas de basquete na quadra da escola, para descobrir as medidas das alturas dos objetos, utilizando as medidas das distâncias e dos ângulos formados e aplicando as razões trigonométricas ensinadas por ela em sala de aula.

Parece simples, mas aquela aula causou em mim um impacto: eu e meus colegas estávamos descobrindo a medida de alturas desconhecidas recorrendo à Matemática. Isso foi tão significativo que, a partir daquele momento, o sonho de ser professor foi aliado à Matemática. De alguma maneira, comecei a ficar estimulado com a possibilidade de incentivar outras pessoas a descobrirem o que também descobri naquele dia; essa foi minha maior motivação para cursar Licenciatura em Matemática.

Em 2002, ingressei no curso de licenciatura e, a partir de 2005, no último ano da graduação, comecei a lecionar na rede estadual de ensino do estado de São Paulo. Posteriormente, no ano de 2010, ingressei em uma escola da rede particular de ensino, na qual leciono até hoje.

Nesses últimos anos, tenho vivenciado o quanto os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) interferem diretamente na dinâmica das escolas que dele participam. Ao receber os boletins com os resultados dos alunos, gestores, coordenadores e professores analisam esses resultados, verificando se houve avanços ou não; com base nessa análise, decidem quais ações serão desenvolvidas ao longo do ano letivo para alcançar resultados satisfatórios.

1

O SARESP[1] é uma avaliação externa que acontece desde 1996, implementada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, com o objetivo de mensurar, sistematicamente, o desempenho dos alunos do ensino básico na rede estadual. Normalmente, essa avaliação é realizada ao final de cada ano letivo para estudantes que estão matriculados nos 2º, 3º, 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental e no 3º Ano do Ensino Médio.

Por meio do SARESP, a Secretaria da Educação produz um diagnóstico da situação da escolaridade básica e pode, dessa forma, pensar em políticas voltadas à melhoria da qualidade da educação. Os estudantes participantes têm seus conhecimentos avaliados por meio de provas com questões de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e redação.

Só em 2017, cerca de um milhão de alunos participaram dessa avaliação, representando cinco mil escolas. Esses números são bastante significativos, e o resultado apresentado pelos estudantes fomenta discussões em diferentes ambientes escolares entre os diversos atores que transitam no sistema educacional.

Segundo a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, os resultados da avaliação são consolidados em boletins, que podem ser consultados pelas escolas estaduais e pelas unidades municipais, técnicas e particulares que aderiram à avaliação. Os resultados apresentados nos boletins permitem à escola analisar seu desempenho e, com o apoio da Secretaria, melhorar a qualidade de aprendizagem dos seus alunos e da gestão escolar.

Nesses boletins, é possível verificar quais matrizes de referência foram utilizadas para a avaliação, os documentos legais, a adesão no estado de São Paulo, os resultados apresentados pelas escolas participantes e o relatório pedagógico a respeito do sistema de avaliação de cada ano.

Em 2017, o relatório pedagógico fornecido pela Secretaria da Educação apresentou uma escala de proficiência de Matemática comum aos anos avaliados. Essa escala permite identificar competências e habilidades construídas pelos alunos, conforme a matriz que serve de referência para o SARESP. De acordo com a Secretaria, a interpretação da escala é cumulativa, ou seja, os alunos que estão situados em determinado ponto dominam não só as habilidades associadas a esse ponto, mas também as proficiências descritas nos pontos anteriores.

---

[1] A partir deste momento, o relatório de pesquisa passará a ser redigido na 1ª pessoa do plural.

De acordo com a Secretaria da Educação, entenda-se por competências as modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, o conjunto de ações e operações mentais que o sujeito utiliza para estabelecer relações com e entre os objetos, situações, fenômenos e pessoas que se deseja conhecer. Tais ações expressam o melhor que um aluno pôde fazer em uma situação de prova ou avaliação, no contexto em que isso se deu. Como é próprio ao conceito de competência, o que se verifica é o quanto as habilidades dos alunos, desenvolvidas ao longo do ano letivo, no cotidiano da classe e segundo as diversas propostas pelo professor, puderam aplicar-se na situação de exame.

Por isso, a concepção de competência implica uma visão ou uma compreensão da inteligência humana que realiza ou compreende, no nível em que o faz, como estrutura de conjunto. São vários os aspectos cognitivos em jogo: saber inferir, atribuir sentido, articular partes e todo, excluir, comparar, observar, identificar, tomar decisões, reconhecer e fazer correspondências.

A Secretária da Educação descreve que as habilidades funcionam como indicadores ou descritores das aprendizagens que se espera que os alunos tenham realizado no período avaliado. Possibilitam, igualmente, pelo nível alcançado, ordenar posições e localizar cada escola, por intermédio do desempenho de seus alunos. Por essa razão, as habilidades são caracterizadas de modo objetivo, mensurável e observável. Elas possibilitam saber o que é necessário que o aluno faça para dar conta, e bem, do que foi solicitado em cada questão ou tarefa.

Podemos observar um exemplo de competência e habilidade de acordo com o relatório pedagógico do SARESP apresentado pela Secretaria da Educação.

- Competência: compreender conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos.
- Habilidade: Resolver problemas envolvendo as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos.

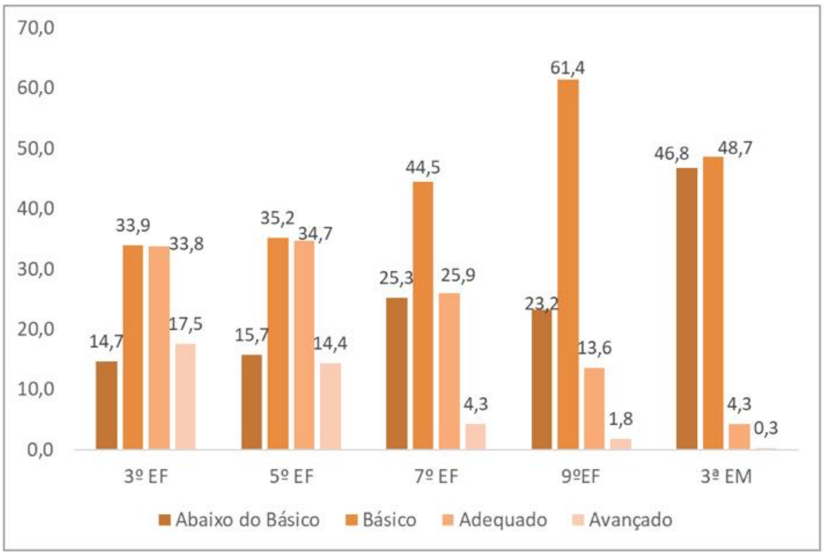
O resultado dos alunos no SARESP de 2017 foi apresentado por um quadro dividido em quatro níveis de proficiência – avançado, adequado, básico e abaixo do básico – relacionados a quatro temas: números envolvendo operações e funções; espaço e forma; grandezas e medidas; e tratamento da informação. Para cada um dos temas avaliados, são analisadas diferentes habilidades que servem como critérios para resolução das questões propostas. Vejamos:

Quadro1 – Classificação e descrição dos níveis de proficiência de Matemática.

CLASSIFICAÇÃO	NÍVEIS DE PROFICIÊNCIA	DESCRIÇÃO
Insuficiente	Abaixo do Básico	Os alunos neste nível demonstram domínio insuficiente dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série/ano escolar em que se encontram.
Suficiente	Básico	Os alunos neste nível demonstram domínio mínimo dos conteúdos, competências e habilidades, mas possuem as estruturas necessárias para interagir com a proposta curricular na série/ano subsequente.
	Adequado	Os alunos neste nível demonstram domínio pleno dos conteúdos, competências e habilidades desejáveis para a série/ano escolar em que se encontram.
Avançado	Avançado	Os alunos neste nível demonstram conhecimentos e domínio dos conteúdos, competências e habilidades acima do requerido na série/ano escolar em que se encontram.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2017).

Gráfico 1 – Percentual de alunos por nível de proficiência Matemática na Rede Estadual de São Paulo em 2017.



Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2017).

Os resultados apresentados pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo apontam que, dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, 23,2% foram classificados como “insuficientes”, com nível de proficiência em Matemática abaixo do básico; 61,4% apresentam nível de proficiência básico; e apenas 15,4% estão entre os níveis “adequado” e “avançado”.

Pensando nos resultados obtidos pelos alunos do Estado de São Paulo na prova de Matemática do SARESP, nos propusemos a analisar as questões apresentadas aos estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental, tendo como objeto matemático a trigonometria no triângulo retângulo.

Por meio das leituras dos trabalhos que abordam os temas citados, buscamos encontrar respostas para algumas inquietações pessoais – uma vez que, como expusemos anteriormente, os resultados apresentados pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental indicam a não compreensão dos conceitos exigidos no desenvolvimento das tarefas propostas pelas questões do SARESP.

Sendo assim, enunciamos nossa questão de pesquisa: “Que conjuntos de tarefas estão presentes nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, propostas pelo SARESP nos anos de 2010 a 2018, e que conjuntos de técnicas, tecnologias e teorias podem ser mobilizadas por estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental na resolução dessas questões?

Com o intuito de responder a essa questão de pesquisa, fizemos uma revisão bibliográfica para reconhecer e para sintetizar uma parte do que já foi publicado pela comunidade acadêmica em relação à temática de interesse nesta investigação, possibilitando o conhecimento das pesquisas referenciadas – além de contribuir para o aumento do conhecimento sobre o tema estudado.

Propusemos também um estudo do objeto matemático desta pesquisa. Começamos expondo fragmentos da história da trigonometria; logo em seguida, apresentamos estudos da trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico; por último, trouxemos a relação que poderia ser explorada entre a trigonometria no triângulo retângulo e a trigonometria no círculo trigonométrico.

Como referencial teórico, e com o objetivo de responder à questão de pesquisa, utilizamos os pressupostos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) para organizar, analisar e entender o objeto matemático, para, dessa forma, compreender como os conteúdos da trigonometria no triângulo retângulo se articulam nas questões propostas pelo SARESP.

Como metodologia de coleta de dados, optamos pela pesquisa qualitativa, com a finalidade de compreender atitudes, motivações e comportamentos de determinado grupo de alunos ao responderem a quatro questões do SARESP selecionadas para este trabalho.

Analisamos o desenvolvimento dos estudantes de duas turmas do 9º Ano do Ensino Fundamental na resolução das questões selecionadas para esta pesquisa e o relacionamos com a análise que fizemos dessas próprias questões com base na organização praxeológica.[2]

Assim, este trabalho foi organizado em sete capítulos, sendo eles divididos da seguinte forma: Neste capítulo 1, apresentamos a introdução deste trabalho; no capítulo 2, descrevemos a revisão bibliográfica; no capítulo 3, expomos sobre o objeto matemático; no capítulo 4, apresentamos a fundamentação teórica desta investigação; no capítulo 5, abordamos a metodologia de pesquisa utilizada; no capítulo 6, evidenciamos a análise de dados com base nos protocolos coletados; e, por fim, chegamos ao capítulo 7, no qual relatamos nossas considerações finais, oferecendo possíveis respostas à questão de pesquisa.

[2] Na Organização Praxeológica proposta por Chevallard (1999), toda atividade envolve uma técnica que está associada a uma tecnologia de uma determinada teoria, explicitando a organização praxeológica que se articula em tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Esses conceitos serão detalhados no capítulo 3.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, reunimos algumas pesquisas relacionadas à nossa temática. Buscamos trabalhos no banco de dissertações e teses da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) sobre três temas: primeiramente, “SARESP e Matemática”; posteriormente, “trigonometria no triângulo retângulo”; e, por último, “análise praxeológica”. Foi notória a ausência de trabalhos que relacionassem os resultados e as análises das questões do SARESP com o objeto matemático proposto.

Em relação à primeira temática (“SARESP e Matemática”), encontramos 7 trabalhos no banco de dissertações e teses da PUC-SP. Existem diversos trabalhos sobre o SARESP no repositório; porém, focamos em pesquisas na área de ensino da Matemática. A seguir, explicitamos quais são estas dissertações.

Quadro 2 – Dissertações selecionadas para análise com a temática: SARESP e Matemática.

1	Bosquetti, Maria Carolina Bonna. **SARESP/2000 e a questão da visualização em geometria espacial**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.
2	Golfeti, Silvia Marques. **Análise de livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental**: conteúdos de Estatística descritiva e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.
3	Ribeiro, Alessandro Jacques. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.
4	Chiste, Mônica Cristina. **SARESP –Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do estado de São Paulo**: repercussão do resultado positivo em duas escolas no ano de 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.
5	Vaz, Rosana Aparecida da Costa. **SARESP/2005**: uma análise de questões de matemática da 7ª série do ensino fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.
6	Gonçalves, Alessandro. **Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de álgebra baseadas no Saresp de 2008 a 2011**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.
7	Silva, Júlio César da. **Conhecimentos estatísticos e os exames oficiais**: SAEB, ENEM E SARESP. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

Fonte: elaboração do autor.

O primeiro trabalho selecionado sobre essa temática é o de Bosquetti (2002), no qual a autora buscou identificar se a prova do SARESP/2000 da 3ª série do Ensino Médio abordava questões de visualização em Geometria. O objetivo de sua pesquisa foi observar as habilidades de visualização IFI (habilidade para interpretação de informação figurativa) e VP (habilidade para o processo visual), assim como a competência e a habilidade propostas pela prova do SARESP. A autora relata que sua pesquisa foi realizada em duas etapas: nos protocolos do SARESP/2000 da 3ª série do Ensino Médio de uma escola e por meio de dois testes aplicados a alunos de duas classes da 3ª série/2001 do Ensino Médio da mesma escola. Segundo a autora, os resultados encontrados mostram que poucos alunos têm a habilidade de visualização desenvolvida, e, além disso, as provas do SARESP não permitem a observação da competência e da habilidade proposta pela prova.

Dando sequência ao estudo dos trabalhos selecionados para nossa investigação, temos a dissertação de Golfeti (2017), que relata um estudo bibliográfico envolvendo livros didáticos e a avalição de larga escala, o SARESP. A autora descreve que o objetivo de seu trabalho foi investigar as praxeologias matemáticas contidas nas atividades do livro didático do governo federal para as séries do Ensino Fundamental.

Os procedimentos metodológicos adotados pela autora foram a exploração de documentos escolhidos, tendo o processo de análises fundamentadas na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e apoiado nos níveis de compreensão de tabelas, segundo Wainer, e de gráficos, segundo Curcio. De acordo com a autora, o principal resultado obtido com a pesquisa foi a constatação de que os livros didáticos preparam os sujeitos, submetidos à práticas desses manuais, para os níveis de compreensão de gráficos e tabelas, com superioridade daqueles exigidos no SARESP, sendo que os níveis de compreensão identificados nas praxeologias das atividades dessa avaliação se expressam abaixo do que é prescrito nas referências curriculares nacionais.

Ainda dentro dessa temática, “SARESP e Matemática”, selecionamos o trabalho de Ribeiro (2001), investigação no qual o autor se preocupou em levantar, identificar e analisar os procedimentos e estratégias que os alunos da 8ª série do Ensino Fundamental utilizaram para resolver questões de Álgebra Elementar com base em uma análise de documentos do SARESP/1997. O autor descreve que aplicou as mesmas questões de Álgebra, que esse exame trazia, em uma amostra de 20 alunos da rede pública estadual de São Paulo.

Segundo o autor, os alunos, em um contexto de oficina, puderam trabalhar em pequenos grupos, com a participação do pesquisador, na resolução de questões abertas, o que proporcionou a oportunidade de produzir um material rico para análises e conclusões de sua investigação. Tendo como base os trabalhos de Kieran (1992) e Cortés e Kavafian (1999), foram apresentadas as análises feitas a respeito das estratégias utilizadas pelos alunos dessa amostra, e o autor buscou identificas possíveis causas para os erros mais frequentes.

Selecionamos também o trabalho de Chiste (2009), em que a autora relata que sua investigação tinha como objetivo identificar os fatores e as ações educacionais realizadas em duas escolas que receberam melhores pontuações em Matemática no relatório do SARESP/2007. Conforme a autora, a coleta de informações baseou-se em entrevistas reflexivas junto a gestores, diretores e coordenadores pedagógicos, também em observações realizadas nessas duas escolas, e em relatórios de rendimento escolar referentes ao SARESP/2007, disponibilizados pelo governo estadual na internet. A pesquisa apontou alguns fatores que contribuíram para o bom rendimento dessas escolas: grupo de professores efetivos trabalhando na escola havia muitos anos e de maneira coesa; busca por resultados que traduzem os esforços dos docentes e dos alunos, além de reuniões com professores e gestores para reavaliar e discutir estratégias pedagógicas; diretores e coordenadores atuantes, servindo de ligação entre os anseios dos alunos, da comunidade e os da escola.

Outro trabalho selecionado foi o de Vaz (2008), que descreveu a análise do desempenho dos alunos na resolução de algumas questões do SARESP/2005 relacionadas à Álgebra no que se refere a equações e expressões, envolvendo a conversão de representações semióticas do registro da língua natural para o registro algébrico (DUVAL, 2003). A pesquisadora utilizou como instrumento de pesquisa três questões da prova do SARESP/2005 aplicadas ao 8º ano do Ensino Fundamental em 2008. Na pesquisa, adotou-se uma abordagem qualitativa, fundamentada na metodologia da engenharia didática (ARTIGUE, 1996). Para analisar os dados obtidos, Vaz (2008) baseou-se nos níveis de mobilização dos conhecimentos de Aline Robert (1998).

A coleta de dados se deu em dois momentos: no primeiro, as questões foram reaplicadas da mesma maneira como no SARESP/2005, ou seja, com as alternativas; no segundo, em um intervalo de 15 dias, as questões foram reaplicadas, porém, sem as alternativas. Analisando o desempenho apresentado pelos alunos, a pesquisadora notou que todos se encontravam no nível técnico, uma vez que resolveram as questões utilizando apenas operações com números, sem realizar a conversão de representação na língua natural para outras no registro algébrico. Vaz (2008) argumentou que, para que houvesse uma boa compreensão dos conceitos algébricos, seria necessário um trabalho da Álgebra com suas várias representações, em níveis de conhecimento diferentes, exigindo do aluno a mobilização de seus conhecimentos e a articulação de estratégias para o desenvolvimento de uma atividade.

A pesquisa ainda apontou que o desempenho dos alunos nas avaliações internas deveria ser analisado qualitativamente pelos órgãos oficiais e pelos professores, pois só assim poderia servir, efetivamente, para redimensionar e implementar novos procedimentos e estratégias em sala de aula capazes de contribuir para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem.

Outro trabalho selecionado foi o de Gonçalves (2014), em que o autor relata que o objetivo de sua investigação foi analisar as estratégias dos alunos com foco nos erros cometidos e nas dificuldades apresentadas ao resolverem 13 questões de Álgebra escolhidas pelo pesquisador nos relatórios pedagógicos do SARESP dos anos de 2008 a 2011.

Segundo o autor, foi utilizado como referencial teórico as Categorias de Erros, propostas por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), as quais são: dados mal utilizados, interpretação incorreta de linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidas, falta de verificação da solução e erros técnicos. De acordo com o autor, a investigação foi realizada em uma escola pública, e contou com a participação de 15 alunos. A análise realizada possibilitou a identificação de dificuldades, das quais destacam-se as relacionadas à utilização correta da linguagem e aos simbolismos matemáticos. No que diz respeito aos erros revelados, Gonçalves (2014) descreveu que as principais categorias foram a de dados mal utilizados e erros técnicos.

Por último, dentro dessa primeira temática, selecionamos o trabalho de Silva (2007), no qual o autor relata que sua pesquisa teve por objetivo verificar as relações entre os instrumentos educacionais brasileiros (livro didático, documentos oficiais e os exames oficiais, como SAEB, ENEM E SARESP**)**, no que se refere aos conteúdos de Estatística, de acordo com níveis de alfabetização propostos por Gal (2002) e Wild Pffannkuch (1999). O autor analisou duas coleções de livros didáticos e três exames oficiais, concluindo que os livros didáticos permitem desenvolver habilidades propícias à alfabetização estatística no nível cultural, enquanto para o bom desempenho nos exames oficiais são necessárias habilidades propícias à alfabetização estatística no nível funcional.

Segundo o autor, é de se esperar que os alunos apresentem dificuldades nas resoluções de questões de Estatística dos exames oficiais. Um caminho possível, de acordo com ele, para minimizar tais dificuldades, é propor um trabalho voltado à formação do pensamento estatístico durante o processo de aprendizagem dos estudantes.

Encontramos diversos trabalhos relacionados à trigonometria, porém, obedecendo à nossa segunda temática de busca, selecionamos 5 dos trabalhos encontrados que estavam diretamente relacionados à trigonometria no triângulo retângulo. A seguir, explicitamos quais são estas dissertações.

Quadro 3 – Dissertações selecionadas para análise com a temática: trigonometria no triângulo retângulo.

1	Silva, Sílvio Alves da. **Trigonometria no triângulo retângulo**: construindo uma aprendizagem significativa. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
2	Nascimento, Alessandra Zeman do. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
3	Borges, Carlos Francisco. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico**: uma sequência para o ensino. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.
4	Lindegger, Luiz Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.
5	**Martins, Vera Lúcia de Oliveira Ferreira**. **Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

Fonte: elaboração do autor.

A pesquisa **Trigonometria no triângulo retângulo**: construindo uma aprendizagem significativa, desenvolvida por Silva (2005), descreveu uma abordagem de ensino da trigonometria no triângulo retângulo em que se pretendeu introduzir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. A hipótese do pesquisador era a possibilidade de construir uma aprendizagem significativa para o aluno por meio de situações-problema que articulassem as construções geométricas e o tratamento figural na abordagem das relações trigonométricas.

O pesquisador elaborou e aplicou uma sequência didática com quatro atividades, com base nos princípios da Engenharia Didática a fim de responder se a produção de uma sequência de ensino enfatizada nas construções e nas transformações geométricas articuladas ao tratamento figural proporcionaria uma compreensão significativa dos conceitos da trigonometria no triângulo retângulo para alunos do 1º Ano do Ensino Médio. O autor analisou as concepções dos alunos durante a resolução das situações contidas nas atividades e nas discussões, e concluiu que houve evolução conceitual dos alunos no que se refere às relações trigonométricas.

No trabalho de Nascimento (2005), o objetivo foi construir uma tabela trigonométrica, com base em levantamentos históricos dos trabalhos de Ptolomeu e outros matemáticos da Grécia Antiga, para investigar a apropriação do significado dos conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, no triângulo retângulo, por estudantes do 1° Ano do Ensino Médio. Segundo o autor, foram utilizados os pressupostos teóricos de Vygotsky no que se refere à importância atribuída à interação social, à linguagem e à simbolização no progresssivo domínio de campo conceitual pelos alunos, ao tratar dos invariantes operatórios conceito-em-ação e teorema-em-ação, de sua concepção de campo conceitual e de conceito, além do modelo apresentado por Parzysz para um quadro teórico de ensino da Geometria, em que ele destaca quatro etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico.

O autor relata que os resultados da experimentação apontam para uma defasagem em Geometria e em Álgebra, mas que, apesar disso, um ensino da trigonometria do triângulo retângulo gerador de motivações, incluindo atividades diversificadas, com situações problematizadoras, que estimulem o pensar, a investigação e o realizar, contribui para que os alunos construam o significado das razões trigonométricas, além de favorecer a argumentação e modificar várias concepções errôneas.

Ainda dentro da nossa segunda temática, selecionamos o trabalho de Borges (2009). O autor descreve que seu trabalho tem como objetivo contribuir com o ensino da trigonometria, em especial, na transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo, para o círculo trigonométrico. Segundo o autor, foram elaboradas 12 atividades, das quais 10 foram criadas com a preocupação de conduzir o aluno a compreender as razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico, utilizando o *software* de geometria dinâmica Geogebra. Borges (2009) relata que as atividades foram aplicadas para oito alunos do 2° ano do Ensino Médio de uma escola do município de Francisco Morato, na região metropolitana de São Paulo. A Teoria das Situações Didáticas e alguns pressupostos da Engenharia Didática foram usados na elaboração, na análise, na aplicação e na coleta de dados da sequência de ensino. De acordo com o autor, a experimentação aponta que os alunos não mobilizaram alguns conhecimentos prévios necessários e apresentaram dificuldades para expor suas observações por escrito, porém, a experimentação mostrou que houve avanços na aprendizagem dos alunos, pois, ao executarem as atividades utilizando a geometria dinâmica, mostraram interesse e concentração.

O próximo trabalho relacionado à nossa segunda temática de busca é o de Lindegger (2000), e o objetivo de seu trabalho foi investigar uma abordagem para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, na qual se pretendeu introduzir os conceitos das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir da manipulação de modelos.

O autor trabalhou com duas turmas, ambas da 8ª série do Ensino Fundamental, sendo uma considerada como grupo de referência (GR) e a outra considerada como grupo experimental (GE). O autor relata que no GE foi aplicada uma sequência de ensino objeto da pesquisa, com pressuposto teórico construtivista, com base na psicologia cognitiva de Vygotsky e Vergnaud, e na didática francesa de Brousseau. No GR, a abordagem da trigonometria se deu na forma considerada tradicional (definição seguida de exercícios).

Lindegger (2000) descreve que os dois grupos foram submetidos a dois testes individuais: um antes (pré-teste) da introdução dos conceitos de razões trigonométricas e outro (pós-teste) após terem tido contato com esse conteúdo.

Segundo o autor, o GE apresentou um desempenho satisfatório e superior ao GR, e a investigação apontou que o processo de construção dos conceitos básicos da trigonometria, a exemplo da História, ganha força quando se inicia com base na resolução de problemas concretos, advindos da realidade, dirigindo-se para os problemas, quando os conceitos ganham significados mais abstratos e abrangentes.

Por último, nessa segunda temática de busca, temos a pesquisa **Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre**, de Martins (2003), no qual a autora introduziu os conceitos de seno e cosseno de forma coordenada a partir do triângulo retângulo, passando pelo ciclo trigonométrico e finalizando com os gráficos das funções correspondentes, em uma tentativa de propiciar aos alunos condições para atribuir significado a tais conceitos. A autora elaborou uma sequência didática composta de sete atividades, com o intuito de investigar se alunos do 2º Ano do Ensino Médio, que já trabalharam com trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico, poderiam – por meio dessa sequência e com o auxílio do *software* Cabri-Géomètre – utilizar esses conhecimentos na construção dos gráficos das funções seno e cosseno.

A pesquisadora elaborou e analisou a sequência de ensino apoiando-se em elementos da Dialética Ferramenta-Objeto e na noção de Interação entre Domínios, de Régine Douady (1986). O desenvolvimento das atividades ocorreu no ano de 2002, em uma escola da rede estadual da região central de São Paulo. O grupo participante foi composto de 16 alunos. Martins (2003) descreveu que, no decorrer da resolução das questões propostas e pelos resultados obtidos, o *software* Cabri-Géomètre se mostrou bastante eficaz, auxiliando os alunos a associar os conceitos já estudados no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico com as funções seno e cosseno.

Nesse trabalho, Martins (2003) concluiu que a maioria dos alunos percebeu que seno e cosseno estudados no triângulo retângulo não diferem daqueles estudados no ciclo trigonométrico.

Na terceira temática (“análise praxeológica”), identificamos trabalhos que poderiam nortear a pesquisa a fim de responder à nossa questão. Dentre os diversos trabalhos relacionados à TAD presentes no banco de dados da PUC-SP, selecionamos apenas documentos cujos títulos nos trabalhos apontavam para a organização praxeológica, a análise praxeológica e as organizações matemáticas. A seguir, explicitamos os 5 trabalhos selecionados.

Quadro 4 – Dissertações selecionadas para análise com a temática: análise praxeológica.

1	Cruz, Eliana da Silva. **A noção de variável em livros didáticos de Ensino Fundamental**: um estudo sob ótica da organização praxeológica. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
2	Carvalho, Cláudia Cristina Soares de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
3	Costa, Acylena Coelho. **Geometria Analítica no Espaço**: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.
4	Chaves, Adiel Praseres. **Função Quadrática**: análise em termos de contextos, de organizações matemáticas e didáticas propostas em Livros Didáticos de Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.
5	Mateus, Pedro. **Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos**: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

Fonte: elaboração do autor.

Em sua pesquisa, Cruz (2005) investigou como a noção de variável tem sido abordada pelos livros didáticos brasileiros do terceiro e do quarto ciclos do Ensino Fundamental. A pesquisa – fundamentada na teoria antropológica do didático (TAD), de Chevallard (1991) – se propôs a responder como os livros didáticos abordam a noção de variável na ótica da organização praxeológica proposta por Chevallard. A autora desenvolveu uma análise qualitativa e documental de quatro coleções de livros didáticos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental.

A análise foi desenvolvida com base em três aspectos considerados bastante relevantes para o estudo proposto: primeiramente, observou-se de que modo os livros didáticos vêm incorporando as orientações dadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), visto que, a princípio, eles estariam de acordo com essas propostas; em seguida, a pesquisadora verificou quais foram as abordagens utilizadas pelos autores para introduzir e desenvolver a Álgebra; e, por último, foram verificados quais os diferentes usos da ideia de variável.

Cruz (2005) procurou identificar os exercícios que atendiam aos três aspectos, elencando: qual era o tipo de tarefa proposta; qual era a maneira de cumprir essa tarefa; qual era a técnica envolvida; e qual era o discurso teórico-tecnológico que estava por trás dessa técnica. A pesquisadora concluiu que, embora os livros didáticos trouxessem várias concepções da Álgebra e trabalhassem as variáveis em diferentes enfoques, ainda havia a predominância de exercícios para aplicação de técnicas.

Dentro de nossa temática, selecionamos também a investigação de Carvalho (2007), em que a autora relata que a proposta da pesquisa é promover uma reflexão sobre o uso de provas e demonstrações no conteúdo algébrico Conjuntos e Conjuntos Numéricos abordado em livros didáticos do 1° ano do Ensino Médio. A autora analisou o primeiro volume de três das 11 coleções de livros didáticos selecionados pelo Ministério da Educação brasileiro no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM/2006). Segundo a autora, para realizar a análise dessas tarefas foram usadas a noção de praxeologia (CHEVALLARD, 1999) e de níveis de prova (BALACHEFF, 1988). Em cada tarefa analisada, a autora destacou, também, a possibilidade do trabalho com as concepções de Álgebra propostas por Usiskin (1995).

Segundo Carvalho (2007), a análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração existentes na abordagem do conteúdo algébrico Conjuntos e Conjuntos Numéricos permitiu entender a maneira como os livros didáticos analisados propõem aos alunos as demonstrações às propriedades enunciadas ao longo da exposição dos conteúdos.

Dando sequência aos nossos estudos, selecionamos o trabalho de Costa (2015). A autora descreve que sua investigação tinha como objetivo analisar como os autores de livros didáticos organizaram as atividades propostas no que se refere ao estudo da reta e do plano para o ensino da Geometria Analítica no Espaço.

De acordo com a autora, a análise dos livros didáticos fundamentou-se essencialmente na Teoria Antropológica do Didático (TAD), nas praxeologias propostas por Chevallard (1999) e nas variáveis didáticas para o ensino da Geometria Analítica no Espaço estabelecidas por Lebeau (2009).

Com base no referencial teórico adotado, a autora realizou uma investigação de caráter qualitativo do tipo documental, partindo de um levantamento bibliográfico em quatro livros didáticos de Geometria Analítica destinados ao Ensino Superior. A autora relata que a metodologia adotada foi subsidiada na metodologia de análise de manuais desenvolvida por Chaachoua (2014), analisando, nos livros didáticos, os seguintes aspectos: momento da edição, representatividade, estrutura, análise ecológica e análise praxeológica. Dentre os resultados encontrados, Costa (2015) relata que é possível inferir que os autores privilegiam uma modelização algébrica dos objetos matemáticos, bem como as técnicas adotadas por eles se encontram situadas no campo da Álgebra Linear e da Geometria Analítica.

Outro trabalho selecionado foi o de Chaves (2000), em que o autor relata que o objetivo de sua investigação é analisar os contextos nos quais o estudo do vértice da parábola, que representa uma função quadrática, apresenta-se nas abordagens de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. O autor desenvolveu uma pesquisa qualitativa, de natureza documental, e teve como suporte a TAD, mais precisamente as noções de organizações praxeológicas.

Segundo o autor, um dos resultados encontrados foi que as tarefas analisadas têm *status* de exemplo de aplicação que colocam em jogo a mobilização de propriedades das coordenadas do vértice da parábola, as quais por sua vez representam a referida função, mas também a determinação da lei de formação dessa função, a partir das coordenadas dos pontos da curva que a representam.

Identificamos, também, subsídios para responder à questão da pesquisa no trabalho de Mateus (2007), cujo objetivo foi analisar e compreender melhor como, na atualidade, os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral são tratados em alguns livros didáticos disponíveis. O autor discutiu sobre o Cálculo Diferencial e Integral por considerá-lo uma área da Matemática que tem contribuído intensamente para o progresso cientifico e tecnológico.

O trabalho focalizou a análise do livro didático devido à importância de que ele se reveste na ação do professor em sala de aula, e porque o material constitui uma fonte de conhecimento do aluno. Conforme o autor, sua pesquisa se assentou na hipótese de que alguns dos fatores que interferem no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral estão diretamente relacionados com a organização didático-matemática dos livros didáticos.

Analisar essa organização praxeológica dos livros didáticos poderia ajudar a compreender as causas das dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, além de proporcionar algumas atitudes tendentes à sua utilização correta e criativa. De acordo com o pesquisador, sua questão de pesquisa foi: O que os livros didáticos disponíveis sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral? As bases teóricas foram a Teoria de Registros e Representação Semiótica, de Duval (2003); a Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999); e a Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau (1977).

Conforme o pesquisador, a primeira teoria serviu para avaliar o grau de articulação entre os registros de representação semiótica usados nos livros selecionados; a segunda, serviu para analisar os tipos de tarefas, de técnicas e de discursos teórico-tecnológicos que as justificam; a terceira teoria serviu para avaliar os contextos criados na exposição de conteúdos matemáticos.

Para o autor, os resultados apontaram que a articulação entre os registros de representação semiótica é débil, pois houve preferência pelo uso de representações no registro algébrico e seus tratamentos, em vez de se promover a articulação com a conversão entre os de representações em diferentes registros; trabalhou-se mais sobre o bloco prático-técnico e o bloco tecnológico-teórico; a exposição formal do conteúdo predominou, em vez da contextualização como fio condutor das ideias para a formalização.

Finalizamos essa revisão bibliográfica identificando as contribuições que os trabalhos analisados proporcionaram à nossa investigação.

Dentro da temática 1-SARESP e Matemática, observamos como os pesquisadores utilizaram as questões propostas pelo SARESP e os resultados dos alunos para indicar possíveis caminhos na aprendizagem e no ensino da Matemática.

A temática 2, trigonometria no triângulo retângulo, nos possibilitou um olhar mais aprofundado para a trigonometria, principalmente para as diversas possibilidades para o ensino dessa área.

Por fim, a temática 3, análise praxeológica, nos propiciou conhecer melhor a Teoria Antropológica do Didático (TAD), permitindo mais embasamento para responder à nossa questão de pesquisa.

No próximo capítulo, apresentaremos um estudo do objeto matemático proposto em nosso trabalho: razões trigonométricas no triângulo retângulo.

3 O OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo, apresentamos alguns aspectos da trigonometria com enfoque em fragmentos históricos, e na perspectiva da trigonometria no triângulo retângulo.

3.1 Breve histórico da trigonometria

A trigonometria, bem como a maioria dos conceitos da Matemática estudados na educação básica, surge em um primeiro momento a partir de necessidades práticas. Por meio do desenvolvimento da humanidade e não como obra de um só homem.

De acordo com Pereira (2012), é na Grécia que vamos situar o nascimento desse campo da Matemática, principalmente com os trabalhos de Hiparco de Niceia (190-120 a.C.), que, ao estabelecer uma ponte entre a Astronomia e a Geometria, deu início à trigonometria. Com a construção de suas tabelas trigonométricas, ele organizou as observações do céu feitas pelos babilônios, elaborando um catálogo de estrelas[3]. Para construir as tabelas trigonométricas, utilizadas para medir triângulos Terra relacionados com ocorrências no céu, Hiparco precisou usar o triângulo retângulo para calcular suas cordas, com o objetivo de determinar as posições das estrelas e dos planetas usando uma unidade de medida para arcos e ângulos, além de um sistema de coordenadas para localizar um corpo na esfera celestial.

Ainda sobre a história da trigonometria, Pereira (2012) descreve que Ptolomeu (100-178 d.C.) escreveu, no Museu de Alexandria, a mais influente obra sobre trigonometria da Antiguidade: uma coleção de 13 livros chamada **Síntese Matemática**. A coleção contém uma descrição matemática do modelo grego do universo, analisando o movimento do Sol, da Lua e dos planetas.

Pereira (2012) relata que, para realizar os cálculos necessários de acordo com o calendário, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de todos os arcos de 0,5º a 180º, em intervalos de 0,5º. Por interpolação, ele obtinha outros valores, o que fazia da tabela de Ptolomeu um instrumento bem mais completo que o do próprio Hiparco.

[3] Catálogo de estrelas é um catálogo astronômico que lista estrelas. Há um grande número de catálogos de estrelas diferentes produzidos para fins diferentes ao longo dos anos, e aqueles foram compilados por muitos povos antigos diferentes, incluindo os babilônios, os gregos, os chineses, os persas e os árabes.

De acordo com Pereira (2012), mais tarde, os árabes passaram a chamar os livros de Ptolomeu de **Almagesto**, que significa “o maior”. O objetivo de Ptolomeu era, conforme o calendário, determinar as estações, prever eclipses e estabelecer o mês lunar. Gregos, hindus e árabes usaram linhas trigonométricas, com a forma de cordas em um círculo.

Pereira (2012) ainda relata que os matemáticos da Índia escolheram um caminho diferente para a trigonometria. Apesar do amplo domínio do **Almagesto**, no final do século IV começou a ser largamente utilizado um conjunto de textos matemáticos surgidos na Índia, com o título de **Siddantha**, que significa “sistemas de astronomia”.

De acordo com Pereira (2012), esses textos eram escritos em versos poéticos e em sânscrito. Em vez de seguir o caminho de Ptolomeu, o **Siddantha** usava uma trigonometria baseada na relação entre metade da corda e metade do ângulo central de uma circunferência. Os hindus tinham dado o nome de *jiva* à metade da corda, e os árabes a transformaram em *jiba*. Traduzindo do árabe para o latim, Robert de Chester interpretou jb (em árabe, as vogais não são escritas) como *jaib*, que significa baía ou enseada, e escreveu *sinus*, em latim. A partir daí, a meia corda hindu passou a ser chamada de *sinus* – em português, seno. Por exemplo, no **Siddantha**, a corda de 30º era a meia corda de 60º.

Compreendendo a evolução histórica da trigonometria, Pereira (2012) conta que o período histórico que vai dos trabalhos de Hiparco até o trabalho de Euler (1707-1783) durou mais de 1500 anos. A trigonometria, nesse intervalo, estudava as relações entre os lados e os ângulos de triângulos, com suas aplicações para cálculos de distâncias, construções, navegação e astronomia, entre outros fatores.

Nesta perspectiva, a palavra trigonometria, derivada dos termos gregos *trigonom*, que significa triângulo, e *metria*, que significa medida, teve seu significado etimológico original, e era considerada como a área da Matemática que trabalhava com as relações entre as medidas dos triângulos, envolvendo comprimentos de lados e medidas de ângulos.

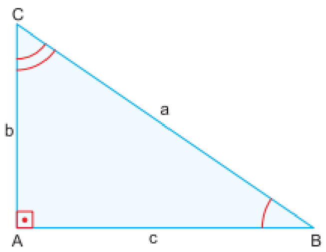
Os principais desenvolvimentos ocorridos nessa fase são atualmente trabalhados na Matemática escolar brasileira, geralmente, no 9º ano do Ensino Fundamental, em que é enfatizado o estudo das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, e, posteriormente, no 2° ano do Ensino

Médio esses conceitos passam a ser compreendidos no ciclo trigonométrico por meio dos arcos e dos ângulos em uma ou mais voltas na representação do círculo trigonométrico, no qual as razões trigonométricas passam a ser vistas como abscissa (valores do seno) e ordenada (valores do cosseno) de pontos do plano.

Estendemos a importância histórica da trigonometria, pois a compreensão deste campo do conhecimento matemático é fonte de uma série de atividades, procedimentos, aplicações e representações que muito podem enriquecer o ensino e a aprendizagem da trigonometria. Estes, inclusive, contribuem para que o aluno veja a Matemática como um conhecimento desenvolvido socialmente, ao longo da história da humanidade, e percebam como os conceitos e os procedimentos estudados evoluíram e como mudam de acordo com as aplicações e as demandas dos contextos.

3.2 Trigonometria no triângulo retângulo

Consideremos um triângulo retângulo $\mathrm{A\hat{B}C}$, e que o ângulo reto seja em Â. Os outros dois ângulos, B e C, são agudos e complementares, isto é, B + C = 90°. Para ângulos agudos, temos por definição:



Assim sendo:

$$sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{B}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{B}} = \frac{b}{c}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}} = \frac{c}{d}$$

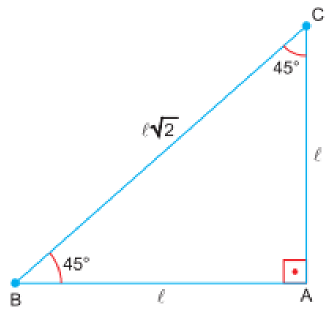
Os senos e os cossenos de ângulos agudos são números compreendidos entre 0 e 1, pois a medida do cateto é sempre menor do que a medida da hipotenusa.

O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complemento, e reciprocamente:

$$sen\ x = \cos\ (90° - x)$$

$$\cos x = sen\ (90° - x)$$

Em um triângulo retângulo isósceles qualquer, se $\boldsymbol{l}$ for a medida de cada cateto, então $l\sqrt{2}$ será a medida da hipotenusa, pois $(BC)^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 2l^2 \Leftrightarrow BC = l\sqrt{2}$.



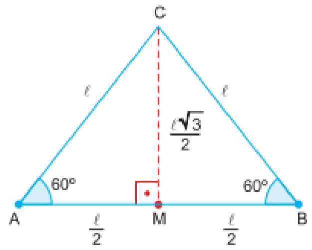
Assim sendo:

$$sen\ \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow en\ 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow en\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 45° = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow tg\ 45° = \frac{l}{l} \Rightarrow tg\ 45° = 1$$

Em um triângulo equilátero qualquer, se $\boldsymbol{l}$ for a medida de cada um dos lados, então $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ será a medida da altura, pois:



$$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (MC)^2 \Leftrightarrow (MC)^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow (MC)^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Assim sendo:

$$sen\ \hat{A} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow sen\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Leftrightarrow sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \cos 60° = \frac{\frac{l}{2}}{l} \Leftrightarrow \cos 60° = \frac{1}{2}$$

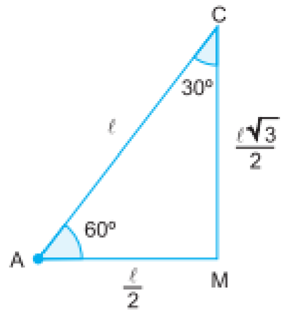
$$tg\ \hat{A} = \frac{MC}{AM} \Rightarrow tg\ 60° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Leftrightarrow tg\ 60°° = 3$$

No triângulo retângulo AMC do item anterior, temos:

$$sen\ \hat{C} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{l}{2}}{l} \Leftrightarrow sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Leftrightarrow \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ \hat{C} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow tg\ 30° = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Note que:

$$sen\ 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

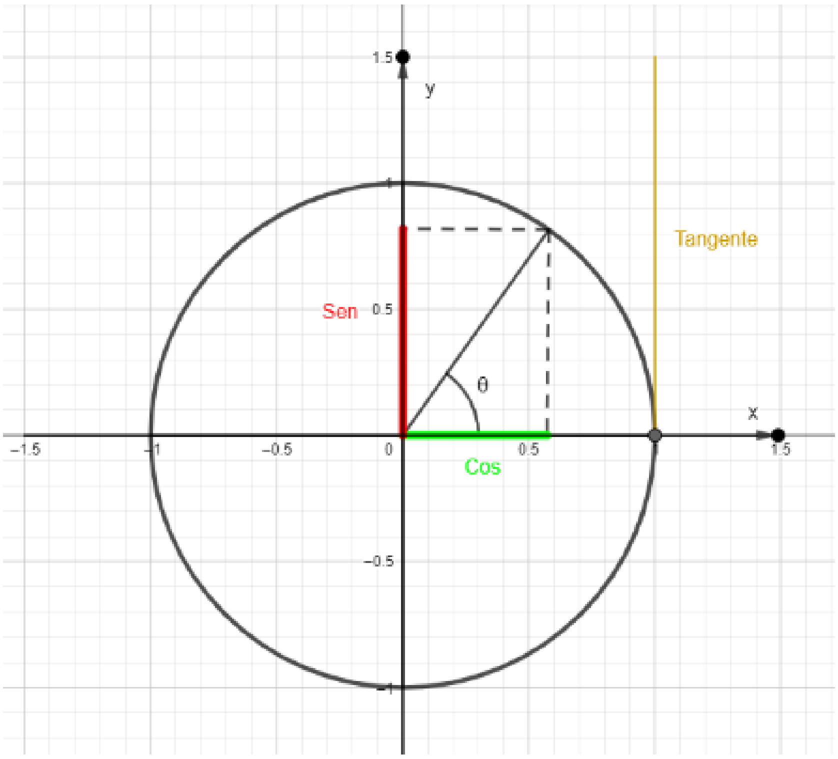
Quadro 5 – Valores para seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis.

x	sen x	cos x	tg x
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

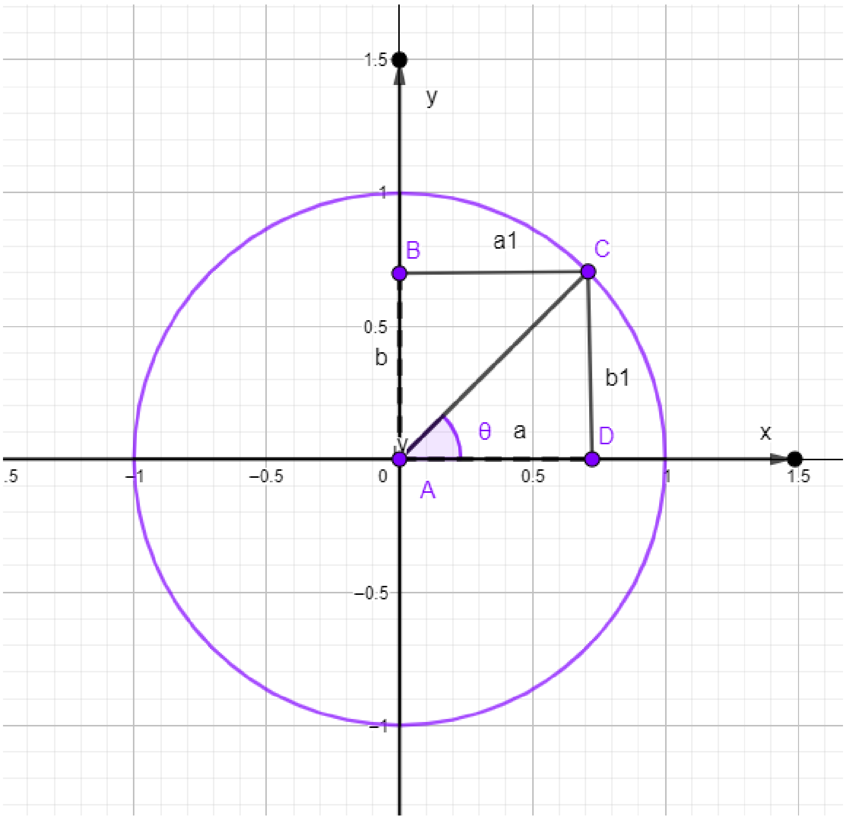
Fonte: elaboração do autor.

3.3 Estudo da trigonometria no triângulo retângulo com base no círculo trigonométrico

De acordo com a simetria do círculo trigonométrico, temos que o eixo vertical corresponde ao seno, e o eixo horizontal, ao cosseno. Cada ponto da circunferência que delimita o círculo trigonométrico é a extremidade de um arco com origem no ponto (1,0). A cada um desses arcos está associado um ângulo com vértice no centro da circunferência (ponto (0,0)).



É possível encontrar os valores de seno e de cosseno de um ângulo θ qualquer. Para tanto, é necessário construir esse ângulo no círculo trigonométrico, como foi feito na imagem a seguir.



Note que, tomando os segmentos BC e AB, paralelos a AD e DC, respectivamente, temos um retângulo. Podemos notar que a medida do lado CD = b_1 é igual ao $sen\,\theta$, pois:

$$sen\,\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{b_1}{1} = b_1$$

A medida do segmento AC é 1 porque AC é o raio da circunferência. Essa é a medida da diagonal do retângulo. A medida do segmento AD = a é igual ao $\cos\theta$, pois:

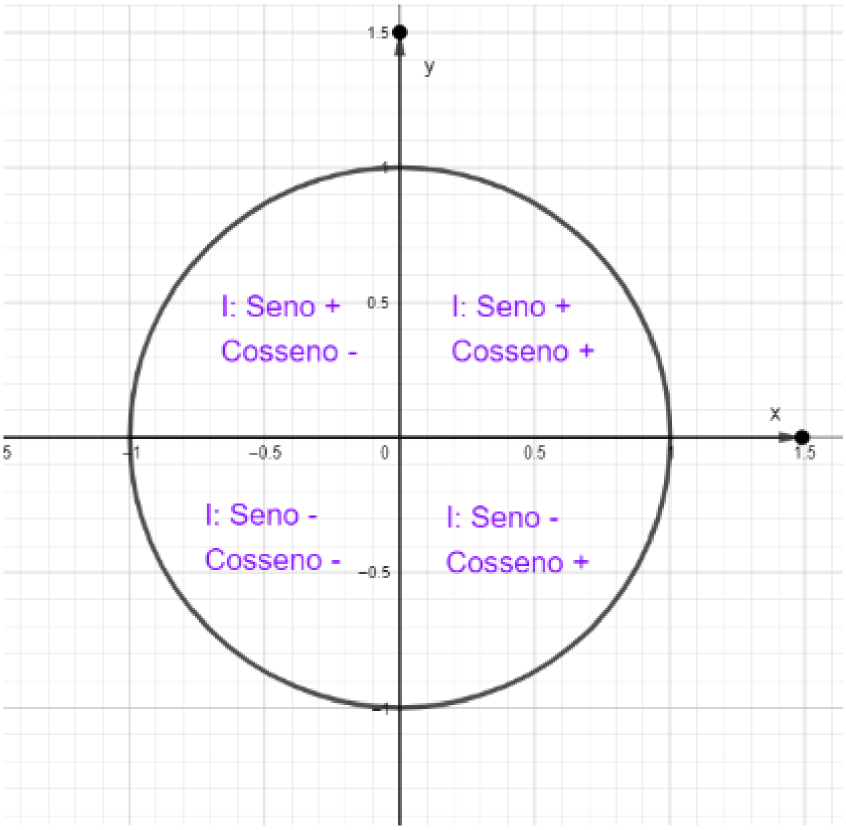
$$\cos\theta = \frac{AD}{AC} = \frac{a}{1} = a$$

Sendo assim, no círculo trigonométrico, as medidas de seno e cosseno de θ são iguais às medidas do cateto oposto e adjacente a esse ângulo.

Podemos calcular agora os valores mais importantes para seno e cosseno. Observe no círculo trigonométrico que:

1) Quando $\theta = 0°, sen\,\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$.
2) Quando $\theta = 90°, sen\,\theta = 1$ e $\cos\theta = 0$.
3) Quando $\theta = 180°, sen\,\theta = 0$ e $\cos\theta = -1$.
4) Quando $\theta = 270°, sen\,\theta = -1$ e $\cos\theta = 0$.
5) Quando $\theta = 360°, sen\,\theta$ e $\cos\theta$ possuem os mesmos valores em que o θ é igual a 0°

Nesse sentido, podemos saber os quadrantes nos quais o seno e o cosseno são positivos ou negativos. Observe a figura a seguir:

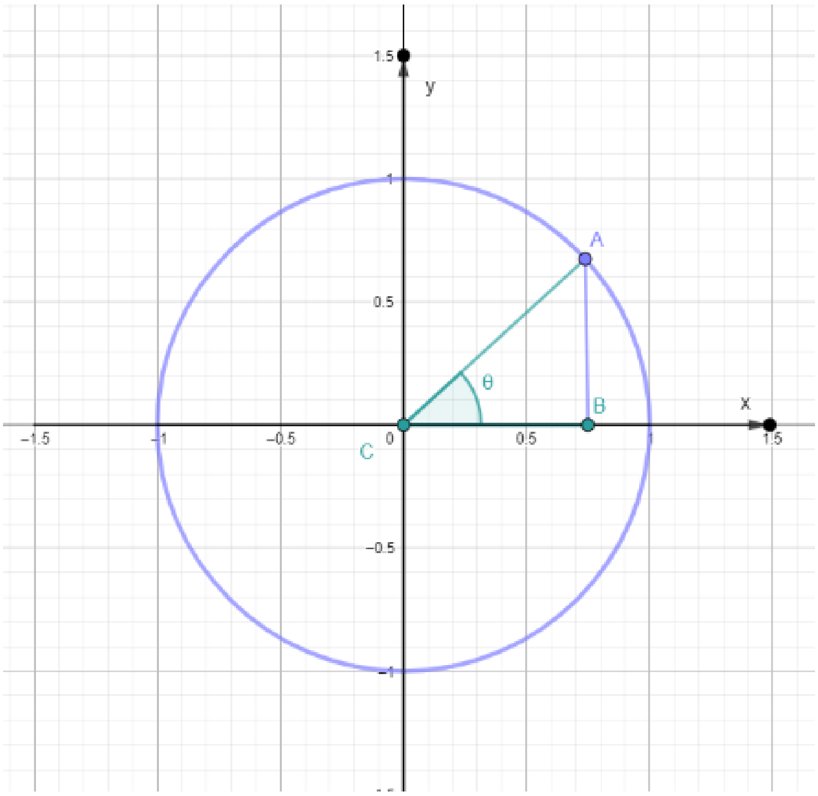


Existem duas relações fundamentais da trigonometria, por meio das quais é possível encontrar relações entre razões trigonométricas. Elas são chamadas fundamentais porque estão envolvidas na maioria dos cálculos básicos da trigonometria em um nível intermediário. A primeira dessas razões, que é muito parecida com o teorema de Pitágoras, é a seguinte:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

Podemos dizer, portanto, que a soma do quadrado do seno de um arco com o quadrado do cosseno desse mesmo arco sempre será igual a 1. A demonstração desse teorema, mais conhecida como primeira relação fundamental da trigonometria**,** depende de conhecimentos básicos sobre o ciclo trigonométrico.

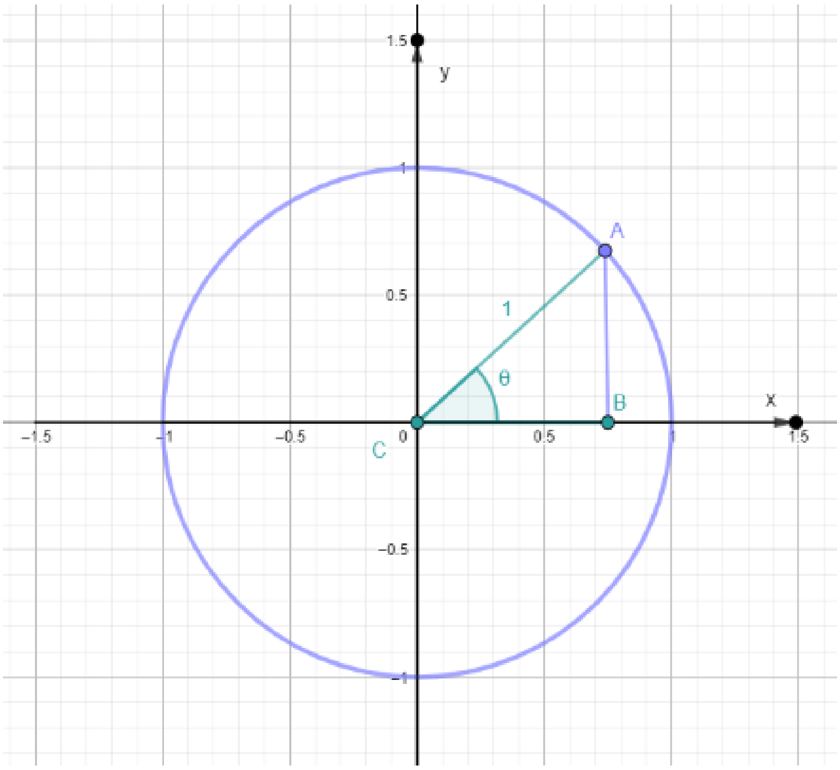
Para verificar isso, basta desenhar um triângulo retângulo qualquer no ciclo, de modo que o ângulo avaliado tenha seu vértice no centro do ciclo e um de seus lados esteja sobre o eixo x, à direita do ponto C, como mostra a imagem a seguir.



Observe que a hipotenusa desse triângulo sempre será um raio do ciclo. Esse raio sempre mede 1, ou seja, o resultado de $sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{1} = cateto\ oposto.$

Logo, marcando um ponto qualquer sobre um dos eixos (x ou y) do plano cartesiano, a distância entre esse ponto e o centro C sempre será igual ao comprimento do cateto oposto ou do cateto adjacente de um ângulo α, e, por consequência, representa o valor do seno ou do cosseno do ângulo α.

Grande parte da demonstração da primeira relação fundamental é dada com a explicação sobre o ciclo trigonométrico acima. Na imagem a seguir, observe que o cateto oposto ao ângulo α é o segmento AB, e que seu cateto adjacente é o segmento CB. Além disso, note também que a hipotenusa do triângulo ABC é o segmento CA, que mede 1 unidade.



Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$AB^2 + \ CB^2 = 1$$
$$sen\alpha^2 + cos\alpha^2 = 1$$

Essa é justamente a primeira relação fundamental da trigonometria.

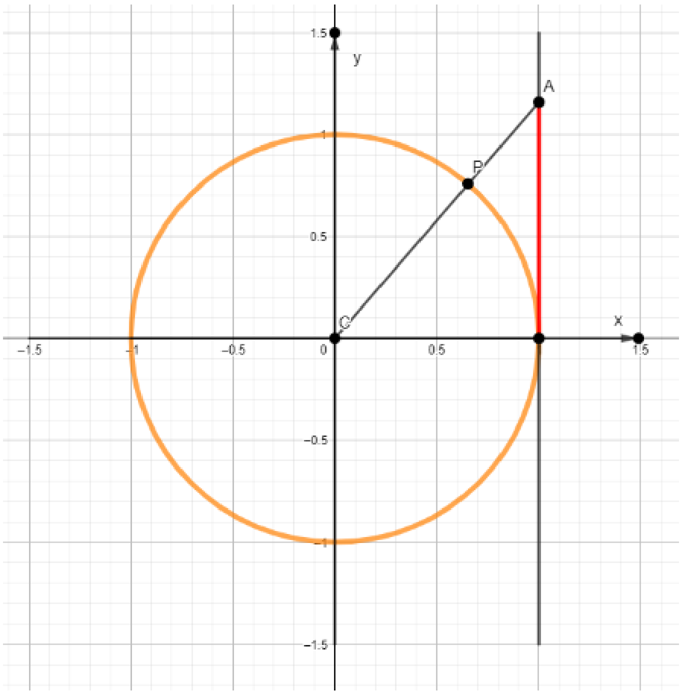
A segunda relação fundamental da trigonometria é, considerando um arco x qualquer, exceto $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$:

$$tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$$

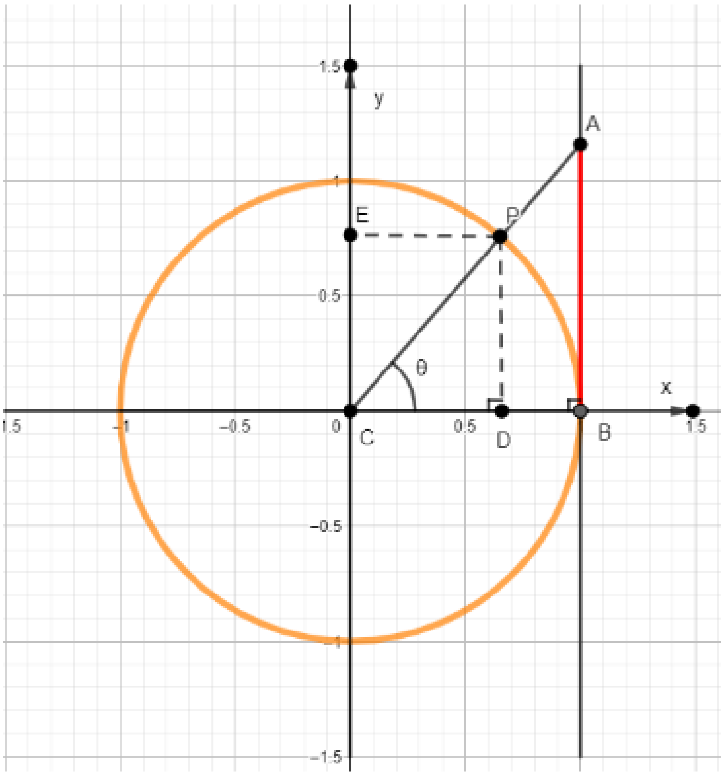
Assim, podemos afirmar que a tangente de um arco é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo arco. A demonstração desse teorema depende de conceitos básicos do ciclo trigonométrico.

Se marcarmos um ponto qualquer sobre o eixo x, por exemplo, esse ponto estará ligado a um número real, o qual, por sua vez, é abscissa de um ponto no ciclo trigonométrico. Por meio desse ponto, é possível descobrir o ângulo ligado ao valor escolhido sobre o eixo x.

O eixo das tangentes é uma reta que passa fora do ciclo, tangente a ele pelo ponto (1, 0). Marcando um ponto P sobre o ciclo, devemos construir o segmento de reta cujas extremidades são: o centro C do ciclo e um ponto A da reta tangente, de modo que esse segmento de reta contenha o ponto P sobre o ciclo. A distância entre o ponto A e o ponto (1, 0) é o valor da tangente no ciclo trigonométrico. Note que esse valor está ligado ao ângulo α: a abertura entre o segmento de reta construído e o eixo x.



Para demostrar a segunda relação fundamental, observe inicialmente a construção a seguir:



Perceba que os triângulos CPD e CAB são semelhantes pelo caso AA (ângulo, ângulo). Isso significa que existe proporcionalidade entre seus lados. Uma das proporcionalidades que podem ser escritas é:

$$\frac{CD}{PD} = \frac{CB}{AB}$$

Nessa proporção, AB é a tangente de α, CD é o cosseno de α e PD é o seno de α. Além disso, CB = 1, pois é raio do ciclo. Substituindo esses valores na proporção acima, teremos:

$$\frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

Assim, usando as propriedades operatórias das equações, também é possível representá-la da seguinte forma:

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\ \alpha$$

Finalizado o estudo do objeto matemático proposto, no próximo capítulo apresentaremos nosso referencial teórico, enfatizando as organizações praxeológicas da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que nortearão a análise das questões selecionadas para este trabalho e a resolução dos alunos participantes do teste para nossa investigação.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentamos o referencial teórico adotado em nossa pesquisa para o desenvolvimento das análises das questões selecionadas do SARESP.

4.1 Organizações praxeológicas

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas regularmente feitas, descrevendo o conhecimento matemático em termos de organizações ou praxeologias cujas noções básicas são as noções de tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias que permitem modelar as práticas sociais em geral e a atividade matemática em particular (CHEVALLARD, 1999).

Para este trabalho, a análise das questões propostas pelo SARESP nos anos de 2009 e 2010 aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental será desenvolvida com base na organização praxeológica proposta por Chevallard (1999), por meio da qual buscamos identificar os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias nas questões escolhidas para nossa análise.

De acordo com Chevallard, a TAD envolve a atividade matemática – e, então, a atividade de estudo em Matemática – nos conjuntos de atividades humanas e nas instituições sociais.

Para Sabo (2010), o postulado básico da TAD é admitir que qualquer atividade humana possa ser descrita por um modelo, que se resume pela palavra praxeologia; o autor argumenta que, sob tal perspectiva de análise, é possível observar o ato de ensinar e aprender Matemática como sendo, também, o resultado de atividades humanas. Desse modo, segundo a TAD, podemos descrever o ato de ensinar e aprender Matemática por meio de uma organização praxeológica, com o objetivo de analisar, estudar e explicar de que forma essa ação se realiza.

Almouloud (2014) descreve que a organização praxeológica é formada por um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefa, as quais, geralmente, se expressam por um verbo, por exemplo: desenvolver a expressão literal dada.

Segundo Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017), podemos compreender a tarefa como uma obra, produção humana intencionada que parte, normalmente, de um verbo – cantar, andar, entre outros –, e a técnica é definida como sendo os procedimentos pelos quais determinada tarefa foi realizada, isto é, existe, em princípio, uma técnica sobre um tipo de tarefa que fará com que a tarefa (ou o tipo de tarefa) seja feita, realizada, executada. Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017) afirma que o tipo de tarefa e a técnica constituem o bloco prático-técnico, o qual, genericamente, é constituído como saber comum.

De acordo com Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017), a tecnologia é a explicação, a justificação, de maneira racional, da técnica, ou seja, a veracidade da técnica realizada para executar o tipo de tarefa, e a teoria é o porquê formal e lógico das tecnologias, e refere-se a um conjunto mais abstrato de conceitos e argumentos dispostos em um discurso geral que justifica a tecnologia em si. Ainda segundo Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017), a teoria e a tecnologia constituem, de maneira imbricada, o bloco tecnológico-teórico.

Conforme Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017), há maior visibilidade no ensino no bloco prático-técnico do que no bloco tecnológico-teórico, uma vez que nem sempre se identifica, de maneira clara, esses elementos de praxeologia.

Sabo (2010) descreve que a tecnologia é um discurso racional com o objetivo de justificar e demonstrar as técnicas utilizadas para uma determinada tarefa ou um gênero de tarefas. Esse discurso racional varia no espaço institucional, ou seja, um discurso que possui certa racionalidade em uma determinada instituição poderá parecer pouco racional, ou mesmo sem significação em outro espaço institucional. O autor afirma que, segundo Chevallard (1999), em uma instituição, qualquer que seja o tipo de tarefa, a técnica relativa a essa tarefa estará sempre associada a uma tecnologia ou a um vestígio de tecnologia.

Ainda de acordo com Sabo (2010), ele argumenta, em sua pesquisa, que, em uma organização matemática, é comum lançarmos mão de processos demonstrativos a fim de explicar e tornar inteligível uma determinada técnica. Assim, nesse contexto, as demonstrações de teoremas denotam a tecnologia que justifica a técnica utilizada.

Chevallard (1999) afirma que toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa que se denomina teoria da técnica. O discurso tecnológico contém essas afirmações mais ou menos explícitas; logo, há a necessidade de descrever essa tecnologia com precisão e rigor, permitindo, efetivamente, uma formalização – passa-se, assim, a um nível superior de justificação, explicação e produção, ou seja, o nível da teoria.

Para Chevallard (1999), a noção de praxeologia aparece como uma noção genérica, cujo aprofundamento é conveniente, sobretudo, por meio do estudo empírico e das análises dos dados recolhidos de observações. Chevallard (1998a *apud* MENDES, 2017) define quatro categorias de organização praxeológica: praxeologia pontual, praxeologia local, praxeologia regional e praxeologia global.

A praxeologia pontual, em princípio, mantém um tipo de tarefa, uma técnica, uma tecnologia e uma teoria. A praxeologia pontual leva em consideração uma única tarefa apenas. Já a praxeologia local leva em consideração uma determinada tecnologia – ou seja, várias tarefas e técnicas podem ser trabalhadas, mas por uma única tecnologia e teoria.

A praxeologia regional é configurada por uma única teoria. Em outras palavras, são mantidos vários tipos de tarefas, executados por várias técnicas; estas, por sua vez, são justificadas e explicadas de várias maneiras – mantêm-se, dessa forma, várias tecnologias, mas apenas uma teoria que as explique de maneira aprofundada.

A praxeologia global é desenvolvida em torno de várias teorias. Ou seja, a praxeologia global é a agregação de várias organizações praxeológicas regionais.

Logo, sugerimos a análise praxeológica desenvolvida com base nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo propostas pelo SARESP a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental; assim, , responderemos à nossa questão inicial sobre que conjuntos de tarefas estão presentes nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo e que conjuntos de técnicas, tecnologias e teorias podem ser mobilizadas na resolução dessas questões.

Tendo como referência as questões propostas por Mateus (2007) a partir do trabalho de Chevallard (1999), adaptamos alguns critérios que podem auxiliar na análise das questões levantadas neste estudo. O roteiro das questões é o seguinte:

1) Que tipo de tarefas as questões selecionadas propõem para a mobilização de técnicas desejadas no estudo da trigonometria no triângulo retângulo?

2) As técnicas são produzidas com base no questionamento ou são dadas sem o levantamento de situações problemáticas?
3) A aplicação de técnicas nas questões selecionadas inclui a justificação e a interpretação dos resultados?
4) Quais convergências e divergências são reconhecidas entre as tarefas das questões selecionadas?
5) As questões selecionadas para este trabalho são justificadas pelo mesmo discurso técnico-teórico?
6) Há ausência de tipos de tarefas nas questões selecionadas que sejam considerados relevantes no estudo da trigonometria no triângulo retângulo?

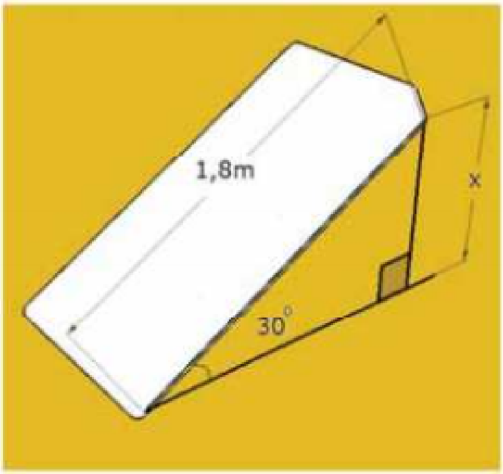
Essas seis questões nortearão a análise praxeológica das questões do SARESP selecionadas para este trabalho.

Como exemplo de análise praxeológica, vejamos a seguinte questão proposta pelo SARESP, no ano de 2009, aos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental:

Figura 1 – Exemplo de questão do SARESP de 2009.

Karen tem problemas com sono e seu medico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.

Função	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede, é:

a. 0,50 m

b. 0,80 m

c. 0,90 m

d. 1,00 m

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2009).

Tendo como base a organização praxeológica, podemos fazer a seguinte análise referente à questão apresentada:

- **Tipo de tarefa da questão**: calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo.
- **Tarefa**: calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º.
- **Técnicas**:
  1) Identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa.
  2) Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo.
  3) Relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e relacionar a medida desconhecida do lado do

triângulo retângulo que se deseja encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 30º.

4) Aplicar os valores apontados na razão trigonométrica:

$$sen\ 30° = \frac{Cat.Oposto}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{1{,}8} \Rightarrow\ x = 0{,}90$$

5) Apresentar o valor do cateto oposto ao ângulo de 30º encontrado com sua respectiva unidade de medida 0,90 m.

- **Discurso teórico-tecnológico**: trigonometria no triângulo retângulo – razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

No próximo capítulo, após o estudo do referencial teórico, da apresentação das questões que nortearão nosso trabalho e da exposição da forma como será realizada a análise das questões propostas, apresentaremos a meteodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos utilizados neste trabalho.

5 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos a metodologia de pesquisa pela qual optamos para desenvolver nosso trabalho – a abordagem qualitativa – e os procedimentos metodológicos utilizados, evidenciando os caminhos escolhidos para responder à questão de pesquisa com base no referencial teórico e na revisão bibliográfica que discutimos nos capítulos anteriores.

5.1 Abordagem qualitativa

Nesta pesquisa, optamos pela abordagem qualitativa. Segundo os autores Bogdan e Biklen (1982), as características básicas da pesquisa qualitativa são as seguintes:

1) A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento.
2) Os dados coletados são predominantemente descritivos.
3) A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto.
4) O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial do pesquisador.
5) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

Nessa metodologia, "os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16). Esses dados geralmente são recolhidos em contextos naturais, sem que necessariamente as hipóteses sejam levantadas ou comprovadas, ou que as variáveis sejam medidas; busca-se apreender as diversas perspectivas dos sujeitos e os fenômenos em sua complexidade.

A abordagem qualitativa é também denominada naturalista, "[...] porque o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenómenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 17) e em suas interações com o meio e os demais, nos quais constroem seus repertórios de significados.

No primeiro aspecto, o pesquisador se coloca em contato direto com o local de sua pesquisa, observa, entrevista, anota, na busca por produzir dados; deve preocupar-se com os contextos e ver no cotidiano a possibilidade de "pescar" sentidos, de olhar com olhos de surpresa mesmo aquilo que poderia parecer trivial a muitos.

No que tange à descrição, ainda que os dados sejam recolhidos e elaborados por meio de imagens ou áudios, eles são transcritos e apresentados em forma de narrativa no intuito de conferir coerência aos dados e descortinar aspectos relevantes, respeitando sempre as falas e os pontos de vista dos sujeitos envolvidos na pesquisa. Por isso, já abordando a terceira característica da metodologia qualitativa, o pesquisador deve ter ouvidos para ouvir os silêncios e olhos para enxergar expressões aparentemente banais – perscrutando sentidos, sentimentos e expectativas sem, contudo, deixar de lembrar que o objetivo fundamental de sua interpretação é elaborar conhecimento, ou gerar teoria, segundo a perspectiva de González Rey (1997).

Em relação à quarta característica, não há, na pesquisa qualitativa, a necessidade de elaborar previamente hipóteses a fim de comprová-las ou infirmá-las: elas podem surgir ou não no decorrer da investigação. Para Bogdan e Biklen, o processo indutivo de análise dos dados na investigação qualitativa assemelha-se a um funil em que "[...] as coisas estão abertas no início (ou no topo) e vão se tornando mais fechadas e específicas no extremo" (1994, p. 5); ou seja, o pesquisador seleciona o que lhe parece mais importante naquela situação.

Por fim, de acordo com a última característica apontada pelos autores, a abordagem qualitativa deve estar interessada na forma como as pessoas dão sentido às suas vidas ou a aspectos dela, como interpretam determinados fatos e por que os interpretam desta ou daquela maneira. Assim, "ao apreender as perspectivas dos participantes, a investigação qualitativa faz luz sobre a dinâmica interna das situações, dinâmica esta que é frequentemente invisível para o observador exterior" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

5.2 Procedimentos metodológicos

A pesquisa foi dividida em duas partes. Na primeira delas, selecionamos quatro questões do SARESP relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo que foram aplicadas em anos anteriores a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. Com base nas questões selecionadas, desenvolvemos uma análise praxeológica *a priori* dessas questões, observando que conjuntos de tarefas estão nelas presentes e que conjuntos de técnicas, tecnologias e teorias podem ser mobilizados pelos estudantes na resolução.

Em princípio, buscamos no próprio *site* do SARESP – da Secretaria Estadual de Educação – as questões aplicadas em provas de anos anteriores. Identificamos, então, que apenas algumas questões são disponibilizadas no *site*, dentro de um campo chamado relatório pedagógico. Nesse relatório, estão selecionadas apenas algumas questões e são apresentados os resultados dos estudantes; em razão disso, não foi possível encontrar todas as questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo aplicadas aos estudantes nos últimos anos.

Dirigimo-nos à Delegacia Regional de Ensino, com sede no município de Birigui, e apresentamos a proposta do trabalho, verificando a possibilidade de ter acesso às questões propostas pelo SARESP em anos anteriores a fim de desenvolvermos melhor a pesquisa. Os dirigentes da Delegacia Regional de Ensino foram bastante atenciosos; porém, nos informaram que as provas do SARESP são desenvolvidas pela Fundação Vunesp e que, por esse motivo, não têm acesso ao banco de questões, a não ser as que são apresentadas no relatório pedagógico no *site* do SARESP, citado anteriormente.

Dessa forma, considerando as questões disponíveis no relatório pedagógico presente no *site* do SARESP, e tendo como critério escolher apenas questões que correspondessem à habilidade presente na matriz de referência, “resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos”, identificamos quatro questões e as selecionamos para o desenvolvimento de nossa investigação.

Na segunda parte, reaplicamos as questões selecionadas do SARESP, organizando-as em forma de um teste para ser respondido por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental da rede pública do estado de São Paulo.

No teste aplicado, solicitou-se que os estudantes, além de assinalarem a alternativa que julgassem correta, justificassem, de alguma forma, por que chegaram a tal resposta, para que, assim, pudéssemos analisar seus procedimentos e suas estratégias de resolução.

Escolhemos duas escolas da Diretoria de Ensino de Birigui para aplicar o teste – uma vez que, pelos motivos que serão explicitados no próximo parágrafo, não pudemos utilizar os resultados apresentados pelos alunos da primeira escola.

Sobre a aplicação do teste na primeira escola, houve a participação de 64 alunos divididos em duas turmas, com 32 alunos cada. O teste foi aplicado no mesmo período pelo professor de Matemática da escola. Ao realizarmos a correção do teste, identificamos que todos os estudantes acertaram as questões propostas. O acerto de todas as questões por todos os alunos que realizaram o teste nos chamou a atenção – foi quando procuramos o professor para dialogar sobre o acontecido.

O professor relatou que os estudantes foram comunicados sobre o teste, e que as questões seriam retiradas das avaliações do SARESP de anos anteriores; essa informação possibilitou que os estudantes pesquisassem as questões para resolverem o teste. O professor compartilhou que, preocupado com a possibilidade de os estudantes não realizarem o teste com responsabilidade, acabou dizendo que poderia utilizar o resultado como “nota” para o bimestre – o que pode ter motivado ainda mais a busca dos estudantes pelas questões e pelos resultados previamente.

Diante do relato do professor, entendemos que seria necessário buscar outra escola, com outras turmas, para a aplicação do teste e o desenvolvimento do estudo que estávamos propondo.

Assim, procuramos outra escola da Diretoria de Ensino de Birigui, em que o teste foi aplicado a 51 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, divididos em duas turmas: a turma A foi composta por 24 estudantes, e a turma B, por 27. As duas turmas fizeram o teste no mesmo dia e no mesmo período. Nessa escola, o teste foi aplicado pelo professor de Arte das respectivas turmas, que disponibilizou uma aula de 50 minutos para que cada turma resolvesse as quatro questões propostas – na primeira aula, o teste foi aplicado à turma A; na segunda aula, o teste foi aplicado à turma B.

O critério para a escolha da escola foi, necessariamente, que os alunos já tivessem estudado, no ano letivo, o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

Para a aplicação do teste nessa segunda escola, decidimos apresentar as quatro questões selecionadas sem as alternativas, ou seja, como questões dissertativas, a fim de observar o processo de resolução dos estudantes para que *a posteriori* pudéssemos comparar com a análise praxeológica desenvolvida *a priori*, possibilitando possíveis respostas à nossa questão de pesquisa.

Durante a aplicação do teste, os estudantes resolveram as questões individualmente, sem nenhuma interferência; eles apenas foram relembrados sobre utilizar qualquer forma de justificativa ao responder às questões.

No próximo capítulo, apresentaremos a análise praxeólogica desenvolvida com base nas questões selecionadas para nossa investigação e a análise das resoluções dos estudantes participantes do teste para esta investigação.

6 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise *a priori* desenvolvida a partir das questões selecionadas para este trabalho com base nas organizações praxeológicas de Chevallard (1999) e descrevemos a análise das resoluções desenvolvidas pelos alunos no teste aplicado para esta investigação.

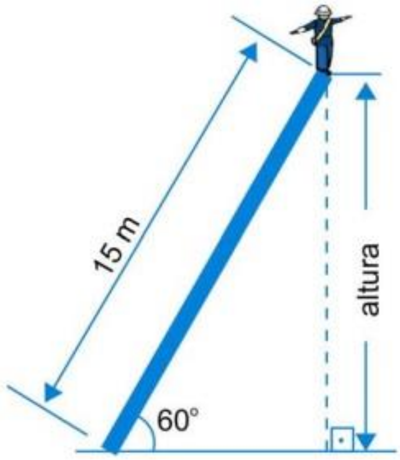
6.1 Análise praxeológica das questões selecionadas

Seguem as quatro questões selecionadas para esta investigação e a análise praxeológica desenvolvida para cada uma delas com base em nosso referencial teórico.

Figura 2 – Questão 1.

Um bombeiro sobe uma escada de 15 m de comprimento, que forma uma ângulo de 60° com o solo.

Usando 0,87 como valor aproximado de sen60°, assinale a alternativa que mostra a altura aproximada que o bombeiro está do solo, quando chega ao topo da escada.



A) 10,23 m.
B) 12,14 m.
C) 13,05 m.
D) 14,55 m.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2009).

Quadro 6 – Análise praxeológica da questão 1.

Estrutura	Descrição
Tipo de tarefa	Calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo.
Tarefa	Calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 60º.
Técnica	1) Identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa.

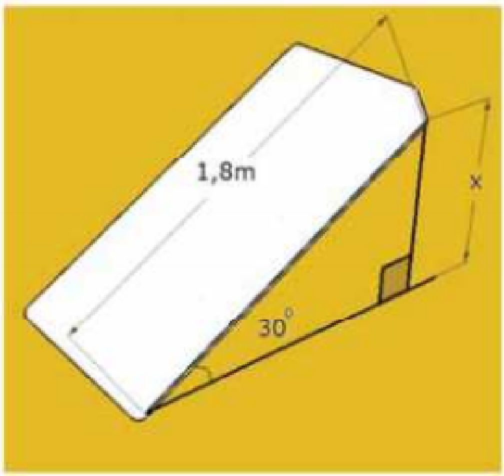
	2) Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. 3) Relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se deseja encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 60º. 4) Aplicar os valores apontados na razão trigonométrica: $sen\ 60° = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$ 5) Apresentar a medida do cateto oposto ao ângulo de 60º encontrada na sua respectiva unidade 13,05 m.
Discurso teórico-tecnológico	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Fonte: elaboração do autor.

Figura 3 – Questão 2.

Karen tem problemas com sono e seu medico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.

Função	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede, é:

a. 0,50 m

b. 0,80 m

c. 0,90 m

d. 1,00 m

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2009).

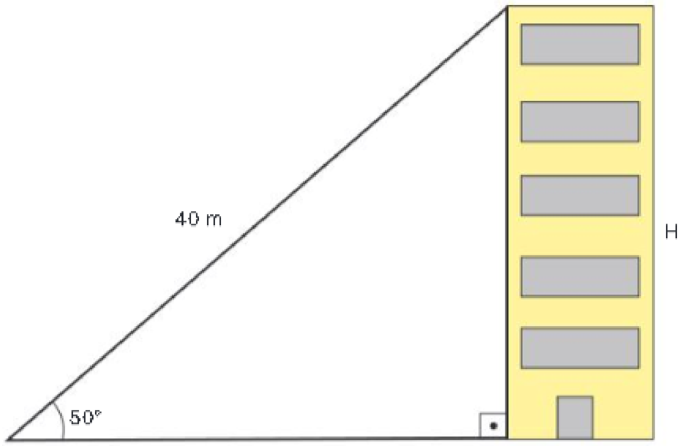
Quadro 7 – Análise praxeológica da questão 2.

Estrutura	Descrição
Tipo de tarefa	Calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo.
Tarefa	Calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30º.
Técnica	1) Identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa. 2) Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. 3) Relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se deseja encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 30º. 4) Aplicar os valores apontados na razão trigonométrica: $sen\ 30° = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$ $\frac{1}{2} = \frac{x}{1,8}$ 5) Apresentar a medida do cateto oposto ao ângulo de 60º encontrada na sua respectiva unidade 0,90 m.
Discurso teórico-tecnológico	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Fonte: elaboração do autor.

Figura 4 – Questão 3.

A medida da ponta de um prédio até o final de sua sombra é igual a 40 metros e a sombra forma um ângulo de 50° em relação ao solo.



Utilizando 0,8 para sen 50°, assinale a alternativa que corresponde à altura H do prédio.

A) 32 m.

B) 50 m.

C) 62,5 m.

D) 90 m.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2010).

Quadro 8 – Análise praxeológica da questão 3.

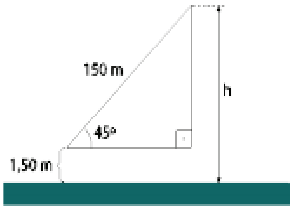
Estrutura	Descrição
Tipo de tarefa	Calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo.
Tarefa	Calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 50º.
Técnica	1) Identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa. 2) Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. 3) Relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se deseja encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 50º. 4) Aplicar os valores apontados na razão trigonométrica: $sen 50° = \frac{cat. oposto}{hipotenusa}$ $0,8 = \frac{H}{40}$ 5) Apresentar a medida do cateto oposto ao ângulo de 50º encontrado com sua respectiva unidade 32 m.

Discurso teórico-tecnológico	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Fonte: elaboração do autor.

Figura 5 – Questão 4.

Um jovem avista o topo de uma torre segundo um ângulo de 45°, conforme a ilustração.



Sabe-se que a distância dos seus olhos ao topo da torre é 150 m e, ainda, que a distância dos seus olhos ao solo é 1,50 m. A altura aproximada h da torre é

Considere: $\sqrt{2} \cong 1,4$

(A) 77 m.

(B) 100 m.

(C) **107 m.**

(D) 150 m.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2010).

Quadro 9 – Análise praxeológica da questão 4.

Estrutura	Descrição
Tipo de tarefa	Calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo.
Tarefa	A) Calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 45º. B) Adicionar a medida da altura da pessoa.
Técnica	1) Identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa. 2) Identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. 3) Relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se deseja encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 45º. 4) Aplicar os valores apontados na razão trigonométrica: $sen\ 45° = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{15}$

	$2x = 150\sqrt{2}$ $x = \frac{150\sqrt{2}}{2}$ $x = 75\sqrt{2}$ 5) Considerar $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ e efetuar a operação: $75 \times 1{,}4 = 105.$ 6) Adicionar 1,50 m (altura do jovem) à medida do cateto oposto 105 m. 7) Apresentar o valor encontrado com sua respectiva unidade de medida 107 m.
Discurso teórico-tecnológico	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Fonte: elaboração do autor.

Retomando como referência as questões propostas por Mateus (2007), indicadas no capítulo 4 – Fundamentação Teórica de nosso trabalho, em que adaptamos alguns critérios para nos auxiliar nesta análise –, identificamos que todas as questões partiram do mesmo tipo de tarefa, ou seja, calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo, porém na questão 4 observamos uma segunda tarefa: adicionar a medida da altura da pessoa.

Convém observar que, em todas as questões, as técnicas mobilizadas para as resoluções são as mesmas. Além disso, as questões já indicam em seus enunciados o que deve ser obtido. Não são, de fato, situações que requerem dos estudantes reflexões profundas a respeito dos enunciados para que se compreenda o que deve ser determinado.

Identificamos que foi possível aplicar as técnicas nas questões selecionadas e justificá-las por meio da razão trigonométrica seno, alterando apenas as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos retângulos.

Observamos também que as questões selecionadas são todas justificadas pelo mesmo discurso técnico-teórico, ou seja, trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Houve, claramente, ausência de outros tipos de tarefas que são consideradas relevantes no estudo da trigonometria do triângulo retângulo, como calcular a medida desconhecida de um dos ângulos do triângulo retângulo a partir da medida de seus lados.

Após a análise praxeológica desenvolvida em cada uma das questões selecionadas para este trabalho, apresentaremos a análise da resolução dos estudantes que participaram do teste para esta investigação.

6.2 Análise das resoluções dos estudantes

Como relatamos no capítulo anterior, escolhemos duas escolas da Diretoria de Ensino de Birigui para aplicar as quatro questões selecionadas do SARESP, em duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental em cada escola; porém, devido ao relato do professor da primeira escola, analisamos o desenvolvimento e os resultados dos alunos da segunda escola em que aplicamos o teste novamente.

Antes de analisar as resoluções apresentadas pelos estudantes, buscamos conhecer o resultado apresentado no SARESP em Matemática das escolas que compõem a Diretoria de Ensino de Birigui no ano anterior ao nosso teste, buscando identificar o contexto em que a escola dos alunos participantes se encontra.

Tabela 1 – Resultado do 9º ano do Ensino Fundamental no SARESP em 2018.

CLASSIFICAÇÃO	NÍVEL		REDE ESTADUAL	DIRETORIA DE ENSINO
Insuficiente	Abaixo do Básico	< 225	26,3	17,2
Suficiente	Básico	225 a < 300	57,0	56,0
	Adequado	300 a < 350	14,2	21,7
	Básico + Adequado		*71,3*	*77,6*
Avançado	Avançado	≥ 350	2,5	5,2

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2018).

Segundo a Secretaria de Educação, 17,2 % dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental da Diretoria de Ensino da região de Birigui apresentaram rendimento insuficiente em Matemática, com nível de conhecimentos abaixo do básico. De acordo com a Secretaria, 56% apresentaram nível de proficiência básico; 21,7% nível adequado; e 5,2% nível de proficiência avançado.

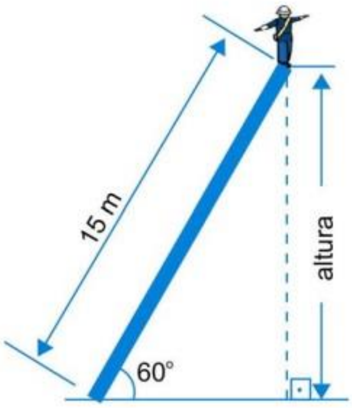
Vejamos os percentuais de alunos que acertaram ou erraram as quatro questões propostas no teste que realizamos e suas resoluções em relação à análise praxeológica das questões selecionadas para esta investigação.

Daremos inicio, então, à análise da resolução desenvolvidas pelos alunos que participaram do teste pela questão 1.

Figura 6 – Questão 1.

Um bombeiro sobe uma escada de 15 m de comprimento, que forma uma ângulo de 60° com o solo.

Usando 0,87 como valor aproximado de sen60°, assinale a alternativa que mostra a altura aproximada que o bombeiro está do solo, quando chega ao topo da escada.



A) 10,23 m.
B) 12,14 m.
C) 13,05 m.
D) 14,55 m.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2009).

Quadro 10 – Percentual de acertos e erros da questão 1.

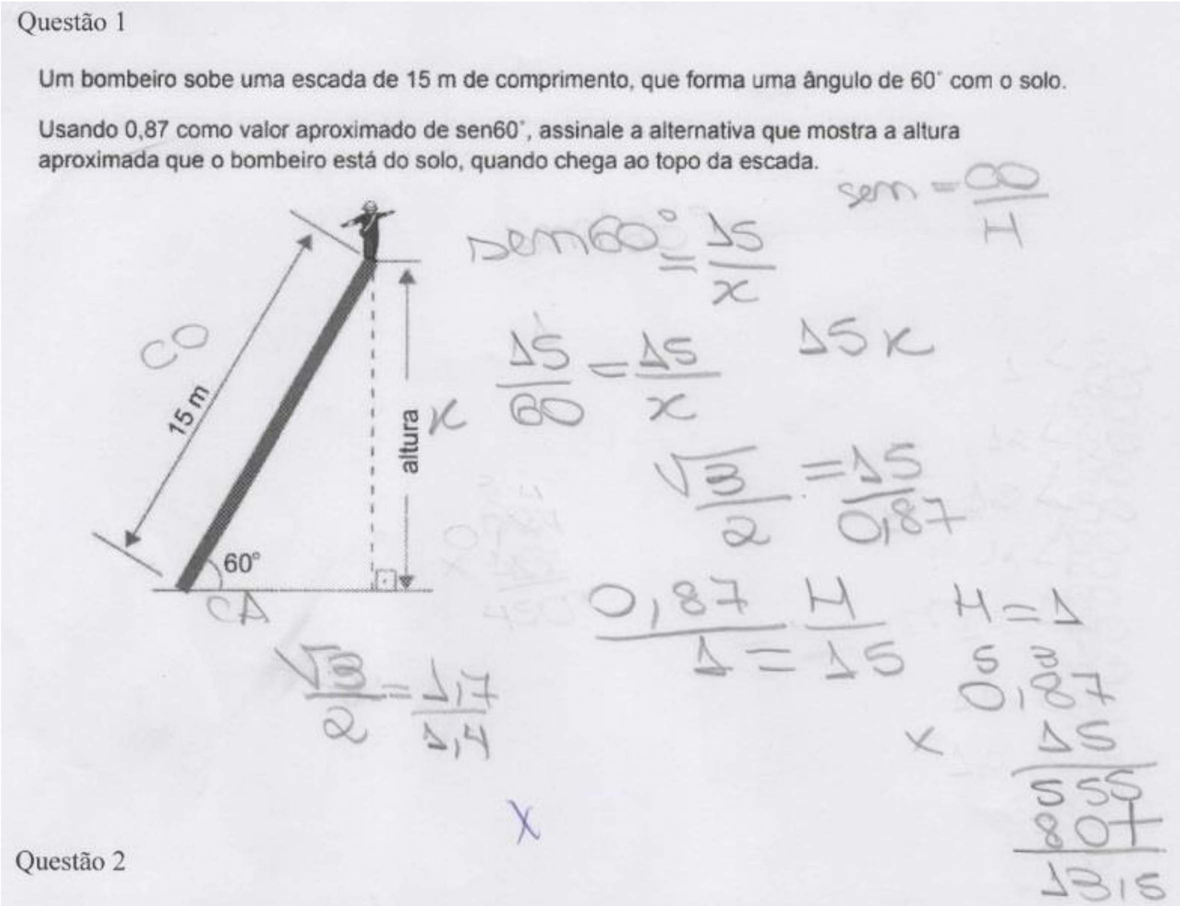
Turma A	
Acertos (%)	Erros (%)
70	30

Turma B	
Acertos (%)	Erros (%)
30	70

Turmas A e B	
Acertos (%)	Erros (%)
49	51

Analisando a resolução dos estudantes em relação à primeira questão, notamos que quatro alunos não apresentaram a técnica de identificar, no triângulo retângulo, os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa de forma correta; logo, não relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 60°. Os quatro estudantes apresentaram semelhança na forma como resolveram a questão, conforme demonstra a figura:

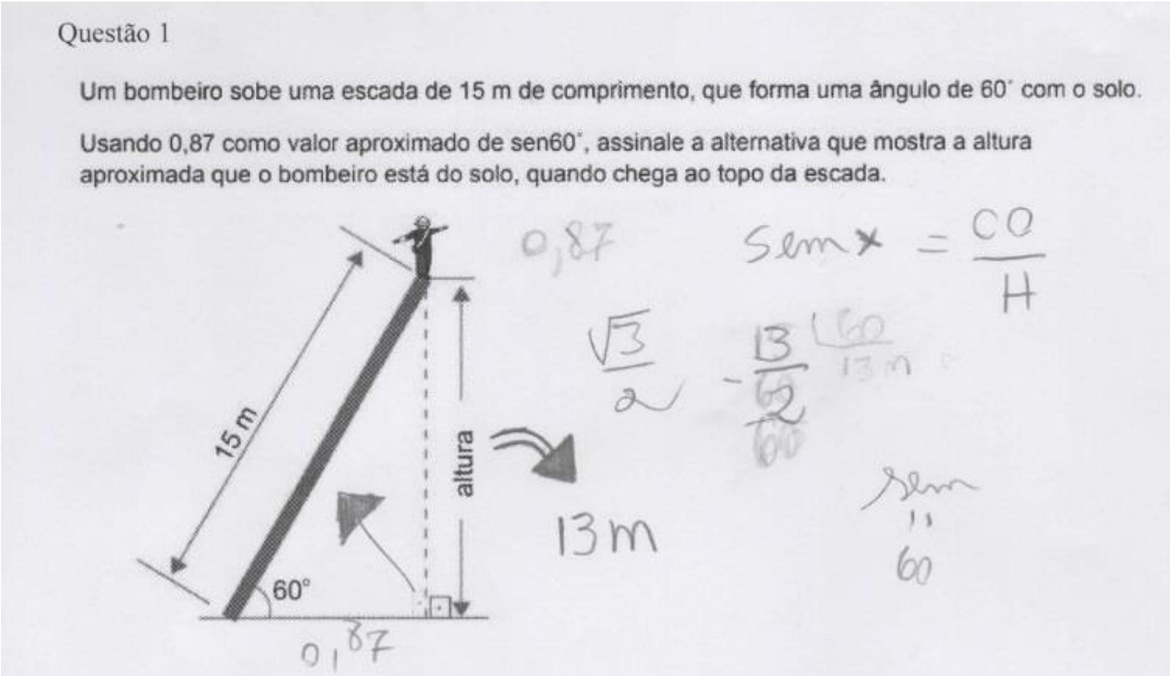
Figura 7 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

A seguir, apresentaremos a resolução de um dos alunos que nos chamou a atenção ao não mobilizar nenhuma das técnicas apontadas na análise praxeológica desenvolvida *a priori*.

Figura 8 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.

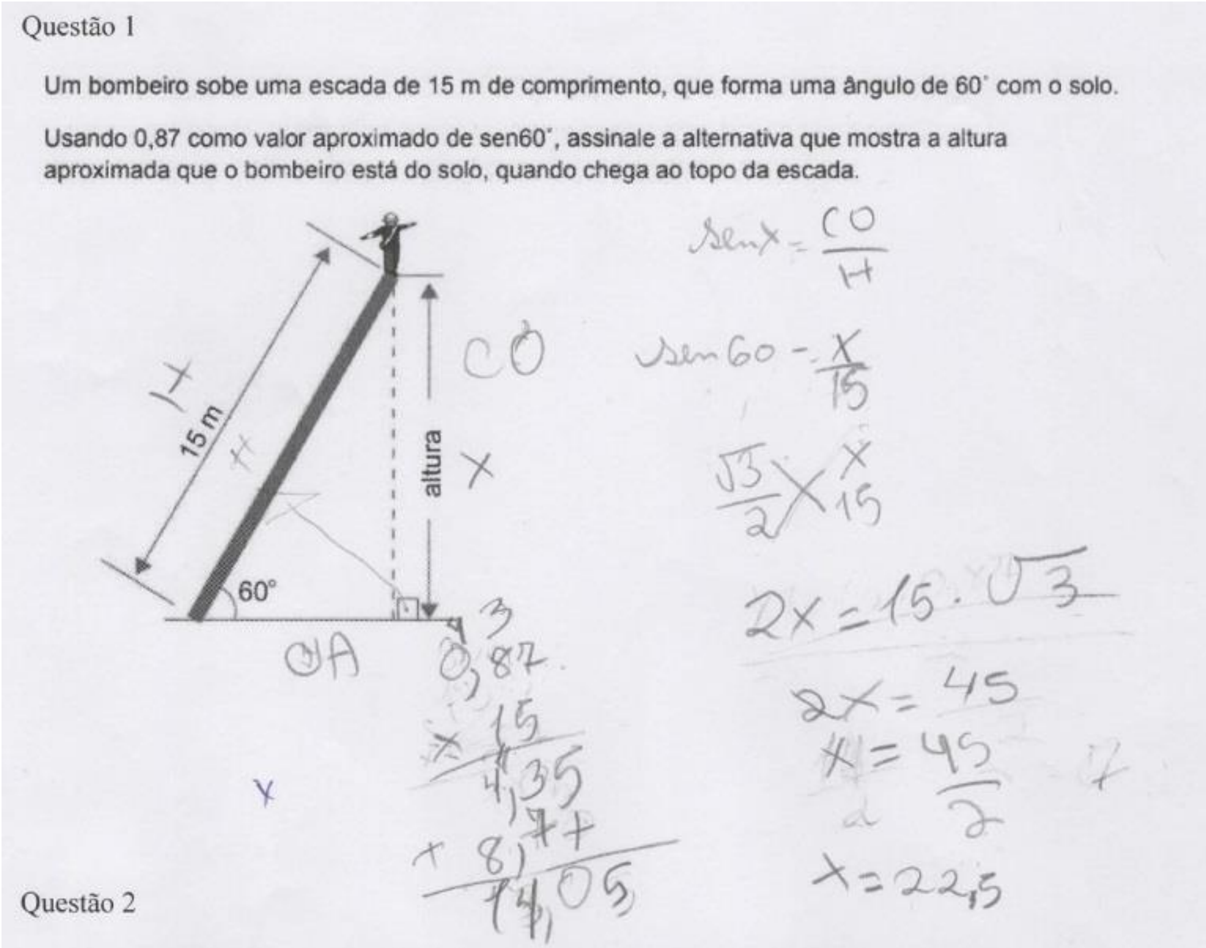


Fonte: autor.

Observamos também que 26 alunos não desenvolveram a técnica de aplicar os valores apontados na razão trigonométrica $sen\ 60° = \frac{cat.oposto}{hipotenusa}$, como também não utilizaram o valor $sen\ 60° = 0{,}87$ como apresentado no enunciado da questão, recorrendo aos valores presentes na tabela da segunda questão e cometendo erros em operações aritméticas – de forma que, ao resolverem a atividade, não obtiveram a medida do cateto oposto ao ângulo de 60º como 13,05 m.

A seguir, apresentaremos a resolução de um desses estudantes, semelhante à forma como os demais resolveram a questão, porém, além de apresentar erros semelhantes aos outros 26 alunos, esse aluno apresentou um outro erro na operação $15 \times \sqrt{3}$, indicando como resultado o valor 45.

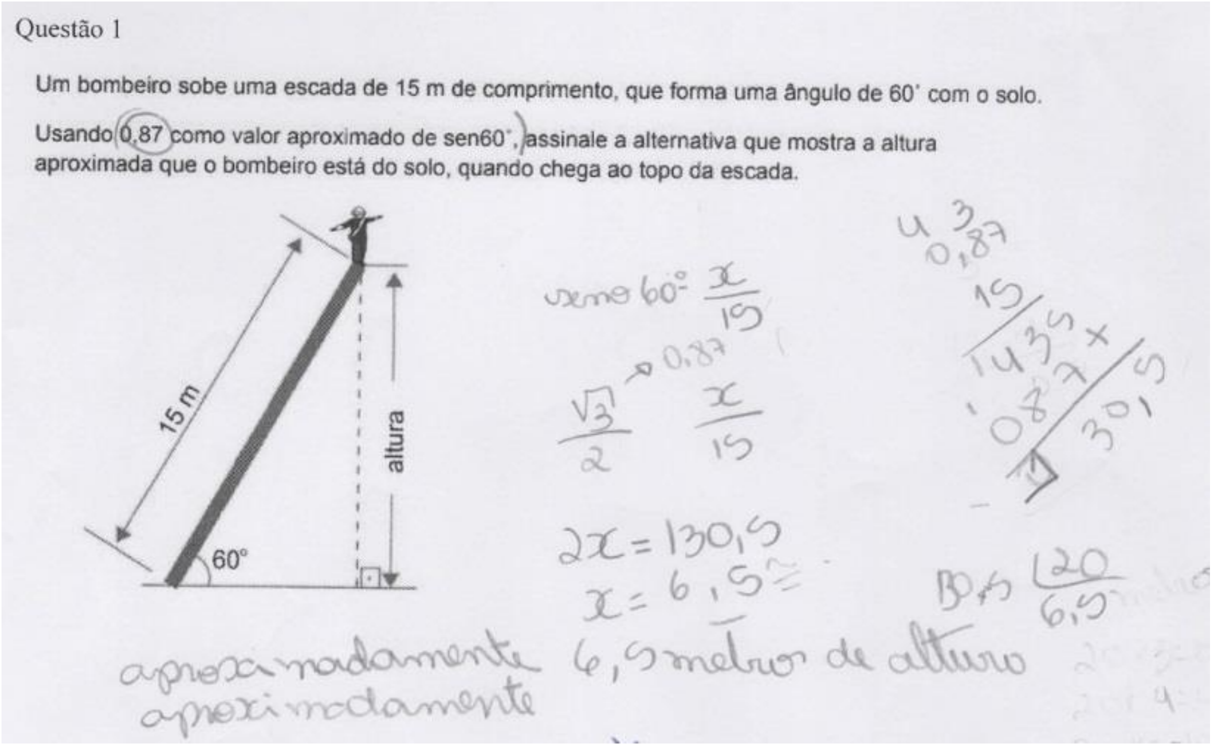
Figura 9 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Na resolução do aluno apresentada na figura a seguir, observamos que o mesmo aconteceu no desenvolvimento das técnicas nas quais ocorem erros ao realizar as operações aritméticas, porém o que nos chamou a atenção foi o fato de o aluno interpretar de forma equivocada o enunciado da questão, pois considerou $\sqrt{3}$ como sendo 0,87, valor este que aparece no enunciado da questão para $sen\ 60°$.

Figura 10 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



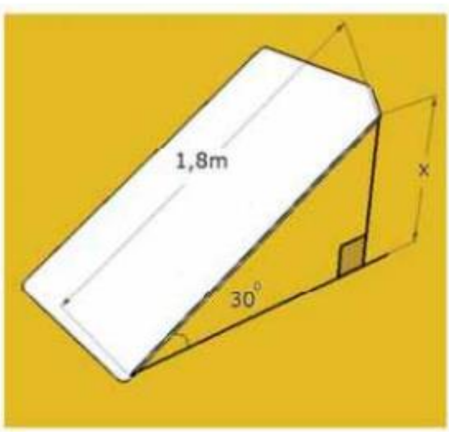
Fonte: autor.

Dando sequência à analise das resoluções propostas pelos alunos em nosso teste, vejamos a questão 2 e o que pontuamos em relação à nossa fundamentação teórica.

Figura 11 – Questão 2.

Karen tem problemas com sono e seu medico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.

Função	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede, é:

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2009).

Quadro 11 – Percentual de acertos e erros da questão 2.

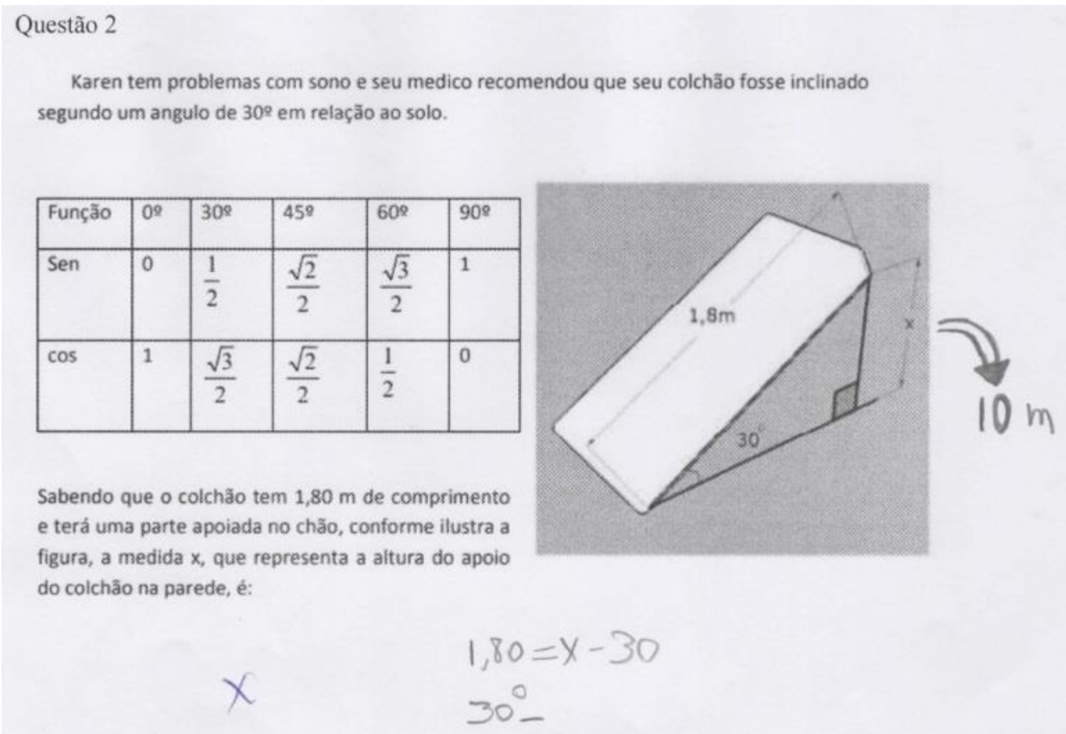
Turma A	
Acertos (%)	Erros (%)
83	17

Turma B	
Acertos (%)	Erros (%)
50	50

Turmas A e B	
Acertos (%)	Erros (%)
66	34

Em relação à segunda questão, observamos que apenas um aluno não recorreu à técnica de identificar, no triângulo retângulo, os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa, como também as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. Esse mesmo aluno não relacionou a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 30º.

Figura 12 Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Questão 2

Karen tem problemas com sono e seu medico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.

Função	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede, é:

$1{,}80 = x - 30$

$30°$

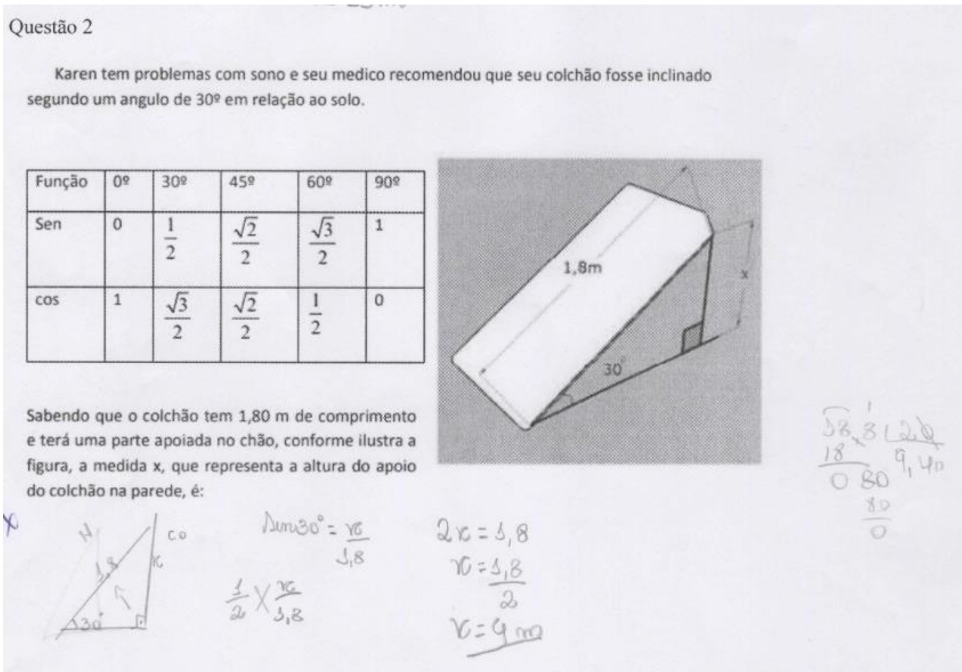
X

Fonte: autor.

Destacamos que 17 alunos mobilizaram as técnicas de identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa; identificaram as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 30º; aplicaram os valores apontados na razão trigonométrica, porém apresentaram erros nas operações aritméticas, como divisão e multiplicação, quando os valores foram representados como fração e decimais. Sendo assim, ao resolverem a questão, não obtiveram a medida correta do cateto oposto ao ângulo de 30º – que é 0,90 m.

Seguem as resoluções de dois desses estudantes, cujos erros foram semelhantes aos dos demais alunos.

Figura 13 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



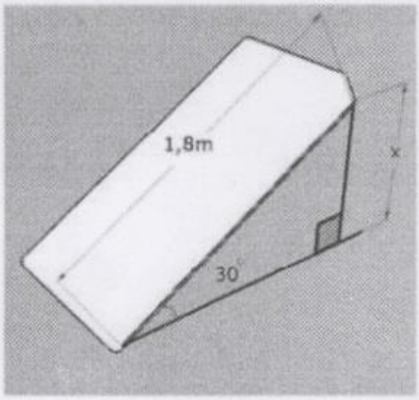
Fonte: autor.

Figura 14 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.

Questão 2

Karen tem problemas com sono e seu medico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.

Função	0º	30º	45º	60º	90º
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede, é:

$sen\,x = \frac{CO}{H}$

$sen\,30 = \frac{1}{3} = \frac{x}{1,8}$

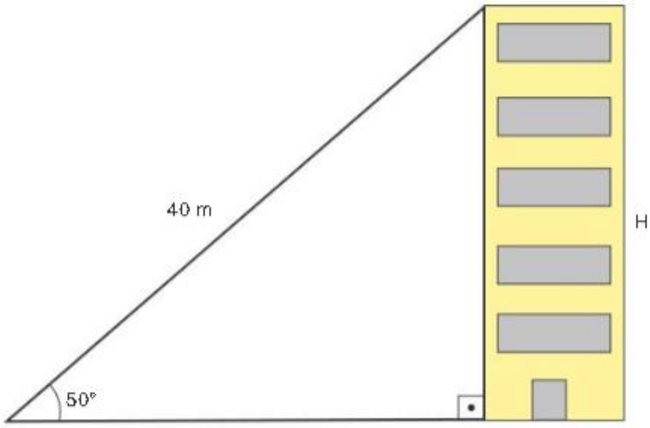
$x = \frac{1,8}{2}$ $x = 0,4$

Fonte: autor.

Continuando a análise de nossa investigação, vejamos o que identificamos na resolução dos estudantes na questão 3:

Figura 15 – Questão 3.

A medida da ponta de um prédio até o final de sua sombra é igual a 40 metros e a sombra forma um ângulo de 50° em relação ao solo.



Utilizando 0,8 para sen 50°, assinale a alternativa que corresponde à altura H do prédio.

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2010).

Quadro 12 – Percentual de acertos e erros da questão 3.

Turma A	
Acertos (%)	Erros (%)
62	38

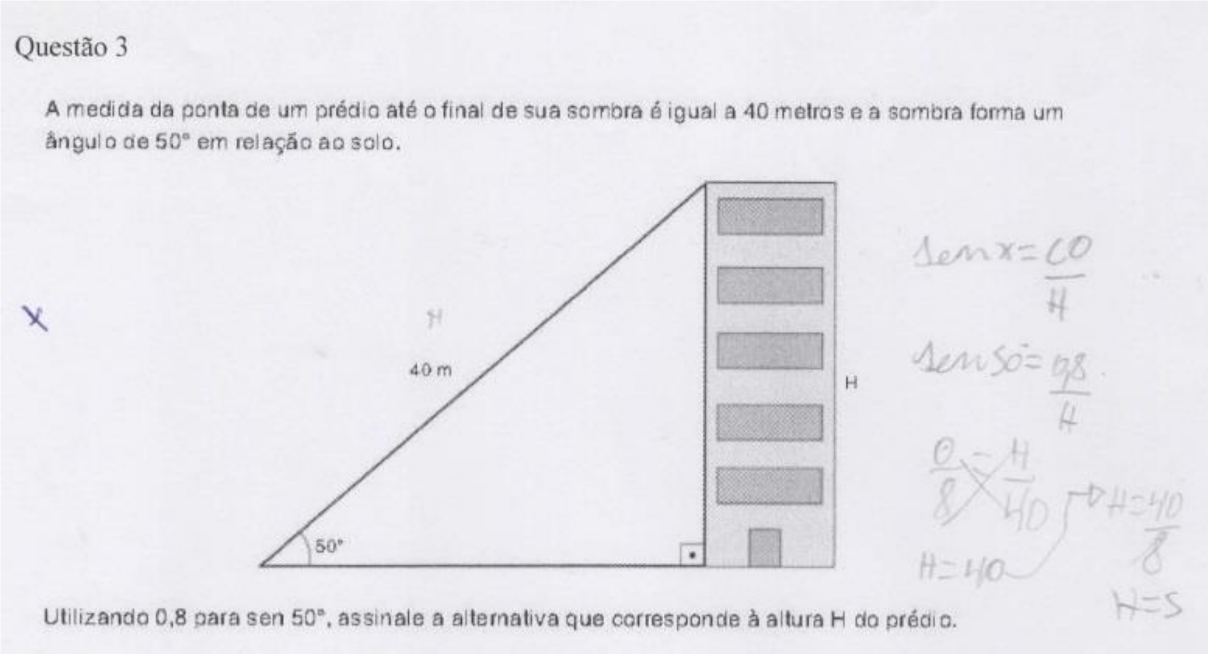
Turma B	
Acertos (%)	Erros (%)
53	47

Turmas A e B	
Acertos (%)	Erros (%)
58	42

Em relação à questão 3, observamos que apenas 7 estudantes não desenvolveram a técnica de identificar, no triângulo retângulo, os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa, comprometendo todo o processo desenvolvido na sequência.

Vejamos, na figura a seguir, uma resolução semelhante à desses alunos:

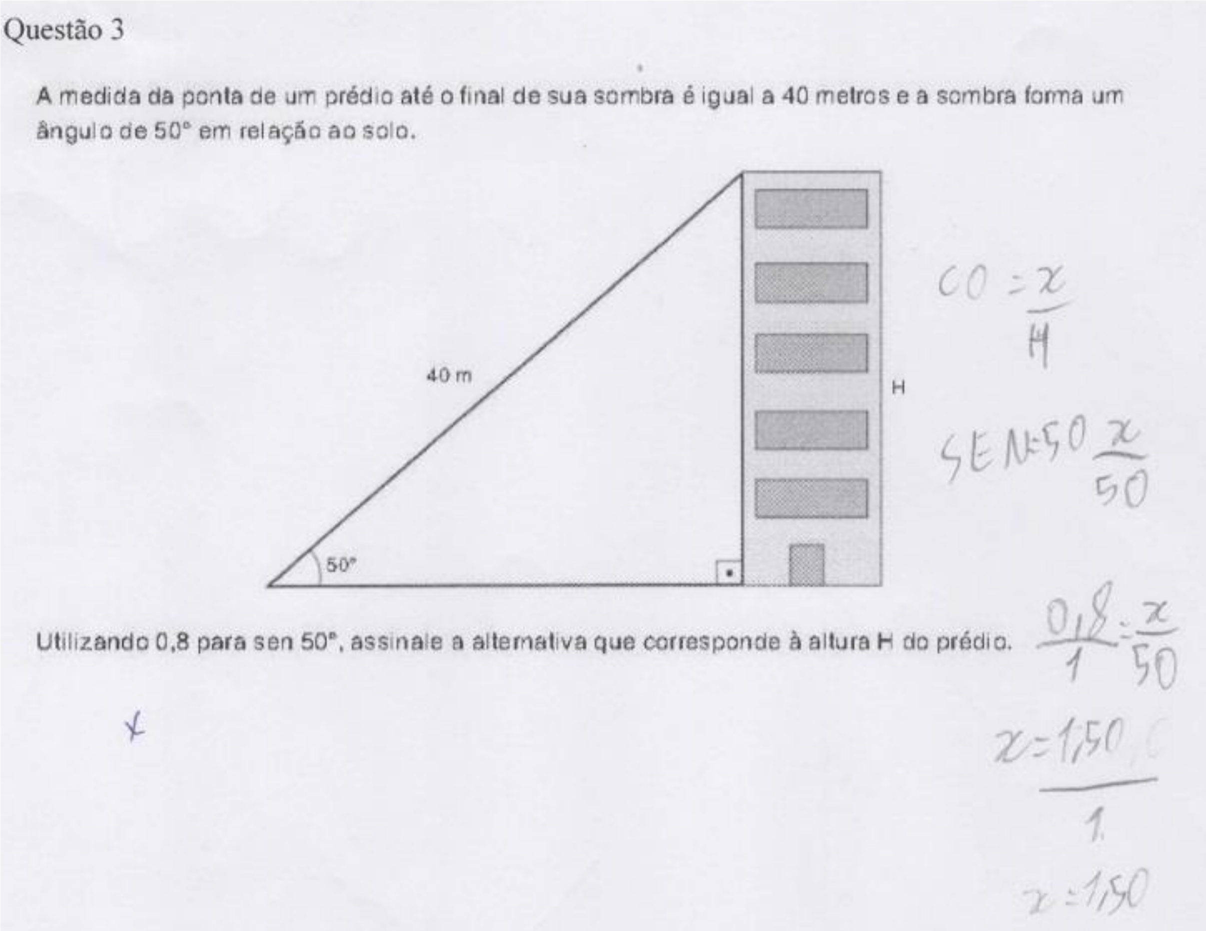
Figura 16 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor

Seguindo com nossa análise, uma das resoluções nos chamou a atenção, pois o aluno considerou a medida da hipotenusa como sendo o valor do ângulo de 50°, demonstrando a não compreensão das técnicas para resolução correta da questão, e não identificou as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo, além de não relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 50º.

Figura 17 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.

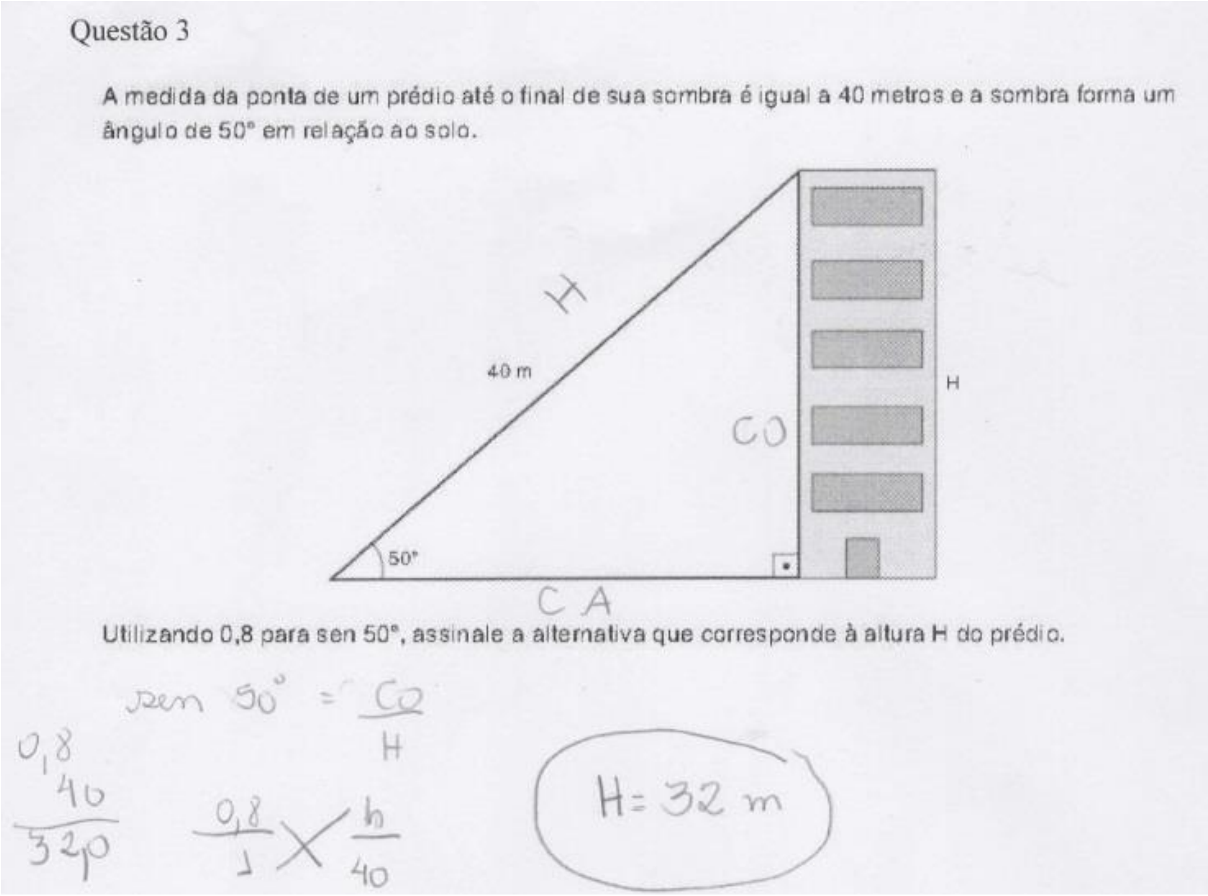


Fonte: autor

Foi notório que 31 dos estudantes que participaram do teste mobilizaram corretamente as técnicas necessárias para resolverem a questão de forma correta, aplicaram os valores apontados na razão trigonométrica e apresentaram a medida do cateto oposto ao ângulo de 50º encontrado com sua respectiva unidade de medida, 32 m.

A figura a seguir apresenta o procedimento de um desses alumos semelhante ao dos demais.

Figura 18 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.

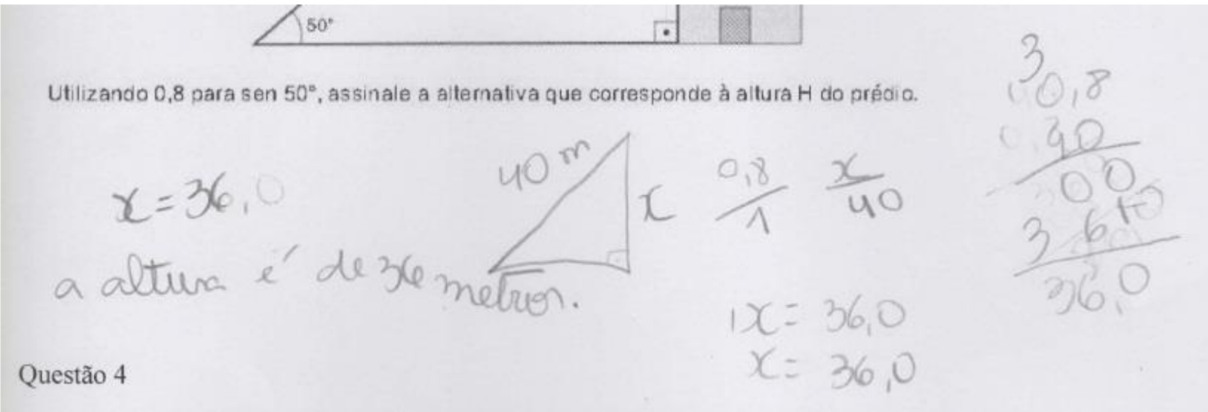


Fonte: autor

Observamos que 14 alunos aplicaram corretamente as técnicas de identificar, no triângulo retângulo, os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa; identificaram as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 50º; porém, erraram no desenvolvimento das operações aritméticas quando os valores estavam representados em decimais.

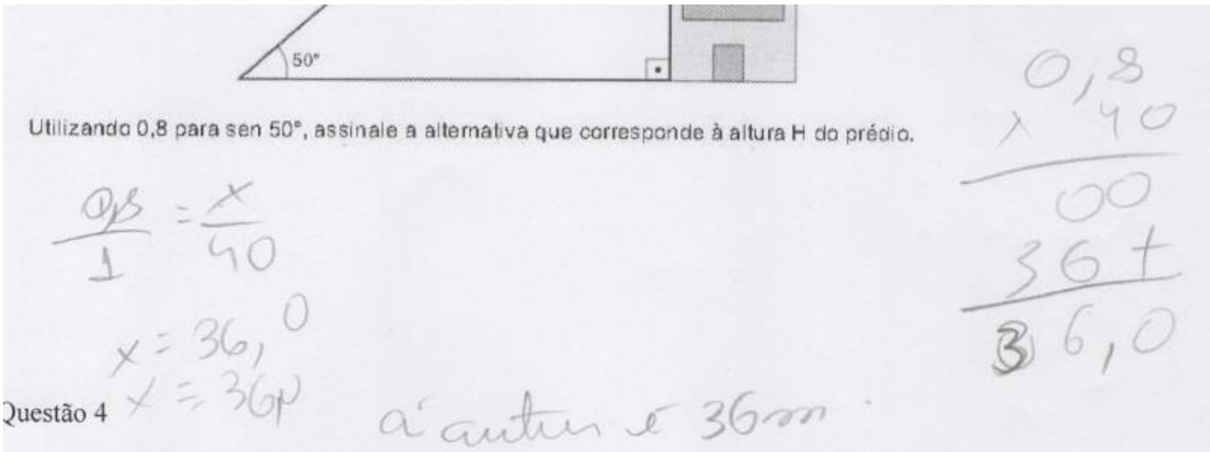
Apresentamos 4 resoluções nas figuras a seguir, nas quais evidenciamos os erros mais comuns entre 14 alunos para resolver as operações aritméticas:

Figura 19 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



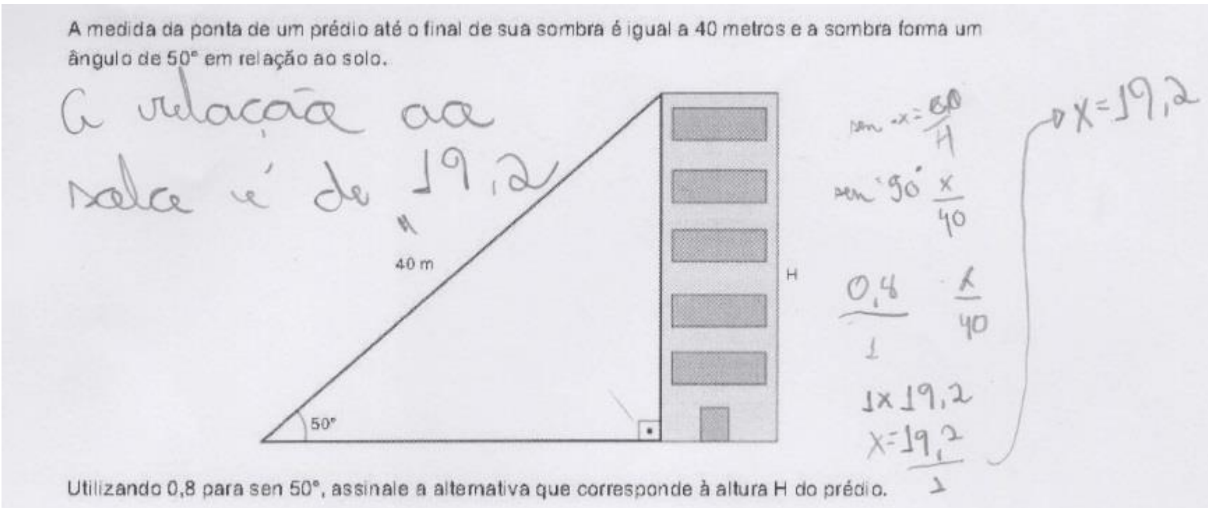
Fonte: autor.

Figura 20 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



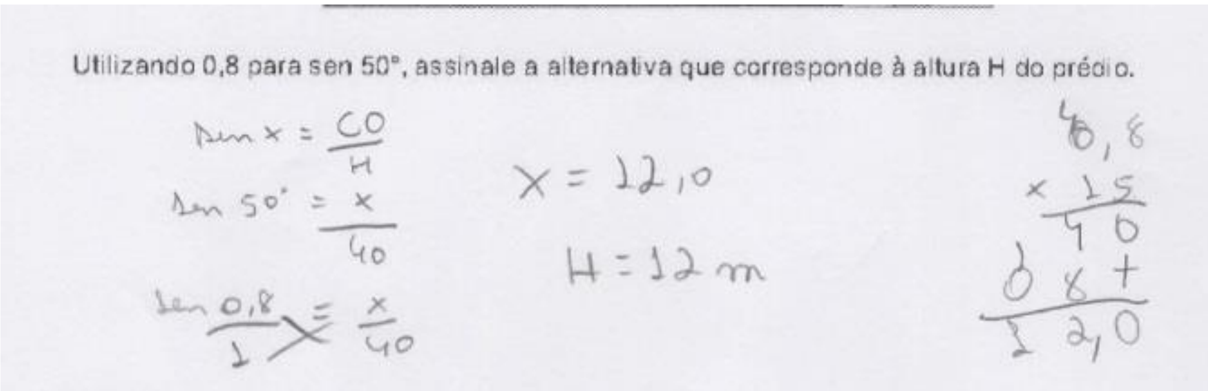
Fonte: autor.

Figura 21 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Figura 22 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Utilizando 0,8 para sen 50°, assinale a alternativa que corresponde à altura H do prédio.

sen x = CO/H

sen 50° = x/40

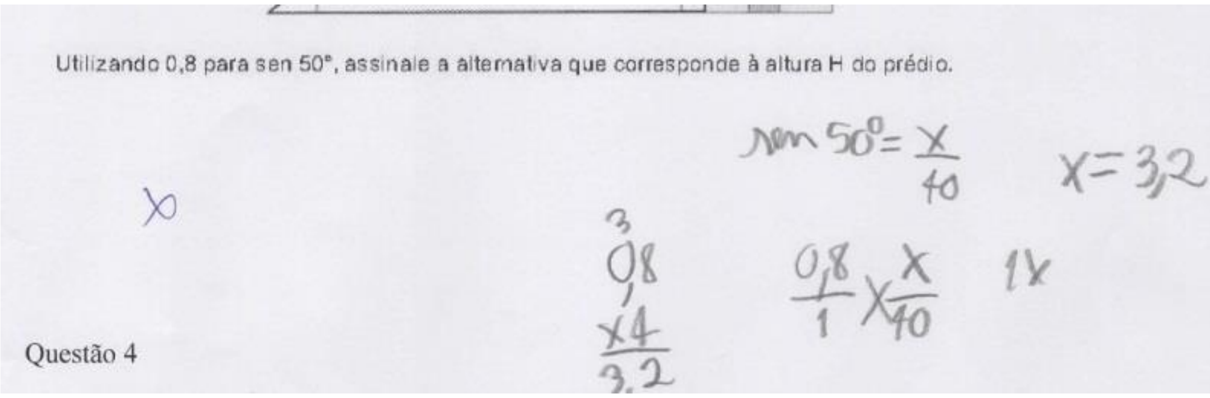
sen 0,8/1 = x/40

x = 12,0

H = 12 m

Fonte: autor.

Figura 23 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Utilizando 0,8 para sen 50°, assinale a alternativa que corresponde à altura H do prédio.

sen 50° = x/40

x = 3,2

0,8/1 = x/40

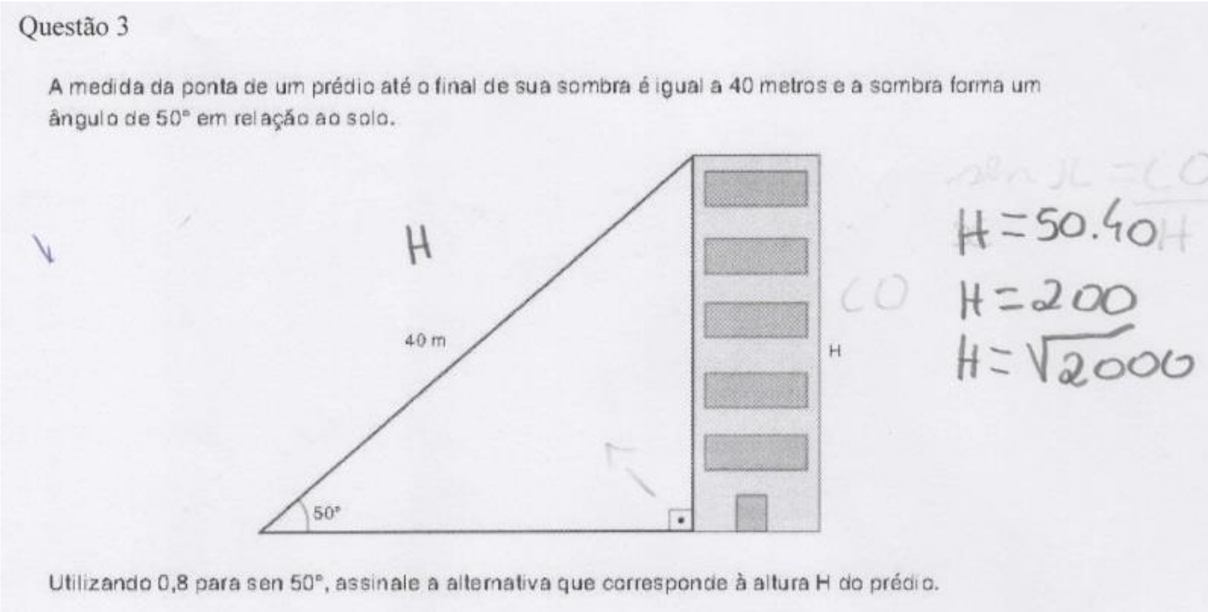
Questão 4

Fonte: autor.

Observamos, ainda, a resolução dos estudantes em relação à questão 3. Identificamos que 2 alunos não consideraram a trigonometria para resolução desta questão, ou seja, o que apresentaram não pode ser justificado por meio da trigonometria no triângulo retângulo partindo das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

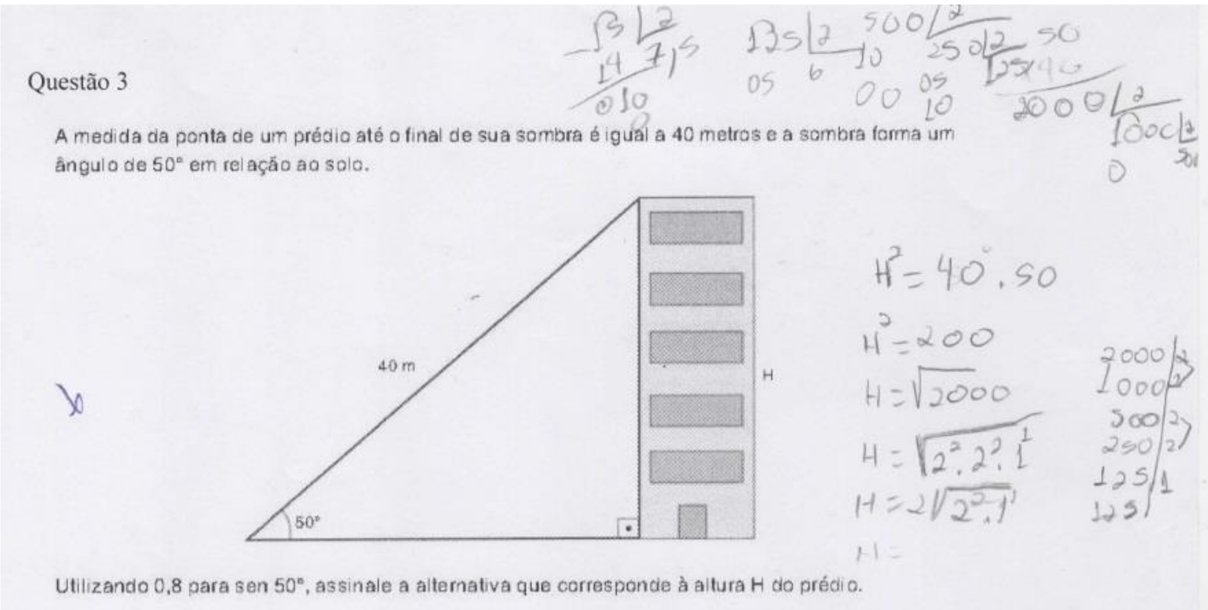
Vejamos nas figuras abaixo a resolução dos 2 estudantes:

Figura 24 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Figura 135 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.

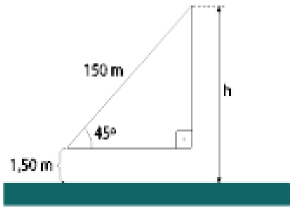


Fonte: autor.

Passaremos, agora, à análise das resoluções dos estudantes na questão 4, também proposta em nosso teste para esta investigação.

Figura 26 – Questão 4.

Um jovem avista o topo de uma torre segundo um ângulo de 45º, conforme a ilustração.



Sabe-se que a distância dos seus olhos ao topo da torre é 150 m e, ainda, que a distância dos seus olhos ao solo é 1,50 m. A altura aproximada h da torre é

Considere: $\sqrt{2} \cong 1{,}4$

Fonte: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (2010).

Quadro 13 – Percentual de acertos e erros da questão 4.

Turma A	
Acertos (%)	Erros (%)
45	55

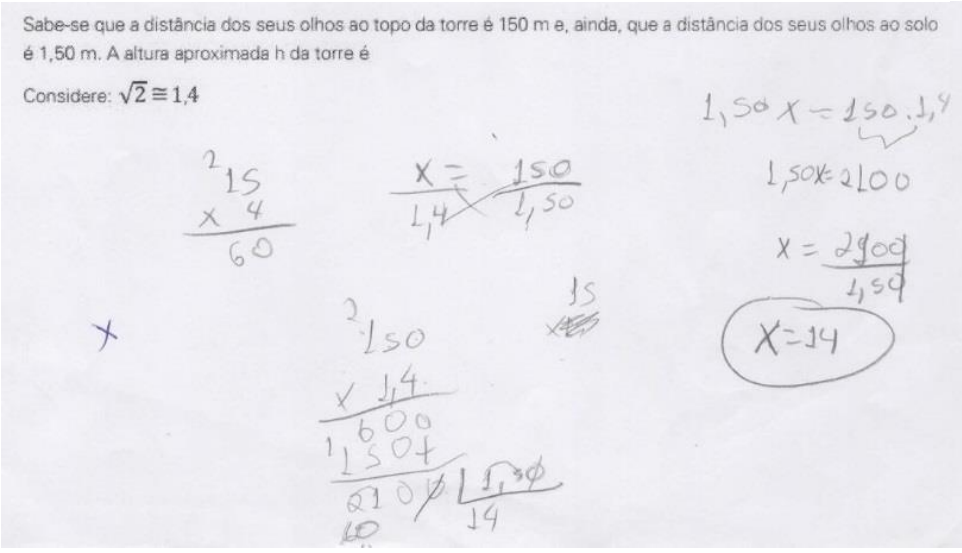
Turma B	
Acertos (%)	Erros (%)
28	72

Turmas A e B	
Acertos (%)	Erros (%)
37	63

Na questão 4, verificamos que, em relação à técnica, 15 estudantes não identificaram no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa, como também não identificaram as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo. Os mesmos estudantes não relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 45º.

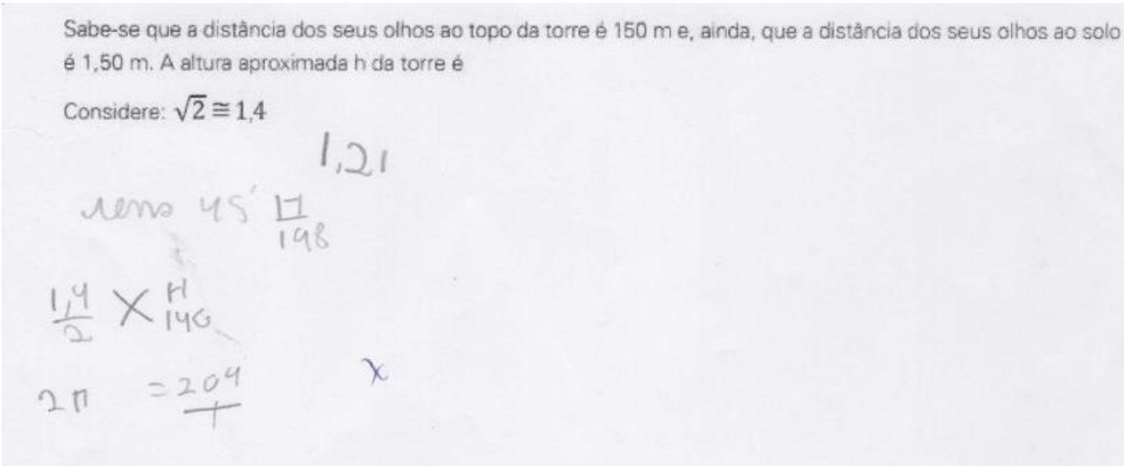
Nas figuras a seguir, apresentaremos a resolução de 2 estudantes que apresentaram procedimentos semelhantes aos dos demais.

Figura 27 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Figura 28 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



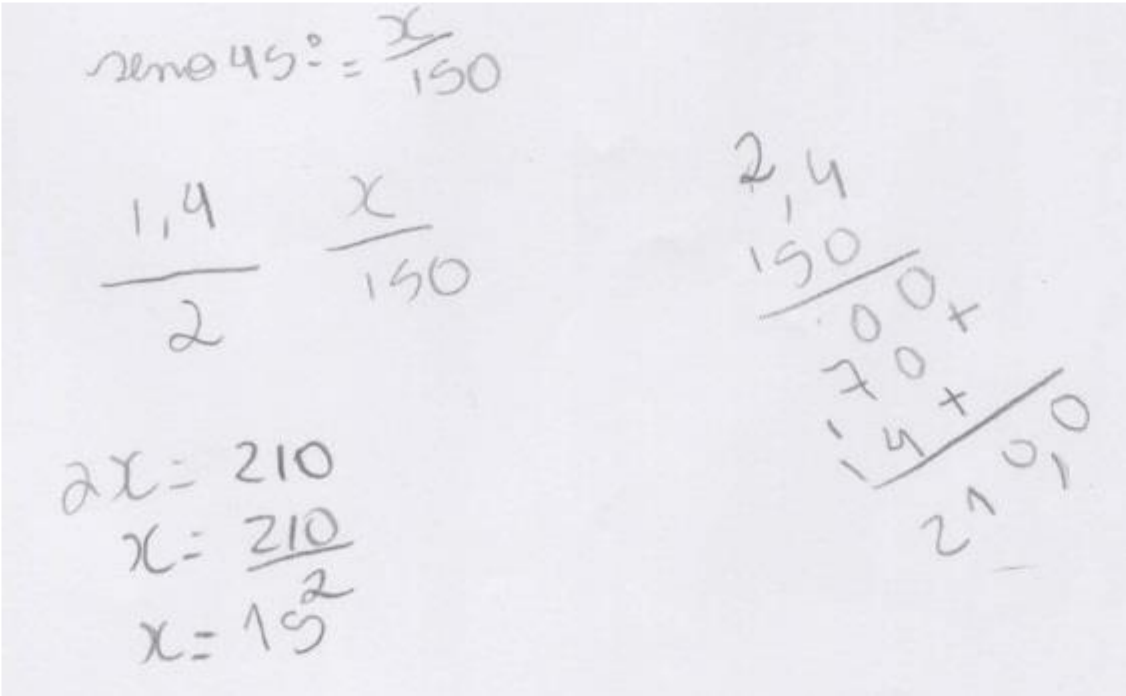
Fonte: autor.

Ainda no desenvolvimento da técnica, observamos que 33 estudantes identificaram no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa; identificaram as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo de 45º; porém, cometeram erros de operações aritméticas não aplicando corretamente os valores apontados na razão trigonométrica, e ao considerarem $\sqrt{2} \cong 1{,}4$ apresentaram erros ao realizarem as operações aritméticas.

Ao final, não adicionaram 1,50 m (altura do jovem) ao valor do cateto oposto, resultando no valor $\cong 107\ m$

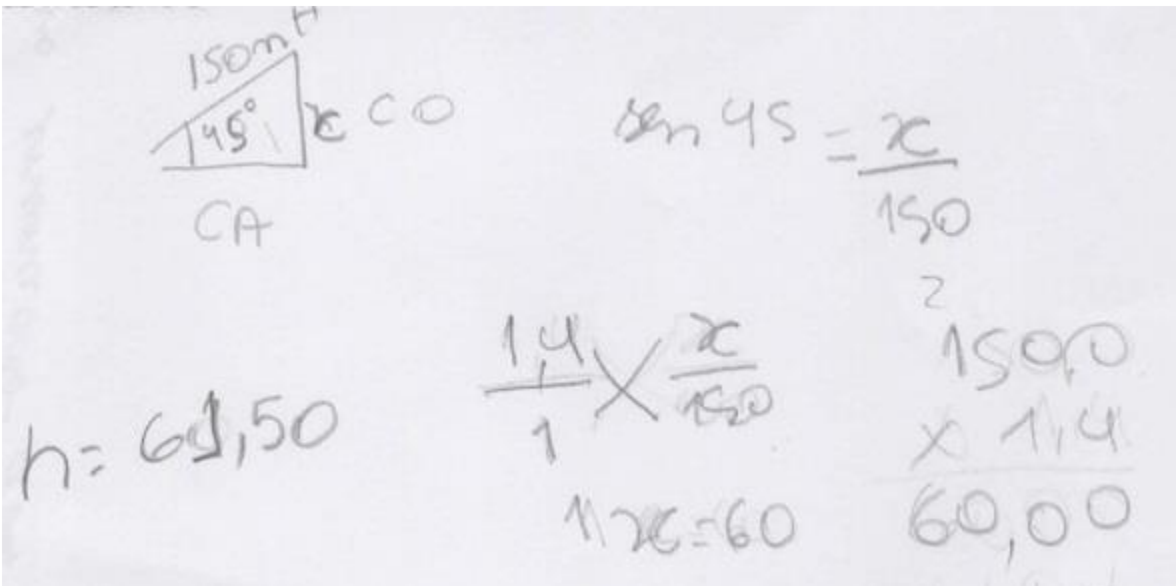
A seguir, selecionamos as resoluções cujos procedimentos foram mais comuns pelos estudantes:

Figura 29 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



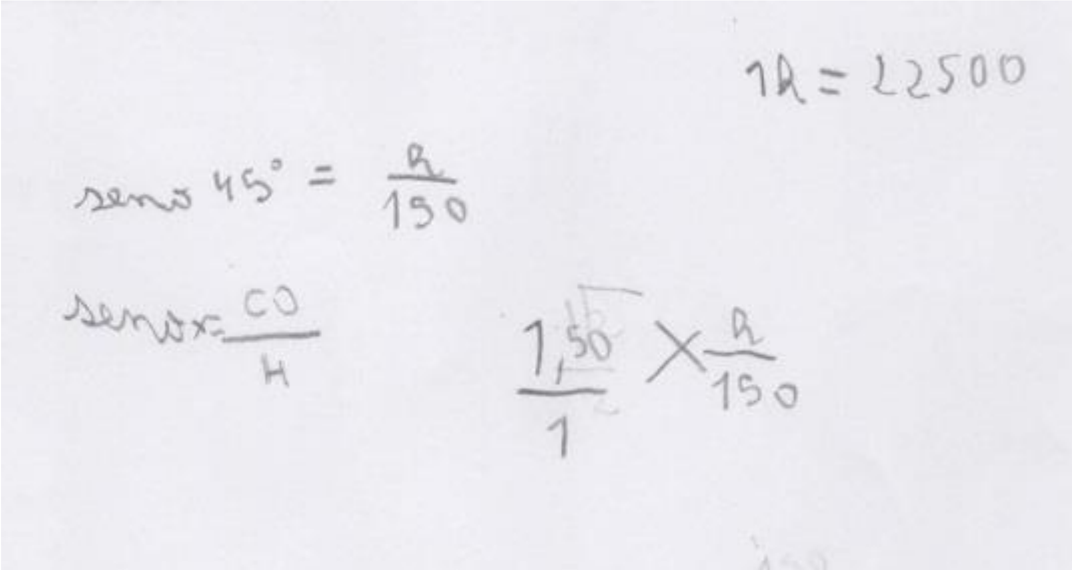
Fonte: autor.

Figura 30 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



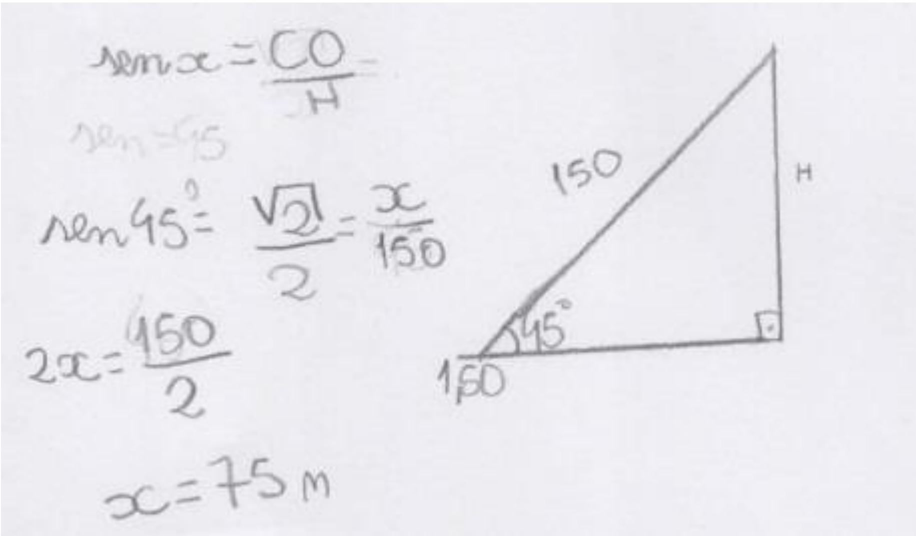
Fonte: autor.

Figura 31 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Figura 32 – Resolução desenvolvida por um dos estudantes.



Fonte: autor.

Analisando os procedimentos desenvolvidos pelos alunos, verificamos que 25 deles: identificaram corretamente o tipo de tarefa da questão – ou seja, calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo –; aplicaram as técnicas corretamente, identificando no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa e as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto; e aplicaram os valores apontados na razão trigonométrica, demonstrando compreensão do discurso teórico-tecnológico. Porém, apresentaram erros nas operações aritméticas, como divisão e multiplicação, principalmente quando os valores estavam representados em forma de fração e decimais.

Constatamos, também, que 14 alunos não compreenderam o discurso teórico-tecnológico – trigonometria no triângulo retângulo –, bem como as aplicações das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, pois não desenvolveram as técnicas necessárias à resolução da tarefa de calcular a medida do cateto oposto a um ângulo.

No próximo capítulo, apresentaremos as considerações finais mediante as análises das questões do SARESP e as resoluções desenvolvidadas pelos alunos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente investigação buscou identificar que conjuntos de tarefas estão presentes nas questões relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, propostas pelo SARESP nos anos de 2010 a 2018, e que conjuntos de técnicas, tecnologias e teorias podem ser mobilizadas por estudantes do 9° Ano do Ensino Fundamental na resolução dessas questões.

Para isso, no capítulo 2, fizemos um levantamento bibliográfico no banco de dissertações e teses da PUC-SP com base nos temas: SARESP e Matemática; trigonometria no triângulo retângulo; e análise praxeológica. Os trabalhos selecionados deram contribuições importantes, tendo em vista nossas inquietações para responder à questão de pesquisa proposta.

Em relação à primeira temática, identificamos, por exemplo, quais possiblidades para desenvolvermos tanto a análise das questões do SARES como das resoluções dos alunos.

A partir dos trabalhos analisados na segunda temática, aprofundamos não apenas nosso olhar quanto ao objeto matemático de nossa investigação, mas também em relação ao que as pesquisas selecionadas indicam sobre o processo de ensino e de aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo.

Por último, a análise dos trabalhos referentes à terceira temática foi de extrema importância, pois ampliou toda nossa compreensão a respeito do referencial teórico escolhido para esta pesquisa.

Dando continuidade à nossa investigação, e com o intuito de obter melhor entendimento do objeto matemático, no capítulo 3 nos debruçamos sobre trabalhos que tratam do desenvolvimento histórico da trigonometria e dos conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo.

Para responder à questão central de nosso estudo, no capítulo 4, apresentamos a fundamentação teórica desta investigação, com base nas organizações praxeológicas da Teoria Antropológica do Didático (TAD), utilizada para analisarmos quatro questões propostas pelo SARESP e selecionadas para esta investigação, e, no capítulo 5, descrevemos a metodologia de pesquisa sob a qual desenvolvemos este trabalho, além dos procedimentos metodológicos adotados ao aplicarmos as mesmas questões para 51 estudantes do 9° ano do Ensino

Fundamental de duas turmas diferentes de uma mesma escola e a análise dessas resoluções.

No capítulo 6, apresentamos a análise praxeológica desenvolvida em cada uma das questões selecionadas para esta investigação e as análises das resoluções desenvolvidas pelos estudantes participantes de nosso teste.

Com base na análise praxeológica desenvolvida com as questões selecionadas para esta investigação, e retomando as questões propostas por Mateus (2007), indicadas no capítulo 4 de nosso trabalho, chegamos às seguintes considerações:

As questões propostas pelo SARESP, no que se refere à trigonometria no triângulo retângulo, partiram do mesmo tipo de tarefa – ou seja, calcular a medida desconhecida de um dos lados do triângulo retângulo, com exceção da questão 4, na qual identificamos uma segunda tarefa: adicionar a medida obtida da altura de uma pessoa.

Consideramos também que, em todas as questões, as técnicas mobilizadas para suas resoluções são as mesmas, ou seja, identificar no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa; identificar as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionar a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto ao ângulo agudo em que a medida era apresentada; e aplicar os valores apontados na razão trigonométrica.

Nas questões do SARESP selecionadas para esta investigação, as técnicas a serem mobilizadas para suas resoluções podem ser todas justificadas por meio da razão trigonométrica seno; os alunos não precisaram, necessariamente, interpretar os resultados.

Observamos que todas as questões selecionadas e apresentadas neste trabalho foram justificadas pelo mesmo discurso técnico-teórico, ou seja, trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, o que já era esperado por causa do critério estabelecido para a seleção das questões.

Identificamos, ainda, a ausência de tipos de tarefas, que são consideradas relevantes no estudo da trigonometria no triângulo retângulo. Exemplos:

Tipo de tarefa: Calcular a medida desconhecida de um dos ângulos do triângulo retângulo a partir da medida de seus lados.

Tipo de tarefa: Calcular a medida do lado e a medida do apótema do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero em função do raio da circunferência na qual estão inscritos.

Tipo de tarefa: Calcular o valor do seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo qualquer com base nas medidas reais dos lados de um triângulo retângulo.

Foi notório que todas as questões apresentaram os respectivos valores do seno referentes aos ângulos agudos indicados, não sendo necessário que os estudantes mobilizassem outras estratégias para descobrir seus valores e, em seguida, aplicassem-nos nas razões trigonométricas para encontrar a medida desconhecida.

Observamos também que as questões, embora contextualizadas, não exigiam, por parte dos estudantes, diferentes interpretações no que diz respeito a identificar o que deveria ser obtido; além disso, é possível identificar que algumas delas apresentam dados distantes dos presentes em situações reais, como a questão 2, que apresenta a recomendação de um médico para um colchão posicionado com 30° de inclinação, situação bastante incomum.

Relacionando a análise praxeológica desenvolvida e a resolução dos estudantes que participaram da aplicação, identificamos que, dos 51 estudantes que responderam ao teste, 19,60% acertaram as quatro questões; 31,37% dos alunos acertaram três questões e erraram apenas uma questão; 13,72% acertaram duas questões e erraram duas questões; 15,68% dos estudantes acertaram apenas uma questão e erraram três questões; e, por fim, 21,56% dos alunos erraram as quatro questões propostas.

Analisando as resoluções apresentadas pelos estudantes em nosso teste, verificamos que 25 deles apresentaram as mobilizações das técnicas indicadas na análise praxeológica desenvolvida para esta investigação, identificando no triângulo retângulo os lados correspondentes aos catetos e à hipotenusa e as medidas dos ângulos apresentadas no triângulo retângulo; relacionaram a medida apresentada no triângulo retângulo à hipotenusa e a medida desconhecida do lado do triângulo retângulo que se desejava encontrar ao cateto oposto; e aplicaram os valores apontados na razão trigonométrica, indicando compreensão do discurso teórico-tecnológico; porém, apresentaram erros nas operações aritméticas, como divisão e multiplicação, quando os valores estavam representados em forma de fração e decimais.

Esses dados nos chamaram atenção, uma vez que os erros apresentados por esse grupo de estudantes não estavam relacionados diretamente à trigonometria, mas, sim, às operações aritméticas básicas, que são ensinadas para os alunos em anos anteriores.

Observamos que 14 alunos não recorreram à trigonometria em, pelo menos, uma das questões, ou seja, não mobilizaram o discurso teórico-tecnológico – trigonometria no triângulo retângulo para resolução. Esses mesmos alunos desconsideraram como estratégia as aplicações das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, e a escolha das técnicas utilizadas levou ao erro em relação à resolução da tarefa de calcular a medida do cateto oposto a um ângulo.

Por fim, destacamos que, durante todo o percurso do mestrado acadêmico, tivemos oportunidades de estudar não somente a teoria que embasa esta pesquisa, mas outras teorias que transitam na educação matemática. Dessa forma, pudemos refletir constantemente sobre nossa prática como professores de matemática e sobre nossa responsabilizade em meio ao processo de ensino e de aprendizagem, ainda que o propósito principal não fosse formar professores de Matemática, e, sim, nos inserir no campo da pesquisa em educação matemática. No entanto, os confrontos com nossas práticas foram inevitáveis.

Todas as teorias a nós expostas, por meio de artigos, dissertações, teses, livros e outros recursos, apontavam não apenas as possibilidades para o desenvolvimento de nossa investigação, mas, principalmente, para o quanto a pesquisa é de extrema importância para o ensino e, consequentemente, para a aprendizagem da Matemática.

Com os resultados obtidos em nossa investigação, identificamos a necessidade de mais pesquisas sobre trigonometria que estejam relacionadas ao SARESP e outras avaliações propostas pelo Estado às escolas a fim de levantar indicadores da apresendizagem dos alunos. Entendemos também a importância de futuras investigações que possam abordar o processo de ensino e de aprendizagem da trigonometria no triângulo retângulo, pensando nas defasagens dos alunos em relação a uma série de conhecimentos matemáticos, principalmente no que ficou evidenciado nesta investigação, ou seja, as operações matemática básicas.

Ainda sobre os resultados apontados neste trabalho, deixamos como sugestão para futuras pesquisas a seguinte questão: “A introdução das primeiras noções de trigonometria no 9° ano do Ensino Fundamental, por meio do ciclo trigonométrico, poderia contribuir para dar significado a esses conceitos, promovendo uma passagem mais eficaz ao seu estudo no triângulo retângulo?”.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2014.

AMORIM, S. R. C. **Números inteiros**: panorama de pesquisas produzidas de 2001 a 2010. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S.K*.* **Qualitative Research for Education***.* Boston: Allyn and Bacon Inc., 1982.

BORGES, Carlos Francisco*.* **Transição das razoes trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico**: uma sequência para o ensino. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOSQUETTI, Maria Carolina Bonna*.* **SARESP/2000 e a questão da visualização em geometria espacial**. 2002. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2 ed. Tradução - Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher/Edusp, 1996.

CARVALHO, C. C. S. de. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do ensino médio**. 2007. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CHAVES, Adiel Praseres*.* **Função Quadrática**: análise em termos de contextos, de organizações matemáticas e didáticas propostas em Livros Didáticos de Ensino Médio. 2000. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoria antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-6,1999.

CHISTE, Mônica Cristina*.* **SARESP –Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do estado de São Paulo**: repercussão do resultado positivo em duas escolas no ano de 2007. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

COSTA, Acylena Coelho*.* **Geometria Analítica no Espaço**: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CRUZ, E. da S. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental**: um estudo sob a ótica da organização praxeológica. 2005. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

GOLFET. Silvia Marques. **Análise de livro didático dos anos iniciais do Ensino Fundamental**: conteúdos de Estatística descritiva e o Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP). Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

GONÇALVES, A. **Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de álgebra baseadas no Saresp de 2008 a 2011**. 2014. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

GONZÁLEZ REY, F. L. **Epistemología cualitativa y subjetividad**. São Paulo: EDUC, 1997.

LINDEGGERL, Luiz Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MARTINS, V. L. de O. F. **Atribuindo significado ao seno e cosseno utilizando o software Cabri-Géomètre**. 2003. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MATEUS, P. **Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos**: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica. 2007. 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MENDES, H. do L. Análise praxeológica de livros didáticos de matemática: o caso dos números binários. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 423-44, 2017.

NASCIMENTO, Alessandra Zeman do. **Uma sequência de ensino para a construção de uma tabela trigonométrica**. 2005. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PEREIRA, C. da S. **Aprendizagem em trigonometria no ensino médio**: contribuições da teoria da aprendizagem significativa. São Paulo: Paco editorial, 2012.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do SARESP**. 2001. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SILVA, S. A da. **Trigonometria no triângulo retângulo**: construindo uma aprendizagem significativa. 2005. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, Júlio César da. **Conhecimentos estatísticos e os exames oficiais**: SAEB, ENEM E SARESP. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

VAZ, R. A. da C. **SARESP/2005**: uma análise de questões de matemática da 7ª série do ensino fundamental, sob a ótica dos níveis de mobilização de conhecimentos e dos registros de representação semiótica. 2008. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

ZUCCO, J. **Funções monotônicas**: alunos da 3ª série do ensino médio frente às Olimpíadas de Matemática das escolas públicas. 2010. 117 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.