

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP



SAMUEL DE SOUZA

**GEOMETRIA DAS DIMENSÕES E
QUADRIDIMENSIONALIDADE**

SÃO PAULO

2019

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial dessa Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____

São Paulo, 24 de agosto de 2019

SAMUEL DE SOUZA

**GEOMETRIA DAS DIMENSÕES E
QUADRIDIMENSIONALIDADE**

Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Programa de Pós-Graduação em Educação
Matemática como exigência para obtenção do
título de **Doutor em Educação Matemática** sob
orientação do Professor Doutor Saddo Ag
Almouloud

DOCTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



PUC-SP

2019

DE SOUZA, Samuel

GEOMETRIA DAS DIMENSÕES E QUADRIDIMENSIONALIDADE -
São Paulo –Tese apresentada na Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - 298 pags.,
110 ilustr., 36 quadros; 2019

BANCA EXAMINADORA

Meus agradecimentos especiais à Fundação São Paulo (FUNDASP) pelo fomento da Bolsa de Estudos durante a realização desta tese como Professor desta Instituição (PUC-SP).

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos ao meu orientador, **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud**, pela dedicação, atenção, constante simpatia, respeito, emissão de críticas e sugestões, sempre bem-vindas, na plenitude do seu trabalho e da manutenção da consistência para com os elementos da Educação Matemática.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora, ao **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud**, à **Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini**, ao **Professor Doutor Gerson Pastre de Oliveira**, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (**PUC-SP**), e aos professores, **Professor Doutor José Messildo Viana Nunes**, da Universidade Federal do Para (**UFPA**), **Professor Doutor Mércles Thadeu Moretti**, da Universidade Federal de Santa Catarina (**UFSC**), pelas orientações dadas, sugestões e críticas muito bem-vindas que auxiliaram no aperfeiçoar desta pesquisa. Agradeço também aos professores examinadores suplentes, o **Professor Doutor Gabriel Loureiro de Lima** da **PUC-SP** e o **Professor Doutor Rogério de Aguiar** da **UDESC**, Universidade Estadual de Santa Catarina.

Agradeço à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, (**PUC-SP**) pela oportunidade do desenvolvimento desta tese em Educação Matemática, e à **Fundação São Paulo pelo fomento à bolsa de Estudos** proporcionada ao longo desta pesquisa, como Professor desta Instituição (**PUC-SP**).

À minha família, ao meu filho Pericles, à minha esposa Regina, à minha mãe Vilma, minhas irmãs Maria Madalena (Leninha) e Noemia, à memória de meu irmão, Sergito e meu Pai, Wilson, pela constante presença, incentivo e colaboração de todos.

Aos meus colegas de turma, no burlar de seus limites, nas conquistas das próprias virtudes, no abraçar do ideal, na superação das emoções, na busca dos questionamentos, e na amizade sempre presente.

À Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva, pela motivação ao início desta pesquisa.

Dedico este trabalho às inteligências que revelam constantemente, novas modelagens na Educação Matemática, com a minha simpatia especial à Geometria.

Às consciências que pelo amor ao conhecimento, se dedicam ao trabalho científico, epistemológico e educacional de inovação, que motivam o trabalho, produzem disciplina, estabelecem limites coerentes, permitem criatividade, debatem ideias, mobilizam inteligências, compõem analogias, discernem inovação, amplificam complementaridade, multiplicam novas visualizações, mantêm a modéstia, enriquecem representações semióticas, renovam linguagens, tornam mais estética a didática, promovem pensamentos originais, geram *noese*, produzem aplicabilidades, induzem a cooperação, melhoram o ensino, facilitam o aprendizado, constroem eternas sinfonias do pensamento semiótico da epistemologia na Educação Matemática.

Que o planeta, se una em diálogos, ensino, didática, acoplamentos, cooperação, aprendizado, estudo, diplomacia, multiplicidade de modelos e teorias cada vez mais crescentes, e cada um trabalhe em si desempenho pessoal de aperfeiçoar as amistosidades para tornar o mundo mais feliz.

Que haja superação a cada momento das consciências em constante evolução, que a percepção do universalismo, da cooperação honesta, da assistencialidade constante, se instale logo na humanidade, para que se trabalhe incessantemente em favor de todos, tendo-se consciência de que toda ideia é relevante, todo ser a nossa volta é necessário, todo questionamento é lícito. e que precisamos trabalhar em nós novas formas de pensar, novas perspectivas de visão, novas didáticas de esclarecimento. Sabemos que estamos em

constante evolução e aprendizado, que somos como eternos estudantes, e precisamos crescer em conhecimento e facilitar as linguagens, as semióticas para as futuras gerações, melhorando o ensino, fazendo gerar pesquisas, modificando e contribuindo com o esclarecimento de ideias, de conceitos, de teorias cada vez mais claras e transparentes a todos.

Dedico este trabalho às consciências que mantêm em si, naturalidade, alegria, autenticidade, doação permanente, perseverança, assistencialidade, discernimento, criatividade, renovação. Às consciências à procura da ascensão à múltiplas diversidades, perspectivas distintas, aberturas de pensamento, escolhas adequadas, eficiência no esclarecimento, expectativa do pensamento original, espontaneidade de inovação, universalidade de percepção, genialidade da *noese*, multiplicidade de semióticas, colapso de possibilidades, crescimento consciente, excelência de serenidade, naturalidade no aprendizado, modéstia de expressão, diálogo simpático, assimilação natural, latência de espera do tempo adequado, ampliação do espectro de conhecimento, ressonância com todos os seres, objetos, locais e tempos, vibração em sintonia, sentimento de amor, compreensão dos biorrítmos, participação ampliada, psicossfera de harmonização, percepção da didática do erro consciente, interligação com todos os seres existentes, manifestação consoante à harmonia da natureza.

A consciência que temos é um estágio e podemos crescer em velocidade maior. Que a memória de novos modelos se instale em nós, na percepção de que as certezas são relativas e a ampliação de conhecimento nos oferece uma crescente gama de possibilidades. Todos precisamos de oportunidades iguais ao conhecimento relevante, científico, didático, ao ensino, ao aprendizado, como estudantes em constante ampliação de discernimento, na simplicidade de ver, ouvir e participar da melhor qualidade de ensino.

Dedico também este trabalho a todos às dezenas de milhares de estudantes que passaram pela minha sala de aula, e que como aluno também deles, subi à degraus mais altos da modéstia e simplicidade, podendo me tornar melhor compreendido como professor, amigo de meus alunos, em convivência conjunta de aprendizado, permitindo a cada um a escolha do caminho consciente ideal, na vibração de seu entusiasmo pessoal, em velocidade crescente de autodescobertas.

O ensinar de novo é a possibilidade de ensinar com novas perspectivas, acender novas formas de visão, novas formulações de enfoques, novas manifestações de amor ao conhecimento e às consciências.

É premente a necessidade da compreensão do tempo de cada um, nos estágios cronológicos da evolução pessoal, da necessidade de compartilhar obstáculos e caminhos, trocar dúvidas, conviver e compartilhar com alegria, cooperar com compreensão e prazer, eliminando traumas, dores, medos, diversificando formas de atividade e provas de avaliação.

A percepção de detalhes mais sutis e úteis, no amadurecer da consciência, em diferentes velocidades de chegada, em cooperação mútua, nos mecanismos de desfazer-se das dificuldades de entendimento, dos obstáculos que bloqueiam a caminhada, alcançando mais altos potenciais de discernimento, sem críticas, sem pânico de errar, com respeito mútuo, sem ironias, sem o desencorajar pelo diálogo, mas na latência da felicidade da descoberta.

Sempre prontos a cooperar entre si, deixando a abertura crítica à sugestões constantes visando a melhoria dos tempos vindouros, na ansiedade da possibilidade de crescimento, visando o futuro, adquirindo formas mais adequadas de didática, passando o

conhecimento necessário de forma mais prazerosa, diante de ensinamentos mais honestos e prestimosa prontidão de esclarecimentos respeitosos.

Os estudantes passam a se comportar de forma entusiasmada para a possibilidade da chegada dos novos conhecimentos, na ânsia do aprendizado novo, pois sentem que o conhecimento compartilhado está potencialmente dentro deles mesmos, como algo natural, por meio da autêntica presença da clareza, do diálogo e trocas mútuas compartilhadas. Com o delinear da institucionalização ou da chegada do saber, vibra-se com entusiasmo, pela ansiedade e sensação do aprendizado, na posse do conhecimento novo, com didáticas prazerosas, diante de esclarecimento sincero e assistencial, com a possibilidade de diálogos cooperativos. É impressionante a manifestação do amor honesto.

Agradeço ao amparo que sempre tive do invisível, e que se mostrou visível por meio dos sentimentos do coração e pela sincronicidade de acontecimentos percebidos pela intuição, avisos necessários produzidos por meio de diferentes pessoas, acontecimentos e intuições, não necessariamente ligados ao trabalho, mas que me levavam a fazer as correlações corretas vindas de falas e induções inesperadas e despreziosas, produzindo constantes modificações neste trabalho para caminhos mais adequados.

Também destaco neste trabalho a percepção de conselhos mentais surgidos, depois de questionamentos que me foram ocorrendo no percorrer da caminhada, à medida que meus estudos se aprofundavam e à medida que dúvidas pairavam. Surgiram respostas, depois de uma noite de sono ou depois de estudos cadenciados do mês de férias. Inevitavelmente surgiam e apareciam na cabeça, ideias e compreensões das melhores possibilidades do caminho, sabiamente reformuladas, por uma ordem especial da natureza que desconheço a origem, mas que tenho consciência desse amparo invisível. Por isso, a esta ordem de unidade coletiva da natureza, deixo meus agradecimentos veementes.

RESUMO

Esta pesquisa tem como problema fundamental, propor uma reflexão didático-teórica sobre a Geometria das Dimensões apoiando-se na visualização e nas diferentes desconstruções e reconstruções dimensionais de figuras geométricas. Partimos do desenvolvimento de uma visão geométrica crescente, indo da dimensão Zero, o ponto, à dimensão Um, o segmento de reta, à dimensão Dois, da Face, à dimensão Três, da variável dimensional o Sólido, à dimensão Quatro, da variável Hipersólido. Desenvolve-se este tema, utilizando-se quatro Registros de Representação Semiótica, alternando entre o Registro Figural, o Registro Discursivo da Língua Materna, o Registro Tabelar e o Registro Algébrico. Buscou-se produzir Reconstruções Dimensionais crescentes, por meio de Reconstruções Instrumentais ou por meio de Reconfigurações Heurísticas Mereológicas, o recortar de figuras determinadas a cada elemento dimensional, seguida de incremento infinitesimal a estas figuras, e sua Reconstrução Dimensional em uma superposição para a nova dimensão. Ainda também, fez-se Reconstruções Dimensionais partindo-se de dimensões mais inferiores. De forma complementar, desenvolveu-se o conceito de dimensões fracionárias, entre as dimensões inteiras, em analogia com o que foi feito na Teoria da Relatividade Geral e nas Geometrias não Euclidianas. Tivemos o cuidado de, à cada figura dimensional construída, acrescentar quatro tipos de visualizações em diferentes Reconstruções Dimensionais para a passagem de uma dimensão à outra. Gauss influenciou diversos matemáticos na formação das geometrias não-Euclidianas, como a Geometria Lobachevskyana e a Geometria Riemanniana. O surgimento do Eletromagnetismo de Maxwell, assim como a Teoria da Relatividade de Einstein já aparecem naturalmente quadridimensionais. Foram os matemáticos Poincaré e Minkowski, que chamaram a atenção para a quadridimensionalidade destas teorias na Física. Surgia então o continuum espaço-tempo, que mostrava ser o espaço físico de comportamento quadridimensional. A partir daí o desenvolvimento da Física passa a utilizar dimensões maiores que três, como uma condição inevitável. Os matemáticos Euclides, Arquimedes, Pappus, Descartes, Newton, Leibniz, Gauss, Euler, Möbius, Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Klein, Maxwell, Poincaré, Minkowski e Einstein, contribuíram para o desenvolvimento dos diversos tipos de Geometria, e as dimensões estavam sempre presentes em suas análises. Neste trabalho ressaltamos as Dimensões em Geometria, como pesquisa em foco para o ensino. A Gravitação de Einstein mostra que a presença de uma matéria física no espaço, encurva o espaço para uma quarta dimensão, fazendo com que os corpos celestes e a luz, sigam uma “trajetória reta”, chamada geodésica, mas que na aparência tridimensional é uma curva. Estas ideias permitiram fazer surgir Modelos para Universo com o espaço dimensionalmente encurvado, o que demonstra ser esta, a natureza mais profunda da geometria dos objetos físicos. Influenciado por esses estudos e pelos trabalhos de Duval, da TRRS, das expressões cognitivas do Aprendizado, diversidade de Visualizações e diferenciação de raciocínios pesquisamos esses elementos para o ensino dentro da Educação Matemática da Geometria das Dimensões. Ao final, para a dimensão cinco em diante desenvolve-se equações recursivas nos Registros Discursivo, Tabelar e Algébrico, generalizando e demonstrando sua validade para uma D-ésima Dimensão inteira qualquer.

Palavras Chaves: dimensão, geometria das dimensões, quadridimensionalidade, registros de representação semiótica, reconstrução dimensional, fórmulas recursivas para hipersólidos.

ABSTRACT

This research has as its main focus to propose a theoretical-didactical reflection on the Geometry of Dimensions, based on the visualization and in the different dimensional deconstructions and reconstructions of geometric figures. We start from the development of a crescent geometry vision, going from dimension zero, the dot, to dimension one, the Line Segment, to dimension two, of the Face, to dimension three, of dimensional variable, the Solid, to dimension four, of the Hypersolid variable. We develop this theme, by using four Registers of Semiotics Representation, by alternating between the Geometric Figurative Register, the Mother Tongue Discursive Register, the Chart Register, and the Algebraic Register. We attempted to produce crescent Dimensional Reconstructions, by means of Instrumental Reconstructions or by means of Mereological Heuristic Reconfigurations, the cutting of specific figures at each dimensional element, followed by an infinitesimal increment to these figures, and their Dimensional Reconstruction in a superposition to the new dimension. Further dimensional reconstructions were also made from the previous dimensions. Complementarily, we developed the concept of fractional dimensions, between the whole dimensions, analogous to what has been done in the General Relativity Theory and non-Euclidean Geometries. We carefully added to each constructed dimensional figure four types of visualization in different dimensional reconstructions from the passage of one dimension to the next. Gauss influenced several mathematicians in the formation of non-Euclidean Geometries, like the Lobachevskyan Geometry and the Riemannian Geometry. The emergence of Maxwell's Electromagnetism, as well as Einstein's Relativity Theory already appear naturally as four-dimensional. It was the mathematicians Poincaré and Minkowski who have drawn attention to the four-dimensionality of these theories in Physics. Thus, the time-space continuum had arisen, which had shown to be the physical space of four-dimensional behavior. From then on, the development of Physics begins to make use of dimensions larger than three as an inevitable condition. The mathematicians Euclides, Archimedes, Pappus, Descartes, Newton, Leibniz, Gauss, Euler, Möbius, Lobachevsky, Bolyai, Riemann, Klein, Maxwell, Poincaré, Minkowski and Einstein contributed to the development of many kinds of Geometry, and the dimensions were always present in their analyses. In this work we emphasize the dimensions in Geometry as a research focused on teaching. Einstein's Gravitation shows that the presence of physical matter in space curves the space into a fourth dimension, making so that the celestial bodies and light follow a so-called geodesic "straight trajectory", but in which its three-dimensional appearance is actually a curve. These ideas allowed for the emergence of Models to the Universe with a dimensionally curved space, which proves to be the deepest nature of the Geometry of physical objects. Influenced by these studies and the works of Duval, the TRRS, the cognitive experience of Learning, diversity of Visualization and differentiation of Reasonings, we researched these elements for the teaching of the Mathematical Education of the Geometry of Dimensions. At the end, from dimension five onwards, we develop recursive equations in the Discursive, Chart and Algebraic Register, generalizing and demonstrating its validity to any whole D-esimal dimension.

Keywords: dimension, geometry of dimensions, four-dimensionality, registers of semiotic representation, dimensional reconstruction, recursive formulas for hypersolids.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - UMA CLASSIFICAÇÃO DADA A CADA UMA DAS FIGURAS GEOMÉTRICAS FORMADAS DENTRO DA TAXONOMIA DA FIGURA, SUAS CARACTERÍSTICAS E TIPO DE RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL ADOTADA	61
FIGURA 2 - FIGURA APRESENTADA POR DUVAL (DUVAL, P.47, 2005), COM TRADUÇÃO COM A REPRESENTAÇÃO DAS DIMENSÕES 0D, 1D, 2D E 3D VISTA DA 2D EM UMA DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL.....	71
FIGURA 3 - DECOMPOSIÇÃO DE UNIDADES FIGURAIS DO PARALELOGRAMO POR DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL. (DUVAL, 2005, P. 23)	72
FIGURA 4 - CIRCUITO DE VISUALIZAÇÃO ORGANIZADO A PARTIR DE UMA TRAMA DE DESENHOS (D) EM DESCONSTRUÇÃO DIMENSIONAL POR MEIO DE DESCONFIGURAÇÕES MEREOLÓGICAS EM DIMENSÕES MENORES: RETAS (2D) E PONTOS (1D)	74
FIGURA 5 - INTER-RELAÇÃO DOS ELEMENTOS QUANTITATIVOS AOS QUALITATIVOS QUE PROMOVEM A EVOLUÇÃO DO SER HUMANO E DO CONHECIMENTO	83
FIGURA 6 - CUBO COM SUAS FACES EXTERNAS, ESPALHADAS E ABERTAS EM DUAS DIMENSÕES	104
FIGURA 7 - HIPERCUBO COM SUAS FACES EXTERNAS, ESPALHADAS E ABERTAS, PROJETADO EM TRÊS DIMENSÕES.....	105
FIGURA 8 - PINTURA DO CHRISTUS HIPERCUBUS, DE 1954, PELO PINTOR SURREALISTA ESPANHOL SALVADOR DALI	106
FIGURA 9 - FIGURA RELATIVA AO TEOREMA DE PITÁGORAS EM TRÊS DIMENSÕES	107
FIGURA 10 - EXEMPLO EM REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA EUCLIDIANA OU GEOMETRIA PLANA .	108
FIGURA 11 - EXEMPLO EM REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA LOBACHEVSKI-BOLYAI-GAUSS OU GEOMETRIA HIPERBÓLICA.....	109
FIGURA 12 - EXEMPLO DE REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA RIEMANNIANA OU GEOMETRIA ESFÉRICA	110
FIGURA 13 - PRIMEIRO POSTULADO DE EUCLIDES.....	114
FIGURA 14 - SEGUNDO POSTULADO DE EUCLIDES	114
FIGURA 15 - TERCEIRO POSTULADO DE EUCLIDES	115
FIGURA 16 - QUARTO POSTULADO DE EUCLIDES	115
FIGURA 17 - QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES.....	115
FIGURA 18 - POSIÇÃO DO CENTROIDE DE 6 FIGURAS GEOMÉTRICAS	118
FIGURA 19 - TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS, PARTINDO-SE DE UMA LINHA (1D) GERA-SE UMA SUPERFÍCIE (2D).....	120
FIGURA 20 - ROTAÇÃO DE UMA LINHA DE COMPRIMENTO L (1D), EM TORNO DE UM EIXO A PERPENDICULAR À PÁGINA, À DISTÂNCIA A , DE UMA DAS EXTREMIDADES DA LINHA. ESTA ROTAÇÃO FAZ GERAR UMA SUPERFÍCIE DE MEDIDA DE ÁREA (2D),	

UMA FAIXA CIRCULAR PLANA, ONDE SUA ÁREA É CALCULADA PELA FÓRMULA DO TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS.	121
FIGURA 21 - SÓLIDOS GERADOS PELA ROTAÇÃO DE SUPERFÍCIES CUJOS VOLUMES SÃO CALCULADOS PELO TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS DE 2D PARA 3D	122
FIGURA 22 - EXEMPLO DE TRANSFORMAÇÃO DADA PELO TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS DE 0D PARA 1D	124
FIGURA 23 - MEDIDA DO HIPERVOLUME DE UMA HIPERESFERA GERADO PELA FÓRMULA DO TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS A PARTIR DO VOLUME DA ESFERA.....	126
FIGURA 24 - CORPO SÓLIDO OCUPANDO UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA NO ESPAÇO	129
FIGURA 25 - DISTRIBUIÇÕES SUPERFICIAIS DE ÁREA	130
FIGURA 26 - ESTRUTURA LINEAR COM ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE.....	131
FIGURA 27 - DISTRIBUIÇÃO PONTUAL. DIMENSÕES DESPREZÍVEIS EM COMPARAÇÃO COM SUAS DISTÂNCIAS, ZERODIMENSIONALIDADE	131
FIGURA 28 - UM CORPO COM SIMETRIA GEOMÉTRICA	132
FIGURA 29 - UMA FIGURA COM SIMETRIA GEOMÉTRICA PODE SER REDUZIDA DIMENSIONALMENTE A UMA ÁREA DE SIMETRIA OU À UMA LINHA DE SIMETRIA OU SEMPRE A UM PONTO ..	134
FIGURA 30 - ZERODIMENSIONALIDADE EM UMA PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL, A ORIGEM DE TODAS AS OUTRAS, A PRIMORDIAL. IDEALIZAÇÃO OU REPRESENTAÇÃO DO PONTO COM DIMENSÃO NULA	143
FIGURA 31 - ZERODIMENSIONALIDADE EM UMA SEGUNDA RECONSTRUÇÃO. É O CASO DE UMA ESFERA, QUE PODE SE TORNAR MENOR E MENOR MENTALMENTE. E VÁRIAS DIMENSÕES MENTAIS PODEM SER ASSOCIADAS.....	143
FIGURA 32 - ZERODIMENSIONALIDADE EM UMA TERCEIRA RECONSTRUÇÃO ZERODIMENSIONAL. CASO DE CILINDROS DE RAIOS E ALTURAS CADA VEZ COM DIMENSÕES MAIS DESPREZÍVEIS	145
FIGURA 33 - ZERODIMENSIONALIDADE EM UMA QUARTA RECONSTRUÇÃO ZERODIMENSIONAL. COMO SERIA O CASO DE CUBO DE TAMANHOS CADA VEZ MAIS DESPREZÍVEIS DEPENDENDO DAS DISTÂNCIAS DO ENTORNO NOS SEUS ESTADOS INFINITÉSIMOS. ..	147
FIGURA 34 - REPRESENTAÇÃO DA DIMENSÃO UM, $R1^{\infty}$, E REPRESENTAÇÃO DO INTERVALO ENTRE DOIS PONTOS	158
FIGURA 35 - SEGMENTO DE RETA DA DIMENSÃO UM, CONSTRUÍDO A PARTIR DA DIMENSÃO ZERO, O PONTO, $R1_1$	160
FIGURA 36 - DIMENSÃO UM, REPRESENTADO UMA SEGUNDA RECONSTRUÇÃO QUE SE CARACTERIZA POR UMA RECONFIGURAÇÃO UNIDIMENSIONAL DOIS, $R1_2$	161
FIGURA 37 - DIMENSÃO UM, REPRESENTAÇÃO DA TERCEIRA RECONSTRUÇÃO UNIDIMENSIONAL....	161
FIGURA 38 - DIMENSÃO UM, REPRESENTAÇÃO DA QUARTA RECONSTRUÇÃO UNIDIMENSIONAL	162

FIGURA 39 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE UM E DOIS, REPRESENTADO POR UMA RETA INFINITA ENCURVADA. ESTRUTURA UNIDIMENSIONAL CURVA, QUE SE ENCURVA PARA UMA SEGUNDA DIMENSÃO	168
FIGURA 40 - REPRESENTAÇÕES DAS DIMENSÕES FRACIONÁRIAS D ENTRE 1 E 1,10 DIM, APRESENTANDO RETA E CURVAS EM ATÉ UMA VOLTA	170
FIGURA 41 - PRIMEIRA PARTE DAS REPRESENTAÇÕES DE DIMENSÕES FRACIONÁRIAS D ENTRE 1,1 E 1,2	170
FIGURA 42 - SEGUNDA PARTE DAS REPRESENTAÇÕES DE DIMENSÕES FRACIONÁRIAS ENTRE D = 1,20 ATÉ 1,40 DIM.....	171
FIGURA 43 - REPRESENTAÇÕES DAS DIMENSÕES FRACIONÁRIAS COM PENETRABILIDADE ATÉ NA FASE C MAS COM DIMENSÕES D=1,06 DIM E D=1,095 DIM	172
FIGURA 44 - REPRESENTAÇÕES DA DIMENSÃO FRACIONÁRIAS COM LINHAS INFINITAS, RESULTANDO D=1,11 DIM, D=1,1325 DIM E D=1,25 (∞) DIM.....	172
FIGURA 45 - REPRESENTAÇÕES DAS DIMENSÕES FRACIONÁRIAS DE D = 1,24 (24,5v) DIM E D= 1,24 (6,5v) DIM, APRESENTANDO RETA E CURVAS EM UMA OU MAIS VOLTAS, EM VÁRIOS PLANOS E VÁRIAS VOLTAS.	173
FIGURA 46 - DIMENSÃO DOIS E O SEU INTERVALO ENTRE DOIS PONTOS. REPRESENTAÇÃO CARTESIANA BIDIMENSIONAL ($R^{2\infty 1}$), E REPRESENTAÇÃO COMPLEXA NO PLANO DE ARGAND-GAUSS ($R^{2\infty 2}$)	174
FIGURA 47 - REPRESENTAÇÃO DA RECONSTRUÇÃO DO QUADRADO POR MEIO DA RECONFIGURAÇÃO DOS SEGMENTOS DE RETA NA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL R21 ■ DO QUADRADO	176
FIGURA 48 - REPRESENTAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO QUADRADO POR MEIO DA RECONFIGURAÇÃO MEREOLÓGICA DOS SEGMENTOS DE LINHA DA BASE COMO PONTOS E SUA POTENCIAL TRANSFORMAÇÃO DE RECONSTRUÇÃO MEREOLÓGICA NA ÁREA DO QUADRADO	177
FIGURA 49 - REPRESENTAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO QUADRADO, DE UMA PARA DUAS DIMENSÕES, EM UMA TERCEIRA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL.....	178
FIGURA 50 - REPRESENTAÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO QUADRADO, DE UMA PARA DUAS DIMENSÕES, EM UMA QUARTA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL.....	179
FIGURA 51 - VISTAS DO QUADRADO EM DIFERENTES POSIÇÕES DESDE A 3D	180
FIGURA 52 - ESPAÇO BIDIMENSIONAL CURVO, QUE SE ENCURVA PARA A TERCEIRA DIMENSÃO, DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A 2 E 3	181
FIGURA 53 - REPRESENTAÇÃO DE DIMENSÕES FRACIONÁRIAS ENTRE DOIS E TRÊS, APRESENTANDO PLANOS ENCURVADAS DE FECHAMENTO DA SUPERFÍCIE TRIDIMENSIONAL.....	183
FIGURA 54 - REPRESENTAÇÃO DE DIMENSÃO FRACIONÁRIAS ENTRE DOIS E TRÊS, NO ENCURVAMENTO DE FIGURAS PLANAS NA DIMENSÃO TRÊS	184

FIGURA 55 - CASCA CILÍNDRICA COM 60° OU $\pi/3$ RAD, DE ÂNGULO INTERNO	184
FIGURA 56 - CASCA SUPERFICIAL FECHADA CÚBICA. DIMENSÃO $D = 2,10$	185
FIGURA 57 - CASCA CÚBICA ABERTA. (A) PLANOS FINITOS COM PONTO DE REFERÊNCIA. (B) PLANOS INFINITOS SEM PONTO DE REFERÊNCIA.....	186
FIGURA 58 - REPRESENTAÇÃO DE DIMENSÕES FRACIONÁRIAS ENTRE DOIS E TRÊS, APRESENTANDO TRÊS PLANOS ENCURVADOS FECHADOS DE SUPERFÍCIES ESFÉRICAS, ($D=2,12$)	187
FIGURA 59 - FITA DE MÖEBIUS OU FAIXA DE MÖEBIUS, COM FORMIGAS CAMINHANDO SOBRE SUA SUPERFÍCIE, HORA CAMINHAM DO LADO DE DENTRO, HORA CAMINHAM DO LADO DE FORA DA SUPERFÍCIE DA FITA.....	190
FIGURA 60 - EXEMPLOS DE: (A) DOIS SERES NA DIMENSÃO DOIS NORMAIS E IGUAIS; (B) O SEGUNDO SER, SOFREU UMA ROTAÇÃO DE 180° NA PRÓPRIA DIMENSÃO DOIS; (C) O SEGUNDO SER PASSOU POR UMA ROTAÇÃO NA DIMENSÃO TRÊS E SE TRANSFORMOU NO SEU ENANTIOMORFO (ESPELHADO SE SI MESMO)	192
FIGURA 61 - NA FITA DE MÖEBIUS (D) DUAS FIGURAS SÃO COINCIDENTES MAS SEPARADAS PELA SUA ESPESURA (DIMENSÕES PARALELAS), A PRIMEIRA DE DENTRO DA FITA E A SEGUNDA DE FORA; SE ROTACIONARMOS A SEGUNDA FIGURA FAZENDO-A PASSAR PELA TORÇÃO DA FITA, (E) ELA PASSARÁ PARA O LADO DE DENTRO DA FITTA, NA MESMA DIMENSÃO DA PRIMEIRA, SÓ QUE NA MESMA DIMENSÃO UMA SERÁ ENANTIOMORFA DA OUTRA (NÃO COINCIDENTES); ISTO MOSTRA QUE AS FIGURAS EM DIMENSÕES PARALELAS SÃO COINCIDENTES, SÓ QUE UMA É ENANTIOMORFA DA OUTRA PARA A DIMENSÃO INTERNA OU UNIVERSO INTERNO	194
FIGURA 62 - GARrafa DE KLEIN.....	198
FIGURA 63 - ESPAÇO TRIDIMENSIONAL INFINITO, $R3_\infty$	199
FIGURA 64 - CUBO CONSTRUÍDO POR MEIO RECONFIGURAÇÃO MEREOLÓGICA DE INFINITAS FACE DO QUADRADO DA BIDIMENSÃO, INCREMENTO INFINITESIMAL DZ , E RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DO CUBO ($R3_1(1\Box)$)	200
FIGURA 65 - CUBO CONSTRUÍDO ATRAVÉS DA REPETIÇÃO DE INFINITAS ARESTAS PARALELAS DE SEÇÃO INFINITESIMAL QUADRADA NA DIREÇÃO PERPENDICULAR À ESTA FACE ($R32_1(1\Box)$), EM UMA SEGUNDA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL A PARTIR DA UNIDIMENSIONALIDADE ($3D/1D$)	201
FIGURA 66 - CUBO VOLUMÉTRICO E TRIDIMENSIONAL CONSTRUÍDO EM 3D A PARTIR DE 0D ($3D/0D$)	202
FIGURA 67 - CUBO CONSTRUÍDO NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL - QUARTA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DO CUBO ($R3_4(1\Box)$)	202
FIGURA 68 - CUBOS VISTOS DA DIMENSÃO TRÊS EM VÁRIOS ÂNGULOS	204
FIGURA 69 - MÃOS DIREITA E ESQUERDA SÃO ENANTIOMORFAS NO ESPAÇO. SÃO IDÊNTICAS, MAS ENANTIOMORFAS UMA DA OUTRA	205

FIGURA 70 - MOLÉCULAS ENANTIOMORFAS	207
FIGURA 71 - ESPAÇO TRIDIMENSIONAL ENCURVADO	209
FIGURA 72 - ESPAÇO QUADRIDIMENSIONAL. COMO NÃO CONSEGUIMOS ENXERGAR PARA QUE LADO APONTA O QUARTO EIXO O REPRESENTAMOS COMO UMA PROJEÇÃO NA DIMENSÃO TRÊS (EIXO x_0)	213
FIGURA 73 - (A) HIPERCUBO OU TESSERACT EM 4D E (B) EM MOVIMENTO EM POSIÇÕES DIFERENTE MOSTRANDO TODOS OS CUBOS EM UM MESMO TAMANHO	215
FIGURA 74 - (A) HIPERCUBO OU TESSERACT ONDE DE CADA VÉRTICE SAEM EM DIREÇÃO AO QUARTO EIXO DA QUARTA DIMENSÃO ($R42 \boxplus$), ATÉ PERFAZER A DIMENSÃO DE UM LADO. NESTA REPRESENTAÇÃO DE CADA VÉRTICE SAI UM LADO PARA OUTRA ARESTA TODAS EM DIREÇÃO A UMA QUARTA DIMENSÃO ($R42 \boxplus$)	216
FIGURA 75 - OUTRA FORMA DE REPRESENTAÇÃO DO TESSERACT ($R43 \boxplus$)	218
FIGURA 76 - OUTRA FORMA DE REPRESENTAÇÃO DO TESSERACT $R1 - 44 \boxplus$ AGORA MOSTRANDO OS INFINITOS SÓLIDOS VOLUMÉTRICOS QUE APARECEM AO LONGO DA DIMENSÃO QUATRO, EM UMA DIREÇÃO PARA A QUARTA DIMENSÃO, PARA “FORA” DO CUBO TRIDIMENSIONAL	219
FIGURA 77 - HIPERCUBO OU TESSERACT EM PROJEÇÃO NA DIMENSÃO DOIS	220
FIGURA 78 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO EM UMA PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL A PARTIR DA DIMENSÃO UM	230
FIGURA 79 - DIMENSÃO DOIS (2D), NA CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO EM UMA SEGUNDA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL POR RECONFIGURAÇÃO MEREOLÓGICA EM RETÂNGULOS INFINITESIMAIS	231
FIGURA 80 - DIMENSÃO DOIS (2D), RECONSTRUÇÃO INSTRUMENTAL, ONDE PREENCHEMOS A FACE COM PONTOS OU RETAS.	231
FIGURA 81 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO EM UMA QUARTA RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL INSTRUMENTAL A PARTIR DA DIMENSÃO UM E ZERO (1D E 0D)	232
FIGURA 82 - VISTAS DO TRIÂNGULO EM DIFERENTES POSIÇÕES DESDE A 3D	233
FIGURA 83 - PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DO TETRAEDRO COM TRIÂNGULOS PARALELOS REVERBERADOS EM DIREÇÃO AO TERCEIRO EIXO. EM DOIS PONTOS DE VISTA, REDUÇÃO DOS LADOS E REDUÇÃO DA ÁREA	235
FIGURA 84 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO A PARTIR DA DIMENSÃO DOIS (2D), EM UMA SEGUNDA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL	236
FIGURA 85 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO A PARTIR DA DIMENSÃO DOIS (2D), EM UMA TERCEIRA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL	237
FIGURA 86 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO DO TETRAEDRO A PARTIR DA DIMENSÃO DOIS (2D), EM UMA QUARTA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL	238
FIGURA 87 - VISTAS DO TETRAEDRO EM DIFERENTES POSIÇÕES DESDE A 3D	239

FIGURA 88 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO. PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO	
QUADRIDIMENSIONAL.....	242
FIGURA 89 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO. SEGUNDA RECONSTRUÇÃO	
QUADRIDIMENSIONAL. EM UM PRIMEIRO PONTO DE VISTA	243
FIGURA 90 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO. SEGUNDA RECONSTRUÇÃO	
QUADRIDIMENSIONAL. EM UMA SEGUNDA FORMA DE RECONSTRUÇÃO EM UM	
SEGUNDO PONTO DE VISTA	243
FIGURA 91 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO. TERCEIRA RECONSTRUÇÃO	
QUADRIDIMENSIONAL.....	244
FIGURA 92 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO. QUARTA RECONSTRUÇÃO	
QUADRIDIMENSIONAL. DOIS PONTOS DE VISTA	245
FIGURA 93 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO EM PROJEÇÃO NA TERCEIRA DIMENSÃO	247
FIGURA 94 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO EM UMA PRIMEIRA	
RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL	258
FIGURA 95 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO EM UMA SEGUNDA	
RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL	259
FIGURA 96 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO PELA SOMA DE TODAS AS	
ÁREAS INFINITESIMAIS, À PARTIR DE UM PONTO $D\vec{A}=RDRD\Phi$ EM UMA TERCEIRA	
RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL	260
FIGURA 97 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO EM UMA TERCEIRA	
RECONSTRUÇÃO BIDIMENSIONAL POR FORMA INSTRUMENTAL.....	261
FIGURA 98 - DIMENSÃO DOIS (2D), DA CONSTRUÇÃO DO CÍRCULO COM DUAS ARESTAS CURVAS	
EXTERNAS, SEPARADOS POR DOIS VÉRTICES, LADOS EXTERNOS CURVOS DE	
DIMENSÃO FRACIONÁRIA, DO LADO EXTERNO DO CÍRCULO	263
FIGURA 99 - FORMAS DISTINTAS DE SE ENXERGAR O CÍRCULO, A PARTIR DA DIMENSÃO TRÊS	264
FIGURA 100 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO A PARTIR DO CÍRCULO DA DIMENSÃO	
DOIS (2D), EM UMA ROTAÇÃO E REVERBERAÇÃO DO CÍRCULO DE 180° , COMO	
PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DA ESFERA.....	266
FIGURA 101 - DIMENSÃO TRÊS (3D), PASSAGEM DA SEGUNDA (2D) PARA A TERCEIRA DIMENSÃO	
(3D) A PARTIR DO CÍRCULO DA DIMENSÃO DOIS (2D), EM UMA SEGUNDA	
RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL.....	267
FIGURA 102 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO DA ESFERA A PARTIR DO CÍRCULO DA	
DIMENSÃO DOIS (2D), EM UMA TERCEIRA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL	
$(R3_{3\oplus})$	268
FIGURA 103 - DIMENSÃO TRÊS (3D), DA CONSTRUÇÃO DA ESFERA A PARTIR DO PONTO DE	
DIMENSÃO ZERO (0D), E CASCAS ESFÉRICAS PARALELAS EM RAIOS CRESCENTES	
ATÉ $R=\ell$, EM UMA QUARTA RECONSTRUÇÃO TRIDIMENSIONAL DA ESFERA	269

FIGURA 104 - FORMA DE SE ENXERGAR AS DUAS FACES DE UMA ESFERA COM DUAS SUPERFÍCIES ESFÉRICAS, DUAS FACES, SEPARADAS POR DOIS SEGMENTOS CURVOS, DUAS ARESTAS, E SEPARADAS POR DOIS VÉRTICES.....	270
FIGURA 105 - FORMAS DISTINTAS DE SE ENXERGAR A ESFERA NA DIMENSÃO 2, A PARTIR DA DIMENSÃO 3 E SUAS DUAS FACES SEMIESFÉRICAS	270
FIGURA 106 - DIMENSÃO TRÊS (3D): (A E B) SEMIESFERAS COM 2 VÉRTICES, 2 ARESTAS CURVAS, 2 FACES (1 CURVA E 1 PLANA) E 1 SÓLIDO; (C) ESFERA, O MESMO MAS COM 2 VÉRTICES, 2 ARESTAS CURVAS E 2 FACES CURVAS; PARA OUTRAS PEÇAS REDONDAS: (D) O CILINDRO: 4 VÉRTICES, 6 ARESTAS (4 ARESTAS CURVAS E 2 RETAS), 4 FACES (2 FACES CURVAS E 2 PLANAS), 1 SÓLIDO CILÍNDRICO; (E) CONE: 3 VÉRTICES, 4 ARESTAS (2 ARESTAS CURVAS E 2 RETAS), 3 FACES (2 FACES CURVAS COM CURVATURA INDO A INFINITO E 1 FACE PLANA) E 1 SÓLIDO CÔNICO	271
FIGURA 107 - DIMENSÃO QUATRO (4D), DA CONSTRUÇÃO DA HIPERESFERA EM UMA PRIMEIRA RECONSTRUÇÃO QUADRIDIMENSIONAL, A PARTIR DA DIMENSÃO TRÊS DA ESFERA (3D)	275
FIGURA 108 - DIMENSÃO QUATRO (4D), DA CONSTRUÇÃO DA HIPERESFERA EM UM SEGUNDO ESTILO DE VISUALIZAÇÃO, A PARTIR DA DIMENSÃO ZERO DE UM PONTO INDO COM MESMO RAIO AO (4D)	276
FIGURA 109 - DIMENSÃO QUATRO (4D), DA CONSTRUÇÃO DA HIPERESFERA EM UM TERCEIRO TIPO DE VISUALIZAÇÃO, EM CONSTRUÇÃO INSTRUMENTAL A PARTIR DA 4D	277
FIGURA 110 - ESFERA NA DIMENSÃO QUATRO (4D), QUARTA RECONSTRUÇÃO	277

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - CARACTERÍSTICAS CLASSIFICATÓRIA DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DISTINTOS	
DADOS EM EXEMPLO.....	62
QUADRO 2 - EXEMPLO DE RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO E DO	
CUBO, EM QUATRO RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS DIFERENTES	63
QUADRO 3 - TABELA PRIMA (PRIMEIRA) DAS DIMENSÕES E CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO ZERO	
DO PONTO	150
QUADRO 4 - AS DIMENSÕES FRACIONÁRIAS ENTRE UM E DOIS.....	157
QUADRO 5 - TABELA DIMENSIONAL DA DIMENSÃO UM E AS CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO UM,	
DO SEGMENTO DE RETA OU SEMICIRCUNFERÊNCIA	163
QUADRO 6 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO UM E DOIS	173
QUADRO 7 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO DOIS DO QUADRADO.....	180
QUADRO 8 - NÚMERO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DA DIMENSÃO ZERO À DIMENSÃO UM, À	
DIMENSÃO DOIS, PONTO, SEGMENTO DE RETA E O QUADRADO	181
QUADRO 9 - DIMENSÕES FRACIONÁRIAS ENTRE 2 E 3.....	187
QUADRO 10 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO TRÊS DO CUBO	204
QUADRO 11 - VARIÁVEIS DIMENSIONAIS DA FAMÍLIA 1, OU FAMÍLIA H-QUADRADO, OU CEGED	
1, MATRIZ DIMENSIONAL DE FIGURAS GEOMÉTRICAS DO CUBO	204
QUADRO 12 - CARACTERÍSTICAS DO HIPERCUBO NA DIMENSÃO QUATRO	221
QUADRO 13 - TABELA DAS DIMENSÕES X NÚMERO DAS VARIÁVEIS DIMENSIONAIS	222
QUADRO 14 - MATRIZ DE ELEMENTOS DAS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS DIMENSIONAIS DE	
FIGURAS POLIÉDRICAS E CONVEXAS DA FAMÍLIA DIMENSIONAL 1 DA DIMENSÃO	
ZERO À DIMENSÃO ONZE, DAS FÓRMULAS RECURSIVAS.....	224
QUADRO 15 - ELEMENTOS DOS TERMOS DAS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS DA FAMÍLIA	
DIMENSIONAL 1 PARA DIMENSÕES CRESCENTES SUA RELAÇÃO COM OS NÚMEROS	
BINOMIAIS.....	227
QUADRO 16 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO DOIS DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO	233
QUADRO 17 - NÚMERO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DA DIMENSÃO ZERO À DIMENSÃO DOIS	
PARA O TRIÂNGULO	233
QUADRO 18 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO TRÊS DO TETRAEDRO.....	239
QUADRO 19 - VARIÁVEIS DIMENSIONAIS DA FAMÍLIA 2, OU FAMÍLIA H-TRIÂNGULO, OU CEGED	
2, MATRIZ DIMENSIONAL DE FIGURAS GEOMÉTRICAS DO TETRAEDRO	240
QUADRO 20 - CARACTERÍSTICAS DO HIPERTETRAEDRO DA DIMENSÃO QUATRO.....	247
QUADRO 21 - MATRIZ DAS VARIÁVEIS DIMENSIONAIS GEOMÉTRICAS DA FAMÍLIA DIMENSIONAL	
2 DA DIMENSÃO 0 A 7	248
QUADRO 22 - MATRIZ DAS VARIÁVEIS DIMENSIONAIS DA FAMÍLIA 2, TRIÂNGULO-TETRAEDRO	249
QUADRO 23 - FÓRMULA SECUNDÁRIA RECURSIVA 1 DA MATRIZ DIMENSIONAL DA FAMÍLIA	
TRIÂNGULO-TETRAEDRO.....	251

QUADRO 24 - FÓRMULA SECUNDÁRIA RECURSIVA 2 DA MATRIZ DIMENSIONAL DA FAMÍLIA	
TRIÂNGULO-TETRAEDRO.....	252
QUADRO 25 - FÓRMULA SECUNDÁRIA RECURSIVA 3 DA MATRIZ DIMENSIONAL DA FAMÍLIA	
TRIÂNGULO-TETRAEDRO.....	252
QUADRO 26 - FÓRMULA SECUNDÁRIA RECURSIVA 4 DA MATRIZ DIMENSIONAL DA FAMÍLIA	
TRIÂNGULO-TETRAEDRO.....	253
QUADRO 27 - FÓRMULA SECUNDÁRIA RECURSIVA 5 DA MATRIZ DIMENSIONAL DA FAMÍLIA	
TRIÂNGULO-TETRAEDRO.....	253
QUADRO 28 - ELEMENTOS DOS TERMOS DAS VARIÁVEIS GEOMÉTRICAS DA FAMÍLIA	
DIMENSIONAL 2 PARA DIMENSÕES CRESCENTES SUA RELAÇÃO COM OS NÚMEROS	
BINOMIAIS.....	254
QUADRO 29 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO DOIS DO CÍRCULO	265
QUADRO 30 - NÚMERO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DA DIMENSÃO ZERO À DIMENSÃO DOIS	
PARA A SUPERFÍCIE DO CÍRCULO	265
QUADRO 31 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO TRÊS NA ESFERA.....	274
QUADRO 32 - VARIÁVEIS DIMENSIONAIS DA FAMÍLIA 3, OU FAMÍLIA CÍRCULO-ESFERA, OU	
CEGED 3, MATRIZ DIMENSIONAL DE FIGURAS GEOMÉTRICAS DA ESFERA ATÉ A	
3D	274
QUADRO 33 - CARACTERÍSTICAS DA DIMENSÃO QUATRO PARA A HIPERESFERA	279
QUADRO 34 - NÚMERO DAS VARIÁVEIS DIMENSIONAIS GEOMÉTRICAS DA DIMENSÃO ZERO À	
DIMENSÃO QUATRO, DA FAMÍLIA DIMENSIONAL 3 ATÉ A HIPERESFERA (4D). E	
POSTERIORMENTE ATÉ A DIMENSÃO 7	279
QUADRO 35 - GENERALIZAÇÃO DA MATRIZ DA HIPERESFERA DA FAMÍLIA DIMENSIONAL 3.....	280
QUADRO 36 - TABELA DAS RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS POR MEIO DE RECONFIGURAÇÕES	
MEREOLÓGICAS INCREMENTOS INFINITESIMAI E RECONSTRUÇÕES	
INSTRUMENTAIS	283

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	33
CAPÍTULO 2 - METAS, METODOLOGIA E REFERENCIAIS TEÓRICOS DE PESQUISA	47
2.1 - QUESTÕES DE PESQUISA	48
2.2 - METODOLOGIAS DE PESQUISA	48
2.3 - REFERENCIAIS TEÓRICOS.....	52
2.3.1 - A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)	53
2.3.2 - Uso da Analogia	53
2.3.3 - Separação do Saber em Elementos.....	54
2.3.4 - A Teoria das Situações Didáticas (TSD)	54
2.3.5 - Visões em torno das Dimensões.....	54
2.4 - TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)	58
2.5 - A NOESE E A SEMIOSE	75
2.6 - A FORÇA DA ANALOGIA	87
2.7 - TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)	94
CAPÍTULO 3 - ESTUDO DAS DIMENSÕES - OBJETO MATEMÁTICO DAS ESTRUTURAS DIMENSIONAIS.....	101
3.1 - INTRODUÇÃO	101
3.2 - LIVROS SOBRE DIMENSÕES NO SÉCULO XIX.....	102
3.3 - AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO SÉCULO XIX.....	107
3.3.1 - A Geometria Plana de Euclides	108
3.3.2 - A Geometria Curva de Lobachevsky-Bolyai-Gauss ou Geometria Hiperbólica.....	108
3.3.3 - A Geometria Curva Riemanniana ou Geometria Esférica	110
3.4 - A GEOMETRIA DAS DIMENSÕES E REFERENCIAIS	111
3.5 - A GEOMETRIA DE EUCLIDES E AS DIMENSÕES	113
3.5.1 - Primeiro Postulado de Euclides.....	114
3.5.2 - Segundo Postulado de Euclides.....	114
3.5.3 - Terceiro Postulado de Euclides.....	115
3.5.4 - Quarto Postulado de Euclides	115
3.5.5 - Quinto Postulado de Euclides.....	115
3.6 - O TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS	116
3.6.1 - Primeira Parte do Teorema Dimensional de Pappus	119
3.6.2 - Segunda Parte do Teorema Dimensional de Pappus	122
3.6.3 - Extrapolando o Teorema Dimensional de Pappus para dimensões superiores	123
3.7 - DISTRIBUIÇÕES VOLUMÉTRICA, SUPERFICIAL, LINEAR E PONTUAL.....	127
3.7.1 - Forma da redução dimensional dependendo do formato do corpo.....	132

CAPÍTULO 4 - GEOMETRIA DAS DIMENSÕES	139
4.1 - INTRODUÇÃO	139
4.2 - DIMENSÃO ZERO (0) OU ESTRUTURA ZERODIMENSIONAL	142
4.3 - REPRESENTATIVIDADES DA UNIDADE OU DO UNO	150
4.4 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO ZERO A UM	154
4.4.1 - Dimensão: $da = 0,10$, Partículas em um tubo filamentar, unidirecional	155
4.4.2 - Dimensão no intervalo: $0,10 < db < 0,19$, Partículas distribuídas em filamentos em direções variadas	156
4.4.3 - Dimensão: $dc = 0,20$, Partículas distribuídas em uma superfície plana	156
4.4.4 - Dimensão: $0,20 < dd \leq 0,29$, Superfícies de partículas em direções variadas	156
4.4.5 - Dimensão: $de = 0,30$, Partículas sólidas distribuídas em volume	156
4.4.6 - Dimensão: $df > 0,30$, Distribuição em hipervolumes	156
4.5 - DIMENSÃO UM (1D) OU ESTRUTURA UNIDIMENSIONAL	157
4.5.1 - Unidimensional Infinita	157
4.5.2 - Uso do Princípio da Analogia na Geometria das Dimensões	158
4.5.3 - Primeira Reconstrução da Unidimensionalidade	159
4.5.4 - Segunda Reconstrução da Unidimensionalidade	160
4.5.5 - Terceira Reconstrução da Unidimensionalidade	161
4.5.6 - Quarta Reconstrução da Unidimensionalidade	162
4.5.7 - Resumo das Características do Segmento de Reta	162
4.6- PRINCÍPIOS ANALÓGICOS DIMENSIONAIS	164
4.6.1 - Princípio Analógico Dimensional 1	165
4.6.2 - Princípio Analógico Dimensional 2	165
4.6.3 - Princípio Analógico Dimensional 3	166
4.6.4 - Princípio Analógico Dimensional 4	167
4.7 - ESTRUTURAS FRACIONÁRIAS ENTRE A DIMENSÃO UM E A DOIS	168
4.8 - CONTAGEM DA DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE UM E DOIS	169
4.8.1 - Dimensão da , podendo da ser $0 < da \leq 0,10$	169
4.8.2 - Dimensão db , podendo $0 < db \leq 0,10$ (linha encurvada de 1 a 11 voltas ou mais)	170
4.8.3 - Dimensão dc , no intervalo, $0 < dc \leq 0,10$	171
(a linha em três dimensões em n planos de manifestação)	171
4.8.4 - Dimensão dd , no intervalo $dd > 0,30$	173
4.9 - DIMENSÃO DOIS (2D) OU ESTRUTURA BIDIMENSIONAL	173
4.9.1 - Reconstrução bidimensional infinita	174
4.10 - FAMÍLIA DIMENSIONAL 1 OU FAMÍLIA DO QUADRADO-CUBO	175
4.10.1 - $D=2$ - Quadrado - Construções Da Estrutura Bidimensional Do Quadrado	175
4.10.2 - Reconstrução Bidimensional Um do Quadrado	175

4.10.3 - Segunda Reconstrução Bidimensional do Quadrado	176
4.10.4 - Reconstrução Três, da Representação Semiótica Bidimensional do Quadrado	177
4.10.5 - Reconstrução Quatro, Bidimensional do Quadrado	178
4.10.6 -Resumo de Características do Quadrado.....	179
4.11 - $2 < D < 3$ - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO 2 E A DIMENSÃO 3	181
4.12.1 - Contagem Da Dimensão Fracionária Entre A Dimensão 2 E A Dimensão 3	182
4.12.2 - Dimensão d_a : $0 < d_a \leq 0,1$	182
4.12.3 - Dimensão d_b , sendo $0 < d_b \leq 0,10$ - Uma superfície fechada e mais voltas ocorrendo	186
4.12.4 - Dimensão $0,2 < d_c > 0,99$	187
4.13 - FIGURAS ENANTIOMORFAS DA DIMENSÃO DOIS PARA A TRÊS	188
4.13.1 - Fita de Möebius	189
4.13.2 -Passagem de uma figura bidimensional para sua forma enantiomorfa	191
4.13.3 - Garrafa de Klein	197
4.14 - DIMENSÃO 3 (3D) OU ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL	198
4.14.1 - Reconstrução Tridimensional Infinita	198
4.15 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DO CUBO	199
4.15.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional do Cubo	199
4.15.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional do Cubo	200
4.15.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional do Cubo	201
4.15.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional do Cubo	202
4.15.5 - Resumo de Características do Cubo	203
4.16 - FIGURAS ENANTIOMORFAS DA DIMENSÃO TRÊS PARA A QUATRO	205
4.17 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO TRÊS E QUATRO	207
4.18 - DIMENSÃO QUATRO (4D) OU ESTRUTURA QUADRIDIMENSIONAL.....	212
4.18.1 - Perspectiva Quadridimensional Espaço-Tempo	212
4.19 - HIPERCUBO OU TESSERACT OU OCTOCORO OU 4-CUBO OU 4-ORTOPLEX OU 4-OCTAEDRO	213
4.19.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo	213
4.19.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo	216
4.19.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo.....	217
4.19.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo	218
4.19.5 - Resumo de Características do Hipercubo.....	219
4.20 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA 1.....	222
4.20.1 - Primeira Fórmula Recursiva Matricial (FRM), válida para cada elemento da matriz da Família Dimensional 1	223
4.20.2 - Segunda Fórmula Recursiva (Universal) das Dimensões, a Soma alternada das Variáveis Geométricas das Dimensões (VGD) ou Equação Geométrica das Dimensões (EGD) ou Equação Canônica das Dimensões	223

4.20.3 - Terceira Fórmula Recursiva das Dimensões, ou Soma dos Elementos de Linha da Matriz ou Equação do Expoente Dimensional da Trindade	224
4.21 - DEMONSTRAÇÃO DE QUE AS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS DA FAMÍLIA 1 VALE PARA QUALQUER DIMENSÃO	225
4.21.1 - Série Binomial de Newton e a demonstração da validade das Variáveis Dimensionais para as Famílias 1 e 2 até a D-ésima Dimensão inteira qualquer	226
4.21.2 - Demonstração de que a Equação Geométrica das Dimensões da Família Dimensional 1, resulta sempre igual à ("divina") canônica unidade, e é válida para qualquer dimensão inteira D	227
4.21.3 - Demonstração de que a Equação Soma da Linha da Matriz dos Elementos Geométricos das Dimensões da Família Dimensional 1, resulta na solução do expoente da D-ésima Trindade	228
4.22 - FAMÍLIA 2 OU FAMÍLIA TRIÂNGULO-TETRAEDRO	229
4.22.1 - D=2 - Triângulo Equilátero - Construção Da Estrutura Bidimensional Do Triângulo Equilátero	229
4.22.2 - Reconstrução Um para Representação Semiótica Bidimensional do Triângulo	229
4.22.3 - Reconstrução Dois Bidimensional do Triângulo	230
4.22.4 - Reconstrução Três Bidimensional do Triângulo	231
4.22.5 - Reconstrução Quatro Bidimensional do Triângulo	232
4.22.6 - Resumo das Características do Triângulo.....	232
4.23 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DO TETRAEDRO	234
4.23.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro	234
4.23.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional do Tetraedro	236
4.23.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro	236
4.23.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional do Tetraedro	237
4.23.5 - Resumo de Características do Tetraedro	238
4.24 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO OU 5-CELL (C ₅) OU 4-SIMPLEX	240
4.24.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro.....	240
4.24.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro	243
4.24.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro	244
4.24.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro	244
4.24.5 - Resumo da Dimensão Quatro para o Hipertetraedro	246
4.25 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA DIMENSIONAL 2.....	249
4.25.1 - Primeira Fórmula Recursiva dos elementos da Matriz das dimensões da Família 2, triângulo-tetraedro, de dimensão D e variável dimensional H	249
4.25.2 - Equação Geométrica das Dimensões (EGD) ou Segunda Fórmula Recursiva dos Elementos de Linha da Matriz Dimensional da Família 2, do triângulo-tetraedro.....	250
4.25.3 - Soma dos Elementos de linha da matriz ou Terceira Fórmula Recursiva da Matriz Dimensional da Família Dimensional 2.....	250

4.25.4 - Mais Cinco Fórmulas Secundárias Recursivas dos elementos da Matriz dimensional da Família 2, do triângulo-tetraedro	251
4.26 - DEMONSTRAÇÃO DE QUE A EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES DA FAMÍLIA DIMENSIONAL TRIÂNGULO-TETRAEDRO, É VÁLIDA PARA QUALQUER DIMENSÃO D INTEIRA.....	254
4.26.1 - Demonstração de que a Equação Geométrica das Dimensões da Família Dimensional 2, triângulo-tetraedro, é válida para qualquer dimensão D inteira	255
4.26.2 - Demonstração de que a Equação Soma Dimensional da Família Dimensional 2, triângulo-tetraedro, é válida para qualquer dimensão D inteira.....	256
4.27 - FAMÍLIA 3 OU FAMÍLIA CÍRCULO-ESFERA.....	257
4.27.1 - $D=2$ - Círculo - Construção Da Estrutura Simétrica Bidimensional Do Círculo.....	257
4.27.2 - Primeira Reconstrução Bidimensional do Círculo	257
4.27.3 - Segunda Reconstrução Bidimensional do Círculo	258
4.27.4 - Terceira Reconstrução Bidimensional do Círculo	259
4.27.5 - Quarta Reconstrução Bidimensional do Círculo.....	260
4.27.6 - Paradoxo geométrico das dimensões	262
4.27.7 - Reconstrução não Usual, Bidimensional do Círculo	263
4.27.8 - Resumo das Características do Círculo	264
4.28 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DA ESFERA.....	265
4.28.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional da Esfera	265
4.28.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional da Esfera	266
4.28.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional da Esfera	267
4.28.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional da Esfera.....	268
4.28.5 - Reconstrução não Usual, Tridimensional da Esfera	269
4.28.6 - Paradoxo geométrico.....	272
4.28.7 - Resumo das Características da Esfera	273
4.29 - HIPERESFERA.....	275
4.29.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera	275
4.29.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera.....	276
4.29.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera	276
4.29.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera	277
4.29.5 - Resumo da Dimensão Quatro para a Hiperesfera	278
4.29.6 - Resumo dos Elementos Geométricos das Dimensões da Família Dimensional 3.....	279
4.30 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA DIMENSIONAL 3.....	280
4.30.1 - Primeira Fórmula Recursiva dos Elementos da matriz da Família Dimensional 3, círculo-esfera	280
4.30.2 -Equação Geométrica das Dimensões ou Segunda Fórmula Recursiva dos Elementos de Linha da Matriz válida para toda a Família Dimensional 3, círculo-esfera, e sua Demonstração para qualquer dimensão D	281

4.30.3 - Terceira Fórmula Recursiva da Soma dos elementos de linha da Família Dimensional 3.....	282
4.31 - RESUMO DAS RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS	282
4.32 - DIMENSÃO D - DIMENSÃO D QUALQUER OU ESTRUTURA D-DIMENSIONAL OU MULTIDIMENSIONAL	283
CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	285
REFERÊNCIAS	293

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

*“O amor é quem dá a paz aos seres humanos,
a tranquilidade ao mar, o silêncio ao vento, o sonho à dor.”*

PLATÃO de Atenas (428-348, 80)

*“O grande segredo da alquimia social é tirar todo proveito possível de cada uma das idades pelas
quais passamos: é ter todas as suas folhas na primavera, todas as suas flores no verão e todos os
frutos no outono.”*

Honoré de **BALZAC** (1799-1850, 51)

“Careless talk, can cost lives.”

“We all make choices, but in the end, our choices make us.”

Esta pesquisa tem como objetivo, tecer reflexões sobre a Geometria das Dimensões e para isso realizar reconstruções dimensionais de figuras geométricas de variadas famílias, desde a dimensão zero até a dimensão quatro através dos registros figural discursivo, tabular e algébrico e para dimensões acima da dimensão quatro, por intermédio dos registros discursivo, tabular e algébrico, apoiando-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (DUVAL, p.1-85, 1995) e na Teoria de Reconstrução Dimensional (DUVAL, p.5-53, 2005) viabilizando o ensino das Dimensões em Geometria e seu consequente aprendizado por meio de uma metodologia crescente de reconstrução dimensional e suas distintas visualizações.

Busca-se para isso caracterizar uma visão dimensionalmente crescente, dentro das dimensões geométricas inteiras, indo da dimensão Zero, o ponto, que caracteriza a variável Vértice, à dimensão Um, o segmento de reta, na variável Aresta (*Edge*), à dimensão dois, na variável Face, à dimensão três, na variável Sólido, e à dimensão quatro, na variável Hipersólido, e assim por diante.

Até a Quarta Dimensão, se tornou mais fácil didaticamente se enxergar a geometria das figuras, em analogia com as reconstruções em dimensões inferiores, como o fazemos nesta pesquisa. Para isso diversifica-se quatro Registros de Representação Semiótica como sejam, o Registro Figural, o Discursivo da Língua Materna, o tabular e o Algébrico.

Da Quinta Dimensão em diante, no entanto, se torna uma dificuldade maior se “enxergar” as figuras geométricas, e assim passamos a tratá-las com o que restou das analogias das figuras de dimensões inferiores no Registro Discursivo, o Registro tabular numéricas de cada variável dimensional.

Procura-se caracterizar construções e desconstruções semióticas em diversas maneiras de visualização, nos servindo de expressões recorrentes, cuja validade pode ser comprovada até uma D -ésima dimensão inteira qualquer.

Ainda de forma complementar, buscou-se definir as chamadas dimensões fracionárias entre as dimensões inteiras, à maneira como foi feito na Relatividade Geral e na Geometria Esférica de Riemann, entre as dimensões 3 e 4, visando caracterizar dimensões encurvadas que descrevem a passagem fracionária entre duas dimensões. Neste caso, fizemos a extrapolação para dimensões menores, dimensões fracionárias entre 0 e 1, entre 1 e 2, e entre 2 e 3.

Relacionamos o Teorema de Pappus que permite a construção de figuras geométricas, por meio da rotação de figuras lineares de dimensão um (1D), gerando figuras superficiais na dimensão 2 (2D), com a sequente fórmula para o cálculo de medida de área de figuras planas geradas. Em uma segunda parte desse Teorema, Pappus de forma análogas passa a rotacionar figuras geométricas da dimensão dois (2D), para gerar figuras geométricas na dimensão três (3D), calculando assim por meio de fórmulas simples, as medidas seus volumes.

Fizemos assim uma extensão ou extrapolação do Teorema Dimensional de Pappus, para passar da dimensão zero (0D) por meio da rotação de pontos (0D), gerando figuras na dimensão um (1D), no cálculo da medida de seu comprimento L .

Em outra extensão dimensional, utilizamo-nos da mesma analogia, para se fazer uma outra extrapolação do Teorema Dimensional de Pappus, por meio da rotação de figuras da dimensão três (3D), para gerar figuras na dimensão quatro (4D), calculando por consequência a medida de seu Hipervolume H .

À maneira de Duval, para cada construção dos elementos dimensionais, tivemos o cuidado de acrescentar quatro diferentes tipos de visualização em cada Reconstrução Dimensional, para fazer a passagem de uma dimensão menor à outra maior.

Para isso utiliza-se o modelo da Reconfiguração Mereológica Heurística, sugerido por Duval, que se refere a realização de cortes em partes, na figura geométrica em estudo, dentro de uma mesma dimensão, fazendo a sua desconstrução em figuras semelhantes, para visualizar com mais facilidade o aprendizado em suas unidades figurais decompostas.

Friedrich Gauss preocupou durante toda sua vida, com a descrição das dimensões mais altas da geometria, como se antecipasse, o desenvolvimento da Física do século XX, que necessitou dela para descrição da natureza. Posteriormente, as teorias físicas que foram

surgindo, tinham suas variáveis espaciais características, espontaneamente com quatro ou mais dimensões.

Uma primeira aplicação das Geometrias não Euclidianas foi a Relatividade Geral, com as induções de Gauss, da Geometria Hiperbólica, Lobachevskyana, seguindo-se a Geometria Esférica, Riemanniana, geometrias que induziram indícios às dimensões fracionárias do espaço, chamadas de não euclidianas.

No século XIX, o surgimento do Eletromagnetismo de Maxwell já aparece naturalmente quadridimensional, com o surgimento do tensor eletromagnético que envolve a inseparabilidade entre os campos elétrico e magnético, auto interferentes e inseparáveis, assim como as variáveis físicas do continuum espaço-tempo, com a inseparabilidade de espaço e tempo, percebidos no início do século XX, logo após a publicação da Teoria da Relatividade.

Tanto o Eletromagnetismo quanto a Relatividade Restrita foram construídas originalmente sem a percepção da quadridimensionalidade. Foram os matemáticos Henry Poincaré em 1906 e Hermann Minkowski em 1908, que mostraram que a Física seguia o caminho da quadridimensionalidade, naturalmente através de suas variáveis interligadas, como espaço-tempo, momentum-energia, momento angular-espaço angular, tensor eletromagnético, cujas equações facilitavam a percepção do que ocorria geometricamente nas quatro dimensões. A partir daí o desenvolvimento da Física se utilizou sempre de quatro ou mais dimensões como condição sem retorno.

Os matemáticos Euclides, Arquimedes, Pappus, Descartes, Newton, Leibniz, Gauss, Euler, Möbius, Lobachevski, Bolyai, Riemann, Klein, Maxwell, Poincaré, Minkowski e Einstein, contribuíram para o desenvolvimento dos diversos tipos de Geometria, sendo que as dimensões estavam sempre presentes.

Com a publicação da Teoria da Relatividade Geral, Einstein, em 1916, se utilizou da geometria de Gauss e de Riemann dos espaços curvos para mostrar que a natureza da Gravitação, não é o resultado de forças, como afirmava Isaac Newton (1687), mas era resultado do encurvamento do espaço tridimensional para uma quarta dimensão. O que resultava na formação de geodésicas num espaço dimensionalmente fracionário, em que, os corpos celestes e a luz, deviam seguir essas trajetórias “encurvadas” no espaço, caminho mais curto entre dois pontos, chamadas geodésicas, cuja curvatura é ampliada pela presença da quantidade de matéria no espaço físico e reduzida pela velocidade do corpo. Estes elementos, que não podem ser entendidos a priori neste momento, pois serão delineados ao

longo das parcelas figurais no crescimento das dimensões, através de conceitos analógicos, visando o alcançar do entendimento da geometria do espaço curvo, até alcançarmos a dimensão quatro, almejando este discernimento e isto será feito ao longo dessa pesquisa.

O planeta Terra, ao seguir sua trajetória em torno do Sol, o faz em uma trajetória circular, devido ao fato de que a presença do Sol encurva o espaço físico ao seu redor, de tal forma que a Terra, com sua velocidade, segue “uma trajetória reta”, ou seja uma geodésica em torno do Sol, cuja visão do espaço tridimensional é uma “curva”, devido a este espaço encurvado que não se percebe por não se vivenciar ou se perceber as ocorrências em quatro dimensões. Esta Teoria foi confirmada experimentalmente em um eclipse em Sobral no Brasil e em Porto Príncipe na África, em 1919, por uma equipe de cientistas ingleses, lideradas pelo famoso físico inglês Arthur Eddington.

Houve uma outra confirmação desta Teoria também com o seu cálculo, feito por Einstein, em uma perfeita consonância com a experimentação, que é o caso da órbita de Mercúrio em forma de rosácea em torno do Sol, sendo que por meio da teoria de Newton da Gravitação, aparecem erros insolúveis com a realidade. Esta teoria fez surgir Modelos para Universo em espaços dimensionais com curvaturas diversas, demonstrando ser esta, a verdadeira natureza geométrica dos objetos físicos.

A partir daí todas as teorias físicas do século XX, jamais puderam abandonar o conceito de quadridimensionalidade e D-dimensionalidade nos seus desenvolvimentos. Assim o fizeram, a Teoria Quântica Relativística, a Eletrodinâmica Quântica, a Cromodinâmica Quântica, a Teoria de Campos, o Modelo Padrão da Teoria de Partículas, a Teoria das Supercordas. A Teoria das Supercordas é uma teoria física para explicar o universo material, não através de partículas, mas através de cordas que vibram em determinadas frequências, caracterizando a matéria que nos circunda. A Teoria das Supercordas, especialmente extrapolou seus estudos para elementos de cinco (5), dez (10), onze (11) e vinte e seis (26) dimensões. A multidimensionalidade veio para fazer parte de todas as teorias físicas do século XX, da qual, jamais saíram.

Inspirados por estes fatos é que decidimos pesquisar esses elementos geométricos dimensionais, em dimensões inferiores e superiores à dimensão três e a descrição de dimensões fracionárias até a dimensão quatro, com a finalidade de evidenciar as potencialidades da geometria das dimensões a serviço do ensino e oferecer a oportunidade de se entrar em contato com modelos que mostram uma geometria mais próxima da realidade na Matemática.

Estudamos, por meio de reconfigurações mereológicas, desconstruções dimensionais ou instrumentais de Duval (1995), as dimensões zero, um, dois, três, até a dimensão quatro, ressaltando todas as variáveis dimensionais, como sejam, Vértice, Aresta, Face, Sólido e Hipersólido ("*VAFSH*") reverberadas nas figuras de três famílias dimensionais distintas e importantes da geometria, as famílias, quadrado-cubo, triângulo-tetraedro e círculo-esfera.

Para as dimensões fracionárias, estudamos as dimensões entre zero e um, entre um e dois, entre dois e três, e entre três e quatro.

As dimensões inteiras superiores à dimensão quatro, a visualização fica mais difícil, portanto, por não podermos estudá-la na forma geométrica figural, passamos a estudá-la na forma de sua extensão discursiva, em tabelas e equações, mantendo o registro da língua materna, o registro tabelar e o registro algébrico, ou seja, por intermédio de suas induções discursivas das argumentações, as tabelas dimensionais até à D-ésima dimensão e as equações recorrentes para as variáveis dimensionais.

A partir da definição de figuras geométricas semelhantes que se simetrizaram, para cada um dos conjuntos de figuras fundamentais, define-se o Conjunto de Elementos Geométricos Entrelaçados Dimensionalmente (CEGED), ou Família Dimensional, cujas fórmulas recursivas das variáveis dimensionais, se mostraram diferentes para cada família, mas válidas em qualquer dimensão. No entanto, houve uma Equação que se manteve inalterada em todas as Famílias geométricas, que como veremos foi a Equação Geométrica das Dimensões.

Assim, definimos o CEGED 1 ou Família Dimensional 1, com os elementos geométricos que seguem a ordem da Família quadrado-cubo, o CEGED 2 ou Família Dimensional 2, com os elementos geométricos que seguem a ordem da Família triângulo-tetraedro, e o CEGED 3, ou Família Dimensional 3, com os elementos geométricos que seguem a ordem da Família círculo-esfera.

Os principais referenciais teóricos adotado nesta pesquisa é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (DUVAL, 1995) e o sua teoria das Reconstruções Dimensionais, adotando a metodologia das Reconfigurações Mereológicas Heurísticas e Reconstruções Instrumentais (DUVAL, 2005). Pois, de acordo com Duval (DUVAL, 2005), o desenvolvimento que deve ser adotado como um gesto reflexivo para fazer geometria é decompor qualquer forma, que reconhecemos em um conjunto de traçados ou em qualquer figura inicial, de uma configuração em outras unidades figurativas

do mesmo número de dimensões ou um menor número de dimensões. Nesta perspectiva, Duval (2005, p.17) assevera que

A característica de figuras geométricas, em comparação com todos os outros tipos de figuras, é que elas podem ser construídos usando instrumentos e principalmente instrumentos produtores de traçados D1/D2. A produção de cada traçado corresponde a uma instrução formulável (as "figuras telefonadas") ou formulada (no menu de um *software*) e a mobilização de uma propriedade geométrica com relação ao instrumento usado (compasso, régua não graduada, regra graduada...). Em outras palavras, a atividade de construir figuras, quase sempre configurações de forma 2D/2D ou 3D/2D, depende de sua desconstrução em traçados 1D/2D e 0D/2D. Mas nesta atividade de desconstrução toda a atenção está na reconstrução, porque a desconstrução de formas 2D/2D é feita automaticamente pelo instrumento, enquanto a reconstrução exige que o foco seja na ordem das instruções dadas para as operações das construções a realizar.

Assim, neste entendimento, Duval sugere o ensino da Matemática através de Reconstruções dimensionais, a partir das Reconfigurações Mereológicas Heurísticas, e Reconstruções Instrumentais, da qual dedicamos sua aplicação no desenvolvimento dessa pesquisa no ensino da Geometria das Dimensões.

Em exemplo análogo ao que iremos desenvolver neste trabalho, que é o das dimensões fracionárias, não poderíamos deixar de citar o exemplo das derivadas fracionárias, citado de forma histórica no parágrafo abaixo. Esta citação não tem relação com nosso desenvolvimento de pesquisa das dimensões fracionárias, no entanto, se adéqua a uma analogia de que não é necessário existir apenas as derivadas inteiras ou apenas as dimensões inteiras.

Conhece-se bem na Matemática, as expressões das derivadas e integrais de ordem inteira, $D^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ são aquelas que chegam facilmente ao nosso conhecimento. No entanto, pouco são conhecidas, em teoria e aplicações, os estudos matemáticos das derivadas e integrais fracionárias, $D^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)$, sendo α um número fracionário. A primeira ocorrência do conceito de derivada fracionária foi encontrada em uma carta escrita por Guillaume l'Hôpital (1661-1704,43) e enviada a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716,70) em 1695. E foi somente em 1832 que Joseph Liouville (1809-1882,73) publicou seus primeiros fundamentos em um *paper*. Friedrich Gauss, Cauchy, Laplace e Riemman também introduziram novos conceitos. E foi somente nos anos setenta que Matthew Caputo trouxe à tona novamente tais desenvolvimentos teóricos. As aplicações práticas do cálculo com derivadas e integrais fracionárias vieram em estudos aplicativos, a partir dos anos noventa em modelagem matemática, movimentos

de automação e controle, robótica, PID, ciência da computação, eletrônica etc. No entanto, não encontramos tais teorias em livros, ou em cursos, mas somente em *papers* (SANT'ANNA, 2009).

Este é um exemplo de que da mesma forma que podem existir derivadas fracionárias, podem também existir dimensões fracionárias como delinearemos nesta pesquisa, que surgiram a partir dos conceitos das geometrias não euclidianas.

Discernindo certos elementos de uma figura geométrica, identificamos que esses elementos acabam por pertencer prioritariamente a uma certa dimensão fracionária, uma vez que possuem penetração em outras dimensões. Assim, com a finalidade de contribuir com a compreensão científica desses objetos, apresentamos o objeto matemático das dimensões fracionárias, seus elementos associados, e os cálculos para estabelecer suas definições em escala crescente. Este é um dos objetivos secundários desta pesquisa.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e seus construtos enriquecem as diferentes visões da geometria. Propusemos, como base no desenvolvimento de elemento geométrico, uma alternância entre quatro tipos de Registros de Representação Semiótica: o Registro Figural, o Registro Discursivo da Língua Materna, o Registro Tabelar e o Registro Algébrico.

Em cada um desses elementos, como sugere Duval, fizemos o desenvolvimento de diversas formas de visualização distintas, das Reconstruções Dimensionais, seja por mudança nas Reconfigurações Mereológicas Heurísticas com diferentes cortes de figuras, seja por diferentes Reconstruções Instrumentais, ou também a Reconstrução a partir de diferentes dimensões inferiores, para se reconstituir a nova dimensão, que iremos detalhar para cada um desses elementos no desenvolvimento da Geometria das Dimensões.

Essa variabilidade de visualizações distintas objetiva propiciar condições favoráveis ao ensino, dando a cada estudante, a oportunidade do entendimento distinto, na mais adequada possibilidade de adaptação pessoal naquele tipo de visualização distinto de mudança de dimensão. Uma variação na visualização indica uma mudança no tipo de representação distinto, existente e possível.

As demonstrações realizadas pelos matemáticos Poincaré (1906) e Minkowski (1908), no início do século XX, revelam que os fenômenos físicos se comportam em uma dimensão espacial adicional e por natureza essencialmente quadridimensional em sua geometria. A relatividade espacial tinha o comportamento do que se denominou de uma

geometria quadridimensional pseudoeuclidiana. Justificaremos o surgimento desse nome no parágrafo seguinte. Foi a quadridimensionalidade que levou a uma maior compreensão do eletromagnetismo e da teoria da relatividade especial no início do século XX.

A geometria euclidiana pode ser extrapolada para uma geometria na quadridimensionalidade. No entanto, na quadridimensionalidade do continuum espaço-tempo que surgiu na relatividade, a quarta dimensão espacial se caracterizava por ser o produto do tempo pela velocidade da luz, em uma variável complexa, $dw = i c dt$, ou seja, quando elevada ao quadrado, ela ficava negativa, $dw^2 = -c^2 dt^2$, e este fato fez com que se definisse o continuum espaço-tempo ser uma geometria pseudoeuclidiana, uma vez que a geometria euclidiana teria a distância entre dois pontos com todas as suas variáveis positivas, $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2)^{1/2}$. Estes efeitos acabaram por ser registrados, no chamado tensor métrico do espaço ($g_{\mu\nu}$), nos estudos da quadridimensionalidade do espaço físico.

A teoria da relatividade geral posteriormente necessitou relatar objetos, variáveis e estruturas de representações físicas encurvadas em uma dimensão espacial três, encurvada para uma quarta dimensão, era uma dimensão fracionária que aparecia no espaço de grandes dimensões como no caso do espaço interplanetário. Necessitou-se assim relatar a existência de um espaço de dimensão fracionária entre a dimensão três e a dimensão quatro, de modo a encurvar o espaço tridimensional, ao modo da Geometria Riemanniana quadridimensional, no caso em uma Geometria de dimensões, como nas imediações do nosso Sol.

No caso da Geometria em dimensões da ordem do nosso Universo, dependendo da densidade de matéria nele contida, a Relatividade Geral prevê que sua curvatura espacial poderia resultar na possibilidade de três formas distintas: (1) o de ser de uma Geometria Esférica, tipo Riemanniana resultando em um Universo finito e fechado, mas sem limites; ou (2) o de ser de uma Geometria Hiperbólica, ao modo da Lobachewskiana, o que levaria a uma Geometria do Universo infinita e aberta; ou eventualmente, (3) o de um Universo Euclidiano ou seja, infinito e desprovido de curvatura. Estes aspectos levam o Universo a depender da quantidade de sua densidade de matéria.

A densidade do Universo que se calcula na atualidade está perto da densidade crítica. Se com medições futuras, descobrir que o Universo tem uma densidade maior que essa densidade crítica, ele é Riemanniano, finito e fechado. Se o Universo tiver uma

densidade maior que a crítica, ele é Lobatviskiniano, infinito e aberto. E se o Universo tiver uma densidade igual à densidade crítica, ele será Euclidiano, ou seja, infinito e “plano”, portanto, sem curvatura.

Posteriormente, as aplicações de tensores ou vetores quadridimensionais, proposta por Minkowski, levou ao surgimento da Teoria Quântica de Campos em 1925, pelos físicos, Max Born, prêmio Nobel de 1924, e Pascual Jordan. Levou posteriormente também à chamada Teoria Quântica Relativística proposta em 1928, por Paul Dirac, prêmio Nobel de Física de 1933.

Nesta pesquisa, nós apoiamos nos estudos da Educação Matemática, principalmente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, e em seu modelo dos Elementos Cognitivos da Aprendizagem da Geometria, considerando diferentes tipos de desenvolvimento de Visualização da Geometria, a diferenciação de raciocínios e a coordenação de seus funcionamentos, e principalmente o Modelo das Reconstruções Dimensionais. (DUVAL, 1995), para tecer algumas reflexões sobre como introduzir o ensino da Geometria das Dimensões de forma didaticamente interessante no ensino médio. Como sugere Duval, este ensino deve ser realizado chamando aos estudantes os elementos geométricos em seus métodos de reconstrução e desconstrução dimensionais.

Valemo-nos também da ideia de analogia. O uso da analogia foi utilizado, uma vez que no estudo das diversas dimensões, sempre ocorrerá comportamentos geométricos que, ao se passar de uma dimensão para a outra, eles aparecerão com comportamentos semelhantes, mas não iguais, guardadas as devidas proporções, ou seja, serão análogos. Assim iremos estabelecer quatro Princípios Analógicos das Dimensões, que aparecerão de forma semelhante em todas as dimensões. Resultará em uma forma de evolução complementar à pesquisa, o que resultará na previsão de comportamentos das equações recursivas que prevê o número de variáveis dimensionais geométricas até a D-ésima dimensão.

Desde a época de Tales, Demócrito, Parmênides, Platão, Aristóteles, caminha-se no desenvolvimento da ciência, do ensino, do aprendizado, com o uso matemático e da Analogia como elementos de percepção das simetrias, das semelhanças e suas combinações diversificadas para acelerar o desenvolvimento epistemológico. Desenvolveremos diversos parâmetros do uso da Analogia, no próximo capítulo.

Aparecerá ao longo de todo o crescimento das Dimensões, e válida para cada elemento geométrico em qualquer dimensão, uma relação de simetria entre as variáveis dimensionais, denominada de Equação Geométrica das Dimensões, que relaciona e leva a uma lógica sempre obedecida e válida para qualquer dessas figuras, de modo a apresentar um valor sempre igual à unidade, como veremos.

As complexidades geométricas dimensionais se criam a partir da unidade do ponto, e dele podem surgir qualquer dimensão e se multiplicar dimensionalmente em múltiplas configurações geométricas.

Por intermédio de cada figura geométrica formada, fechada e convexa, e a cada nova dimensão, a relação entre as variáveis dimensionais na Equação Geométrica das Dimensões, sempre leva à unidade. Esta será ao longo desta pesquisa uma das constatações mais interessantes a que chegamos, e será compreendida ao longo do desenvolvimento desse trabalho.

A relação dessas características observáveis e geométricas fundamentais mantém tal entrelaçamento entre si, como se cada uma soubesse da outra, e cada uma cuidasse de seus elementos relacionantes laterais, para surgir na natureza, não importando a dimensão em que apareçam para retornar em conjunto à unidade, levando a uma simetria tamanha ou lei universal da matemática, como se uma estivesse entrelaçada à outra, numa relação de acumpliciamento conjunto, para qualquer dimensão.

Ao longo do desenvolvimento dessa pesquisa nos impressionamos com a lógica do entrelaçamento de existência das figuras geométricas dentro das leis equacionais da geometria das dimensões na natureza e de como todas as criações estão conectadas em existência conjunta entre si. Isto se revelará à medida que percorrermos este caminho de estudo.

No **Capítulo 2** estabelece-se as questões de pesquisa, a metodologia, e abordagens teóricas utilizadas no desenvolvimento da Geometria das Dimensões. Estabelecemos questões fundamentais e secundárias de pesquisa, assim como o alcance previsto de objetivos gerais e específicos para o ensino.

Tecemos reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que utilizaremos ao longo desse trabalho em inúmeros estilos de representação para facilitar o ensino e o desenvolvimento dessa pesquisa.

Participamos com o modelo sugerido pelos trabalhos de Duval relacionados à Desconstrução de forma e às Reconstruções Dimensionais em geometria. As metodologias utilizadas no ensino da Geometria como as Reconfigurações Heurísticas Mereológicas, que permitem realizar a subdivisão do todo em partes específicas, elementos geométricos fundamentais para o estudo da Geometria, mostram-se as potencialidades das Reconstruções Dimensionais e Reconstruções Instrumentais na visualização e produção de figuras.

Utiliza-se e expõem-se as potencialidades do uso da Analogia no desenvolvimento da Geometria das Dimensões, uma vez que as características se repetem em cada nova dimensão assim como para a reconstrução de cada figura.

Montamos como aplicação do ensino da Geometria das Dimensões, apoiando-nos na Teoria das Situações Didáticas (TSD), o que denominamos de leis de simetria dimensional ou Princípios Analógicos Dimensionais que poderão ser observados no ensino, com os alunos, a medida que trabalharem os jogos montados para descoberta grupal dos meios de crescimento dimensional.

No **Capítulo 3**, fizemos uma revisão bibliográfica ligada à Geometria das Dimensões, analisando o desenvolvimento das dimensões, sua evolução, abordagens, a quadridimensionalidade ao longo da história, e as mudanças nas perspectivas de visualização.

Analizamos o Teorema do principal matemático que trabalhou com dimensões no século III, o Teorema de Pappus (século 3), que propôs dois teoremas, um para reconstruir figuras partindo da dimensão um para a dimensão dois, e o outro para reconstruir figuras partindo da dimensão dois para a dimensão três.

Pappus propôs que a medida da área (bidimensional) (2D) de uma figura poderia surgir e ser calculada por meio da rotação de uma linha (unidimensional) (1D). E que a medida do volume (tridimensional) (3D) de uma figura poderia ser surgir e ser calculada se partíssemos de uma área (bidimensional) (2D) em rotação. Para obter isso, Pappus teve que aprender a reduzir cada figura geométrica a um único ponto (zerodimensionalidade) (0D) (unidade do “divino”), o que chamou de centro geométrico ou centroide da figura.

Com apenas o produto do comprimento da linha L , que rotacionada em torno de um eixo, de um ângulo (em radianos), com a distância do eixo de giro até a linha L , (r),

pode-se obter a medida da área da superfície gerada. Para reduzir a linha à um único ponto, tem-se que fazer uma desconstrução das formas geométricas, para que o ponto possa representar o centro geométrico dessa linha no espaço. O produto desses fatores gera uma fórmula matemática simples, para calcular a medida da área utilizando o crescimento dimensional.

Analogamente, em segunda parte do teorema, Pappus estabelece que superfícies sendo rotacionadas geram sólidos, cujo cálculo da medida do volume surge do produto de três fatores, a medida da área (A) da figura rotacionada, o ângulo de rotação (θ) e a distância do eixo de rotação até o centro geométrico da figura ($\bar{r}$). A posição pontual de uma figura geométrica é a média ponderada de todas as suas posições em espalhamento no seu espaço dimensional, essa foi uma grande descoberta matemática feita por Pappus.

Por analogia e seguindo os objetivos desta pesquisa, usando o Princípio da Analogia como Método, fizemos a extrapolação do Teorema Dimensional de Pappus para a passagem da dimensão zero (0D) para a dimensão um (1D), e também sua extrapolação da dimensão três (3D) para dimensão quatro (4D), como veremos no **Capítulo 3**.

Realiza-se no **Capítulo 2**, uma revisão bibliográfica em vários livros sobre o assunto das dimensões como o livro “*Flatland*”, de Edwin A. Abbot, “*Time Machine*”, de H. G. Wells; “*Select papers in fourth dimension*” por Charles Howard Hinton, século XIX; que influenciaram muitos matemáticos, artistas e cientistas do século XIX e XX, como a pintura do Christus Hiperbólicos de Salvador Dalí; o livro de Michio Kaku, “*Hiperespaço, uma odisséia científica através de universos paralelos, empenamentos do tempo e a décima dimensão*”, e outros.

Abordou-se a famosa palestra proferida pelo eminente matemático Hermann Minkowski definindo o cone de luz da quadridimensionalidade do continuum espaço tempo que influenciou toda a Física do século XX. Desenvolveu-se os elementos da Geometria Plana, de curvatura zero, de Euclides, definiu-se a Geometria de Lobachevsky-Bolyai ou Geometria Hiperbólica, de curvatura negativa e a Geometria Riemanniana ou Geometria Esférica, de curvatura positiva.

Discute-se aqui sobre as formas de apresentação da palavra dimensão, como são usados os conceitos ligados à ela, suas formas de manifestação, e finalmente chegou-se à forma de utilização das dimensões em seus termos e conceitos adequados nesta pesquisa,

para o desenvolvimento e aplicação do ensino no discernimento das Dimensões na Geometria.

No **Capítulo 4**, enfocamos a Geometria das Dimensões, utilizando as metodologias dimensionais adequadas desenvolvidas por Duval (DUVAL, 2005), mais especificamente as Reconstruções Dimensionais, Reconfigurações Mereológicas e Reconstruções Instrumentais. Analisamos cada elemento geométrico da dimensão zero à quatro, em quatro tipos de visualizações distintas.

A importante quadridimensionalidade é detalhada para o hipercubo, o hipertetraedro e a hiperesfera.

Buscamos os principais elementos em cada dimensão, em famílias geométricas dimensionais, sua preparação para a reconstrução de cada nova dimensão, e centrando cada elemento geométrico estudado, em diferentes tipos distintos de visualização na produção de Reconstruções Dimensionais seja partindo de diferentes Reconfigurações Heurísticas Mereológicas, seja produzindo Reconstruções Dimensionais Instrumentais distintas, inspirados em Duval (2005).

Consideramos, em caráter complementar, o desenvolvimento das dimensões fracionárias entre as dimensões 0 e 1, entre 1 e 2, e entre 2 e 3, em analogia às geometrias não euclidianas. Discutimos também as passagens dimensionais por meio da torção de uma dimensão em relação à outra, na transformação de figuras em suas formas espaciais, como é o caso da fita de Möbius.

Assim a partir do capítulo seguinte, estabelece-se os elementos essenciais da Metodologia e da Teoria e Metodologia de Duval para o desenvolvimento dessa pesquisa centrada na Geometria das Dimensões.

CAPÍTULO 2 - METAS, METODOLOGIA E REFERENCIAIS TEÓRICOS DE PESQUISA

“Eduquemos as crianças e não será preciso castigar os homens”.

Pitágoras de Samus (570-495, 75)

“Ajudem os nossos semelhantes a levantar sua carga, porém não a levá-la”.

Pitágoras de Samus (570-495, 75)

“Nossa vida se rege pela liberdade, não só na política, mas também em nossa mútua tolerância na conduta pessoal.”

Péricles de Atenas (595-429, 76)

*“Quatro características correspondem a um juiz:
escutar cortesmente, responder sabiamente,
ponderar prudentemente e decidir imparcialmente.”*

Sócrates de Alopec (470-399, 71)

Neste **Capítulo**, delinearemos os mecanismos de nossa pesquisa sobre a Geometria das Dimensões, assim como os referenciais teóricos utilizados e sua metodologia. Caracterizamos nossa questão de pesquisa e os objetivos que pretendemos alcançar.

Caracterizamos o uso sugerido por Duval (2005) das visualizações geométricas dimensionais, por meio de Reconstruções Dimensionais utilizando-se de Reconfigurações Heurísticas Mereológicas, ou então Reconstruções Instrumentais. Ressaltamos a metodologia de como Duval sugere a forma com que estas construções podem ser realizadas passando de uma dimensão à outra.

Veio a necessidade de avaliar o modelo de Aristóteles do uso da Analogia, que utilizamos extensivamente, para validar as ocorrências semelhantes, mas não iguais, de cada dimensão em ordem crescente. Recorremos também ao desenvolvimento e aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, alternadamente em quatro Registros que explicitaremos mais adiante.

Trabalhamos nesta pesquisa, centrados em como seria o estudo da Geometria das Dimensões a partir da TSD, Teoria das Situações Didáticas, que apesar de não publicarmos o Capítulo sobre esta metodologia de Ensino, ela se transformou em uma de nossas pautas metodológicas essenciais ao longo de todo o desenvolvimento dessa pesquisa. Isto auxiliou muito de sobremaneira em todo o desenvolvimento de direção de nossa forma de pesquisar

os elementos das Dimensões na Geometria, influenciando nosso desenvolvimento para o ensino e a aprendizagem dessa geometria.

2.1 - QUESTÕES DE PESQUISA

Vamos estabelecer agora de forma direta e formal as questões desta pesquisa que já comentamos de várias maneiras anteriormente.

Esta pesquisa tem como objetivo propor uma reflexão didático-teórica sobre a Geometria das Dimensões apoiando-se na **Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)**, a qual utilizamos preferencialmente os **Registros Figural Geométrico, o Discursivo da Língua Materna, o Tabelar e o Algébrico** (DUVAL, 1995), e especialmente os elementos de desenvolvimento crescente das dimensões, nos utilizamos da metodologia de Duval, que segundo ele, estar seria a melhor forma de visualização geométricas pelos estudantes, que é a **Reconstrução Dimensional por meio de Reconfigurações Mereológicas Heurísticas e Reconstruções Instrumentais** (DUVAL, 2005).

Como questões secundárias de pesquisa, temos:

- 1) Como extrapolar para dimensões inferiores, o método das Dimensões Fracionárias, de forma análoga à criada pela Relatividade Geral e pelas geometrias não euclidianas, em dimensões menores que três, ou seja, dimensões entre 0 e 1, 1 e 2 e 2 e 3?
- 2) Como traduzir sob o ponto de vista do ensino o uso das dimensões para produzir o efeito de transformar uma figura espelhada em sua não espelhada ou vice versa, usando o efeito de torção da dimensão inferior na dimensão superior ao modo da Fita de Möebius, que ocorre da dimensão 2 (2D) para a 3 (3D) e realizá-la também da dimensão 3 (3D) para a 4 (4D)?

No próximo item, buscamos os caminhos metodológicos que permitem alcançar as metas de nossa pesquisa.

2.2 - METODOLOGIAS DE PESQUISA

O mecanismo de pesquisa possui um conjunto de operações sucessivas e distintas, mas que mantém uma interdependência. Com a finalidade de coletar informações

sistemáticas em uma determinada direção, sobre um determinado assunto de pesquisa, necessita-se de algumas das seguintes diretrizes: um fenômeno observável, um assunto a ser desenvolvido, um modelo epistemológico de referência representativo, um modelo epistemológico vigente utilizado, um modelo epistemológico proposto, uma analogia de assuntos correlatos, registros de representação semiótica distintos como Registro Figural, Discursivo da língua materna, Tabelar, Algébrico, Gráfico, Instrumental, etc., questões principais e secundárias de pesquisa, metodologia adotadas com clareza, referenciais teóricos de base, uma classificação organizada, uma lógica percebida, especulações investigadas, formas distintas de abordagem, introdução de novas variáveis, proposição de modelo experimental, redução de dados, análise de dados, enquadramento dos dados nos modelos vigentes, etc.

O trabalho de pesquisa reúne diferentes competências como organização pessoal, busca de fontes seguras, contextualização, sistematização, disciplina pessoal, eliminação de versões obscuras, domínio de técnicas especializadas, proposição de inovação, consulta à documentos, mudança de instrumentalização, enfrentamento de situações, realização de experimentos, produção de especulações criativas, justificação de fatos e acontecimentos, permissão de inferências, condução de previsões, realização de cálculos, construção de gráficos, implementação algébrica, condução geométrica, organização de blocos de pensamentos, mudança de registros de representação semiótica.

Chizzotti (1991) propõe quatro fases para organização de uma pesquisa:

1ª) Fase. A determinação do problema. a) Seleção do assunto. 2) Definição e seleção do problema de pesquisa. 3) Reunião e seleção de documentos sobre o assunto-problema a ser pesquisado; 4) Revisão da literatura sobre o problema de pesquisa.

2ª) Fase. A organização da pesquisa. a) Descrição do problema de pesquisa em relação a um referencial teórico. b) Formulação de hipóteses de trabalho. c) Determinação de escolhas para a população de pesquisa e para experimentação em uma coleta e completude de dados. No caso desta pesquisa, realizamos uma pesquisa didático-teórica para revelar os elementos dimensionais da geometria, em que não tínhamos modelos epistemológicos de referência (MER), por isso o interesse de construí-lo para aperfeiçoamento e aplicação prática posterior, preparando-o para o aprendizado dos estudantes.

3ª) Fase. Execução da Pesquisa de Campo. a) Estabelecer um programa de trabalho. b) Delinear os dados e planificá-los na forma de desenvolvimento de pesquisa.

4ª) Fase. Redação do texto. a) Redigir o texto, explicando o fenômeno observado. E pode-se ainda acrescentar: b) Redigir quantas vezes for necessário novamente, aperfeiçoando o texto, sua clareza, realizar analogias, dar indicações de caminhos, estabelecer críticas, notar observação das formas e leis de formação, inovar novas formas de visão, produzir esclarecimentos diversos, acrescentar detalhes, variar Registros, figuras, desenhos, gráficos, quadros lógicos, dados, tabelas, equações, melhorar a estética de apresentação, melhorar a clareza a cada leitura, realizando sempre análises pertinentes.

Nossa pesquisa é de tipo qualitativo com enfoque bibliográfico-teórico, pois buscamos tecer reflexões sobre a possibilidade de fazer o ensino vivenciar os elementos Dimensionais da Geometria, apoiando-se na TRRS, na metodologia de Duval, sobre as Reconstruções Dimensionais e na literatura ligada às Dimensões na Geometria.

Nesta pesquisa, como havíamos falado, nos utilizamos a **Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)**, desenvolvendo e alternando entre quatro tipos de Registros de Representação Semiótica, primeiro o **Registro Figural**, segundo o **Registro Discursivo da Língua Materna**, o **Registro Tabelar** e o **Registro Algébrico**.

Como metodologia de pesquisa para o desenvolvimento da Geometria das Dimensões mantivemos o método sugerido por Duval, iniciando em uma dimensão inferior, produz-se uma metodologia para sua reconstrução em uma dimensão superior, apoiando-se em uma Reconfiguração Heurística Mereológica ou uma Reconstrução Instrumental ou uma Reconstrução partindo de uma dimensão inferior.

Em um primeiro procedimento, separa-se toda a dimensão inferior, infinita, e realiza-se múltiplos cortes, continuados, produzindo-se a partir de toda essa dimensão, infinitas figuras geométricas, em uma completa **Reconfiguração Heurística Mereológica dessas partes**, como sugere Duval (2005), mantendo-as na mesma dimensão, de onde para cada figura diferente em criação crescente dimensional, se faz cortes diferentes, como veremos.

Em um segundo procedimento, sempre recorrente, se acrescenta em todas estas partes cortadas da dimensão inferior um incremento infinitesimal, na direção ortogonal nova a ele, em todos estes cortes, direção dimensionalmente superior, na direção da nova dimensão, mantendo-se as partes ainda na dimensão de origem.

Em um terceiro e último procedimento metodológico, já se está preparado para a realização da Reconstrução Dimensional, e para isso, coloca-se cada uma das figuras ligando-se os seus incrementos infinitesimais das infinitas figuras de dimensão inferior,

parte a parte, em direção da nova dimensão. Reconstruindo-se assim a nova estrutura montada em uma dimensão superior.

Em um procedimento metodológico adicional, pode-se realizar diretamente a Reconstrução dimensional por meio de uma Reconstrução Instrumental.

Aplica-se o uso da **Analogia**, para relacionar partes aparentemente disjuntas, dos elementos do modelo de semelhança em dimensões distintas, e relacionar proporcionalmente seus elementos semelhantes em cada nova dimensão. Com esse procedimento de semelhança, delinea-se os Princípios Analógicos que se repetem analogamente em cada nova dimensão distinta.

Utiliza-se como técnica e procedimento de realização dessa pesquisa, o método utilizado por Euclides dos Elementos, analisando cada figura geométrica, sua construção, cada dimensão suas características e propriedades, cada elemento analisado com profundidade, de forma separada.

Uma das eficiências da didática com o ensino é a constante Recomposição Diversificada da Estética do Saber, e com essa preocupação pela diversificação na Geometria, por isso, nos aplicamos, em diversificar quatro formas diferentes de visualização de se realizar a Reconstrução Dimensional: ou variando os tipos de Recomposições Heurísticas Mereológicas, ou produzindo-se uma Reconstrução Instrumental, ou partindo de uma dimensão ante inferior para a reconstrução, etc.

Buscamos durante essa pesquisa analisar, as inferências e consequências laterais surgidas com as diferenças dimensionais, como as quiralidades (espelhamentos), nos intercâmbios de superfície, como a fita de Möbius e a garrafa de Klein, que com uma torção de uma superfície na tridimensionalidade, é possível fazer-se relacionar e interligar-se diferentes dimensões, em um simples “experimento matemático” como este da torção dimensional, mantendo-se em duas dimensões ao modo da Fita de Möbius. No entanto, se sairmos do estado matemático de que a superfície tem espessura zero, haverá uma distância dimensional entre os dois elementos que estão opostos depois da torção, apesar da proximidade. Assim, um efeito análogo, irá ocorrer para as quiralidades tridimensionais, que se interligam e se transformam sob o efeito de uma torção em uma quadridimensão.

Assim também, inspirados nas geometrias não euclidianas, de onde se sai das linhas retas e das superfícies planas Euclidianas, e se penetra, nas linhas curvas, nas superfícies curvas, nos espaços curvos, de onde se tira inspiração para desenvolver as dimensões fracionárias, nesta pesquisa, em dimensões fracionárias inferiores à dimensão

fracionária de 3 para 4, usa-se também a inspiração surgida a partir da teoria da gravitação da Relatividade Geral em que superfícies tridimensionais podem ser encurvadas para uma quarta dimensão.

2.3 - REFERENCIAIS TEÓRICOS

As abordagens teóricas nesta pesquisa têm o objetivo de auxiliar no estudo das dimensões inteiras e fracionárias da geometria das dimensões. Adotamos um método análogo ao de Aristóteles (2003) que estabelece em seus livros do “Metafísica”, que toda ideia, objeto, modelo, pode ter a ele associadas quatro causas fundamentais, como sejam:

- (1) Causa **material**: as matérias a qual este objeto pode ser feito
- (2) Causa **formal**: as formas as quais este objeto pode assumir
- (3) Causa **eficiente**: as maneiras como este objeto pode servir para ajudar
- (4) Causa **final**: as razões ou finalidades para este objeto existir

De todas essas causas de forma genérica, para o caso da Matemática, e especificamente da Geometria, utilizamo-nos da causa **formal** (2), enunciada por Aristóteles, agregando quatro tipos distintos de Visualizações Geométricas Didáticas, tipos ou representações distintas de Reconstruções Dimensionais, de acordo com Duval (2005), que sugere realizá-las por meio de diferentes Reconfigurações Mereológicas Heurísticas, ou por meio de Reconstruções Instrumentais, ou mesmo partindo de dimensões mais inferiores do que a anterior.

Usaremos, também, o método dos Elementos da Geometria de Euclides, separando e descrevendo cada elemento geométrico, propondo quatro tipos de Visualização diferentes desse elemento, por meio de Reconstruções Dimensionais partindo de Reconfigurações Mereológicas da dimensão anterior ou tipos distintos de Reconstruções Instrumentais, ou mesmo produzindo uma reconstrução a partir de uma dimensão inferior qualquer com a finalidade de se ter múltiplas visões de reconstruções distintas.

Como abordagens teóricas, que utilizamos nesta pesquisa, podemos delinear abaixo.

2.3.1 - A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS)

Fizemos a aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1993), a qual exploramos a cada passo desse trabalho Registros de Representações diversos da Geometria das Dimensões, mais especificamente, o Registro Figural, o Registro da Língua Materna, o Registro Tabelar e Registro Algébrico. No que se refere aos elementos dimensionais, fizemos as Reconstruções Dimensionais, começando pelas Reconfigurações Heurísticas Mereológicas produzindo variações em quatro formas diferentes dessas Reconstruções. Duval (2005, p.5) afirma que “*A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica.*”. No caso de nossa pesquisa, faremos o processo inverso a que Duval faz em seu trabalho, que é o da Desconstrução para a Reconstrução. Como pretende-se nesta pesquisa ascender a uma dimensão D qualquer, a partir de uma dimensão inferior, aplicaremos a metodologia de Duval das Reconstruções Dimensionais. Duval fez desconstruções de 3D para 2D, de 2D para 1D, e de 1D para 0D.

Aplicaremos para produzir as Reconstruções Dimensionais, o método sugerido por Duval, de aplicação de diferentes visualizações variando a forma de abordagem, que de alguma maneira reconstitui novas Estéticas do Saber Geométrico, ou seja, ora variando tipos diferentes de Reconfigurações Mereológicas Heurísticas, ora realizando Reconstruções Instrumentais distintas ora produzindo uma reconstrução partindo de diferentes dimensões anteriores. Sabemos que cada estudante, em seu aprendizado pessoal, assimila de forma distinta, maneiras variadas de representação facilitada por abordagens e enfoques, ou seja, maneiras outras de variação destas abordagens na Visualização Geométrica que sempre enriquecem a didática.

2.3.2 - Uso da Analogia

Sugerido por Aristóteles como elemento de argumentação é uma ferramenta de alto poder de criação, inteligência, inovação, visão, inter-relação, ensino e aprendizagem. Desenvolvemos suas características no item 2.6 deste Capítulo. É um elemento que auxilia de sobremaneira, principalmente no assunto que desenvolvemos das dimensões. No caso da Geometria das Dimensões é como se tivéssemos diversos universos de manifestação dessa Geometria, cada dimensão com um comportamento distinto. Portanto, como lidar com o relacionamento entre estas distintas dimensões? Quais são os funcionamentos que se

mantém de forma semelhante, e os que se modificam, guardando as devidas proporções? Quais elementos comuns são observados nestas passagens, notando leis de formação analógica, leis de simetria, complementaridade e unidade nestas passagens, assim essas analogias que necessitam ser observadas? Este estudo buscou isolar esses comportamentos semelhantes das distintas dimensões. O próprio ato de pensar é uma analogia, relacionamos o que vemos e participamos no exterior com padrões semelhantes no nosso interior com aquilo que já vivenciamos. A analogia participa do ato de pensar constantemente, por isso somos superiores às máquinas.

2.3.3 - Separação do Saber em Elementos

Inspiramo-nos no método da separação da Geometria em Elementos, método utilizado por Euclides. Fazemos a separação de cada elemento da Geometria das Dimensões, destacando propriedades, deduzindo leis de formação, produzindo distintas reconstruções por reconfiguração mereológica, realizando reconstruções instrumentais, formas distintas para essas reconstruções. O conhecimento, por meio de sua partição em Elementos, evidencia como esses elementos estão interligados e como são criados um a partir do outro.

2.3.4 - A Teoria das Situações Didáticas (TSD)

Desenvolvemos ao longo desse trabalho formas de se observar a Geometria, com o objetivo de se produzir trabalhos futuros, que facilitem o ensino das Dimensões na Geometria. Uma dessas formas, em nossa preocupação é a aplicação da Metodologia de ensino através da TSD, Teoria das Situações Didáticas (BROSSEAU, 2002). Um desses itens de importância, em que o Professor depois da aplicação dos jogos, necessitará para reduzir as dimensões aos seus elementos Institucionais, último momento dialético do método da TSD, e que nos preocupamos com esse momento, foi a da preparação para esta fase, de quatro Princípios Analógicos Dimensionais, que desenvolvemos mais adiante com esta finalidade.

2.3.5 - Visões em torno das Dimensões

Foi realizado ao longo dessa pesquisa uma série de revisões e acréscimos no tema da Geometria das Dimensões. Ao longo desse desenvolvimento obteve-se uma curiosa equação, a Equação Geométrica das Dimensões, que acrescenta uma nova variável

dimensional a cada dimensão e que curiosamente, resulta sempre igual à unidade para todas as figuras geométricas de qualquer dimensão analisada. Adaptou-se, com novas definições, também essa equação à família de figuras circulares.

Encontramos no século XVIII, uma equação parecida com a equação dimensional, mas não completa, e somente válida para o caso da terceira dimensão, que é a equação de Leonhard Euler (1707-1783), que relaciona três dessas variáveis dimensionais, Vértice, Aresta e Face, válida para as figuras tridimensionais convexas. (COURANT, ROBBINS, 2000)

$$V - A + F = 2.$$

Esta foi uma visão parcial de um modelo mais extenso, agora delineado no modelo da Geometria das Dimensões.

No desenvolvimento da Geometria das Dimensões, procuramos aplicar o método referenciado por Euclides, o dos Elementos, à maneira de ir buscando cada um dos Elementos parciais, um a um e classificando-os.

Procuramos aplicar neste trabalho a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, **TRRS**, no **Capítulo 4**, onde alternamos sua aplicação a cada passo, entre quatro tipos de Registros de Representação Semiótica, segundo Duval (2005), o Registro Figural, o Registro da Língua Materna, Registro Tabelar e o Registro Algébrico, e raramente usamos o Registro Gráfico, para generalizar nosso Modelo e suas Equações para qualquer Dimensão D. Ao final do Capítulo, demonstramos que estas Equações de Recorrência deduzidas valem até uma dimensão D-ésima qualquer inteira.

E em cada elemento de cada dimensão, acrescentamos formas de fixação da Teoria, apoiando-nos na **TSD**. No desenvolvimento desta aplicação, acrescentamos conceitos a partir de **institucionalizações** para cada Família de Figuras.

De forma surpreendente, o que classificamos aqui como sendo as Variáveis Dimensionais Geométricas (VDG) tão citadas dentro da Geometria, aparece aqui como elementos essenciais dentro da classificação Dimensional, com fortes e naturais valores de importante discernimento e regidas por equações universais como veremos. Acima da dimensão cinco, foram adotadas as tabelas e as relações algébricas de recorrência, válidas em cada família de figuras, com leis matemáticas bem estabelecidas. Das dimensões acima da dimensão quatro, ou seja, da dimensão cinco em diante, ficam mantidas as relações rígidas entre as VDG, apesar da perda do Registro Figural. Portanto, adotamos neste caso apenas os Registros discursivo, tabelar e algébrico, que se empobrece pela perda da

visualização geométrica. Mas, nos mostra que apesar de ainda não fazer parte de nossas visualizações geométricas, pode ser que um dia venha a fazer, apresentando suas variáveis crescentes e D-dimensionais quaisquer em existência matemática concreta e lógica.

Portanto ressaltamos aqui, que na dimensão zero, aparece a variável dimensional **Vértice, V**, e que ela reaparecerá em todas as figuras em dimensões superiores, pois a dimensão zero reverbera virtualmente todas as dimensões superiores. Na dimensão um, aparece a variável dimensional **Aresta, A**, que reaparecerá em toda a sua complexidade, inclusive em estados fracionários, em todas as figuras nas dimensões superiores. Na dimensão dois, aparece a variável dimensional **Face, F**, o plano como variável inteira ou fracionária, aumentando seu número de aparecimentos, à medida que a diversidade de figuras em dimensões superiores, se torna mais complexa. Na dimensão três, aparece a variável dimensional **Sólido, S**, que se multiplica em diferentes formas na dimensão quatro. E na dimensão quatro, aparece a variável dimensional **Hipersólido, H**, que se apresenta mais complexa. Já a dimensão cinco em diante que não podemos percorrer no Registro Figural, pode ser representada nos Registros discursivo, tabelar e algébrico para “enxergar” suas conformações.

Observamos as relações abaixo das dimensões, com seu elemento representativo, ou seja, sua variável dimensional geométrica associada.

Dimensão Zero $\leftrightarrow$ Ponto $\leftrightarrow$ Vértice (V)

Dimensão Um $\leftrightarrow$ Linha $\leftrightarrow$ Aresta (A)

Dimensão Dois $\leftrightarrow$ Superfície $\leftrightarrow$ Face (F)

Dimensão Três $\leftrightarrow$ Objeto $\leftrightarrow$ Sólido (S)

Dimensão Quatro $\leftrightarrow$ Hiperobjeto $\leftrightarrow$ Hipersólido (H)

Dimensão Cinco $\leftrightarrow$ Hiper-5-objeto $\leftrightarrow$ Hiper-5-sólido (H_5) ...

A Equação Fundamental da Geometria das Dimensões vale por analogia às dimensões maiores do que a dimensão quatro, até uma dimensão D qualquer, como mostraremos no **Capítulo 4**.

Debateremos as múltiplas definições de dimensão, no próximo Capítulo por meio de seus vários usos, oferecidas pela linguagem, indo até àquela que nos interessa sob o ponto de vista desta pesquisa da Geometria das Dimensões. A lógica e o desenrolar crescente e analógico das dimensões são nossos parâmetros em foco.

Parte-se do nível da dimensão zero, a partir dos modelos sugeridos por Duval (2005) para as Reconstruções Dimensionais, auxiliado das Reconfigurações Mereológicas Heurísticas, indo em construções crescentes até a dimensão quatro geometricamente. A partir da dimensão 5, 5D, passamos a debater apenas os números organizados em tabelas que obedecem às leis matemáticas e as Equações que relaciona e encontra esses números em qualquer dimensão, apoiando-se nos Registros Discursivo, Tabelar e o Algébrico.

Caminhamos nas analogias válidas na construção de dimensões tanto inteiras como fracionárias. Para a construção das dimensões fracionárias, apoiamo-nos principalmente nas geometrias não euclidianas, e nas aplicações na Astrofísica ligada à Gravitação na Teoria da Relatividade Geral que se utilizou da Geometria Riemanniana, que já havia trabalhado com dimensões até a dimensão quatro.

Existe o conceito de fractal, desenvolvido na matemática e aplicado principalmente no desenvolvimento da Teoria do Caos, o qual se atribuí a um objeto geométrico, que pode ser dividido em partes repetitivas e que essas partes, têm semelhanças, com o seu objeto original. Tais fractais têm uma infinidade de partes que são congruentes e similares, aparecendo em escalas diferentes, e apresentando-se repetidas vezes, de forma recorrente ou iterativa.

Este termo fractal, foi criado na década de setenta, pelo matemático franco-americano, Benoît Mandelbrot (1924-2010,86), nascido na Polônia, e foi inspirado no adjetivo latino, *fractus*, do verbo *frangere*, que significava quebrar. Este conceito está mais ligado ao conceito de Reconfiguração Mereológica de Duval.

Este conceito não atendeu a nossas expectativas de desenvolvimento para as dimensões intermediárias e que chamamos aqui de fracionárias, uma vez que nosso referencial de construção dessas dimensões fracionárias é outro. A maneira que a utilizamos é como um encurvamento para uma dimensão superior. Nós definimos as dimensões fracionárias nesta pesquisa, utilizando como referenciais teóricos, a Teoria da Relatividade Geral, ou seja, uma estrutura tridimensional, encurvada para uma quarta dimensão, e as Geometrias não Euclidianas. Por isso, desenvolvemos nesta pesquisa uma maneira lógica de obtenção das dimensões fracionárias em dimensões inferiores, abaixo de três dimensões, para suprir os estados intermediários entre as dimensões.

Para relacionar as diversas dimensões, recorreremos a Princípios Analógicos, apoiando-nos nos conceitos associados à Analogia, elemento essencial do pensamento, do

aprendizado, essencial ao uso da inteligência no ser humano e que foi descrito por Aristóteles em 350 a.C. (ARISTÓTELES, 2003, p. 222,375,376,476).

Como sugestão de trabalhos futuros, de aplicação para facilitar a aprendizagem e organizar o ensino, sugerimos a aplicação da estrutura da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Para isso já deixamos algumas Institucionalizações engatilhadas neste trabalho, através dos Princípios Analógicos.

Visando que o desenvolvimento da pesquisa aqui realizada, atinja os objetivos necessários para o estudo da Geometria das Dimensões, no que tange a estrutura de sua aplicação no ensino, almejamos que ela produza a partir desse projeto, um aumento na facilidade de aprendizagem aos estudantes do ensino básico.

2.4 - TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)

O psicólogo francês Raymond Duval (1937,-, 82), nascido em 1937, hoje com 82 anos, desenvolveu sua obra na década de 80, com vários artigos e com o primeiro livro sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para aplicação na Educação Matemática publicado em 1995.

Podemos representar um objeto matemático por meio de vários Registros de Representação Semiótica (RRS) diferentes, como por meio de um texto discursivo conceitual (registro da língua materna), por relações numéricas (registro numérico), por meio de uma figura (Registro Figural), um gráfico (registro gráfico), uma tabela (registro tabelar), uma fórmula (registro algébrico).

Segundo Duval (2005), em seu trabalho sobre visualização em geometria, pode haver muitas maneiras, formas, etapas, modelos distintos para realizar tipos diferentes de Reconstruções Dimensionais, ou seja por meio das Reconfigurações Mereológicas Heurísticas da qual nos utilizaremos como método essencial, para a realização do crescimento dimensional, mas podendo também ser por meio da Reconstrução Instrumental, ou ent por meio da semente infinitesimal geométrica de uma dimensão inferior.

Em seu artigo “*Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*”, Duval (2012, p. 56), enfatiza o fato de que “um objeto matemático não deve jamais ser confundido com a representação que se faz dele,[...] e que a distinção entre

um objeto e sua representação é portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática”.

Assim, Duval questiona e enfatiza o paradoxo de “como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?”

Existe a ilusão introspectiva de que o atual pensamento do objeto precederá a produção de sua semiótica representação. As representações mentais são representações semióticas internalizadas. Esta produção é primeiro uma objetivação. A produção da representação semiótica precede de alguma maneira o pensamento dos objetos que são representados. (DUVAL, 2017, p. 70, tradução nossa)¹

Duval afirma que é uma ilusão que o atual pensamento do objeto precederá a produção de sua representação semiótica. E que as representações mentais são representações semióticas internalizadas. Ou seja, que saber trazer, ou conhecer a linguagem, ou trazer da *noese* em direção à semiose é essencial para o verdadeiro saber. E não é só para saber ensinar, mas para a própria conscientização do verdadeiro saber.

Duval estabelece que é necessário dominar três atividades cognitivas fundamentais ligada à semiose: (a) aprender a falar compreensivelmente através de uma representação identificável; (b) conhecer as regras de tratamento próprio, conformidade, expansão discursiva e enunciação completa de cada registro; (c) Saber promover a conversão de uma representação em outra. (DUVAL, 2012, p.266-272)

Duval em seu livro (DUVAL,1995, p. 40,41,42), nos esclarece:

A conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada dentro de um registro de uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação ou desta mesma informação dentro de um outro registro [...]. **Em realidade, a escritura decimal, a escritura fracionária, e a escritura com expoente, constituem três registros diferentes de representação de números.** Em efeito, da escrita de um número, é necessário distinguir **a significação operatória ligada ao significante e o número representado.** Assim a significação operatória não é a mesma para 0,25, para $\frac{1}{4}$ e para $25 \cdot 10^{-2}$. Pois não são para os mesmos procedimentos de tratamento que se permite defender as três adições seguintes:

$$0,25 + 0,25 = 0,5$$

¹ There is, then, the introspective illusion that the actual thought of the object would precede the production of its semiotic representations. Mental representations are internalized semiotic representations. This production is first an objectification. The production of semiotic representation precedes somehow the thought of objects that are represented. (DUVAL, 2017, p. 70)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2} = 0,5$$

Cada um destes três significantes “0,25”, “1/4”, “25 x 10⁻²” a uma significação operatória é diferente, mas representam, portanto, o mesmo número. (DUVAL, 1995, p.40-42)²

Conforme, portanto, o exemplo acima, temos aqui, segundo Duval (2009) nos alerta, “**três registros diferentes de representação de números**”, segundo o qual, os elementos abaixo relacionados podem ser assim denominados.

$$0,25 + 0,25 = 0,5 \text{ registro numérico decimal}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ registro numérico fracionário}$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2} = 0,5 \text{ registro numérico com expoente}$$

As formas de representação no registro numérico, produzidas em duas parcelas de soma, para se obter o número que representa metade da unidade, 0,5, a primeira das formas dessa representação foi (a) na forma decimal; a segunda (b) na forma de frações; e a terceira (c) na forma de expoentes em potência de dez.

Podemos ter os principais Registros de Representação Semiótica segundo Duval: Registro Numérico, Registro Gráfico, Registro Figural, Registro Tabelar, Registro Algébrico e Registro Discursivo da Linguagem Materna.

Podemos destacar na Figura 1, uma ordem de classificação dos elementos dimensionais começando pelas estruturas mais genéricas que abarcam as mais particulares como:

- (a) os tipos de linguagem são abarcados por quatro distintos tipos de **Registros de Representação Semiótica, o Figural, o Discursivo da língua materna, o Tabelar e o Algébrico**

² “La conversion est la transformation de la représentation d’un objet, d’une situation ou d’une information donnée dans un registre en une représentation de ce même objet, de cette même situation ou de la même information dans a un autre registre... **En réalité l’écriture décimale, l’écriture fractionnaire et l’écriture avec exposant, constituent trois registres différents de représentation des nombres.** En effet, dans l’écriture d’un nombre, Il faut distinguer **la signification opératoire attaché au signifiant et le nombre représenté.** Ainsi la signification opératoire n’est pas la même pour 0,25, pour 1/4, et pour 25.10⁻². Car si ne sont pas les mêmes procédures de traitement qui permettent d’effectuer les trois additions suivantes :

$$0,25 + 0,25 = 0,5$$

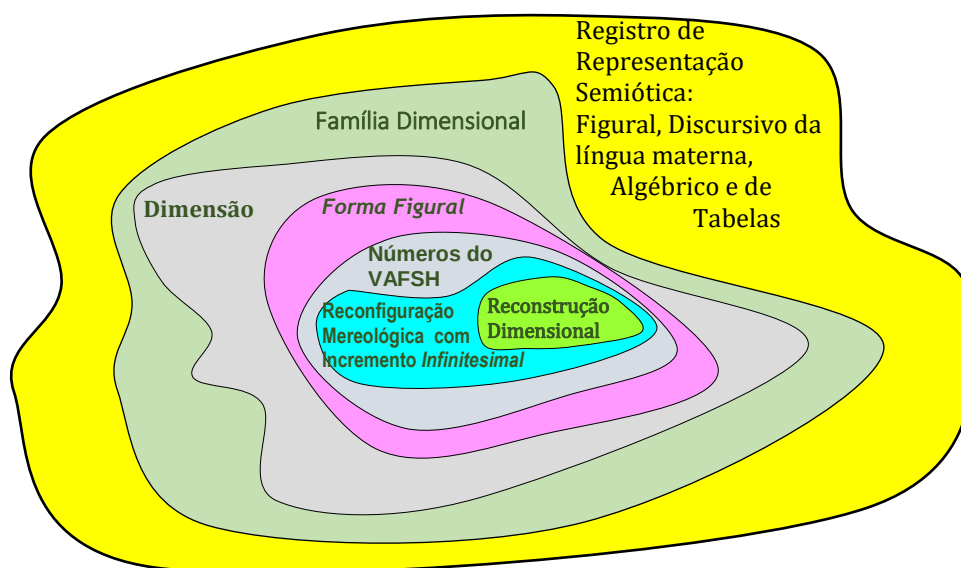
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2} = 0,5$$

Chacun de ces trois signifiants “0,25”, “1/4”, “25 x 10⁻²” a une signification opératoire différente mais représente cependant Le même nombre.” (DUVAL, 1995, p. 40,41,42)

- (b) estes Registros abarcam três conjuntos de **Famílias Dimensionais** que desenvolvemos a Família Dimensional 1 ou do Quadrado-Cubo; Família Dimensional 2 ou do Triângulo-Tetraedro, e a Família Dimensional 3 ou do Círculo-Esfera, famílias que também se pode denominar de CEGED (Conjunto de Elementos Geométricos Entrelaçados Dimensionalmente 1,2 e 3)
- (c) essas Figuras das Famílias estão distribuídas dentro de cada **Dimensão** D qualquer $D=0, 1, 2, 3, \dots$
- (d) aparecem a partir de sua **Forma Figural** que se deseja representar
- (e) cada forma figural possui associado a ela um certo **Número cada uma das Variáveis Dimensionais Geométricas** Externas, ou números do VAFSH (número de Vértices, de Arestas, de Faces, de Sólidos, de Hipersólidos, ...), para cada figura diferente
- (f) como preliminar de Reconstrução Dimensional sempre realizamos na escala crescente de dimensão a partir de uma dimensão imediatamente inferior, uma Reconfiguração Mereológica Heurística, ou seja, infinitos recortes da dimensão inferior (infinita) em formas adequadas ao tipo de reconstrução desejada para a dimensão superior e dando a cada uma delas um respectivo incremento infinitesimal em direção à dimensão superior
- (g) para se ascender de dimensão, produz-se então uma respectiva Reconstrução Dimensional da família adotada em dimensão crescente unindo-se as partes incrementadas em seus incrementos para a dimensão superior.

Figura 1 - Uma classificação dada a cada uma das figuras Geométricas formadas dentro da taxonomia da Figura, suas características e tipo de reconstrução dimensional adotada

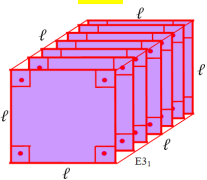
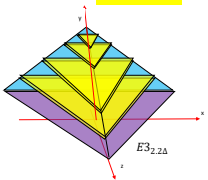
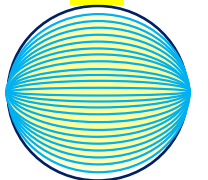


Fonte: Construção própria

O **Quadro 1**, fornece figuras exemplo, no caso o cubo, o tetraedro e a esfera com a respectiva taxonomia classificatória da hierarquia dada na Figura 1, indicando em suas linhas em ordem crescente de classificação:

- (a) os Tipos de Registros podem oscilar para os vários elementos em análise
- (b) a Família Dimensional poder ser a Quadrado-cubo, Triângulo-tetraedro, Círculo-esfera, etc.
- (c) a Dimensão pode ser escolhida para a Família em questão: $D=0,1,2,3,4,5,\dots$
- (d) a Forma Figural ficará definida após ser escolhida a Família e a Dimensão
- (e) o número associado à cada Variável Dimensional Geométrica (VDG) externa de cada figura (números de Vértices, Arestas, Faces, Sólidos, Hipersólidos, ...), terão seus valores bem definidos, dependendo das escolhas anteriores
- (f) na dimensão imediatamente inferior fica a partida para a Reconfiguração Mereológica Heurística de cada Figura e o corte específico para ser dado a ela e o seu respectivo incremento infinitesimal;
- (g) das figuras da dimensão anterior e seus incrementos infinitesimais que deverão ser colados em direção à nova dimensão para a formação da Reconstrução Dimensional ou mesmo a realização de antemão de uma Reconstrução Instrumental.

Quadro 1 - Características Classificatória de Elementos Geométricos distintos dados em exemplo

Táxon\ Elemento Geométrico	Cubo 	Tetraedro 	Esfera 
Registro	Figural, Discursivo da língua materna, Tabelar e Algébrico	Figural, Discursivo da língua materna e Algébrico	Figural, Discursivo da língua materna e Algébrico
Família Dimensional	1 (Quadrado-Cubo)	2 (Triângulo-Tetraedro)	3 (Círculo-Esfera)
Dimensão	Três	Três	Três
Forma Figural	Cúbica	Tetraédrica	Esférica
Números do VAFSH	8,12,6,1	4,6,4,1	2,2,2,1
Dimensão e Tipo para Reconfiguração Mereológica	a partir de 2D, infinitos quadrados de lado ℓ com incremento dz	a partir de 2D, infinitos triângulos de lados ℓ decrescentes com dz	a partir de 2D, infinitos círculos de raios ℓ em rotação com $rd\phi$
Modo de Reconstrução Dimensional	Quadrados paralelos em direção à 3D	Triângulos Equiláteros decrescentes na 3D	Círculo rotacionado pelo diâmetro para a 3D

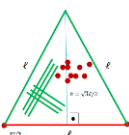
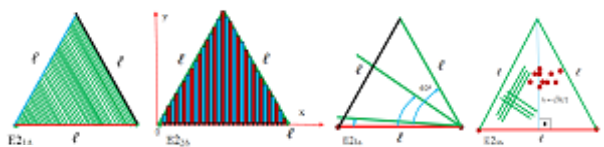
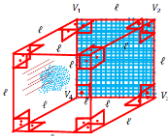
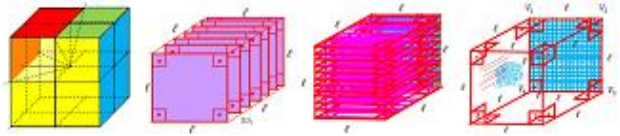
Fonte: Construção própria

No **Quadro 2**, apresentamos quatro tipos diferentes de Reconstruções Dimensionais, do triângulo e do cubo, mostrando visualizações distintas para sua Reconstrução.

Como veremos no Capítulo quatro para cada visualização de figura em cada dimensão distinta, relacionaremos quatro tipos de Reconstruções Dimensionais.

No caso do exemplo relacionado do **Quadro 2**, indicamos os Registros de Representação Semiótica, utilizamo-nos dos Registros Figural Geométrico e o Registro Discursivo da língua materna, relativo ao triângulo equilátero e ao cubo. Indicamos quatro tipos de visualizações didáticas, para cada figura, para facilitar o ensino ao aluno que se prende mais a determinado tipo de entendimento, e ter a compreensão do que se delinea, diversificando as visualizações.

Quadro 2 - Exemplo de Reconstruções Dimensionais do Triângulo Equilátero e do Cubo, em quatro Reconstruções Dimensionais diferentes

Registro de Representação Semiótica	Representação Semiótica	Quatro Reconstruções Dimensionais por Reconfigurações Mereológicas ou Reconstruções Instrumentais ou semente-incremento dimensional a partir de dimensão inferior
Registro Figural e Registro Discursivo da Língua Materna	 Triângulo Equilátero	Quatro tipos de Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas do Triângulo Equilátero (2D) nos Registros de Representação Semiótica Figural e Discursivo da Língua Materna  <i>Semente-infinitésima de Superfície da linha $dA = 2ydx$ com $y=tg60^\circ x$</i> <i>Reconfiguração Mereológica de infinitas retas decrescentes de ℓ</i> <i>Reconstrução instrumental Rotação da Linha 2D/1D</i> <i>Reconstrução instrumental 2D/1D</i>
	 Cubo	Quatro tipos de Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas do Cubo (3D) no Registro de Representação Semiótica Figural e Discursivo  <i>Semente-infinitésima de Volume do ponto $dV = dxdydz$</i> <i>Reconfiguração Mereológica de infinitos quadrados</i> <i>Semente-infinitésima de Volume de superfície $dV = \ell^2 dz$</i> <i>Reconstrução Instrumental 3D/1D</i>

Fonte: Elaborado pelo autor

Um dos principais artigos de Duval (DUVAL, 2005), que vem corroborar ao presente trabalho sobre a Geometria das Dimensões, nos dá várias direções necessárias para a realização de nossa pesquisa.

Com relação à necessidade de articulação de diferentes registros de representação semiótica, Duval afirma que:

A geometria é uma área do conhecimento que exige a articulação cognitiva de dois registros de representação muito diferentes: a visualização de formas para representar o espaço e a linguagem para, a partir dela, enunciar propriedades e deduzir outras novas. [...] Há três tipos de desconstrução de formas: (a) a desconstrução instrumental para construir uma figura, (b) a decomposição heurística e (c) desconstrução

dimensional. **A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica.**³ (DUVAL, 2005, p. 5, tradução nossa)

As ideias de Duval vêm ao encontro com um dos objetivos centrais deste trabalho pelo fato de que ele afirma no final desta citação que

A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica". (DUVAL, 2005, p. 5)

Ainda Duval aponta a importância das formas de desconstrução e reconstrução dimensional, nas inúmeras decomposições e recomposições heurísticas mereológicas na criação de estruturas geométricas variadas. Segundo Duval, há três tipos de desconstrução ou reconstrução de formas: a reconstrução instrumental, a reconfiguração heurística mereológica e a reconstrução dimensional. No tipo ligado à reconfiguração heurística mereológica, podemos partir de qualquer dimensão inferior, realizando visualizações diferentes para as reconstruções dimensionais. Duval afirma que

A decomposição heurística por divisão mereológica de formas reconhecidas. A utilização heurística de uma figura exige frequentemente que a observemos como se fossem peças de um quebra-cabeças. Contudo isso supõe que a decomponhamos em unidades figurais com o mesmo número de dimensões que a figura de partida. Assim um triângulo (2D/2D) pode ser decomposto em outros triângulos (2D/2D). Mas também, um cubo material (3D/3D) ou qualquer outro sólido pode ser dividido em blocos que serão também poliedros (3D/3D). Essa divisão, que chamaremos de uma divisão mereológica (divisão de um todo em partes justaponeáveis ou sobreponíveis), se faz sempre para reconstruir com as partes assim obtidas, uma figura com frequência muito diferente visualmente. Essa decomposição se inscreve então em um processo mais geral de metamorfose (para não dizer de anamorfose, que é uma transformação por um processo de deformação contínua). A decomposição mereológica das figuras é um dos procedimentos mais antigos na história da geometria (EDWARDS, 1979)."⁴ (DUVAL, 2005, p. 21, tradução nossa)

³ *La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. ...Il y trois types de déconstruction des formes : la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. **La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.***" (DUVAL, 2005, Résumé)

⁴ "La décomposition heuristique par division méréologique des formes reconnues. L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent qu'on la regarde comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ. Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D). Mais aussi, un cube matériel (3D/3D) ou n'importe quel autre solide peut être partagé en blocs qui seront aussi des polyèdres (3D/3D). Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou

Aqui Duval evidencia a importância da **Decomposição Mereológica Heurística** de uma figura geométrica, como sendo um dos procedimentos mais antigos na história da geometria.

Neste procedimento define-se a Decomposição Mereológica Heurística como um processo de recorte de uma figura em sua própria dimensão, em um conjunto de partes do todo, como um quebra cabeça a ser montado ou desmontado.

Este é um processo que posteriormente resultará na atividade de reconstrução dimensional das figuras (**Capítulo 4**). O que caracteriza aqui a partir destas reconstruções o desenvolvimento de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para o ensino da Geometria das Dimensões.

O autor (Duval), ainda, define a reconfiguração mereológica heurística em (a) **estritamente homogênea**, quando os corte da figura tem mesmo formato da figura original, em (b) **homogênea**, quando a figura de corte é diferente da figura de partida; e (c) **heterogênea** quando se faz cortes de figuras diferentes entre si (DUVAL, 2005, p.21).

Veremos no Capítulo 4, que para fazer as Reconstruções Dimensionais, nos utilizaremos dos cortes de figuras, reconfigurações mereológicas heurísticas, em cada dimensão, para inferir uma reconstrução dimensional em escala de dimensão superior, ou seja: retirar do ponto, infinitos pontos; cortar uma reta em infinitos segmentos de reta; cortar um plano em infinitos quadrados, triângulos ou círculos; cortar o espaço em infinitos cubos, tetraedros ou esferas; cortar o hiperespaço em infinitos hipercubos, hipertetraedros ou hiperesferas.

Esses elementos de cortes mereológicos reconfigurados, serão em um segundo procedimento de transformação, incrementados de um infinitésimo dimensional, elemento de variação espacial tendendo a zero, na direção da nova dimensão a ser reconstruída dimensionalmente. Só aí, finalmente, se procedera com a forma de Reconstrução Dimensional a ser realizada para a nova dimensão.

superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement. Cette décomposition s'inscrit donc dans un processus plus général de métamorphose (pour ne pas dire d'anamorphose, laquelle est une transformation par un processus de déformation continue). La décomposition méréologique des figures est l'une des démarches les plus anciennes dans l'histoire de la géométrie." (DUVAL, 2005, p. 21)

E Duval ainda segue em suas observações a respeito das Reconstruções dimensionais.

A característica das figuras geométricas, em comparação a todos os outros tipos de figuras, é que elas podem ser construídas com a ajuda de instrumentos, principalmente com instrumentos produtores de traços 1D/2D. O “denominador” corresponde à tomar em conta o espaço no qual o leque de representações são produzidas: — o de objetos físicos que podem ser manipulados fisicamente (nD/3D): maquetes de poliedros (3D/3D), folha de papel que pode ser dobrada ou cortada (2D/3D), barbantes que podem ser tensionados (1D/3D) como em um geoplano. Eu chamarei esses objetos de “objetos maquetes” para distingui-los de instrumentos que produzem um traço ou um traçado. — ou de um apoio de suporte de projeção (nD/2D) para a representação que será então produzida pelos traçados ou por impressões: areia, papel, tela eletrônica. Isso permite, portanto, distinguir as atividades geométricas realizadas materialmente e as atividades geométricas que são realizadas representativamente. Frequentemente, os objetos maquetes são utilizados para uma interpretação icônica das representações gráficas. Isso aparece, muitas vezes, nas definições: a reta como um barbante tensionado ... E isso esteriliza a abertura da representação.”⁵ (DUVAL, 2005, p. 17, tradução nossa)

Nestes comentários, Duval se reporta às figuras dimensionais tiradas de objetos físicos que remontam representações na terceira dimensão, como os objetos maquetes e sua compreensão, em posicionamentos da n-ésima dimensão percebida na terceira dimensão (nD/3D) e se reporta em exemplos da terceira dimensão percebida na terceira dimensão (3D/3D), da segunda dimensão, percebida na terceira (2D/3D) e da primeira dimensão percebida na terceira dimensão (1D/3D). E assim em analogia de menor dimensão comenta sobre os objetos da n-ésima dimensão percebida na segunda dimensão (nD/2D).

Fora a reconstrução dimensional, antecedida pela reconfiguração mereológica das partes e o incremento infinitesimal, poderemos nos utilizar também da reconstrução dimensional instrumental, que facilita outros tipos de visualização.

⁵ “La caractéristique des figures géométriques, par rapport à tous les autres types de figures est qu’elles peuvent se construire à l’aide d’instruments et principalement d’instruments producteurs de traces D1/D2. Le “dénominateur” correspond à la prise en compte de l’espace dans lequel les représentations sont produites : — celui d’objets physiques qu’on peut manipuler physiquement (nD /3D) : maquettes de polyèdres (3D/3D), feuille papier que l’on peut plier ou découper (2D/3D), ficelles que l’on peut tendre (1D/3D) comme avec un géoplan. J’appellerai ces objets “objets maquettes” pour les distinguer des instruments produisant une trace ou un tracé.— celui d’un support de projection (nD/2D) pour la représentation qui sera alors produite par des tracés ou par des empreintes : sable, papier, écran électronique. Cela permet donc de distinguer les activités géométriques réalisées matériellement et les activités géométriques qui sont réalisées représentativement. Souvent les objets maquettes sont utilisés pour une interprétation iconique des représentations graphiques. Cela apparaît d’ailleurs dans les définitions : la droite comme une ficelle tendue... Et cela stérilise l’ouverture de la représentation.” (DUVAL, 2005, p.17)

E Duval nos enriquece ainda mais com suas observações sobre a importância epistemológica da compreensão das interações entre desconstruções e reconstruções dimensionais.

A produção de cada traço corresponde ao mesmo tempo, a uma instrução formulável (as “figuras telefonadas”) ou formulada (no menu de um *software*) e à mobilização de uma propriedade geométrica em relação com o instrumento utilizado (compasso, régua não graduada, régua graduada [...]). Em outras palavras, a atividade de construção de figuras, quase sempre configurações de formas 2D/2D ou 3D/2D, repousa sobre a sua desconstrução em traçados 1D/2D e 0D/2D. Contudo, nessa atividade de desconstrução, toda a atenção leva à reconstrução, pois a desconstrução das formas 2D/2D é automaticamente feita pelo instrumento, enquanto a reconstrução exige que se focalize sobre a ordem nas instruções a serem dadas pelas operações de traçado a serem feitas. ⁶ (DUVAL, 2005, p.17, tradução nossa)

Duval, nos indica o caminho para a construção e desconstrução dos objetos dimensionais e seus métodos de representação práticos, utilizando-se de instrumentos, construindo figuras em várias dimensões, mas, observadas a partir da dimensão dois, ou seja da 3D/2D, ou da 2D/2D, ou da 1D/2D, ou finalmente da 0D/2D. Nos alerta que a “Desconstrução Dimensional é automaticamente feita pelo instrumento”, enquanto a “Reconstrução Dimensional exige sobre a ordem das instruções a serem dadas”.

E o autor ainda nos reporta novamente sobre as formas de desconstrução e construção dimensional de Figuras Geométricas.

A maneira de ver necessária em geometria: a desconstrução dimensional das formas. A maneira matemática de ver as figuras consiste em decompor qualquer forma discriminada, isto é, reconhecida como uma forma nD/2D, **em unidades figurais de um número de dimensões inferior àquela desta forma**. Assim a figura de um cubo ou de uma pirâmide (3D/2D) é decomposta em uma configuração de quadrados, de triângulos etc. (unidades figurais 2D/2D). E os polígonos são por sua vez decompostos em segmentos de retas (unidades figurais 1D/2D). E as retas, ou seus segmentos, podem ser decompostos em “pontos” (unidades 0D/2D) (infra Figura 2). **Notemos que com os pontos saímos de qualquer visualização**. De fato, os pontos só são visíveis quando aparecem como a intersecção de unidades 1D/2D (traçados secantes ou traçados que formam uma ponta (“vértices”, “ângulos” ...)). Dito de outra

⁶ “La production de chaque trace correspond à la fois à une instruction formulable (les “figures téléphonées”) ou formulée (dans le menu d’un logiciel) et à la mobilisation d’une propriété géométrique en relation avec l’instrument utilisée (compas, règle non graduée, règle graduée...). Autrement dit l’activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. Mais dans cette activité de déconstruction toute l’attention porte sur la reconstruction, car la deconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l’instrument tandis que la reconstruction exige que l’on se focalise sur l’ordre dans les instructions à donner pour les opérations de traçage à faire.” (DUVAL, 2005, p.17)

forma, a demarcação de um ponto sobre um traçado ou forma desse traçado (por exemplo, para fixar as extremidades de um segmento ou seu meio) é uma codificação simbólica. Além disso, é a essa codificação simbólica que se associam geralmente as letras!”⁷ (DUVAL, 2005, p. 20, tradução nossa).

Neste caso, Duval se refere às formas de decomposição e reconstrução de figuras que passando de certas dimensões, como elas seriam percebidas na dimensão dois (2D), ou seja, de uma figura na terceira dimensão (3D) e sua percepção na segunda dimensão (3D/2D), como é o caso do cubo representado na dimensão dois da **Figura 2**, ou um tetraedro (3D) representado na dimensão dois (2D). Ainda assim, se refere às figuras que na dimensão dois, como são percebidas na mesma dimensão dois (2D/2D), como é o caso do quadrilátero da **Figura 2**; e ainda figuras que da dimensão um, como seriam percebidas na dimensão dois (1D/2D), como é o caso da formação de quatro retas individuais que formam o quadrilátero, e finalmente se refere à dimensão zero, o ponto (0D), sendo percebido da dimensão dois (2D) (0D/2D), como é o caso dos pontos, vértices notáveis de intersecção entre as quatro retas. Ver a **Figura 2**.

Como nos estabelece Duval (DUVAL, 2005, p.5) que

*A visualização não icônica implica que se desconstruam as formas já visualmente reconhecidas. Há três tipos de desconstrução de formas: (a) a desconstrução instrumental para construir uma figura, (b) a decomposição heurística e (c) desconstrução dimensional. A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica.”*⁸ (DUVAL, 2005, p.5)

Neste caso, vamos destacar a parte final desta citação de Duval

⁷ “La manière de voir requise en géométrie : la déconstruction dimensionnelle des formes. La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n’importe quelle forme discriminée, c’est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, **en unités figurales d’un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme**. Ainsi la figure d’un cube ou d’une pyramide (3D/2D) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc. (unités figurales 2D/2D). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales 1D/2D). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en “points” (unités 0D/2D) (infra Figure 2). **Notons qu’avec les points nous sortons de toute visualisation**. En effet, les points ne sont visibles que lorsqu’ils apparaissent comme l’intersection d’unités 1D/2D (tracés sécants ou tracés formant un coin (“sommets”, “angles”...)). Autrement dit, le marquage d’un point sur un tracé ou hors de ce tracé (par exemple pour fixer les extrémités d’un segment ou son milieu) relève d’un codage symbolique. C’est d’ailleurs à ce codage symbolique que l’on associe généralement des lettres !” (DUVAL, 2005, p.20)

⁸ “La visualisation non iconique implique que l’on déconstruise les formes déjà visuellement reconnues. Il y a trois types de déconstruction des formes: la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. **La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.**” (DUVAL, 2005, p.5)

“A desconstrução dimensional constitui o processo central da visualização geométrica.” (DUVAL, 2005, p.5)

Este é o efeito fundamental em que nos baseamos para o desenvolvimento deste trabalho. O desenvolvimento do ensino no paradigma da reconstrução ou desconstrução dimensional das figuras e das formas, é ressaltado pela questão dimensional, como nos reafirma Duval (2005).

O autor define a **Desconstrução Instrumental (DI)**, como sendo a prática de separar em partes uma figura por meio da utilização de instrumentação para sua desconstrução.

No item seguinte, Duval denomina de **Desconfiguração Heurística Mereológica (DHM)** a decomposição de uma figura mais completa, em partes, como um quebra cabeça, em que estas partes pertencem à mesma dimensão da figura de partida.

E Duval define a **Desconstrução Dimensional (DD)** das formas, como sendo a maneira de produzir a decomposição de uma forma ou figura, em dada dimensão definida, em unidades figurais de dimensão inferior à dimensão da forma.

Utilizar-se-á no Capítulo 4, da construção das partes dos elementos da **Geometria das Dimensões** sempre a partir de uma dimensão inferior para uma dimensão superior. Este seria um mecanismo inverso de Desconstrução Dimensional. Partiremos de uma dimensão inferior completa, retaliada em infinitas formas, quebra cabeça de formas de todo o espaço dimensional inferior, ou seja, uma desconfiguração mereológica heurística. Em cada um desses pedaços se acresce um infinitésimo ortogonal a eles, em direção à nova dimensão. E somente aí se realiza a Reconstrução Dimensional.

A metodologia principal que se utiliza para a pesquisa da reconstrução dimensional das formas e sugerido por Duval, está especificado, como segue, trazendo vários elementos distintos para essa reconstrução.

Portanto, haverá o que se denomina de **Reconstrução Dimensional por meio de Reconfigurações Mereológicas**. Assim, as partes da figura em dimensão inferior, são recolocadas repetidas vezes, de maneiras distintas, e por meio destas partes sua geometria ficará completa na dimensão superior. Assim, faremos uma Reconstrução Dimensional a partir da realização de uma Recomposição Mereológica das partes da dimensão inferior com seu posterior acréscimo de incrementos infinitesimais. Este é o principal e universal

modo de Reconstrução Dimensional e método fundamental que nos utilizaremos sempre no decorrer dos procedimentos de crescimento dimensional que realizaremos para cada elemento em análise de cada Família Dimensional e mesmos nas dimensões que já não enxergamos tão bem figuralmente, como além da quarta dimensão.

Estabelecemos os elementos fundamentais abaixo que sempre nos utilizaremos como Metodologia Fundamental, *sine qua non*, para as Reconstruções Dimensionais.

PARA CADA FIGURA GEOMÉTRICA DESENVOLVIDA NO CAPÍTULO 4, SE PROPÕE VISUALIZAÇÕES EM QUATRO DIFERENTES TIPOS DE RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL, SEJA POR MEIO DE UMA RECONFIGURAÇÃO HEURÍSTICA MEREOLÓGICA DA DIMENSÃO IMEDIATAMENTE INFERIOR OU POR MEIO DE UMA RECONSTRUÇÃO INSTRUMENTAL, OU POR MEIO DE UMA DIMENSÃO INFERIOR PARTINDO DE UMA SEMENTE-INFINITÉSIMA ($R_{D0}, R_{D1}, R_{D2}, R_{D3}, R_{D4}, \dots$)

PARTINDO DE UMA DIMENSÃO IMEDIATAMENTE INFERIOR, USANDO UMA RECONFIGURAÇÃO MEREOLÓGICA HEURÍSTICA, PARA RESULTAR EM UMA RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL CRESCENTE ACIMA PODEMOS DESTACAR TRÊS PARTES FUNDAMENTAIS:

1. SE ESTABELECE UMA SUBDIVISÃO OU UM RECORTE DE TODA A DIMENSÃO INFERIOR, EM INFINITAS PARTES DEFINIDAS DE ACORDO COM A CONSTRUÇÃO FIGURAL QUE SE DESEJA, É O QUE DUVAL DENOMINA DE RECONFIGURAÇÃO HEURÍSTICA MEREOLÓGICA

2. TODAS ESTAS PARTES SUBDIVIDAS RECEBEM UM INCREMENTO INFINITÉSIMAL NA DIREÇÃO DA NOVA DIMENSÃO

3. CADA UM DESSES ELEMENTOS SERÃO POSICIONADOS PARALELAMENTE AO INCREMENTO RECEBIDO, NA DIREÇÃO DA NOVA DIMENSÃO (SUPERIOR), ATÉ UMA DISTÂNCIA PRE-DETERMINADA, PERFAZENDO ENTÃO A RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL, FINALIZANDO A COMPOSIÇÃO DA NOVA FIGURA GEOMÉTRICA NA DIMENSÃO SUPERIOR

PODE-SE REALIZAR TAMBÉM DIRETAMENTE SUA RECONSTRUÇÃO, NA DIMENSÃO DADA (OU PROJEÇÃO EM DIMENSÃO INFERIOR) POR MEIO DE UMA RECONSTRUÇÃO INSTRUMENTAL.

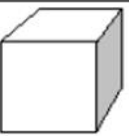
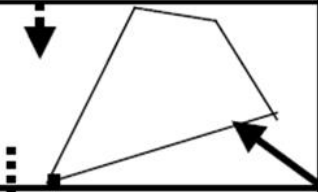
PODE-SE REALIZAR A RECONSTRUÇÃO DIMENSIONAL PARTINDO DE UMA DIMENSÃO INFERIOR QUALQUER, PRINCIPALMENTE A DIMENSÃO ZERO, UTILIZANDO UMA SEMENTE-INFINITÉSIMA ALGÉBRICA.

É O QUE VEREMOS PARA CADA FAMÍLIA GEOMÉTRICA NAS RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS CRESCENTES QUE APLICAREMOS NO CAPÍTULO 4.

A Mereologia constitui o estudo lógico-matemático das relações entre as partes e o todo, e das relações entre as partes no interior do todo.

Na **Figura 2**, Duval nos apresenta a formação das partes de cada dimensão (0D, 2D, 2D, 3D), vista sob a ótica ou representação da dimensão dois.

Figura 2 - Figura apresentada por Duval (DUVAL, p.47, 2005), com tradução com a Representação das dimensões 0D,1D,2D e 3D vista da 2D em uma desconstrução dimensional

NOME DAS DIMENSÕES	VISUALIZAÇÃO	DISCURSO <<FORMAL>> DE EXPOSIÇÃO
3D/2D		Um poliedro
2D/2D		Um polígono que é, seja uma FACE do poliedro, ou, seja a FIGURA OBTIDA POR UM PLANO DE INTERSECÇÃO de um outro poliedro
1D/2D		As retas têm entre elas, relações (PERPENDICULARES, PARALELAS, CONCORRENTES, etc.) que <i>permitem distinguir as propriedades de polígonos</i> e as retas se reduzem a segmentos. Daí a possibilidade de compará-las, e a noção de MILIEU
0D/2D		Os pontos podem ser a intersecção de retas ou pontos de um polígono E que não são arbitrários que se marcam sobre uma reta ou sobre um plano e que parecem independentes

Fonte: DUVAL (2005, p.47)

Os pontos, vértices, da dimensão zero (0D/2D), que pelo poliedro apresentado na figura superior, o cubo, poderiam ser os vértices posicionados de um quadrado, mas como generalização, Duval colocou a figura de um quadrilátero qualquer.

Na ligação desses pontos por meio de retas, surgem as retas como formações (1D/2D) unidimensionais, ou poderia ser os segmentos de retas.

Caracterizando os segmentos terminados nos vértices, haveria a formação da face, o que caracteriza na dimensão dois a formação do polígono (2D/2D).

Finalmente essas faces, no caso o polígono quadrado, se colocados lado a lado na direção da nova dimensão, ou na direção ortogonal à face, haverá a formação do poliedro no caso, o cubo.

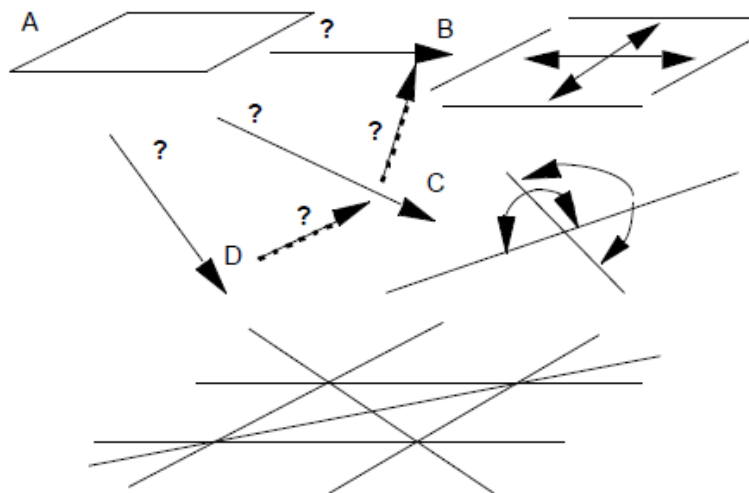
Sobre a reconstrução e desconstrução dimensional com exemplos, se refere Duval.

A desconstrução dimensional apresenta duas características que a opõem não somente à decomposição mereológica, mas igualmente à desconstrução instrumental. Ela se faz necessariamente em articulação com uma atividade discursiva. Seria possível até mesmo dizer que ela é essencialmente de ordem discursiva. Para representá-la graficamente, é preciso de certa forma transformar as figuras geométricas em esquemas. Assim a única enunciação das propriedades características de um

paralelogramo, por exemplo, implica que se desconstrua dimensionalmente uma figura simples 2D/2D em uma configuração de unidades figurais 1D ou 0D/2D. Pois as propriedades de um objeto 2D/2D (por exemplo, um paralelogramo representado abaixo por A) são relações entre objetos representados por unidades figurais 1D/2D (as configurações B e C abaixo) ou 0D/2D.⁹ (DUVAL, 2005, p.23, tradução nossa)

Neste discurso, Duval argumenta que como a representação é 2D, a figura 3D representada em 2D, acaba por manter-se essencialmente dentro do registro discursivo (da língua materna), uma vez que na representação da dimensão inferior a figura fica defasada, tendo-se que justificá-la por meio dos conceitos discursivos associados. É o que irá acontecer essencialmente na representação da estrutura de representação 4D/2D ou (nD/2D) qualquer, onde utiliza-se o Registro discursivo, tabelar e o algébrico.

Figura 3 - Decomposição de unidades figurais do paralelogramo por desconstrução dimensional.
(DUVAL, 2005, p. 23)



Fonte: Duval (2005, p. 23)

Como exemplo de desconstrução, as propriedades características de um paralelogramo de 2D percebido em 2D (2D/2D), de 1D percebido em 2D (1D/2D) e 0D percebido em 2D (0D/2D), como mostra a **Figura 3**.

Do paralelogramo (A) mostra-se a desconstrução em quatro segmentos de reta externas (B) ou o traçado das diagonais, passando pelos vértices.

⁹ La déconstruction dimensionnelle présente deux caractéristiques qui l'opposent non seulement à la décomposition méréologique mais également à la déconstruction instrumentale. Elle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive. On pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif. Pour la représenter graphiquement, il faut en quelque sorte transformer les figures géométriques en schémas. Ainsi la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme *représenté* par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D." (DUVAL, 2005, p.23)

Como nos justifica Duval.

A decomposição por desconstrução dimensional de formas percebidas corresponde ao funcionamento profundo da visualização na geometria. Quando dizemos “funcionamento profundo”, queremos dizer por essa qualificação que outras maneiras de ver, são as maneiras de ver que ficam na superfície. E isso leva a modificar a noção de “figura”, quer se entenda essa palavra em seu sentido clássico ou segundo a oposição entre desenho e figura, oposição que na verdade é aquela entre o caráter particular de qualquer visualização realizada e o caráter geral das propriedades do objeto representado. Para que uma figura dê lugar a uma visualização geométrica, ela deve emergir do que chamamos anteriormente de um “circuito de visualização” organizado em torno de uma trama de traçados 1D/2D, pois a partir de uma rede de retas pode-se fazer aparecer uma grande diversidade de formas 2D/2D. A resolução do problema abaixo (**Figura 4**) da reprodução de uma figura com uma régua não graduada permite colocar bem em evidência este processo.¹⁰(DUVAL, 2005, p. 25, tradução nossa)

Esta primeira frase de Duval, na citação acima, nos motiva ao desenvolvimento da pesquisa na Geometria das Dimensões.

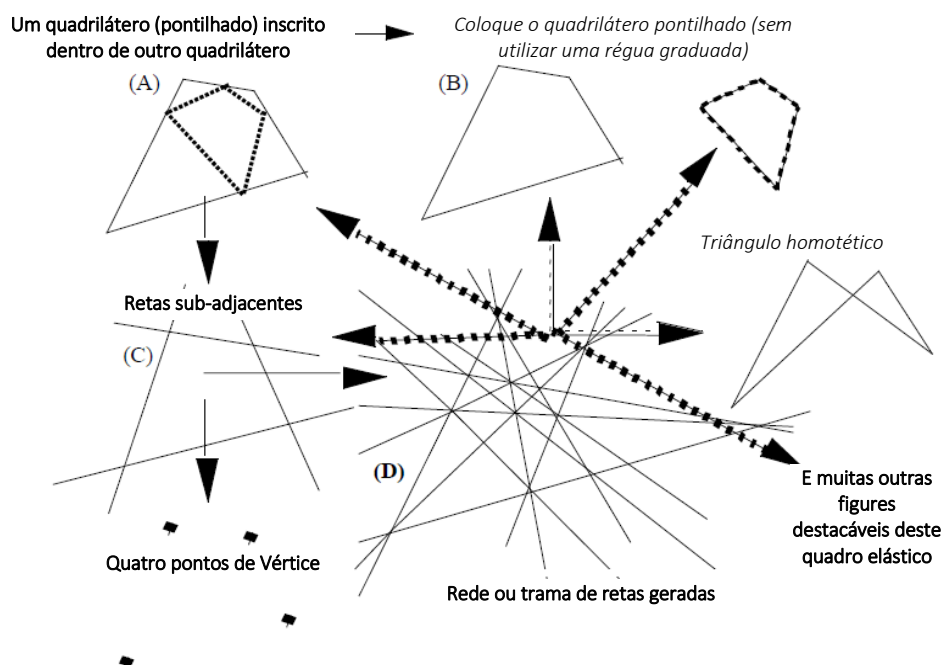
“A decomposição por desconstrução dimensional de formas percebidas corresponde ao funcionamento profundo da visualização na geometria.” (Duval, 2005, p. 25)

A **Figura 4**, mostra uma trama de desenhos de Duval (2005, p, 25) indicando a decomposição de traços, na decomposição de objetos, que juntos irão compor a reconstrução e desconstrução da figura em uma trama de amostragens de dimensões. Veja como nos relata Duval sobre ela, no texto que se segue. Observar que o reconhecimento de vários tipos de figuras nesta trama faz parte do aprendizado geométrico, mostrando as possibilidades de traços e figuras que podem resultar de uma rede de retas, interseções,

¹⁰ **La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie.** Quand nous disons “fonctionnement profond”, nous signifions par cette qualification que les autres manières de voir sont des manières de voir qui restent en surface. Et cela conduit à modifier la notion de “figure”, qu’on entende ce mot dans son sens classique ou qu’on l’entende selon l’opposition entre dessin et *figure*, opposition qui en fait est celle entre le caractère particulier de toute visualisation réalisée et le caractère général des propriétés de l’objet représenté. Pour qu’une figure donne lieu à une visualisation géométrique elle doit émerger de ce que nous avons appelé ailleurs un “circuit de visualisation” organisé autour d’une trame de tracés 1D/2D, car à partir d’un réseau de droites on peut faire apparaître une grande diversité de Formes 2D/2D. La résolution du problème ci-dessous (**Figure 6**) de la reproduction d’une figure avec une règle non graduée permet de bien mettre en évidence ce processus.” (DUVAL, 2005, p.25)

pontos, geração de polígonos, figuras inscritas, diagonais, múltiplas visualizações em geometria.

Figura 4 - Circuito de visualização organizado a partir de uma trama de desenhos (D) em desconstrução dimensional por meio de desconfigurações mereológicas em dimensões menores: retas (2D) e pontos (1D)



Fonte: Artigo de Duval (DUVAL, 2005, p.25)

Veja como nos acrescenta Duval nesta desconstrução do quadrilátero da **Figura 4**.

Para reproduzir dentro do quadrilátero (B) o quadrilátero pontilhado que se inscreve no quadrilátero A, é preciso começar a traçar as retas suportes do quadrilátero (B). Obtém-se assim uma primeira rede de retas que pode ser desenvolvida ao prolongá-las para fazer aparecer novos pontos de intersecção e construir assim novas retas passando por esses pontos de intersecção. Sobre a rede de retas (D) assim gerada, pode-se ver, isto é, destacar uma grande variedade de polígonos, dentre os quais aqueles que correspondem à configuração inicial (A). É esta trama subjacente que permite passar de uma figura a outra, e então reproduzir a figura requerida. Naturalmente, para pensar nessa solução, é necessário ser capaz de reconhecer nesta rede uma grande variedade de figuras.”¹¹ (DUVAL, 2005, p.25, tradução nossa)

¹¹ “Pour reproduire dans le quadrilatère (B) le quadrilatère en pointillés qui est inscrit dans le quadrilatère A, il faut commencer par tracer les droites, support du quadrilatère (B). On obtient ainsi un premier réseau de droites qui peut être développé en les prolongeant pour faire apparaître de nouveaux points d’intersection et construire ainsi de nouvelles droites passant par ces points d’intersection. Sur réseau de droites (D) ainsi généré, on peut voir, c’est-à-dire détacher une grande variété de polygones dont ceux correspondant à la configuration initiale (A). C’est cette trame sous-jacente qui permet de passer de passer d’une figure à une autre, et donc de reproduire la figure demandée. Naturellement, pour penser à cette solution, il faut être capable de reconnaître dans ce réseau une grande variété de figures.” (Raymond Duval, 2005, p.25)

Duval (2017, p. 59) nos reporta sobre as dimensões em uma diversidade de propósitos.

Podemos considerar as dimensões das unidades figurais para analisar suas funcionalidades cognitivas e suas variações, da maneira de olhar. As unidades figurais que podem ser consideradas são cubos, pirâmides, esferas (3D), ou polígonos, círculos (2D), ou linhas retas, curvas (1D), ou mesmo pontos (0D). Com respeito aos pontos, somente pontos marcantes, como vértices, interseções e extremidades, são visíveis. Os outros pontos podem ser marcados por uma codificação. Neste sentido uma unidade figural (1D) em um visual contínuo, representa em um caminho ambíguo a matemática contínua da linha real. Contudo isto não é suficiente, no que precisamos para o substrato físico destas unidades figurais, como o modelo do cubo de madeira (3D/3D), moldes em cartolina (2D/3D), fios extensivos ou um feixe de laser (1D/3D), as representações semióticas em perspectiva (3D/2D), ou superfícies de contorno fechadas (2D/2D) ou curvas plotadas e linhas retas (1D/2D).¹² (DUVAL 2017, p.59, tradução nossa)

O autor nos alerta para as diferenças geométricas das dimensões e suas diferentes representações semióticas, como, poliedros, cubos, pirâmides, esferas (3D/2D), polígonos, superfícies de contorno fechadas, moldes em cartolina (2D/2D), linhas retas (1D/1D), curvas plotadas (1D/2D) e pontos (0D/2D).

Duval (2005, 2017) assevera que a consideração dimensional é de grande importância didática para o aprendizado do estudante. Esta é a base do desenvolvimento de nosso trabalho, delinear e pesquisar todas as construções dimensionais a partir da dimensão zero, com o intuito do desenvolvimento do ensino, para que seja utilizado no ensino básico, das crianças em suas primeiras percepções geométricas até o ensino universitário, dentro da Geometria das Dimensões.

2.5 - A NOESE e a SEMIOSE

Ao debater sobre Registros de Representação, Duval se reporta muito sobre dois elementos fundamentais do universo de representação, a *nous*, (νοῦς, em grego) ou *noese* (νοησις) em grego ou *noesis em latim*, e a *semiose* (σημεῖον, semeion), em grego, e

¹² We must consider the dimensions of the figural units to analyze the cognitive functioning of this change in the way of looking. The figural units that can be recognized are cubes, pyramids, spheres (3D) or polygons, circles (2D) or straight lines, curves (1D) or even points (0D). With respect to points, only the remarkable points (vertices, intersection, and extremities) are visible. The other points should be marked by a coding. In this sense, a figural unit 1D is a visual continuum that represents in an ambiguous way the mathematical continuum of the real line. However, this is not enough, one must also distinguish the physical substrat of these figural units, such as cube wooden models (3D/3D) or cardboard templates (2D/3D) or the extended wires or a laser beam (1D/3D), from the semiotic representations in perspective (3D/2D) or closed contour surfaces (2D/2D) or plotted curves and straight lines (1D/2D). (DUVAL, 2017, p.59)

semiosis em latim. Assim fui buscar em sua origem de existência, esses dois conceitos, na história dos gregos, Grécia, 500 a.C.

Semio vem do grego e significa símbolo. A semiótica estuda os símbolos ou signos. Registrado por Parmênides de Elea (520-455a.C.,75), na Grécia como *semeion*, (σημεῖον) ou *semiose*. Parmênides defendia a ideia de que existia um local de ideias abstratas, o *nous*, ou *noese*, (νοησιζ em grego) em que as mudanças ou as variações não ocorreriam e a existência era sem tempo. E que o nosso mundo era um mundo de aparências e que representávamos esse mundo de aparências como representações diversas do *nous*, e estas representações resultaria na *semeion*, ou *semiose*, atualizada como semiótica (MARÍAS, 2015).

No universo do *nous* ou da *noese*, o entendimento das coisas não é no universo de palavras, é no universo da intuição, sem linguagens, sem representações. O conhecimento é, porque eu o conheço, eu sei, eu compreendo, e ocorre em um bloco de entendimento. Quando queremos nos comunicar, temos que transportar-nos a esse conhecimento incito, intuitivo, para um tipo de representação. Traduzindo esta representação, dizemos que temos que passá-la do estado da *noese* (sem representação, mas com o conhecimento abstrato, mais completo), e lembrar dele na sua totalidade, para poder traduzi-lo em um tipo de *semiose* (um dos tipos de representação dessa ideia original, a *noese*), utilizando uma das representações escolhidas, em que a primeira delas acaba por ser o registro discursivo da linguagem falada, para depois podemos passá-lo para o registro da linguagem escrita, elaborando conceitos, hipóteses, formas, dissertações, teses, demonstrações, refutações, raciocínios, analogias, deduções, induções, argumentações, elaborando estudos mais aprofundados na matemática, se dirigindo aos registros figurais geométricos, aos numéricos, aos tabelar e aos registros algébricos, gráficos, etc. Somente na semiótica podemos nos comunicar mutuamente, o modo da educação, no meio formalizado, até que outros estudantes possam chegar à *noese* do conhecimento. Ou se lembrar ou se inserir.

A semiótica estuda a manifestação de vários fenômenos culturais, no estudo da epistemologia generalizada: Linguagens distintas, Matemáticas variadas, Físicas modelares, Biologias diversas, Psicologias em contrastes, Histórias comparadas, Sociologias de diversidades, Políticas possíveis, Justiça na ética, Artes em liberdade, Religiões ecumênicas, Ciências em geral, de forma que todas tem aplicações direcionadas e semióticas, manifestações dirigidas e específicas da *noese* do pensamento. Ambos os

termos, *semiose* e semiótica, são derivados da palavra grega *semeion*, σημεῖον. Estão na dimensão da epistemologia, ou o estudo do conhecimento (MARÍAS, 2015).

Parmênides, Sócrates e Platão usavam a palavra *noese*, ou *nous*, (νοησις) para designar as ideias em estado de abstração, que juntamente com a *episteme*, ἐπιστήμη, o conhecimento, compõem a verdadeira sabedoria, para desenhar os contornos da inteligência mental, o raciocínio em abstração, ligada às compreensões conceituais sem nomes, com ideias genéricas, sem aplicabilidades específicas, sem direção objetiva, ideias produzidas em diversidade e recebidas pelo pensamento. Ligadas à intuição, ao pressentimento, à inspiração, ao *insight*, à sintonia, à afinização, ao *rapport*, à sensibilização, à percepção sutil, à *serendipite*, ao “cair da ficha”.

A *noese* ou o *nous* é o ato da inteligência virtual ou abstração maior. E Platão a emprega para evocar as coisas que são próprias do pensamento, a estimular o ato de conceber pelo pensamento. Ao se traduzir o pensamento em simbologias e linguagem, ele se transforma em uma *diavoia*, διανοια, cujo significado é “traduzido pelo pensamento”, para se tornar possível uma compreensão ou transmissão conceitual ao outro. (DUVAL, 2009, p.15)

Sobre Parmênides de Eléa (520-455) temos:

Parmênides de Eléa falava dos objetos como *entes*, éος, εὖς, ὄν, ον, que seria o conceito anterior ligado a eles, e junto com estes entes está o *nous*, ο νοῦς, ou a *noese*, νοησις que é o método junto a eles. Traduzido em latim como mente, às vezes, pensamento e até espírito é o *nous* ou a *noese*. Esta *noese* está em essencial unidade com o *ôn*. Em seus escritos, a deusa saúda Parmênides e lhe diz que é necessário conhecer-se tudo, “tanto o coração inquebrantável da verdade bem redonda, como as opiniões dos mortais, que não têm a certeza verdadeira”, e lhe diz que existe uma única via de que se possa falar, o desvelar, o descobrir, a *aleteia*, ἀληθει. A deusa lhe fala de duas vias, a da verdade e a da opinião. A via da verdade ligada à *noese* e ao *ente* tem duas vertentes, a via do que é, e a via do que não é. Já a via da opinião está ligada a sensação das coisas, que possui a via do “que é e não é”. (MARIAS, 2015)

Esta fala da deusa em Parmênides nos reporta à uma situação de analogia atual que foi a descoberta dos conceitos da atual Mecânica Quântica. Na mecânica quântica, aparecem as partículas que trazem em si a manifestação simultânea de partícula (matéria) e de onda (energia), comportamentos excludentes um do outro na prática do mundo real, mas não em sua existência virtual anterior à manifestação física, mas que quando observada e dependendo da maneira como que é observada, ela se transforma, em apenas uma de suas

duas manifestações físicas, ou matéria ou onda, em um ou em outro, deixando a ambiguidade da sua maneira de ser, está manifestação física no momento da observação é chamada de “o colapso da função de onda ψ (psi)”. Podemos fazer a analogia à Parmênides de que no virtual do pensamento, podem existir as duas coisas, como na matéria da Mecânica Quântica, o é e o não é, sua manifestação física vai ser colapsada no momento da escolha adequada.

Na Física, um ou outro estado são totalmente excludentes um do outro e por isso este fenômeno é denominado de dualidade onda-matéria. No entanto, em outras ocasiões, elas podem se encontrar em um estado virtual tal, não colapsados a um desses estados, em que nem tempo (sem causalidade), nem espaço (sem localidade) os limitam, perdem a localidade no espaço e no tempo, e contém em si, ambos os estados coexistentes, energia e matéria. No entanto, existem outros estados físicos como, por exemplo, na observação de um feixe de elétrons, eles a priori se encontram carregando os estados ambíguos de spin meio e spin menos meio, rotação em um sentido e no sentido inverso, no virtual, no momento da manifestação física é que ele escolhe um dos dois, não antes. Antes ele carrega consigo as duas características.

Quando estão neste estado, não estão em um estado de manifestação física, mas um estado de virtualidade de não medição física.

Isto nos reporta ao estado não físico em que as ideias assim como a matéria, tem um estado que é uno, completo, contém todas as manifestações, mas quando nos utilizamos dela, a trazemos para a vivência física, a colapsamos para uma das nossas realidades, ela deixa de ser una e se manifesta como uma das realidades que nos interessa.

Reportando-se sobre os atributos dos entes, Parmênides nos alerta:

Nos atributos do *on*, *ον*, do ente, para a *noese*, o *on* está sempre presente, mas para os sentidos as coisas podem estar longe ou perto, presentes ou ausentes, mas para a *noese*, *νοῦς*, a mente, o pensamento, está sempre presente. Todos os entes, são, ficam envolvidos pelo ser, ficam reunidos, são unos. Toda a multiplicidade de coisas não tem nada a ver com a unidade do ente. O *ôn* é uno. Por isso, Parmênides chega a dizer que o ente é uma esfera, sem orifícios de não ser. Este ente é imóvel. O movimento é entendido como um modo de ser, uma dualidade, mas o ente é uno. Se eu divido uma coisa em duas, o ente fica tão indivisível como antes, envolve igualmente as duas partes: a divisão não o afeta em nada. O ente é cheio, sem vazios, e o problema do vazio é muito importante em toda a filosofia grega. É contínua e o todo. Se houvesse algo fora do ente, não seria, e se houvesse algo fora do ente, este seria o ente. Pela mesma razão é ingênito e imperecível. O contrário seria um não ser, o que é impossível. Estes são atributos dos entes e não das coisas, e é isto é algo que se descobre da primeira via, a da verdade. (MARIAS, 2015)

Sobre a opinião, a segunda via, ela pode ser verdade e erro. Quando existe um e outro, só pode ser decidido a partir da verdade. A opinião ou *doxa*, δοξα, se atém às informações do mundo, das coisas. Estas informações são muitas e cambiantes. Transformam-se umas nas outras e estão em constante variação. A *doxa* entende esse movimento, como um vir a ser, mas o ser, não se dá nos sentidos, mas na *noese*. Assim sendo, a *doxa*, movendo-se na sensação e emoção, que é o que se tem, salta para o ser, sem utilizar a *noese*, de que carece. É esta sua falsidade. A *doxa* tem como principal órgão, a sensação, αισθησις, *aistosis*, e esta, se compõe de contrários e por isso é perecível como as coisas. A opinião nem sempre tem a *noese*, que é imperecível como o ser. (MARIAS, 2015).

Assim, Parmênides interpreta o movimento como luz e trevas, como um iluminar-se e obscurecer. O vir a ser é um vir a ser aparente, na realidade, o vir a ser das coisas, já era, mas ainda estava nas trevas (virtual). O movimento é variação, não geração, portanto: “não existe do ponto de vista do ser”. Tudo isso é convenção, nomes, νομοις, que se apõem às coisas (MARIAS, 2015). Realidades maiores que tem que ser reduzidas às semióticas existentes como conceitos pré-estabelecidos pelo entendimento do pensamento.

A *noese* seria diferente da *diavoia*, διανοια, cujo significado é “traduzido pelo pensamento”. A tradução feita pelo pensamento é uma forma de ver uma abstração, uma ideia genérica, próxima à *noese*, de um lado, mas já caminhante para a *semiose*, do outro lado. Saindo do pensamento, traduzindo para as palavras já estamos no caminho da *semiose*, pois transforma a *noese*, saindo da ideia genérica para uma ideia com uma forma específica, traduzida de uma forma comparativa, com conceitos conhecidos pela consciência analisadora, feita com semelhanças já vivenciadas ou feita de analogias, com palavras, nomes e significados próximos, aos conceitos associados, formas, similitudes, ou a *semiose*.

Essa associação específica recebe o nome de *semiose*, σημειωσις, produzir signos, marcas, distinção, aplicações variadas da mesma ideia. Quando se tenta materializar ou traduzir a *noese* do pensamento, temos que reduzi-la, estragá-la, torná-la menor, para que ganhe representatividade.

A *semiose* apesar de uma redução do pensamento é a forma que se tem, a fim de que, para os que a obtiveram, através da autodescoberta, ou do autoconhecimento,

aprendizado ou do ensinamento, aquele mais original, mais natural, ter a possibilidade de disseminar este conhecimento para outras pessoas.

Aproximamo-nos mais da *noese*, quando obtemos modelos e teorias generalizadas, das quais podemos com elas, caminhar facilmente para as aplicabilidades que desejarmos. Assim é a matemática e seus modelos.

É a *noese* do conhecimento, que se transforma em *pragma*, a prática, o que a faz reproduzir o conteúdo, com todos os detalhes e, portanto, dá certo. É o dom do discernimento. Cria-se na mente com perfeição, para executar na prática com sucesso. A imaginação cria todos os detalhes para obter o sucesso de realização na prática.

Teorizar com sucesso, portanto, é partir de uma *noese*, com sua origem na mente, pelo sentimento interno de completude e chegar a sua tradução, em um tipo qualquer de *semiose* ou semiótica. Descrever a *noese* com todos os detalhes é torná-la em um formato, que todos possam conhecê-la é o que recebe o nome de *semiose* de base, com máxima proximidade à *noese*, procurando manter sua generalidade. Todo conhecimento que pode ser passado tem que ser teorizado em *semiose*. A *semiose* reorganizada com melhor estética, tirada suas confusões de descrição, corresponde à uma melhoria dos processos de ensino e aprendizagem.

A medicina se utiliza muito da palavra “semiologia”, no estudo e interpretação dos sinais, dos sintomas, das formas, que levam a determinada doença ou comportamento. A palavra semiologia foi usada pelo médico inglês Henry Stubbes, no ramo da ciência médica em 1670. Hoje em dia existem grandes tratados de semiologia médica. John Locke em 1690, usou os termos "semeiotike" e "semeiotics" no livro 4, capítulo 21 do “Ensaio acerca do Entendimento Humano”. Charles Sanders Peirce usou em 1860, os termos *semiose* e semiótica em seu livro “Semiótica”, que está ligado ao saber, à forma, aos nomes (significantes) ao conteúdo e seu significado (conceito associado), às maneiras diferentes de se apresentar o mesmo conteúdo (PEIRCE, 2015).

Podemos dar um exemplo ligado a uma área da engenharia. Existe a ideia simples de um **circuito elétrico fechado**, por onde passa uma **corrente elétrica**, através de um fio metálico e ligado de forma distinta a cinco elementos. Os cinco elementos são **resistências** (impõe resistência à passagem de corrente), **indutores** (bobina ou enrolamento de fio, atrasam a onda da corrente alternada no tempo), **capacitores** (duas placas paralelas, adiantam a onda da corrente alternada no tempo), **diodos** (elementos de dois materiais

semicondutores como silício e germânio, deixam a corrente passar somente em um sentido) e **interruptores** (deixam ou não passar a corrente). Apenas este sistema em conformações diferentes pode constituir inúmeras aparelhagens com distintas representações, como o ferro elétrico, o chuveiro, o liquidificador, o computador, o celular.

Pode-se dizer que o discernimento desses elementos idealizados compõe na consciência, uma estrutura *noética* genérica, a partir da posse desses conceitos fundamentais, elas podem se transformar em muitas semioses. Pode-se construir através de suas funções e variações uma imensidade de aplicabilidades ou reducionismos, em vínculos diversos, para se atingir uma finalidade determinada. Com o discernimento de vínculo, de cada elemento destes, se é capaz de produzir rearranjos pela criatividade da consciência. Estes arranjos pensados geram produtos semióticos de aplicabilidades diversas e desejadas. Mas todas estas aplicações, geradas, saem da mesma idealização: o discernimento dos elementos fundamentais, que compõem e se aperfeiçoam no *nôus* ou na *noese* da consciência.

O que torna a ideia fundamental mais poderosa na educação é ela ir se tornando, mais simples nas aplicabilidades, e ao mesmo tempo, mais abstrata ou mais *noética* em seu conteúdo. Assim toda semiótica produz uma ligação automática à sua *noese*, que se sofisticada, tornando-se um mecanismo uno.

No momento em que se paralisa o mecanismo de velocidade na criação material do *hardware* do computador, a máquina, passa a marcar passos em loops de repetibilidade, em seus patamares passam a ser limitações momentâneas. Sua evolução, neste momento, passa a ser de outro setor, o da melhoria dos programas idealizados, o *software*. O que objetiva tornar, agora, suas informações mais leves e rápidas, são as mudanças de modelagem e de didática do *software*. Estas manifestações vão se multiplicando, nas infinitas aplicabilidades da informação, através de variadas e novas Reconstruções de representação, na linguagem binária dos circuitos. É a semiótica das informações com seus inúmeros modelos de representação que invadem os limites da criatividade humana.

Platão considerava a Matemática, a ciência das ciências, uma vez que ela era a *noese* de uma infinidade de aplicações. Se aprendia com ela o pensamento mais abstrato, apesar de lógico e consistente, uma vez que não seriam necessárias existirem aplicações para sua existência, mas se fossem necessárias, bastaria um simples ato de manifestação da

imaginação, que formas de aplicabilidade apareceriam a partir desse conhecimento matemático.

Até a primeira metade do século XIX, a riqueza da humanidade estava sediada na mão dos plantadores do campo, e dos mineradores nas montanhas, na produção de diferentes tipos de alimento e de diferentes tipos de materiais. Na segunda metade do século XIX, e a maior parte do século XX, a riqueza passou para os donos da energia: caldeiras, eletricidade, petróleo. No final do século XX, toda a riqueza passou para os donos da informação. Portanto, matéria, energia e informação, em ordem crescente de importância são grandes elementos que compõem a evolução do ser humano, pois caminham da materialidade maior (semiose) para a abstração da (*noese*).

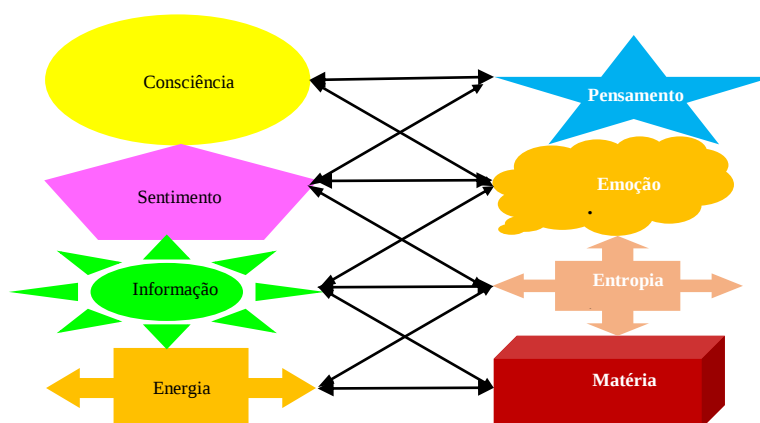
A entropia representa o nível de desorganização da matéria e da energia, quanto mais desorganizado um sistema, maior a entropia, menor a capacidade útil da sua energia. Quanto maior a entropia, menos informação existe agregada ao sistema, menos útil o sistema se revela. Por isso, a **energia** com pouca **informação** é uma energia com mais **entropia**, ou seja, mais **desorganização**, menos eficiência, assim a **informação** acaba por ser importante na **eficiência** da energia. Assim em ordem de importância, a **energia** ultrapassa a da **matéria**, e a **informação** ultrapassa a da **energia**. Conjecturando, no futuro, provavelmente a importância do **sentimento ético**, ultrapassará o advento da **informação**. E o **pensamento com discernimento** no interior de cada **consciência** ultrapassará o do **sentimento ético**, como está delineado na **Figura 5**. Todos esses elementos têm grande importância na evolução do ser humano para que ganhem novos horizontes na caminhada de adquirir novas **noeses**, multiplicando as **semióticas** e **representações** com caráter mais nobre.

As emoções no ser humano são nossos sensores generalizados de como sentir o mundo de forma impulsiva e com todos os elementos de hábitos associados à evolução para preservação da vida. No entanto, eles se manifestam muitas vezes de forma desordenada e não sadia à vida moderna, com sua evolução de valores. Mas se agregarmos razão, lógica e utilidade racionalmente pacífica às emoções, elas podem se revelar mais úteis. À medida que nossas emoções passam a ter mais controle de utilidade, nós dizemos que elas se transformaram ou evoluíram para os sentimentos, que são percepções do mundo com serenidade. Talvez o ponto próximo de ganho, importância e evolução, do ser humano, seja

a evolução do sentimento, elemento essencial na manifestação da serenidade das emoções, sem solavancos, sem medo, sem imprudências.

O sentimento e suas percepções, sem isolamentos com o todo, buscam uma unificação de forma, busca uma união, com todos os outros pontos do conhecimento e lógica. E assim o pensamento do ser humano, direcionado ao sentimento e percepções autênticas teria ligação direta com a sabedoria, o discernimento, e o amor. A completude da evolução da consciência em todos esses patamares de crescimento estaria se condensando no caminho da complementação da consciência para sua percepção em todas as direções com máxima autenticidade e sem tolhimentos. O sentimento, sem palavras, é o caminho para a *noese* de Parmênides.

Figura 5 - Inter-relação dos elementos quantitativos aos qualitativos que promovem a evolução do ser humano e do conhecimento



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Figura 5** mostra as inter-relações na valorização dos elementos de evolução dos elementos da consciência do ser humano pelo seu poder de realimentação útil. O caminho para os elementos de percepção mais complementares do conhecimento, indo em direção à complementação das *noeses*. O caminho de enriquecimento desses elementos, é também em direção à construção mais perfeita de *semioses*. As interações mútuas entre os dois, *noese* e *semiose*, amplificam a visão do ser humano. A *semiose* evolui a *noese* e a *noese* evolui a *semiose*.

O sentimento seria uma evolução da emoção, uma vez que a emoção seria uma impulsão do ser humano nem sempre aperfeiçoado, mas que somado à razão e à informação útil, a emoção se aperfeiçoa e se transforma em sentimento, mais sereno e saudável, na sua avaliação. Considerando assim, emoção, mais razão e informação útil, isto resulta no

sentimento, elaborado pelo tempo e pela repetibilidade, na evolução dos hábitos e criatividade das mudanças, mais próximo da *noese*. O pensamento atributo essencial e mais próximo da consciência, é superior, e norteia e alimenta os sentimentos, sendo que o mecanismo inverso também realimenta a consciência.

O conhecimento pode chegar à consciência, inicialmente por intermédio de uma aplicabilidade em um único registro, e esta seria, temporariamente, a única “*noese*” da consciência. Mas com o tempo, à medida que esta aplicabilidade vai se diversificando, novos registros distintos vão surgindo, faz com que a consciência crie em si uma ideia *noética*, mais genérica e abstrata, mais próxima de uma abstração, cuja interioridade é um conhecer mais maduro, conduz a muitas outras capacidades e aplicabilidades conhecidas, manifestando todas as suas soluções.

Este é um dos caminhos da ciência, da educação e da evolução da consciência.

Para a inteligência, é como se conhecêssemos os pedaços de uma estória, mas não soubéssemos fazer com que suas partes incompletas, componha uma única estória consistente em todas as suas junções de partes. Quando descobrimos as junções, e vemos o seu poder e podemos completá-la em todos os seus meandros, e podemos construir muitas outras estórias consistentes com ela.

A generalização das ideias e o poder de sua aplicabilidade se transforma em uma simples ideia *noética* na consciência que é capaz de produzir uma compreensão genérica e aplicabilidades a uma infinidade de semióticas. A percepção da consciência para essa ideia *noética* é a manifestação da inteligência, da capacidade de ensino e da capacidade de aprendizado na didática, amplificados.

Enquanto a consciência estiver se debatendo com as infinitas semióticas, ela irá ser lenta, ter dificuldades de lidar com todas elas. Apesar de que, para o autoaprendizado, ao se ter contato com uma ideia inicial, muitas vezes, o início deve ocorrer desta maneira. Principalmente quando o primeiro contato ocorre sem a ajuda de um professor que já enxergou a ideia *noética* ligada àquela semiótica.

Quando a consciência trabalha muito tempo com as aplicabilidades, sua inteligência e as várias associações realizadas, acaba por produzir uma percepção aguçada naquele setor. Neste aspecto, se é capaz de produzir uma *noese* pessoal da realidade, e a partir daí, não se erra mais naquele setor de aplicabilidades, tem seu domínio pleno, diz-se, então, que se tornou-se um especialista.

Um simples raciocínio fará àquela consciência madura que já percorreu os caminhos até obter a *noese* do pensamento complementar, chegar de forma rápida à solução. Enquanto as outras consciências ainda imaturas, terão que ir pelos caminhos tortuosos da pesquisa, das leis, das metodologias, das aplicabilidades específicas, da experiência e erro, da jurisprudência, da repetibilidade, do contato com as semióticas existentes e semelhantes, hábitos, doutrinas, teorias, fórmulas, representações, pela ainda falta de percepção mais apurada do essencial. Tudo isso resulta em hábitos positivos que unidos à inteligência e a capacidade de realizar analogias, leva a transformar-se em uma *noese*, uma posse real do conhecimento, com a capacidade de resolver inúmeras semioses.

Se a experiência *noética* de uma consciência, de compreensão genérica não for contextualizada, não chegará de forma mais fácil à outras consciências que terão que redescobri-la. Mas, se a partir de percepções e contextualizações corretas, a consciência ganha o discernimento e a capacidade de realização, a transmissão pode ser facilitada e aplicada a muitas soluções de muitas outras consciências, consciências do futuro, criando um referencial teórico, um modelo, uma teoria, que aperfeiçoada em suas semioses, didáticas, irão mais rapidamente chegar à posse de conhecimento e à criação de outras semioses.

A ciência, o saber demonstrativo, se chama em grego, *episteme*. Existe a práxis, cuja finalidade não é a **obra**, o *érgon*, mas o próprio fazer, por meio da **atividade**, ou *energéia*. Outra estrutura importante é a **contemplação**, a **teoria**, que trata de ver, discernir, o ser das coisas, em sua máxima totalidade, e de acordo com os gregos, a forma suprema do pensar. (MARÍAS, 2015)

Diz a pesquisa, que uma *serendipite*, ou seja, o ato da descoberta de uma *noese*, se repete para inúmeras consciências, até que seja contextualizada para servir à muitas outras de forma mais rápida. Um exemplo é o da penicilina, que parece ter sido descoberta ao acaso em um momento crucial da história. Como diz Louis Pasteur, “o *acaso*, só *favorece a mentes preparadas*”. Esta frase não deixa de ser uma menção aos efeitos de sincronidades sucessivas de Carl Jung.

Em 1929, Alexander Fleming, realizava uma pesquisa com um tipo de bactérias, os estafilococos. Saiu de férias e esqueceu algumas placas com colônias destes micro-organismos. Quando retornou, verificou que havia algumas placas que tinham sido atacadas por um bolor, e formavam um halo em volta da placa, onde não havia mais bactérias. Como

uma de suas pesquisas anteriores havia sido sobre a eliminação de bactérias nocivas ao organismo, considerou isso importante e não jogou fora as lâminas. Isolou a substância, o *penicillium*, com a ajuda de outros colegas e em 1941, aplicaram em humanos, salvando milhares de vidas durante a segunda guerra mundial. E em 1945 ele e seus colaboradores ganharam o prêmio Nobel de Medicina.

Anos mais tarde, Ronald Hare, colega de Fleming, tentou reproduzir várias vezes o experimento de Fleming no laboratório e não conseguiu, e verificou que a obtenção de Fleming foi obra de uma série de coincidências. O fungo que contaminou a placa ao acaso era um dos três melhores produtores de penicilina dentre todas as espécies do gênero *Penicillium*. O fungo contaminante veio pela escada do andar inferior, onde se realizavam pesquisas sobre fungos. O crescimento do fungo e dos estafilococos se fez lentamente, condição necessária para se evidenciar a destruição bacteriana. No mês de agosto daquele ano, em pleno verão, sobreveio uma inesperada onda de frio em Londres, que proporcionou a temperatura ideal ao crescimento lento da cultura. Foi providencial que Fleming reexaminasse as placas contaminadas e observasse o halo transparente em torno, dos fungos, e já tivesse feito pesquisa sobre isso antes de inutilizá-las.

A descoberta e desenvolvimento da substância coincidiu por se antecipar a ocorrência de uma das maiores guerras já ocorridas na humanidade e foi capaz de salvar milhares de vidas. Apesar de todas essas felizes coincidências, se Fleming não tivesse a mente preparada não teria valorizado o halo transparente em torno do fungo e descoberto a penicilina. Uma sincronicidade em cima da outra facilitou sua descoberta.

Tantas pessoas ao longo da história no passado se curavam de infecções por comer pão embolorado, comidas com fungos que era considerado por alguns médicos como possível remédio, sem saber o porquê e sem ter razões suficientes para contextualizar sua relação. No entanto, tinha-se um volume suficiente de opiniões para se tornar uma prática ou uma ciência.

Imaginemos como será a Educação daqui a 400 anos na frente. Calcula-se que a ciência dobra a cada oito anos, a quantidade de conhecimentos e informações vai ser impressionantemente grande. Como será uma faculdade de quatro anos no futuro?

A Educação Matemática, como todas as ciências, está em constante, permanente evolução, e portanto, deve estar permanentemente aperfeiçoando sua didática para abarcar cada vez mais um número maior de representações semióticas distintas em um futuro

distante. Ou do contrário a inteligência humana terá que ter muito mais capacidade de assimilação e memória. Os programas, *softwares*, realizarão com automatismos muitas das práticas, bastando conhecerem-se os fundamentos e leis da criação, sendo que o trabalho repetitivo ficará à custa dos programas e seus hábitos acumulativos de criação.

As ideias fundamentais e genéricas na matemática associadas ao ponto, reta, plano e espaço, são ideias que fazem parte de uma *noese* de Euclides para construir toda uma Geometria. E aparecem também sobre estados fundamentais, outras construções abstratas, usando estes elementos construídos, como triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono e outros, que também fazem parte de uma outra *noese*, construção abstrata.

Dessas reflexões asseveramos a *semiose* e a *noese* se realimentam mutuamente dentro da consciência, e fazem por aumentar cada vez mais seus registros de representações no tempo, até que a *noese* se generalize na consciência e passe a ser capaz de criar multidões de *semioses*.

A *noese* não pode ter, para o pensamento, uma generalidade absoluta, do contrário ela somente teria representatividade no mental puro. Ela precisa de vínculos, de discernimento, os limites necessários, de multiplicidades de registros de representação, da capacidade de migrar de um registro para o outro com facilidade da abstração do pensamento, para só aí ganhar capacidade de inovar em inúmeras outras criatividades de *semioses* necessárias. Por isso a *semiose* a realimenta com os discernimentos e as múltiplas linguagens de possibilidades de registros para sua evolução. Por sua vez, a *noese* realimenta as *semioses* com suas generalizações que podem produzir aplicabilidades ainda mais diversas, estendendo seus limites.

Uma estende os limites da outra à medida que se realimentam e se sofisticam. As atividades cognitivas precisam das duas e à medida que a consciência trabalha com ideias e aplicabilidades, elas amplificam sempre seus limites.

2.6 - A FORÇA DA ANALOGIA

A Analogia é uma das figuras da argumentação, introduzida por Aristóteles, fenômeno da aprendizagem e do ensino, relacionada ao pensamento abstrato e à inteligência humana.

Em Marías (MARIAS, 2015), na sua obra “História da Filosofia”, a analogia foi usada por Aristóteles como terceiro elemento de argumentação científica: dedução, indução e analogia. É quando se incluem relações mais íntimas e estreitas, como a emoção, a razão e o caráter. Produz-se uma intensificação na memória, uma vez que atingem três setores importantes do cérebro: a memória emocional ou psicossomática: o *pathos*; a memória de uso da racionalidade, a partir do mental, a inteligibilidade da razão: o *logos*; e finalmente, a memória ética ou da autenticidade, do uso do caráter, no caso: o *ethos*. As argumentações que caem dentro de um nível científico para Aristóteles, de tal forma a produzir estudos cognitivos para realizar uma pesquisa, são a dedução, a indução e a analogia, a analogia sendo o elemento criativo e coadjuvante para realizar a dedução e a indução.

A abdução foi um quarto elemento, ao modo de Aristóteles, acrescentado por Charles Sanders Peirce (PEIRCE, 2015, p. 32-35). Este conceito de abdução dado por Peirce coincide com o conceito semelhante em muitos de seus elementos ao conceito de sincronicidade dado pelo psicólogo analítico alemão, Carl Gustav Jung (1875-1961) (JUNG, 2011, p.5-124). Assim, este quarto elemento, denominaremos sincronicidade, devido ao desgaste do nome abdução, utilizado em outros conceitos e situações na atualidade.

Assim a dedução, a indução, a analogia e a sincronicidade são procedimentos gerados para a aquisição de conhecimentos novos, sejam históricos, artísticos, adivinhatórios, detetivescos, científicos, ou de pesquisa.

Enquanto a dedução é um procedimento racional saído do estudo antecipado para verificar ou enquadrar/comprovar um novo conhecimento como sendo já previsto por teorias mais gerais, a indução é um processo inverso, em que se parte das partes para se chegar a uma teoria geral.

Em suas definições, temos que analogia é uma relação de correspondência ou de semelhança de objetos ou pessoas, que apesar de serem diferentes, tem pontos em comum. Como exemplo, temos a analogia entre o diamante e o grafite, que apesar de serem totalmente diferentes em suas formas, ambos tem a semelhança interna de que são feitos somente de átomos de carbono, têm estruturas geométricas diferentes, pois enquanto o grafite tem geometria hexagonal e plana, portanto bidimensional, em que um hexágono desliza sobre o outro, sem solidez tridimensional, o diamante tem estrutura geométrica tridimensional cúbica, caracterizando a solidez tridimensional. No entanto, se o grafite é

submetido a altas pressões, ele se transforma em diamante. O grafite no interior de uma montanha, sujeito a altas pressões gravitacionais, o peso das rochas acima dele, durante muito tempo, se transformará no futuro, em diamante.

No contexto jurídico, a analogia é utilizada, para certos casos, em que não havendo leis previstas para o caso, elas recebem um procedimento análogo, através de citação de semelhança, de uma mesma norma jurídica tomada em ações análogas ocorridas anteriormente. Esta normatização da analogia é chamada no direito de Jurisprudência. Em países como a Inglaterra onde não existem leis, sempre se utiliza o mecanismo do bom senso e da Jurisprudência que é a analogia aplicada como argumentação anterior. A analogia é usada em escritas linguísticas, no caso em que aparecem palavras repetidas na mesma frase, assim se busca trocá-las por palavras sinônimas, que representam significados análogos, neste caso para maior diversidade de palavras, e neste caso se consulta um dicionário analógico. Fenômenos análogos recebem experimentos parecidos para checagem de suas variáveis.

Na biologia, a analogia no campo da zoologia ou da anatomia ou da fisiologia é empregada na relação de semelhanças no âmbito da parte funcional ou da parte morfológica dos organismos vivos. Características morfológicas (razão de forma) ocorrem geometricamente em inúmeras realizações, como no caso da construção de um edifício, que deve conter forma semelhante em todos os andares exceto nos materiais, na quantidade da dureza do cimento a cada andar, que à medida que sobe o edifício, gradativamente, deve receber menos cimento, em quantidades cada vez menores, em quantidade, pois deve suportar menor peso dos andares superiores e ao mesmo tempo precisará segurar menos peso acima dele.

A assimilação necessária à memória, ocorre graças às múltiplas comparações associativas, por semelhança, por repetição e por lógica. Muito da lógica é justificada pela semelhança de raciocínios anteriores, espécie de jurisprudência do pensamento. As linguagens utilizadas pelo pensamento, transformadas pela expressão linguística contextualizada, ou pela linguagem lógico-matemática, são transformadas através da estrutura semiótica do que percebemos. A analogia abrange todas as figuras de Didática e promove grandes finalidades ao desenvolvimento Científico.

Como compreender mais o que chamamos de Analogia, de maneira que se possa contribuir e realizar mais, para o desenvolvimento do Pensamento Científico, Matemático e Linguístico?

A mimese ou imitação é um elemento utilizado quase todo o tempo, principalmente pelas artes cênicas e dramáticas. E a mimese nada mais é do que a semelhança de uma atitude, uma linguagem, uma jeito de ser, um trejeito, uma forma do rosto, uma frase característica, um jeito de andar, se vestir, uma ideia repetida, uma atitude **analógica** à da pessoa que se admira ou que se imita. A mimese foi e é, um dos elementos essenciais para a evolução da inteligência animal e do ser humano. É como a inteligência se mistura às outras consciências, teórica ou virtualmente, para atingir o mesmo patamar da outra, nem que seja por pequenos detalhes de semelhança, imitação parecida, pensar-se momentaneamente da mesma maneira.

É como a consciência pode se misturar às outras consciências, por analogia, e por um momento para se deixar ser semelhante e entender o ponto de vista do outro. Esta é a base do ensino e fundamento da aprendizagem do fenômeno da sintonia e também do fenômeno de humanização, ou seja, quando saímos de nós mesmos para nos sentirmos no lugar do outro de forma análoga nós ajudamos o outro a superar-se, nós cooperamos, nos humanizamos, nos unificamos ao outro, nos tornamos menos separados, mais universais, mais unidos, mais assistenciais, mais análogo ou semelhante ao outro.

É a grande função do trabalho voluntário, o aprendizado de se fazer gratuitamente, apenas pelo fato de ajudar, estar junto, compartilhar, doando sua capacidade, sem pensar em trocas, se humanizar, se universalizar, por amor à convivência, sem moeda de troca, sendo que a moeda de troca é virtual, ou seja, é ver a evolução do outro, o prazer de ver o outro crescer, é ver a universalidade de um conjunto melhor de pessoas, tendo-se consciência de que se cresce em conjunto, na unidade da convivência impagável. Tem-se a consciência de que se cresceu em compreensão na forma mais eficiente de auxiliar o crescimento do outro. Esta é um dos maiores treinamentos que de alguma forma o professor em atuação corporativa com consciência de aperfeiçoamento constante, realiza. E seus alunos também devem aprender a realizar, ao ensinar o colega de suas próprias percepções e sentir que o outro também cresceu.

O mesmo pode ocorrer com o médico, se ele trabalha de forma corporativa, sem que cuide do próprio negócio, do contrário ao misturar funções, faz analogias indevidas, suas decisões podem servir ao negócio e não ao curar com eficiência.

O amor pela eficiência do bem ensinar (professor), não pode se misturar ou se produzir analogia, com a falsidade do discernimento, no egoísmo do ganhar mais dinheiro, atrasando o saber ou à falsidade do ensinar, ou o sonegar de conhecimento.

O amor pela eficiência e do aperfeiçoamento, do auxiliar bem, a um conjunto de pessoas (função do político, ou do administrador) ao se construir para o uso de todos, não pode se misturar ao egoísmo do ganhar poder, enganando que se construiu sem nunca terminar, alegando-se que está se fazendo, ao propagandear enganosamente, ao se criar falsas analogias quando se relaciona boas atitudes com falsas soluções, ideologicamente. Este é o uso indevido e o errar-se ao aplicar a analogia. Analogias escusas podem ser criadas para benefícios indevidos.

O amor pela eficiência do bem curar o indivíduo (médico), não poderia se misturar ao egoísmo de se ligar analogicamente o procedimento do uso de um medicamento caro, ou tratamento longo, ao uma resultado da falsa promessa de cura, ou de se associar a analogia do lucro pessoal, ao da indicação de uma cirurgia sem precisão de consequências duvidosas, ou mesmo se alegar o acréscimo falso de saúde futura ou de se matar pela indicação errônea de um tratamento com a finalidade de ganho pessoal.

O se relacionar por analogia o serviço falso pelo serviço real visando ganhos escusos, este acaba por produzir o atraso do bom caminhar da humanidade, é o burlar à unidade do conjunto para justificar ganhos corporativos sem serviço real, o atrasar da evolução do conhecimento visando ganhos pessoais, é o não realizar pelo bem de todos, usando formas ineficientes e burlando o trabalho real.

Portanto o uso da analogia é a capacidade natural do ser humano de relacionar tudo o que se aprende, no momento em que se consulta os próprios arquivos mentais, com tudo o que já se aprendeu no passado ou no presente, em arquivos internos de significados e atividades analógicas, semelhantes, onde a memória é auxiliada por essa universalidade de relacionamentos que se tornam unas.

Mas a autenticidade da consciência deve vir junto com analogias construtivas e honestas.

Por isso as analogias errôneas podem também serem usadas para propagandear situações de falsidade ideológica ao unir um feito de bondade a uma atitude egoística de um grupo sem rendimento de trabalho em troca da evolução ineficiente do todo, na realização da bondade não honesta, desprovida de autenticidade. No entanto, na Matemática, a lógica não dará forças às falsidades que terão vida curta, pois sua linguagem racional e axiomática não dá vazão à argumentação discursiva sem a devida demonstração axiomática lógica o que a faz uma ciência que se realizadas analogias falsas, elas de forma evidente, imediatamente serão reveladas.

Usaremos na Geometria das Dimensões, algumas vezes este princípio Analógico nos diversos elementos dimensionais crescentes em características que se repetem semelhantemente a cada nova dimensão. A visão do todo não pode ser substituída pela visão de uma única peça solta de forma incompleta. A analogia vem com o conhecimento de todas as peças, direcionando-as para a *noese* do conhecimento. Na Educação Matemática os elementos que se mantiverem resistentes a todas as passagens de soluções de situações propostas se mostrarão fortes, e ainda mais, através de demonstrações matemáticas, pode-se fortalecer essas convicções analógicas *ad infinitum*, podendo-se ter plena confiança nos seus propósitos.

Brousseau, também, faz uma chamada à utilização da analogia e diz o seguinte:

A **analogia** é um excelente meio heurístico quando é utilizado sob a responsabilidade daquele que a utiliza. Mas a sua utilização na relação didática faz dela um temível meio de produção de efeitos “topázio”. Trata-se, contudo, de uma prática natural: se os estudantes falharam na sua aprendizagem, é necessário dar-lhes uma nova oportunidade de aprenderem o mesmo assunto. Eles sabem que é assim. Mesmo que o professor dissimule o fato de que o novo problema se assemelha ao antigo, os estudantes procurarão - legitimamente - as semelhanças entre eles, a fim de transportarem - já pronta - a solução que lhes foi dada. Esta resposta significa que a considere idônea para a questão colocada, mas apenas que reconheceram, por meio de determinados indícios, talvez perfeitamente exógenas e não controlados, que o professor queria que eles a produzissem (BROUSSEAU, 1996, p. 84).

Como Brousseau nos indica, a analogia é um excelente instrumento de criação. Se existem métodos ou referenciais teóricos, que já se conhece, e que podem ser utilizados, para resolver parte do problema, não se necessitaria aprender o problema até ali novamente, uma vez, que seu mecanismo e seu método são análogos à outros já conhecidos. Isto facilitaria de realizá-lo da mesma forma até ali, mas não significa que fica-se livre de se acrescentar as diferenças de representações, ou falhar na falta de conhecimento de saber

migrar de uma representação à outra com a destreza dos detalhes do conhecimento complementar, realizando a analogia simplesmente sem a necessidade da complementação do discernimento necessário, ou do aperfeiçoamento decorrente da consciência dos erros cometidos nas tentativas realizadas.

Mas, se for utilizado de forma apressada não se consegue perceber as pequenas diferenças e discernimentos que dever-se-ia ter, assim acaba-se por cometer pequenos erros, obter formas e resultados enganosos. Por isso o cuidado de assimilação de todos os detalhes da modelagem é essencial.

Brousseau se refere ao efeito Topázio em que o professor já se adiantando à ignorância do estudante, tenta suprir suas falhas por antecipação, mas como esta ação do professor não se origina do esforço pessoal do estudante, ele não resulta em um aprendizado completo. Assim, o aluno percebe as analogias com problemas anteriores e ao tentar transpor para os atuais, falha por falta do discernimento adequado.

Deve-se deixar o estudante perceber seus erros de forma autêntica e encorajá-lo a trazer para si o conhecimento, memorizar, mimetizar, para que o conhecimento de forma natural passe a pertencer a ele, após bem-sucedidas repetições, permitindo que os enganos sejam aperfeiçoados, de tal forma que os detalhes sejam percebidos em toda sua extensão, migrando de uma representação para outra sem as falhas previstas.

Princípios Analógicos tiveram que ser construídos para a Geometria das Dimensões, sendo necessários para que a medida que se avance no crescimento das dimensões tenha-se semelhanças de ocorrências que irão ocorrer em formas análogas mas não iguais, à medida que as variáveis dimensionais crescentes e distintas, fazem repetição de resultados e modelagens semelhantes. Existem sempre resultados e procedimentos que se repetem analogamente. Ao longo dessa pesquisa percebemos que existem quatro grandes princípios analógicos dimensionais e válidos para todas as dimensões, que serão delineados no **Capítulo 4**, após o delineamento da dimensão um.

Os Princípios Analógicos Dimensionais, tiveram a finalidade de auxiliar o Professor em sala de aula, no momento em que forem aplicados os jogos para descobertas dimensionais em sala de aula por meio da Teoria das Situações Didáticas (TSD), em trabalhos futuros, estes princípios poderão ser percebidos pelo estudante, e se não forem, no momento em que o Professor for aplicar a fase de Institucionalização ao final de jogos preparados ele deverá citar esses Princípios Analógicos Dimensionais.

2.7 - TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

“No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito é obstáculo à espiritualização.”
GASTON BACHELARD, 1938

Deixo aqui registrado os principais momentos da TSD, uma vez que considero que esta teoria deve ser uma das melhores possibilidades de aplicação ao ensino, e ao uso da aprendizagem pelos estudantes, em trabalho posterior futuro no ensino da Geometria das Dimensões.

Chegamos a desenvolver um Capítulo nesta pesquisa, fazendo a aplicação da Teoria das Situações Didáticas ao estudo das Dimensões na Geometria, no entanto, não foi adicionado a esta tese, por já estar muito extensa. No entanto, desejamos deixar registrado que a aplicação da TSD a este estudo nos fez gerar um aprofundamento maior na generalidade do estudo das Dimensões que estão aqui distribuídas ao longo desta pesquisa apesar de retirado seus elementos de foco que nos aplicamos. É interessante observar como as metodologias nos ajudam na síntese e extensão dos estudos a serem desenvolvidos, ampliando os horizontes e as aplicabilidades dos assuntos de interesse.

Brousseau (2002) ressalta, na Teoria das Situações Didáticas, a busca de um modelo de interação preparado pelo professor e que se adéqua à uma situação de eficiência do ensino que facilita o aprendizado.

De acordo com Brousseau, o estudante aprende se adaptando ao ambiente que o rodeia, enfrentando dificuldades, contradição, desequilíbrio, à maneira como ocorre na vida social. Neste processo de adaptação, o estudante se manifesta com respostas novas, buscando soluções para se manifestar e sobreviver. O professor cria formas, questionamentos e adapta o *milieu* (ambiente, meio, características conceituais, objetos, instrumentos de manipulação do saber), para que haja um direcionamento que objetiva a aquisição dos novos conhecimentos matemáticos.

A situação didática é uma relação entre o estudante, grupo de estudantes, *milieu* e o professor, para obtenção de um saber instituído.

Uma situação adidática é planejada sem que a intenção de ensinar seja revelada, mas o conhecimento passa a ser adquirido informalmente, pelo interesse ao assunto, pelo jogo previamente preparado, pela interação do estudante com a situação-problema proposta.

Segundo Brousseau (2002), cada conhecimento pode ser construído por meio de um conjunto de situações adidáticas, chamadas de situações. Para Almouloud (ALMOULOU, 2010, p. 34), uma situação fundamental “determina o conhecimento ensinado a um dado momento e o significado particular que esse conhecimento vai tomar do fato tendo em vista as escolhidas das variáveis didáticas e as restrições e reformulações sofridas no processo de organização e reorganização dela”.

Na modelagem das situações didáticas é possível decompor a situação em quatro fases ou dialéticas dominantes: ação, formulação, validação e institucionalização.

A **dialética da ação** ocorre quando se coloca um problema ao estudante, e ele começa a agir sobre esta situação até que ocorra um retorno de informações do estudante, resultado de suas ações. O estudante julga o resultado de sua ação e a reajusta, sem a intervenção do professor, ou mesmo abandona o seu modelo criado para criar outro que melhor se adapte à solução e seus resultados. Sendo assim, necessárias são as retroações no ambiente de situações criadas. Nas palavras de Brousseau (2002).

“Agir” consiste para um sujeito, escolher diretamente os estados do *milieu* antagonista em função das próprias motivações. Se o *milieu* reage com uma certa regularidade, o sujeito pode ser conduzido a antecipar essas reações e a levá-las em conta em suas próprias ações. Os conhecimentos são o que permite produzir e mudar essas “antecipações”. O aprendizado é o processo pelo qual os conhecimentos se modificam. Podemos representar esses conhecimentos pelas descrições de táticas (ou procedimentos) que o sujeito parece seguir ou pelas declarações que o sujeito parece levar em conta, mas aqui, trata-se de projeções. A manifestação observável mostra um padrão de resposta explicado por um “**modelo implícito de ação.**”¹³ (BROUSSEAU, 1997, p. 6, tradução nossa)

A **dialética da formulação** busca formular um modelo, em uma linguagem escolhida, compreensível, aplicável à solução do problema. Como nos estabelece Brousseau abaixo.

¹³ “Agir” consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ces réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces “anticipations”. L’apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient. Nous pouvons représenter ces connaissances par des descriptions de tactiques (ou procédures) que le sujet semble suivre ou par des déclarations dont le sujet semble tenir compte, mais il ne s’agit que de projections. La manifestation observable est un patron de réponse expliqué par un “**modèle implicite d’action.**” (BROUSSEAU, 1997, p.6.)

O repertório dos “modelos implícitos de ação” é muito complexo e seus modos de estabelecimento também. Pode-se suspeitar com Bateson (1986) que a possibilidade de formular um conhecimento implícito muda por sua vez suas possibilidades de tratamento, de aprendizagem e de aquisição. A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito em retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que deve tornar necessário o uso pelo sujeito de uma formulação deve comportar (efetivamente ou de forma fictícia) um outro sujeito a quem o primeiro deverá transmitir uma informação. A situação deverá então realizar o esquema de Osgood. Contudo, se queremos determinar o conteúdo da comunicação, é necessário também que os dois interlocutores cooperem no controle de um meio externo, de tal maneira que nem um, nem ou outro possa fazê-lo sozinho e que o único meio de sucesso seja obter do outro a formulação dos conhecimentos visados.”¹⁴ (BROUSSEAU, 1997, p. 7, tradução nossa)

A **dialética da validação** busca validar o modelo criado, pedindo mais explicações, rejeitando explicações não claras, discordando, apresentando um modelo melhor, refutando afirmações, produzindo comparações, estabelecendo aproximações, gerando inteligibilidade, retirando partes sem sentido, mantendo a relação entre a emissão, o recepção, o intercâmbio, o modelo, o professor, o milieu, na validação dos elementos em debate.

Na **dialética da institucionalização** busca-se usar os modelos desenvolvidos pelos estudantes, para fixação do saber, em que, nesta fase entra o professor para relacionar e colocar de forma organizada as ideias desenvolvidas na situação, tornando-a oficial para os estudantes e visando sua incorporação, a posse do saber com ganho de causa ao conhecimento. (ALMOULOU, 2010, p.31-54).

A dialética desenvolve as principais formas de como se pensar e de se argumentar, remonta à antiga Grécia. A dialética inicia-se com duas principais composições: a dedução e a indução (Parmênides), vindo após a analogia (Aristóteles) e posteriormente a sincronicidade (Peirce e Jung).

As dialéticas. Cada situação pode fazer evoluir o sujeito, mas também pode evoluir, por sua vez, de modo que a gênese de um conhecimento

¹⁴ “Le répertoire des “modèles implicites d’action” est très complexe et leurs modes d’établissement aussi. On peut soupçonner avec Bateson que la possibilité de formuler une connaissance implicite change à la fois ses possibilités de traitement, d’apprentissage et d’acquisition. La formulation d’une connaissance correspondrait à une capacité du sujet à la reprendre (la reconnaître, l’identifier, la décomposer et la reconstruire dans un système linguistique). Le milieu qui doit rendre nécessaire l’usage par le sujet d’une formulation doit donc comporter (effectivement ou fictivement) un autre sujet à qui le premier devra adresser une information. La situation devra donc réaliser le schéma d’Osgood. Mais si nous voulons déterminer le contenu de la communication, il est nécessaire aussi que les deux interlocuteurs coopèrent dans le contrôle d’un milieu externe, de telle sorte que ni l’un ni l’autre ne puisse le faire seul et que le seul moyen d’y réussir soit d’obtenir de l’autre la formulation des connaissances visées.” (BROUSSEAU, p.7, Cours, 1997)

possa ser o resultado de uma sucessão (espontânea ou não) de novas perguntas e respostas em um processo que eu tinha qualificado na época de dialética. Nesses processos, as sucessivas situações de ação, formulação e prova podem ser combinadas para acelerar o aprendizado (espontaneamente ou voluntariamente provocado)¹⁵. (BROUSSEAU, 1997, p. 8, tradução nossa)

Sócrates (em torno de 300 A.C) a utilizou apresentando seu conjunto com o método da maiêutica, que tem o significado de “dar a luz”, “parir”, que pressupõe a ideia de que a verdade está latente em todo ser humano, podendo aflorar aos poucos a medida que se responde a uma série de perguntas simples, quase ingênuas, porém perspicazes.

Segundo Aristóteles (1952) a dialética, *διαλεκτική*, foi criada por Zenão de Eléia, que significa “*caminho entre as ideias*” sendo um método de diálogo, cujo uso inclui a contraposição e a contradição de ideias. É a arte de perguntar, responder e refutar. É o caminho para a lógica do provável. Atualmente tem o significado da arte do diálogo, da argumentação, capaz de esclarecer e definir os conceitos envolvidos nos assuntos propostos. A maiêutica passa então a ser um importante componente pedagógico, que estimula o estudante a construir o seu próprio conhecimento por meio de perguntas e respostas formuladas pelo seu mestre.

A dialética Hegeliana, de Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) estabelece quatro momentos: um primeiro momento o **axiomático**, que corresponde à **tese**, (**ação**), um segundo momento, a **definição** (**formulação**), ou a composição de inúmeras perspectivas, seguindo-se a **antítese**, (**refutação, devolutiva**), e finalmente em um terceiro momento, o **teorema** ou a **síntese**, (**institucionalização**). Estes elementos criados por Zenão e aperfeiçoados por Parmênides, Heráclito, Sócrates, Platão e Aristóteles, Hegel e Brousseau, são considerados os elementos da argumentação humana desenvolvida ao longo dos dois últimos milênios e utilizada para indução à criatividade do pensamento daquele que aprende, ajudado por aquele que ensina.

A **dedução** consiste em partir de verdades conhecidas, ou por intuição ou por demonstrações anteriores, por meio de um princípio geral (*noese*), na qual se demonstra e busca se explicar suas partes, distribuindo aplicabilidades diversas (*semioses* ou *semióticas*). Aplica-se a todos os outros estados particulares semelhantes (*semioses*). A

¹⁵ *Les dialectiques*. Chaque situation peut faire évoluer le sujet mais peut aussi, de ce fait, évoluer à son tour, de sorte que la genèse d’une connaissance peut être le fruit d’une succession (spontanée ou non) de questions nouvelles et de réponses dans un processus que j’avais qualifié à l’époque de dialectique. Dans de tels processus les successions de situations d’action, de formulation et de preuve peuvent se conjuguer pour accélérer les apprentissages (qu’elles se présentent spontanément ou qu’elles soient provoquées volontairement) (BROUSSEAU, p.8)

dedução se aplica a objetos e fatos particulares que se originam de uma teoria geral. Está associada a seguinte fórmula: todos os x são y (por definição ou teoria geral), se A é x (caso particular) então A é y (dedução), se enquadrando na teoria geral.

A razão, necessita de regras especiais e lógica para realizar uma dedução e se tais regras não forem respeitadas a dedução pode ser falsa. Aristóteles chamava o raciocínio dedutivo de silogismo. A dedução não traz conhecimento novo, mas um rigor lógico. Este rigor lógico foi utilizado na Matemática exaustivamente, fazendo surgir os mais belos raciocínios confiáveis das Ciências.

A **Indução**, segundo elemento dialético, realiza o caminho inverso da dedução, a realimentação. Parte-se de casos particulares, iguais ou semelhantes de mesmas propriedades, aplicabilidades (*semioses* ou *semióticas*) procurando uma lei geral que explica e subordina todos os casos particulares (*noese*). A razão também estabelece regras para guiar a indução.

A **Analogia**, outro elemento dialético da argumentação, se caracteriza por gerar novos conhecimentos, ao se produzir relacionamentos entre partes, pela semelhança a outras teorias, simetrias observadas em múltiplos casos de ocorrências já catalogadas. A analogia pode produzir uma rapidez maior à aquisição de conhecimentos, incremento ao ensino, e como consequência à aprendizagem, fazendo com que não se precise partir do zero para a compreensão dos fenômenos. Os Princípios Analógicos Dimensionais que serão aqui introduzidos em desenvolvimento à frente, seção 4.5.8, podem permitir aos fenômenos geométricos e suas aplicabilidades à Ciência, produzir-se novos discernimentos analógicos de tal maneira a permitir o desenvolvimento do conhecimento com novas percepções de simetrias e estabelecer semelhanças de pensamento em vários níveis de aplicabilidade.

A **Sincronicidade**, quarto elemento dialético da argumentação é uma extensão em que se acresce à criação científica, múltiplas formas de produção. Foi introduzido com o nome de abdução, pelo filósofo inglês Charles Sanders Peirce (1839-1914) (2015), mas devido ao desgaste desta palavra ao longo do tempo, por meio de outros conceitos, denomina-se por analogias de definição, este conceito de Sincronicidade, nome dado pelo psicólogo alemão, Carl Gustav Jung (1875-1861)(2011), por ter um significado semelhante ao definido por Peirce. Esta troca se deve à super utilização do nome abdução para outras funções, ficando desgastado na atualidade.

A sincronicidade se caracteriza por um conjunto de *insights*, coincidências acausais, ligadas entre si pelo mesmo significado, que vão surgindo, junto com os acontecimentos do dia a dia. Isto ocorre por meio de sinais, indícios, pistas, números, acontecimentos naturais, que aparentam não terem nenhuma relação com a pesquisa, mas que acabam se incluindo, desde que a mente preparada, se interligue com o conjunto de acontecimentos à sua volta e as relacione com seus estudos. A pessoa que esteja pensando o tempo todo nos problemas que tem a resolver vai gerar um conjunto sincrônico de acontecimentos, *insights*, soluções para seu problema, que virão junto com seus acontecimentos aleatórios do seu dia. Sua ligação mental com sua pesquisa irá gerar a chegada de pessoas e acontecimentos significativos à sua volta com conversas aleatórias, sobre assuntos correlatos que enriquecem o próprio trabalho, de acordo com o Princípio da Sincronicidade de Jung (JUNG, 2011).

Parece que o fato de estar se pesquisando alguma coisa e se pensando intensamente naquele assunto, isto produz um conjunto de sincronicidades de significados que somente o pesquisador sabe que ocorreu, de tal forma que isso permite a ele encontrar as respostas que procura nos acontecimentos e sinais que ocorrem no seu dia a dia.

A sincronicidade fornece diversos significados, respostas à mente preparada que irá perceber logo que os acontecimentos se procedem e estão interligados. Faz-se instantaneamente a ligação ao assunto dedicado, e ocorre junto com a racionalidade a junção com a ideia original procurada e a ser criada. No momento da pesquisa, a consciência deve se manter ligada ao assunto, na busca de fontes que farão surgir vários *inputs*, dicas, dando o passo a passo do encaminhamento necessário para o que se necessita e precisa ser feito.

A sincronicidade também pode ocorrer no sentido inverso, na condição em que a personalidade, a vontade, a descrença, o ceticismo do experimentador influencia diretamente no resultado da pesquisa produzindo um resultado contrário ao experimento e à compreensão.

Atividades de ensino e de aprendizagem apoiadas na TSD, foi pensada neste trabalho a fim de mobilizar os processos mentais disponíveis na estrutura cognitiva do estudante, no que tange às Dimensões na Geometria, dentre os quais inclui-se os processos dialéticos. E para que a mente do estudante se mantenha ligada ao aprendizado, são disponibilizados jogos, incentivos, para induzir o ensino e facilitar sua aprendizagem por

meio da autodescoberta diante da situação proposta, contando que a mente do estudante se mantenha ligada à disposição dos problemas colocados à própria volta.

A aprendizagem é uma conquista da consciência que a busca e ocorre em âmbito interno em relação ao aprendiz. Mas pode-se pressupor mediações diversificadas como aquelas induzidas por estímulos externos, como intervenções, direcionamentos, treinamentos, reconfigurações, tipos distintos de aprendizagem. A autoaprendizagem não inclui intervenção direta de ensino, mas a capacidade pessoal de observação e memória.

Se o aprendiz não buscar, não se interessar, não colocar seu ponteiro da consciência, sua lucidez, seu foco, não atentar aos detalhes, não refletir com analogias internas, não fazer comparações, não produzir aperfeiçoamentos, não haverá contato, não haverá entendimento, não haverá aprendizagem. O maior obstáculo à aprendizagem é a apatia. Por isso, a importância de o professor buscar formas distintas de incluir o estudante em situações de conluio com os elementos do aprendizado, como emoções, relações ao objeto em estudo, afinidade, relação de contágio, entre o estudante e a situação de conhecimento a ser apreendido, o *milieu* deve preparado para chamar a atenção à situação de jogo preparada pelo professor, que deve colocar o estudante dentro do problema, convivendo com ele.

Isto faz com que os estudantes, ao se depararem com as situações propostas pelo professor, com objetivo do conhecimento a ser adquirido, se utilizem de seus meios próprios, inteligência, capacidade de adaptação, experiência pessoal, sensações, debate no grupo, para propor soluções que gerem a própria percepção do saber e do conhecimento que se deseja passar, no meio do debate da situação que necessita de solução.

No **Capítulo 3**, discorrer-se-á sobre os vários aspectos das Dimensões, finalizando com o grande Teorema Dimensional de Pappus, do séc. III, d.C., onde as dimensões se associam em forma de construção umas às outras.

CAPÍTULO 3 - ESTUDO DAS DIMENSÕES - OBJETO MATEMÁTICO DAS ESTRUTURAS DIMENSIONAIS

“É impossível o ser humano aprender aquilo que ele acha que já sabe.”

EPITECTUS de Hierapolis (55-135, 80)

“Um especialista é alguém que conhece alguns dos piores erros que podem ser cometidos na sua especialidade e como evitá-los.”

Werner HEISEMBERG (1901-1976, 75)

“Duas coisas são infinitas: o universo e a estupidez humana. Mas, em relação ao universo, ainda não tenho certeza absoluta.”

Albert EINSTEIN (1879-1955, 76)

“Um estado é governado melhor por um homem bom do que por boas leis.”

ARISTÓTELES de Estagira (384-322, 62)

“O perímetro de nossa ignorância aumenta com o raio do nosso conhecimento. Portanto quanto mais sabemos, mais temos consciência do que não sabemos. Assim, sejamos cautelosos e universalistas nas nossas análises, pois, o conhecimento é finito, mas a ignorância, infinita.”

3.1 - INTRODUÇÃO

No capítulo presente, fizemos uma busca histórica, da utilização das dimensões, principalmente na área da matemática. Nos livros sobre dimensão, fizemos uma busca na álgebra linear na Física. Fizemos isso para discernir os outros usos, do que nós vamos desenvolver neste trabalho na área da Geometria, nosso assunto principal.

Na área da Física, existem três significados para a palavra dimensão. Uma delas é relativa às unidades em que são medidas suas variáveis. Podemos ter dimensão de velocidade ligada à grandeza comprimento (L) dividida pela grandeza de tempo (T), assim a **dimensão** de velocidade é $[V] = L.T^{-1}$. A força é o produto da grandeza de massa (M), pela grandeza de comprimento (L), dividida por uma grandeza de tempo quadrática (T^2), assim a **dimensão** de força é $[F] = M.L.T^{-2}$.

Um outro conceito ligado à palavra dimensão dentro da Física é que uma mesma grandeza, velocidade, por exemplo, pode ter uma dimensão de valores numéricos proporcionais ou iguais, mas em unidades distintas. Assim, a mesma grandeza pode ter dimensões distintas de valores, por exemplo, “a velocidade que um carro passou o outro, foi três vezes superior à **dimensão** do outro”. Outro exemplo seria ligado à velocidade de um carro que é de 30 m/s ou de 108 km/h, portanto têm dimensões de valores diferentes, mas é a mesma velocidade uma vez que as unidades são distintas.

Em uma outra significação, a palavra dimensão está ligada à questão da Geometria dos corpos, ou seja, à Geometria das Dimensões que é o principal objetivo dessa pesquisa e que será objeto de nosso estudo. Toda a Física do século XX necessitou dessa Geometria para se estabelecer. Iremos detalhar a Geometria das Dimensões no **Capítulo 4**, aplicando a metodologia sugerida por Duval.

Na área da Matemática, o conceito de Dimensão aparece nos (1) sistemas de equações de várias variáveis, (2) nos tensores, (3) na álgebra de funções, (4) nas matrizes, (5) na álgebra linear, (5) na geometria não euclidiana etc.

3.2 - LIVROS SOBRE DIMENSÕES NO SÉCULO XIX

Encontramos trabalhos que discorrem sobre a Geometria das Dimensões, de forma esparsa, mas principalmente na forma de Geometrias não euclidianas. Encontramos trabalhos que manifestam sobre a quarta dimensão ou dimensões maiores como as mencionadas na Física. Não encontramos trabalhos, que descrevessem com detalhes Reconstruções Dimensionais na Geometria na forma como desenvolvemos nesta pesquisa.

Utilizamo-nos na descrição da Geometria das Dimensões, do método usado nos *Elementos* de Euclides, o método de particionar a geometria em elementos parciais, anatomizando e analisando suas partes e propriedades em modos de diferentes abordagens. Realizamos a cada elemento definido, diferentes formas de visualização das Reconstruções Dimensionais, para melhor compreensão desses elementos.

O livro, “*Flatland, A Romance of many dimensions*”, de Edwin A. Abbott, Ed. Dover (ABBOTT, 1992, p.3-83), editado pela primeira vez em 1884, revela um local onde todos os seres vivem em duas dimensões, terra dos superficialinos, seres planares, cujo principal personagem é o Sr. Quadrado (Sir Square), cavalheiro conservador. Fala do clima, das casas e que as mulheres, no romance, ocupam um escalão mais baixo, pois são linhas, unidimensionais, seres linearinos. Os nobres são polígonos que quanto maior número de lados, maior sua categoria social, e os sacerdotes são círculos. Discutir a terceira dimensão é proibido, atitude sujeita à condenação de severa punição. *Square* é uma pessoa presunçosa, hipócrita, que nunca pensa em questionar sobre as coisas, como elas são.

Até que *Square* se encontra com o Lord *Sphere* que se parece com um círculo, mas que magicamente pode mudar de tamanho. Ele tenta explicar que vem de outro mundo, a *Spaceland*, onde os objetos têm três dimensões, terra dos espacialinos. *Square* resiste a

acreditar na existência da terceira dimensão. Frustrado, Lord *Sphere* tira o Sr. *Square* da dimensão dois e o joga na *Spaceland*. *Square*, flutua como uma folha na *Spaceland*, levado pelo vento, mas só consegue ver as fatias bidimensionais da *Spaceland*, secções transversais dos objetos e pessoas, onde estes mudam de tamanho, são multímodas, crescem ou evaporam fantasticamente no ar.

No livro “A Máquina do Tempo”, “*The Time Machine*”, o escritor inglês H.G. Wells (Herbert George Wells, 1866-1946, 80), livro de 1894, relata na p. 3 deste livro (WELLS, 2006, p.3,4) , a quarta dimensão, temporal, interligada à terceira dimensão espacial, de forma a fazer uma precognição à constatação real do funcionamento do espaço-tempo como interagentes e interligados fisicamente. Uma vez que, este romance de ficção foi escrito bem antes da teoria da relatividade, 1905, e do trabalho do matemático Hermann Minkowski (1864-1909, 45), em 1908, este trecho do livro, acaba por ser quase que um conhecimento prévio do que estava por vir. Hermann Minkowski (1864-1909, 45) de nacionalidade Russa, cresceu e estudou na Alemanha, uma vez que sua família alguns anos após o seu nascimento logo migrou para a Alemanha.

H.G. Wells relata em seu livro “The Time Machine” de 1894, p. 3 (WELLS, 2006, p.3):¹⁶

‘Claramente, o Viajante do Tempo prosseguiu, ‘qualquer objeto real precisa ter uma extensão em **QUATRO** direções: ele precisa ter **Comprimento, Largura, Espessura, e – Duração**. Mas através de uma natural enfermidade da carne, da qual exporemos a vocês em um momento, somos inclinados a não notar esse fato. Há realmente quatro dimensões, três das quais chamamos os três planos do espaço, e uma quarta, o tempo. Há, contudo, uma tendência de se configurar uma irreal distinção entre as primeiras três dimensões e a última, pela ocorrência de que nossa consciência se move intermitentemente em uma direção ao longo da última, do começo ao fim de nossas vidas. (WELLS, H.G. 1894, tradução nossa)

O matemático inglês Charles Howard HINTON (1853-1907, 54) trabalhava, em 1905, em um cartório de patentes nos Estados Unidos, Washington, D.C., na mesma época em que Einstein trabalhava em um cartório de patentes na Suíça, e escrevia seus cinco

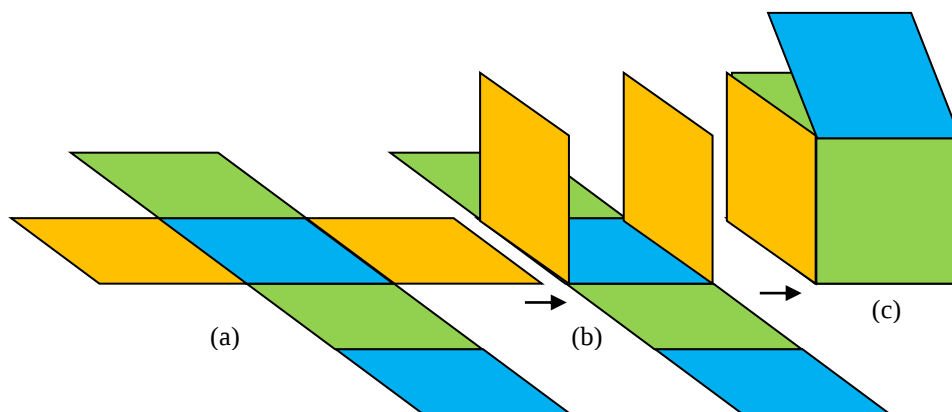
¹⁶ ‘Clearly,’ the Time Traveller proceeded, ‘any real body must have extension in **FOUR** directions: it must have **Length, Breadth, Thickness, and— Duration**. But through a natural infirmity of the flesh, which I will explain to you in a moment, we incline to overlook this fact. There are really four dimensions, three which we call the three planes of Space, and a fourth, Time. There is, however, a tendency to draw an unreal distinction between the former three dimensions and the latter, because it happens that our consciousness moves intermittently in one direction along the latter from the beginning to the end of our lives.’ (H.G. WELLS, 1894)

artigos que publicou neste ano de 1905, inclusive o da relatividade. Nunca se encontraram mais tinham vários cruzamentos de vida.

Desde pequeno, Hinton, tinha uma obsessão pela quarta dimensão. Divulgou e escreveu artigos como, “*What is the Fourth Dimension?*”, na *Dublin University Magazine*, e o *Cheltenham Ladies no College Magazine*, reproduzido em 1884 da qual acrescentaram o subtítulo “*Fantasmas Explicados*” (HINTON, 1908). Hinton mostrava como obter o cubo a partir do corte de suas faces na segunda dimensão e sua dobradura, estabeleceu cubos na terceira dimensão, que dobrados para a quarta dimensão obteria o hipercubo. Hinton influenciou Salvador Dali que fez uma pintura do *Christus Hiperubus*, como mostram as figuras 6 e 7.

A **Figura 6** mostra a representação de um cubo com suas faces externas, espalhadas e abertas, em duas dimensões, tendo sua gradativa montagem feita de dobraduras indo para três dimensões. Note-se que as quatro faces laranja e verde, são dobradas perpendicularmente à dimensão dois, a qual a face azul permanece na dimensão dois, e as outras quatro faces, duas laranja e duas verde, serão dobradas, perpendicularmente à dimensão dois, ou seja, para a terceira dimensão, levando junto à outra face, a azul, que ao final, se dobra em distância igual ao seu lado do outro lado na dimensão três e paralelamente a sua outra face azul que permanece na dimensão dois.

Figura 6 - Cubo com suas faces externas, espalhadas e abertas em duas dimensões



Fonte: Elaborado pelo autor

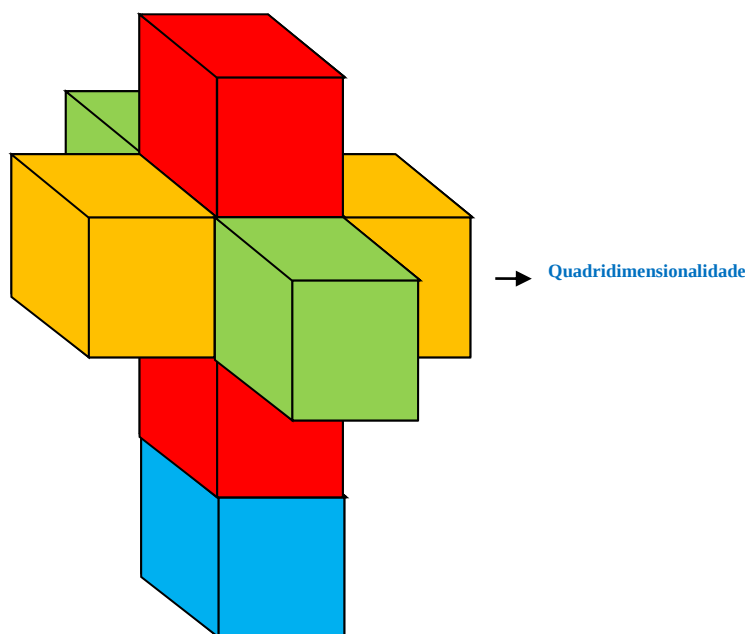
Podemos observar que para preencher o cubo de forma volumétrica, temos que acrescentar infinitas faces paralelas, quadrados planos, de cores iguais, pode ser paralela às faces azuis, com um incremento infinitesimal em cada uma destas infinitas faces azuis, que preenchem o cubo paralelamente, entre cada uma das faces de cores iguais, no caso, direção

paralela à cor azul, ou poderia ser laranja ou verde, a fim de formar o volume sólido do cubo.

A **Figura 7** mostra a representação de um Hipercubo com suas faces externas, espalhadas e abertas em três dimensões, sendo que não é mostrada sua gradativa montagem em quatro dimensões ficando esta questão para ser esclarecida no Capítulo 4.

Na **Figura 6(a)**, o cubo está aberto e projetado em 2D e em (b) em 3D. Em Analogia, com o Cubo, na **Figura 7**, o Hipercubo (ou Tesseract) aparece representado somente aberto e projetado em 3D, não aparece em 4D. Em 4D deixamos para o **Capítulo 4**. A **Figura 7**, os oito sólidos cúbicos externos, cuja dobradura em direção à quarta dimensão, que não foi feita, que ficaria com infinitos cubos internos entre cada dupla de cubos externos, de cores iguais, dois azuis, dois vermelhos, dois laranjas e dois verdes, mostrando as quatro direções do espaço. Sua montagem em quatro dimensões será mais bem explorada no **Capítulo 4**.

Figura 7 - Hipercubo com suas faces externas, espalhadas e abertas, projetado em três dimensões



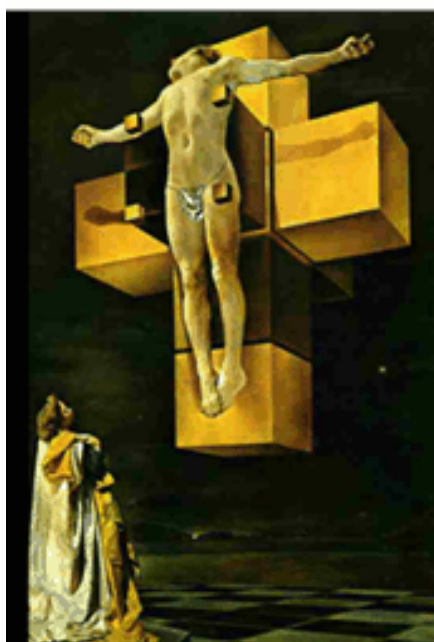
Fonte: Elaborado pelo autor

Vemos que os oito cubos do hipercubo em quatro dimensões, estão abertos na terceira dimensão, de forma análoga, ao cubo tridimensional em duas dimensões. Usaremos a seguir termos análogos aos conceitos que usamos em três dimensões, portanto, quando dissermos “dobrar” (dobrar da dimensão dois (superfície) para a dimensão três (espaço)) o conceito real será outro, poderia ser “*tribrar*”, (tribrar da dimensão três (espaço) para a dimensão quatro (hiperespaço)) seria “dobrar em três dimensões”. Quando esses cubos são “*tribrados*” para um “quarto eixo” a noventa graus dos outros três, o outro cubo azul, que

não aparece, uma vez que está escondido no interior dos outros cubos, verde, azul e vermelho, ficará na dimensão três, enquanto todos os outros são “tribrados” para a quarta dimensão. Haverá assim, oito cubos externos no hipercubo da quarta dimensão, dois verdes, dois vermelhos, dois azuis e dois laranjas, além de infinitos cubos, que preencherão o seu interior. Entender-se-á melhor isso quando estivermos na construção do hipercubo no **Capítulo 4**.

Na sequência, os cubos, vermelho, verde e laranja e um azul serão “tribrados” (dobrados por analogia) para a quarta dimensão, e levarão junto o cubo azul de baixo, para ser “tribrado” duas vezes e ficará oposto ao cubo da dimensão três, o azul. Podemos “observar” por analogia que haverá infinitos cubos “paralelos” de cores iguais, que se preencherão entre cada um deles, em direção ao outro, nas quatro direções azul-azul, ou poderia ser verde-verde, laranja-laranja ou vermelho-vermelho, a fim de formar o hipervolume do hipercubo. Entre cada dois cubos externos de cores iguais e que estão “paralelos”, onde seus centros estão perpendiculares à direção de um dos eixos, existem infinitos cubos internos entre eles, como veremos no **Capítulo 4**.

Figura 8 - Pintura do Christus Hiperubus, de 1954, pelo pintor surrealista espanhol Salvador Dali



Fonte: Metropolitan Museum of Art, New York City

<http://www.looklateral.com/wp-content/uploads/2015/02/Salvador-Dali-Crucifiction.jpg>

A **Figura 8** mostra como o assunto da quarta dimensão influenciou o pintor surrealista espanhol Salvador Dali (1904-1959). Realizou a pintura do cubo quadridimensional projetado na terceira dimensão, e como tem a aparência de uma cruz, quando aberto em três dimensões fez o *Christus Hiperubus* em 1954.

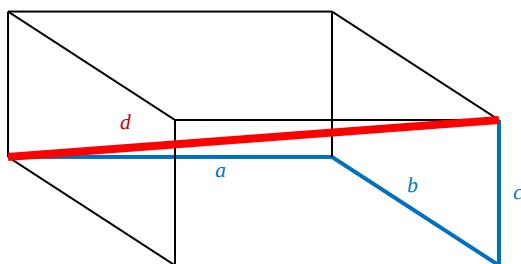
3.3 - AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NO SÉCULO XIX

Em 1905-1906, o matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) (POINCARÉ, 1905, p. 129-176) mostrou que fazendo o tempo ser uma quarta coordenada do espaço-tempo, ict , onde c é a velocidade da luz no vácuo e i a unidade imaginária, haveria uma regularidade entre os acontecimentos nas equações mecânicas e do eletromagnetismo.

Em sua publicação, e conferência em 1908 sobre seu artigo “*Space and Time*”, o matemático russo Herman MINKOWSKI (1864-1909) (1907-1909, p.75-88) e também no seu artigo “*The Fundamental Equation for Electromagnetic Processes in Moving Bodies*” (1907-1908, p.53-111) definiu o “cone de luz” mostrando que espaço e tempo formam um espaço vetorial real (x,y,z,ct) em quatro dimensões e que os eventos se classificariam, dentro do cone de luz, como *timelike* (tipo ou gênero tempo) e fora do cone de luz como *spacelike* (tipo ou gênero espaço). Ele analisa as equações do eletromagnetismo e as transformações de Lorentz, mostrando-as compatíveis com o continuum espaço-tempo.

Em uma famosa palestra, em 1854, em que estava presente o grande matemático Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855,78), o matemático Georg Friedrich Bernhard RIEMANN (1826-1866,40), rompe os limites da geometria Euclidiana, em uma das mais importantes conferências públicas da história da matemática. Riemann começa com o mais famoso teorema da matemática, o Teorema de Pitágoras, na relação entre os três lados de um triângulo retângulo, $a^2 + b^2 = c^2$. E estabelece que o Teorema pode facilmente ser generalizado para a terceira dimensão, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, como na **Figura 9**. E torna-se simples generalizá-lo para D-dimensões, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots = D^2$ (KAKU, 2000).

Figura 9 - Figura relativa ao Teorema de Pitágoras em três dimensões



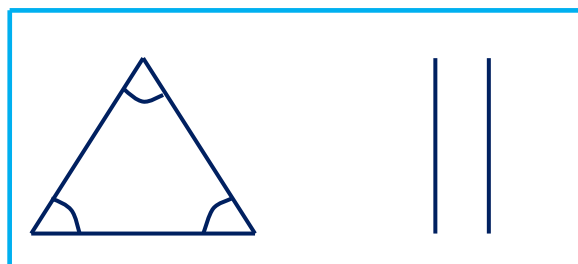
Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida, Riemann generalizou várias equações para os espaços de dimensões arbitrárias, e mostrou como esses espaços podiam ser planos ou curvos.

3.3.1 - A Geometria Plana de Euclides

Se o espaço for plano, temos a **Geometria Plana**, formada por **superfícies com “curvatura zero”**. Os axiomas de **Euclides** se aplicam para estabelecer as afirmações como estão ditas a seguir.

Figura 10 - Exemplo em representação da Geometria Euclidiana ou Geometria Plana



Fonte: Elaborado pelo autor

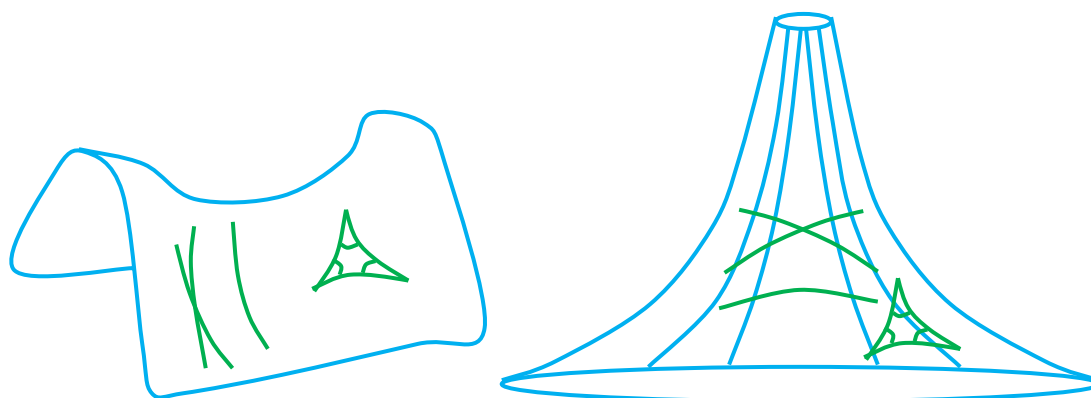
Como mostra a **Figura 10**, a Geometria Euclidiana ou Geometria Plana possui características que valem sobre uma superfície plana, superfície com “curvatura zero”. Sendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° . A distância mais curta entre dois pontos é uma reta. Linhas paralelas nunca se encontram. Por um ponto fora da reta, passa única reta paralela. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Uma circunferência tem seu perímetro igual a π vezes o diâmetro. (EUCLIDES p.97-99 p.481-483, 2009)

3.3.2 - A Geometria Curva de Lobachevsky-Bolyai-Gauss ou Geometria Hiperbólica

Considerando uma superfície curva, a menor distância entre dois pontos é uma geodésica, que se denomina de reta. Riemann mostra que, além de existirem as superfícies com “curvatura negativa” que já tinham sido descritas, existem também superfícies com “curvatura positiva”.

A **Figura 11** mostra as características da Geometria de Lobachevski-Bolyai-Gauss ou Geometria Hiperbólica, sobre uma superfície de uma Sela de cavalo ou a superfície de uma Trombeta, que é uma superfície com “curvatura negativa”, sendo a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre menor do que 180° e função do comprimento de seus lados, sendo ainda, que, por um ponto fora de uma reta, pode passar mais de uma reta paralela.

Figura 11 - Exemplo em representação da Geometria Lobachevski-Bolyai-Gauss ou Geometria Hiperbólica



Fonte: Elaborado pelo autor

As superfícies com “curvatura negativa” foram pesquisadas pelos matemáticos: o russo, Nicolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1792-1856,66), o húngaro Janos BOLYAI (1802-1860,58) e principalmente, o alemão, Johann Carl Friedrich GAUSS (1777-1855,78), considerado o maior matemático de todos os tempos e que influenciou os outros dois. Gauss sempre pensou nestas geometrias desde 1800 e influenciou indiretamente os matemáticos que construíram e desenvolveram estas geometrias: Lobachevsky, Bolyai e Riemann.

Os matemáticos, Nicolai **Lobachevsky** e János **Bolyai** apresentaram, de forma independente, a chamada Geometria Hiperbólica, ou a geometria em **superfícies com “curvatura negativa”** como é o caso de uma superfície em forma de **sela ou trombeta** que têm as características da **Figura 11**. De certa forma, Gauss tinha uma reputação a zelar, e tinha receio de introduzir tais mudanças e passar a ser malvisto na comunidade científica, que costumava alijar muitos matemáticos por práticas não ortodoxas. Por isso influenciava novos matemáticos de talento a desenvolver suas ideias não ortodoxas que formigavam em sua cabeça.

Para a geometria não euclidiana, a geometria hiperbólica, válida em superfícies como a sela de um cavalo ou uma trombeta ou uma geometria com curvatura “negativa”, valem as seguintes afirmações a seguir, para figuras geométricas em uma superfície hiperbólica.

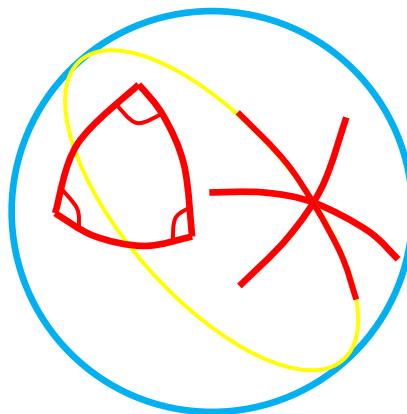
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° .

- A soma dos ângulos internos desse triângulo depende do comprimento dos lados.
- Quanto maiores os lados do triângulo menor a soma dos ângulos internos do triângulo, e se o triângulo for bem minúsculo ela tende a 180° .
- Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta paralela a ela.
- Uma circunferência tem seu perímetro maior do que π vezes o seu diâmetro.

3.3.3 - A Geometria Curva Riemanniana ou Geometria Esférica

A **Figura 12** mostra as características da Geometria Riemanniana ou Geometria Esférica. Sobre a superfície de uma Esfera, uma superfície com “curvatura positiva”, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que 180° , as retas são círculos máximos sobre a esfera, com centro coincidente com o da esfera, e por uma reta e um ponto fora da reta não passa nenhuma reta paralela.

Figura 12 - Exemplo de representação da Geometria Riemanniana ou Geometria Esférica



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Geometria Esférica** em superfícies com “curvatura positiva”, como a esfera, descoberta por **Friedrich Riemann**, que também foi influenciado por Gauss, têm-se as seguintes características:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180° .
- As geodésicas, a menor distância entre dois pontos, ou linha reta, são círculos máximos na esfera, e cujo centro desses círculos coincidem com o centro da esfera.
- Por uma reta e um ponto fora dessa reta não passa nenhuma reta paralela.
- Uma circunferência tem seu perímetro menor do que π vezes o seu diâmetro.

A matemática trazida por Gauss, Riemann, Cantor, Lobachevski, Bolyai sobre as geometrias na matemática, e desenvolvida no século XX, serviram para o desenvolvimento da Física do século XX.

3.4 - A GEOMETRIA DAS DIMENSÕES E REFERENCIAIS

Na Geometria das Dimensões procura-se aplicar o método estratégico dos Elementos de Euclides, à forma de ir buscando cada um dos Elementos parciais, um a um e ir classificando-os dentro das dimensões.

Para a reconstrução dimensional usamos a metodologia sugerida por Duval, em todos os elementos dimensionais elaborados:

- a) Reconfiguração Mereológica Heurística de toda a dimensão inferior em infinitos cortes de formato específico para cada elemento.
- b) Incremento infinitesimal em todos os infinitos elementos, reconfigurados mereologicamente, na direção da nova dimensão.
- c) Reconstrução dimensional colocando todas as peças em colagem dos infinitésimos, da forma específica de cada elemento.
- d) Reconstrução Instrumental da figura quando conveniente e fácil visualização.
- e) Seguindo Duval, aplicaremos periodicamente, no desenvolvimento do Capítulo 4, os quatro tipos de Registros de Representação Semiótica, o Figural Geométrico, o Discursivo da Língua Materna, o Tabelar e o Algébrico, para diversificar o ensino e facilitar a diversidade de visões do aprendizado.

Ressaltamos as Variáveis Geométricas de cada dimensão.

0D, o ponto, variável dimensional, o **Vértice, V**

1D, a linha, variável dimensional, a **Aresta, A**

2D, a superfície, a superfície, variável dimensional, a **Face, F**

3D, o objeto, variável dimensional, o **Sólido, S**

4D, o hiper-objeto variável dimensional, o **Hipersólido H ...**

5D, o hiper-5-objeto variável dimensional, o **Hiper-5-sólido H₅ ...**

A Equação Geométrica das Dimensões foi usada e se mostrou válida para todas as dimensões e todas as figuras convexas.

A equação de Euler, é a equação com maior proximidade à Equação Geométrica das Dimensões, mas válida apenas para a terceira dimensão. É a equação de Leonhard EULER (1707-1783), do século XVIII, que relaciona três dessas variáveis dimensionais,

Vértice, Aresta e Face, válida para as figuras tridimensionais convexas (COURANT E ROBBINS, 2000),

$$V - A + F = 2$$

Veremos como se aplicar nas diversas dimensões no Capítulo 4, a Equação Geométrica nas Dimensões (EGD), que será de importância no futuro deste trabalho de forma prática ao ensino e aprendizado desta equação de interesse no estudo da Geometria das Dimensões.

Nesta parte do presente capítulo, debateremos as múltiplas definições de dimensão, seus vários usos, até chegar ao ponto de vista desta pesquisa.

Da dimensão zero, utilizando as referências de Duval fazemos todas as Reconstruções Dimensionais, indo a construções crescentes até a dimensão quatro geometricamente. A partir da dimensão 5, passamos a desenvolver as Equações por meio dos Registros Discursivo, Tabelar e o Algébrico, já que a partir daí perderemos o Registro Figural Geométrico.

Desenvolvemos as dimensões fracionárias influenciadas principalmente pelas geometrias não euclidianas, e pelas aplicações na Teoria da Relatividade Geral e Geometria Riemanniana, que já havia trabalhado com dimensões maiores que quatro.

Existe o conceito de fractal, desenvolvido na matemática e aplicado principalmente no desenvolvimento da Teoria do Caos, o qual se atribui a um objeto geométrico, que pode ser dividido em partes repetitivas e que essas partes, têm semelhanças, com o seu objeto original. Tais fractais têm uma infinidade de partes que são congruentes e similares, aparecendo em escalas diferentes, e apresentando-se repetidas vezes, de forma recorrente ou iterativa. O modelo dos fractais foi criado na década de setenta, pelo matemático, Benoît Mandelbrot (1924-2010,86), Polonês. O conceito de Fractal está mais ligado ao conceito de Reconfigurações Mereológicas que se mantém na mesma dimensão espacial, e não ao conceito de Reconstrução Dimensional que estamos desenvolvendo nesta pesquisa. Assim também, o desenvolvimento que faremos neste trabalho, das dimensões fracionárias está ligada ao do crescimento dimensional, indo em direção à dimensões maiores, e não ligada ao conceito desenvolvido pela definição dos fractais que se mantém fixa na mesma dimensão geométrica, como a definimos nesta pesquisa.

3.5 - A GEOMETRIA DE EUCLIDES E AS DIMENSÕES

O intuito é discutir, em termos da Geometria das dimensões os elementos primitivos que fundamentaram a geometria euclidiana, que são ponto, reta, plano e espaço, associados às suas grandezas dimensionais. Nas palavras de **Euclides** (323-283 a.C., 40), no seu “**Os Elementos**”, livro I, que possui 23 definições, 5 postulados, 9 noções comuns e 48 demonstrações, ele estabelece, os elementos estruturais dimensionais de forma precisa, como ponto, linha reta, superfície e sólido:

1. Ponto é aquilo que nada é parte
 2. E linha é comprimento sem largura
 3. E extremidade de uma linha são pontos
 4. E linha reta é a que está posta igual com os pontos sobre si mesma.
 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
 6. E extremidades de uma superfície são retas.
 7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
- (EUCLIDES, 2009, p. 97)

E logo no início do livro XI ele estabelece: “1. *Sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade*”. (EUCLIDES, 2009, p. 481)

Euclides, na classificação dimensional que estamos fazendo nesta pesquisa, em seu primeiro item, do livro I, descreve sucintamente, a zerodimensionalidade, dizendo sobre o “*ponto que é aquilo que nada é parte*”.

O universo zerodimensional é uno, é como se nada pudesse alterá-lo, não há partes, portanto, não há conflitos, de si retorna a si mesmo, o produto de um por um dá um, a divisão de um por um dá um, e se colocarmos infinitos pontos em coincidência com o ponto, ele continua sendo o ponto, uno em essência.

Nos itens 2 e 3, Euclides define o que chamamos de dimensão um, ou seja, a linha ou segmento de reta e seus pontos terminais em número de dois.

No item 5, Euclides define o que chamamos de dimensão dois, ou seja, “*a superfície como aquilo que tem somente comprimento e largura*.”.

E no item 1 do Cap. XI, ele define o que se denomina de dimensão três, o sólido.

Sobre a bidimensionalidade, Euclides define, de forma simples, como nos dias de hoje, os dois eixos ortogonais e linearmente independentes x , y da geometria analítica definida no século XV, por René Descartes (1596-1650,54). Mas aqui, Euclides conceitua com simplicidade, o retângulo, citando seu comprimento, sua largura e sua área.

No mesmo livro I, Euclides trata em seguida, dos seus cinco Postulados:

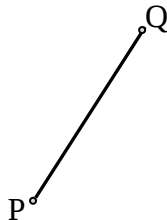
1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98)

Euclides, em seu “Elementos”, desenvolveu a geometria em treze livros, os livros I ao X tratam da geometria plana, e os livros XI, XII e XIII tratam da geometria espacial, corpos sólidos (EUCLIDES, 2009). A teoria axiomática de Euclides foi debatida e reorganizada, pelos matemáticos alemães Richard Dedekind (1831, 1916) e David Hilbert (1862-1843) (M. J. Greenberg, Euclidian and Non-Euclidian Geometries, 2008, p.138), os quais selecionaram os postulados que fundamentam a geometria, e partir deles saem as demonstrações de outras propriedades e conclusões geométricas.

3.5.1 - Primeiro Postulado de Euclides

“Por todo ponto P e por todo ponto Q não igual a P , existe uma única linha que passa através de P e Q .”

Figura 13 - Primeiro Postulado de Euclides

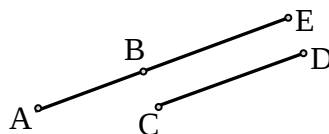


Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.2 - Segundo Postulado de Euclides

“Por cada segmento AB e por cada segmento CD , existe um único ponto E na linha AB tal que B está entre A e E e o segmento CD é congruente ao segmento BE .”

Figura 14 - Segundo Postulado de Euclides

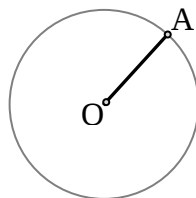


Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.3 - Terceiro Postulado de Euclides

“Para todo ponto O e todo ponto A não igual a O , existe um círculo com centro O e raio AO .”

Figura 15 - Terceiro Postulado de Euclides

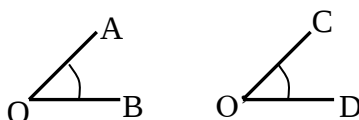


Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.4 - Quarto Postulado de Euclides

“Todo certo ângulo é congruente com um certo outro.”

Figura 16 - Quarto Postulado de Euclides

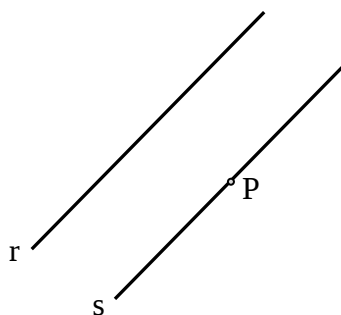


Fonte: Elaborado pelo autor

3.5.5 - Quinto Postulado de Euclides

“Para toda reta r e para todo ponto P que não pertence a r , existe uma única reta s que é paralela a r .” (Greenberg, 2007, p. 15-23)

Figura 17 - Quinto Postulado de Euclides



Fonte: Elaborado pelo autor

No entanto, o quinto postulado entrou em polêmica e debates constantes na primeira metade do século XIX, cuja alternância de raciocínios, resultaram na criação de duas geometrias não euclidianas: a Geometria Bolyai-Lobachevskyana ou Geometria Hiperbólica e a Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica.

Na associação tridimensional, do livro XI, Euclides começa a estruturação dos corpos sólidos, e define no item 1, que “*sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade*” (EUCLIDES, 2009, p. 481), descrevendo, portanto, o espaço tridimensional como aquele que tem comprimento (eixo x), largura (eixo y) e profundidade ou espessura (eixo z).

Estes elementos citados por Euclides, ponto, reta, superfície e sólido, estão associados às percepções dimensionais crescentes. O conceito associado à dimensão zero define o elemento que ressoa em dimensões posteriores ao **vértice (V)**, ou **ponto da dimensão zero**. A linha ou segmento de reta, que associa o conceito de comprimento, dimensão um, define o novo elemento, a **aresta (A) (edge (E))**. A superfície ou plano, associado aos elementos, comprimento e largura, na dimensão dois, associa o novo elemento de **face (F)**. E finalmente na concepção de espaço, que reúne os três elementos citados, comprimento, largura e profundidade, dimensão três, se liga ao conceito de unidade do novo elemento surgido de **sólido (S)**.

3.6 - O TEOREMA DIMENSIONAL DE PAPPUS

Descreveremos agora um Teorema de grande relevância para esta pesquisa, sobre as dimensões, que é o teorema de Pappus do século III, d.C.

O Teorema Pappus afirma que ao se rotacionar um corpo unidimensional, uma linha, em torno de um eixo fixo, por reverberação no espaço, obtém-se um corpo bidimensional, a partir do qual se determina uma forma universal e recorrente para determinar a medida da área dessa Superfície resultante dessa rotação.

E em uma segunda parte desse teorema, Pappus afirma que, ao rotacionar um corpo bidimensional, uma superfície, em torno de um eixo fixo, por reverberação no espaço, obtém-se um corpo tridimensional, a partir do qual se determina uma forma universal e recorrente de determinar o Volume desse Sólido resultante dessa rotação.

O matemático grego, Pappus de Alexandria (290-350,60), foi um dos grandes matemáticos da antiguidade, e é conhecido por seus oito livros de matemática, reunidos em “*Synagoge*” (Coleção). Foi mais um geômetra que trabalhou e estudou toda a Matemática já existente até então, e lançou um Teorema novo, justamente ligado às dimensões crescentes, apesar de não mencionar esse conceito.

Pouco é conhecida de sua vida, sabe-se de seus escritos e que tinha um filho Hermodorus que foi um professor em Alexandria. Pappus floresceu com seus trabalhos no século IV, um século antes da queda do Império Romano. Seu livro I foi perdido, e os outros se tem partes, mas não a totalidade. No seu livro VII, no prefácio são explanados os termos análise e síntese, e a diferença entre teorema e problema. Pappus então enumera os trabalhos de Euclides, Apollonius, Aristaeus e Eratosthenes, nos seus trinta e três livros ao todo, que dão a substância que ele entende, dão a elucidação dos temas necessários. E é neste livro sétimo que Pappus enuncia e demonstra o teorema que levou o seu nome.

O Teorema de Pappus tem a ver com a geometria das dimensões, uma vez que o teorema permite calcular medidas de áreas e volumes de figuras geométricas, partindo de uma figura geométrica de dimensão inferior para chegar a uma figura geométrica de dimensão superior.

Esse teorema foi redescoberto pelo matemático jesuíta e astrônomo Suíço, Paul Guldin (1577-1643). Guldin ficou conhecido por sua associação com o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler e por ter composto uma crítica ao método dos indivisíveis de Cavalieri. Por isso o teorema também é conhecido pelo nome de Teorema de Pappus-Guldinus, ou pelo nome de Teorema do Centroide de Pappus ou simplesmente Teorema de Pappus (DE SOUZA, 2016, p.66-68).

O teorema dimensional de Pappus estabelece de uma construção geométrica pode-se calcular a medida de área ou de volume de uma figura geométrica, que pode ser feita geometricamente pela rotação ou revolução de uma figura geométrica de dimensão menor, gerando uma figura geométrica de dimensão maior. Desta forma, ao rotacionarmos, uma linha em torno de um eixo fixo, gera-se uma superfície de área A ou se rotacionarmos uma área A em torno de um eixo fixo, obteremos a geração de um sólido de volume V , como resultado.

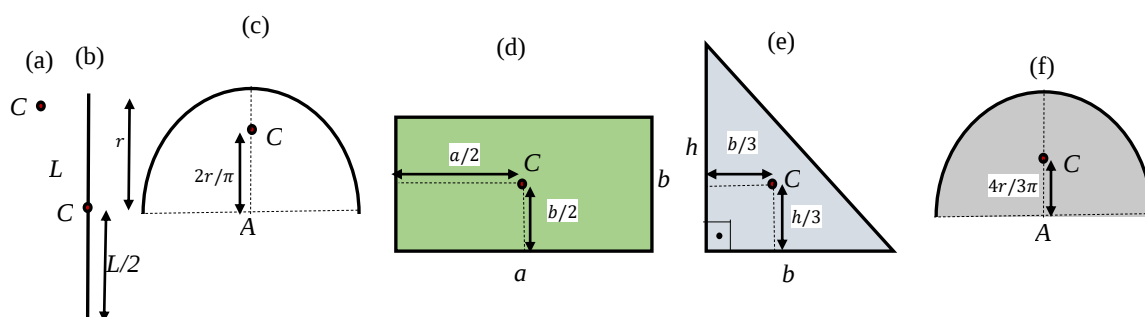
Para isso, ao rotacionarmos uma figura geométrica, e calcularmos sua área ou volume, temos que ter a distância $\bar{r}$ da figura que irá ser rotacionada até o eixo e de rotação. Como a figura a ser rotacionada está espalhada com muitos pontos no espaço tem-se que reduzir essa figura a apenas um ponto representativo dela, para poder obter-se a distância única $\bar{r}$. Este ponto a ser reduzida toda uma figura, teria que ser o ponto central de todos os pontos pertencentes à figura, para que possa assim representar toda a figura a ser rotacionada. Este ponto especial, teria que ser a média ponderada de todas as posições da

figura geométrica, para que possa representá-la como um todo. Este ponto representante de toda uma figura (superfície ou sólido), Pappus chamou de centroide ou centro geométrico dessa figura.

Os centroides de algumas figuras geométricas notáveis estão mostrados na **Figura 18**. Em (a) o centroide C de um ponto é o próprio ponto. Em (b) o centroide C de um segmento de reta, está no centro deste segmento de reta. Em (c) o centroide C do segmento de uma semicircunferência está a uma distância $\frac{2r}{\pi}$ do seu centro A , de construção, da semicircunferência. No item (d), o centroide C da área de um retângulo está bem no centro do retângulo, ou seja, no ponto de encontro de suas diagonais.

Em (e), o centroide C de um triângulo retângulo está a uma distância de um terço da sua base e a um terço de sua altura do vértice que contém o ângulo de 90° , do triângulo retângulo, ou seja, do vértice de encontro dos catetos. E finalmente em (f) o centroide C de um semicírculo está a uma distância $\frac{4r}{3\pi}$ do centro A , em sua simetria. Estes valores de centroides dessas figuras geométricas notáveis, faz com que se possa determinar a distância do eixo de rotação da figura até o centro geométrico da figura ($\bar{r}$), onde a figura como um todo fica representada por um ponto. O teorema dimensional de Pappus, será como veremos adiante.

Figura 18 - Posição do centroide de 6 figuras geométricas



Fonte: Elaborado pelo autor

A expressão geral do centroide de uma linha seria dada pela expressão a seguir, onde integra-se no numerador o produto de cada pedacinho infinitesimal de linha pela sua posição em relação a um sistema referencial, e divide-se este valor pela medida de comprimento total da linha. Esta posição representa o ponto centroide da linha.

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dL}{\int dL} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\int \bar{x} dL}{\int dL} ; \bar{y} = \frac{\int \bar{y} dL}{\int dL} ; \bar{z} = \frac{\int \bar{z} dL}{\int dL}$$

Para se calcular o centroide de uma superfície de medida de área A seria por meio da média ponderada de cada pedacinho infinitesimal de área (dA) pela posição ($\vec{r}$) desse pedacinho (dA). Neste caso, será dado pela integral do produto de cada pedacinho infinitesimal de área pela posição em um sistema de referência, dividida pela área total da figura.

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\int \bar{x} dA}{\int dA} ; \bar{y} = \frac{\int \bar{y} dA}{\int dA} ; \bar{z} = \frac{\int \bar{z} dA}{\int dA}$$

O centroide é portanto, a média ponderada da distribuição geométrica de todos os pontos do corpo, ponto em que todos os outros pontos estão distribuídos igualmente em torno dele. Representa o ponto, que se apenas nele apoiado, ele equilibra perfeitamente a figura toda no campo gravitacional, como o centro especial do corpo (seja linha, seja superfície, seja volume).

No que segue, vamos detalhar sobre o teorema dimensional de Pappus.

3.6.1 - Primeira Parte do Teorema Dimensional de Pappus

A primeira parte do Teorema Dimensional de Pappus é estabelecida abaixo.

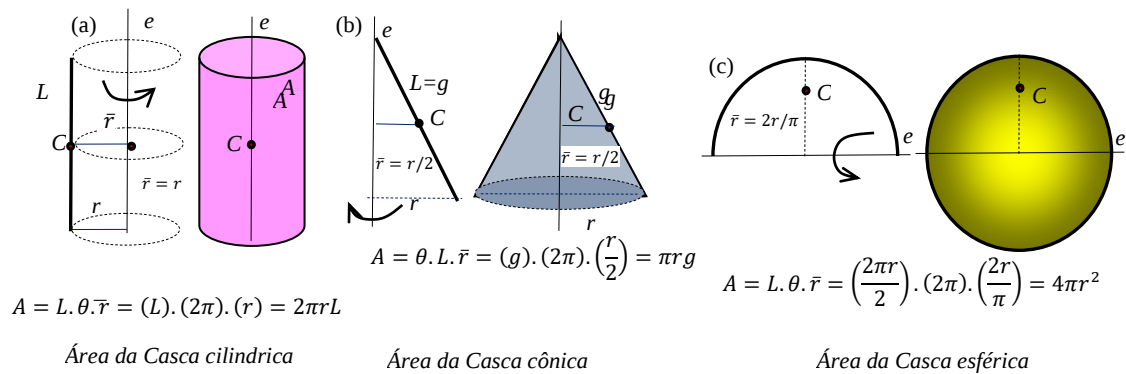
Teorema Dimensional de Pappus de 1D → 2D:

Uma linha de comprimento L (1D) ao ser rotacionada em torno de um eixo fixo, gera uma superfície (2D), cuja medida de área (A) é igual **ao produto** da medida do comprimento da linha L a ser rotacionada em torno de um eixo de rotação, o ângulo θ em radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e a distância $\bar{r}$, entre o eixo de rotação e o centroide da figura (linha de comprimento L), ou seja

$$A = L \cdot \theta \cdot \bar{r}$$

Esta distância $\bar{r}$ seria a distância entre um ponto e uma reta, ou seja, seria dada pela distância entre o centroide da figura, ou centro geométrico da linha (figura), até o eixo de rotação em que se girará a linha (figura).

Figura 19 - Teorema dimensional de Pappus, partindo-se de uma linha (1D) gera-se uma superfície (2D)



Fonte: Elaboração própria

Como ilustração deste teorema, temos a **Figura 19**.

Na Primeira Parte do Teorema Dimensional de Pappus mostrado na **Figura 19 (a)**, um segmento de reta paralelo ao eixo de rotação é posto para girar de um ângulo 2π radianos, uma volta completa, gerando a superfície de uma casca cilíndrica. Sua dimensão sobe de uma escala dimensional, passando de uma linha (1D) para uma superfície (2D). A medida da área, usando-se o teorema dimensional de Pappus é dado abaixo.

$$A = L \cdot \theta \cdot \bar{r} = (L) \cdot (2\pi) \cdot (r) = 2\pi rL = \text{área da casca cilíndrica}$$

Na **Figura 19 (b)**, consideramos um segmento de reta diagonal de medida de comprimento $L = g$, (g = geratriz do cone) e um eixo de rotação vertical. O eixo de rotação é tocado pela extremidade superior do segmento de reta, e fica a uma distância r da outra extremidade do segmento de reta. Ao rotacionarmos o eixo vertical de rotação, com uma rotação completa, o segmento de reta irá gerar a superfície de uma casca cônica. A expressão da medida da área é dada pelo Teorema Dimensional de Pappus que fica como mostrado a seguir.

$$A = \theta \cdot L \cdot \bar{r} = (g) \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{r}{2}\right) = \pi r g$$

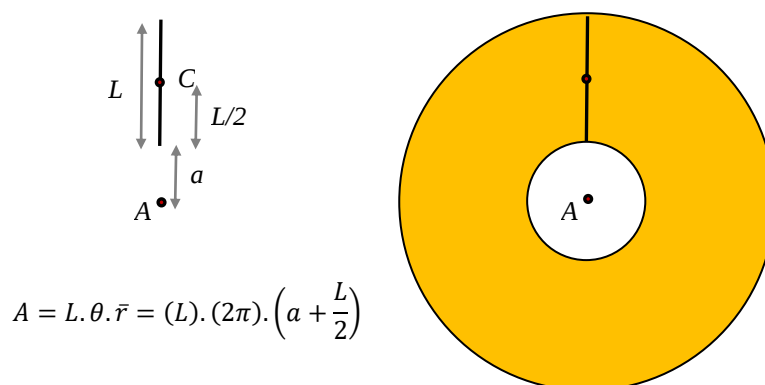
Na **Figura 19 (c)**, uma semicircunferência de raio r , comprimento $L = \pi r$ é posta para rotacionar em torno do eixo que passa pelo seu diâmetro, gerando uma medida de área da superfície de uma casca esférica. Pelo Teorema Dimensional de Pappus, lembrando que a posição do centroide de uma semicircunferência fica a uma distância $2r/\pi$ do eixo de

rotação. Assim a medida da área da superfície gerada, a casca esférica, fica como dado na expressão a seguir.

$$A = L \cdot \theta \cdot \underline{r} = \left(\frac{2\pi r}{2}\right) \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{2r}{\pi}\right) = 4\pi r^2$$

Na **Figura 20**, temos que um segmento de reta e o seu eixo de rotação estão localizados em um mesmo plano, com o eixo de rotação perpendicular à linha a ser rotacionada. O eixo e, designado pelo ponto A cujo eixo e perpendicular à página, está na mesma linha do segmento, fica a uma distância a da extremidade do segmento de reta. A superfície gerada é uma superfície em duas dimensões, bidimensional, cuja medida de área é uma faixa circular plana.

Figura 20 - Rotação de uma linha de comprimento L (1D), em torno de um eixo A perpendicular à página, à distância a, de uma das extremidades da linha. Esta rotação faz gerar uma superfície de medida de área (2D), uma faixa circular plana, onde sua área é calculada pela fórmula do Teorema Dimensional de Pappus.



Fonte: Elaboração própria

Na **Figura 20**, o segmento de reta de medida de comprimento L, (1D) unidimensional, e seu eixo de rotação e são perpendiculares entre si, ou seja, o eixo e que passa por A é perpendicular à página e o segmento de reta L está no plano da página. O eixo e , que passa no ponto A na mesma linha do segmento, fica a uma distância a do final ou da extremidade do segmento de reta. A superfície bidimensional gerada, ao se rotacionar a linha L em torno do eixo e é um círculo com um buraco no centro. O segmento de reta varrerá a área bidimensional da página gerando um arco de círculo completo, com um furo no centro. A área gerada é calculada pela mesma fórmula do Teorema Dimensional de Pappus. O centroide da linha está no meio dela, portanto a distância $\bar{r}$ entre o centróide e o eixo de rotação é $(a+L/2)$ (DE SOUZA, 2016).

$$A = L \cdot \theta \cdot \bar{r} = (L) \cdot (2\pi) \cdot \left(a + \frac{L}{2}\right)$$

3.6.2 - Segunda Parte do Teorema Dimensional de Pappus

Da mesma forma, ou por analogia à primeira parte do Teorema, Pappus apresenta uma segunda parte do seu teorema dimensional (sec. III), que parte de uma figura bidimensional (2D), figura de origem, ou seja, uma superfície de medida de área A , e segue procedimento análogo ao primeiro, que é rotacioná-la em torno de um eixo fixo, resultando estroboscopicamente em uma dimensão superior, uma figura tridimensional, cuja fórmula análoga, leva ao cálculo da medida de Volume da figura gerada.

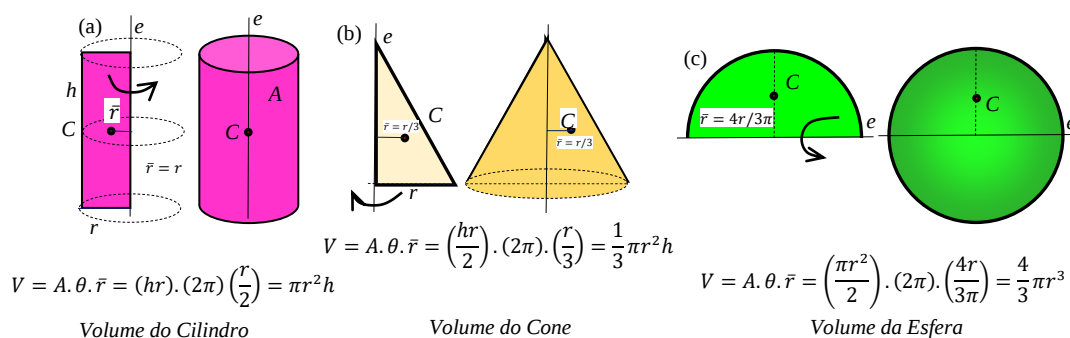
Teorema dimensional de Pappus de 2D → 3D:

Uma superfície de medida de área A (2D) ao ser rotacionada em torno de um eixo fixo, gera um sólido (3D), cuja medida de volume (V) é igual **ao produto** da medida da área A da superfície a ser rotacionada em torno do eixo de rotação e , o ângulo θ de rotação em radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e a distância $\bar{r}$, entre o centroide da figura superficial e o eixo de rotação e , ou seja

$$V = A \cdot \theta \cdot \bar{r}$$

A superfície de medida de área A e o eixo de rotação pertencem a um mesmo plano, a dimensão dois, cuja superfície ao ser rotacionada em torno do eixo e , em uma direção perpendicular a esse plano, gera um sólido de medida de volume V , dada pela fórmula do Teorema de Pappus.

Figura 21 - Sólidos gerados pela rotação de superfícies cujos volumes são calculados pelo Teorema dimensional de Pappus de 2D para 3D



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a Figura 21, temos seguintes casos.

- (a) Um retângulo, rotacionado (360°) em torno de um dos seus lados, produz um cilindro.
- (b) Um triângulo retângulo, rotacionado (360°) em torno de um dos seus catetos, gera um cone.
- (c) Um semicírculo, rotacionado (360°) em torno de seu diâmetro, gera uma esfera.

Na **Figura 21 (a)**, temos a superfície de uma retângulo, cuja medida de área, base r e altura h , ao ser rotacionado de uma volta completa, em torno de um eixo coincidente com a sua altura h , gera um sólido cilíndrico. A distância $\bar{r}$ entre o centroide do retângulo e o eixo de rotação é $r/2$, e que rotacionado de um ângulo de 2π radianos, obtém-se a geração de um cilindro (Figura 21(a)) cuja medida de volume desta superfície dada por:

$$V = A. \theta. \bar{r} = (rh). (2\pi). (r/2) = \pi r^2 h$$

Na **Figura 21 (b)**, está a formação do sólido cone, cujo volume calculado pela fórmula do Teorema dimensional de Pappus, gerado por meio da rotação da área de um triângulo retângulo em uma rotação completa, cuja distância do centroide do triângulo ao eixo de rotação coincidente com seu cateto vertical é um terço do cateto da base ($\bar{r} = b/3$). A fórmula do teorema dimensional de Pappus fica,

$$V = A. \theta. \bar{r} = \left(\frac{hr}{2}\right). (2\pi). \left(\frac{r}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Na **Figura 21 (c)**, está a formação de um sólido esférico, gerado a partir da rotação da superfície de um semicírculo de medida de área $\frac{\pi r^2}{2}$, de uma volta completa de 360° ou 2π rad, e cuja distância do eixo de rotação até o centroide do semicírculo é $\frac{4r}{3\pi}$. Portanto, a fórmula do teorema da Pappus de 2D para 3D é dada por,

$$V = A. \theta. \bar{r} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right). (2\pi). \left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3.6.3 - Extrapolando o Teorema Dimensional de Pappus para dimensões superiores

Como não encontramos estas extrapolações em nenhum trabalho, não poderíamos deixar de fazê-lo nesta pesquisa cuja finalidade específica é esta. Em uma extrapolação do Teorema Dimensional de Pappus, para as outras dimensões, no caso da dimensão zero, o ponto (0D), para a dimensão um (1D), e da dimensão três (3D) para a quatro (4D) e da dimensão D qualquer (nD) para a dimensão D+1 [(n+1)D].

3.6.3.1 - Extrapolação do Teorema Dimensional de Pappus de 0D para 1D

Para isso, vamos considerar que partindo de um ponto, dimensão zero (0D), e o girando em torno de um eixo e , à uma distância r do ponto, de um ângulo de θ radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), como um compasso, irá gerar uma linha em forma de um arco, fazendo sua dimensão subir de uma ordem para 1D.

Um exemplo instrumental dessa realização é o compasso.

O teorema dimensional de Pappus, para este caso 0D para 1D, pode ser enunciado por analogia ao das outras passagens dimensionais.

Vamos enunciar, portanto o Teorema dimensional de Pappus, da dimensão zero para a dimensão um.

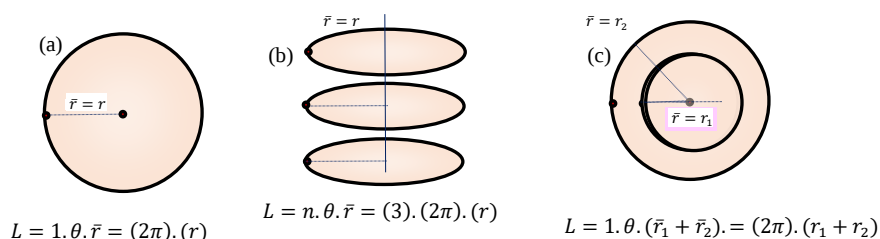
Teorema dimensional de Pappus de 0D $\rightarrow$ 1D:

Um ponto no espaço (0D) ao ser rotacionada em torno de um eixo fixo, gera uma linha (1D) em formato de arco de circunferência, cuja medida de seu comprimento (L) é igual **ao produto** do número de pontos equidistantes do eixo n_i rotacionados em torno do eixo e , o ângulo θ de rotação em radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e a distância $\bar{r}$, entre o ponto e o eixo de rotação, ou seja

$$L = \sum n_i \theta_i \bar{r}_i$$

Exemplos: Ao rotacionarmos um ponto, dimensão zero (0D, ou n pontos, em torno de um eixo de rotação, gera-se uma linha, na dimensão um (1D), um arco de circunferência cujo comprimento L seria proporcional: ao número de pontos, n , a serem rotacionados; ao ângulo de rotação θ , em radianos, e à distância $\bar{r}$ do ponto em rotação até o eixo de giro, assim, $L = n \cdot \theta \cdot \bar{r}$. Veja a **Figura 22**.

Figura 22 - Exemplo de transformação dada pelo Teorema Dimensional de Pappus de 0D para 1D



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Figura 22**, mostra um ou mais pontos (n), sendo rotacionados em torno de um eixo, de um ângulo de (2π) gerando uma ou mais circunferências. A medida do comprimento L , dessas circunferências, é dado pela expressão análoga ao proposto pelo teorema dimensional de Pappus.

Na **Figura 22 (a)**, temos um ponto ($n = 1$), a uma mesma distância do eixo de rotação $\bar{r} = r$, que ao ser rotacionado de um ângulo máximo $\theta = 2\pi$ gera a linha fechada de uma circunferência cujo comprimento é

$$L = n \cdot \theta \cdot \bar{r} = 2\pi r.$$

Na **Figura 22 (b)** temos três pontos ($n = 3$), a uma mesma distância do eixo de rotação $\bar{r} = r$, que ao serem rotacionados de um ângulo máximo $\theta = 2\pi$ geram as linhas de três circunferências fechadas, cujo comprimento total é

$$L = n \cdot \theta \cdot \bar{r} = 3 \cdot (2\pi)r = 6\pi r.$$

E na **Figura 22 (c)** temos dois pontos ($n = 2$) alinhados em uma direção que passa pelo eixo de rotação, $\bar{r}_1 = r_1$ e $\bar{r}_2 = r_2$ que ao serem rotacionados de um ângulo máximo $\theta = 2\pi$ geram duas linhas de duas circunferências fechadas, no mesmo plano com raios distintos, cujo comprimento total é

$$L = n_1 \cdot \theta \cdot \bar{r}_1 + n_2 \cdot \theta \cdot \bar{r}_2 = 1 \cdot (2\pi)r_1 + 1 \cdot (2\pi)r_2 = 2\pi (r_1 + r_2).$$

3.6.3.2 - Rotação de um sólido gerando um hipervolume

Também podemos generalizar o Teorema Dimensional de Pappus da terceira dimensão (3D) para a quarta dimensão (4D), na formação de objetos quadridimensionais, fazendo outra extrapolação dimensional do teorema de Pappus, como segue. Ao rotacionarmos um Sólido, dimensão três, em torno de um eixo de rotação, em direção à uma quarta dimensão, gera-se a formação da Figura de um Hipersólido, cujo valor seria proporcional: à medida do Volume tridimensional rotacionado em direção ao quarto eixo; pela medida do ângulo de rotação θ , em radianos, e pela medida da distância $\bar{r}$ do centroide do volume em rotação até o eixo de giro. O que é expresso pela fórmula, $H = V \cdot \theta \cdot \bar{r}$. Assim podemos enunciar o Teorema Dimensional de Pappus abaixo em uma quarta parte.

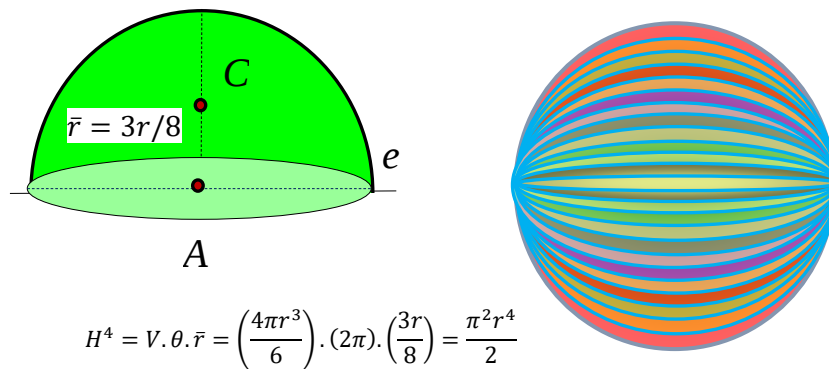
Teorema Dimensional de Pappus da dimensão três para a dimensão quatro: $3D \rightarrow 4D$:

Um Sólido de medida de volume V (3D), ao ser rotacionado em torno de um eixo fixo, na direção do quarto eixo, perpendicular aos outros três, gera um corpo Hipersólido (4D), cuja medida de seu Hipervolume (H^4) é igual ao **produto** da medida de Volume V do sólido a ser rotacionado em torno do eixo e , o ângulo θ de rotação em radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e a distância $\bar{r}$ do centroide deste sólido até o eixo de rotação e , ou seja,

$$H = V \cdot \theta \cdot \bar{r}$$

Usando esta Analogia, consideremos o caso de uma Semiesfera, que sabemos que o seu centroide está a uma distância $(3r/8)$ do seu centro de simetria A , como mostra a **Figura 23** e que sendo rotacionada em direção a um quarto eixo, em torno do seu diâmetro, gera, assim, uma hiperesfera, cuja medida do hipervolume é calcula analogamente.

Figura 23 - Medida do Hipervolume de uma hiperesfera gerado pela fórmula do Teorema dimensional de Pappus a partir do Volume da esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

Sabemos que a expressão geral da medida do volume ou mais precisamente Hiper-D-volume de qualquer hiper-D-esfera seria dada pela expressão genérica abaixo, onde D representa a dimensão em que ela se encontra.

$$H_{esfera}^D = \frac{\pi^{D/2} \cdot r^D}{\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right)}$$

Para a quarta dimensão, $D = 4$, a medida do Hiper-4-volume, V^4 seria dada por

$$H_{esfera}^4 = H^4 = \frac{\pi^{4/2} \cdot r^4}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2 r^4}{2}$$

Usando o teorema dimensional de Pappus, a rotação necessária da semiesfera seria de 2π radianos, como na **Figura 23**.

$$H^4 = V \cdot \theta \cdot \bar{r} = \left(\frac{4\pi r^3}{6} \right) \cdot (2\pi) \cdot \left(\frac{3r}{8} \right) = \frac{\pi^2 r^4}{2}$$

O que concorda com o valor teórico de quatro dimensões.

Portanto, está generalizada a validade do Teorema Dimensional de Pappus para o cálculo da medida de um Hiper-(D+1)-volume, à partir da medida de um Hiper-D-volume em uma dimensão D qualquer.

$$H^{D+1} = H^D \cdot \theta \cdot \bar{r}$$

Enunciado do Teorema Dimensional de Pappus da dimensão D para a dimensão D+1:

$$D \rightarrow D + 1.$$

Um Hiper-D-sólido de medida de Hiper-D-volume, $H^D(DD)$, ao ser rotacionado em torno de um eixo fixo, na direção (D+1) do eixo hiper-D+1-volumétrico [(D+1)D], perpendicular aos outros D eixos, gera um corpo Hiper-D+1-sólido, cuja medida do Hiper-D+1-volume, H^{D+1} , é igual ao **produto** da medida do Hiper-D-volume H^D , da figura do Hiper-D-sólido de dimensão inferior a ser rotacionada em torno do eixo de rotação e , o ângulo θ de rotação em radianos ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), e a distância $\bar{r}$ do centroide deste Hiper-D-sólido até o eixo de rotação e , ou seja,

$$H^{D+1} = H^D \cdot \theta \cdot \bar{r}$$

3.7 - Distribuições volumétrica, superficial, linear e pontual

Conforme um corpo se apresenta no espaço, podemos caracterizar lhe como tendo certa distribuição geométrica, dependendo do seu formato, e podemos classificá-lo, conforme sua distribuição geométrica como sendo volumétrica, superficial, linear ou pontual.

Conforme as características apresentadas, podem ser feitas reduções dimensionais, de sólido para superfície, de superfície para linha, de linha para ponto, o que caracteriza um importante aspecto dentro do estudo de nossa pesquisa e para as dimensões reais no mundo da engenharia (DE SOUZA, 2016).

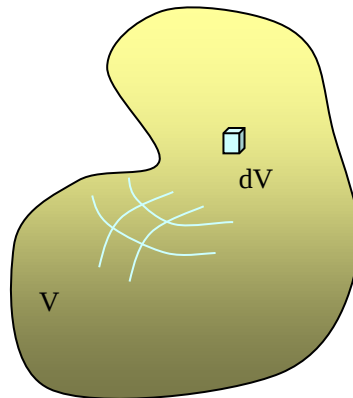
A extensão espacial mensurável, ocupada por um corpo, ou a região na qual esse corpo ocupa no espaço pode definir sua dimensão. Do ponto de vista do ser humano, que percebe sempre três dimensões, um corpo de formato qualquer, tem suas dimensões espalhadas nas direções do espaço, portanto, a priori ocupa uma distribuição volumétrica no espaço.

Na prática da realidade física, a matéria é distribuída tendo como estrutura seus átomos, formatando o espaço físico. Um átomo é uma estrutura que tem um núcleo extremamente menor do que seu tamanho, toda sua densidade está no núcleo. O núcleo atômico, é formado de prótons e nêutrons rodeado por elétrons em movimento. Portanto a matéria total do átomo está em seu núcleo, uma vez que toda a densidade do átomo está no seu núcleo. Se tivéssemos o núcleo de um átomo, representado na nossa escala como tendo o tamanho de um limão, seu último elétron estaria girando a uma distância equivalente de 3 km, na proporcionalidade do átomo. Portanto, o átomo é um vazio total, toda sua massa está concentrada em um ponto muito minúsculo, o núcleo. Neste caso temos que olhá-lo pelo seu aspecto do microcosmo da imaginação já que não podemos enxergá-lo diretamente pelos nossos sentidos e nem mesmo nossos instrumentos físicos, mas por experimentos indiretos. Vemos que todos os objetos acabam por se formar de pontos com vazios ao redor. Do ponto surge, ao ponto retorna, como veremos em uma expressão de recorrência na Geometria das Dimensões.

Teríamos o microcosmo, o mediumcosmo, e o macrocosmo. No macrocosmo estariam os corpos celestes e o universo, muito maiores que as dimensões naturais com que lidamos. O microcosmo o mundo que participamos em imaginação e conceitos, dos vírus, bactérias, células, átomos, moléculas. Assim, consideramos os objetos no tamanho que lidamos, nas nossas dimensões naturais, seria o mediumcosmo.

Esses corpos, do mediumcosmo, apesar de grandes vazios, caracterizarem-se por pontos rígidos, e mantêm uma aparência sólida, extensa, aparentemente contínua e homogênea, devido às estruturas moleculares rígidas cristalinas formadas entre seus átomos, **Figura 24**.

Figura 24 - Corpo Sólido ocupando uma distribuição volumétrica no espaço



Fonte: Elaborado pelo autor

Um corpo como este, da **Figura 24**, que não tem nenhum tipo de simetria, não tem a possibilidade de ser reduzido a uma área equivalente ou a uma linha equivalente, mas sempre se tem a possibilidade de reduzi-lo a um ponto, equivalente, seu centroide. Veja-se que o centroide, que tem dimensão zero, o ponto, é o termo de acesso de todos os corpos, a unidade, de onde reverbera a existência de todos os corpos, como se do ponto, a unidade, mantivesse a virtualidade da existência de todos os corpos do Universo, assim como emanasse a existência de cada um desses corpos, e também dessa unidade emanasse a existência de tudo que existe. Como se todos os objetos estivessem interligados pelo ponto, a unidade, e dessa unidade emanasse virtualmente a existência do todo.

Este estado matemático da dimensão zero, explicaremos melhor quando desenvolvermos, na seção 4.3, de como o ponto, dimensão zero, uma singularidade, pode conter a semente de todas as formas geométricas existentes em diversas dimensões. Daí, fazemos uma homenagem à unidade do ponto, dimensão zero, no Capítulo 4, seção 4.3, por intermédio de três grandes citações da História que homenagearam o poder da unidade em épocas distintas do pensamento humano e em países distintos : o Quadrivium, da Idade Média que estabelece o desenvolvimento das quatro artes liberais da História, a Aritmética, a Geometria, a Música e a Cosmologia na Europa; à Xenófanos (570 a.C.) na Grécia; e Lao Zi (ou Lao Tsé) (601 a.C.) na China.

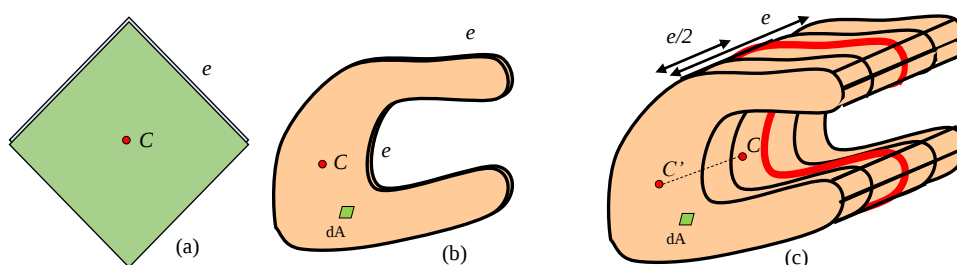
Um corpo que ocupa uma distribuição superficial no espaço, como uma placa, teria uma espessura desprezível em comparação com as suas duas dimensões da superfície, extremamente maiores que sua espessura, ou até poderia ter considerada sua espessura notável, mas constante. Uma folha de papel pode ser caracterizada como um corpo

superficial, neste caso, podemos reduzi-la, ou seja, fazer um reducionismo dimensional por simplificação, à dimensão dois, uma estrutura superficial plana, como mostra **Figura 25(a)**.

Mesmo que a placa tenha uma área A de qualquer formato, e espessura desprezível, podemos reduzi-la a uma estrutura dimensional dois, uma superfície, como mostra a **Figura 25(b)**.

Ou mesmo que tenhamos uma figura plana que ocupe o espaço, se estendendo a uma espessura não desprezível de sua superfície, mas com essa espessura $e = \text{constante}$, como mostra a **Figura 25(c)** podemos tratá-la, ainda assim, com o reducionismo de uma figura plana.

Figura 25 - Distribuições superficiais de área



Fonte: Elaborado pelo autor

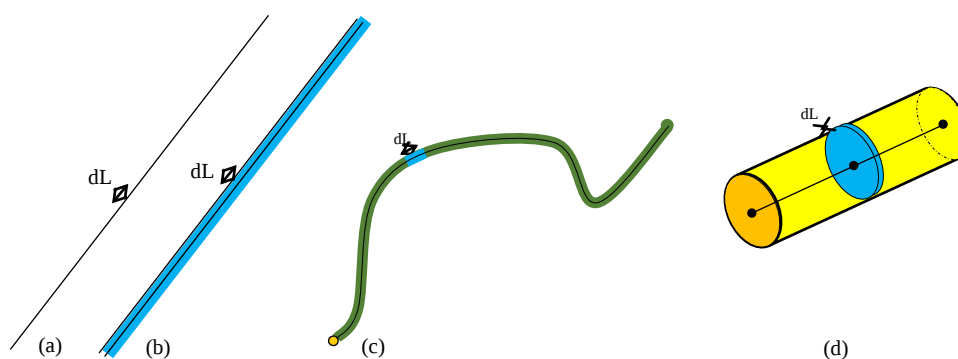
Assim, se determinarmos o centroide (C) da superfície S , devemos manter esse centroide da figura como um todo, mas deslocá-lo, para dentro da espessura, na mesma linha do centroide da superfície, e colocá-lo, sob um aspecto volumétrico, no ponto intermediário da sua espessura, $e/2$ como mostra a **Figura 25(c)**.

Continuando em nossa trajetória de redução dimensional, podemos considerar agora um corpo com uma distribuição geométrica linear, que se mostra no formato de uma barra, como na **Figura 26**. Neste caso, ele ocupa um comprimento no espaço com uma área da secção transversal constante, podendo ser desprezível ou não, mas pelo menos constante, como mostra a **Figura 26(a) e (d)**.

A **Figura 26(b)** apesar de não ter uma secção transversal desprezível, mas consideremo-la constante e não desprezível, podemos reduzi-la, ainda assim, a uma linha passando no seu eixo central. Isto ocorre também na linha toda encurvada da **Figura 26(c)**.

No caso de um cilindro de secção transversal constante e não desprezível, podemos também aproximá-lo ou reduzi-lo a uma linha no centro, no seu eixo de simetria central, dimensão um.

Figura 26 - Estrutura Linear com área de seção transversal constante

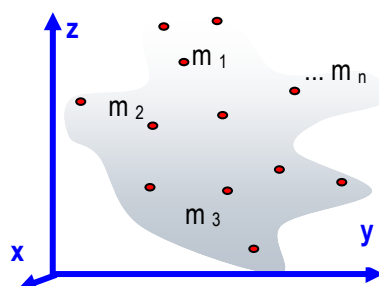


Fonte: Elaborado pelo autor

A figura 26 mostra uma estrutura com área de seção transversal constante, que pode ser tratada como uma figura unidimensional. A área da seção transversal constante pode ser reduzida à uma linha central e com o cálculo seu centro geométrico ou centroide reduzido ao seu centroide de linha, unidimensional.

Um conjunto de pontos, podemos caracterizar como corpos pontuais, como na **Figura 27**, são corpos nos quais as três dimensões do espaço em torno desses corpos podem ser consideradas desprezíveis, em comparação com as distâncias entre eles. Como exemplo os esporos de uma flor, ou o mesmo o Sol e os planetas. Os corpos estão tão distantes em comparação com seus tamanhos que podem ser considerados desprezíveis.

Figura 27 - Distribuição pontual. Dimensões desprezíveis em comparação com suas distâncias, zerodimensionalidade



Fonte: Elaborado pelo autor

Esses casos, portanto, representam reducionismos de dimensão, em uma, duas ou três dimensões e sempre são aproximações da dimensão três, que enxergamos na sua totalidade, dimensão máxima que percebemos, na qual se despreza uma, duas, ou três dimensões, conforme suas configurações de reducionismo aproximadas em tratamento matemático.

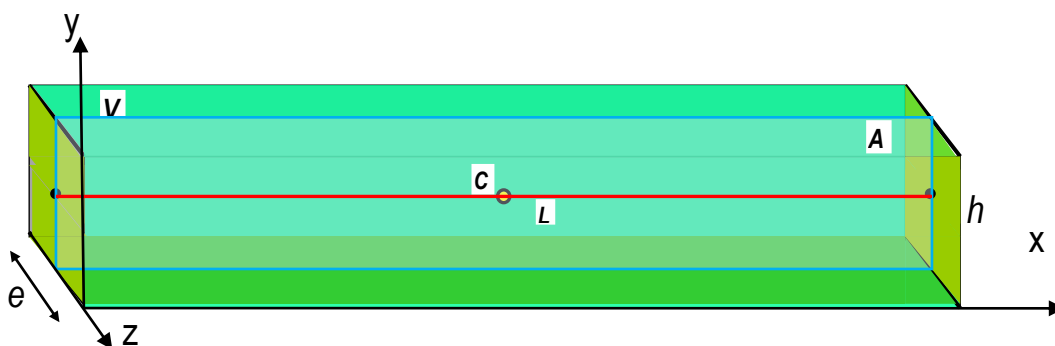
3.7.1 - Forma da redução dimensional dependendo do formato do corpo

Como se poderia reduzir dimensionalmente um corpo sólido e homogêneo como o da **Figura 28**, para uma área representativa ou uma linha representativa do mesmo corpo ou um ponto (centroide) representativo?

Um corpo, da maneira como o encontramos, pode ser tratado como: em primeiro lugar como um volume, em segundo lugar como área, uma vez que têm uma espessura constante, em terceiro lugar como linha, uma vez que tem seção transversal constante, ou em quarto lugar como ponto, ou o centroide do corpo. Dependendo da necessidade pode-se fazer a Desconstrução Dimensional, seja de forma integral como volume, ou a redução como área, ou a redução como linha ou redução como ponto (centroide), mesmo se não se consegue fazer o reducionismo do corpo como área (espessura constante) ou como linha (seção transversal constante), por falta de simetria, sempre se pode fazer sua redução a um ponto, seu centroide equivalente. Vamos fazer gradativamente esse reducionismo dimensional para o caso do paralelepípedo da **Figura 28**.

Um corpo com simetria geométrica (Figura 28) pode ser reduzido dimensionalmente à uma área A representativa, ou à uma linha L representativa ou sempre à um ponto C representativo ou seu Centroide. De fato, considerando o corpo sólido da **Figura 28**: uma barra, de comprimento L , altura h e espessura e , com volume $V = L \cdot h \cdot e$. Podemos definir para manutenção dos aspectos dimensionais anteriores, realizando o seu reducionismo dimensional, o que vamos denominar densidade volumétrica geométrica, $\rho = V/V = 1$, que é igual à unidade do sólido. Consideramos que a dimensão volumétrica é a máxima dimensão de percepção. O centro geométrico ou centroide seria um ponto, e ficaria na posição de simetria do volume, ou seja, $\bar{C} \equiv (\frac{L}{2}; \frac{h}{2}; -\frac{e}{2})$.

Figura 28 - Um corpo com simetria geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor

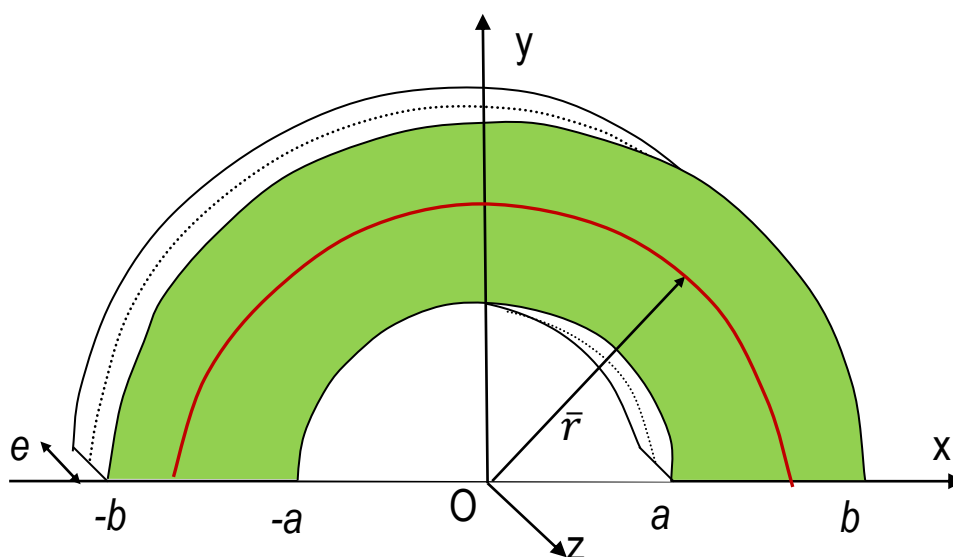
Este volume pode ser reduzido a uma estrutura superficial, por ter espessura constante, $e = \text{const.}$, onde essa superfície equivalente deve ficar na posição central dessa espessura $\bar{A} = (0 \leq x \leq L; 0 \leq y \leq h; z = -\frac{e}{2})$. A densidade superficial geométrica de área será, $\sigma = \frac{V}{A} = \frac{L.h.e}{L.h} = e$, é igual à espessura e do sólido geométrico, que é constante, e onde o produto da densidade superficial σ , pela área da superfície A , restitui-lhe o volume, da qual ela foi reduzida, $V = \sigma.A = e.(L.h)$.

Este volume também pode ser reduzido diretamente à uma estrutura linear L , por ter a medida da área da seção transversal S_t do corpo, um valor constante, $S_t = h.e = \text{const.}$, onde essa estrutura linear constante equivalente, deve ficar na posição central dessa Seção transversal, de valor no espaço, $L = (0 \leq x \leq L; \frac{h}{2}; -\frac{e}{2})$. A densidade linear geométrica de volume, λ_V , será, $\lambda_V = \frac{V}{L} = \frac{L.h.e}{L} = h.e$, igual à seção transversal da barra geométrica, constante, sendo que o produto da densidade linear geométrica pela linha, restitui-lhe o volume, da qual ela foi reduzida, $V = \lambda_V.L = L.(h.e)$.

A área A reduzida a partir do volume V , pode também ser novamente reduzida à unidimensionalidade. No caso, haverá a redução de uma área A , à uma linha L . Sendo a fita plana de largura constante, $h = \text{constante}$, e que na simetria da fita, com densidade linear geométrica de medida de área, λ_A , será, $\lambda_A = \frac{A}{L} = \frac{L.h}{L} = h$, igual a altura h do paralelepípedo, constante, onde restitui-lhe o valor da área, o produto da densidade linear de área λ_A pelo comprimento da linha L , da qual a Área foi reduzida, $\bar{A} = \lambda_A.L = h.L$.

O centro geométrico dessa área é bem no meio do retângulo, $C \equiv (\frac{d}{2}; \frac{h}{2}; -\frac{e}{2})$, reduzindo-o a um ponto, C , posição do centroide do retângulo, da mesma estrutura volumétrica reduzida a um ponto, por equivalência.

Figura 29 - Uma figura com simetria geométrica pode ser reduzida dimensionalmente a uma área de simetria ou à uma linha de simetria ou sempre a um ponto



Fonte: Elaborado pelo autor

Este volume da **Figura 29**, de simetria mais complexa do que o da **Figura 28**, pode também ser reduzido a uma Área A, ou uma linha L, ou um ponto, seu Centroide, devido à sua simetria.

Considerando então esse volume da **Figura 29**, um arco volumétrico, com raio que varia de a para b e espessura constante e . A densidade volumétrica do volume, $\rho = V/V = 1$, igual à unidade do sólido. A medida do volume da figura seria dado pela medida da área da face da frente, do semicírculo maior, $A_2 = \pi b^2/2$, menos a medida da área do semicírculo menor, $A_1 = \pi a^2/2$, e pelo produto da espessura e , resultando, assim, o produto da medida da área da superfície por sua espessura constante, a medida do volume da peça,

$$V = \pi(b^2 - a^2)e/2.$$

O cálculo do centro geométrico ou centroide desta estrutura, peça, ou figura, não seria de normalidade da prática no ensino básico, uma vez que envolve integrais, portanto, vamos proceder seus resultados sem seu cálculo, não sendo tão intuitivo como no exemplo da **Figura 29**, e ficaria na posição de simetria do volume, com coordenada vertical igual à $\bar{y} = \frac{4}{3\pi} \frac{b^2 + a^2 + ba}{(b+a)}$, onde o centroide seria então dado pelas coordenadas $C \equiv (0; \frac{4}{3\pi} \frac{b^2 + a^2 + ba}{(b+a)}; -\frac{e}{2})$.

Este volume pode ser reduzido a uma estrutura superficial A, por ser de espessura constante, $e = \text{constante}$, e sua superfície equivalente, deve ficar na posição central da

profundidade em $z = -e/2$. A densidade superficial do volume seria $\sigma_V = \frac{V}{A} = e$, onde $V = \pi(b^2 - a^2)e/2$, e a área da superfície $A = \pi(b^2 - a^2)/2$ e σ_V é igual à espessura e do sólido geométrico, constante, onde o produto da densidade σ_V pela área A da superfície, restitui o volume, da qual ele foi reduzido, $V = \sigma_V \cdot A$. O centroide da superfície seria igual à da estrutura volumétrica, por equivalência.

Reduzindo o volume à uma linha teríamos que centro de linha desta faixa de área estaria a uma distância igual a

$$\bar{r} = \frac{2(b^3 - a^3)}{3(b^2 - a^2)} = \frac{2}{3} \frac{(b^2 + a^2 + ba)(b - a)}{(b + a)(b - a)}$$

E, portanto, teria comprimento $L = \pi\bar{r}$. de tal forma que o centroide dessa linha seria igual a $\bar{y} = \frac{2\bar{r}}{\pi} = \frac{4}{3\pi} \frac{b^2 + a^2 + ba}{(b + a)}$, que coincide com outras estruturas de volume e área equivalentes.

Considerando supostos valores dados, apenas para efeito de resultados da **Figura 29**, consideremos: $a = 3m$ e $b = 6m$ e $c = 0,5m$, assim temos como resultado, com três algarismos significativos: $V = 2,12 m^3$; $A = 4,24 m^2$; $\bar{r} = 4,67 m$; $L = 14,7 m$; e o centro geométrico ou centroide tem coordenadas, $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = 2,97 m$; $\bar{z} = -0,250 m$.

3.6.3.5 - Redução ao uno

Todas essas distribuições narradas acima, mesmo que não tenham simetria, podem ser reduzidas sempre a um único ponto, dimensão zero, chamada centroide ou centro geométrico da figura geométrica, que representa a posição de uma média ponderada considerando todas as posições do corpo. O centroide representa o corpo como um todo, à sua posição média, a média ponderada de todas as posições geométricas do corpo.

Como estabelecemos no Teorema de Pappus, o centroide é o ponto que representa o corpo como um todo, e para se obter a distância do corpo até o ponto, sabemos que uma distância precisa de dois pontos, sendo que o ponto do corpo é seu centroide e sua distância até um eixo de rotação que é uma reta, tem sempre que ser a menor distância, ou seja, aquela que faz 90° entre o ponto (centroide) e a reta (eixo de rotação). fazer rotações geométricas em torno de um eixo, podendo-se considerar uma única distância entre o corpo e o eixo de rotação.

Uma redução geométrica pode ser feita considerando a distribuição geométrica volumétrica especial do corpo.

Para um corpo qualquer mesmo sem simetria, sempre pode-se reduzir tal estrutura ao seu centroide, o centro geométrico do corpo, que represente o centro equilibrado de toda a distribuição geométrica no espaço.

Se o corpo volumétrico tem uma distribuição geométrica homogênea, e uma espessura $e = \text{constante}$, então, sempre podemos reduzir o volume à uma placa de área A e espessura constante e .

Se o corpo volumétrico tiver uma seção transversal constante ao longo de seu comprimento L , sempre podemos reduzir a figura geométrica, a uma estrutura unidimensional, ou seja, a uma linha L de seção transversal constante.

Passaremos no Capítulo 4, a seguir, a dar a definição das características essenciais para as dimensões do espaço, em ordem crescente de suas passagens: a dimensão zero (0D); as dimensões fracionárias entre a dimensão zero e a um; a dimensão um (1D); as dimensões fracionárias entre a dimensão um e a dimensão dois; a dimensão dois (2D); as transformações de figuras em sua enantiomorfa (figura espelhada) da dimensão dois com dobra de torção para a três; as dimensões fracionárias entre a dimensão dois e a três; as transformações de figuras em sua enantiomorfa, da dimensão três, pela passagem de uma dobra de torção para a dimensão quatro; a dimensão três (3D); a dimensão fracionária entre a dimensão três e quatro; a dimensão quatro (4D).

A dimensão quatro é uma dimensão que, sobre o ponto de vista da percepção biológica e física, não estamos acostumados a ter experiências com ela; mas pode ser perfeitamente pensável geometricamente, discursiva de explicações onde as analogias ajudam como veremos adiante no Capítulo 4. Assim para a Matemática e a Física, é necessária uma linguagem de forma para representar a natureza, e a representação geométrica dessa quarta dimensão está mais próxima por analogia, dentro dos Registros figural geométrico, discursivo, tabelar e algébrico. No entanto, para se prosseguir para dimensões da cinco em diante, as analogias geométricas até a quarta são úteis para se formar o arcabouço mental de geometrias superiores, sendo que os Registros Discursivo da Língua Materna, o Tabelar e o Algébrico nos garante o cálculo e certeza da sua existência e realidade, até uma D-ésima dimensão inteira qualquer ao caminho do infinito.

Necessitamos, para isso, compreender as analogias, que se repetem e se empreendem de forma crescente, assim podemos produzir construções dimensionais mais complexas. Tal discernimento das estruturas analógicas será necessário para que no momento em que se chega às estruturas quadridimensionais, onde a experiência espacial

não ajuda, possamos percebê-las através das analogias e da lógica, criando o hábito do mesmo proceder, através do que chamamos de Princípio das Analogias, e da variedade de Reconstruções Dimensionais, para as construções de complexidade experiencial e não experiencial.

Com o hábito do proceder analógico, fazemos surgir, no crescimento dimensional, inúmeras construções que inovam. São propriedades não perceptíveis se não realizadas. No entanto, muitas vezes, com o atavismo da repetibilidade bem-sucedida através de raciocínios já realizados no passado, existe ainda o medo do associar-se ou aventurar-se no universo de novas analogias. Como ocorre e existe a falta de descrição crescente do óbvio, engessamos o pensamento nas impossibilidades ou no comodismo, impedindo o aparecimento de novas possibilidades, emperrando a estrutura do pensamento em *loops* repetitivos, mantendo somente os mesmos signos da geometria passada, sem ampliar novas perspectivas, que criam novas possibilidades, por contrapor-se às semióticas de costume.

Essas estruturas que se revelam com simplicidade de construção, mostram-se úteis para o exercício da compreensão e dos questionamentos, em estruturas analógicas e inovadoras. Este apoio de novos enfoques, ocorre em várias áreas do conhecimento, como no caso da jurisprudência no direito, do ensino-aprendizado nas imagens multidimensionais, nos símbolos fisiológicos na biologia, nas simetrias na física, na busca de resultados mais justos na ética, na conquista das compreensões mais rápidas, na educação e no raciocínio mais completo da matemática.

No Capítulo seguinte, **Capítulo 4**, iremos desenvolver a aplicação do método de Duval, usando as Reconstruções Dimensionais indo da dimensão zero à dimensão 4. Para cada Figura Geométrica de cada dimensão desenvolve-se quatro tipos de visualizações distintas de Reconstruções Dimensionais, variando as Reconfigurações Mereológicas para cada Dimensão anterior ou Reconstruções Instrumentais. Para cada Figura dimensional, usamos quatro tipos de Registros de Representação Semiótica, ou seja, o Registro Figural, Registro Discursivo da Língua Materna, o Registro Tabelar e o Registro Algébrico.

CAPÍTULO 4 - GEOMETRIA DAS DIMENSÕES

“O que observamos não é a natureza propriamente dita, mas a natureza exposta ao nosso método de questionamento.”

Werner **HEISEMBERG** (1901-1976)

“Se em qualquer circunstância, um homem não dá voltas em torno das coisas ou das ideias para examiná-las sob as suas diferentes facetas, esse homem é incompleto e fraco, portanto, ameaçado de perecer.”

Honoré de **BALZAC** (1799-1850,51)

“Talento é 1% de inspiração e 99% de transpiração.”

“Penso 99 vezes e nada descubro. Deixo de pensar, mergulho no silêncio e a verdade me é revelada [...] A mente avança até o ponto onde pode analisar, mas depois vai para uma dimensão superior, sem saber como chegou lá.”

“Algo é impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário.”

Albert **EINSTEIN** (1879-1955,76)

“Não há nada permanente, exceto a mudança.”

HERÁCLITO de Ephesus (535-435,100)

“O melhor uso da vida consiste em gastá-la em algo que dure mais do que a vida.”

William **JAMES** (1842-1910,68)

“La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.”

“A decomposição por desconstrução dimensional de formas percebidas, corresponde ao funcionamento profundo da visualização na geometria.”

Raymond **DUVAL** (1937-,82)

4.1 - INTRODUÇÃO

O presente Capítulo tem o objetivo de desenvolver este Referencial Epistemológico para a Geometria das Dimensões, com a finalidade de implementar o ensino desta Geometria no Ensino Básico e torná-la instrumento cognitivo da percepção geométrica e diversidade de visualizações dimensionais por todos os estudantes.

O século XIX se aplicou no desenvolvimento da Geometria das Dimensões, principalmente da Quadridimensionalidade, e os esforços de Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855,78), de toda uma vida, resultou em inúmeras contribuições por ele inspiradas neste assunto. Esta disciplina precisa ainda de uma aplicação mais incisiva, no desenvolvimento cognitivo dos estudantes de Matemática.

Assim, a temática da Geometria das Dimensões no ensino do Currículo do Ensino Básico, em trabalhos que envolvam a sua visualização por Reconstrução Dimensional no sentido de Duval (2005), seria de alta valia aos estudantes que poderiam estar tendo a percepção do crescimento das dimensões até a quarta, e com possibilidades de dimensões maiores, como elemento de cognição essencial, que facilitaria a compreensão de outras

abstrações em desenvolvimentos futuros no ensino da Matemática. E como vertente ainda de interesse premente as suas variadas aplicações na ciência moderna.

Fizeram parte desse desenvolvimento da Geometria Dimensional, no passado, Euclides, Pappus e Descartes, e no século XIX, com esforços para criação de uma geometria quadridimensional os matemáticos de Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855,78), Simeon Ferdinand **Möbius** (1790-1868,78), Nikolai Ivanovich **Lobachevski** (1792-1856,64), Janos **Bolyai** (1802-1860,58), Bernard **Riemann** (1826-1866,40) e Felix **Klein** (1849-1925,76).

O Eletromagnetismo, em 1886, e a Teoria da Relatividade, em 1905, foram as primeiras ciências que se utilizando diretamente da quadridimensionalidade sem que seus criadores soubessem. Foi o momento em que apareceu uma primeira aplicação prática útil usando a quadridimensionalidade e que posteriormente se reverberou para todas as teorias na Física do século XX. No entanto, a descoberta ou percepção de seu caráter quadridimensional, foi somente descoberto posteriormente pelos matemáticos Henry Poincaré (1906) e Hermann Minkowski (1908) e depois adotadas em todas as teorias posteriores da Física, e ainda sido ampliadas suas aplicações e dimensões.

No presente capítulo, apresentamos uma série de desenvolvimentos, principalmente inspirados pelas sugestões Duval, dos acréscimos no tema da Geometria das Dimensões, mais especificamente nos aspectos endereçados ao ensino básico, de visualização geométrica e entendimento cognitivo.

Ao longo desse desenvolvimento, obtivemos uma curiosa equação, denominada Equação Geométrica das Dimensões, envolvendo as variáveis dimensionais das figuras geométricas, o “**VAFSH**” (Vértice (0D), Aresta (1D), Face (2D), Sólido (3D), Hipersólido (4D)), em que se acrescenta uma variável destas a cada nova dimensão e que curiosamente, resulta sempre igual à unidade, para qualquer figura geométrica convexa em qualquer dimensão, como demonstraremos.

Não encontramos nos desenvolvimentos da Matemática, esta Equação de caráter Dimensional, por isso, neste trabalho, desenvolvemos várias expressões recorrentes para dimensões superiores que se mostraram extremamente úteis à demonstração final de que ela vale para qualquer dimensão D inteira.

A generalização e validade para qualquer dimensão, por meio da Equações de Recorrência, demonstramos ao final do **Capítulo 4**, que elas são validadas para a D-dimensionalidade inteira qualquer que seja ela.

Como já foi dito no **Capítulo 3**, uma das equações que encontramos catalogadas, com semelhança à Equação Geométrica das Dimensões, mas não completa, e válida somente para a terceira dimensão, é a equação de **Euler** que relaciona as variáveis, Vértice, Aresta (Edge) e Face, e que vale para as figuras tridimensionais fechadas e convexas tridimensionais, $V - A + F = 2$. A equação de Euler, não relaciona a complementaridade de todas as variáveis dimensionais, nem faz referência à questão dimensional, mas é uma Equação Dimensional.

A questão dimensional unifica esta Equação Geométrica das Dimensões como universal para todas as dimensões, e ela se mostra válida para a Geometria das Dimensões, em uma matemática mais completa até a D-ésima dimensão, sendo que válida também para figuras com partes circulares como demonstraremos.

Aqui a relacionamos, com o desenvolvimento dimensional crescente, sendo aplicado em todas as dimensões crescentes passo a passo. Mas a EGD, Equação Geométrica das Dimensões é aplicada da dimensão zero à quarta dimensão e extrapolada posteriormente para qualquer dimensão D inteira. Calculamos os valores mostrando sua validade no Registro tabelar, por meio de equações recorrentes até a 11^a dimensão e depois demonstramos que ela é válida para todas as dimensões inteiras, D=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

Essa Equação Geométrica das Dimensões, que resulta sempre igual à unidade, de qualquer figura geométrica fechada e convexa, mesmo círculos, esferas, cilindros, cones, hiperesferas, em qualquer dimensão, leva, ou retorna, esta relação, sempre, para a unidade, como resultante, à maneira de uma equação “divina”, unitária. O ponto na zerodimensionalidade também se mostra como a unidade, da qual todas as figuras dimensionalmente maiores são capazes de se originar, como se a unidade, a singularidade do ponto, carregasse o ônus de toda a criação geométrica dimensional.

Neste Capítulo, além da pesquisa do crescimento dimensional da dimensão zero à quatro, a utilização desse crescimento, faz-se uso de forma alternada dos Registros de Representação Semiótica Figural, Discursivo, Tabelar e Algébrico. Ainda assim, para cada elemento figural pesquisado separadamente, fizemos o estudo de quatro Visualizações distintas. Posteriormente da dimensão cinco até a dimensão D qualquer, perdemos o Registro Figural e passamos à análise dimensional pelos Registros Discursivo, Tabelar e Algébrico.

Em análise adicional e inspiração da Relatividade Geral do encurvamento da dimensão 3 (3D) até a 4 (4D), e as Geometrias não Euclidianas, fizemos a extrapolação para as Dimensões Fracionárias da dimensão entre 0 até 1, de 2 até 3, e de 3 até 4.

E ainda estudamos as torções em dimensões maiores que entram em contato com a dimensão imediatamente inferior, e que resulta na transformação de uma figura em sua figura espelhada oposta (enantiomorfa), ao passar por esta torção de dimensão superior, assim como ocorre com a fita de Möbius, da segunda para a terceira dimensão. Seria como se pudéssemos transformar uma mão direita em uma mão esquerda ao passá-la por uma torção na dimensão quatro.

4.2 -DIMENSÃO ZERO (0) OU ESTRUTURA ZERODIMENSIONAL

A dimensão zero é representada por um ponto, com volume nulo, e sem dimensões observáveis, ou seja, zerodimensional. Este conceito é de caráter virtual, para a consciência, ou um conceito teórico, ou seja, sujeito à experiência do pensamento. Tem no seu aspecto matemático, os elementos primitivos, axiomáticos ou postulados, como define Euclides em seus “*Elementos*” (EUCLIDES, 2009, p.97).

Representa a redução ao zero no intervalo espacial s , $s = 0$, em todas as direções, no volume ou na “solidez” nula do ponto.

Representa-se a zerodimensionalidade em um ponto, pelo que se denomina de singularidade, um ponto sem dimensões.

Chamaremos este ponto singular de forma prima, ou forma primeira, e esta seria a primeira Construção Dimensional da Geometria das Dimensões, o da zerodimensionalidade. Este seria um ramo ou tipo, ou Registro Figural da imaginação ou do pensamento, e o representaremos como Reconstrução Zerodimensional Um, por meio das letras **R0₁**, e da **Figura 30**.

E é só no nível do pensamento que podemos chegar ao nível das possibilidades e variedades do comprimento infinitesimal, definido como zero. Sob o aspecto da realidade, da *semiose* de Platão, na nossa tridimensionalidade, o ponto, teria dimensão nula. Do ponto de vista da idealidade matemática, o *nous* ou *noese* de Platão, o ponto, no pensamento virtual da consciência, seria uma esfera de raio exatamente zero e poderíamos estabelecer tal estrutura ideal como uma primeira estrutura dimensional no Registro de Representação

Semiótica Figural, dentro de uma primeira Reconstrução Dimensional, origem de todas as outras, a dimensão zero (**R0₁**), a abstração do ponto sem dimensões, como estabelecido na **Figura 30**.

Figura 30 - Zerodimensionalidade em uma Primeira Reconstrução Dimensional, a origem de todas as outras, a primordial. Idealização ou representação do ponto com dimensão nula



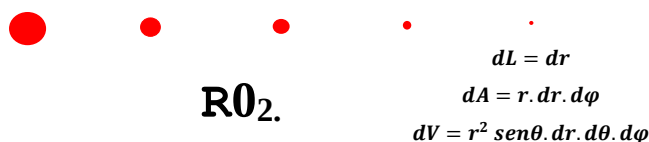
Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, estes diferentes modelos de representação dessa mesma estrutura conceitual, dentro dos Registros de Representação Semiótica, temos o Registro Figural, o Registro Discursivo em língua materna, Tabelar e Algébrico. Iremos aqui caracterizar a existência de diversas Reconstruções Dimensionais ao longo do desenvolvimento da Geometria das Dimensões, que, no caso, definimos para cada figura dimensional, em quatro tipos de Visualização de Reconstrução.

Consideremos agora um segundo modelo, ou segunda visualização de Reconstrução Zerodimensional (**R0₂**, **Figura 31**) sempre dentro de quatro Registros (de Representação Semiótica), o Registro Figural das figuras geométricas, o Registro Discursivo em Língua Materna, Registro Tabelar e o Registro Algébrico das equações que regem suas variáveis dimensionais, que apresentaremos nesta seção.

Poderíamos visualizar aqui, um modelo da dimensão zero representado por um ponto cujas dimensões de todos os lados tendem a zero.

Figura 31 - Zerodimensionalidade em uma segunda Reconstrução. É o caso de uma esfera, que pode se tornar menor e menor mentalmente. E várias dimensões mentais podem ser associadas



Fonte: Elaborado pelo autor

A representação da dimensão zero pode ser estabelecida de forma virtual, de manifestação em coordenadas cilíndricas, pois se manifestando de forma infinitesimal, mas representada em uma, duas e três dimensões distintas, virtualmente, pois ainda se delineia em suas expressões infinitesimais, como sementes-pontuais-virtuais de formas futuras representadas no ponto em direção a dimensões superiores.

A dimensão zero, o ponto, poderia se expressar como uma manifestação de representação de uma linha virtual, ou seja, apesar de ser pontual, se manifestar como semente para construção de uma linha, na dimensão um virtual: $dL = dr$, mas ainda sendo uma manifestação da dimensão zero, ou seja, o ponto, uma vez que dr é um intervalo, Δr (delta r), infinitesimal, tendendo a zero, portanto ainda um ponto. Sabemos que entre dois pontos de uma reta, por mais próximo que se escolha um do outro, ainda sempre vão existir infinitos pontos entre esses dois pontos. No entanto, o infinitésimo seria um intervalo virtual, menor de todos, realmente tendendo a zero. O infinitésimo dr , seria o menor intervalo imaginável entre dois pontos, portanto, se tendendo a zero, representa assim, apenas o ponto, representação diferencial da dimensão zero. Esta seria a representação do ponto, como “semente” unitária, mas com probabilidade virtual para a formação do intervalo entre dois pontos, o segmento de reta, o “galho” surgido de uma “semente-linha”. A formação da árvore a partir da “semente-linha” para formação do segmento do “galho” seria uma forma analógica botanista (DUVAL, 2005) de ver a formação geométrica, dimensionalmente se manifestando por analogia à biologia.

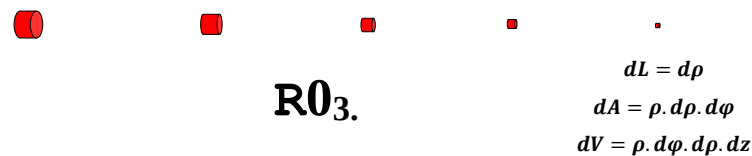
A zerodimensionalidade, o ponto, poderia também ter expressão em uma semente-área, “DNAizada” como expressão de representação de uma área virtual, ou seja, como ainda infinitesimal, por isso se mantém como expressão pontual, mas como uma manifestação virtual para uma área, representação de uma semente de manifestação geométrica da dimensão dois, mas ainda estando na dimensão zero, o ponto: $dA = rd\varphi.dr$. Seria a manifestação de um ponto, uma vez que $rd\varphi$ é um intervalo curvo infinitesimal e dr seria o outro intervalo infinitésimo reto, perpendicular ao primeiro, radial, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais. Sendo assim, ainda mais rapidamente, seu produto tenderia a zero, portanto, um ponto, representação diferencial virtual da dimensão zero, como semente de probabilidade de se manifestar na dimensão dois. Na analogia botanista, uma “folha da planta”, geometricamente já delineada, mas ainda virtualmente na dimensão zero, a “semente”. Seria como se a “semente” do ponto, neste seu aspecto, carregasse virtualmente a possibilidade de se manifestar na segunda dimensão.

A dimensão zero, o ponto, pode também ser representado como uma manifestação da representação de um volume virtual infinitesimal dV , ou seja, como infinitesimal representa uma semente de manifestação para a dimensão três, mas ainda estando na dimensão zero, o ponto: $dV = r\sin\theta d\varphi.rd\theta.dr$. Ainda, mesmo assim seria a

manifestação de um ponto uma vez que $rd\theta$ é um intervalo curvo infinitesimal, o $r\sin\theta d\varphi$ seria outro intervalo curvo infinitesimal e o dr seria outro intervalo reto, radial, infinitesimal. São perpendiculares entre si, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais, mas tendendo a zero, de forma ainda mais rápida, com o seu triplo produto infinitésimo, portanto, um ponto, representação diferencial virtual da dimensão zero, com a probabilidade de ser manifestar na dimensão três, mas ainda virtualmente. O ponto como “semente” unitária de possibilidade de manifestação, para a formação do “tronco” da árvore, ou seja, o Sólido.

Em uma terceira Reconstrução da zerodimensionalidade, **R0₃**, poderíamos conceber um cilindro de raio e altura desprezíveis e cada vez menores em tamanho, em comparação com as distâncias à sua volta, com suas dimensões tendendo a zero, assim infinitesimais, portanto um ponto, na dimensão zero, como semente de manifestação de outra geometria, como mostra a **Figura 32**.

Figura 32 - Zerodimensionalidade em uma terceira Reconstrução Zerodimensional. Caso de cilindros de raios e alturas cada vez com dimensões mais desprezíveis



Fonte: Elaborado pelo autor

A representação da dimensão zero pode ser representada de forma virtual, mas manifestando-se de forma infinitesimal do ponto, em uma, duas, três ou quatro dimensões distintas, virtualmente, pois ainda delineada em suas expressões infinitesimais, como sementes-infinitésimas de manifestação de um formato em dimensões superiores.

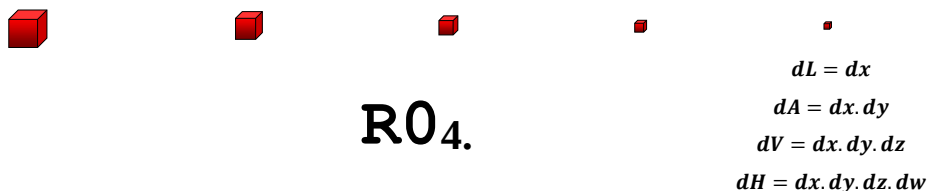
A dimensão zero, o ponto, pode se manifestar em coordenadas cilíndricas e com expressão de manifestação na representação infinitésima-linear por meio de uma linha virtual, ou seja, já indo para uma dimensão um: $dL = d\rho$, mas mesmo assim, mantendo sua manifestação na dimensão zero, uma vez que $d\rho$ é um intervalo $\Delta\rho$ (delta ρ) infinitesimal, tendendo a zero, ainda, portanto, um ponto. O infinitésimo $d\rho$, seria o menor intervalo entre dois pontos imaginável, tendendo a zero, como representação diferencial da dimensão zero. O ponto como “semente-linha” unitária para a formação do “galho”, ou seja, o segmento de reta.

A dimensão zero, como manifestação do ponto, poderia ser modelado agora como uma representação de uma semente-ponto-área-infinitésima virtual em coordenadas polares, ou seja, também infinitesimal, mas como manifestação virtual no plano das coordenadas cilíndricas, semente de uma manifestação geométrica da dimensão dois, no entanto, ainda estando na dimensão zero, o ponto: $dA = \rho d\varphi \cdot d\rho$. Ainda assim, seria a manifestação de um ponto, uma vez que $\rho d\varphi$ é um intervalo curvo infinitesimal e o $d\rho$ seria o outro intervalo infinitésimo reto, perpendicular ao primeiro, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais. Assim sendo, mais rapidamente seu produto tenderia a zero, portanto, o ponto, representação diferencial virtual da dimensão zero, como semente de probabilidade de ser manifestar na dimensão dois, uma “folha da planta”, geometricamente já delineada, mas ainda virtualmente na dimensão zero, a “semente”. Seria como se o ponto neste aspecto tivesse a “semente-superfície” de possibilidade para se manifestar, como “folha” na segunda dimensão.

A zerodimensinalidade, o ponto, poderia também ser uma expressão de uma manifestação em representação de um volume virtual, ou seja, ainda infinitesimal, já como semente-zerodimensional virtual de representação da dimensão três em coordenadas cilíndricas, mas ainda estando na dimensão zero, o ponto: $dV = \rho d\varphi \cdot d\rho \cdot dz$. Assim sendo seria a manifestação de um ponto uma vez que $\rho \cdot d\varphi$ é um intervalo curvo infinitesimal, $d\rho$ seria um outro intervalo reto infinitesimal e dz seria outro intervalo infinitésimo reto. São perpendiculares entre si, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais, tendendo a zero, de forma ainda mais rápida, pois tem um triplo produto infinitesimal, portanto, o ponto, representação diferencial virtual da dimensão zero, com a probabilidade de se manifestar na dimensão três, mas ainda virtualmente. O ponto como “semente-sólido” unitária de possibilidade de manifestação, para a formação do “tronco” da árvore, ou seja, o Sólido.

Da zerodimensionalidade, poderíamos também conceber uma quarta Reconstrução Zerodimensional **R04.**, como cubos cada vez menores, com suas arestas cada vez menores, na representação infinitésima de um microcubo virtual, como mostra a **Figura 33**.

Figura 33 - Zerodimensionalidade em uma quarta Reconstrução Zerodimensional. Como seria o caso de cubo de tamanhos cada vez mais desprezíveis dependendo das distâncias do entorno nos seus estados infinitésimos.



Fonte: Construção do autor

Temos que a representação da dimensão zero, neste caso, também pode ser estabelecida de forma virtual de reconstrução, em manifestações infinitesimais-retangulares ou paralelepípedas, ou hipercúbicas, em representação de uma, duas, três, ou quatro dimensões distintas, onde podemos conceber estas representações latentes de manifestação como sementes-infinitésimas do cubo em seus estados virtuais manifestados no ponto.

A dimensão zero, o ponto, poderia ser expresso como uma manifestação de representação de uma semente-linha virtual, ou seja, já indo para uma dimensão um: $dL = dx$, mas ainda mesmo assim, sendo uma manifestação da dimensão zero, o ponto, uma vez que dx é um intervalo Δx (delta x) infinitesimal, tendendo a zero, portanto ainda um ponto. O infinitésimo dx , seria o menor intervalo entre dois pontos imaginável, portanto, como tende a zero, o ponto, mantém sua representação da dimensão zero. Fica representado o ponto como “semente-infinitésima-linear” unitária para a formação do “galho”, ou seja, o segmento de reta.

A representação da dimensão zero pode ter sua representação virtual através de uma semente bidimensional inserida no ponto, semente de manifestação geométrica da dimensão dois, porém ainda, estando na dimensão zero, um ponto: $dA = dx \cdot dy$. Assim, seria a manifestação de um ponto, uma vez que, dx é um intervalo reto infinitesimal, e dy o outro intervalo infinitésimo reto, perpendicular ao primeiro, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais. Sendo assim, seu produto tenderia a zero, portanto, um ponto, representação diferencial virtual, da dimensão zero, como semente de probabilidade de ser manifestar na dimensão dois. Seria a manifestação representativa da semente de superfície infinitésima de construção, que na biologia seria a “folha da planta”, geometricamente já delineada na semente do ponto, mas ainda virtualmente na dimensão

zero. O ponto como semente-superfície, de possibilidade para se manifestar na dimensão dois.

No ponto, dimensão zero, podemos representá-lo como uma semente-infinitésima de volume, podendo ser representado por meio de um volume virtual, infinitesimal, semente de manifestação na dimensão três, mas ainda na dimensão zero, o ponto: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. O sólido virtual dV seria a manifestação ainda do ponto uma vez que dx é um primeiro intervalo reto infinitesimal, e dy seria o outro intervalo reto infinitesimal e dz seria o último intervalo infinitesimal reto. São perpendiculares entre si, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais, mas tendendo a zero, de forma ainda mais rápida, com o seu triplo produto infinitésimo, portanto, um ponto, representação diferencial virtual da dimensão zero, com a probabilidade de se manifestar na dimensão três, mas ainda virtualmente. O ponto representado como “semente-infinitesimal do sólido tridimensional”, possibilidade de manifestação da semente biológica da planta para a formação do “tronco” da árvore, ou seja, o Sólido.

A dimensão zero pode também estar representada em manifestação virtual de um hipervolume, ou seja, também infinitesimal, como semente de manifestação para a dimensão quatro, mas ainda estando na zerodimensão, o ponto, $dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot dw$. A manifestação de um ponto uma vez que dx é um primeiro “intervalo” reto infinitesimal, o dy seria o segundo “intervalo” reto infinitésimo e dz outro “intervalo” infinitésimo reto, e finalmente dw seria o último “intervalo” infinitésimo reto. São perpendiculares entre si, portanto, não interferentes, linearmente independentes e ortogonais, tendendo a zero, da forma mais rápida de todas, com o quádruplo produto de infinitésimos, portanto, um ponto, em sua representação diferencial virtual da dimensão zero, mantém a probabilidade de se manifestar na dimensão quatro, mas ainda virtualmente. O ponto como “semente-hipersólido” quadridimensional de manifestação, na formação de um objeto em que “não temos exemplo físico experiencial”, mas na representação virtual mantém-se como de um Hipervolume.

Da zerodimensionalidade, poderíamos estabelecer outras inúmeras Reconstruções Dimensionais analógicas, dentro do Registro de Representação Semiótico Geométrico Figural, e discursivo da Língua materna, estabelecendo novas representações semióticas de diversos interesses, ou que fizessem necessárias, **R05**, **R06**, ..., de acordo com a aplicabilidade prática ou da forma como gerirmos a forma de visualização ou representação.

Podemos dizer que na dimensão zero, como primeira noção que surge, em analogia com o que conhecemos das figuras de dimensões maiores, aparece a noção de vértice. Assim para o ponto ou a zerodimensionalidade, figura prima, o ponto, aparece a noção de vértice, e ele é só na dimensão zero, um vértice, uno, $V_0 = 1$.

Como veremos nas dimensões maiores por analogia, sempre que aparecer uma nova variável dimensional, e quando ela aparece pela primeira vez ela vai ser uma. E a Equação Geométrica das Dimensões, primeira que começaremos a calcular e que posteriormente, veremos, vai valer sempre para todas as dimensões e figuras geométricas. Apresenta-se assim de forma simples a primeira das equações no estudo da Geometria das Dimensões dentro do Registro de Representação Semiótico Algébrico.

É interessante observar que a natureza sempre escolheu a singularidade do ponto, ou seja, a manifestação da zerodimensionalidade, para representar inicialmente e virtualmente os elementos da criação.

Como exemplos, temos a criação do Universo, que através do Big Bang, singularidade do ponto, deu origem a tudo o que existe no Universo, a Matéria, a Energia, a Informação, os Sentimentos e as Consciências. É este Universo que se mantém em permanente expansão a partir desta singularidade.

Outro advento que se inicia em um ponto, é a vida, tem sua origem, na dimensão zero, o ponto, ou seja, de uma célula invisível aos olhos, aparece a origem de todo um ser vivo que irá nascer, onde neste ponto semente-infinitésima, já estão representados, o formato do futuro ser que vai nascer, as informações de seu crescimento, e elementos da sua fôrma virtual, uma semente da formação do sólido, ser vivo, que se manifestará na terceira dimensão, e que contém todas as informações daquele ser vivo que a partir daí, vai se originar, seja uma ovelhinha, ou seja um ser humano, ali estão delineados, seu formato futuro.

A Equação Geométrica das Dimensões, cumpre seu papel, de levar todas as figuras dimensionais, à expressão canônica, que leva sempre a unidade. E é partindo dessa primeira equação nesta escalada que a escrevemos para a dimensão zero.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES
para a zerodimensionalidade do ponto:

$$V_0 = 1$$

Esta é, portanto, a chamada Equação Geométrica das Dimensões para a zerodimensionalidade, como primeira manifestação do Registro de Representação Semiótica Algébrico da Geometria das Dimensões. Podemos considerar que o vértice seria o primeiro conceito ou primeira noção, ou primeira variável dimensional, dos elementos geométricos das dimensões, surgida, na escala dimensional crescente, com sua origem, portanto, na dimensão zero.

A originária tabela da dimensão zero, no quadro 3, que se fará crescente *ad infinitum*, para todas as dimensões.

Quadro 3 - Tabela prima (primeira) das dimensões e características da dimensão zero do ponto

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Elementos no interior da dimensão zero	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	1, ∞	$V = 1$

Dimensão zero do ponto

Formato de representação: Ponto

Noção nova: um Vértice

Iniciada e Finalizada pelo Nada

Dentro do ponto não há nenhuma estrutura ou infinitas

Equação Geométrica das Dimensões na Zerodimensão: $V = 1$



Fonte: Construção própria

Em primeira tabela e resumo dimensional do ponto temos o Quadro 3. Assim em homenagem à UNIDADE, ao o UNO, que surge em cada nova variável dimensional e quando surge nova é sempre UNA, à UNIDADE do ponto, semente de todas as figuras dimensionalmente maiores, à UNIDADE que resulta da Equação Geométrica das Dimensões, soma e subtração alternada de todas as variáveis dimensionais surgidas até D-ésima dimensão, que faremos surgir válida para todas as famílias e dimensões. Aqui a nossa homenagem ao Uno, unidade que une.

4.3 - REPRESENTATIVIDADES DA UNIDADE OU DO UNO

Do ponto de vista das representações, poder-se-ia fazer a representação de como um ser vivo, viveria na dimensão zero. Um ser vivo que só fica parado no mesmo lugar,

sem opções de movimento, para frente, para trás, para o lado esquerdo ou direito, para cima ou para baixo, poderíamos dizer que ele está confinado na dimensão zero. Como exemplo, poderíamos citar uma bactéria nascida em uma placa de Petri, vinculada à sua gelatina de alimentação. Ela estaria vinculada em sua vivência à limitação da zerodimensionalidade, naquela posição em que o alimento está à sua volta e ela ali permanece. Um exemplo antropológico da zero dimensionalidade seria o de um ser humano em uma prisão, onde ali confinado perde a possibilidade de se movimentar em qualquer direção, condição em que por irresponsabilidade de seus atos anteriores, fica condenado a impossibilitado de realizar mais atos antissociais. Assim sendo, seu livre arbítrio de possibilidades relativas, estariam reduzidas à zerodimensionalidade espacial, ficando limitado em seu movimento para todas as direções do espaço.

Outra analogia do desenvolvimento da vida no planeta que ficou aperfeiçoando seres unicelulares durante três bilhões de anos, e só então começaram a existir os seres multicelulares, multidimensionais e a se tornarem cada vez mais complexos.

Ainda assim, hoje, os seres multicelulares surgem, em origem, da unidade de uma única célula.

O Universo também pela Física surgiu de um ponto singular, através do Big Bang, de onde o Universo mantém sua expansão.

Em razão de todos os corpos existentes poderem surgir, aparecer, ganhar representação geométrica no espaço, a partir de um único ponto, a unidade, dimensão zero, faz-se aqui uma homenagem à unidade que cria todas as outras dimensões. Faz-se isto através de escritos de autores de um passado distante, berço do início das civilizações e seu intelecto. Para isso recorreremos à grandes citações da criação, ligadas à unidade, por autores diferentes, de lugares diferentes da Terra e de épocas distintas.

Cita-se inicialmente ao *Quadrivium*, da idade média, cita-se, Xenófanés, da Grécia e cita-se, Lao Zi ou Lao Tse, da China, na poesia, na prosa, na contextualização de interessantes homenagens ao uno, à unidade, de formas distintas, como se no uno tivesse toda a origem da criação, como ocorre também neste trabalho em que a criação de todos os corpos das mais diversas dimensões, podem ser obtidas pelo uno, o ponto, na virtualidade de todas as criações dimensionais, como se no uno, a unidade, a dimensão zero, reverberasse para toda a criação dimensional e toda a criação dimensional reverberasse para o uno.

De acordo com o primeiro livro, o “*Quadrivium, As Quatro Artes Liberais Clássicas da Aritmética, da Geometria, da Música e da Cosmologia*”, p. 14, organizado por John Matineau, a representatividade da unidade, na Aritmética, receberia as denominações abaixo.

Unidade. O Uno. Deus. Espelho de maravilhas. A eternidade imóvel. Permanência. Há incontáveis nomes para descrevê-lo.

De acordo com certa perspectiva, não se pode realmente falar do Uno, porque falar dele é torná-lo um objeto, que implica estar separado dele, deturpando, assim, a essência da unidade desde o princípio - que é um enigma misterioso.

O Uno é o limite de todas as coisas: o primeiro antes do princípio e o último antes do fim. *alfa e ômega*, o molde que dá forma a todas as coisas e a única coisa formada por todos os moldes; a origem a partir da qual o universo emerge; é o próprio universo e o centro para o qual este retorna. É ponto, semente e destino. O Uno ecoa em todas as coisas e trata a todos da mesma forma. Sua estabilidade entre os números é sem igual, permanecendo ele mesmo quando multiplicado ou dividido por si mesmo; e a unidade de qualquer coisa é aquela coisa. O Uno é, por si só um todo e não pode existir nada que o descreva.

Todas as coisas estão imersas no oceano sem fim da Unidade. A qualidade da unidade a tudo permeia, e, enquanto não há nada sem ela, também não há nada dentro dela – como ocorre até com uma comunicação ou uma ideia que necessita de partes que se relacionem entre si. Como a luz do sol e a chuva suave, o Uno é incondicional em seu amor, mas sua majestade e mistério permanecem velados e fora do alcance da compreensão, pois somente o Uno pode compreender-se a si mesmo. O Uno é, por si só, um todo, e não pode existir nada que o descreva. O Uno é simultaneamente círculo, centro e o mais puro som. (MARTINEAU, J.; QUADRIVIUM, p.14, 2014).

Segundo Xenófanés (570-475 a.C., 95 anos):

“O Uno não é nada semelhante ao homem, nem na forma, nem no pensamento. Vê inteiro, pensa inteiro, ouve inteiro. Mas sem esforço ele tudo governa com a força do mental. E sempre habita o mesmo lugar sem nada mover, nem convém deslocar-se de um lado para o outro.”

Aristóteles (384-322 a.C., 62 anos) atribui a Xenófanés, como sendo o primeiro a descrever um ser, que a partir de uma percepção relativa, tinha características unas e a tudo representava. Xenófanés fazia disso uma interpretação sua, desta forma de pensar, comparando a outros pensadores da época. Xenófanés, fundador da escola de Eléa, considerava a unidade no todo.

Aristóteles em seu livro *Metafísica*, afirma que Xenófanés (570-475 a.C., 95) foi o primeiro a postular a unidade e disse:

A partir desta definição podemos entender o significado dado por esses antigos ensinamentos de que os elementos do mundo natural são uma pluralidade. Outros, no entanto, teorizaram sobre o universo como uma entidade única; mas suas doutrinas não são todas semelhantes em questão de robustez ou em respeito à conformidade com os fatos da natureza. Para os propósitos de nossa atual pesquisa, um relato dos ensinamentos é bastante irrelevante, uma vez que eles não são; enquanto assumem uma unidade, ao mesmo tempo deduzem que o Ser é gerado da unidade assim como da matéria, assim como para alguns físicos, mas

fornecem uma explanação distinta; pois os físicos presumem também o movimento, de qualquer forma quando explanam a geração do universo; mas esses pensadores defendem que ele é imóvel. Entretanto, assim, muito é pertinente para a nossa presente investigação. Parece que Parmênides idealizou da unidade como uma em definição, mas Melissus como materialmente uma. Assim o primeiro diz que ele é finito e o segundo que ele é infinito. Mas Xenophanes, o primeiro expoente da unidade, (pois Parmênides é dito ter sido seu discípulo), não deu nenhum ensinamento definido, nem pareceu ter concebido quaisquer destas definições de unicidade; mas considerando todo o universo material ele estabeleceu que a unidade é Deus.

Esta escola, então, como temos dito, pode ser descartada para os propósitos da presente investigação; dois deles, Xenophanes e Melissus, podem ser completamente ignorados, como sendo algo muito grosseiro em seus pontos de vista. Parmênides, contudo, pareceu falar com mais significado. Pois ao defender como ele o faz, que o Não Ser, em contraste com o Ser, não é nada, ele necessariamente supõe que o Ser é Uno, e que não há nada além (discutimos essa questão em maior detalhe na Física); mas sendo compelido a concordar com os fenômenos, e assumindo que o Ser é uno por definição, mas múltiplo com respeito à sensação, ele afirma por sua vez duas causas, isto é, dois primeiros princípios, Quente e Frio; ou em outras palavras, Fogo e Terra (ARISTÓTELES, 1952, p. 504) tradução nossa.¹⁷

Ainda podemos citar Lao Zi ou Lao Tse (Tzu, Tze) (601-531a.C.,70) filósofo chinês, autor do Dao De Jing ou Tao Te Ching, publicado na própria China, em Chinês e Português, que no Capítulo 39, nos fala sobre a unidade, o resultado fundamental da Equação Geométrica das Dimensões, através de todas as dimensões criadas. Lao Tzi menciona em forma de poesia, em 570 a.C., também relacionando a unidade, como nesta equação, com todos os assuntos da vida e do mundo da época.

Desde a antiguidade, adquiria-se o Um; o céu adquiriu o Um e tornou-se límpido; a terra adquiriu o Um e tornou-se serena; o espírito adquiriu o Um e tornou-se vivificado; os vales adquiriram o Um e tornaram-se plenos; as miríades de seres adquiriram o Um e tornaram-se vivos; os príncipes e reis adquiriram o Um e

¹⁷ From this survey we can sufficiently understand the meaning of those ancients who taught that the elements of the natural world are a plurality. Others, however, theorized about the universe as though it were a single entity; but their doctrines are not all alike either in point of soundness or in respect of conformity with the facts of nature. For the purposes of our present inquiry an account of their teaching is quite irrelevant, since they do not, while assuming a unity, at the same time make out that Being is generated from the unity as from matter, as do some physicists, but give a different explanation; for the physicists assume motion also, at any rate when explaining the generation of the universe; but these thinkers hold that it is immovable. Nevertheless, thus much is pertinent to our present inquiry. It appears that Parmenides conceived of the Unity as one in definition, [20] but Melissus as materially one. Hence the former says that it is finite, and the latter that it is infinite. But Xenophanes, the first exponent of the Unity (for Parmenides is said to have been his disciple), gave no definite teaching, nor does he seem to have grasped either of these conceptions of unity; but regarding the whole material universe he stated that the Unity is God.

This school then, as we have said, may be disregarded for the purposes of our present inquiry; two of them, Xenophanes and Melissus, may be completely ignored, as being somewhat too crude in their views. Parmenides, however, seems to speak with rather more insight. For holding as he does that Not-being, as contrasted with Being, is nothing, he necessarily supposes that Being is one and that there is nothing else (we have discussed this point in greater detail in the Physics); but being compelled to accord with phenomena, and assuming that Being is one in definition but many in respect of sensation, he posits in his turn two causes, i.e. two first principles, Hot and Cold; or in other words, Fire and Earth.(Aristóteles, 1952, p.504)

tornaram-se justos. Alcançaram a supremacia do Um. Se o céu não se tornou límpido, corre o risco de dividir-se. Se a terra não se tornar serena, corre o risco de estremecer. Se os vales não se tornarem plenos, correm o risco de esgotar-se. Se os seres não se tornarem vivos, correm o risco de extinção. Se os príncipes e reis não se tornarem justos, correm o risco de destronamento. Por isso o nobre utiliza a humildade como Princípio. O alto utiliza o baixo como base. Assim, príncipes e reis se autodenominam de solitários, de insuficientes e de desvirtuosos. Isto não seria utilizar a humildade como Princípio? Portanto, nem a reputação plena é obtível; não desejar a brilho do jade nem a durabilidade da pedra. (LAO ZI, China, Dao De Jing, Cap. 39)

Ainda no Capítulo 42, Lao Tzi nos diz: “*O Tao gera o Um. O Um gera o Dois. O dois gera o Três. O Três gera todas as criaturas.*” Esta frase está diretamente ligada à intenção desta pesquisa de reconstrução dimensional indo da dimensão zero, a unidade do ponto, que irá gerar a dimensão um, que irá gerar a dimensão dois, que irá gerar a dimensão três e assim por diante gerar todas as outras dimensões superiores.

Esta menção ao uno, de forma poética, se refere a uma analogia que fazemos da tendência de retorno de todas as figuras dimensionais à dimensão zero, o ponto, a unidade do ponto, através de suas variáveis dimensionais, como se o ponto contivesse o uno e o uno se reverberasse para todas as dimensões maiores. Assim sendo, como veremos, através de todas as variáveis adquiridas por toda a criação geométrica através de suas variáveis geométricas dimensionais, há uma expressão de origem, de potencial unitário, que faz estas variáveis se relacionarem em lógica ao uno fazendo à unidade retornar sempre, por meio da relação obtida de infinitas variáveis geométricas dimensionais nas infinitas dimensões, unidas suas construções por meio desta equação geométrica das dimensões, como veremos adiante.

4.4 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO ZERO A UM

Um conjunto de pontos discretos ao longo de uma linha, postados descontinuamente, podem deslizar, uns sobre os outros, de forma a estarem associados em uma dimensão maior que a zero, A unidade de cada uma delas, separadamente, está garantida, e associada a mesma dimensão zero, o que é válida para cada um dos pontos individualmente, mas estão convivendo em conjunto dentro de um mesmo espaço dimensional.

Poderíamos nos perguntar qual seria a dimensão fracionária entre a dimensão zero e a dimensão um? A dimensão fracionária entre a dimensão zero e a dimensão um, seria representada por um conjunto de pontos deslizantes, penetrantes nas dimensões superiores.

Poderíamos começar com um conjunto de pontos de partículas que penetrariam em manifestação nas dimensões superiores à dimensão zero, apesar de se manterem pontos, interpenetrantes nas linhas, nas superfícies, no espaço, no hiperespaço. Estes pontos na prática podem ser pontos de fogo, ou de um gás ou de um líquido ou de poeira.

Poderíamos pensar um conjunto de pontos discretos separados entre si, mas alinhados, dispostos na configuração de uma reta, de uma nuvem, de uma neblina, de uma tempestade de areia, seja em um tubo, ou em um bujão, ou em alta velocidade sob um avião. Poderíamos considerar esses pontos discretos e fluidos, separados entre si, associados a uma dimensão fracionária entre a dimensão zero e a dimensão um.

As menções bibliográficas a tais dimensões fracionárias, estão nas Geometrias não euclidianas e nas curvaturas do espaço tridimensional do espaço interplanetário pela Teoria Relativística e curvaturas do universo devido à presença da matéria. Sendo assim, desenvolveremos este aspecto dimensional como complementação construtiva a um modelo em dimensões menores. Nós referenciamos analogicamente também à dimensão fracionária da Teoria Relativística do espaço curvo.

Para estabelecer uma caracterização numérica de valores dimensionais intermediários em ordem crescente de dependência dessa configuração começaremos por classificar sua relação crescente de dimensão entre zero a um.

Consideremos inicialmente a dimensão inicial zero, $d_o = 0$, pontual, somados às dimensões fracionárias que se ampliam como se seguem nas características adiante, por penetrabilidade em dimensões superiores.

Em uma primeira etapa, vamos caracterizar a distribuição dos pontos de forma linear, atribuindo a dimensão 0,10 ou maior.

4.4.1 - Dimensão: $d_a = 0,10$, Partículas em um tubo filamentar, unidirecional

Atribuição da dimensão $d_a = 0,10$ à linha filamentar de partículas. Estas partículas podem ser, partículas de fogo, gás, líquido, partículas sólidas, em forma de equilíbrio ou em uma vazão linear. Exemplo: vela, gás encanado, líquido em um encanamento, pasta em um tubo longo, partículas sólidas em um tubo cilíndrico longo e fino.

4.4.2 - Dimensão no intervalo: $0,10 < d_b < 0,19$, Partículas distribuídas em filamentos em direções variadas

Associação da dimensão entre os valores, $0,10 < d_b < 0,19$, em que as mesmas partículas estariam em tubos filamentosos que se dirigem a variadas direções. Em até 10 ($1 < n \leq 10$) direções diferentes, $d_b = 0,10 + (n - 1)/100$. Se n passar de 10, anota-se ao lado entre parênteses o número que passou, $d_b = 0,19(n - 10)$.

4.4.3 - Dimensão: $d_c = 0,20$, Partículas distribuídas em uma superfície plana

Associação da dimensão $d_c = 0,20$ para partículas distribuídas em uma superfície. Exemplo: partículas sólidas de poeira na superfície de um móvel, partículas de um líquido na superfície de um piso.

4.4.4 - Dimensão: $0,20 < d_d \leq 0,29$, Superfícies de partículas em direções variadas

Associação da dimensão $0,20 < d_d \leq 0,29$ às partículas distribuídas em superfícies, em direções diversas. Em exemplo, líquido espalhado na superfície em uma escada, poeira em toda a superfície sólida de um móvel. Em até $n=10$ ($1 < n \leq 10$) superfícies diferentes, $d_{ab} = 0,20 + (n-1)/100$. O que n passar de 10, anota-se ao lado entre parênteses, $D=0,29(n-10)$.

4.4.5 - Dimensão: $d_e = 0,30$, Partículas sólidas distribuídas em volume

A dimensão $d_e = 0,30$, às partículas distribuídas em volume em um corpo volumétrico, neblina ou fumaça em todo um ambiente, partículas de poeira ao vento, pó de café ou de açúcar em um pote ou pacote.

4.4.6 - Dimensão: $d_f > 0,30$, Distribuição em hipervolumes

Associação da dimensão $d_f > 0,30$ às partículas distribuídas em hipersólidos. Sem exemplos.

Consideremos assim, o **Quadro 4** um resumo das dimensões fracionárias entre as dimensões 0 e 1.

Quadro 4 - As dimensões fracionárias entre um e dois

Dimensão	Tabela dimensões fracionárias entre 0 e 1	Exemplo dimensões fracionárias entre 0 e 1
$d_o = 0$	ponto	Teórica, Euclidiana, sem dimensões
$d_a = 0,1$	Partículas de fogo, gás, líquido, ou sólidas, em tubo filamental	gás encanado, líquido em um encanamento
$0,1 < d_b \leq 0,19$	Partículas em tubos em várias direções variadas até 10	$d_b = 0,1 + (n - 1)/100$ $1 \leq n \leq 10$, se passar de 10, indica-se
$d_c = 0,2$	Partículas distribuídas em superfície	neblina fina sob um lago pó na superfície de um móvel
$0,2 < d_d \leq 0,29$	Partículas distribuídas em superfície mas em direções variadas até 10	$d_d = 0,20 + (n - 1)/100$ $1 \leq n \leq 10$, se passar de 10, indica-se
$d_e = 0,3$	Partículas distribuídas em volume	piscina cheia d'água, sorvete em pote, pote de café ou de farinha
$d_f > 0,30$	Partículas em um hipersólidos	Sem exemplos
1	Linha reta	Teórica, Euclidiana, Dimensão 1

Fonte: Construção do autor

4.5 - DIMENSÃO UM (1D) OU ESTRUTURA UNIDIMENSIONAL

A unidimensionalidade é representada por uma linha, de espessura nula e comprimento unidirecional. Como diz Euclides em seu “Os Elementos”: “1. Ponto é aquilo de que nada é parte; 2. E linha é comprimento sem largura; 3. E extremidades de uma linha são pontos”. (EUCLIDES, 2009, p. 97)

4.5.1 - Unidimensional Infinita

Uma reta pode ser construída por um conjunto infinito de pontos por meio de um enfileiramento destes pontos de forma contínua ao longo de uma única direção, sem fim em ambos os lados.

Esta seria uma das Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas na dimensão um. Uma reta unidimensional, que tem a característica de ser infinita, de espessura nula, e que seria uma das primeiras representações que se poderia estabelecer a priori. Podemos estabelecer como representação semiótica o modelo da unidimensionalidade, como um eixo x infinito. Podemos denominar esta representação como **R1 ∞** , Reconstrução Unidimensional Um, de representação semiótica unidimensional infinita.

Vamos definir para cada dimensão inteira, o que se denomina de **intervalo** entre dois pontos, s , valor invariante da escalada em cada dimensão, independente da rotação do sistema de referência.

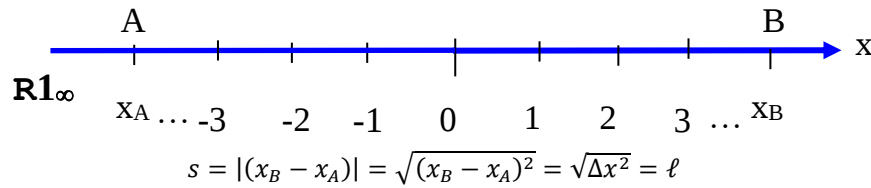
No caso da dimensão zero, o intervalo entre dois pontos seria sempre nulo.

$$s_o = 0$$

No caso da dimensão um, o intervalo s entre dois pontos, A e B (vértices do segmento), seria dado pelo módulo da distância entre duas coordenadas da reta, ou seja, a distância entre dois pontos da reta, as coordenadas genéricas x_A e x_B de forma sempre positiva, como na **Figura 34**.

$$s_1 = |(x_B - x_A)| = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = \sqrt{\Delta x^2} = l$$

Figura 34 - Representação da dimensão um, $R1_\infty$, e representação do intervalo entre dois pontos



Fonte: Elaborado pelo autor

4.5.2 - Uso do Princípio da Analogia na Geometria das Dimensões

Estes aspectos, nos remete ao uso de Princípios de Analogia válidas para qualquer dimensão crescente, que também podemos associar a um Princípio da Simetria na Geometria, ou Lei da Lógica da Geometria das Dimensões, ou como Lei de Formação da Geometria das Dimensões.

Os elementos que se repetem de forma semelhante, no desenrolar das complexidades dimensionais superiores podem se relacionar por meio do uso da Analogia. Assim podemos enunciar que uma simetria que se repete de forma análoga em todas as dimensões, consideraremos que se estabelece como elemento que compõe uma norma de institucionalização para cada nova fase dimensional. Consideremos, pois, os seguintes aspectos: Chamaremos de Conjunto de Elementos Geométricos Entrelaçados Dimensionalmente (CEGED) ou Família Dimensional, aos elementos figurais criados em cada dimensão, com número de analogias ou semelhanças ou características que se repetem, de forma evidente, em ordem crescente, como sejam, aqueles exemplos simétricos que chamam a atenção como elementos fundamentais de uma figura geométrica semelhante em dimensões crescentes, como estabelecemos abaixo.

CEGED – Conjunto de Elementos Geométricos Entrelaçados Dimensionalmente

Família Dimensional 1 ou Família quadrado-cubo:

ponto, segmento de reta, quadrado, cubo, hipercubo, ...

Família Dimensional 2 ou Família triângulo-tetraedro:

ponto, segmento de reta, triângulo equilátero, tetraedro, hipertetraedro, ...

Família Dimensional 3 ou Família círculo-esfera:

ponto, segmento de reta ou semicircunferência, círculo, esfera, hiperesfera, ...

Princípios analógicos dimensionais, ou seja, que são válidos, de forma semelhante para qualquer dimensão, pode ser repartido em quatro princípios fundamentais nas dimensões.

4.5.3 - Primeira Reconstrução da Unidimensionalidade

Passamos agora à construção finita de um segmento de reta, primeira Reconstrução Unidimensional finita da dimensão um, $R1_1$, que indicamos pelo símbolo R , em menção à Reconstrução dimensional, o símbolo 1, é referente a Dimensão um, 1D, unidimensional, e o sub índice, símbolo 1 menor, como sendo Primeira das reconstruções dimensionais finita, das quatro que serão apresentadas.

A construção desse segmento, feita de forma contínua, sai da dimensão zero, o ponto, e vai para a dimensão um, de quatro formas como narraremos a seguir.

Escolhemos uma direção, das infinitas direções radiais, saindo da “microesfera” do ponto, diante dos 4π esterorradianos (sr) possíveis em três dimensões.

Assim, realizando uma Reconfiguração Heurística Mereológica, tiraríamos infinitos pontos repetidas vezes do próprio ponto.

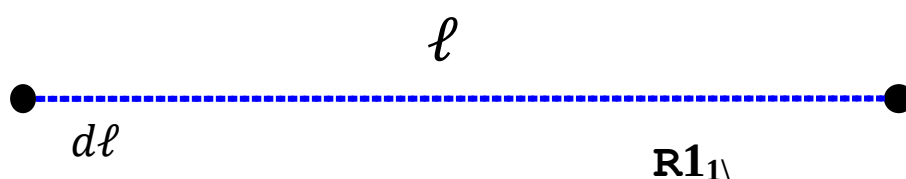
Em um segundo passo, a cada um desses pontos aplica-se um incremento infinitesimal $d\ell$ em uma única direção.

E para Reconstrução dimensional do segmento de reta, após a retirada dos infinitos pontos da dimensão zero, e dado a cada ponto, um infinitésimo dimensional $d\ell$, enfileira-se continuamente os infinitos pontos, ligando linearmente os infinitésimos até formar o segmento de reta de comprimento ℓ .

Ao se obter o segmento de reta contínuo, entre dois pontos exteriores terminais, perfazendo um comprimento ℓ , tem-se como início e término um ponto inicial e final do segmento, que denominamos vértices do segmento de reta.

Esta primeira Reconstrução Unidimensional ($R1_1$), caracteriza praticamente uma Reconfiguração Mereológica do ponto e uma Reconstrução Dimensional do segmento de reta na dimensão um ($R1_1$), finito, pode ser evocado, com uma imagem de pequenos comprimentos infinitésimos colocados seguidamente, de comprimento $d\ell$, tendendo a zero, que repetidos seguidamente infinitas vezes perfazem a distância ℓ .

Figura 35 - Segmento de reta da dimensão um, construído a partir da dimensão zero, o ponto, $R1_1$



Fonte: Elaborado pelo autor

4.5.4 - Segunda Reconstrução da Unidimensionalidade

Em uma segunda Reconstrução Unidimensional, do segmento de reta, dentro dos Registros de representação semiótica figural e discursivo em língua materna, temos a **Figura 36**, onde para a mesmo segmento de reta, temos um segundo modo de reconstrução.

Forma-se assim o segmento de reta, através da repetição contínua de infinitos pontos sequenciados, em uma única direção com potencialidade de ponto “esférico” em potencial, no formato $dV = (rsen\theta.rd\varphi.rd\theta)dr$, que se reduz à $dL = dr$ com repetição reverberada, como recomposição de repetição deste ponto, infinitas vezes, em uma reconfiguração mereológica, e numa única direção, o do raio infinitésimo, reto, dr .

Assim sendo, podemos observar que, a finalização do segmento de reta, são dois elementos da dimensão anterior, ou seja, dois pontos externos, dois Vértices.

E temos que entre estes dois vértices ou pontos externos, da dimensão um, como mostra a **Figura 36**, em que aparecem infinitos pontos interiores, ou seja, estruturas da dimensão anterior, no caso, da dimensão zero: o ponto; e no exterior os dois pontos externos ou vértices (pontos exteriores ou terminais), $R1_1$.

Figura 36 - Dimensão um, representado uma segunda Reconstrução que se caracteriza por uma Reconfiguração unidimensional Dois, $R1_{2\backslash}$



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, não menosprezemos enfoques distintos de representação, novas formas de se raciocinar, novas visualizações, novas evocações de analogia, pois elas levam o estudante a novas didáticas de visualização, trazendo o estudante, a novas formas que facilitação ao entendimento, novas percepções, que levam à maior variedade de ensino e de aprendizado, que por sua vez, levam a novas analogias sem fim, dentro de uma infinidade de aplicações.

4.5.5 - Terceira Reconstrução da Unidimensionalidade

Em uma terceira reconstrução da unidimensionalidade, o segmento de reta, ou terceira Reconstrução Unidimensional, teríamos como geometria de Reconstrução Instrumental, um único segmento unidimensional, em forma analógica de um cilindro, de raio desprezível e altura l .

Esta terceira Reconfiguração mereológica, se caracteriza por segmentos infinitos e sequenciados e repetidos, infinitésimos, ou pontos, de valor potencialmente cilíndrico, de valor $dV = (\rho d\varphi \cdot d\rho) dz$, que se reduz a uma linha $dL = dz$ mas com repetibilidade em um único sentido, de infinitésimos dz , observável, em uma ampliação contínua em uma direção, com uma elongação, de segmento finito, de comprimento l , na direção da altura do cilindro ou elongação natural de raio desprezível, a fim de se construir o segmento de reta de comprimento l , como terceira Reconstrução da unidimensionalidade finita ($R1_{3\backslash}$) (Figura 37).

Figura 37 - Dimensão um, representação da terceira Reconstrução Unidimensional



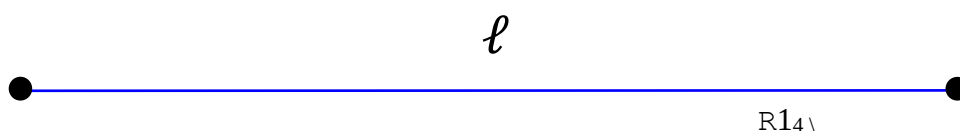
Fonte: Elaborado pelo autor

Esta Reconstrução Unidimensional apresenta como exemplo e opção de representação, a semelhança dos desenhos realizados de um segmento de reta feito com o *mouse* no computador, em espessuras distintas.

4.5.6 - Quarta Reconstrução da Unidimensionalidade

Em uma quarta Reconstrução Unidimensional, poderíamos representar a construção do segmento de reta da unidimensionalidade, a partir da construção instrumental, onde de dois pontos distintos no espaço, ocorreria um traçado de um segmento de reta, entre esses dois pontos terminais, de comprimento genérico ℓ , construção esta que pode ser feita com uma régua ($R14 \setminus$), numa quarta forma de construção ou quarta Reconstrução Unidimensional do segmento de reta, **Figura 38**. Esta Reconstrução se caracterizaria como uma Reconstrução Instrumental, segundo Duval.

Figura 38 - Dimensão um, representação da quarta Reconstrução unidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Por isso, todos os modelos de representação semiótica possíveis em matemática, devem ser buscados em sua apresentação, para o estudante, uma vez que delas, são percebidas situações distintas de entendimento, se fazendo atingir diferentes tipos de compreensão, o *intelligere* (tipos de leitura ao entendimento), nas variadas aplicações didáticas, para os distintos estudantes, como nos apresenta Duval (2005).

A construção das regras dimensionais é facilitada pela variedade Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas mostrando as distintas fases da passagem dimensional, desde a dimensão anterior para a construção da próxima dimensão.

4.5.7 - Resumo das Características do Segmento de Reta

Portanto, a nova variável dimensional, da dimensão um, a ARESTA, surge como repetição infinita e contínua do conceito precedente, o VÉRTICE, o ponto, conceito surgido na dimensão anterior.

A nova variável dimensional formada é o segmento de reta, e externamente a ele aparecem dois Vértices, dois pontos exteriores e terminais.

Nesta representação, o segmento de reta, tem infinitos pontos interiores e dois pontos exteriores ou terminais, Vértices da nova aresta formada.

A aresta, surge como nova variável dimensional, que aparece sempre como única. A aresta **A**, da dimensão um, $A_{1\setminus} = 1$. Aparecem assim, dois elementos da dimensão anterior, como elementos limitantes da nova figura criada, ou seja, os vértices **V**, em número de dois, $V_{1\setminus} = 2$, na dimensão um, nas extremidades do segmento de reta.

Além da formação da reta podemos ter também a formação análoga, em uma geometria não Euclidiana, do segmento de arco de circunferência, que também teriam dois vértices e um segmento de arco que se aplicaria também a Equação Geométrica das Dimensões.

A expressão que chamamos de Equação Geométrica das Dimensões, é sempre válida para tais construções, em todas as dimensões, e agora na dimensão um, ela seria também igual à unidade:

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a unidimensionalidade do segmento de reta ou semicircunferência:

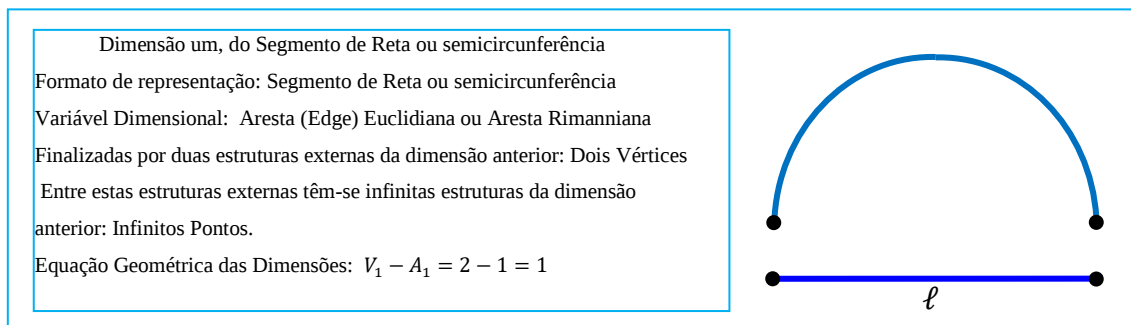
$$V_{1\setminus} - A_{1\setminus} = 2 - 1 = 1$$

Onde consideramos **V** o número de vértices e **A** o número de arestas de cada construção, na Equação Geométrica das Dimensões, que é sempre igual à unidade.

Veja um resumo das características da unidimensionalidade no **Quadro 5**.

Quadro 5 - Tabela dimensional da dimensão um e as características da dimensão um, do segmento de reta ou semicircunferência

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Aresta A	Elementos interiores da dimensão anterior	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	1, ∞	$V = 1$
1D	2	1	∞	$V - A = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Na estrutura de cada uma das peças de cada nova dimensão, cabe um universo dimensional completo da dimensão anterior.

Seguindo um exemplo de unidimensionalidade, tem-se o caso de uma pessoa que vivesse temporariamente em uma dimensão, na situação em que pudesse andar somente ao longo de uma linha, uma baia reta, ou um túnel, um encanamento, em que pudesse se movimentar apenas para frente ou para trás, mas não poderia ir para os lados, esquerda ou direita, ou para cima ou para baixo. Deixa-se neste caso, apenas duas opções de movimento, dois sentidos em uma única direção, a unidimensionalidade.

Um exemplo análogo biológico, seria a ligação entre dois currais de bois, feito por uma baia unidimensional, onde alguns deles são selecionados e condicionadas a passar por esta baia, cercada de mourões, em que somente um pode passar por vez, e cada um pode somente andar para frente, ao longo da linha definida, onde são escolhidos para passar por essa unidimensionalidade até atingir o outro curral a fim de receber tratamentos diferenciados especiais como vacinas, remédios, alimentos diferenciados, etc.

Selecionamos quando fizemos o Capítulo de TSD para a Geometria das Dimensões, não incluído nesta tese, alguns princípios analógicos que ocorrem para todas as dimensões como princípios institucionalizados aos quais os estudantes em aprendizado poderiam passar a concluir ao debater sobre as passagens dimensionais. São eles delineados abaixo.

4.6- PRINCÍPIOS ANALÓGICOS DIMENSIONAIS

Os quatro Princípios Analógicos Dimensionais aqui delineados, foram concluídos a partir do desenvolvimento deste trabalho e são válidos pelo que consideramos nesta pesquisa, à todas as dimensões criadas. Por isso os consideramos analogamente válidos em todas as dimensões inteiras.

4.6.1 - Princípio Analógico Dimensional 1

Princípio Analógico Dimensional 1 dos Elementos Infinitos Interiores

“Uma figura geométrica formada em cada nova dimensão carrega consigo internamente um número infinito de elementos da variável dimensional da dimensão anterior, acrescidas de um incremento infinitesimal.”

Por que princípio analógico? Pelo fato de que, essa mesma analogia ou esta semelhança, valer para a reconstrução de cada uma das dimensões. Este princípio teria simetria de existência para cada dimensão $D=1, 2, 3, 4, \dots$

O elemento novo e único que surgiu da dimensão anterior (VAFSH, Vértice, Aresta, Face, Sólido, Hipersólido), reaparecerá na dimensão posterior, no interior da nova figura geométrica construída, com infinitos elementos repetidos.

Outros princípios:

4.6.2 - Princípio Analógico Dimensional 2

Princípio Analógico Dimensional 2

dos Elementos Limitantes Exteriores

“Uma figura geométrica formada em cada nova dimensão, carrega consigo externamente, um número finito de variáveis dimensionais geométricas (VDG) das dimensões anteriores e sempre apenas uma unidade, da variável dimensional da nova dimensão formada.”

As variáveis geométricas das dimensões ou VAFSH, são, Vértice, Aresta, Face, Sólido, Hipersólido, Hiper-5-sólido, ..., e assim por diante.”

A Variável Dimensional que trouxemos da dimensão zero, que é o Vértice, será aquele que se repete infinitamente de forma interna, entre dois vértices terminais da dimensão um e terá um número de vértices terminais finito, múltiplos e crescentes para cada nova dimensão posterior, dependente das figuras geométricas formadas. Para cada Família Dimensional ou CEGED diferente as características que se formam terão número, detalhe de construção e potencialidades distintas, como veremos no desenrolar das características adiante.

Logo, na nova dimensão, 1D, o segmento de reta é o novo elemento que aparece e que se caracteriza pela Aresta, $A_1 = 1$, formação do segmento de reta. Temos que o número de vértices exteriores, dobrou, $V_1 = 2$, em relação à dimensão anterior, o ponto, que era igual a $V_0 = 1$.

Para a Família dimensional 1,2 ou 3 as variáveis dimensionais até a dimensão 2 são comuns: o ponto (Vértice) e o segmento de reta (Aresta).

Em cada dimensão que surge, aparece uma nova Variável Geométrica (H_n), ou VAFSH, como sejam: VÉRTICE (0D, $H=0$), ARESTA (EDGE) (1D, $H=1$), FACE (2D, $H=2$), SÓLIDO (3D, $H=3$), HIPERSÓLIDO (4D, $H=4$), HIPER5-SÓLIDO (5D, $H=5$)..., que irão compor, na nova figura geométrica dimensionalmente seguinte, seus elementos infinitos interiores e elementos finitos exteriores.

Nos limites exteriores da nova estrutura que se forma, noção nova que surge como elemento completo na nova dimensão, resulta sempre que na sua aparência exterior, aparece sempre um número finito dessas variáveis.

O novo elemento da dimensão anterior (Variável Geométrica anterior) aparece na figura dimensionalmente maior, como elemento exterior, sempre em um número finito de unidades e maior que a unidade, comportando-se como elemento término ou limitante dos infinitos elementos idênticos no seu interior. A variável dimensional nova é sempre igual à unidade.

4.6.3 - Princípio Analógico Dimensional 3

Princípio Analógico Dimensional 3

da Equação Geométrica das Dimensões

“A Equação Geométrica das Dimensões (EGD), relação que se obtêm sempre igual à unidade (canônica) é resultante da sequência crescente alternada da soma e subtração das Variáveis Dimensionais Geométricas (VDG) externas, (VAFSH), da nova figura convexa formada, em qualquer dimensão D.

$$V - A + F - S + H - \dots = 1$$

O que caracteriza a Equação Geométrica das Dimensões, de forma surpreendente é que ela sempre retorna à unidade, para todos as figuras dimensionais.

Esta Equação Geométrica das Dimensões neste Princípio Analógico das Dimensões (3), por sua universalidade e aplicabilidade genérica se caracteriza por ser de uma hipersimetria e imensa abrangência Geométrica, se caracterizando por ser de prioritária observação e importância para a Teoria do Conhecimento Universal.

4.6.4 - Princípio Analógico Dimensional 4

Princípio Analógico Dimensional 4

De toda a dimensão anterior recortada, se monta uma dimensão superior

“Cada elemento figural formado numa nova dimensão carrega consigo, um universo dimensional completo da dimensão anterior. Neste caso, podemos sempre aplicar como Metodologia de Reconstrução Dimensional superior, o uso de uma Reconfiguração Heurística Mereológica da dimensão anterior completa, e a cada um desses infinitos recortes, aplicamos um incremento infinitesimal, que ao serem sobrepostos lateralmente darão origem a uma nova figura dimensionalmente superior realizando assim a Reconstrução Dimensional dessa nova figura.”

*Infinitos Elementos de uma figura retornando à dimensão anterior =
= Dimensão anterior completa*

Exemplos:

a) *Infinitos Pontos de um segmento de reta, retornando à um ponto =
formam um Ponto*

b) *Infinitos Segmentos de Reta tiradas do quadrado e colocados extremidade
à extremidade = formam uma Reta infinita completa*

c) *Infinitas Faces quadradas tiradas do cubo e colocadas lado a lado
= formam um Plano infinito completo*

d) *Infinitos Cubos do Hipercubo e colocados lado a lado
= formam o espaço tridimensional infinito completo
E assim por diante.*

Estes Princípios Analógicos se caracterizam pela formação de leis análogas e válidas para todas as Famílias Dimensionais, todas as dimensões, e são tiradas da formação das dimensões crescentes, característica da Geometria das Dimensões, e que se pode utilizar sempre. São resultados teóricos que se repetem para qualquer dimensão.

A analogia é um elemento essencial da estrutura didática do pensamento, do raciocínio e da construção das ciências. Este conceito, o da analogia é de grande importância na educação, na criatividade, no entendimento. A analogia cria leis teóricas de conservação, as leis da ciência.

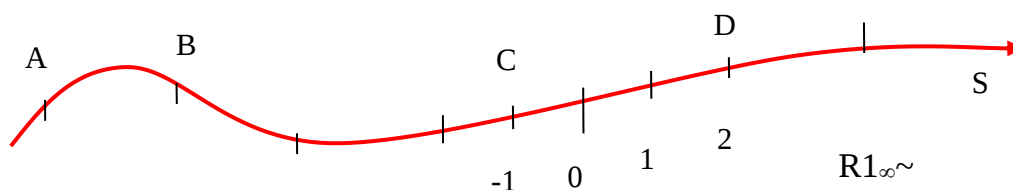
Estes Princípios analógicos é que deverão ser concluídos como Institucionalização para cada Figura reconstruída dimensionalmente.

4.7 - ESTRUTURAS FRACIONÁRIAS ENTRE A DIMENSÃO UM E A DOIS

A representação de uma linha encurvada para uma segunda dimensão, deve formar uma dimensão fracionária como 1,1 ou 1,2, 1,3...,1,4. Quanto maiores as curvaturas, maior a sua aproximação da dimensão dois. Este efeito ocorreria, uma vez que uma reta encurvada deve ter sua curvatura feita em direção à outra dimensão, distinta da qual ela estava inserida. Seria seu início de inserção na dimensão do plano ou da bidimensionalidade.

Caracterizaríamos esta formação, como uma Reconstrução Unidimensional Infinita Til, para representar o encurvamento desta representação ($R1_{\infty\sim}$), como na **Figura 39**.

Figura 39 - Dimensão fracionária entre um e dois, representado por uma reta infinita encurvada. Estrutura unidimensional curva, que se encurva para uma segunda dimensão



Fonte: Elaborado pelo autor

Um “ser” unidimensional hipotético, que morasse nesta reta e que fizesse experimentos de efeitos físicos, na região de maior encurvamento $\widehat{AB}$, veria diferenças físicas nos experimentos se os comparasse à mesma realização de experimentos no local do trecho $\overline{CD}$ dessa reta.

Esta afirmação fazemos em analogia ao que ocorre na terceira dimensão, pois quando fazemos experimentos em locais do espaço cósmico tridimensional que está encurvado para uma quarta dimensão, como perto de um corpo de massa muito grande,

esses experimentos físicos darão resultados diferentes se o fizéssemos em local onde o espaço tridimensional não tem esta curvatura.

4.8 - CONTAGEM DA DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE UM E DOIS

A dimensão fracionária, teve inspiração na Teoria da Relatividade Geral, e nas geometrias não euclidianas. A Relatividade Geral de Einstein se utilizou da Geometria não Euclidiana para definir o espaço tridimensional encurvado e montar um modelo bem-sucedido para a Gravitação. Fizemos assim uma analogia para dimensões menores, fracionárias entre as dimensões 0 e 1, e agora aqui entre 1 e 2, e faremos também entre 2 e 3. Para este caso de dimensões fracionárias entre a dimensão 1 e a dimensão 2, começamos com um segmento de reta encurvada, já não é mais a dimensão um, mas sim a dimensão um, interpenetrando na dimensão dois, ou seja, uma dimensão fracionária entre a um e a dois. Começamos com a dimensão um e suas representações em mais dimensões.

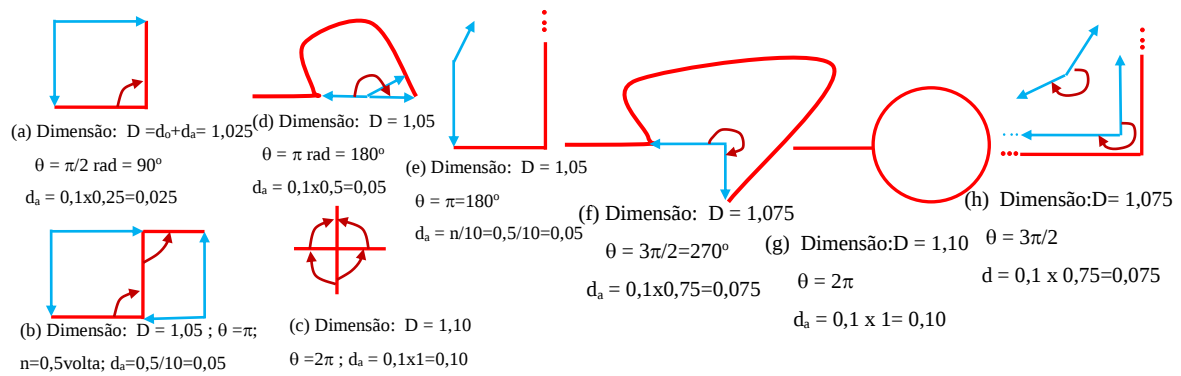
Começamos pela dimensão linear, $d_0 = 1$, para uma linha unidimensional de qualquer comprimento, e acrescentamos as faixas que se seguem.

4.8.1 - Dimensão d_a , podendo d_a ser $0 < d_a \leq 0,10$

(linha encurvada até uma volta)

A dimensão de acréscimo d_a acima de 0 até 0,10, é uma dimensão fracionária como sendo relativa ao ângulo de curvatura θ da linha correspondente, até no máximo uma volta completa, dado por $d_a = (1/10)\theta/2\pi$ onde $0 < \theta \leq 2\pi$. De outra maneira poderia ser considerado o número de voltas fracionárias até 1 volta completa onde $0 < n \leq 1$, onde $0 < d_a \leq n/10$. Em uma volta completa, a dimensão seria dada por 0,10, como na **Figura 40(g)**.

Figura 40 - Representações das Dimensões fracionárias D entre 1 e 1,10 dim, apresentando reta e curvas em até uma volta

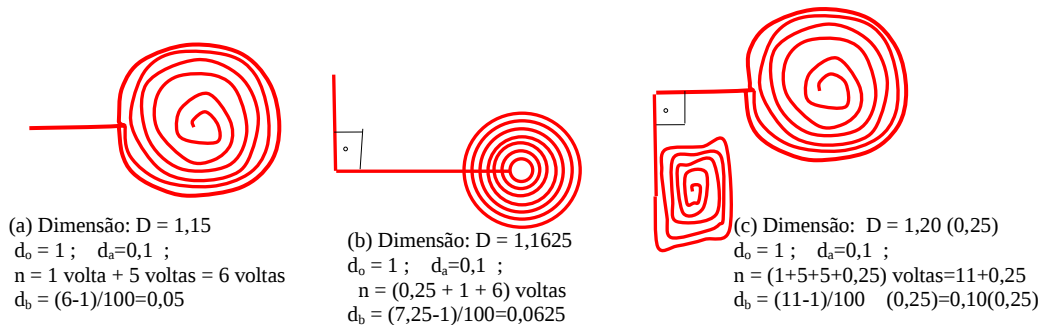


Fonte: Elaborado pelo autor

4.8.2 - Dimensão d_b , podendo $0 < d_b \leq 0,10$ (linha encurvada de 1 a 11 voltas ou mais)

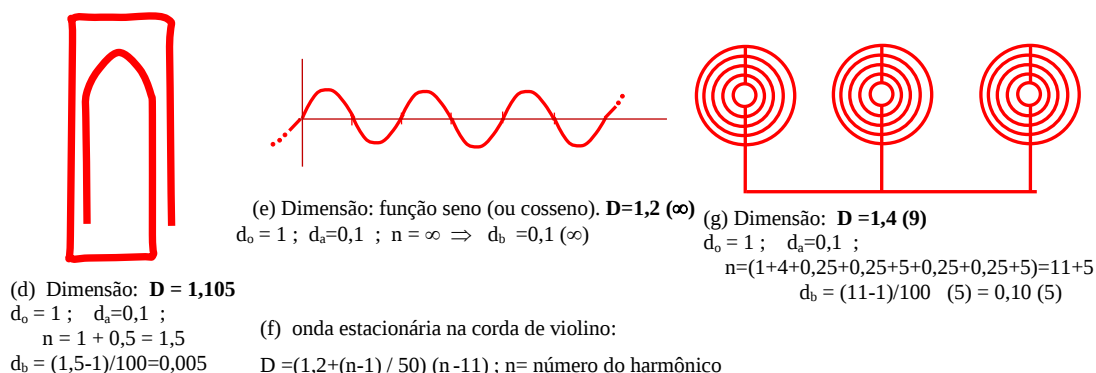
Na faixa dimensional adicional d_b entre 0 até 0,10 relacionamos o número de voltas completas (n) em um mesmo plano, que passam de uma volta, em 10 voltas no máximo, somando-se mais uma (11). Assim teríamos, $d_b = (n - 1) / 100 \leq 0,1$. Se n passar de 11 voltas, o número excedente deve ser mencionado entre parênteses, após a dimensão de valor máximo nesta faixa: $d_b = 0,010 (n - 1)$ para $1 < n \leq 11$. Na **Figura 41(d)**, um clipe de papel tem dimensão $D = 1,105$ dim.

Figura 41 - Primeira Parte das Representações de Dimensões fracionárias D entre 1,1 e 1,2



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 42 - Segunda parte das Representações de Dimensões fracionárias entre D = 1,20 até 1,40 dim



Fonte: Elaborado pelo autor

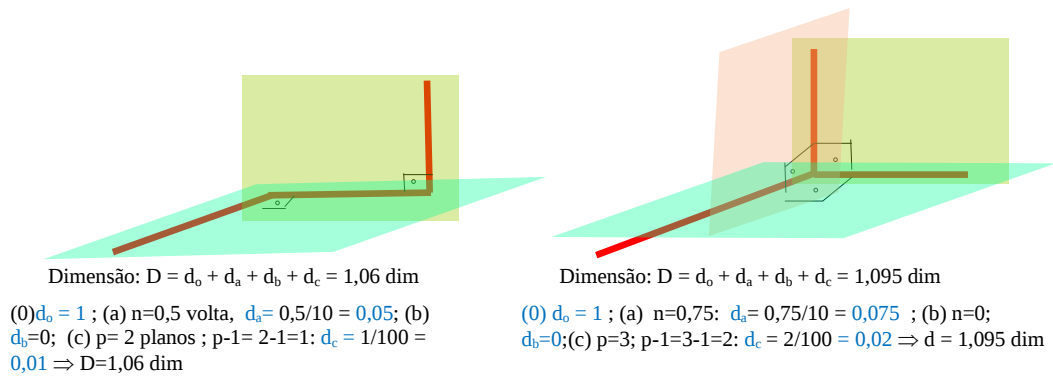
4.8.3 - Dimensão d_c , no intervalo, $0 < d_c \leq 0,10$

(a linha em três dimensões em n planos de manifestação)

A dimensão $0 < d_c \leq 0,10$ pode estar associada à linha que sai do próprio plano, para ir a planos diferentes, se dirigindo à dimensão três em várias direções de planos distintos do espaço. Para considerar esta condição de planos distintos, consideraremos o número p de planos formados pelas linhas, e a dimensão poderá ter variações máximas de 0 até 0,1. Seu cálculo será de acordo com a seguinte expressão, $d_c = (p - 1) / 100$, sendo, p = número de planos até 11 planos, $p \leq 11$, acrescentando-se o primeiro plano. O que passar de 11 planos completos de manifestação das linhas, seu número irá ser escrito à frente da dimensão entre parênteses com valor máximo 0,10, calculada como $(p - 11)$, com $p \leq 11$, podendo chegar até a dimensão 1,3, e o restante dos planos em p , entre parênteses, ou seja, $d_c = 0,10 (p - 11)$.

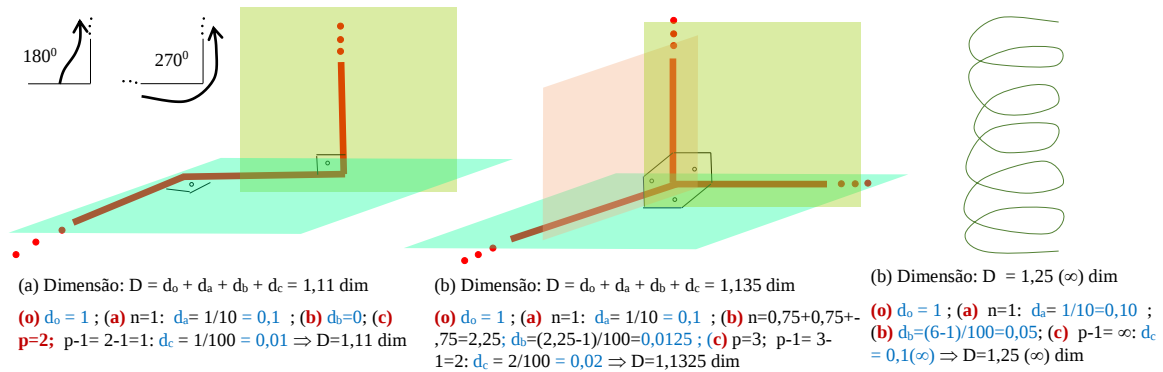
Ver representações de planos finitos nas dimensões fracionárias nas **Figuras 43 e 44**. Especificamente na **Figura 43**, temos o caso de uma espiral cilíndrica, como de um caderno, que estaria localizada em infinitos planos, cada ponto em um plano paralelo distinto, neste caso, contaríamos, $d_c = \infty$, veja o cálculo nas figuras 43 e 45.

Figura 43 - Representações das dimensões fracionárias com penetrabilidade até na fase c mas com dimensões $D=1,06$ dim e $D=1,095$ dim



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 44 - Representações da dimensão fracionárias com linhas infinitas, resultando $D=1,11$ dim, $D=1,1325$ dim e $D=1,25$ (∞) dim

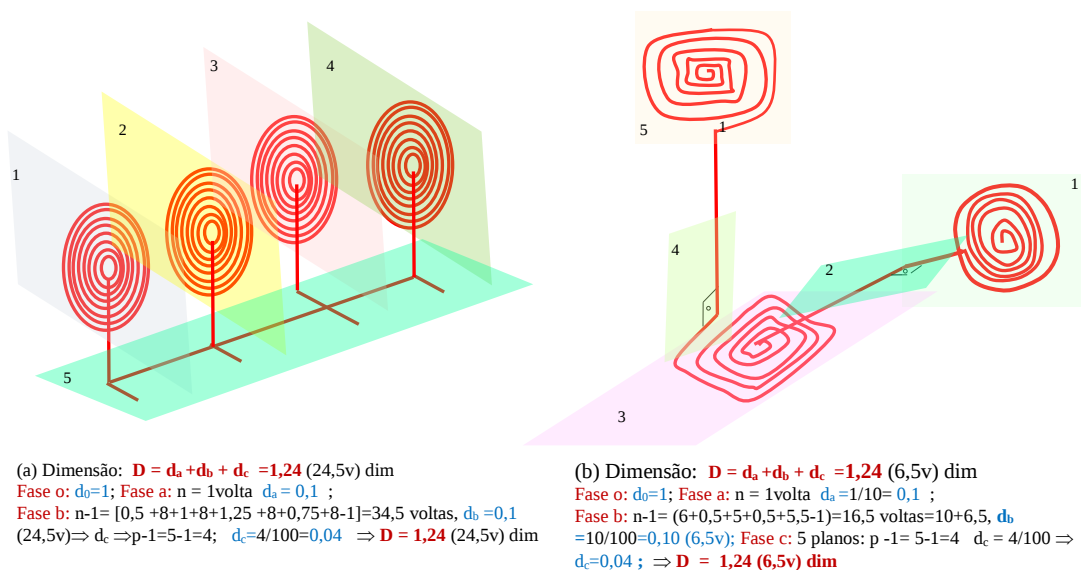


Fonte: Elaborado pelo autor

Nem sempre a soma dos elementos anteriores atinge valores máximos e assim complementamos valores das fases seguintes existentes, que fazem atingir patamares leves de acréscimo dando o valor da dimensão fracionária atingida. Vejamos os outros elementos a seguir.

A **Figura 45** tem dimensões de $D = 1,24(24,5v)$ e $D = 1,24(7,5v)$, parte-se do plano que fornece maiores valores que os anteriores.

Figura 45 - Representações das dimensões fracionárias de $D = 1,24$ (24,5v) dim e $D = 1,24$ (6,5v) dim, apresentando reta e curvas em uma ou mais voltas, em vários planos e várias voltas.



Fonte: Elaborado pelo autor

4.8.4 - Dimensão d_a , no intervalo $d_a > 0,30$

Estruturas lineares penetrantes em dimensões maiores que 3D

Em dimensões maiores que 3D não temos exemplos.

Resumindo no **Quadro 6**, as dimensões entre um e dois.

Quadro 6 - Dimensão fracionária entre a dimensão um e dois

Dimensão entre 1 e 2 pode atingir nesta fase $D = d_0 + d_a + d_b + d_c + \dots$	Fase	Estrutura de fases	Fórmula utilizada
$d_0 = 1,00$	0	linha unidimensional	Dimensão Euclidiana 1
$0 < d_a \leq 0,10$	a	linha encurvada em até uma volta	$d_a = (1/10)\theta/2\pi$ ou $d_a = n/10$ sendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 < n \leq 1$
$0 < d_b \leq 0,10$	b	linha encurvada maior que 1 volta até 11 voltas, e/ou mais voltas em um plano	$d_b = (n-1) / 100$ $1 < n \leq 11$ para $n > 11$: $d_b = 0,10(n-11)$
$0 < d_c \leq 0,10$	c	a linha em dois ou mais planos, até 11 planos	$d_c = (p-1)/100$; $1 < p \leq 11$ para $p > 11$: $d_c = 1,30(p-11)$
$0,3 < d_d < 0,99$	d	Estruturas lineares penetrantes em dimensões maiores que 3D.	Sem exemplos
$D = 2,00$	g	plano	Dimensão Euclidiana 2

Fonte: Elaborado pelo autor

4.9 - DIMENSÃO DOIS (2D) OU ESTRUTURA BIDIMENSIONAL

Uma estrutura bidimensional pode ser representada por um plano de espessura nula, que preenche o espaço em duas dimensões.

Seus pontos podem estar localizados analiticamente dentro de um plano de dois eixos, ortogonais e linearmente independentes. Como são ortogonais e linearmente independentes, o que um dos eixos representa, o outro eixo não consegue representar.

Os dois eixos expressam por meio de duas coordenadas as duas dimensões, como indica a Geometria Analítica de Descartes. Essa estrutura bidimensional, com espessura zero e coordenadas x e y , $\forall x$ e $\forall y$, na terceira dimensão, a coordenada z , pode ter qualquer valor fixo representando a posição da folha bidimensional em qualquer posição do eixo z .

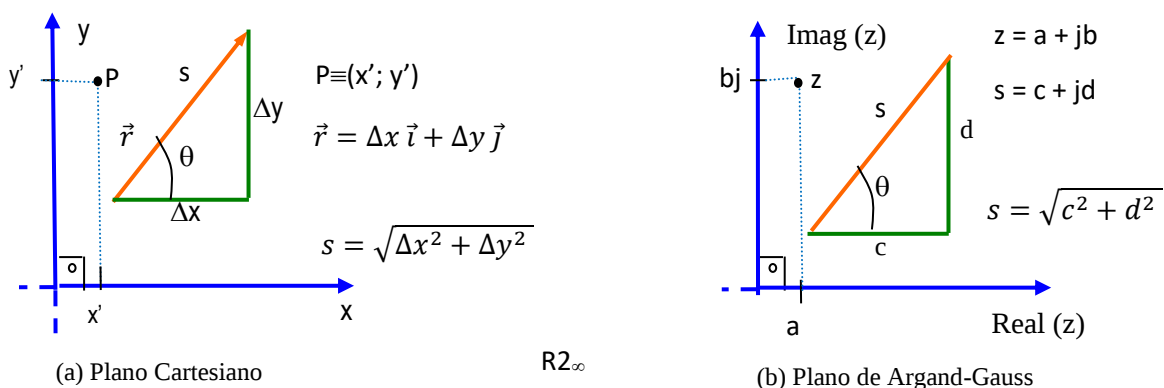
4.9.1 - Reconstrução bidimensional infinita

Os eixos cartesianos x e y , podem ser usados como representação de um plano infinito, Reconstrução para um sistema bidimensional infinito ($R2_{\infty 1}$), **Figura 46**. O intervalo s invariante na bidimensionalidade é calculado também. Outra forma dessa Reconstrução dessa bidimensionalidade infinita ($R2_{\infty 2}$) pode ser representada na forma do plano de Argand-Gauss dos números complexos, **Figura 46(b)**.

Existem alguns enfoques de representação dos números complexos: na forma cartesiana, trigonométrica, exponencial ou forma polar angular. E podemos representá-lo também no registro gráfico como na **Figura 46**.

$$z = a + jb, \quad z = r \cos \theta + j \sin \theta, \quad z = r e^{j\theta}, \quad z = r \angle \theta$$

Figura 46 - Dimensão dois e o seu intervalo entre dois pontos. Representação cartesiana bidimensional ($R2_{\infty 1}$), e representação complexa no plano de Argand-Gauss ($R2_{\infty 2}$)



Fonte: Elaborado pelo autor

Passamos agora ao desenvolvimento da Família Dimensional 1, ou Família Quadrado-Cubo, até a quadridimensão geometricamente e até *ad infinitum*, à D-ésima dimensão, algebricamente. Junto com esta Família Dimensional 1, do Quadrado, Cubo,

desenvolveremos também as dimensões fracionárias entre as dimensões 2 e 3, e entre a 3 e 4. Assim como desenvolveremos a teoria topológica das torções do espaço de dimensão 2 para 3, fita de Möbius e Garrafa de Klein, e as torções da dimensão 3 para 4, futuro caminho para dimensões tridimensionais paralelas à quarta dimensão.

4.10 - FAMÍLIA DIMENSIONAL 1 OU FAMÍLIA DO QUADRADO-CUBO

Passamos então ao desenvolvimento da Família do Quadrado-Cubo. E também as dimensões fracionárias entre 1 e 2, 2 e 3 e 3 e 4, e sobre as torções dimensionais que levam as figuras às suas formas enantiomorfas ou espelhadas.

4.10.1 - D=2 - Quadrado - Construções Da Estrutura Bidimensional Do Quadrado

A partir da estrutura finita do segmento de reta, de lado l , da dimensão um, podemos reconstruir a nova dimensão, a dimensão dois, inicialmente um quadrado, depois o faremos para o triângulo e então o círculo, em famílias diferentes da geometria, mas todos na bidimensionalidade.

Começando pelo quadrado, vamos apresentar um conjunto de Quatro Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas do quadrado.

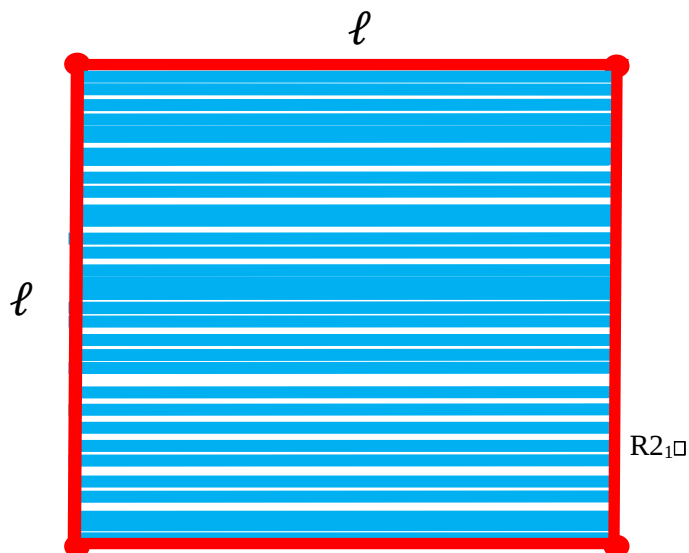
Em uma primeira Reconstrução bidimensional do quadrado, que designaremos por $R2_1 \blacksquare$, cujo símbolo teria o seguinte significado: o símbolo **R**, representa a referida Reconstrução Bidimensional ; o símbolo **2**, com sendo uma Reconstrução em dimensão dois; o símbolo **1**, como sendo a primeira Reconstrução, das quatro que serão apresentadas; e o símbolo **■**, como sendo uma das Reconstruções referentes à construção do quadrado.

4.10.2 - Reconstrução Bidimensional Um do Quadrado

Para geometrizar essa primeira Reconstrução Bidimensional do quadrado, começamos produzindo uma Reconfiguração Heurística Mereológica de cortar infinitos segmentos de reta de comprimento l de uma reta. No segundo passo, à cada um dos

infinitos segmentos de reta surgidos da Reconfiguração Mereológica, incrementamos um infinitésimo de segmento dy , em direção à nova dimensão $dA = l \cdot dy$.

Figura 47 - Representação da Reconstrução do quadrado por meio da Reconfiguração dos segmentos de reta na Reconstrução Bidimensional $R2_{1\blacksquare}$ do quadrado



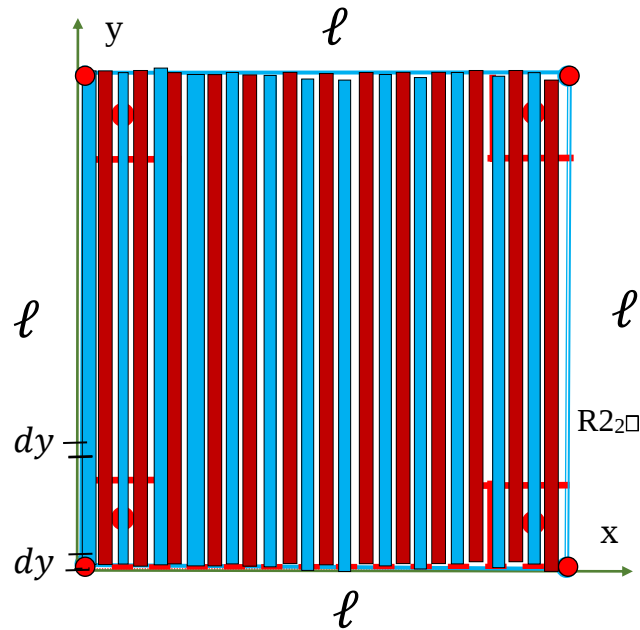
Fonte: Elaborado pelo autor

Em um terceiro passo, se coloca cada segmento um ao lado do outro, perpendicularmente a eles e na direção do incremento infinitésimo. um lateralmente a outra, partindo do segmento de reta unidimensional anterior, até perfazer uma distância igual à do próprio segmento de reta inicial, ou seja, uma distância igual a do lado ℓ , do quadrado formado (Figura 47).

4.10.3 - Segunda Reconstrução Bidimensional do Quadrado

Em uma segunda Reconstrução Bidimensional por meio de uma Reconfiguração Heurística Mereológica de separação de segmentos de linha infinitésimos, $d\ell$. Em um cada dos pedacinhos infinitésimos de linha se incrementa um infinitésimo ortogonal vertical dy , $dA = d\ell \cdot dy$, ($R2_{2\blacksquare}$). partimos do mesmo segmento de reta da base, e o subdividimos em infinitos segmentos infinitesimais de comprimento $d\ell$, e sobre cada um desses segmentos, subimos em dy de cada segmento, e seguimos até perfazer um retângulo de altura $h = \ell$ da base infinitesimal $d\ell$, até completar toda a figura do quadrado de lado constante ℓ , a partir da extensão e da soma das áreas dos infinitos retângulos de altura ℓ e base infinitesimal $d\ell$. Obtemos assim a figura geométrica, o quadrado, como mostra a **Figura 48**.

Figura 48 - Representação da Construção do quadrado por meio da Reconfiguração Mereológica dos segmentos de linha da base como pontos e sua potencial transformação de Reconstrução Mereológica na área do quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor

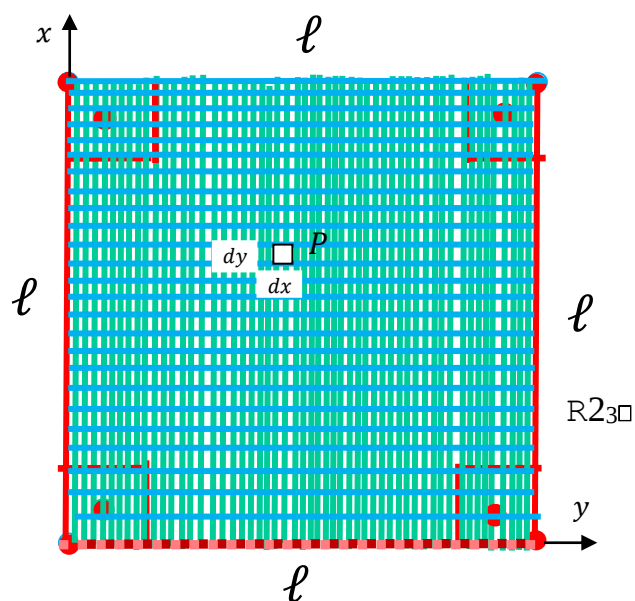
4.10.4 - Reconstrução Três, da Representação Semiótica Bidimensional do Quadrado

Em uma terceira Reconstrução Bidimensional da construção do quadrado, (**R2₃□**), partimos do ponto infinitesimal genérico $dA = dx \cdot dy$ como semente genérica de área da dimensão zero, ou semente, bidimensional e a sequente produção de uma variação de soma contínua desse infinitos infinitésimos em dx e os infinitos infinitésimos em dy , segmento de reta virtual da dimensão zero, mas com semente para a unidimensão, variando dx e dy de zero (0) ao comprimento máximo ℓ , na horizontal, e na vertical. De tal forma a aparecer toda a face do quadrado, por meio deste procedimento de integração, como mostra a **Figura 49**.

$$A = \int dA = \int dx \cdot dy = \int_0^{\ell} dx \cdot \int_0^{\ell} dy = \ell^2$$

Esses elementos infinitésimos são recriados a partir da dimensão zero, o ponto, que caracteriza, aquele que recria todas as outras dimensões bastando-se pegar a semente infinitésima ideal de formação daquele elemento que irá se reconstruir.

Figura 49 - Representação da Construção do quadrado, de uma para duas dimensões, em uma terceira Reconstrução Bidimensional



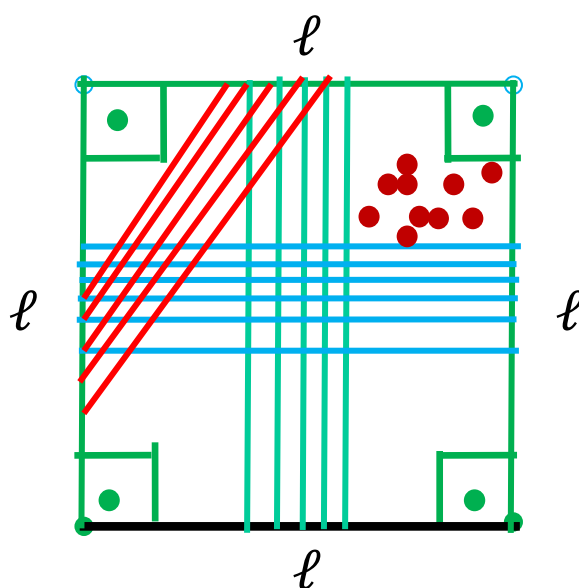
Fonte: Elaborado pelo autor

4.10.5 - Reconstrução Quatro, Bidimensional do Quadrado

E finalmente, em uma quarta Reconstrução Bidimensional (**R24**), para obtenção da face quadrada, em uma construção instrumental. Marcamos um ponto de origem, e a partir desse ponto, traçamos uma reta horizontal contínua de comprimento ℓ , e traçamos outra reta vertical contínua de comprimento ℓ . Pelos pontos terminais dos segmentos ortogonais, traçamos outra horizontal e outra vertical, até seu ponto de encontro, fechando o quadrado. Preenchemos o interior do perímetro quadrado traçado, com pontos ou retas horizontais, verticais ou diagonais, forma-se a face do quadrado de forma instrumental, segundo Duval (DUVAL, 2005), como mostra a **Figura 50**.

A construção instrumental de uma figura somente é possível se o estudante que a faz vive em uma dimensão maior ou igual a ela, do contrário não é possível desenhá-la. É preciso participar dela como experiência figural, senti-la, saber dela. Não seria possível para nós fazer uma construção instrumental de uma figura em quinta dimensão, já que ela está muito distante do que participamos experiencialmente. No entanto, por analogia das outras figuras conseguimos fazer uma figura em quarta dimensão, imaginá-la, depois de construir todas as dimensões uma a uma e verificar a seu mecanismo de construção de forma análoga.

Figura 50 - Representação da Construção do quadrado, de uma para duas dimensões, em uma quarta Reconstrução Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Cada uma destas Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas (ReDiReMe), pode se transformar em uma proposição de ensino da geometria das dimensões, proposta pelo Professor como forma de jogo de construções diferentes, apoiando-se na TSD (Brousseau, G., 2002), em direção a um processo Reconstrução Dimensional do quadrado, para obtenção da dimensão dois a partir da dimensão do segmento de reta da dimensão um, e indo em direção à construção do quadrado. Este deve ser um objetivo para um próximo trabalho de campo na pesquisa das Dimensões na Geometria.

4.10.6 -Resumo de Características do Quadrado

Nesta nova dimensão, a dimensão dois, de figuras planas e fechadas, teríamos o aparecimento de uma nova variável dimensional, a Face. A Face do quadrado que surge como nova variável dimensional externa da dimensão dois, teria infinitas retas e pontos no seu interior, e no seu exterior teria como variáveis dimensionais, da dimensão zero, 4 Vértices, $V_{2\Box} = 4$, que são interligados por quatro segmentos de reta, unidimensionais, que formam quatro arestas, $A_{2\Box} = 4$, externas e ainda forma a nova variável dimensional de Face (edge), $F_{2\Box} = 1$.

E a Equação Geométrica das Dimensões (EGD), para a segunda dimensão na formação do quadrado, correspondente ao CEGED3, ou família 3, também se iguala a

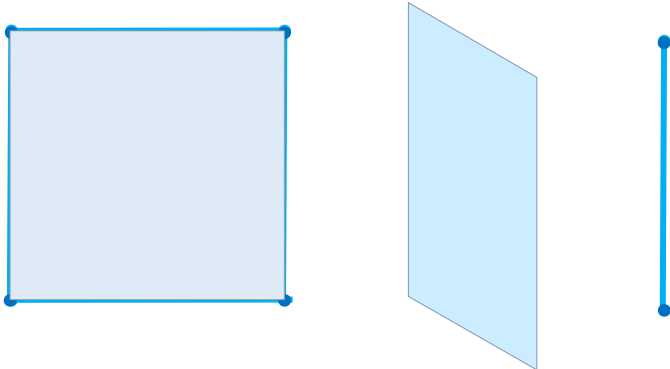
unidade, o que a torna válida, para todas as figuras geométricas fechadas desta dimensão como veremos, seja quantos lados tiver.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES
para a bidimensionalidade do quadrado:

$$V_{2\Box} - A_{2\Box} + F_{2\Box} = 4 - 4 + 1 = 1$$

A representação geométrica do quadrado em várias formas de pontos de vista, vista da dimensão três, dependendo do ângulo de visão ficariam dadas pela **Figura 51** abaixo.

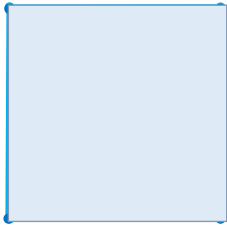
Figura 51 - Vistas do quadrado em diferentes posições desde a 3D



Fonte: Elaborado pelo autor

Em resumo, apresenta-se no **Quadro 7**, as características da dimensão dois, para o quadrado, as **beiradas** da figura geométrica bidimensional com número de variáveis dimensionais geométricas finita, e com suas variáveis dimensionais geométricas internas em número infinito, ou seja, **infinitas estruturas das dimensões anteriores** no interior desta nova figura montada. Faz-se válida aqui na nova figura a equação geométrica das dimensões.

Quadro 7 - Características da dimensão dois do quadrado

Dimensão dois do Quadrado	
Formato de representação: Face quadrada	
Nova Variável Dimensional: a Face	
Finalizadas por quatro estruturas externas da dimensão anterior: Quatro Arestas	
Suas estruturas internas dimensionais de dimensões anteriores são infinitas: Arestas e Vértices	
Equação Geométrica Bidimensional: $V - A + F = 4 - 4 + 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Colocados esses infinitos elementos da formação do quadrado bidimensional, nas dimensões anteriores, elas ficariam totalmente preenchidas por eles. Ou seja, a estrutura de cada uma das peças da nova dimensão, cabe em um universo dimensional completo das dimensões anteriores.

Pode-se observar estas características, como nos mostram as **Quadro 8**.

Quadro 8 - Número de elementos geométricos da dimensão zero à dimensão um, à dimensão dois, ponto, segmento de reta e o quadrado

Dim.X Var	Vértice V	Aresta A	Face F	Elementos interiores da dimensão anterior	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	1, ∞	$V - A + F = 1$
1D	2	1	0	∞	$V - A + F = 1$
2D	4	4	1	∞	$V - A + F = 1$

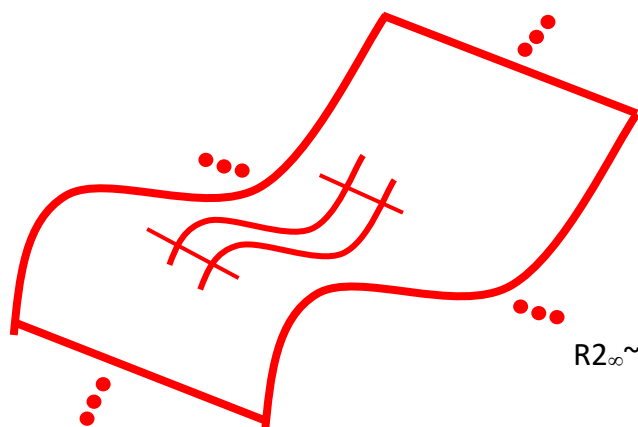
Fonte: Elaborado pelo autor

4.11 - $2 < D < 3$ - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO 2 E A DIMENSÃO 3

É representada por um plano encurvado para uma terceira dimensão, que dependendo da forma vai ser fracionária entre 2 e 3, em valores como: 2,1 ou 2,2 ou 2,3, Seriam estas as dimensões fracionárias do plano.

Na **Figura 52** se representa um plano bidimensional infinito encurvado para a dimensão 3, $R2_{\infty}$.

Figura 52 - Espaço bidimensional curvo, que se encurva para a terceira dimensão, Dimensão fracionária entre a 2 e 3



Fonte: Elaborado pelo autor

4.12.1 - Contagem Da Dimensão Fracionária Entre A Dimensão 2 E A Dimensão 3

Podemos associar o crescimento da dimensão fracionária, entre dois e três, através modelo a seguir, análogo aos anteriores.

Apesar de continuar a ser dimensão dois, ela teria penetrabilidades distintas em dimensões maiores.

Dimensão $d_0 = 2$ (superfície plana finita ou infinita)

Começamos por adicionar a dimensão da superfície plana como $d_0 = 2$.

4.12.2 - Dimensão d_a : $0 < d_a \leq 0,1$

Superfície encurvada fora da dimensão dois em até uma superfície fechada

Dimensões d_a entre 0 até 0,1, como sendo relativo ao ângulo sólido de curvatura da superfície correspondente, levando a expressão para uma dimensão adicional, acima de 2: $D = d_0 + d_a$, sendo

$$d_a = \left(\frac{1}{10}\right) \frac{\phi}{4\pi} = (0,1) \frac{\phi}{4\pi} = \frac{\phi}{40\pi}$$
$$\phi = \varphi(1 - \cos\theta) \text{ (sr)}$$

O ângulo sólido ϕ é medido em esterorradiano (sr), sendo $0 \leq \phi \leq 4\pi \text{ (sr)}$. E os ângulos φ e θ , dados em coordenadas esféricas, são medidos em radianos. O ângulo φ tem seu vértice na origem no eixo x e indo no sentido do eixo y, no plano xy, nos seguintes limites: $0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ rad}$, varrendo a longitude da esfera, o ângulo θ , com origem no eixo z e indo em sentido ao eixo z negativo, varrendo a latitude com limites de $0 \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$.

No caso dos ângulos totais, sendo $\varphi = 2\pi \text{ rad}$, e $\theta = \pi \text{ rad}$ teríamos $\phi = \varphi(1 - \cos\theta) = 2\pi(1 - \cos\pi) = 4\pi \text{ sr}$, onde teríamos um ângulo total de fechamento superficial em todas as direções da esfera, uma superfície bidimensional fechada em três dimensões, $D = 2 + 0,10 = 2,10$.

De outra maneira, considerando n como até uma volta espacial fechada completa, $0 < n \leq 1$, podemos também escrever.

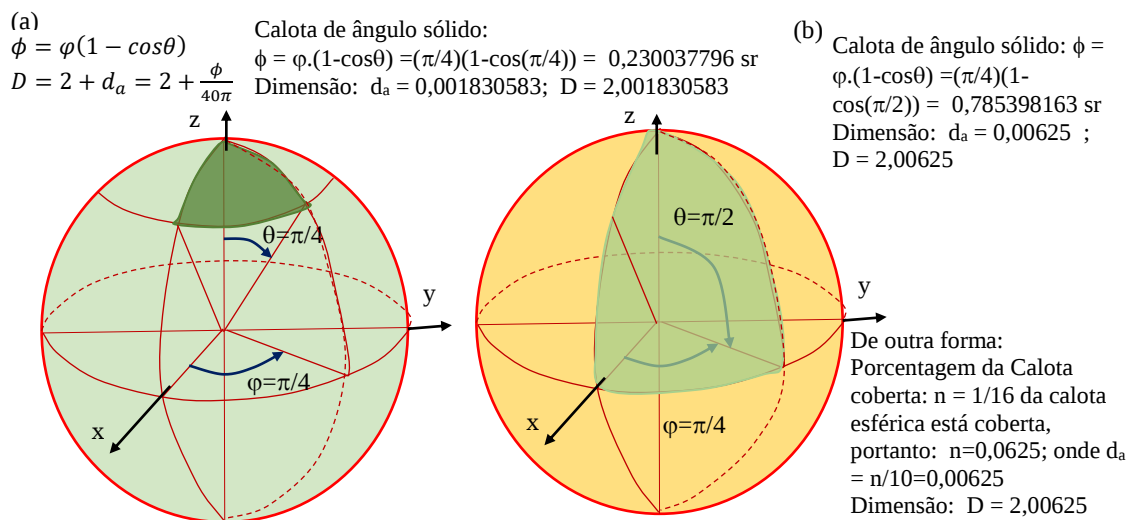
$$d_a = \left(\frac{n}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right) = 0,1$$

Segue-se outras contagens dimensionais, como exemplo, a calota da **Figura 64**.

Na **Figura 53**, em representação (a) temos uma calota esférica, próxima à semiesfera norte, com um raio R, e ângulo θ , indo de 0 até $45^\circ (\pi/4)$ e o ângulo ϕ , indo também de 0 até $45^\circ (\pi/4)$, resultando em um ângulo sólido de $\phi = 0,230037796$ esterorradiano e portanto uma dimensão de $D = 2,001830583$.

Na **Figura 53**, na representação (b), temos a representação de uma calota esférica, próxima à semiesfera norte, com um raio R, e ângulo θ , indo de 0 até $90^\circ (\pi/2)$ e o ângulo ϕ , indo também de 0 até $45^\circ (\pi/4)$, resultando em um ângulo sólido de $\phi = 0,785398163$ sr, esterorradiano e portanto uma dimensão de $D = 2,00625$ dim.

Figura 53 - Representação de Dimensões fracionárias entre dois e três, apresentando planos encurvadas de fechamento da superfície tridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Só que, ainda neste caso do exemplo (b) podemos raciocinar em termos de $0 < n \leq 1$, e teríamos um encobrimento da calota de $n = 1/16$ do total da calota, portanto, $n=0,0625$, do total, o que daria um percentual de dimensão $d_a = n/10 = 0,00625$, dando uma dimensão total de $D=2,00625$ dim.

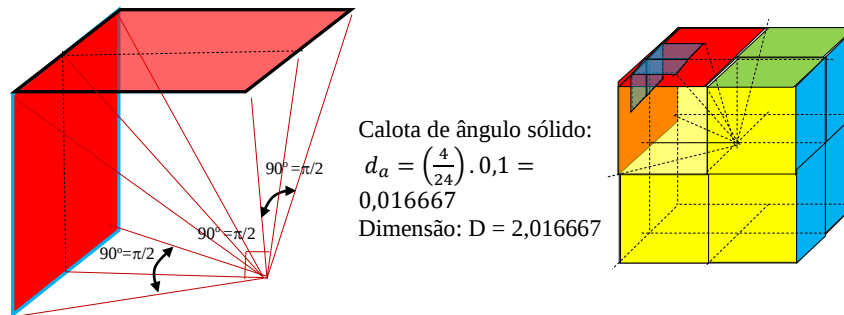
Na **Figura 54**, não precisamos usar as coordenadas esféricas pois não temos uma simetria esférica. assim em coordenadas cartesianas ou retangulares, temos que, pensando no fechamento do cubo, os lados vermelhos tampam 4 quadrados da caixa que no total, atingem 24 quadrados ou ladrilhos que fecham a caixa como um todo. Considerando que o fechamento da caixa toda, corresponda a um aumento de dimensão de 0,1, e que n seja a quantidade de fechamento, de 0 até uma volta completa de fechamento espacial em três dimensões, ou seja considerando o número total de quadrados $n_t = 24$ correspondente a uma volta completa, temos o tapamento de parcial de apenas 4 quadrados, $n_p = 4$ quadrados

de um total de $n_t = 24$, o que resultaria uma fração de cobertura da superfície externa de $n = n_p/n_t = 4/24$, o que na parcela dimensional além da dimensão dois, teríamos um aumento de dimensão nesta superfície de

$$d_a = 0,1 n = (0,1) \cdot (n_p/n_t) = 0,1 \cdot (4/24) = 0,0166667$$

o que daria uma dimensão de $D = 2,0166667 \text{ dim}$.

Figura 54 - Representação de Dimensão fracionárias entre dois e três, no encurvamento de figuras planas na dimensão três

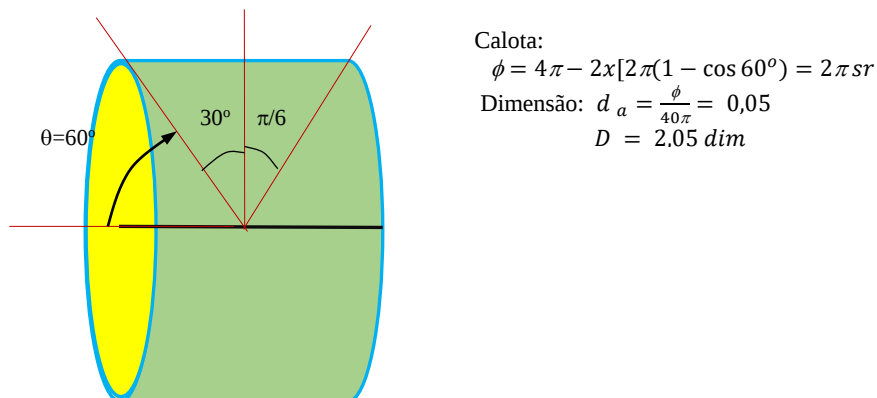


Fonte: Elaborado pelo autor

Para definir em três dimensões, as superfícies e o quanto elas encobrem, temos que ter um ponto de referência, ou ponto de observação, ou ponto de vista, uma vez que este ponto modifica o ângulo sólido a ser definido.

A **Figura 55**, nos exemplifica, uma casca cilíndrica, vista de seu centro, em que o ângulo θ varia de 0 à 30° , até as aberturas circulares das tampas, e o ângulo ϕ , varia de em todas as direções de 0 à 2π , a rotação completa.

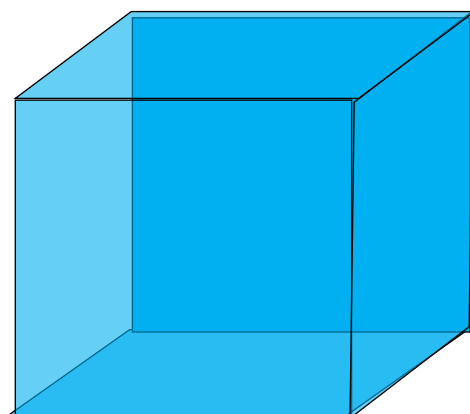
Figura 55 - Casca Cilíndrica com 60° ou $\pi/3$ rad, de ângulo interno



Fonte: Elaborado pelo autor

Finalmente, na **Figura 56**, uma superfície cúbica fechada, o ângulo sólido seria máximo, ou igual a 4π . Neste caso, a dimensão nesta superfície de fechamento total chegaria ao seu máximo valor nesta faixa, ou seja, dimensão $D = 2,10 \text{ dim}$.

Figura 56 - Casca superficial fechada cúbica. Dimensão $D = 2,10$



Casca cúbica Dimensão:

$$D = 2,10 \text{ dim}$$

$$\varphi = 2\pi$$

$$\theta = \pi$$

$$\phi = 4\pi$$

$$d_a = 0,10$$

Fonte: Elaborado pelo autor

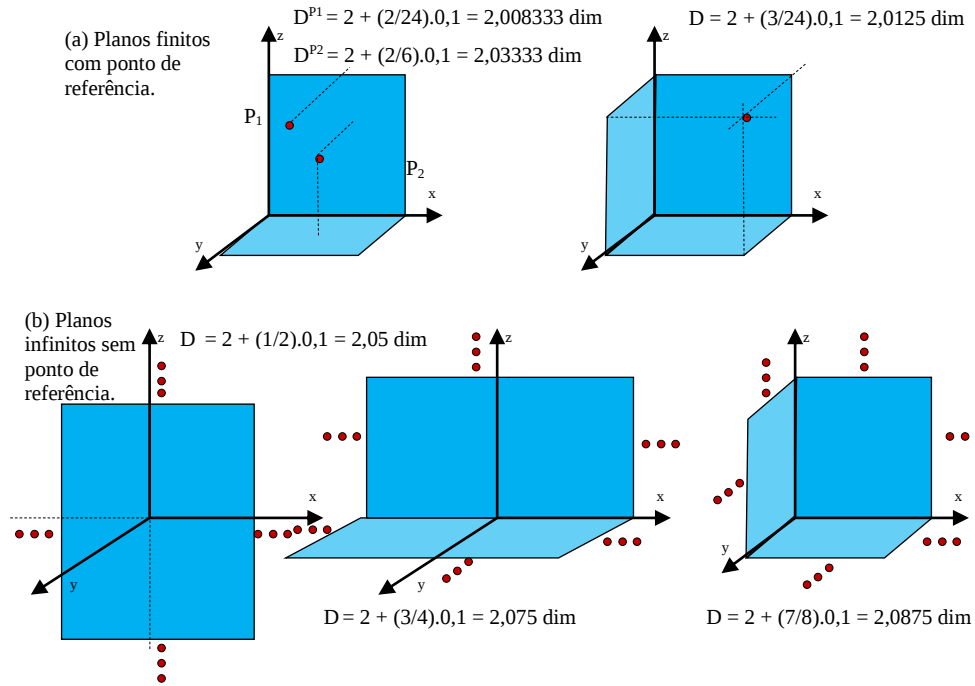
Se considerarmos dois planos finitos perpendiculares, neste caso, a dimensão dependeria do ponto de referência, o ângulo sólido dependendo dos pontos P_1 e P_2 . Seria para P_1 , uma fração de $(2/24=1/12)$, fração do fechamento total de uma superfície na dimensão três ou para P_2 , $(2/6 = 1/3)$, outra fração de fechamento maior, do ângulo sólido total, ou seja, para P_1 , $d_a = (0,1) \cdot \left(\frac{2}{24}\right) = 0,0083333 \text{ dim}$, mais dois, dando dimensão $D = 2,0083333 \text{ dim}$, ou para o outro ponto de referência (P_2), $d_a = (0,1) \cdot \left(\frac{2}{6}\right) = 0,03333 \text{ dim}$, mais dois, dando dimensão $D = 2,03333 \text{ dim}$, como mostra a **Figura 57 (a)**.

Se for um plano infinito teríamos bloqueados $(4/8=1/2)$ de 0,1, mais a dimensão dois, resultando a dimensão, $d = 2,05$ como mostra a **Figura 57 (b1)**.

Se forem dois planos infinitos teríamos bloqueados $(6/8=3/4)$ de 0,1, mais dois, resultando uma dimensão, $D = 2,075 \text{ dim}$, como mostra a **Figura 57 (b)**.

E finalmente, três planos infinitos, fecharia $1/1$ todo o entorno do espaço tridimensional e teríamos uma dimensão $D = 2,10 \text{ dim}$.

Figura 57 - Casca cúbica aberta. (a) Planos finitos com ponto de referência. (b) Planos infinitos sem ponto de referência



Fonte: Elaborado pelo autor

4.12.3 - Dimensão d_b , sendo $0 < d_b \leq 0,10$ - Uma superfície fechada e mais voltas ocorrendo

O cálculo de d_b , $0 < d_b \leq 0,10$, está relacionada ao número de voltas fechadas completas ou incompletas (n), em superfícies fechadas na terceira dimensão (planos interiores ou exteriores do primeiro), sendo que 11 voltas completas já se chega ao seu valor máximo, à $d_b = 0,1$, podendo ir de uma a onze voltas completas este âmbito de $0 \leq d_b \leq 0,1$.

Se passar de 11 voltas fechadas, o número de vezes que passar, deverá ser mencionado entre parenteses na descrição dimensional numérica, entre parênteses à frente do valor máximo em três dimensões, $d_b = 0,01 (n - 1)$, sendo $n - 1 > 0$. Se as voltas não forem completadas, elas são um percentual do ângulo sólido, como na expressão abaixo.

$$d_b = \left(\frac{1}{10}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{10}(\phi_i)}{4\pi}\right) = 0,01 (n - 1) \leq 0,1 \quad 1 < n < 11$$

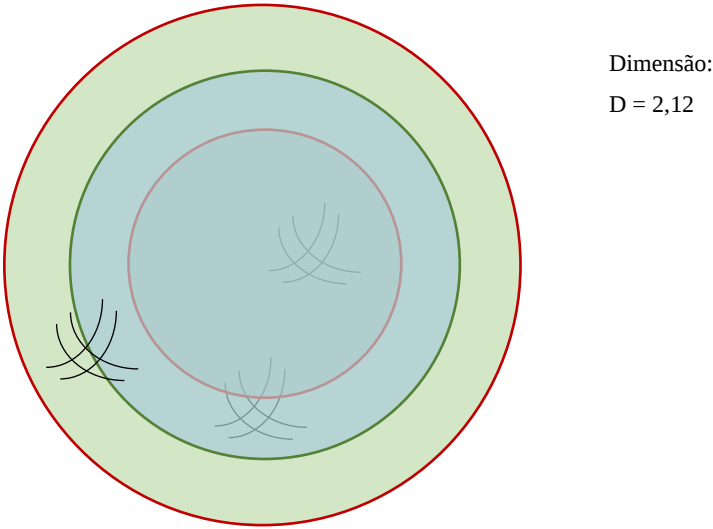
De outra forma em função do número de voltas fechadas ou partes, n , de 1 à 11 depois da primeira volta.

Passando de 11 voltas fechadas completas:

$$D = 2,20 \quad (n' = n - 11) \quad n' \geq 0$$

Na **Figura 58**, nós temos n=3 voltas completas, (a partir de d_a= 0,10), uma volta completa, d_a=0,1, mais duas voltas completas, n'' = n - 1 = 2, uma dentro da outra, portanto $d_b = (0,01).(n - 1) = 0,02$, assim $D = d_o + d_a + d_b = 2 + 0,1 + 0,02 = 2,12$, que seria a dimensão destas superfícies.

Figura 58 - Representação de Dimensões fracionárias entre dois e três, apresentando três planos encurvados fechados de superfícies esféricas, (D=2,12)



Fonte: Elaborado pelo autor

4.12.4 - Dimensão 0,2<d_c >0,99

Para extensão em dimensões acima de três e na sequência dimensional, as dimensões já foram até 2,2, para valores maiores seria a interpenetração em dimensões maiores que três, em direção à dimensão quatro ou maiores. Não temos exemplos.

Apresentando o Resumo das Dimensões Fracionárias entre dois e três no **Quadro 9**.

Quadro 9 - Dimensões fracionárias entre 2 e 3

Resumo da Dimensão fracionária entre dois e três.		
Dimensão entre 2 e 3	Estrutura	Fórmula
d_o = 2,00	Plano bidimensional	Dimensão Euclidiana 2
0 < d_a ≤ 0,10	plano encurvado até uma volta tridimensional fechada completa	$d_a = (0,1)\frac{\phi}{4\pi} = (0,1)n$ $\phi = \varphi(1 - \cos\theta) \text{ sr}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ rad} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$ $0 \leq \phi \leq 4\pi \text{ sr; coord. Esféricas; } n < 1$

$0 < d_b \leq 0,10$	superfícies tridimensionais fechadas em mais de uma volta, com $n \leq 11$, ou mais.	$d_b = 2,1 + \frac{1}{10} \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} (\phi_i)}{4\pi} \right) = 2,1 + (0,01)n - 1)$ Para $n \geq 11$: $d_b = 2,20 \quad (n - 11)$
$0 < d_c < 0,7$	Para extensão em dimensões acima de 3	Sem exemplos
D = 3,00	Dimensão 3 - tridimensional	Dimensão Euclidiana 3

Fonte: Elaborado pelo autor

4.13 - FIGURAS ENANTIOMORFAS DA DIMENSÃO DOIS PARA A TRÊS

Antes de passarmos à dimensão três, vamos dar uma característica fundamental da dimensão dois que daria indução à existência da dimensão três. É a propriedade dos corpos enantiomorfos¹⁸, o enantiomorfismo. A palavra enantiomorfo, vem do grego, em que enantíos (ἐναντίος) é “oposto” + morphê (μορφή) é “forma”.

Os corpos enantiomorfos são diferenciados pela classificação em duas partes, a parte destra ou direita ou dextrogiros e a parte esquerda ou sinistra ou levógira (GAMOW, 1988).

Um exemplo seria, a mão direita e a mão esquerda que são enantiomorfos, uma da outra, conseguimos diferenciá-las perfeitamente quando isoladas do corpo. Uma estrutura

¹⁸ Corpos enantiomorfos - são corpos que fisicamente têm uma mesma estrutura geométrica, mas que um é espelhado do outro, é quiral ou isômero, iguais na forma, mas diferentes na estrutura de construção, como a mão direita e a mão esquerda que são enantiomorfos uma da outra. Existem objetos e substâncias químicas na natureza que podem existir nas duas formas enantiomorfos. Em uma substância química, dá para separar as moléculas espelhadas, que, quando diluídas em água, e se faz passar por ela uma luz polarizada, se a luz girar para a esquerda, recebe a denominação de substância do tipo (ℓ) ou levógira (esquerda), e se a luz girar para a direita, recebe a denominação de substância do tipo (d) ou dextrógira (direita). São substâncias isômeras. Uma mistura de substâncias isômeras é chamada de mistura racêmica. Têm a mesma estrutura, mesmo número de átomos, mesmas ligações químicas, mas têm suas formas geométricas figurais espelhadas. Um tipo tem alguns efeitos físicos diferentes do outro.

Levógiros e Dextrógiros – são características de determinados objetos da natureza, em duas ou três dimensões, que têm suas estruturas de forma idênticas, mas uma espelhada da outra, portanto, definidos em duas formas, chamadas de figuras enantiômeras: uma delas recebe a denominação de levógira (esquerda), por ter certas características diferentes da outra, que recebe a denominação de dextrógira (direita). Podem, portanto, sempre existir objetos, sejam microscópicos ou macroscópicos que apresentam sua geometria com estas características neutras ou espelhas, portanto, chamadas figuras enantiomorfos da natureza, sejam, em duas ou três dimensões. Quando se produzem substâncias químicas em um laboratório, suas moléculas podem aparecer em ambas as formas, uma espelhada da outra. Podem ser separadas quimicamente uma da outra, e quando separadas apresentam alguns efeitos físicos idênticos, e outros efeitos físicos diferentes, pelo seu formato. São moléculas que têm a mesma estrutura atômica, mesmo número de átomos, mesma estrutura, mas uma é a forma espelhada da outra. Se a simetria da figura for em dois planos distintos, neste caso, a sua forma enantiômera é idêntica à sua forma comum.

Enatiômeros – são objetos idênticos, mas que na sua forma geométrica, um é espelhado do outro. São chamados de objetos figuralmente enantiomorfos, diferenciados por definição em levógiros (esquerda) ou dextrógiros (direita). O açúcar quando é produzido, apesar de receber os mesmos átomos, pode se apresentar nestas duas formas geométricas uma espelhada da outra, levógiro e dextrógiro. A vida da Terra, nas células animais e no metabolismo dos animais, somente pode ser absorvida nos açúcares levógiros, quando aparecem os açúcares dextrógiros eles são eliminados pelo corpo. (PAULING, p.654-656, 1982)

enantiomorfa tridimensional não pode ser transformada na outra, a não ser que a passemos pela dimensão quatro e façamos uma torção dela no quarto eixo, e no retorno à dimensão três, ela retornaria como enantiomorficamente oposta, analogamente ao que faremos com uma figura enantiomorfa da dimensão dois.

As moléculas enantiomorfas são aquelas que no espelho, uma vira a outra. São figuras espelhadas uma da outra. Elas têm um fenômeno físico que demonstra essa característica. É o fenômeno que ocorre que ao passar uma luz polarizada no líquido da substância ela sofre rotação dessa luz. Essa experiência é denominada de isomeria geométrica espacial óptica. Moléculas dextrógiras giram uma luz polarizada para a direita (dextrógira) ou no sentido horário, ao olhá-la numa tela de projeção da luz. E moléculas levógiras, giram a luz no sentido para a esquerda (levógira) ou sentido anti-horário.

Existem muitas moléculas quimicamente enantiomorfas, ou seja, que possuem a mesma estrutura em formatos enantiomorfos uma da outra e, portanto, têm propriedades químicas e físicas idênticas e outras distintas. Interessante observar que as moléculas que fazem parte dos corpos vivos, são levógiras para os açúcares ou carboidratos, mas dextrógiras para as proteínas. Consegue-se produzir ou sintetizar moléculas orgânicas em laboratório, de açúcares dextrógiros e de proteínas levógiras, mas que não são absorvidas pelos organismos vivos. Porque a vida se desenvolveu praticamente com moléculas levógiras para carboidratos e dextrógiras para proteínas.

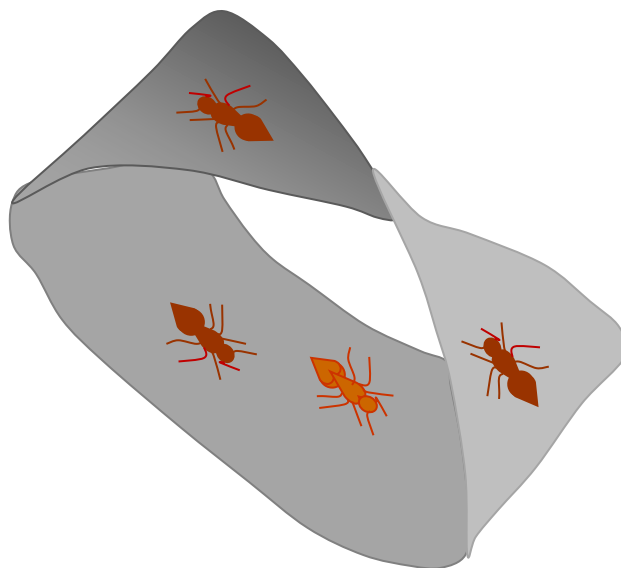
No espelho a mão direita se transforma em esquerda e a mão esquerda se transforma em direita. O espelho mostra a existência e a diferença entre os corpos enantiomorfos. Olhando-nos no espelho, vemos o nosso corpo enantiomorfo.

4.13.1 - Fita de Möebius

A fita de Möebius estabelece que através de uma torção (na tridimensionalidade) de uma fita (que está na bidimensionalidade) e sua posterior colagem em suas extremidades, pode-se transformar a ligação entre a passagem do que se chama, do lado de dentro de uma fita e do lado de fora desta fita. Ao caminhar-se na superfície da fita de Möebius, em determinados momentos fica-se do lado de fora da fita, em outros momentos fica-se do lado de dentro da mesma fita. Esta seria uma forma de se passar um corpo bidimensional, por essa torção e transformar um corpo em enantiomorfo (espelhado) dele mesmo.

Esta interferência de torção na superfície da fita que está na segunda dimensão, produzida na terceira dimensão, só pode ser feita por quem enxerga uma dimensão superior, neste caso a dimensão três, pois quem vivencia apenas a dimensão dois, não saberia como fazê-lo. Esta fita de Möebius é mostrada na **Figura 59**.

Figura 59 - Fita de Möebius ou Faixa de Möebius, com formigas caminhando sobre sua superfície, hora caminham do lado de dentro, hora caminham do lado de fora da superfície da fita



Fonte: Elaborado pelo autor

Na **Figura 59**, observe que a formiga ao caminhar pela superfície da fita, existe momentos que ela caminha na parte interna da fita e outros momentos ela caminha na parte externa da fita, sem mudar de lado ao caminhar. Veja que a formiga ao caminha do lado de fora, passa a ser vista pela formiga que caminha na superfície de dentro, como uma formiga enantiomorfa (espelhada) de si mesmo.

A passagem por uma torção na dimensão três faz a figura bidimensional, virar de lado. Uma moeda tridimensional ao passar por uma fita de Möebius ela volta virada do lado inverso.

Faz-se uma superfície criar um vínculo com a tridimensionalidade. Momentaneamente a formiga caminha na parte interna da fita e tem uma perspectiva do ambiente interno, e sem mudar de caminho, se movimentando no mesmo universo da superfície, sempre reto, em outro momento ela passa a caminhar do lado de fora da fita e ter uma outra perspectiva do que era o ambiente interior da fita para o que agora é o ambiente exterior da fita, o lado aberto da fita. Se a fita for transparente, a formiga que caminha do lado de fora vai ser enantiomorfa à formiga que caminha do lado de dentro. Se a fita tiver

espessura zero (matematicamente na mesma dimensão), ela se mantém no mesmo universo inicial, uma formiga se transforma em sua forma espelhada ao passar pela torção.

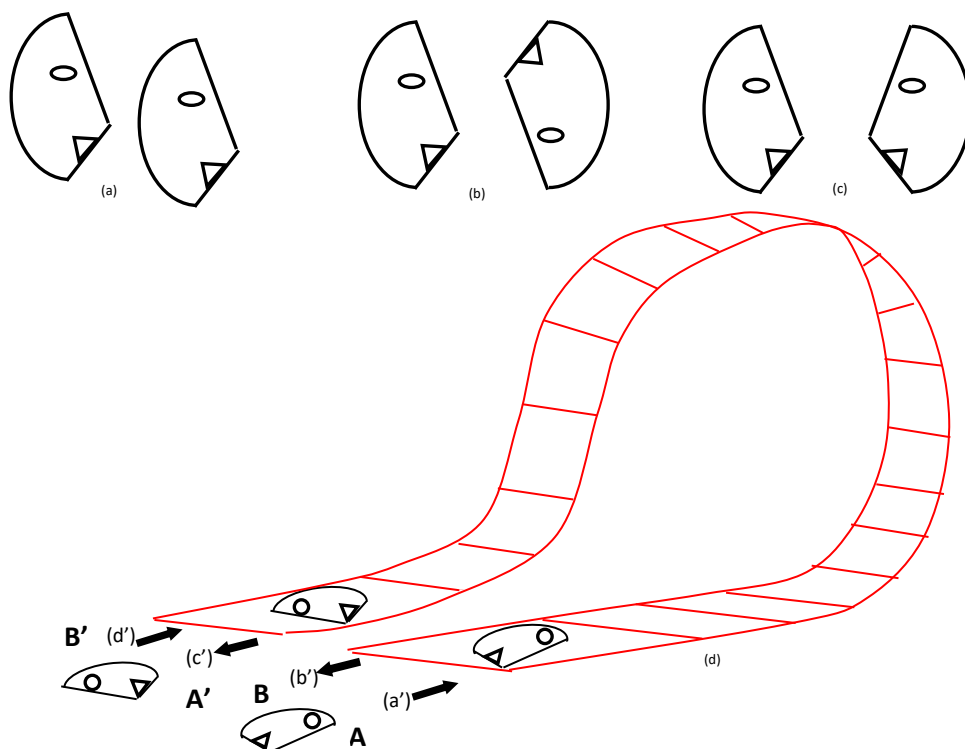
Se existisse uma espessura, e a fita fosse transparente, uma enxergaria a outra, mas não poderia ter constato com a outra, ou seja, o universo 1 de uma teria uma espessura com o universo 2 da outra.

4.13.2 -Passagem de uma figura bidimensional para sua forma enantiomorfa

Através da **Figura 60**, vemos na dimensão dois, dois corpos no item (a) que são duas faces bidimensionais iguais e dextrógiras, são idênticas e na mesma dimensão; já no item (b) as mesmas duas faces são dextrógiras, mas uma foi rotacionada de 180° , na própria dimensão dois e fica virada uma para a outra; e no item (c) as duas figuras, uma é enantiomorfa da outra, uma dextrógira e outra levógira, neste caso a segunda do item (b) foi rotacionada na terceira dimensão, (em uma fita de Möbius) para poder se transformar na enantiomorfa (espelhada) da outra.

Com apenas uma rotação simples, de uma das figuras, na própria dimensão dois, não é possível transformar uma das figuras na enantiomorfa (espelhado) da outra. Assim, os dois corpos do item (c), enantiomorfos entre si no mesmo universo, um enantiomorfo (espelhado) do outro, um não pode ficar coincidente com o outro se pudessem se fundir. São essencialmente diferentes, exceto se um deles passar pela fita de Möbius, sofrer uma torção na terceira dimensão e lá voltar. Assim os dois corpos enantiomorfos um do outro após passar pela torção, vão estar há uma espessura de distância do universo da fita do lado de cá, os dois poderão ficar coincidentes, só que não se tocam, pois, a espessura impede. Neste caso não poderiam ficar quase coincidentes na mesma dimensão, mas em dimensões paralelas sim, separados por uma espessura mínima.

Figura 60 - Exemplos de: (a) dois seres na dimensão dois normais e iguais; (b) o segundo ser, sofreu uma rotação de 180° na própria dimensão dois; (c) o segundo ser passou por uma rotação na dimensão três e se transformou no seu enantiomorfo (espelhado se si mesmo)



Fonte: Elaborado pelo autor

No exemplo da **Figura 60** (a), duas Figuras iguais. Em (b) uma das figuras, a segunda foi rotacionada na própria dimensão dois e fica de cabeça para baixo para a outra. Em (c) a segunda figura sofreu uma torção na terceira dimensão e foi recolocada na dimensão dois, se transformou assim em enantiomorfa (espelhada) da primeira. Podemos transformar uma das figuras iguais do exemplo (a) em uma figura enantiomorfa sua, se a rotacionarmos na dimensão três e a devolvermos para a dimensão dois, como no exemplo (c). Essa torção na dimensão três, a figura não sai de seu universo bidimensional, sua superfície, mas deve passar pela torção da fita de Möbius (d) na terceira dimensão.

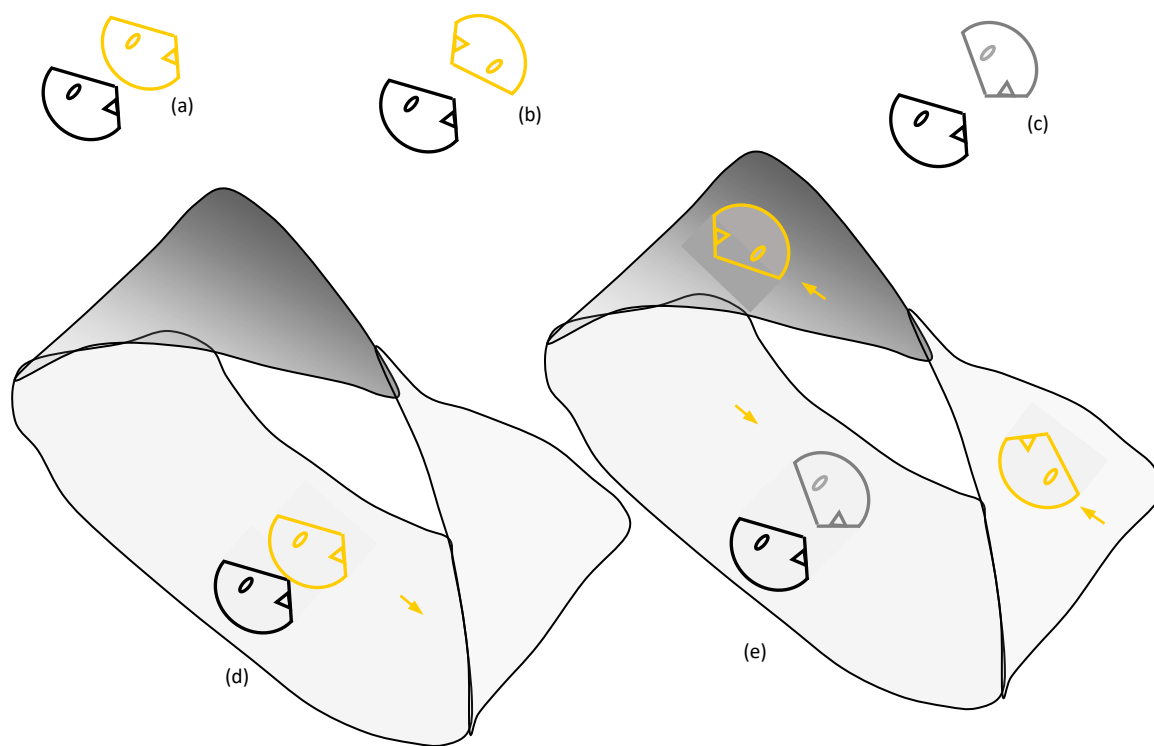
Assim a **Figura 60**, (a) mostra uma figura plana, da dimensão dois, que ao entrar em A, passa por uma torção na dimensão três, através de uma fita de Möebius, e ao retornar à dimensão dois, em A', se transformou em sua figura enantiomorfa (espelhada) de si mesma. O processo inverso faria ela retornar à forma anterior, se fizesse o caminho inverso, entrasse na fita (de Möebius) em B'e sofresse novamente a torção inversa na fita de Möbius e retornasse em B, para a dimensão dois sua forma estaria restituída à primeira.

Vamos usar esta mesma analogia para uma dimensão superior. Somente podemos transformar um corpo tridimensional em enantiomorfo dele mesmo, por exemplo, poderíamos transformar uma mão direita em uma esquerda, se a rotacionarmos na quarta dimensão, através de uma fita de Möbius de terceira dimensão com torção na quarta, análoga à da segunda para a terceira dimensão, só que sai da dimensão três e produz uma torção na quarta dimensão, retornando à terceira. A mão direita se transformaria em esquerda em seu retorno. Se uma mão esquerda e uma mão direita, se a colocamos uma sobre a outra, elas não ficam coincidentes, mas se passar uma mão esquerda para uma torção na quarta dimensão, ela se transforma em uma direita e aí podemos torná-las coincidentes uma com a outra. No entanto, se houver uma pequena espessura entre elas para a quarta dimensão, apesar de poderem ficar coincidentes elas não poderão mais se tocar, estão separadas dimensionalmente, levemente distantes na pequena espessura para a quarta dimensão. Como é difícil entender da terceira para a quarta dimensão, temos a facilidade de pensar da segunda para a terceira e fazer a analogia da transposição mental da terceira para a quarta analogamente.

Na **Figura 61**, vamos considerar dois seres bidimensionais (mundo superficialino da fita) vivendo na fita bidimensional de Möbius (d). Se o segundo ser passar pela superfície em rotação na terceira dimensão da fita de Moebius, ele é transformado em sua figura enantiomorfa (espelhada) correspondente (e) ao retornar à mesma posição.

Se a fita da **Figura 61** tiver espessura zero eles moram na mesma dimensão (a) os dois inicialmente são iguais e poderiam ficar coincidentes na mesma posição um do lado do outro (d). Se um deles resolve fazer uma viagem e passar pelo caminho da fita de Möebius, sofrendo uma torção na terceira dimensão em sua própria superfície, ao final, quando retornar para perto do outro, ele se encontrará no formato enantiômero (espelhado) do outro (e), ou seja, uma figura espelhada da outra. Se considerarmos que a superfície da fita de Möbius em que moram os dois seres é matematicamente bidimensional, ou seja, de espessura zero, o outro estará enxergando ao amigo, e o amigo a ele, um enantiomorfo do outro de frente. No entanto, se estão do mesmo lado da fita e são enantiomorfos entre si, e se um se girar para o outro na mesma superfície, um fica de cabeça para baixo para o outro (b).

Figura 61 - Na fita de Möbius (d) duas figuras são coincidentes mas separadas pela sua espessura (dimensões paralelas), a primeira de dentro da fita e a segunda de fora; se rotacionarmos a segunda figura fazendo-a passar pela torção da fita, (e) ela passará para o lado de dentro da fita, na mesma dimensão da primeira, só que na mesma dimensão uma será enantiomorfa da outra (não coincidentes); isto mostra que as figuras em dimensões paralelas são coincidentes, só que uma é enantiomorfa da outra para a dimensão interna ou universo interno



Fonte: Elaborado pelo autor

Agora vamos considerar a **Figura 61** (d) onde mostra dois seres, o primeiro morando na superfície interna da fita de Möbius (mundo superficialino da fita) e o segundo morando na parte externa da fita de Möbius. A fita tem uma pequena espessura, o que os separará dimensionalmente.

Se os dois, portanto, o primeiro ser que está do lado de dentro da fita, vamos dizer que ele está no universo 1, e o segundo do lado de fora da fita, vamos dizer que ele está no universo 2, e a fita tem uma pequena espessa, em que um consegue ficar coincidente com o outro, um em baixo (o segundo) e o outro em cima (o primeiro) sem se tocarem, devido a espessura dos universos paralelos. Mas um é o anantiômero do outro, uma vez que se um deles passasse pela torção da fita e viesse ao mesmo universo um seria espelhado do outro. Se a pequena espessa for transparente apenas para quem está do lado de fora, o que está do lado de fora, enxergará o que está do lado de dentro, inclusive os objetos do primeiro (paredes, móveis) que estão do lado de dentro, mas estes estarão espelhados para ele, pois por ter uma torção em relação ao outro, estará como se estivesse no espelho do outro (Alice

no país do espelho), enantiomorfo, mas como está dimensionalmente paralelo, poderá até estar coincidente com o outro. O que está do lado de dentro não enxergará o que está do lado de fora. Os obstáculos que existirem do lado de dentro, não existirá para o que está do lado de fora, pois estará em um universo paralelo distinto, a uma leve espessura do outro.

Para o ser que está do lado de fora da fita, ele estará em um universo paralelo, enantiomorfo de si e não sentirá mais os obstáculos que existiam no universo de dentro (paredes, objetos, móveis) e poderá atravessá-los como se fossem transparentes. O amigo não poderá mais enxergá-lo, e ele do universo 2 não terá os obstáculos que antes sentia no universo 1, apesar de ele estar tão perto, a uma tão pequena espessura da fita interna. E se ele ainda enxerga o universo 1, dessa espessura paralela, estará vendo o seu universo 1, todo de forma espelhada a si mesmo, não conseguirá ler as placas uma vez que elas estão escritas de forma espelhada, nem encontrará os obstáculos que antes ele encontrava.

Extrapolando para o nosso mundo tridimensional, se um ser tridimensional viajar e passar por uma equivalente fita de Möbius tridimensional, sofrendo uma torção na quarta dimensão, ao passar por uma torção neste espaço da quarta dimensão, ele retornará enantiomorfo a todos que aqui se encontram, e se houver uma “espessura” para a quarta dimensão ele estará enantiomorfo de si mesmo. Quem está no universo 1, não mais o verá, e ele não poderá mais interagir com o universo 1, e se ainda tiver vendo o universo 1 de seu universo 2 a uma espessura, não sofrerá os obstáculos que esse universo 1 oferece. Ele poderá construir apenas simulacros energéticos, do seu mundo anterior, em seu espaço paralelo. Se ele tentar ler as placas do universo 1, essas placas estarão espelhadas a si mesmo e assim não conseguirá lê-las.

Talvez as energias movimentadas pela sua consciência, possa estreitar a espessura existente entre os dois mundos. Talvez as energias movimentadas pela consciência estreitem esta espessura paralela entre o universo 1 e o universo 2. E se ele chegar perto de uma pessoa que consiga estreitar à sua volta a espessura entre os dois “universos paralelos” a outra poderá sentir essas energias e se comunicar com ela?

Cabem aqui questões interessantes a esta topografia da garrafa de Klein. Será que cada ser tridimensional físico, teria em um espaço quadridimensional a si, este espaço “paralelo” à terceira dimensão, há uma pequena espessura para a quarta dimensão, no universo 2, um simulacro espelhado de si mesmo, enantiomorfo, mais coincidente com seu corpo, e que vivesse do outro lado dessa espessura, e que a relação entre esses dois seres do

universo 1 e no universo 2, seria tão próxima que compartilhassem sensações, energias, sentimentos e usariam a mesma consciência, ambas tendo acesso a ela? Será que após a morte do corpo físico, este ser simulacro do ser físico, no universo paralelo 2 e a uma espessura pequena um do outro, interligados pelas bioenergias comum aos dois, mantivesse e levaria consigo a consciência compartilhada entre os dois universos, mantendo todas as experiências vividas, mantendo sua existência, agora somente no universo 2, sobrevivendo dessa maneira, portanto, à morte e a perda do corpo físico?

Este seria um modelo interessante, e um questionamento de interesse, oferecido pela Topografia da Geometria das Dimensões na Matemática, modelo este, que por excelência é um candidato a explicar fisicamente, esta função de efeitos recorrentes no ser humano, de que todos se questionam recorrentemente, desde que o ser humano se entende por ser humano, e que se manifesta em todas as épocas e locais da Terra, em todas as religiões, vinculada à essa questão magna. Existiria a manutenção e a sobrevivência da consciência, após a morte do corpo físico?

Esta é uma grande questão e a fita de Möbius ou a garrafa de Klein se adapta a uma possível resposta topográfica interessante a estas questões interessantes.

A nossa mão e o nosso pé direito são enantiomorfos (espelhados) à nossa mão e o nosso pé esquerdo. Será que na biologia das moléculas de DNA, que dão a formação das mãos e dos pés, existem genes enantiomorfos um do outro, dando informação enantiomorfa para construção dessas partes no corpo físico, que também são enantiomorfas uma da outra para dar características distintas à sua formação? A informação que temos hoje, na biologia é que as partes constituintes das proteínas que são os aminoácidos são todos levógiros, com exceção da glicina que não tem isomeria óptica. Assim como os açúcares do nosso corpo também são todos levógiros. A maneira como se justifica este fato é que no início da vida, a natureza usou moléculas somente desse tipo e isso se manteve até hoje. Como as características do DNA e dos genes procedem na informação de construção de nossas partes do corpo que se desenvolvem enantiomorfas? Já nasceu alguém com estas partes trocadas?

Surge uma grande gama de perguntas para satisfazer nossa compreensão na teoria do conhecimento. Mas a matemática das dimensões se apresenta ativa para recorrermos a estas respostas em múltiplas aplicabilidades após o seu aprendizado proporcionado pela Educação Matemática.

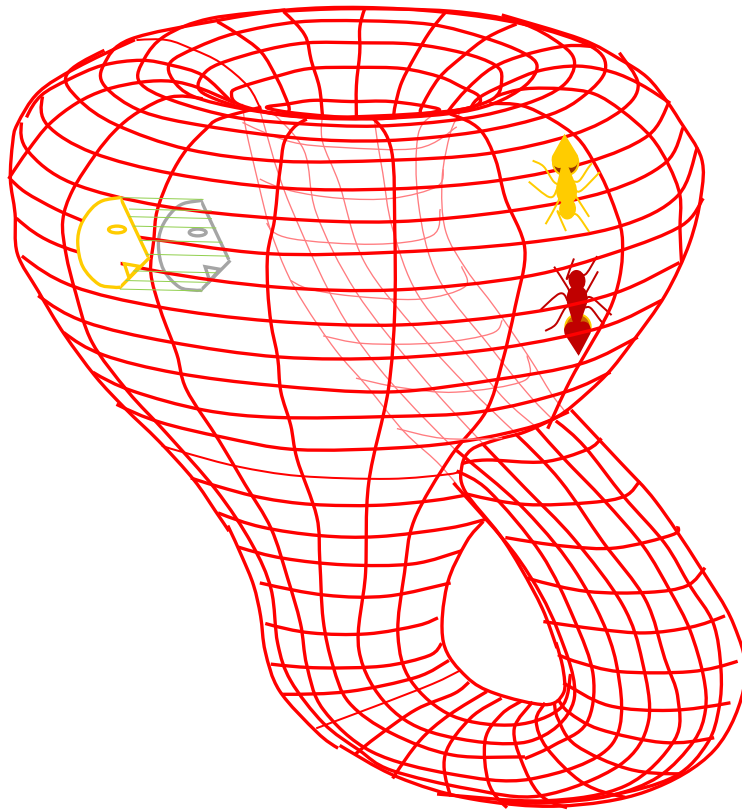
4.13.3 - Garrafa de Klein

A **Figura 62** mostra a garrafa de Felix Klein, uma superfície, como a superfície da Fita de Möbius, só que fechada e encurvada em três dimensões, sem beiradas. Ela difere da curva de Möbius que é bidimensional aberta e com beirada. A garrafa de Klein tem momentos que é aberta, tem momentos que é fechada tridimensionalmente, sendo que sua superfície bidimensional é sempre fechada e tem, portanto, uma topologia inteiriça sem beiradas. Se um ser bidimensional caminhar sobre a superfície, terá momentos que ele estará do lado de fora da superfície e momentos em que ele estará do lado de dentro da superfície da garrafa, após passar por seu gargalo ao exterior ou ao interior. No momento em que estiver do lado de dentro da superfície, ele será enantiomorfo de si mesmo que quando do lado de fora da superfície. Se a espessura da garrafa for matematicamente bidimensional, de espessura zero, os seres quando dentro da garrafa se transformarão em figuras espelhadas de si mesmos. Do contrário, se a superfície tiver espessura, ela se verá em um universo 1 do lado de dentro e um universo 2 do lado de fora, e os seres do lado de fora serão seres espelhados aos mesmos seres do lado de dentro. Se enantiomorfos, um do outro, eles se acoplam em coincidência quando em lados opostos. Os que saírem pelo gargalo da garrafa para o lado de fora da garrafa se apresentarão para os que estão do lado de dentro, como enantiomorfos de si mesmo, e não conseguirão entrar em contato direto mais com o universo 1, assim como verão o universo 1, espelhados para si mesmo.

Felix Christian Klein, matemático alemão, casou-se com a neta do grande filósofo Hegel, estudou teoria de grupos e trabalhou na geometria para unificar a geometria Euclidiana com as geometrias não- Euclidianas, unificando-as a uma geometria projetiva. A partir de 1886, passa a trabalhar para transformar a Universidade de Göttingen em um Centro Mundial de Investigação Matemática. Levou Hilbert para trabalhar com ele. Contribuiu para o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas assim como foi um dos primeiros matemáticos à contribuírem para um desenvolvimento mundial da Educação Matemática. Em 1908 criou a Comissão Internacional de Instrução Matemática, se dedicando a fazer avançar a Educação Matemática. Trabalhou seus últimos 17 anos de vida, de 1908 a 1925, em função de fazer evoluir a Educação Matemática.

De que maneira seria uma fita de Möbius e uma garrafa de Klein em quatro dimensões?

Figura 62 - Garrafa de Klein



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Figura 62**, a garrafa de Klein, mostra o gargalho, que representa, a torção sofrida pelo ser bidimensional, análoga à torção da fita de Möebius, e que ao passar por ela, e sair da garrafa, se transforma em seu enantiomorfo, se distanciando do universo 1 interior, mas ficando a uma espessura de distância dele, no universo 2, sem sofrer o empecilho dos obstáculos do universo 1, interior. Verá o interior espelhado do que via de quando dentro da garrafa. Poderá se sobrepôr ao ser enantiomorfo interior e interferir em sua consciência que se manifesta nos dois universos assim como os processos energéticos.

4.14 - DIMENSÃO 3 (3D) OU ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL

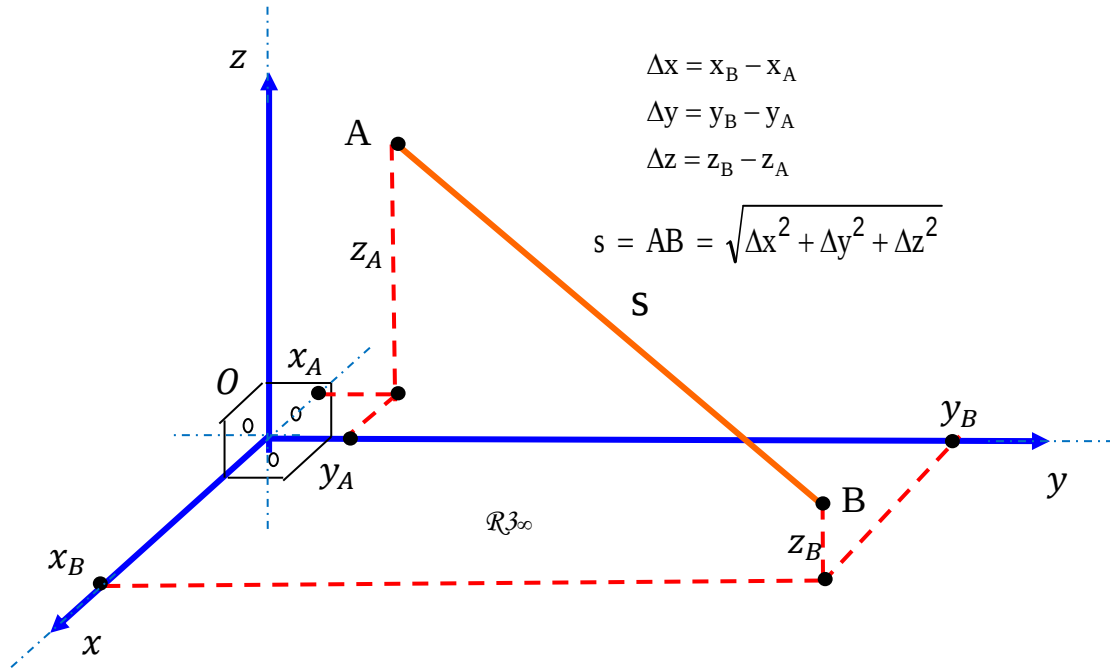
É o espaço (comprimento, largura e altura) que se pode caracterizar através de três eixos, x , y , z , um a 90° do outro, portanto, ortogonais e linearmente independentes.

4.14.1 - Reconstrução Tridimensional Infinita

A estrutura tridimensional pode ser representada, através de três eixos, x , y e z , usando todas as direções espaciais, conhecidas pelos nossos sentidos físicos. O intervalo s ,

distância entre dois pontos em três dimensões é o intervalo espacial invariante da tridimensionalidade que independe do sistema de referência x', y' e z' escolhido, e é mostrado na **Figura 63**. Essa Reconstrução tridimensional é infinita, a denotaremos por $R3_{\infty}$.

Figura 63 - Espaço tridimensional infinito, $R3_{\infty}$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Na estrutura finita de lado l , poderíamos construir o cubo, o tetraedro e a esfera como veremos a seguir.

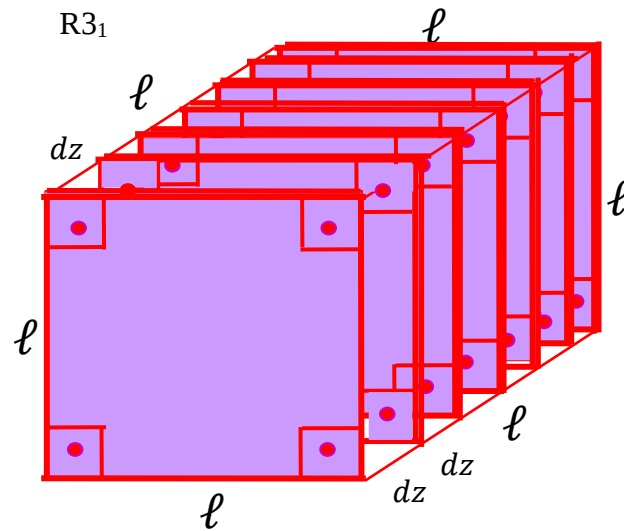
4.15 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DO CUBO

Vamos estabelecer quatro tipos de Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas para o cubo.

4.15.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional do Cubo

Em uma primeira Reconstrução tridimensional do cubo ($R3_{1\Box}$), por Reconfiguração Mereológica bidimensional de quadrados justapostos. Assim, em passo inicial, podemos subdividir todo o plano bidimensional em faces quadradas, iguais, de lado ℓ , por meio de uma reconfiguração heurística mereológica. Em um segundo passo vamos incrementar cada um desses infinitos quadrados com um infinitésimo dz , perpendicular ao plano dos quadrados

Figura 64 - Cubo construído por meio reconfiguração mereológica de infinitas face do quadrado da bidimensão, incremento infinitesimal dz , e Reconstrução Tridimensional do cubo ($R3_{(1\Box)}$)



Fonte: Elaborado pelo autor

. E em um terceiro passo vamos fazer uma reconstrução dimensional do cubo, colocando os infinitos quadrados lado a lado, paralelamente entre si, para perfazer o preenchimento da distância l , na nova direção z , da terceira dimensão, na como na **Figura 64**.

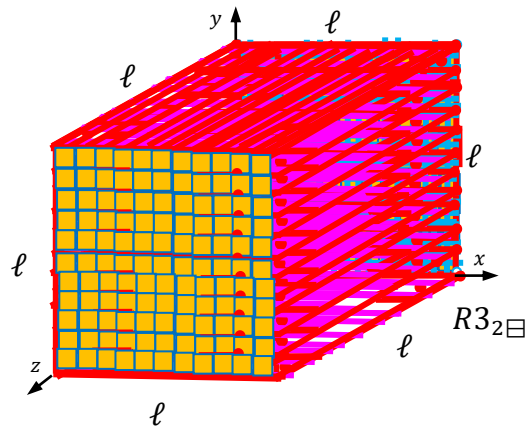
4.15.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional do Cubo

Em uma segunda Reconstrução Tridimensional do cubo ($R3_{2\Box}$), podemos construir o cubo partindo de uma linha de comprimento l em direção à nova dimensão z , cuja espessura da seção transversal é quadrada, bidimensional, virtual e infinitesimal. Separa-se assim, por reconfiguração heurística mereológica, o corte de uma reta na direção z , em infinitos segmentos de reta, linhas unidimensionais de comprimento l , e estes segmentos associamos uma seção transversal virtual infinitesimal de área $dA = dx \cdot dy$, e reverbera-se assim, cada um destes segmentos de reta paralelamente nas direções incrementadas, perpendicularmente às linhas, até perfazer uma distância l , nas direções x e y , construindo-se infinitos quadrados interiores extroboscopicamente, nesta face e infinitos segmentos de reta em z , na direção da terceira dimensão.

Sendo assim, pegamos uma “semente” de um segmento de reta (“galho”) $z = l$, e em uma configuração mereológica separamos infinitos segmentos de retas de uma reta infinita da dimensão um. Com essa mereologia realizada, incrementamos cada um dos infinitos segmentos de reta, de uma secção transversal de área, $dA = dx \cdot dy$, assim teremos

a semente do segmento de reta (“galho”) para gerar a geometria tridimensional do cubo, $dV = \ell \cdot dx \cdot dy$. Assim feito, podemos realizar a reconstrução dimensional do cubo, reverberando o dx de 0 à ℓ , e o dy de 0 a ℓ , ou seja, repetindo esses infinitos segmentos de reta ao longo do eixo x pela distância de 0 à ℓ , e repetindo esses infinitos segmentos de reta ao longo do eixo y pela distância de 0 à ℓ ($R3_{2\Box}$), como na **Figura 65**.

Figura 65 - Cubo construído através da repetição de infinitas arestas paralelas de Seção infinitesimal quadrada na direção perpendicular à esta face ($R3_{2\Box}$), em uma Segunda Reconstrução Tridimensional a partir da unidimensionalidade (3D/1D)

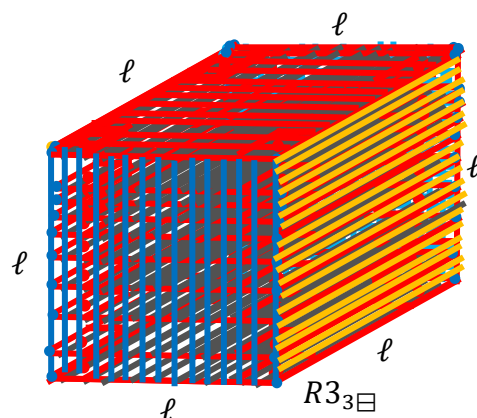


Fonte: Elaborado pelo autor

4.15.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional do Cubo

Em uma Terceira Reconstrução Tridimensional do Cubo ($R3_{3\Box}$), constrói-se o cubo a partir de cada “ponto”, 0D, ou semente infinitesimal virtual de um ponto para a terceira dimensão, $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, 3D. A partir desse ponto, tira-se infinitos pontos, enfileirando-os na direção x, y e z , até perfazer uma distância ℓ , na reverberação destes “pontos”, dando completude à formação do cubo total ($R3_{3\Box}$), volumétrico e tridimensional, 3D, à partir da figura zerodimensional do ponto, 0D, semente virtual infinitesimal em 3D, reverberado nas três direções do espaço, como a **Figura 66**.

Figura 66 - Cubo volumétrico e tridimensional construído em 3D a partir de 0D (3D/0D)

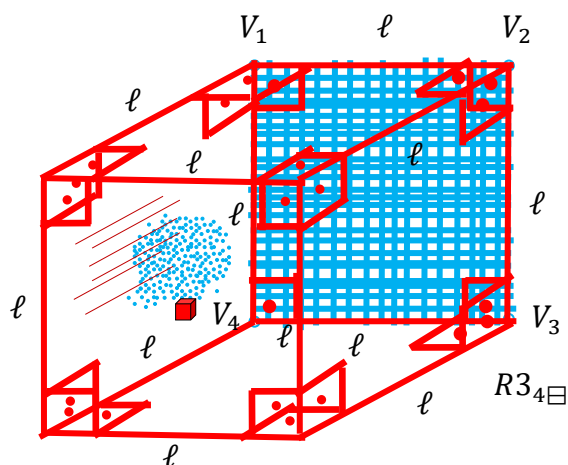


Fonte: Elaborado pelo autor

4.15.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional do Cubo

A Figura 67 uma representação em quarta dimensão a Reconstrução Tridimensional do Cubo.

Figura 67 - Cubo construído no espaço tridimensional - Quarta Reconstrução Tridimensional do cubo ($R3_4\Box$)



Fonte: Elaborado pelo autor

Em uma Quarta Reconstrução Tridimensional do Cubo, de forma instrumental, parte-se da Face quadrada, da dimensão anterior, e traça-se perpendicularmente à Face, a partir de cada um de seus quatro vértices, linhas em direção à terceira dimensão, de mesmo comprimento ℓ , e após isso, interliga-se o final dessas linhas, cada uma, através de suas extremidades, com comprimentos de análoga dimensão ℓ , fechando o cubo com quatro linhas paralelas às arestas externas do quadrado original ($R3_4\Box$), preenchendo

posteriormente o seu interior com infinitos pontos, ou infinitas linhas, ou infinitas superfícies, ou infinitos cubos menores, como mostra a **Figura 67**.

Perfazem-se, portanto, seus 8 Vértices, suas 12 Arestas, suas 6 Faces, e o Sólido Geométrico, o Cubo, características notáveis definidas de sua geometria

Cada uma dessas quatro Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas, ou Instrumental do cubo, pode ser proposta, pelo professor, aos estudantes, para criação de formas diferentes e semelhantes desses modelos.

4.15.5 - Resumo de Características do Cubo

O Sólido volumétrico, seja formado pelas infinitas faces internas, ou pelas infinitas linhas internas ou infinitos pontos internos, ou de forma instrumental, faz com que o cubo se feche externamente, ao olhá-lo geometricamente da terceira dimensão, em 6 Faces externas, 12 Arestas externas, 8 Vértices externos, formando 1 único Sólido volumétrico, o cubo.

Neste caso, a expressão completa, considerado este novo elemento ou variável dimensional, surgida e acompanhada pelas outras variáveis dimensionais das dimensões crescentes, se complementaria na Equação Geométrica das Dimensões para o Cubo, resultando na unidade como resultado. Assim são, 8 Vértices, $V_{3\Box} = 8$; 12 Arestas; $A_{3\Box} = 12$; 6 Faces, $F_{3\Box} = 6$; 1 Sólido, $S_{3\Box} = 1$; portanto a unidade na Equação Geométrica das Dimensões prevalece.

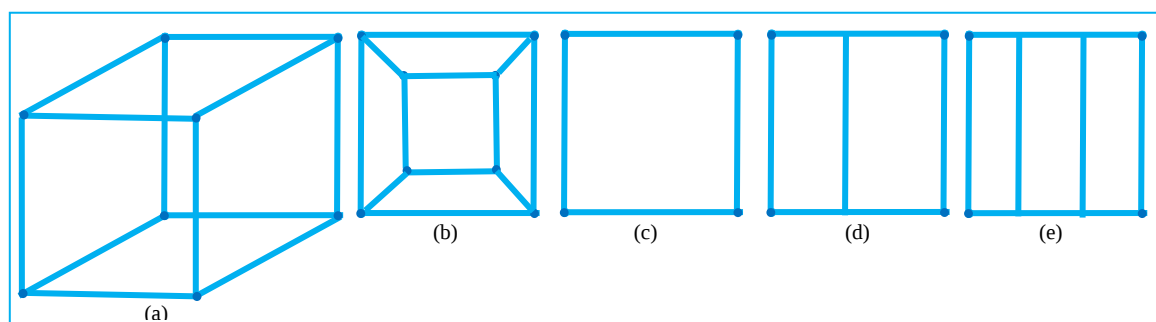
EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a tridimensionalidade do cubo:

$$V_{3\Box} - A_{3\Box} + F_{3\Box} - S_{3\Box} = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$$

As vistas das projeções do cubo de três dimensões para duas dimensões seriam como nas figuras abaixo dependendo do ângulo observado e a distância de observação. Estas projeções colocaremos como uma Reconstrução tridimensional do cubo a partir de sua visão na segunda dimensão, **Figura 68**.

Figura 68 - Cubos vistos da dimensão três em vários ângulos

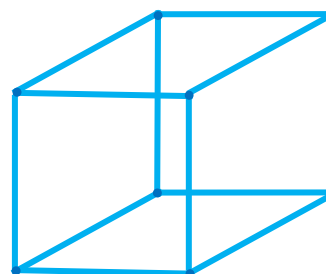


Fonte: Elaborado pelo autor

Resume-se no **Quadro 14** as características do Cubo formado.

Quadro 10 - Características da dimensão três do cubo

Dimensão três do Cubo	
Formato de representação: Cubo Tridimensional	
Variável Dimensional: um Sólido	
Finalizadas por infinitas estruturas externas da dimensão dois: seis Faces	
Entre estas estruturas externas têm-se infinitas estruturas da dimensão anterior:	
Infinitas Faces, Infinitas Linhas, infinitos Pontos.	
Equação Geométrica das Dimensões para o Cubo:	
$V - A + F - S = 8 - 12 + 6 - 1 = 1$	



Fonte: Elaborado pelo autor

Se estas infinitas faces quadradas do cubo, fossem colocadas na dimensão imediatamente anterior das quais elas vieram, dimensão dois, própria, lado a lado, criaria um plano infinito de área infinita, ocupando toda a dimensão anterior.

Quadro 11 - Variáveis Dimensionais da Família 1, ou Família H-quadrado, ou CEGED 1, Matriz dimensional de Figuras Geométricas do cubo

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Aresta A	Face F	Sólido S	Elementos interiores	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	0	1, ∞	$V - A + F - S = 1$
1D	2	1	0	0	∞	$V - A + F - S = 1$
2D	4	4	1	0	∞	$V - A + F - S = 1$
3D	8	12	6	1	∞	$V - A + F - S = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

No entanto, quando essas infinitas faces são colocadas em direção à nova dimensão (três), saímos do infinito e ganhamos uma dimensão finita de arestas de comprimento ℓ , e a medida do volume finita do Cubo, de valor $V = \ell^3$, sem a explosão do infinito da dimensão anterior.

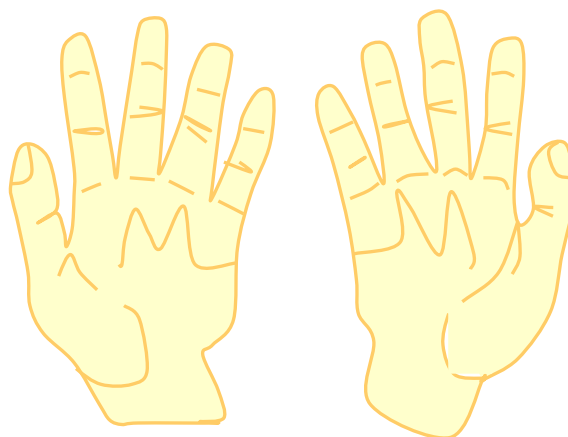
4.16 - FIGURAS ENANTIOMORFAS DA DIMENSÃO TRÊS PARA A QUATRO

Antes de passarmos da dimensão três, vamos dar características fundamentais da dimensão três que fornecem induções de existência da dimensão quatro.

Uma delas é a propriedade dos corpos enantiomorfos da terceira dimensão, o enantiomorfismo, como fizemos da dimensão dois para a três.

Os corpos enantiomorfos em três dimensões são diferenciados pela classificação em destros e esquerdos (sinistros), ou dextrógiros e levógiros, da mesma forma que a mão direita e a mão esquerda são enantiomorfos uma da outra. Pois, conseguimos diferenciá-las, não porque são diferentes, mas por serem uma o espelho da outra e uma mão direita não pode ser transformada em uma mão esquerda. No espelho a mão direita se transforma em esquerda e a mão esquerda se transforma em direita. Vejamos a **Figura 69**. O espelho mostra a existência do enantiomorfismo.

Figura 69 - Mãos direita e esquerda são enantiomorfos no espaço. São idênticas, mas enantiomorfos uma da outra



Fonte: Elaborado pelo autor

Olhando-nos no espelho, vemos o nosso corpo enantiomorfo.

Na **Figura 69**, vemos na dimensão três: (a) duas moléculas bidimensionais apenas rotacionadas; e (b) duas moléculas bidimensionais enantiomorfos, ou seja, que só podem ser rotacionados na dimensão quatro, para se tornarem iguais, uma igual à outra na dimensão três. São chamadas de substâncias químicas isômeras espaciais, e quando são produzidas em mistura L e D (Levógira e Dextrógira) se diz que é uma mistura racêmica

Sendo assim, podemos transformar uma mão direita em uma mão esquerda se a rotacionarmos na dimensão quatro, e a retornarmos para a dimensão três. Uma rotação na

quarta dimensão, pode transformar uma figura enantiomorfa tridimensional, idêntica ao seu par enantiomorfo, na dimensão três. Seria como se uma mão esquerda fosse dar um giro na quarta dimensão e voltasse uma mão direita.

Como seria a Fita de Möebius na dimensão quatro? Uma “dobra” volumétrica colada na quarta dimensão, uma torção e a outra “dobra” volumétrica e colada na dimensão três. Tridimensionalmente teriam os momentos em que o tigre está andando dentro da jaula fechada e ao passar pela “dobra” quadridimensional, o tigre passa a andar do lado de fora da jaula.

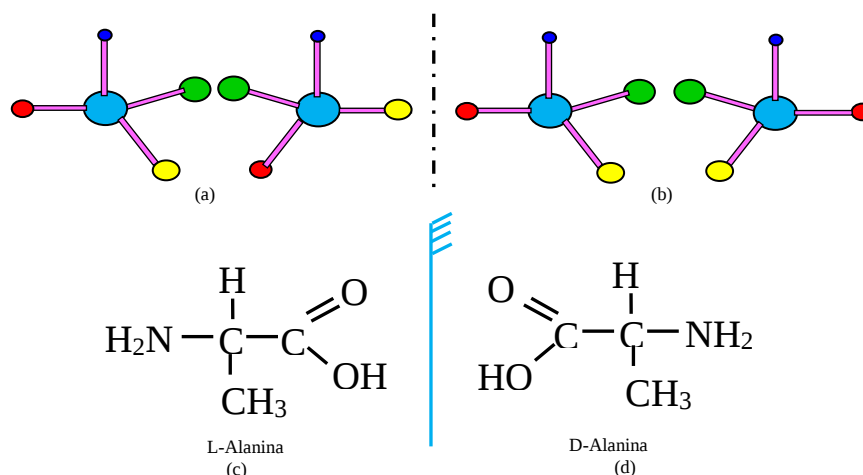
As moléculas em química ocorrem de serem produzidas naturalmente com enantiomorfismos e são chamadas de moléculas quirais, possuem propriedade de quiralidade (dextrógira e levógira) ou estereoisomeria, onde se constituem compostos enantiômeros.

Cada um dos enantiômeros exibem propriedades físicas diferentes, por exemplo, quando passam por eles uma luz polarizada, um deles faz a polarização da luz girar no sentido horário, dextrógiro e o outro par molecular, faz a luz girar no sentido anti-horário, levógiro. A **Figura 70 (c) e (d)**, são dois enantiomorfos, a L-alanina (Levógira) é um dos 20 aminoácidos usados na síntese celular das proteínas animais e a D-alanina (Dextrógira), encontrada nas paredes celulares de algumas bactérias, **Figura 70**.

A grande maioria das moléculas dos corpos vivos são levógiros, por exemplo, os açúcares, os carboidratos do corpo. A Criação da Vida na Terra deu preferência para as substâncias levóginas, a mão esquerda da evolução. Existem algumas enzimas que são dextróginas, a mão direita da evolução. Somente em algumas bactérias encontra-se moléculas dextróginas, em proteínas e açúcares.

A remédio talidomida indicada como sedativo é racêmico, ou seja, se apresenta nas duas formas enantiômeras, L e D. Mulheres jovens que consumiram a talidomida, nos anos 50, produziram crianças deformadas, pois atuavam na má formação no desenvolvimento do feto. Somente D-talidomida era sedativo, a L-talidomida produziu más formações nos fetos. Mais de 12.000 crianças sofreram com esta má formação.

Figura 70 - Moléculas enantiomorfas



Fonte: Elaborado pelo autor

Na **Figura 70**, ilustramos as moléculas enantiomorfas: a) Moléculas iguais e rotacionadas na dimensão três; (b) Moléculas enantiomorfas, que só se transformaria uma na outra se uma delas passasse por uma torção na dimensão quatro. (c) L-Alanina, molécula Levógira da Alanina e (d) D-Alanina, isomeria óptica, carbono assimétrico, molécula Dextrógira da Alanina.

4.17 - DIMENSÃO FRACIONÁRIA ENTRE A DIMENSÃO TRÊS E QUATRO

A Dimensão fracionária, entre a dimensão três e quatro, corresponderia a um espaço curvo. Assim, pode-se também, apesar de não ser fácil “enxergar” fisicamente, ter-se um espaço tridimensional curvo. Mas, para quê direção do espaço físico tridimensional, nós poderíamos encurvar este espaço, se tudo à nossa volta é tridimensional?

Seria em direção a uma quarta dimensão, que os nossos sentidos físicos, do nosso corpo humano, não são capazes de perceber, mas nossa mente, nossa consciência é capaz, uma vez que ela é independente e maior do que esses sentidos que nós estamos acostumados a perceber no dia a dia. Foi este fenômeno físico da curvatura do espaço tridimensional, na relatividade geral e a existência das geometrias não euclidianas que nos motivaram a pesquisar as dimensões fracionárias em dimensões menores apoiando-nos na curvatura do espaço de Einstein (EINSTEIN, 1961).

Pode-se não se dar conta de se imaginar um espaço curvo fisicamente, uma vez que toda nossa experiência diária é por meio de percepções físicas, visual, auditiva, tátil,

olfativa, gustativa, energética, emocional, estimulada, com toda sua semiótica de vivência, experiencial perceptivamente da física no dia a dia, por meio de nossos sentidos biofísicos de três dimensões, na aparência e conceitualmente. São as três dimensões do espaço com a passagem do tempo. Mas, apenas experienciarmos o mundo que está à nossa volta, não nos dá a capacidade de interpretá-lo semioticamente de outras maneiras, se não temos novos conceitos dimensionais, se desconhecemos novos elementos da matemática, se não permitirmos a introdução de novos registros de representação semiótica, novas linguagens semióticas. Visualizar, repensar, reentender, colocar o ponteiro consciencial em novos entendimentos, necessita novas semióticas, novos registros de representação, enriquecimento intelectual da consciência, com modéstia e autenticidade.

Se não conhecemos conceitualmente dimensões maiores que três, não podemos enquadrar nossas percepções em outras visões. Isto, a partir do próprio conhecimento, passa a ser um bom exercício de novas linguagens de interpretação, do pensamento extrapolador, para novas condições, novas semióticas, uma vez que a matemática, o pensamento abstrato, abarca tais situações, e a física somente consegue ter explicações e entendimentos para certos fenômenos físicos, se recorrer a estes conceitos.

No mundo físico, a aceleração gravitacional pode ser vista, de acordo com os cálculos de Albert Einstein (1879-1955) de 1916, (EINSTEIN, A., 1961), como a produção na natureza, de um encurvamento do espaço tridimensional para uma quarta dimensão, conduzindo-o a um espaço tridimensional curvo positivo esférico como previsto pelo matemático George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), em sua Geometria Riemanniana, não-Euclidiana. Assim, um ser unidimensional que segue em movimento uma linha reta ou uma linha curva, conceitualmente para ele é a mesma coisa, desde que seja a distância menor entre dois pontos, a geodésica, de um espaço existente. Um cientista que faça experimentos, verificará diferenças físicas no seu espaço se ele for reto ou se ele for naturalmente curvo. A experiência da curvatura do espaço que diferencia seus efeitos físicos, que diferencia suas dimensões.

Isto pode ser calculado matematicamente, de forma geométrica, ou algébrica, ou matricial, ou tensorial. É a estrutura relativística do espaço-tempo, resultando em novas teorias para a Estrutura do Universo (em quatro dimensões do espaço-tempo curvo) ou então através da Teoria das Supercordas, em 10 dimensões, onde três das dimensões

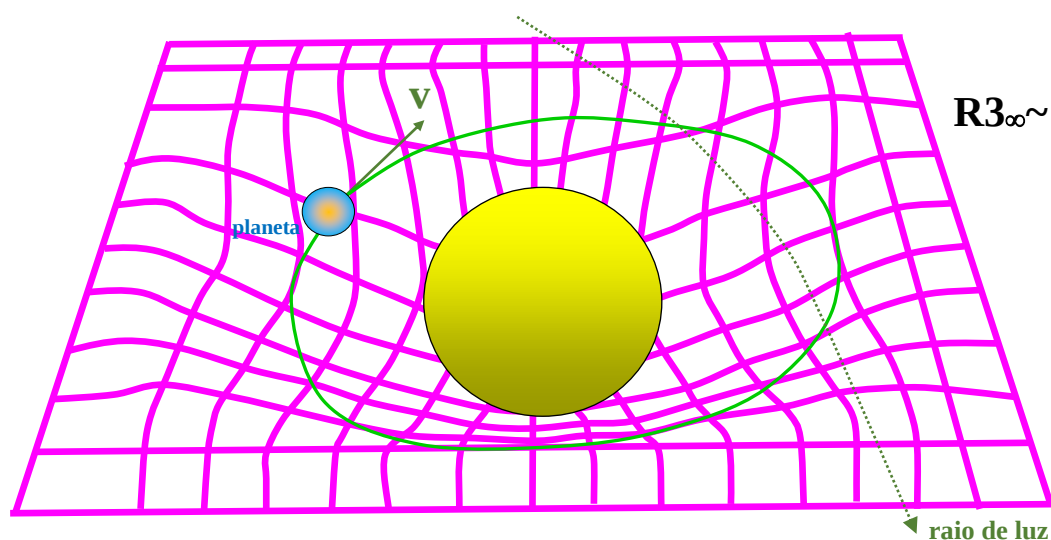
espaciais estão abertas e sete estão fechadas, ou então pela Teoria M, das membranas, ou pela teoria bosônica das supercordas com 26 dimensões espaço-tempo.

Como representação da dimensão fracionária entre a dimensão três e a quatro, da Relatividade Geral, pode-se apresentar a **Figura 71**, em uma representação bidimensional analógica, em que há um único plano de curvatura para compreensão.

A **Figura 71**, mostra o efeito da curvatura do espaço tridimensional para uma quarta dimensão.

Portanto, a **Figura 71** representa um espaço tridimensional encurvado pela presença da grande massa do Sol, em direção à uma quarta dimensão, que produz o fenômeno físico da gravitação, seja para um Planeta girando nesta curvatura em torno do Sol ou uma onda eletromagnética de luz que não tem massa e se curva no espaço encurvado da massa do Sol.

Figura 71 - Espaço tridimensional encurvado



Fonte: Elaborado pelo autor

Neste exemplo a presença da massa do Sol, no espaço físico, encurva o espaço à sua volta, representado na **Figura 71**, somente por um único plano de encurvamento em uma única direção, como a que podemos enxergar coerentemente, mas este encurvamento seria em todas as direções à volta do Sol, em todos os pontos do espaço, tridimensionalmente em direção à uma quarta dimensão. Isto faz com que os corpos físicos, incluindo planetas, asteroides e a luz, em torno do Sol, sigam uma trajetória curva, da geodésica tridimensional no espaço, mas que representa uma “reta” no espaço curvo, mas caracteriza o fenômeno físico de uma trajetória curva, no espaço tridimensional. Para um

planeta, sua trajetória curva, seria como uma trajetória “reta” naquele espaço curvo, uma geodésica, ou seja, a trajetória de menor tempo entre dois pontos.

Isaac Newton no século XVII definiu esta trajetória curva dos planetas em torno do Sol, como uma força de “atração gravitacional” do Sol. Os planetas ficavam em sua órbita em movimento, “caindo lentamente em direção ao Sol”.

Einstein, interpretou esta trajetória curva dos planetas que giram em torno do Sol, não como Força de atração, mas como uma curvatura do espaço tridimensional que produziria uma geodésica do espaço curvo, distância mais curta entre dois pontos de um espaço, não do espaço plano Euclidiano, mas de um espaço encurvado Riemanniano. No caso do espaço tridimensional esta curvatura está em direção à um quarto eixo espacial que não o “enxergamos” ou experienciamos visualmente.

Uma analogia de duas dimensões e vista da terceira dimensão, o que se torna mais simples para nossa percepção, seria a um piloto de avião, que está indo pelo caminho mais curto entre duas cidades na superfície terrestre. Seria uma trajetória de menor tempo entre as cidades, portanto uma geodésica, e seria uma trajetória curva sobre a superfície esférica terrestre. A geodésica nesta superfície curva seria a trajetória que desse um arco do círculo máximo dado pelo raio Terrestre. Mantendo-se o movimento “reto” retorna-se ao mesmo ponto de onde se saiu.

Se o Universo é curvo e fechado, mas sem beiradas, se sairmos em “linha reta” de um ponto, retornaremos a este mesmo ponto.

Um outro exemplo bidimensional para se entender a ‘força gravitacional’ explicada por Einstein, no caso, em apenas uma única superfície, seria o de cama de borracha esticada. Se colocarmos nesta cama uma grande esfera de metal em seu centro, esta cama de borracha se encurva em torno dessa esfera. Se soltarmos uma pequena esfera na lateral da cama encurvada, a esferinha cai em direção à curvatura e se choca com a esferona. Considerando que não haja atrito entre a borracha e a pequena esfera, e a lançássemos com certa velocidade em uma direção perpendicular à direção radial, a pequena esfera entraria em órbita da grande esfera.

Ocorre algo semelhante durante algum tempo, se lançarmos uma pequena esfera lateralmente em uma pia de banheiro. Ela entra em órbita elíptica em torno do bocal de saída da água.

No espaço físico tridimensional, o Sol encurva o espaço físico tridimensional para uma quarta dimensão fracionária maior que três: 3,1; 3,2; 3, 3;..., e os planetas, cometas e raios de luz, seguem esta trajetória geodésica curva (“reta”) em torno dele, que na realidade é do espaço curvo, em forma de geodésica. Esta curvatura produziria um efeito físico análogo ao da atração gravitacional dos corpos, mas com diferenças essenciais e sutis de cálculo e de comportamentos, o que permite criar modelos para o Universo. O índice de encurvamento gravitacional, depende da velocidade do corpo.

Com esta representação e seus cálculos, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, conseguiu explicações para inúmeras observações físicas que não se conseguia explicar até então. O Universo pode ser visualizado de forma lógica, com suas curvaturas devido às distribuições de massa.

A compreensão da expansão do Universo para uma quarta dimensão pôde ser compreendida, a partir das experiências feitas por Edwin Hubble (1989-1953,64), de que todas as galáxias se afastam da nossa galáxia, com maior velocidade, à medida que estão mais distantes de nós. Isto aparentava que estávamos no centro do Universo. A única maneira de não estarmos no centro do Universo para essa observação é que o espaço do Universo se estica e portanto, se expande para uma quarta dimensão. Assim posto, de qualquer galáxia do Universo que observássemos o restante do Universo, aparentaria que esta galáxia está no Centro do Universo, ou seja, todas as outras galáxias estariam se afastando desta, com uma velocidade proporcional à sua distância, mostrando uma simetria para todo o Universo em geodésicas curvas. Para isso temos que entender de duas pra três dimensões, ou seja, uma bexiga (bidimensional) e na sua superfície

Definimos assim uma configuração de Reconstrução Tridimensional Encurvada Infinita ($R3_{\infty}$). A presença de um grande corpo de massa, encurva o espaço físico para uma quarta dimensão.

Se este encurvamento for provocado por uma massa extremamente grande, que nem a luz consegue escapar deste corpo, aí nós teríamos o que se denomina de buraco negro. A luz ao tentar sair de um corpo de massa imensa, seria atraída de volta, ou seja, o espaço está tão encurvado que nem mesmo a luz na sua grande velocidade não conseguiria escapar de lá. O buraco negro produz um espaço extremamente encurvado em suas imediações.

Esta condição de encurvamento que inspiraram as extrapolações para as outras dimensões menores que três existentes neste trabalho.

As matemáticas não euclidianas, se baseiam, devido a Riemann, na Geometria de curvaturas positivas, e, devido a Lobachevsky, em curvaturas negativas. (COURANT, ROBBINS, 2000).

4.18 - DIMENSÃO QUATRO (4D) OU ESTRUTURA QUADRIDIMENSIONAL

É caracterizado pelo hiperespaço ou espaço de 4 dimensões, representado por 4 eixos, um a 90° do outro, x, y, z, w, resultando em uma estrutura quadridimensional ortogonal e linearmente independente.

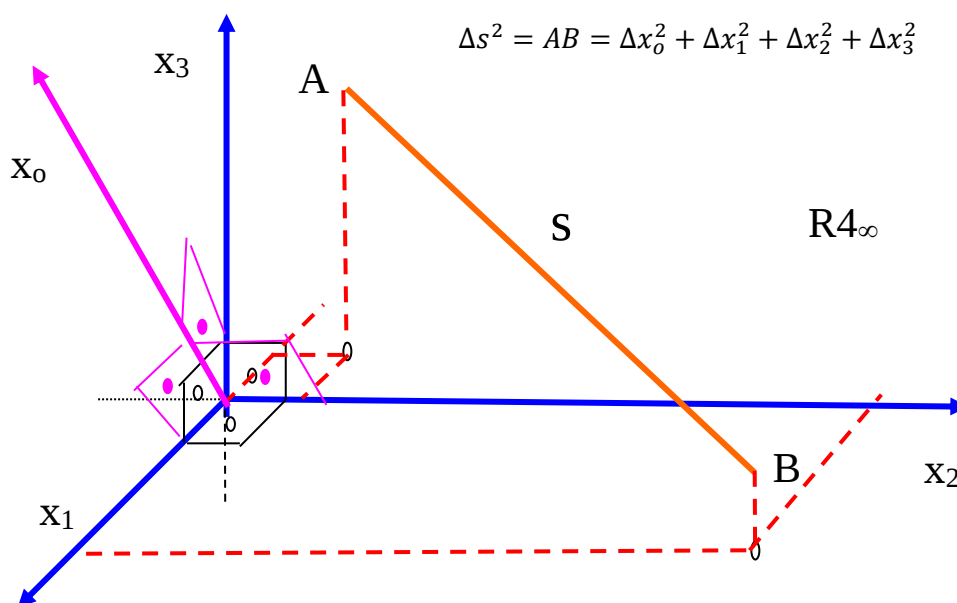
4.18.1 - Perspectiva Quadridimensional Espaço-Tempo

A teoria da relatividade, trabalha com 4 dimensões, sendo que a dimensão 4 pode ser dada pelo produto do tempo pela velocidade da luz: $w = jct$; sendo c = velocidade da luz no vácuo = 300.000 km/s = máxima velocidade na natureza; t = tempo; j = variável imaginária dos números complexos = $\sqrt{-1}$.

Costuma-se designar os quatro eixos da relatividade restrita por estas quatro coordenadas do espaço, $x_0 = jct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, tendo seu intervalo s , como invariante em todos os sistemas de referência inercial, dado pela **Figura 72**, o que denominaremos esta configuração de Reconstrução quadridimensional infinita (**R4 ∞**). Este intervalo ds ou s , acaba por ser um invariante quadridimensional em qualquer sistema referencial.

$$\Delta s^2 = \Delta x_0^2 + \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$$

Figura 72 - Espaço quadridimensional. Como não conseguimos enxergar para que lado aponta o quarto eixo o representamos como uma projeção na dimensão três (eixo x_0)



Fonte: Elaborado pelo autor

4.19 - HIPERCUBO ou TESSERACT ou OCTOCORO ou 4-CUBO ou 4-ORTOPLEX ou 4-OCTAEDRO

Chamado de Hipercubo ou Tesseract ou Octocoro, ou 8-cell ou C8 ou Octaedroid ou Quadricubo (4-cubo), iremos construir sua geometria em 4 dimensões, mantendo sempre os quatro tipos de Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas ou Reconstrução Instrumental. Para o hipercubo, seguimos procedimento análogo ao das construções anteriores.

4.19.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo

Nesta primeira configuração mereológica de infinitos cubos, incrementados de infinitésimo para a dimensão quatro e colocados paralelamente para sua reconstrução dimensional, mostra a **Figura 73**. Preocuparemos-nos com o modo de construção instrumental agora, para estudar propriedades e facilitar a visualização.

Firmamos aqui em encontrar mais Reconstruções dimensionais instrumentais, para que se possa ter sua visualização através de suas propriedades de construção. Em uma Reconstrução geométrica instrumental, tracemos de cada um dos oito vértices do cubo tridimensional, uma aresta em direção à quarta dimensão, que não a vemos, e unimos suas pontas do outro lado. O que resultaria do outro lado da união das pontas, outro cubo de

mesmo tamanho do primeiro em perspectiva totalmente na dimensão quatro. Esta seria, a Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo, ($R4_{1\boxplus}$), **Figura 73**.

O que representamos na **Figura 73**, ($R4_{1\boxplus}$), seria a projeção do Hipercubo, da dimensão quatro em perspectiva da dimensão três, mas representado na dimensão dois do plano do papel com suas respectivas perspectivas.

O Hipercubo ou Tesseract, da **Figura 73**, tem **oito cubos externos**, da qual de cada vértice do cubo na tridimensão, sai uma aresta em direção ao quarto eixo da quarta dimensão ($R4_{1\boxplus}$), na direção projetada “para dentro” do cubo, até perfazer um cubo final na outra dimensão do lado externo no fundo da dimensão quatro. Nesta representação é mais fácil de enxergar os oito cubos externos notando: os seis cubos laterais em vista, mais o cubo externo, o “maior” e o interno, o “menor”. Todos esses cubos têm tamanhos iguais na dimensão quatro ($R4_{1\boxplus}$), mas que nesta projeção ficariam assim em perspectiva.

O Hipercubo ou Tesseract, da **Figura 73**, têm portanto, oito cubos ou sólidos externos, $S_{4\boxplus} = 8$, de onde dá para se ver o cubo amarelo destacado, mais os outros seis cubos laterais, e mais o cubo grande e o cubo pequeno do outro lado na dimensão quatro, que forma o Hipercubo, $H_{4\boxplus} = 1$,

Formam **24 Faces** externas, $F_{4\boxplus} = 24$, que podem ser contadas na Figura, seis (6) do cubo amarelo, mais seis (6) do cubo oposto ao cubo amarelo, mais quatro (4) do cubo do fundo, mais quatro (4) do cubo de frente, mais duas (2) no cubo de cima, mais duas (2) no cubo de baixo.

Aparecem **32 Arestas**, $A_{4\boxplus} = 32$, lineares de comprimento l , bastando se contar as arestas que aparecem no desenho da **Figura 73**, 12 arestas do cubo “maior”, 12 arestas do cubo “menor” mais 8 ligações entre os cubos maior e o menor.

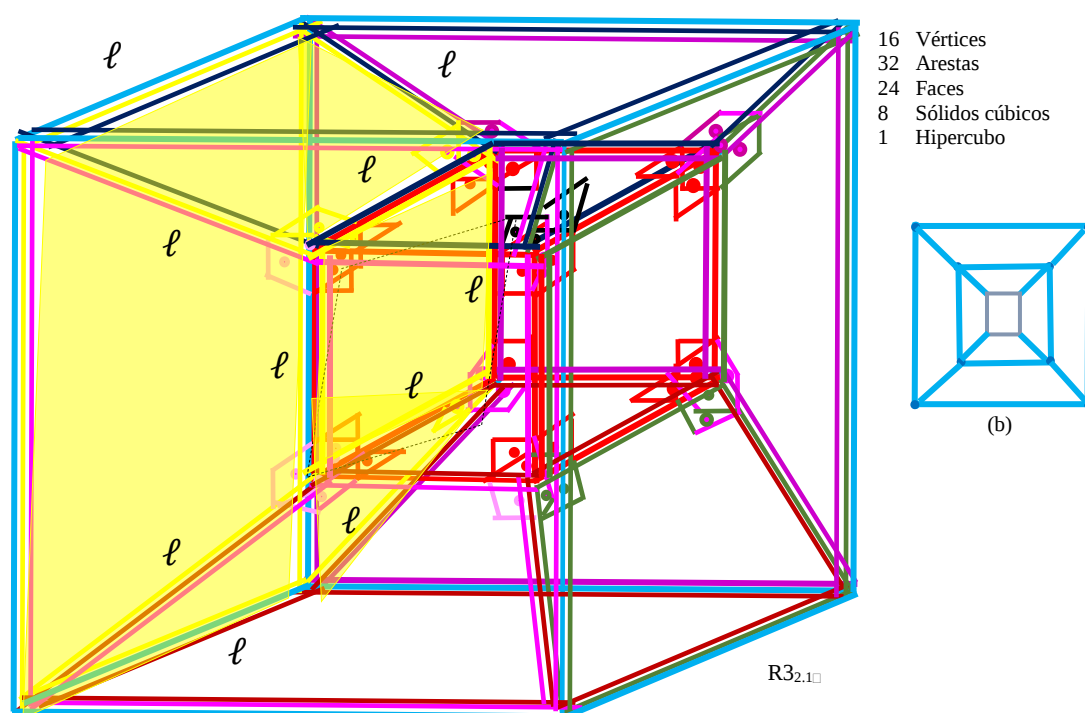
Pontuam nas mudanças de direção das arestas ortogonalmente, completando 16 vértices externos, $V_{4\boxplus} = 16$, bastando se contar o número de vértices, oito no cubo maior da dimensão três e oito no cubo menor do outro lado na dimensão quatro.

Veja as cores diferentes de cada um dos oito (8) cubos ou Sólidos externos, **azul** “maior” externo, **vermelho** “menor” interno, **cor de rosa** de frente, **violeta** ao fundo, **azul marinho** superior, **bordô** inferior da base, **cor terra** lateral direito, **amarelo** lateral esquerdo, mostrados na **Figura 73**.

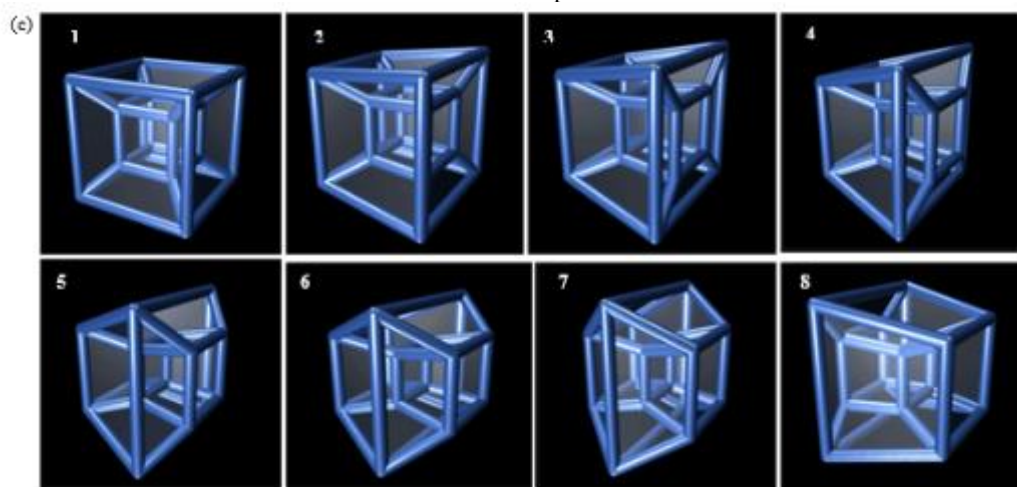
A Equação Geométrica das Dimensões, assim se mantém, e o resultado como esperado é a unidade.

$$V_{4\boxplus} - A_{4\boxplus} + F_{4\boxplus} - S_{4\boxplus} + H_{4\boxplus} = 16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$$

Figura 73 - (a) Hipercubo ou Tesseract em 4D e (b) Em movimento em posições diferente mostrando todos os cubos em um mesmo tamanho



Fonte: Elaborado pelo autor



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/55/8-cell-simple.gif>;
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Hipercubo>

A **Figura 73** ilustra: (a) Hipercubo ou Tesseract em 4D com desenho de aparência em 3D, mostrando a aparência de 1 Hipersólido, com 8 Sólidos Cúbicos externos (mostrado no detalhe um deles em amarelo), 24 Faces, 32 Arestas e 16 Vértices. Em (b) do hipercubo em 4D mas desenhado em 2D, Compreensão extensiva de que a face maior do lado de cá é de igual tamanho a face, na perspectiva, menor e externa do outro lado da dimensão três. Em (c) Oito posições diversas do Hipercubo, mostrando que todos os cubos externos são de igual tamanho, dependendo do ângulo e posição de visão.

4.19.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hiper cubo

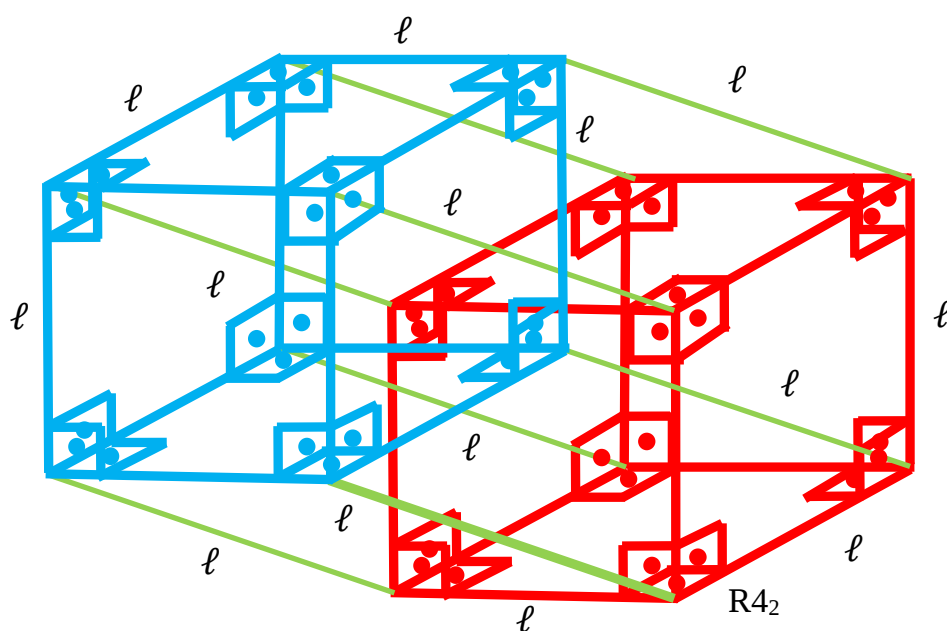
Em uma Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hiper cubo, consideremos que estamos representando o Tesseract, como uma figura na terceira dimensão, mas pensando na quarta dimensão, através da imaginação e dos conceitos analógicos associados, pensamos sua percepção em extrapolação para a quarta dimensão.

Nesta segunda configuração mereológica de infinitos cubos, incrementados de um infinitésimo dw para a dimensão quatro e colocados paralelamente para uma reconstrução dimensional, como na **Figura 74**.

Vamos enviar os eixos de cada um dos vértices do cubo da terceira dimensão em direção à quarta dimensão, em arestas paralelas entre si, mas para fora do cubo, que fica na terceira dimensão, até o vértice do cubo exterior que fica na quarta dimensão. Todos esses eixos vão em direção a quarta dimensão.

Esta seria, outra forma de obtenção do hiper cubo, que denominaremos de Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hiper cubo em que daria a real percepção de que o tamanho dos cubos do hiper cubo são todos iguais. Esta Reconstrução Quadridimensional dois ($E4_{2\boxplus}$) deveria ser visualizado de uma quarta dimensão, o que dificulta visualizá-lo apenas pensando na terceira ou na segunda dimensões.

Figura 74 - (a) Hiper cubo ou Tesseract onde de cada vértice saem em direção ao quarto eixo da quarta dimensão ($R4_{2\boxplus}$), até perfazer a dimensão de um lado. Nesta representação de cada vértice sai um lado para outra aresta todas em direção a uma quarta dimensão ($R4_{2\boxplus}$)



Fonte: Elaborado pelo autor

4.19.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional do Hiper cubo

Em uma Terceira Reconstrução Quadridimensional, por analogia de dimensões anteriores, podemos repetir para a quarta dimensão, infinitos cubos, continuamente repetidos na direção do quarto eixo, a 90° dos outros três, até perfazer um comprimento de linha ℓ .

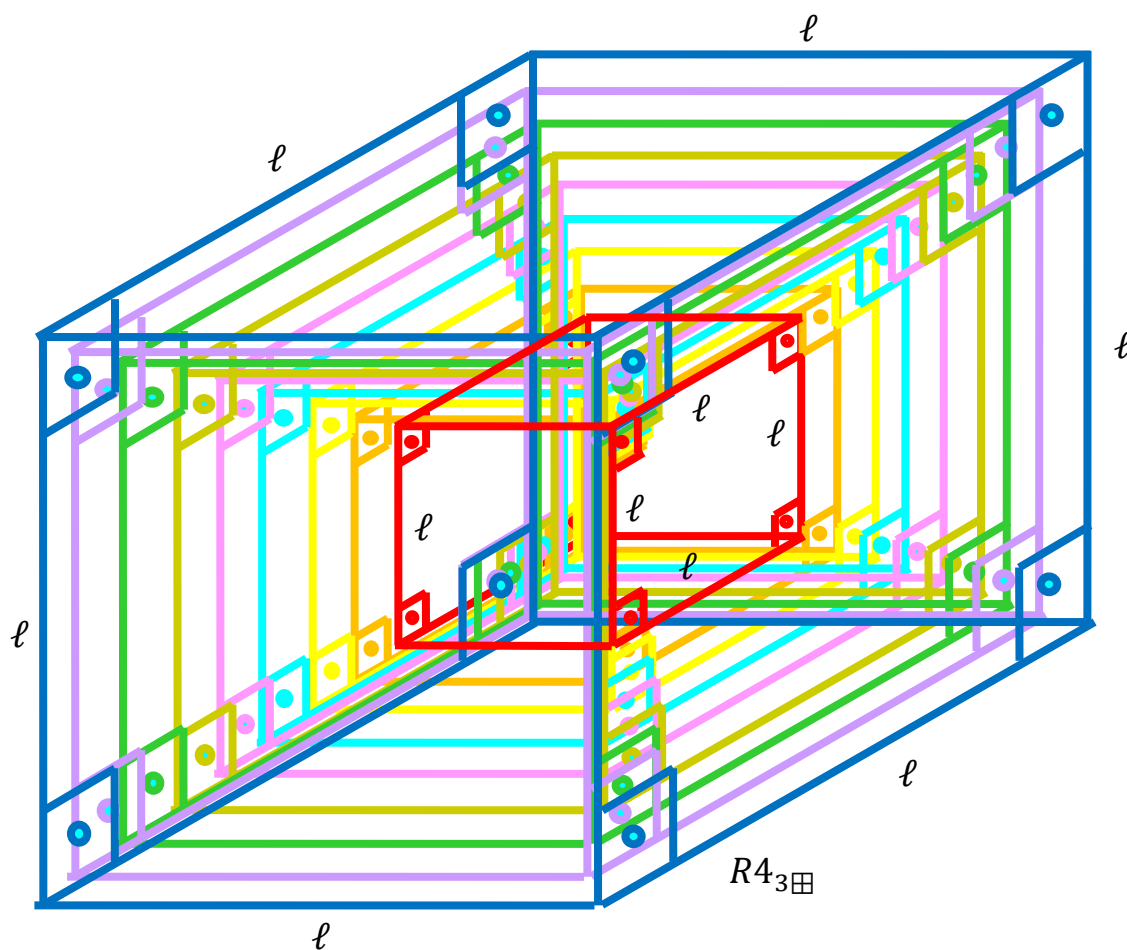
A analogia de que se pode fazer é como se estar dentro da bidimensionalidade e querer desenhar o cubo dentro da própria bidimensionalidade, com infinitos quadrados internos e paralelos indo para a terceira dimensão de que não se participa ou se “enxerga”.

Todas essas ligações dos vértices do cubo tridimensional, estariam ligados a outros cubos, na realidade infinitos cubos, que seriam iguais e paralelos e colocados lado a lado para a quarta dimensão até finalizar em um cubo final de fechamento do hiper cubo.

Apesar de o hiper cubo ter oito cubos tridimensionais externos, estes são apenas os cubos que finalizam externamente o hiper cubo à quarta dimensão, mas internamente existiriam infinitos cubos.

Nesta Reconfiguração, portanto, vamos ressaltar os infinitos cubos internos, como podemos ver por meio desta terceira Reconstrução Quadridimensional do hiper cubo ($R4_{3\boxplus}$). Os oito cubos que temos a capacidade de “enxergar” da terceira dimensão são cubos externos finalizados à estrutura de infinitos cubos, **Figura 75**. Por analogia, concluímos que na ida ao novo eixo quadridimensional, de dimensão ℓ , haveria infinitos cubos, se sobrepondo, da mesma forma que, analogamente, de duas para três dimensões se sucedem infinitas faces quadradas.

Figura 75 - Outra forma de representação do tesseract ($R4_{3\boxplus}$)



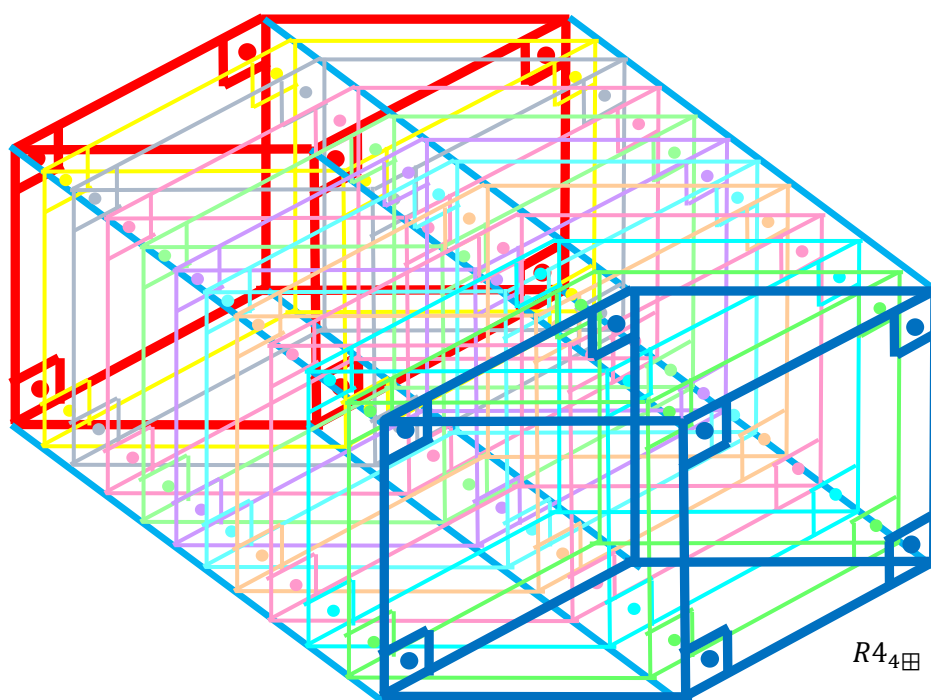
Fonte: Elaborado pelo autor

Na **Figura 75**, apresentamos outra forma de representação do tesseract ($R4_{3\boxplus}$) em que agora se mostra os infinitos volumes sólidos que aparecem ao longo da dimensão 4, em direção ao “interior” do outro cubo externo do hipercubo

4.19.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional do Hipercubo

Em uma quarta Reconstrução Quadridimensional do tesseract, $R4_{4\boxplus}$, mostra-se os infinitos volumes internos, se sucedendo no interior até o limite dos oito cubos externos.

Figura 76 - Outra forma de representação do tesseract $R1 - 4_{\text{H}}$ agora mostrando os infinitos sólidos volumétricos que aparecem ao longo da dimensão quatro, em uma direção para a quarta dimensão, para “fora” do cubo tridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Com suas arestas que saem do cubo na terceira dimensão, saem em direção à quarta dimensão para o exterior, saindo todas na mesma direção e não para o centro do cubo como na **Figura 75**, mas representadas em uma direção paralela e com os cubos infinitos no interior todos do mesmo tamanho, **Figura 76**.

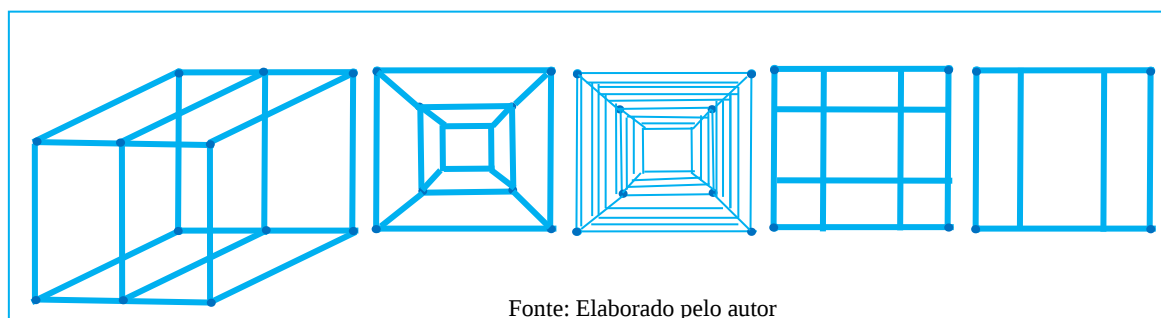
Cada uma dessas quatro Reconstruções Dimensionais na construção do hipercubo, pode ser proposto, pelo professor, aos estudantes, no intuito da obtenção da dimensão quatro, por meio da construção do hipercubo, a partir do volume cúbico da dimensão três.

4.19.5 - Resumo de Características do Hiper-cubo

Na matemática é permitido se trabalhar com vetores de 3 eixos curvos ou mesmo 4 eixos ortogonais curvos, através da álgebra tensorial. Não é simples “enxergar” dimensões acima de três, devido ao fato de que toda nossa experiência sensorial biológica é experimentalmente limitada a três dimensões espaciais. No entanto, a matemática permite trabalhar, algébrica e geometricamente, com quantas dimensões se desejar. Com o hábito de trabalhar-se com estas geometrias, a mente pode chegar a enxergar tais configurações

sob o aspecto da consciência que na sua virtualidade, a tudo é capaz de abranger. Muitas coisas apenas a consciência tem sua percepção através de um conjunto de propriedades e por isso, passa a conhecer aquele fenômeno. Na **Figura 77**, as projeções padrões do tesseract.

Figura 77 - Hipercubo ou Tesseract em projeção na dimensão dois



Fonte: Elaborado pelo autor

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim as características geométricas definidas e observáveis do Hipercubo construído, serão, **1 Hipersólido, $H_{4\Box} = 1$, 8 Sólidos, $S_{4\Box} = 8$, 24 Faces, $F_{4\Box} = 24$, 32 Arestas, $A_{4\Box} = 32$, 16 Vértices, $V_{4\Box} = 16$** . E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

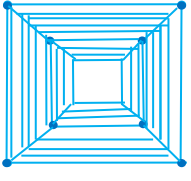
para a quadridimensionalidade do Hipercubo:

$$V_{4\Box} - A_{4\Box} + F_{4\Box} - S_{4\Box} + H_{4\Box} = 16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$$

A Expressão, a Equação Geométrica das Dimensões, aparece ao modo de uma equação “divina”, por resultar sempre sua tendência à unidade, ou seja, todas as variáveis geométricas das dimensões (VAFSH) de qualquer figura leva sempre à unidade, que mantém o mesmo resultado desde a dimensão zero, por simetria ou analogia, o uno, a unidade, da qual se demonstra, posteriormente, valer para qualquer dimensão inteira.

Faz-se o resumo do Hipercubo, por meio do **Quadro 12**.

Quadro 12 - Características do hipercubo na dimensão quatro

Dimensão quatro do Hipercubo	
Formato de representação: Hipercubo ou Tesseract	
Variável Dimensional: Hipersólido	
Intermediadas internamente por infinitas estruturas do cubo e com 8 cubos externos.	
Entre um cubo e o seu oposto externo existem infinitos cubos da dimensão anterior paralelos em direção ao quarto eixo: ladeados por 8 cubos externos.	
Equação Geométrica Dimensional: $V - A + F - S + H = 16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Usando os elementos de analogia, como já fizemos na dimensão zero para a dimensão um, da dimensão um para a dimensão dois, e da dimensão dois para a dimensão três, agora raciocinemos em termo da dimensão três para a dimensão quatro. Nota-se que os elementos da dimensão anterior, o volume de valor l^3 , se repete infinitamente na nova dimensão, a dimensão quatro, para formação do hipercubo, produzindo com essa infinitude de cubos, o novo conceito quadridimensional que é o conceito de hipersólido, ou hipercubo, cujo valor do hipervolume é l^4 .

Observa-se também que o elemento geométrico surgido na dimensão anterior, o **sólido** cúbico, que era único na dimensão anterior, 1(3D) figura agora na nova dimensão, a quarta, com oito sólidos exteriores, 8(4D), na presente dimensão quatro, além dos infinitos sólidos interiores. Para o CEGED1, ou Família Dimensional 1 temos os números abaixo.

- **VÉRTICES de 0D para 1D para 2D para 3D para 4D ... para DD :**
 $V_{0\circ} = 1 \rightarrow V_{1-} = 2 \rightarrow V_{2\square} = 4 \rightarrow V_{3\square} = 8 \rightarrow V_{4\boxplus} = 16 \rightarrow V_{5\boxtimes} = 32 \rightarrow \dots V_{D\boxtimes} = 2^D \dots$
- **ARESTAS de 1D para 2D para 3D para 4D ... para DD :**
 $A_{1-} = 1 \rightarrow A_{2\square} = 4 \rightarrow A_{3\square} = 12 \rightarrow A_{4\boxplus} = 32 \rightarrow A_{5\boxtimes} = 80 \rightarrow A_{6\boxtimes} = 192$
- **FACES de 2D para 3D para 4D ... para DD :**
 $F_{2\square} = 4 \rightarrow F_{3\square} = 6 \rightarrow F_{4\boxplus} = 24 \rightarrow F_{5\boxtimes} = 80 \rightarrow F_{6\boxtimes} = 240 \rightarrow F_{7\boxtimes} = 672 \dots$
- **SÓLIDOS de 3D para 4D ... para DD :**
 $S_{3\square} = 1 \rightarrow S_{4\boxplus} = 8 \rightarrow S_{5\boxtimes} = 40 \rightarrow S_{6\boxtimes} = 160 \rightarrow S_{7\boxtimes} = 560 \dots$
- **HIPERSÓLIDOS de 4D para 5D ... para DD :**
 $H_{4\boxplus} = 1 \rightarrow H_{5\boxtimes} = 10 \rightarrow H_{6\boxtimes} = 60 \rightarrow H_{7\boxtimes} = 280 \dots$

Em resumo no **Quadro 13**.

Quadro 13 - Tabela das Dimensões X Número das Variáveis Dimensionais

D $\times H$	$V=H_0$ 0H	$A=H_1$ 1H	F 2H	S 3H	H 4H	5H	6H	7H	$\sum_{i=0}^H H_i$	H_i	EG D_D
0D	1	0	0	0	0	0	0	0	3^0	$1, \infty$	1
1D	2	1	0	0	0	0	0	0	3^1	∞	1
2D	4	4	1	0	0	0	0	0	3^2	∞	1
3D	8	12	6	1	0	0	0	0	3^3	∞	1
4D	16	32	24	8	1	0	0	0	3^4	∞	1
5D	32	80	80	40	10	1	0	0	3^5	∞	1
6D	64	192	240	160	60	12	1	0	3^6	∞	1
7D	128	448	672	560	280	84	14	1	3^7	∞	1

Fonte: Elaborado pelo autor

São necessários infinitos elementos, Sólidos (cubos), ou Faces (quadrados), ou Segmentos de reta, ou Pontos, das dimensões anteriores, com incrementos infinitesimos, para a construção desse Hipersólido quadridimensional do Hipercubo.

Colocados esses infinitos elementos da formação do Hipersólido quadridimensional do Hipercubo, de volta na dimensão anterior, ela ficaria totalmente preenchida por eles. Ou seja, na estrutura de cada uma das peças da nova dimensão, cabe um universo dimensional completo da dimensão anterior (Universo Tridimensional).

Relacionada o número dessas variáveis dimensionais externas e finitas da nova figura dimensional formada, Vértice, Aresta e Face e Sólido e Hipersólido, elas obedecem à Equação Geométrica das Dimensões, levando-a à unidade:

$$V - A + F - S + H = 16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$$

Determinando as Equações de Recorrência para as variáveis dimensionais entre $D \times H$, para a Matriz da Família Dimensional 1, onde escrevemos até a 11ª dimensão, ou D-ésima dimensão, no **Quadro 22**, na determinação de qualquer variável dimensional $G_{D,H}$ em cada D-ésima dimensão D inteira, para cada variável dimensional H.

4.20 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA 1

As fórmulas recursivas a seguir não as encontrei em trabalhos, ou bibliografia, apesar de uma busca extensa. Se elas já existirem novamente as criei. Por meio de uma constante observação das tabelas, fui produzindo as relações e com o tempo fui conseguindo modificá-las até conseguir reduzi-las a uma fórmula geral para a Família Dimensional 1 ou CEGED 1. Lembrando que esta Família dimensional 1 são: ponto, segmento de reta, quadrado, cubo, hipercubo, hiper5-cubo, hiper6-cubo, hiper7-cubo, ...

4.20.1 - Primeira Fórmula Recursiva Matricial (FRM), válida para cada elemento da matriz da Família Dimensional 1

Esta é a fórmula recursiva para cada elemento da matriz da Família 1, conforme a dimensão **D** e o número de variáveis dimensionais **H** onde $H = 0 \Rightarrow H_0 = V$ (**Vértice**), $H = 1 \Rightarrow H_1 = A$ (**Aresta ou Edge (E)**), $H = 2 \Rightarrow H_2 = F$ (**Face**), $H = 3 \Rightarrow H_3 = S$ (**Sólido**), $H = 4 \Rightarrow H_4 = H$ (**Hipersólido**), $H = 5 \Rightarrow H_5$ (**Hiper5-sólidos**), $H = 6 \Rightarrow H_6$ (**Hiper6-sólidos**),...

Definição de cada termo $G_{D,H}$ da matriz dimensional da família 1.

$$G_{D,H>D} = 0$$

$$G_{D,0 \leq H \leq D} = \frac{D! \cdot 2^{D-H}}{H! (D-H)!} = C_{D,H} \cdot 2^{D-H} = \binom{D}{H} \cdot 2^{D-H}$$

sendo

D = Dimensão D ligada às Variáveis Geométricas Dimensionais $0 \leq H \leq D$

H = Variável Geométrica Dimensional = $0(V), 1(A), 2(F), 3(S), 4(H), 5, 6, \dots, D$.

$H = 0$ (V ou H_0 ou Vértices), $H = 1$ (A ou H_1 ou Arestas (Edges)),

$H = 2$ (F ou H_2 ou Faces), $H = 3$ (S ou H_3 ou Sólidos),

$H = 4$ (H ou H_4 ou Hipersólidos), $H = 5$ (H_5 ou Hiper – 5 – sólidos) ...

$G_{D,H}$ = Elemento da Matriz Dimensional que relaciona na dimensão D ,

o número de elementos da variável H , da figura geométrica ($0 \leq H \leq D$)

$C_{D,H}$ = Combinação de D elementos, H à H , ou número binomial $\binom{D}{H}$

$\binom{D}{H}$ = número binomial de dimensão D e variável geométrica dimensional H

4.20.2 - Segunda Fórmula Recursiva (Universal) das Dimensões, a Soma alternada das Variáveis Geométricas das Dimensões (VGD) ou Equação Geométrica das Dimensões (EGD) ou Equação Canônica das Dimensões

A Equação Geométrica das Dimensões (EGD), ou Equação Canônica das Dimensões (que levam à unidade) composta pela **soma e subtração alternada** de todas as variáveis dimensionais (H_i) **soma** dos elementos de linha H par, e **subtração** dos elementos de linha H ímpar ($G_{\text{ímpar}}$). Pelo fato dessa equação resultar sempre na unidade, e a unidade ser uma característica divina, nos referimos a esta equação também como uma Equação de característica canônica.

$$EGD_D = G_{D,0} - G_{D,1} + G_{D,2} - G_{D,3} \dots \pm G_{D,H_{par}(+) \text{ ou } impar(-) \leq D} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H G_{D,H} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \frac{(-1)^H D! 2^{D-H}}{H! (D-H)!} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H \binom{D}{H} 2^{D-H} = 1$$

4.20.3 - Terceira Fórmula Recursiva das Dimensões, ou Soma dos Elementos de Linha da Matriz ou Equação do Expoente Dimensional da Trindade

A Terceira Fórmula Recursiva Horizontal das Dimensões, ou Soma dos Elementos de Linha da Matriz da Família Dimensional 1, ou Equação do Expoente Dimensional da Trindade é composta pela soma dimensional (S_D) de todos os elementos de linha ou variáveis dimensionais H_H geométricas, para uma dada dimensão D .

Quadro 14 - Matriz de Elementos das Variáveis Geométricas Dimensionais de Figuras Polédricas e Convexas da Família Dimensional 1 da dimensão zero à dimensão onze, das Fórmulas Recursivas

$G_{D,H}$	H=0 $H_0=V$ Vértice	H=1 $H_1=A$ Aresta	H=2 $H_2=F$ Face	H=3 $H_3=S$ Sólido	H=4 $H_4=H$ Hipersólido	H=5 H_5 Hiper5sólido	H=6 H_6 Hiper6sólido	H=7 H_7	H=8 H_8	H=9 H_9	H=10 H_{10}	H=11 H_{11}	$\sum_{H=0}^D H$ = 3^D	EQ D_0
D=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3^0	1
D=1	2 =1x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3^1	1
D=2	4 =1x2 ²	4 =2x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3^2	1
D=3	8 =1x2 ³	12 =3x2 ²	6 =3x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	0	0	0	3^3	1
D=4	16 =1x2 ⁴	32 =4x2 ³	24 =6x2 ²	8 =4x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	0	0	3^4	1
D=5	32 =1x2 ⁵	80 =5x2 ⁴	80 =10x2 ³	40 =10x2 ²	10 =5x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	0	3^5	1
D=6	64 =1x2 ⁶	192 =6x2 ⁵	240 =15x2 ⁴	160 =20x2 ³	60 =15x2 ²	12 =6x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	0	3^6	1
D=7	128 =1x2 ⁷	448 =7x2 ⁶	672 =21x2 ⁵	560 =35x2 ⁴	280 =35x2 ³	84 =21x2 ²	14 =7x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	0	3^7	1
D=8	256 =1x2 ⁸	1024 =8x2 ⁷	1792 =28x2 ⁶	1792 =56x2 ⁵	1120 =70x2 ⁴	448 =56x2 ³	112 =28x2 ²	16 =8x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	0	3^8	1
D=9	512 =1x2 ⁹	2304 =9x2 ⁸	4608 =36x2 ⁷	5376 =84x2 ⁶	4032 =126x2 ⁵	2016 =126x2 ⁴	672 =84x2 ³	144 =36x2 ²	18 =9x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	0	3^9	1
D=10	1024 =1x2 ¹⁰	5120 =10x2 ⁹	11520 =45x2 ⁸	15360 =120x2 ⁷	13440 =210x2 ⁶	8064 =252x2 ⁵	3360 =210x2 ⁴	960 =120x2 ³	180 =45x2 ²	20 =10x2 ¹	1 =1x2 ⁰	0	3^{10}	1
D=11	2048 =1x2 ¹¹	11264 =11x2 ¹⁰	28160 =55x2 ⁹	42240 =165x2 ⁸	42240 =330x2 ⁷	29568 =462x2 ⁶	14784 =462x2 ⁵	5280 =330x2 ⁴	1320 =165x2 ³	220 =55x2 ²	22 =11x2 ¹	1 =1x2 ⁰	3^{11}	1
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-		

E por resultar essa equação sempre em múltiplos de três, para cada dimensão, denominamos esta equação de Equação da Trindade Dimensional. Ver **Quadro 14**.

$$S_D = G_{D,H_0} + G_{D,H_1} + G_{D,H_2} + \cdots + G_{D,H_D} = 3^D$$

$$S_D = \sum_{H=0}^D G_{D,H} = 3^D$$

$$S_D = \sum_{H=0}^D \frac{D!}{H! (D-H)!} 2^{D-H} = 3^D$$

$$S_D = \sum_{H=0}^D \binom{D}{H} 2^{D-H} = 3^D$$

Da mesma forma que encontramos estas fórmulas recursivas, podem existir outras fórmulas recursivas, que relacionam esses elementos dimensionais da matriz, através de expressões diferentes. Este efeito sempre enriquece a teoria e traz novas formas de se visualizar a geometria. Este é o mecanismo em que a Matemática se faz, uma das mais aplicativas ciências da humanidade. Mecanismo que fará também das outras ciências cada vez mais aplicativas ao longo do tempo.

4.21 - DEMONSTRAÇÃO DE QUE AS EXPRESSÕES MATEMÁTICAS DA FAMÍLIA 1 VALE PARA QUALQUER DIMENSÃO

Estudamos durante vários meses de como fazer a demonstração das expressões deduzidas, e de como elas seriam válidas para qualquer dimensão D. Durante muito tempo, tentamos fazê-lo pelo Método da Indução ou pelo Método do Absurdo. Faltava alguma técnica, ou maneira de formalização, ou habilidade especial de visão, por não estarmos conseguindo. Ao esmiuçar todos os detalhes de visão, nos deparamos com os números binomiais e como a Geometria das Dimensões obedeciam às sequências binomiais a Série Binomial de Newton que já estava pronta o que nos levou a utilizá-la aqui, para demonstração de que as expressões matemáticas das famílias 1 e 2 são válidas até a D-ésima dimensão inteira qualquer.

4.21.1 - Série Binomial de Newton e a demonstração da validade das Variáveis Dimensionais para as Famílias 1 e 2 até a D-ésima Dimensão inteira qualquer

Vamos considerar as propriedades da **Série Binomial de Newton**, pois as Equações dimensionais caem bem nesta série, que irá nós auxiliar na demonstração das equações dimensionais, de que sua validade vai até a D-ésima Dimensão inteira e qualquer, como faremos a seguir. Vejamos as características da Serie Binomial de Newton.

Serie binomial de Newton. O desenvolvimento de produtos notáveis tem como coeficientes os números binomiais do triângulo de Pascal.

$$(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 \cdot b^0$$

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} a^0 \cdot b^1$$

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^0 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = \binom{3}{0} a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 \cdot b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

...

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

Portanto, temos que as séries binomiais, são dadas pelas expressões abaixo.

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p = (a + b)^n$$

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot (-b)^p = (a - b)^n$$

4.21.2 - Demonstração de que a Equação Geométrica das Dimensões da Família Dimensional 1, resulta sempre igual à (“divina”) canônica unidade, e é válida para qualquer dimensão inteira D

Quadro 15 - Elementos dos termos das variáveis geométricas da Família Dimensional 1 para dimensões crescentes sua relação com os números binomiais

D/H	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1.2 ⁰												
1	1.2 ¹	1.2 ⁰											
2	1.2 ²	2.2 ¹	1.2 ⁰										
3	1.2 ³	3.2 ²	3.2 ¹	1.2 ⁰									
4	1.2 ⁴	4.2 ³	6.2 ²	4.2 ¹	1.2 ⁰								
5	1.2 ⁵	5.2 ⁴	10.2 ³	10.2 ²	5.2 ¹	1.2 ⁰							
6	1.2 ⁶	6.2 ⁵	15.2 ⁴	20.2 ³	15.2 ²	6.2 ¹	1.2 ⁰						
7	1.2 ⁷	7.2 ⁶	21.2 ⁵	35.2 ⁴	35.2 ³	21.2 ²	7.2 ¹	1.2 ⁰					
8	1.2 ⁸	8.2 ⁷	28.2 ⁶	56.2 ⁵	70.2 ⁴	56.2 ³	28.2 ²	8.2 ¹	1.2 ⁰				
9	1.2 ⁹	9.2 ⁸	36.2 ⁷	84.2 ⁶	126.2 ⁵	126.2 ⁴	84.2 ³	36.2 ²	9.2 ¹	1.2 ⁰			
10	1.2 ¹⁰	10.2 ⁹	45.2 ⁸	120.2 ⁷	210.2 ⁶	252.2 ⁵	210.2 ⁴	120.2 ³	45.2 ²	10.2 ¹	1.2 ⁰		
11	1.2 ¹¹	11.2 ¹⁰	55.2 ⁹	165.2 ⁸	330.2 ⁷	462.2 ⁶	462.2 ⁵	330.2 ⁴	165.2 ³	55.2 ²	11.2 ¹	1.2 ⁰	
12	1.2 ¹²	12.2 ¹¹	66.2 ¹⁰	220.2 ⁹	495.2 ⁸	792.2 ⁷	924.2 ⁶	792.2 ⁵	495.2 ⁴	220.2 ³	66.2 ²	12.2 ¹	1.2 ⁰
	2 ¹² =4096	2 ¹¹ =2048	2 ¹⁰ =1024	2 ⁹ =504	2 ⁸ =256	2 ⁷ =128	2 ⁶ =64	2 ⁵ =32	2 ⁴ =16	2 ³ =8	2 ² =4	2 ¹ =2	2 ⁰ =1
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+

Fonte: Elaborado pelo autor

Vale para a Família Dimensional 1 ou Família quadrado-cubo, para todas as dimensões, os números abaixo dados, dos Elementos Geométricos das Dimensões, para cada uma das infinitas dimensões, sendo que eles obedecem às expressões deduzidas abaixo, valendo todas as relações deduzidas.

Demonstraremos, pois, aqui que as expressões deduzidas, valem para qualquer dimensão inteira, $D = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$, qualquer que seja ela.

Consideremos a Equação Geométrica das Dimensões para a Família Dimensional 1.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \frac{(-1)^H D! 2^{D-H}}{H! (D-H)!} = 1$$

Colocando esta expressão como função dos números binomiais.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H \binom{D}{H} 2^{D-H} = 1$$

Utilizando a Série binomial de Newton, temos que

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot (-b)^p = (a - b)^n$$

Fazendo na Série binomial de Newton, $n = D$, $p = H$, $a = 2$, $b = 1$, teremos a expressão demonstrativa abaixo.

$$\sum_{H=0}^D \binom{D}{H} 2^{D-H} \cdot (-1)^H = (2 - 1)^D = 1$$

Assim, como queríamos demonstrar a expressão da Equação Geométrica das Dimensões para a Família Dimensional 2 é sempre igual à (“divina”) unidade para qualquer Dimensão D inteira.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H \binom{D}{H} 2^{D-H} = 1$$

c.q.d.

4.21.3 - Demonstração de que a Equação Soma da Linha da Matriz dos Elementos Geométricos das Dimensões da Família Dimensional 1, resulta na solução do expoente da D-ésima Trindade

A Equação Soma dos Elementos das variáveis geométricas, ou Equação da Trindade Dimensional, para a Família Dimensional 1 é dada abaixo, sempre igual à trindade elevada à D-ésima potência, dependendo da dimensão. E para demonstrarmos que ela vale para qualquer dimensão procederemos relacionando-a com a Série do binômio de Newton.

$$ETD_D = \sum_{H=0}^D \frac{D! 2^{D-H}}{H! (D-H)!} = 3^D$$

Colocando os fatoriais com a notação dos números binomiais.

$$ETD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D}{H} 2^{D-H} = 3^D$$

Utilizando a Série binomial de Newton, temos que

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p = (a + b)^n$$

Fazendo na Série binomial de Newton, $n = D$, $p = H$, $a = 2$, $b = 1$, teremos a expressão demonstrativa abaixo.

$$\sum_{H=0}^D \binom{D}{H} \cdot 2^{D-H} 1^H = (2 + 1)^D = 3^D \quad \text{c.q.d.}$$

E como queríamos demonstrar (c.q.d.) a expressão da Equação das múltiplas Trindades que resulta da Soma dos Elementos Geométrico das Dimensões para a Família Dimensional 1 é sempre igual ao três elevado à dimensão D correspondente, expressão válida para qualquer dimensão inteira.

Estas expressões são válidas para todas as dimensões das figuras geométricas da Família Dimensional 1, como queríamos demonstrar, $D = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$, dimensão como um número inteiro qualquer.

Passamos agora ao desenvolvimento da Família 2, do triângulo-tetraedro, até a quadridimensão geometricamente e até *ad infinitum*, à D-ésima dimensão, algebricamente.

4.22 - FAMÍLIA 2 OU FAMÍLIA TRIÂNGULO-TETRAEDRO

4.22.1 - D=2 - Triângulo Equilátero - Construção Da Estrutura Bidimensional Do Triângulo Equilátero

Na estrutura finita de lado ℓ , da dimensão um, o segmento de reta pode também passar para a nova dimensão, a dimensão dois, na construção de um triângulo. No que segue, apresentamos o processo de reconstrução de triângulo.

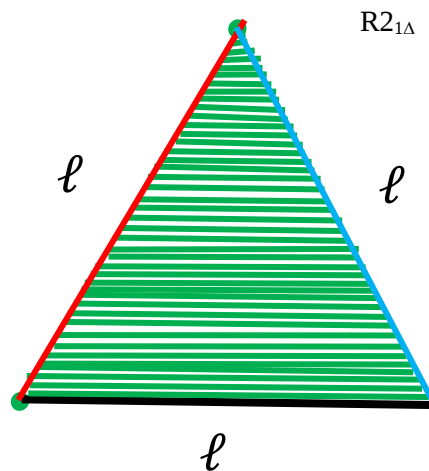
4.22.2 - Reconstrução Um para Representação Semiótica Bidimensional do Triângulo

Façamos, então, a primeira Reconstrução Bidimensional do Triângulo Equilátero, (R_{21A}).

Partindo de uma reconfiguração mereológica de uma reta colocada na horizontal, estrutura infinita de pontos até o infinito dos dois lados, cortamos esta reta em pedaços de tamanhos diferentes, ou seja, realizamos uma Reconfiguração Mereológica Heurística,

desde o segmento de comprimento inicial ℓ máximo até o comprimento tendendo a zero. Fazemos esses comprimentos de segmento de reta estarem todos a na horizontal, e a cada um deles dar-se-á um incremento dw , na direção perpendicular (vertical) às retas. Colocando-as com valores decrescentes de ordem de tamanho até que elas zerem seu valor produzindo a reconstrução dimensional da face do triângulo mostrada na **Figura 78**. Esta Reconstrução mostrado na **Figura 78**, nesta reconfiguração mereológica de segmentos de retas de tamanhos variados, indo de $0 \leq L \leq \ell$.

Figura 78 - Dimensão dois (2D), da construção do triângulo equilátero em uma primeira Reconstrução Bidimensional a partir da dimensão um



Fonte: Elaborado pelo autor

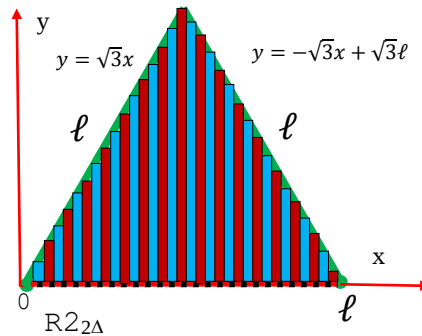
4.22.3 - Reconstrução Dois Bidimensional do Triângulo

Em uma segunda Reconstrução bidimensional por meio de Reconfigurações Mereológicas ($\mathbf{R2}_{2\Delta}$), partindo da reta unidimensional na horizontal, repartimos este segmento de reta horizontal, em infinitos segmentos de reta, de comprimentos infinitesimais $d\ell = dx$. E elevando a altura destes segmentos, em retângulos de alturas distintas, que partem da altura zero, no primeiro segmento do vértice da esquerda, os outros segmentos seguintes irão aumentando linearmente sua altura, proporcionalmente a uma reta diagonal crescente que faz um ângulo de 60° com a horizontal ($y = \sqrt{3}x$). Estas alturas irão se ampliando, até o meio do segmento, $x = \frac{\ell}{2}$ atingindo a altura $h = \sqrt{3}\ell/2$. A partir daí, da metade do segmento da base em diante, os retângulo começam a decrescer de tamanho de forma simétrica à realização anterior, em um decrescimento linear,

acompanhando a reta diagonal decrescente que faz 60° com a horizontal até zerar sua altura novamente ($y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}\ell$), como mostra a **Figura 79**.

$$A_{Face\ do\ triângulo\ equil.} = \int dA = \int dx \cdot dy = 2 \int_0^{\ell/2} dx \cdot \int_0^{\sqrt{3}x} dy = \frac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$$

Figura 79 - Dimensão dois (2D), na construção do triângulo equilátero em uma segunda Reconstrução Bidimensional por Reconfiguração Mereológica em retângulos infinitesimais

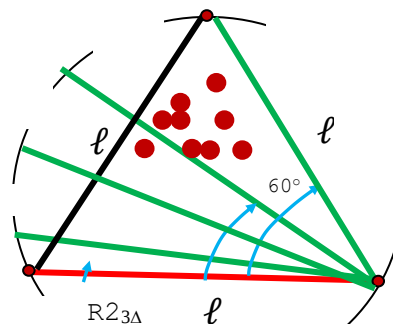


Fonte: Elaborado pelo autor

4.22.4 - Reconstrução Três Bidimensional do Triângulo

Veremos agora uma terceira construção ou terceira Reconstrução bidimensional (**R2_{3\Delta}**) do triângulo equilátero por Reconstrução Instrumental. A partir de um segmento de reta, unidimensional, horizontal de comprimento ℓ , vamos girar um outro segmento de reta idêntico e coincidente com este, em torno de um dos vértices fixo, até que perfaça um ângulo de 60° . Nesta posição interligamos os dois vértices afastados, e o preenchemos, formando a figura plana da face do triângulo equilátero, como mostra a **Figura 80**.

Figura 80 - Dimensão dois (2D), Reconstrução Instrumental, onde preenchemos a face com pontos ou retas.

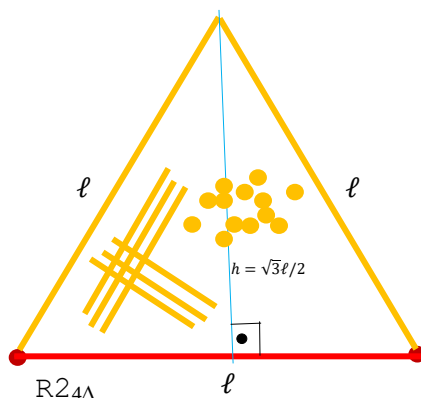


Fonte: Elaborado pelo autor

4.22.5 - Reconstrução Quatro Bidimensional do Triângulo

Em uma quarta Reconstrução Bidimensional do triângulo equilátero (**R2_{4Δ}**), também instrumental, traçamos a partir do ponto médio do segmento de reta unidimensional horizontal de comprimento ℓ da base do triângulo, uma reta perpendicular ao segmento, de uma altura, $h = \ell \operatorname{sen}60 = \frac{\sqrt{3}\ell}{2}$, interligam-se os dois vértices do segmento horizontal com o topo desta altura h . Preenche-se a parte interna dos segmentos com infinitas retas horizontais, ou verticais ou diagonais, ou mesmo infinitos pontos. Esta reconstrução se caracteriza por ser instrumental, como nos denomina Duval, dada pela **Figura 81**.

Figura 81 - Dimensão dois (2D), da construção do triângulo equilátero em uma quarta Reconstrução Bidimensional Instrumental a partir da dimensão um e zero (1D e 0D)



Fonte: Elaborado pelo autor

Cada uma destas Reconstruções Dimensionais, por meio de Reconfigurações Mereológicas Heurísticas de infinitas formas das dimensões anteriores, para a formação do triângulo equilátero, pode ser proposta pelo professor, aos estudantes, mediante questionamentos orientados, de acordo com os princípios da TSD (Brousseau, G., 2002).

4.22.6 - Resumo das Características do Triângulo

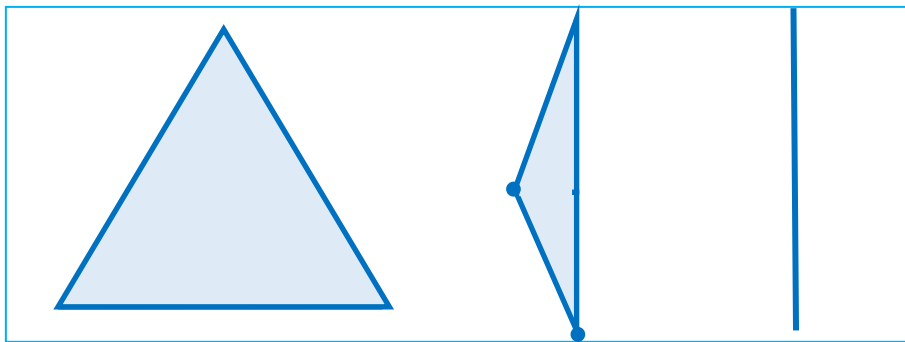
A Equação Geométrica das Dimensões (EGD), para a segunda dimensão na formação do triângulo, ou do CEGED2, ou família 2, ou os H-triângulos, também se iguala a unidade, o que a torna, válida para todas as figuras geométricas fechadas desta dimensão como veremos, seja quantos lados tiver.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES
para a bidimensionalidade do triângulo:

$$V_{2\Delta} - A_{2\Delta} + F_{2\Delta} = 3 - 3 + 1 = 1$$

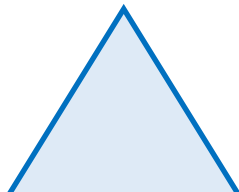
A representação do triângulo em várias formas de vista, geométrica, desde a terceira dimensão, aqui representado, depende do ângulo de visão deste triângulo, e seriam dados pelas representações da **Figura 82**.

Figura 82 - Vistas do triângulo em diferentes posições desde a 3D



Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 16 - Características da dimensão dois do triângulo equilátero

Dimensão dois do triângulo equilátero		
Formato de representação:	Triângulo equilátero	
Nova Variável dimensional:	a Face triangular	
Variáveis Dimensionais Externas do triângulo:	3 Arestas e 3 Vértices	
Reconfiguração Mereológica:	Infinitas Arestas de diferentes tamanhos.	
Equação Geométrica das Dimensões:	$V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se observar estas características, como nos mostram os **Quadros 16 e 17**.

Quadro 17 - Número de elementos geométricos da dimensão zero à dimensão dois para o triângulo

Dim.X Var	Vértice V	Aresta A	Face F	Elementos interiores da dimensão anterior	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	1, ∞	$V - A + F = 1$
1D	2	1	0	∞	$V - A + F = 1$
2D	3	3	1	∞	$V - A + F = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

São necessários infinitos elementos dos segmentos de reta e de pontos, das dimensões anteriores, com incrementos infinitésimos, para a construção agora dessa face bidimensional do triângulo.

Colocados esses infinitos elementos da formação do triângulo bidimensional, nas dimensões anteriores, elas ficariam totalmente preenchidas por eles. Ou seja, a estrutura de cada uma das peças da nova dimensão, cabe em um universo dimensional completo da dimensão anterior, como está relacionado no Princípio Analógico Dimensional 4.

4.23 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DO TETRAEDRO

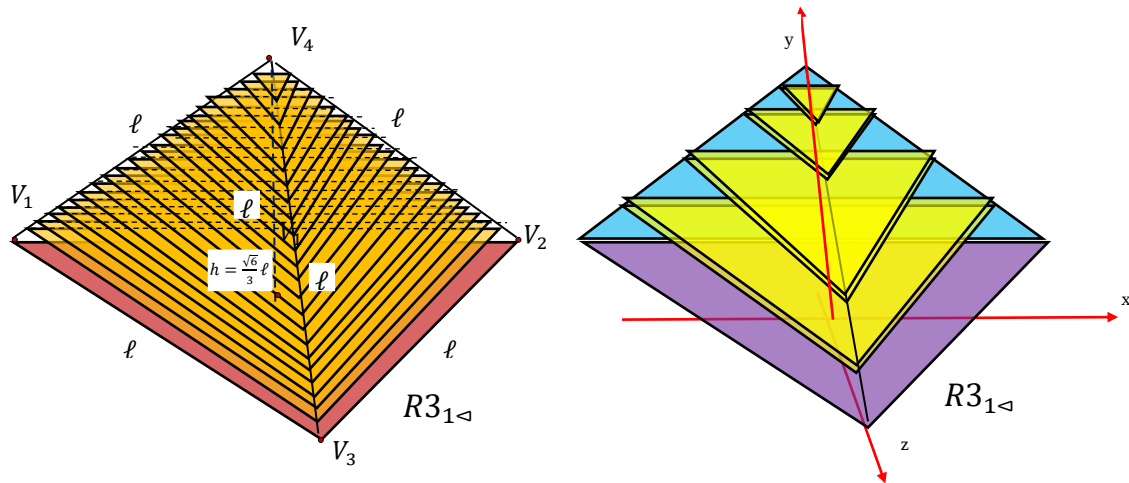
Vamos agora passar para uma nova construção dentro do CEGED2, ou Família 2 de Figuras Geométricas, ou Família H-triângulo, na construção do tetraedro em três dimensões.

Vamos apresentar como antes, também quatro Reconstruções Dimensionais, Instrumentais ou por meio de Reconfigurações Mereológicas.

4.23.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro

Em uma primeira Reconstrução tridimensional de um tetraedro, ($R3_{1\triangleleft}$), por meio de Reconfigurações justapostas de triângulos equiláteros bidimensionais, podemos produzir a construção do tetraedro a partir do triângulo equilátero de lado ℓ , da dimensão dois, face triangular. Assim o triângulo equilátero de lado ℓ , com sua face triangular, reverbera em outras faces triangulares, em uma direção perpendicular a esta face, em repetição de infinitas faces triangulares paralelas, mas linearmente diminuindo seus lados, até que atinja a configuração de um ponto, ou seja, área nula, com seus Vértices iniciais, após percorrer arestas de comprimento ℓ , lateralmente, se encontram neste último vértice de forma simétrica. A altura ou distância da face até este vértice superior seria $h = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$. A partir de sua base até a Aresta, faz-se um ângulo de $54,73561^\circ$ com o plano do triângulo, como mostra a **Figura 83**.

Figura 83 - Primeira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro com triângulos paralelos reverberados em direção ao terceiro eixo. Em dois pontos de vista, redução dos lados e redução da área



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim obtemos as outras três Arestas, além das três do triângulo bidimensional da base (6A) para formar um Sólido (1S), o Tetraedro. Partindo de cada um dos três vértices do triângulo equilátero da base, em duas dimensões, e indo em direção ao quarto vértice do Tetraedro (4ºV) em direção à dimensão três.

Assim, em um primeiro passo partimos da reconfiguração heurística mereológica de recortar todo o plano bidimensional infinito, em triângulos equiláteros, cujas faces tenham seus lados desde ℓ até 0.

Em um segundo passo, incrementamos esses infinitos triângulos equiláteros de um infinitésimo dz na direção perpendicular à sua face.

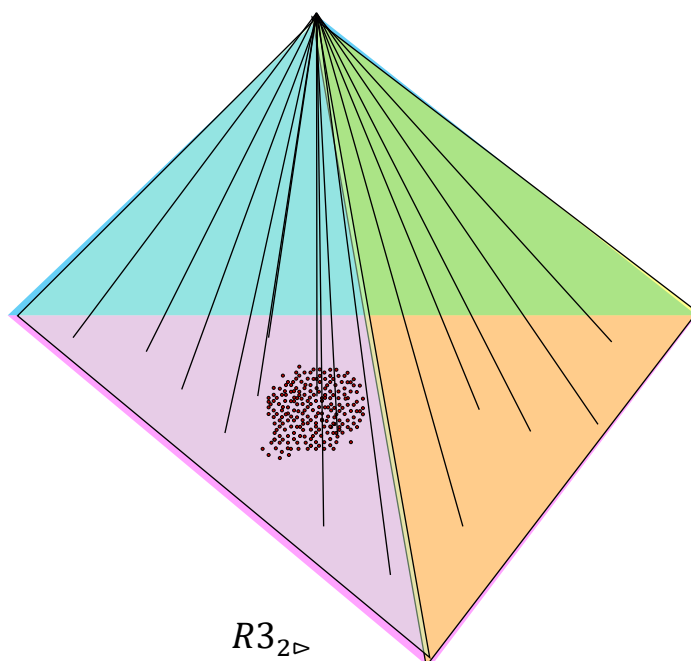
Em um terceiro passo, sequenciamos esses infinitos triângulos em ordem decrescente de tamanho, até perfazer a altura, $h = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$, ou a sua Aresta de subida ser igual a ℓ , em uma Reconstrução Dimensional do Tetraedro, como mostra a **Figura 83**.

Portanto em outro tipo de argumentação da descrição semiótica da Primeira Reconstrução Tridimensional ($R31 \triangleright$) do Tetraedro, de acordo com a **Figura 83**, parte-se de um triângulo de área maior $A = \frac{\ell h}{2} = \frac{\ell \frac{\sqrt{6}}{3}\ell}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ell^2$, para áreas decrescentes de triângulos equiláteros paralelos, até uma área nula, a uma distância perpendicular ao primeiro triângulo de área maior, de valor $d = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$.

4.23.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional do Tetraedro

Em uma Segunda Reconstrução Tridimensional do tetraedro, ($R3_{2\triangleleft}$), de forma instrumental, podemos produzir a sua reconstrução, partindo do triângulo equilátero de lado ℓ , da base, da dimensão dois, face triangular. Se construirmos a partir de seu centro, a haste de sua altura $h = \frac{\sqrt{6}}{3}\ell$, traçamos de cada ponto do perímetro do triângulo da base, linhas incrementadas de infinitésimo, que ligam o perímetro ao topo da altura. Se construirá mais três faces e três arestas laterais do restante do Sólido. Preenche-se o seu interior com faces, linhas e /ou pontos reverberados, ou seja, com incrementos infinitésimos de volume, como mostra a **Figura 84**.

Figura 84 - Dimensão três (3D), da construção do tetraedro a partir da dimensão dois (2D), em uma Segunda Reconstrução Tridimensional



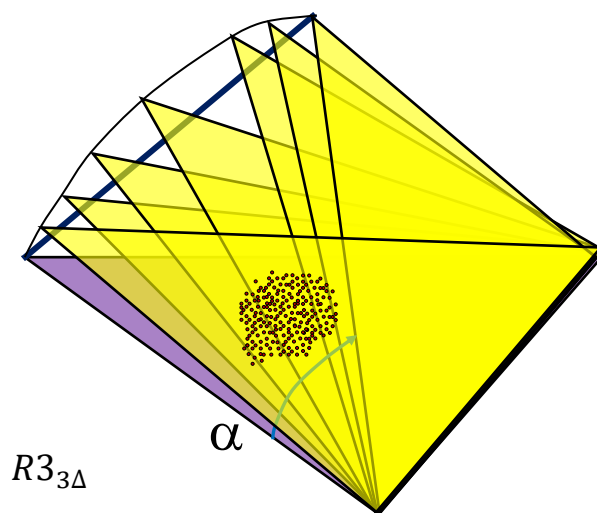
Fonte: Elaborado pelo autor

4.23.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro

Em uma terceira Reconstrução Tridimensional do Tetraedro ($R3_{3\triangleright}$), de forma prática instrumental, se parte de duas faces do triângulo equilátero da base, estando os dois coincidentes no plano horizontal. Sua cópia superior passa a ser rotacionada desde o triângulo da base, em torno de um dos lados, até que os dois triângulos, perfaçam, com uma aresta em comum, o ângulo de $70,5288^\circ$, e neste ponto faz-se a interligação entre os dois vértices afastados, soltos dos dois triângulos, o da horizontal e o rotacionado, que chegou

ao topo da altura do primeiro, formando assim a face externa de mais dois triângulos. Forma-se assim as quatro faces do sólido tetraédrico. Preenche-se o seu interior com faces, linhas e /ou pontos, reverberados, ou seja, com incrementos infinitésimos de volume como mostra a **Figura 85**.

Figura 85 - Dimensão três (3D), da construção do tetraedro a partir da dimensão dois (2D), em uma terceira Reconstrução Tridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

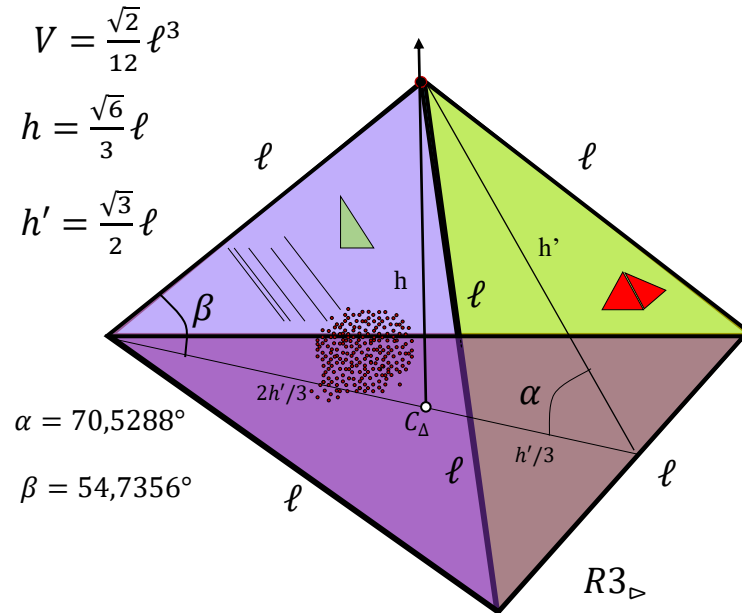
Sabendo-se que a altura de cada vértice do tetraedro fica à distância $h = \frac{\sqrt{6}}{3} \ell$, do centro de sua base e que a distância d do centro da base do triângulo equilátero até sua aresta é um terço de sua altura, ou seja $d = \frac{1}{3} h' = \frac{1}{3} (\ell \cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{6} \ell$, a face do tetraedro faz um ângulo com a outra face do mesmo tetraedro, de $\alpha = \arctg \frac{h}{d} = \arctg 2\sqrt{2} = 70,5288^\circ$, como mostra a **Figura 85**, em evidência o ângulo α entre os dois planos das faces.

4.23.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional do Tetraedro

Em uma quarta Reconstrução tridimensional do tetraedro, ($R3_4 \triangleright$), pode-se traçar a partir do ponto médio do triângulo equilátero de apoio na horizontal, uma, altura perpendicular à face do triângulo, em direção à terceira dimensão, com uma altura do centro da base ao topo do tetraedro de valor $h = \frac{\sqrt{6}}{3} \ell$. A distância perpendicular à aresta do triângulo, ou seja, a altura do triângulo $h' = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$, sendo que, nesta altura a distância até o

centroide do triângulo de sua base é $h'/3$, e de seu vértice é $2h'/3$. São dados os ângulos $\alpha = 70,5288^\circ$ e $\beta = 54,7356^\circ$ da **Figura 86**.

Figura 86 - Dimensão três (3D), da construção do tetraedro a partir da dimensão dois (2D), em uma quarta Reconstrução Tridimensional



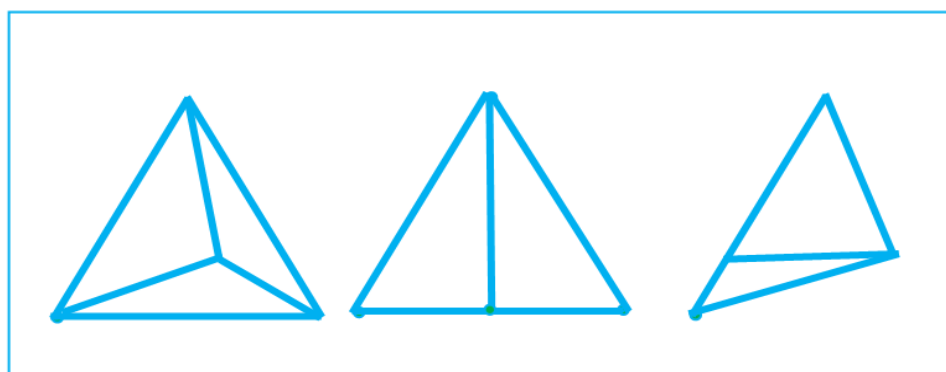
Fonte: Elaborado pelo autor

Assim, interliga-se os três vértices do triângulo de base ao topo da altura, montando-se o tetraedro, preenchendo seu interior com pontos (com infinitésimos de linha), ou retas (com infinitésimos de área), ou planos (com infinitésimos de volume), ou minitetraedros (como reconfiguração mereológica do tetraedro), dada na **Figura 86**.

4.23.5 - Resumo de Características do Tetraedro

A representação do tetraedro em vários pontos de vista geométrico, desde a terceira dimensão, representada no plano, depende do ângulo de visão deste tetraedro, e seriam dadas pela **Figura 87** e suas características no **Quadro 18**.

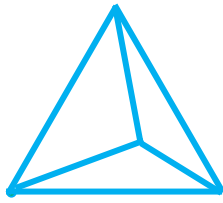
Figura 87 - Vistas do tetraedro em diferentes posições desde a 3D



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se observar as variáveis dimensionais do Tetraedro, estas características, como nos mostram as **Quadro 18**.

Quadro 18 - Características da dimensão três do tetraedro

Dimensão três para o Tetraedro	
Formato de representação: Tetraedro	
Variável Dimensional nova: Sólido Tetraédrico	
Finalizadas por quatro estruturas externas da dimensão anterior: Quatro Faces	
Entre uma face e o vértice oposto existem infinitos triângulos da dimensão anterior diminuindo linearmente de tamanho: Infinitas Faces internas.	
Equação Geométrica Dimensional: $V - A + F - S = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim as características geométricas definidas e observáveis no tetraedro construído, serão, 4 Vértices, $V_{3\triangleleft} = 4$, 6 Arestas, $A_{3\triangleleft} = 6$, 4 Faces, $F_{3\triangleleft} = 4$, 1 Sólido, $S_{3\triangleleft} = 1$. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a tridimensionalidade do tetraedro:

$$V_{3\triangleleft} - A_{3\triangleleft} + F_{3\triangleleft} - S_{3\triangleleft} = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

O volume do tetraedro é dado pela expressão, $V = \frac{S_b h}{3}$, sendo S_b a área da base do tetraedro dado por $S_b = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$, e como $h = \frac{\ell \sqrt{6}}{3}$, terá volume, portanto, $V = \frac{\ell^3 \sqrt{2}}{12}$.

Quadro 19 - Variáveis Dimensionais da Família 2, ou Família H-triângulo, ou CEGED 2, Matriz dimensional de Figuras Geométricas do Tetraedro

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Aresta A	Face F	Sólido S	Elementos interiores	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	0	1, ∞	$V - A + F - S = 1$
1D	2	1	0	0	∞	$V - A + F - S = 1$
2D	3	3	1	0	∞	$V - A + F - S = 1$
3D	4	6	4	1	∞	$V - A + F - S = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

Se estas infinitas Faces fossem colocadas na dimensão anterior da qual ela veio, dimensão dois, própria, colocadas, lado a lado, criaria um plano infinito de área infinita, ocupando toda a dimensão anterior. A família do triângulo-tetraedro, ou CEGED2, ou família 2 de variáveis dimensionais, estão registrados no **Quadro 19**.

4.24 - HIPERTETRAEDRO OU PENTACORO OU 5-CELL (C₅) OU 4-SIMPLEX

O Hipertetraedro ou Pentacoro ou 5-cell_(C₅) ou Pentatopo ou 4-simplex, é uma figura geométrica reverberada do Tetraedro, numa quarta dimensão, do qual irá se representar quatro Reconstruções Dimensionais. Seguindo procedimento análogo ao das reconstruções anteriores do hipercubo, em como “enxergá-lo” em 4 dimensões nestas Reconstruções.

4.24.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro

Em uma primeira fase, faz-se a **Reconfiguração Mereológica** de toda a dimensão três, se corta infinitos tetraedros regulares de tamanhos diferentes com suas arestas variando e decrescendo de ℓ até 0.

Em uma segunda instância, **incrementamos de um infinitésimo**, a espessura de cada tetraedro, na direção dw , do quarto eixo, ortogonal, às três dimensões do espaço.

E finalmente em terceiro passo, colocamos os infinitos tetraedros em tamanho decrescentes, lado a lado, de forma regular externamente, e suas infinitas peças volumétricas, internamente, lado a lado, na direção do quarto eixo até zerar seu tamanho, produzindo uma **reconstrução dimensional**. Os outros quatro sólidos tetraedros regulares externos, surgirão desta colocação de peças.

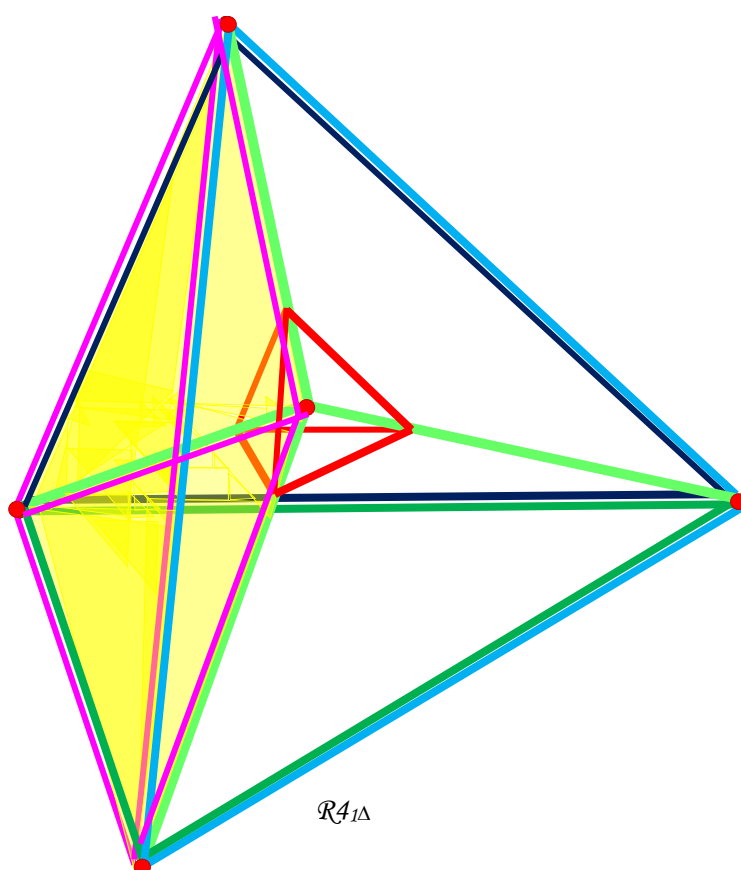
Portanto, em uma Primeira Reconstrução Quadridimensional, na **Figura 101**, agora visualizando de forma instrumental, traçamos de cada um dos quatro vértices do tetraedro tridimensional, arestas em direção à quarta dimensão, de comprimento ℓ e unimos suas pontas ao final. Neste caso, a quarta dimensão, é representada para o interior da Figura analogamente ao hipercubo e que ao final ela se une em um vértice, como o caso análogo da formação do triângulo e do tetraedro. Este seria uma Primeira Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro ($R_{41} \nabla$). O que representamos na **Figura 101**, $R_{41} \nabla$, é uma projeção do hipertetraedro, da quadridimensão, até a terceira dimensão, mas representado na segunda dimensão. A representação está na segunda dimensão, o plano do papel, mas pensada na quarta dimensão.

O Hipertetraedro ou Pentacoro, da **Figura 88**, tem cinco Sólidos tetraédricos externos. De cada um dos 4 vértices, ponto de encontro das arestas do tetraedro da terceira dimensão, sai uma nova aresta em direção ao quarto eixo da quarta dimensão ($R_{41} \otimes$), até finalizá-las em um novo vértice, na quarta dimensão, ponto de encontro das quatro arestas, montando além do tetraedro da terceira dimensão, quatro novos tetraedros em direção à profundidade da quarta dimensão.

Nesta representação da **Figura 88**, podemos “enxergar” ou visualizar todas as características geométricas e contá-las no hipertetraedro. As características geométricas são as seguintes: formação do Hipertetraedro $H_{4\supseteq} = 1$, 5 Tetraedros ou sólidos externos, $S_{4\supseteq} = 5$, 10 Faces externas, $F_{4\supseteq} = 10$, 10 Arestas (Edges) externas, $A_{4\supseteq} = 10$, 5 Vértices externos, $V_{4\supseteq} = 5$.

Os **cinco Sólidos** ($S_{4\supseteq} = 5$) Tetraédricos externos neste hipertetraedro, então: nos quatro tetraedros laterais externos, onde um deles está em amarelo, mais o da frente, mais o de trás, mais o de baixo, e mais o “grande” da terceira dimensão, que é do mesmo tamanho dos outros quatro formados externamente. Teremos assim que considerar que todos os outros quatro tetraedros externos formados, na dimensão quatro ($R_{41} \otimes$), têm tamanhos iguais ao grande, o da dimensão três, nesta perspectiva, montando um hipertetraedro regular. Temos que observar também, que o tetraedro vermelho do desenho não se conta pois ele é interno ao hipersólido e indo na direção do vértice término das arestas naquele vértice.

Figura 88 - Hipertetraedro ou Pentacoro. Primeira Reconstrução Quadridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Os **cinco Vértices** ($V_{4\geq} = 5$) são os pontos em vermelho.

As **dez Arestas (Edges)** ($A_{4\geq} = 10$) podem ser contadas na **Figura 89**, como sendo as seis arestas cor de rosa do tetraedro amarelo, mais as três arestas azuis do tetraedro externo maior e mais a aresta verde isolada que vai ao centro comum em direção à dimensão quatro.

As **dez Faces** ($F_{4\geq} = 10$), apresentam 4 faces no tetraedro amarelo, mais três do tetraedro da face da frente, mais duas da face maior do outro lado, mais uma da face inferior maior.

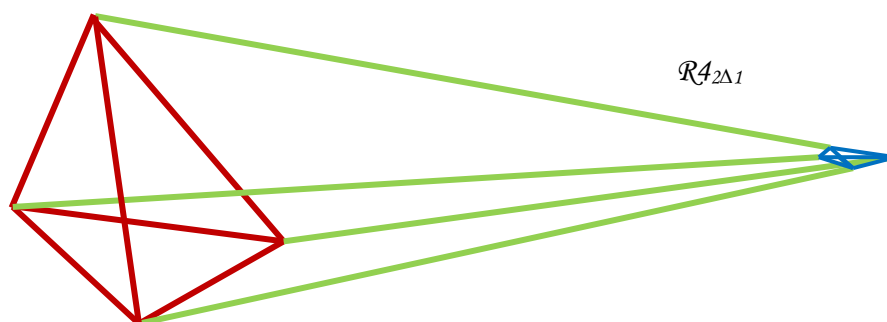
Os tetraedros internos vão diminuindo de tamanho, os maiores de fora, com as arestas indo em direção à quarta dimensão, os hipertetraedros internos vão diminuindo de tamanho, pelas laterais, indo em direção à dimensão quatro, diminuindo de tamanho até zerar em um ponto no fundo da dimensão quatro, os outros se compõem para formar as laterais externas do hipertetraedro. Internamente se sucedem infinitos tetraedros internos indo da terceira dimensão em direção à quarta dimensão, todos de tamanhos cada vez

menores até o ponto final, o tetraedro vermelho, que aparece na figura é um deles, um dos infinitos internos, que se dirigem ao fundo da dimensão quatro, ponto de encontro das arestas verdes.

4.24.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro

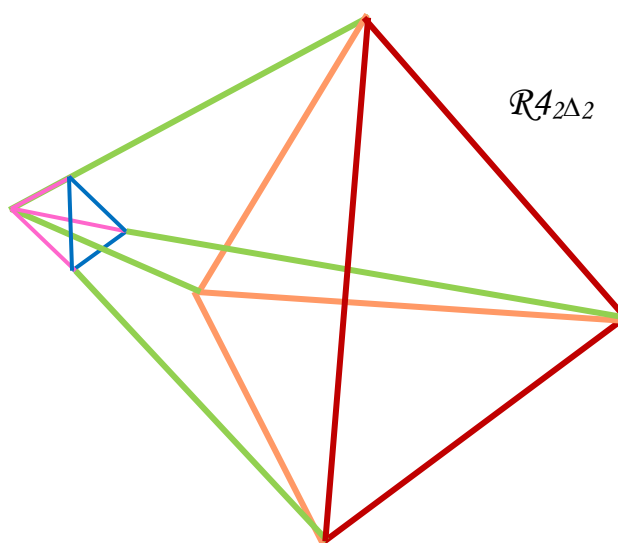
Em uma segunda Reconstrução Quadridimensional, **Figuras 89 e 90**, podemos colocar os quatro eixos verdes em direção à quarta dimensão, indicados para fora da Figura, e não para dentro do tetraedro, como foi a reconfiguração na **Figura 88**, anterior, a partir do tetraedro da dimensão três. Assim, reafirmando, esses quatro eixos são representados como indo em direção a quarta dimensão. Apresenta-se esta segunda Reconstrução em dois pontos de vista.

Figura 89 - Hipertetraedro ou Pentacoro. Segunda Reconstrução Quadridimensional. Em um primeiro ponto de vista



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 90 - Hipertetraedro ou Pentacoro. Segunda Reconstrução Quadridimensional. Em uma segunda forma de reconstrução em um segundo ponto de vista

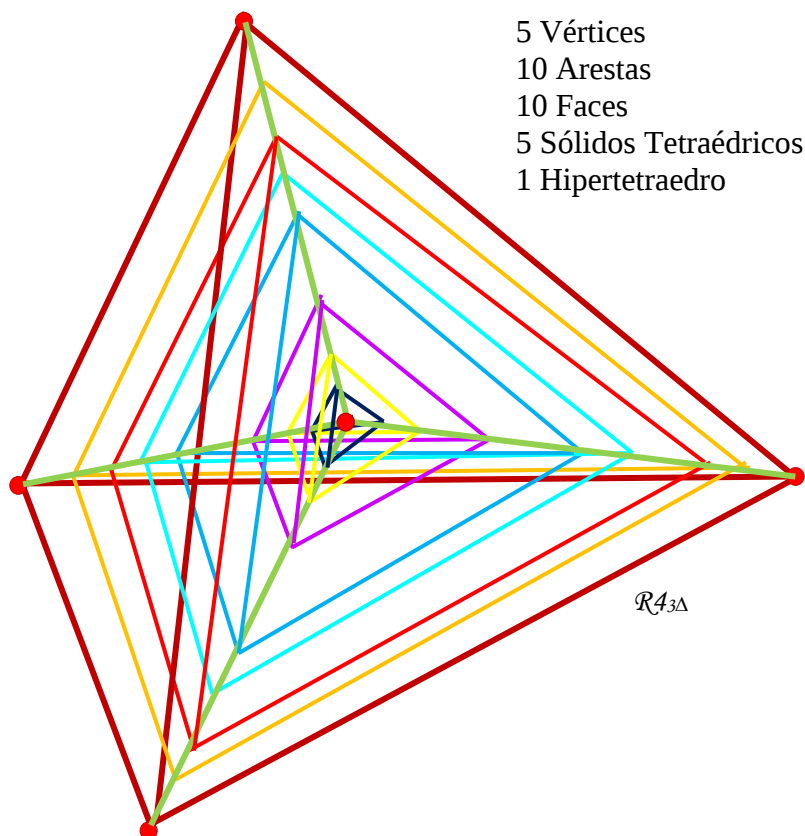


Fonte: Elaborado pelo autor

4.24.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro

A **Figura 91** representa a ideia do seria a terceira reconstrução quadridimensional do Hipertetraedro.

Figura 91 - Hipertetraedro ou Pentacoro. Terceira Reconstrução Quadridimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando agora como terceira Reconstrução Quadridimensional (**Figura 91**) onde se coloca os eixos para a quarta dimensão em direção ao interior da Figura, mas agora em segunda instância de visão, podemos representar nesta Reconstrução, os infinitos tetraedros em direção à quarta dimensão, paralelos entre si e finalizando em um tetraedro final.

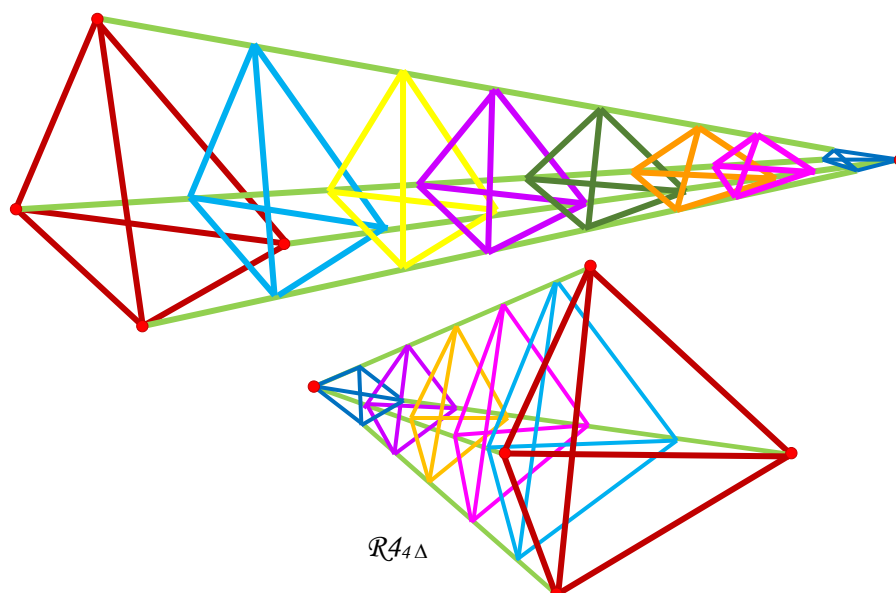
4.24.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro

Na quarta Reconstrução Quadridimensional, a da **Figura 92**, vamos reconfigurar esta representação com os eixos dos vértices do tetraedro na terceira dimensão, indo para a quarta dimensão em direção ao **exterior** da figura tridimensional e representados agora em nova visão complementar os infinitos tetraedros, repetindo-se e paralelamente em direção à quarta dimensão. São paralelos entre si e finalizando em um ponto, vértice último no fundo

da quarta dimensão. Todos esses eixos vão em direção a quarta dimensão, com infinitos tetraedros “paralelos” entre si.

Portanto, repete-se para a quarta dimensão, os infinitos tetraedros, sendo continuamente repetidos na direção do quarto eixo, agora para fora da figura, diminuindo suas dimensões até perfazer um comprimento de linha ℓ , e estes infinitos tetraedros, diminuindo de tamanho, chegam até a um ponto do outro lado, representados visualmente para o “**exterior**” do tetraedro, em uma nova forma de representação. Esta seria outra forma de obtenção do hipertetraedro que denominaremos de quarta Reconstrução Quadridimensional do Hipertetraedro ($R_{4\Delta}$).

Figura 92 - Hipertetraedro ou Pentacoro. Quarta Reconstrução Quadridimensional. Dois pontos de vista



Fonte: Elaborado pelo autor

Todas essas ligações dos vértices do tetraedro tridimensional estariam indo na direção para a quarta dimensão. Apesar de o hipertetraedro se mostrar com apenas cinco tetraedros exteriores, nesta projeção, ele mostra os infinitos tetraedros interiores, como podemos ver pela terceira e quarta Reconstrução Quadridimensional ($R_{4\Delta}$). Os cinco tetraedros da quarta dimensão, nas configurações um e dois, são os tetraedros externos à sua estrutura e são todos iguais.

Por analogia, concluiríamos que na ida ao novo eixo quadridimensional, há infinitos tetraedros internos, com seus tamanhos cada vez mais decrescentes, da mesma forma que de duas para três dimensões, no tetraedro surgem infinitos triângulos, indo em

direção à terceira dimensão, decrescentes em tamanho até resultarem no ponto do outro lado. E da mesma forma, indo da dimensão um para a dois, na construção do triângulo, os infinitos segmentos de reta internos, iam diminuindo de tamanho até zerarem em um ponto. Como nos alerta o princípio das analogias dimensionais, princípio de grande poder de aprendizado e segurança de raciocínio matemático.

Cada uma dessas quatro Reconstruções Dimensionais, por meio de Reconfigurações Mereológicas do hipertetraedro acima, pode ser questionada pode ser proposta pelo professor aos seus estudantes sobre forma de atividades, visando a obtenção novos modelos de representação em Reconstruções Dimensionais.

4.24.5 - Resumo da Dimensão Quatro para o Hipertetraedro

Assim as características geométricas definidas e observáveis do Hipertetraedro construído, serão, 1 Hipersólido, $H_{4\geq} = 1$, 5 Sólidos Tetraédricos, $S_{4\geq} = 5$, 10 Faces, $F_{4\geq} = 10$, 10 Arestas, $A_{4\geq} = 10$, 2 Vértices, $V_{4\geq} = 5$. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

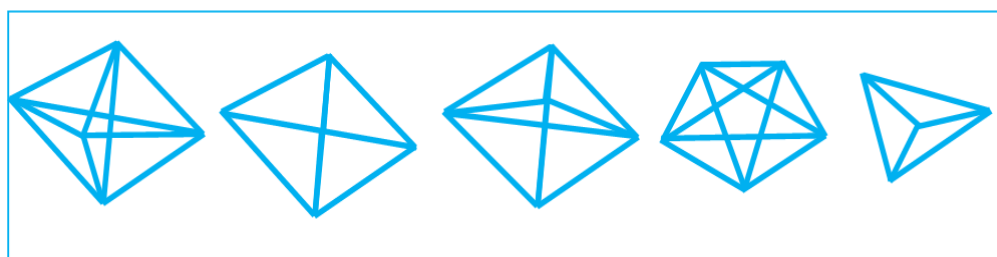
para a quadridimensionalidade do Hipercubo:

$$V_{4\geq} - A_{4\geq} + F_{4\geq} - S_{4\geq} + H_{4\geq} = 5 - 10 + 10 - 5 + 1 = 1$$

A Expressão, a Equação Geométrica das Dimensões, aparece ao modo de uma equação “divina”, por resultar sempre em sua tendência à unidade, ou seja, todas as variáveis geométricas das dimensões (VAFSH) de qualquer figura leva sempre à unidade, que mantém o mesmo resultado desde a dimensão zero, por simetria ou analogia, o uno, a unidade, da qual se demonstra posteriormente valer para qualquer dimensão inteira.

Esta expressão a EGD, mantém o mesmo resultado, desde a dimensão zero, para todos os grupos de figuras, por simetria da natureza dimensional, levando ao uno, ou unidade. Outras projeções do *pentacoro* estão na **Figura 93**.

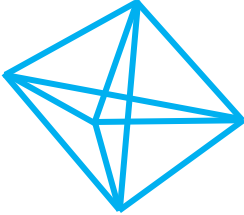
Figura 93 - Hipertetraedro ou Pentacoro em projeção na terceira dimensão



Fonte: Elaborado pelo autor

Resumo de características do Hipertetraedro.

Quadro 20 - Características do hipertetraedro da dimensão quatro

Dimensão quatro	
Formato de representação: Hipertetraedro	
Nova variável dimensional: hipertetraedro ou pentacoro	
Externado por cinco estruturas externas da dimensão anterior: Cinco Tetraedros	
Entre uma face e o vértice oposto existem infinitos tetraedros da dimensão anterior, diminuindo linearmente de tamanho: com cinco tetraedros externos.	
Equação Geométrica Dimensional: $V - A + F - S + H = 5 - 10 + 10 - 5 + 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Como elementos de analogia como já fizemos na dimensão zero para a um, e da dimensão um para dois, da dimensão dois para a três, agora raciocinemos em termo da dimensão três para quatro. Tal analogia estaria no fato de que o elemento da dimensão anterior, o sólido tetraédrico, se repete infinitamente em direção à nova dimensão quatro, para formação do hipertetraedro, formando o novo conceito, o de hipersólido, no caso o hipertetraedro.

Se estes infinitos volumes tetraédricos, fossem colocados de volta na dimensão três, anterior, própria, e colocados lado a lado, criaria uma estrutura infinita de volume infinito.

No entanto, se colocados estes infinitos sólidos tetraedros, da dimensão três, na nova dimensão (quatro), de forma ordenada, sairíamos do infinito e ganharíamos uma dimensão finita de comprimentos ℓ , na obtenção de um hipersólido finito, sem a explosão de infinito da dimensão anterior.

A estrutura de cada uma das peças, de cada nova dimensão, cabe um universo dimensional completo da dimensão anterior.

Considerando os elementos geométricos até a 7ª dimensão podemos estabelecer algumas Fórmulas Recorrentes, para o CEGED2, ou seja, **Família Dimensional 2**, como mostra o **Quadro 21**.

Quadro 21 - Matriz das Variáveis Dimensionais Geométricas da Família Dimensional 2 da dimensão 0 a 7

D $\times H$	$V=H_0$ 0H	$A=H_1$ 1H	F 2H	S 3H	H 4H	5H	6H	7H	8H	$\sum H$	H_i	EG D_D
0D	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$1, \infty$	1
1D	2	1	0	0	0	0	0	0	0	3	∞	1
2D	3	3	1	0	0	0	0	0	0	7	∞	1
3D	4	6	4	1	0	0	0	0	0	15	∞	1
4D	5	10	10	5	1	0	0	0	0	32	∞	1
5D	6	13	20	15	6	1	0	0	0	63	∞	1
6D	7	21	35	35	21	7	1	0	0	127	∞	1
7D	8	28	56	70	56	28	8	1	0	255	∞	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Usando o princípio de **analogia**, vamos reconstituir rapidamente as regras dimensionais para a nova figura e de qualquer nova figura dimensional. Nesta perspectiva, são necessários infinitos elementos, Sólidos (tetraedros), ou Faces (triângulos), ou Segmentos de reta, ou Pontos, das dimensões anteriores, com incrementos infinitésimos, para a construção desse Hipersólido quadridimensional do Hipertetraedro.

Colocados esses infinitos elementos da formação do Hipersólido quadridimensional do Hipertetraedro, de volta na dimensão anterior, ela ficaria totalmente preenchida por eles. Ou seja, na estrutura de cada uma das peças da nova dimensão, cabe um universo dimensional completo da dimensão anterior (Universo Tridimensional).

Relacionada o número dessas variáveis dimensionais externas e finitas da nova figura dimensional formada, Vértice, Aresta e Face e Sólido e Hipersólido, elas obedecem à Equação Geométrica das Dimensões, levando-a à unidade:

$$V - A + F - S + H = 5 - 10 + 10 - 5 + 1 = 1$$

Determinando as Equações de Recorrência para as variáveis dimensionais entre $D \times H$, para a Matriz da Família Dimensional 2, onde escrevemos até a 11ª dimensão, ou D-ésima dimensão, no **Quadro 21**, na determinação de qualquer variável dimensional $G_{D,H}$ em cada D-ésima dimensão D inteira, para cada variável dimensional H.

4.25 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA DIMENSIONAL 2

As variáveis dimensionais exteriores e notáveis (H) de uma figura dimensional na Família Dimensional 2 tem variados valores destas variáveis: pontos ou Vértices (H=0), Arestas (H=1), Triângulos equiláteros (H=2), Tetraedros (H=3), Hipertetraedros (H=4), Hiper5-tetraedro (H=5), Hiper6-tetraedro, Hiper7-tetraedro,..., limitado conforme a dimensão, e que calculamos até a décima primeira dimensão, estão mostrados em seus valores para cada dimensão, no **Quadro 22**.

Quadro 22 - Matriz das Variáveis Dimensionais da Família 2, triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0 $H_0=V$ Vértice	H=1 $H_1=A$ Aresta	H=2 $H_2=F$ Face	H=3 $H_3=S$ Sólido	H=4 $H_4=H$ Hipersólido	H=5 H_5	H=6 H_6	H=7 H_7	H=8 H_8	H=9 H_9	H=10 H_{10}	H=11 H_{11}	$\sum_{i=0}^H 2^{D+1-i}$	EQD _D
D=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D=1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
D=2	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	1
D=3	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	15	1
D=4	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	31	1
D=5	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	63	1
D=6	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	127	1
D=7	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	255	1
D=8	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	511	1
D=9	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	1023	1
D=10	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	2047	1
D=11	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	4095	1
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-		

Fonte: Elaborado pelo autor

4.25.1 - Primeira Fórmula Recursiva dos elementos da Matriz das dimensões da Família 2, triângulo-tetraedro, de dimensão D e variável dimensional H

A Primeira Fórmula Recursiva dos elementos da Matriz das dimensões da Família 2 é dada abaixo. Sabemos que pelas características dadas:

$$G_{D,H>D} = 0$$

$$G_{D,H \leq D} = \frac{(D+1)!}{(H+1)!(D-H)!} = \binom{D+1}{H+1}$$

Onde,

D = Dimensão D ligada às Variáveis Geométricas Dimensionais $0 \leq H \leq D$

H = Variável Geométrica Dimensional = 0(V), 1(A), 2(F), 3(S), 4(H), 5, 6, ..., D.

$H = 0$ (V ou H_0 ou Vértices), $H = 1$ (A ou H_1 ou Arestas (Edges)),

$H = 2$ (F ou H_2 ou Faces), $H = 3$ (S ou H_3 ou Sólidos),

$H = 4$ (H ou H_4 ou Hipersólidos), $H = 5$ (H_5 ou Hiper - 5 - sólidos) ...

$G_{D,H}$ = Elemento da Matriz Dimensional que relaciona na dimensão D,
o número de elementos da variável H, da figura geométrica ($0 \leq H \leq D$)

$C_{D,H}$ = Combinação de D elementos, H à H, ou número binomial $\binom{D}{H}$

$\binom{D+1}{H+1}$ = número binomial de dimensão D e variável geométrica dimensional H.

4.25.2 - Equação Geométrica das Dimensões (EGD) ou Segunda Fórmula Recursiva dos Elementos de Linha da Matriz Dimensional da Família 2, do triângulo-tetraedro

A Terceira Fórmula Recursiva dos Elementos de Linha das Dimensões da Família triângulo-tetraedro, que é mais conhecida como **Equação Geométrica das Dimensões (EGD)**, ou Equação Divina ou Canônica das Dimensões, por resultar sempre igual à unidade, pois vale para todas as figuras poliédricas convexas de todos os CEGEDS, em uma dada dimensão, e é dada pela soma dos elementos de linha, pares e subtração dos elementos de linha ímpares. Resultando sempre igual a unidade.

Nesta forma de registro de representação algébrico.

$$EGD_{D,H} = G_{D,0} - G_{D,1} + G_{D,2} - G_{D,3} \dots \pm G_{D,H_{par \text{ ou } impar}} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H G_{D,H} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \frac{(-1)^H (D+1)!}{(H+1)! (D-H)!} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H \binom{D+1}{H+1} = 1$$

Acaba por resultar valores ligados aos números binomiais, em termos alternados de somas e subtrações.

4.25.3 - Soma dos Elementos de linha da matriz ou Terceira Fórmula Recursiva da Matriz Dimensional da Família Dimensional 2

A Terceira Fórmula Recursiva da Matriz Dimensional é a da Soma dos Elementos de Linha para a Família Dimensional 2 ou Equação da potência da dualidade. “A soma dos elementos de uma linha de dimensão D é sempre igual a $(2^{D+1} - 1)$.”

Nesta forma de representação, a soma de todos os elementos de linha, para a família triângulo-tetraedro é sempre igual a $2^{D+1}-1$.

$$S_D = G_{D,0} + G_{D,1} + G_{D,2} + G_{D,3} \dots + G_{D,D} = 2^{D+1} - 1$$

$$S_D = \sum_{H=0}^D G_{D,H} = 2^{D+1} - 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} = 2^{D+1} - 1$$

4.25.4 - Mais Cinco Fórmulas Secundárias Recursivas dos elementos da Matriz dimensional da Família 2, do triângulo-tetraedro

Começamos a determinação das fórmulas genéricas dos elementos da matriz dimensional por essas fórmulas secundárias de seus elementos. Só depois conseguimos generalizar as expressões acima.

1 - FÓRMULA SECUNDÁRIA 1

FS1. Um elemento qualquer da matriz dimensional da família triângulo-tetraedro é sempre igual a dimensão D desse elemento, vezes o elemento da sua diagonal esquerda acima, menos o elemento acima, e tudo dividido pelo H desse elemento novo construído.

A Segunda Fórmula Secundária dos elementos da Matriz das dimensões da Família 2, do triângulo-tetraedro é dada abaixo.

De forma geral temos o **Quadro 23**.

$$G_{D,0} = D + 1$$

Quadro 23 - Fórmula Secundária Recursiva 1 da Matriz Dimensional da Família triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0	H=1	H=2	H=3
D=0	1	0	0	0
D=1	2	1	0	0
D=2	3	3	1	0
D=3	4	6	4	1
D=4	5	10	10	5
D=5	6	15	20	15

$$G_{D,H} = [D \cdot G_{D-1,H-1} - G_{D-1,H}] / H$$

$$\frac{1}{H+1} [(D+1) \cdot \binom{D}{H} - \binom{D}{H+1}] = \binom{D+1}{H+1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o exemplo dado acima, temos a relação abaixo.

$$G_{4,2} = (4 \cdot G_{3,1} - G_{3,2}) / 2 \Rightarrow 10 = (4 \cdot 6 - 4) / 2.$$

2 - FÓRMULA SECUNDÁRIA 2

FS2. A soma dos elementos de uma coluna, até um elemento qualquer é igual ao elemento diagonal abaixo do último. Exemplo: $1+3+6+10=20$. Na representação tabelar e algébrica, vale a relação abaixo para qualquer D e qualquer q. Veja o Quadro 24.

Quadro 24 - Fórmula Secundária Recursiva 2 da Matriz Dimensional da Família triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0	H=1	H=2	H=3
D=0	1	0	0	0
D=1	2	1	0	0
D=2	3	3	1	0
D=3	4	6	4	1
D=4	5	10	10	5
D=5	6	15	20	15

$$G_{D,D} + G_{D+1,D} + \dots + G_{D+q,D} = G_{D+q+1,D+1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

3 - FÓRMULA SECUNDÁRIA 3

FS3. A soma dos elementos de uma diagonal, até um elemento qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo do último, somado de uma unidade. Exemplo: $3 + 6 + 10 = 19 \Rightarrow 19 + 1 \Rightarrow 20$. Na representação tabelar e algébrica, vale a relação abaixo, qualquer q. É só ver o Quadro 25.

Quadro 25 - Fórmula Secundária Recursiva 3 da Matriz Dimensional da Família triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0	H=1	H=2	H=3
D=0	1	0	0	0
D=1	2	1	0	0
D=2	3	3	1	0
D=3	4	6	4	1
D=4	5	10	10	5
D=5	6	15	20	15

$$G_{D,0} + G_{D+1,1} + \dots + G_{D+q,q} = G_{D+q+1,q} + 1$$

Fonte: Elaborado pelo autor

4 - FÓRMULA SECUNDÁRIA 4

FS4. A soma de dois elementos consecutivos de uma mesma linha é igual ao elemento abaixo do segundo somado. Exemplo na representação tabelar: $6 + 4 = 10$. Generalizando na representação tabelar e algébrica na relação abaixo, veja o Quadro 26.

Quadro 26 - Fórmula Secundária Recursiva 4 da Matriz Dimensional da Família triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0	H=1	H=2	H=3
D=0	1	0	0	0
D=1	2	1	0	0
D=2	3	3	1	0
D=3	4	6	4	1
D=4	5	10	10	5
D=5	6	15	20	15

$$G_{D,H} + G_{D,H+1} = G_{D+1,H+1}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

5 - FÓRMULA SECUNDÁRIA 5

FS5. Existem elementos sempre simétricos nesta matriz, desde que $D \neq H$, e $D > 1$, onde qualquer elemento de linha, se repete na mesma linha desde $G_{D,H} = G_{D,D-(H+1)}$. Exemplo: $G_{3,0} = G_{3,2}$; $G_{4,1} = G_{4,2}$; e $G_{5,1} = G_{5,3}$. Na representação tabelar e algébrica temos os elementos abaixo, em exemplo, como mostra o Quadro 27.

Quadro 27 - Fórmula Secundária Recursiva 5 da Matriz Dimensional da Família triângulo-tetraedro

$G_{D,H}$	H=0	H=1	H=2	H=3
D=0	1	0	0	0
D=1	2	1	0	0
D=2	3	3	1	0
D=3	4	6	4	1
D=4	5	10	10	5
D=5	6	15	20	15

$$G_{D,H} = G_{D,D-(H+1)}$$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.26 - DEMONSTRAÇÃO DE QUE A EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES DA FAMÍLIA DIMENSIONAL TRIÂNGULO-TETRAEDRO, É VÁLIDA PARA QUALQUER DIMENSÃO D INTEIRA

A Família Dimensional 2, série do triângulo-tetraedro, está relacionada abaixo e tem como variáveis geométricas de seus elementos para qualquer dimensão D os números binomiais mais um, relacionados dentro do triângulo. Com isso iremos demonstrar, que as equações encontradas valem para qualquer dimensão, em seus valores inteiros, D=0,1,2,3,4,5,6, ..., *ad infinitum*.

Consideremos o **Quadro 28**, das variáveis dimensionais da Família dimensional 2 ou Família Triângulo-Tetraedro.

Quadro 28 - Elementos dos termos das variáveis geométricas da Família Dimensional 2 para dimensões crescentes sua relação com os números binomiais

[illegible]

D/H	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	2	1										
2	3	3	1									
3	4	6	4	1								
4	5	10	10	5	1							
5	6	15	20	15	6	1						
6	7	21	35	35	21	7	1					
7	8	28	56	70	56	28	8	1				
8	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
9	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
10	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
11	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Fonte: Elaborado pelo autor

4.26.1 - Demonstração de que a Equação Geométrica das Dimensões da Família Dimensional 2, triângulo-tetraedro, é válida para qualquer dimensão D inteira

Começemos pela demonstração de que a Equação Geométrica das Dimensões, é válida para qualquer dimensão inteira, resultando sempre igual à unidade para a Família Dimensional 2.

Dada a Equação Geométrica das dimensões EQD_D, genérica para qualquer dimensão da Família Dimensional 2.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \frac{(-1)^H (D+1)!}{(H+1)! (D-H)!} = 1$$

Podemos escrevê-la em função dos números binomiais da seguinte forma.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H \binom{D+1}{H+1} = 1$$

E utilizando a Série binomial de Newton, genérica, temos que,

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot (-b)^p = (a-b)^n$$

Fazendo $n = D + 1$, $p = H + 1$, $a = 1$, $b = 1$, vemos a expressão demonstrativa abaixo.

$$\sum_{H+1=0}^{D+1} \binom{D+1}{H+1} 1^{D-H} \cdot (-1)^{H+1} = (1-1)^{D+1} = 0$$

Separando o primeiro termo e os demais.

$$= \sum_{H+1=0}^{D+1} \binom{D+1}{H+1} 1^{D-H} \cdot (-1)^{H+1} = \underbrace{(-1)^0 \binom{D+1}{0}}_{=1} - \underbrace{\sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} \cdot (-1)^H}_{=1, \text{ qualquer que seja } D} = 0$$

Portanto, vemos que o segundo termo, genérico da série tem que ser necessariamente igual à unidade, para a equação toda ser nula, e como queríamos demonstrar, vale para esta expressão, a Equação Geométrica das Dimensões para a Família Dimensional 2, sempre igual à unidade qualquer que seja D:

$$\sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} \cdot (-1)^H = 1$$

Assim, para qualquer valor de $D = 0,1,2,3,4,5,6,7,\dots$, natural, vale a expressão acima, resultando sempre na unidade, qualquer que seja a dimensão D , *ad infinitum*.

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} \cdot (-1)^H = 1 \quad \text{c.q.d.}$$

4.26.2 - Demonstração de que a Equação Soma Dimensional da Família Dimensional 2, triângulo-tetraedro, é válida para qualquer dimensão D inteira

A Família Dimensional 2, série do triângulo-tetraedro, está relacionada abaixo e tem como variáveis geométricas de seus elementos para qualquer dimensão D . Com isso iremos demonstrar, que a Equação Soma Dimensional (ESD) sempre terá o valor potência $D+1$ para a dualidade, menos uma unidade, encontradas valem para qualquer dimensão, em seus valores inteiros, $D=0,1,2,3,4,5,6, \dots$, *ad infinitum*.

$$ESD_D = \sum_{H=0}^D \frac{(D+1)!}{(H+1)!(D-H)!} = 2^{D+1} - 1$$

$$ESD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} = 2^{D+1} - 1$$

Podemos escrevê-la em função dos números binomiais da seguinte forma.

$$ESD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} = \binom{D+1}{1} + \binom{D+1}{2} + \binom{D+1}{D} + \binom{D+1}{D+1} = 2^{D+1} - 1$$

E utilizando a Série binomial de Newton, genérica, temos que,

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot (-b)^p = (a-b)^n$$

Fazendo $n = D + 1$, $p = H + 1$, $a = 1$, $b = 1$, vemos a expressão demonstrativa abaixo.

$$\sum_{H+1=0}^{D+1} \binom{D+1}{H+1} 1^{D-H} \cdot 1^{H+1} = (1+1)^{D+1} = 2^{D+1}$$

Separando o primeiro termo e os demais.

$$= \sum_{H+1=0}^{D+1} \binom{D+1}{H+1} = \binom{D+1}{0} + \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} = 2^{D+1}$$

$$\overbrace{\quad}^{= 1} \quad \overbrace{\quad}^{ESD, qualquer que seja D}$$

Portanto, vemos que o segundo termo, genérico da série tem que ser necessariamente igual à ESD, e como queríamos demonstrar (c.q.d.), vale para esta expressão, a Equação Soma Dimensional para a Família Dimensional 2 qualquer valor de $D = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, ad infinitum$.

$$ESD_D = \sum_{H=0}^D \binom{D+1}{H+1} = 2^{D+1} - 1 \quad \text{c.q.d.}$$

Passamos agora ao desenvolvimento da Família 3, Família círculo-esfera, até a quadridimensão geometricamente e *ad infinitum* à D-ésima dimensão, algebricamente.

4.27 - FAMÍLIA 3 OU FAMÍLIA CÍRCULO-ESFERA

4.27.1 - D=2 - Círculo - Construção Da Estrutura Simétrica Bidimensional Do Círculo

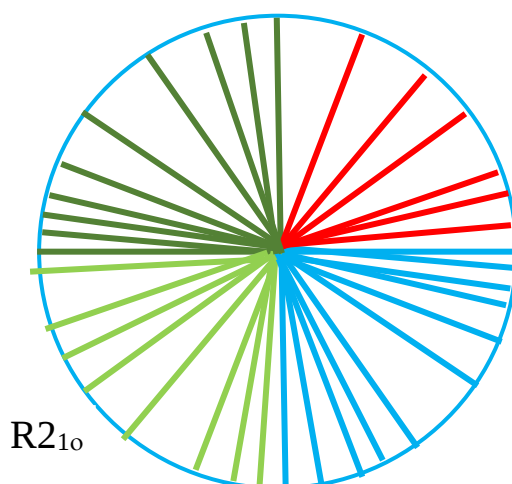
Na estrutura finita de lado ℓ , da dimensão um, do segmento de reta, podemos passá-la para a nova dimensão, a dimensão dois, na construção de um círculo.

4.27.2 - Primeira Reconstrução Bidimensional do Círculo

Em uma primeira instância, vamos desenvolver a primeira Reconstrução bidimensional finita do círculo, (R210). A partir do segmento de reta de comprimento ℓ , na horizontal, podemos rotacioná-lo de 360° ao modo do Teorema de Pappus, para obter a face do círculo. Seria pelo teorema de Pappus, a obtenção da área da face criada,

$$A = L \cdot \theta \cdot \bar{r} = \ell \cdot 2\pi \cdot \frac{\ell}{2} = \pi \ell^2 \quad \text{como mostra a Figura 94.}$$

Figura 94 - Dimensão dois (2D), da construção do círculo em uma primeira Reconstrução Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

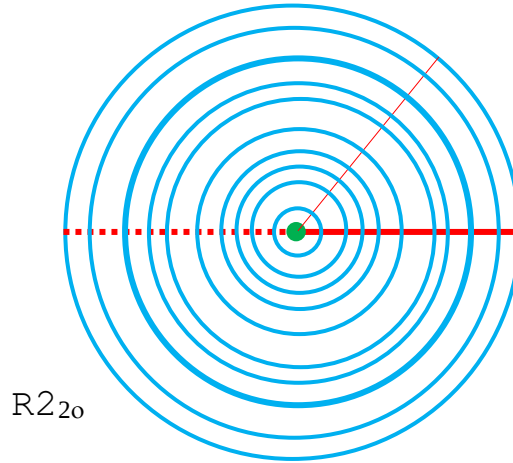
4.27.3 - Segunda Reconstrução Bidimensional do Círculo

Passemos a uma segunda construção do círculo ($R2_2$). Começando com um segmento de linha curva no formato de uma semicircunferência de raio $r = \ell$, com dois vértices nas extremidades desse segmento. Uma outra linha curva desse tipo uma linha de semicircunferência curva com dois vértices que se acopla nos dois vértices do outro, formando uma circunferência completa. A estes segmentos seguem-se outros de raios cada vez menores e menores nos dois lados de simetria do círculo, e “paralelos” a estes, mas de raios menores, em infinitas linhas curvas, até perfazer todo o preenchimento interno da circunferência maior, chegando a um ponto de raio zero e formando a face de um círculo de área correspondente à $S = \pi\ell^2$, como mostra a **Figura 95**.

Em uma segunda variante dessa reconstrução ou segunda variante da Reconstrução Bidimensional, ou um segundo ponto de vista seria a construção dessa face circular de forma inversa, a partir do ponto, somando-se círculos crescentes de incrementos infinitesimais dr , e em raios cada vez mais crescentes até perfazer o raio ℓ .

A partir do ponto cria-se uma linha de circunferência um pouco maior com o ponto no centro, e assim por diante em infinitas circunferências de uma sobre a outra até que perfaça uma distância linear de raio igual a ℓ do ponto central, formando assim a face circular.

Figura 95 - Dimensão dois (2D), da construção do círculo em uma segunda Reconstrução Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

4.27.4 - Terceira Reconstrução Bidimensional do Círculo

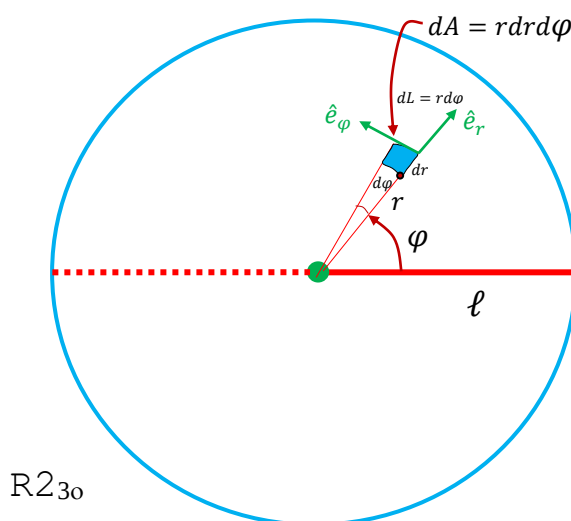
Em uma terceira Reconstrução bidimensional (R2_{3o}) do círculo, podemos construí-la a partir de uma área infinitesimal, construída a partir da área elementar em coordenadas polares, aumento de um segmento infinitesimal na direção radial do círculo, dr , e seu produto, por outro segmento infinitesimal do arco de circunferência dL , na direção perpendicular à direção radial, ou seja, na direção tangente à circunferência, sentido do ângulo de rotação, com valor de $dL = r d\varphi$.

Pela diferenciação teremos infinitas barras unidimensionais de comprimento r , tiradas da dimensão um, e incrementadas com o infinitésimo $r d\varphi$, em cada um dos pontos da barra ao modo giratório da barra com uma extremidade fixa.

Esta área infinitesimal, $dA = dr \cdot dL = r dr d\varphi$, um ponto se expandindo dessa semente (área pontual de dimensão zero) ou integração, para r variando de 0 à ℓ , e φ variando de 0 à 2π , definindo toda a face do círculo. Esta integral pode ser separada em duas integrais independentes, uma para as variáveis radiais $r dr$ e outra para a variável angular $d\varphi$, pelo fato de as variáveis serem ortogonais e linearmente independentes. Resulta desta integração, sem perdas, a área total $\pi \ell^2$, como na **Figura 96**.

$$A = \int_0^{\ell} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\ell^2}{2} \cdot 2\pi = \pi \ell^2$$

Figura 96 - Dimensão dois (2D), da construção do círculo pela soma de todas as áreas infinitesimais, à partir de um ponto $dA=rdrd\varphi$ em uma terceira Reconstrução Bidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

4.27.5 - Quarta Reconstrução Bidimensional do Círculo

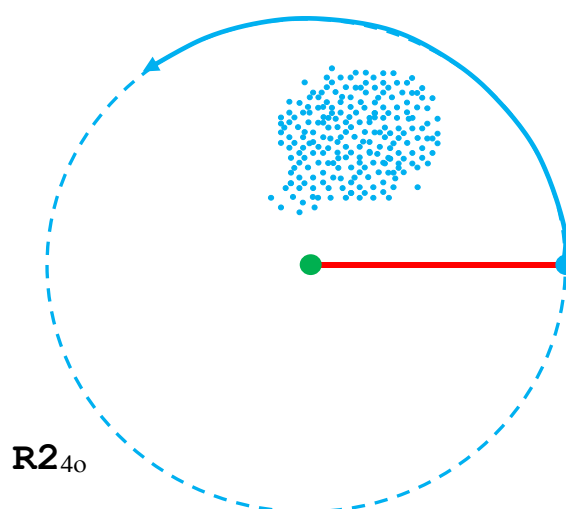
Em uma quarta Reconstrução Bidimensional do círculo, (R_{240}), pode ser reconstruído, a partir de um compasso de distância ℓ entre o eixo de rotação e a extremidade, da qual faz-se a rotação de 360° ou 2π do seu eixo, para formar circunferência. Obtida a circunferência, preenchamos o seu interior com pontos ou retas ou curvas, resultando na face do círculo, limitada pela sua linha equidistante do centro, a circunferência máxima, cujo raio é o próprio segmento $r = \ell$, como mostra a **Figura 97**. Esta reconstrução, como diz Duval (2005), é uma Reconstrução instrumental.

Considerando a questão diferenciada de um poliedro, já para o caso do círculo, um poliedro de infinitas faces, temos que uma das formas de se pensar o círculo, poderia ser de que não existe no círculo nenhum vértice, nenhuma aresta e apenas uma face. Assim, o círculo seria uma reverberação surgida do ponto infinitésimo, indo para as duas dimensões.

Como ficaria o círculo na Equação Geométrica das Dimensões?

Portanto, pensando de forma a assumir limites à geometria circular, para satisfazer a equação geométrica das dimensões satisfatoriamente, temos de assumir o conceito de arestas curvas, como definiremos para a face circular.

Figura 97 - Dimensão dois (2D), da construção do círculo em uma terceira Reconstrução Bidimensional por forma Instrumental



Fonte: Elaborado pelo autor

Poderíamos considerar a divisão da estrutura externa do círculo, composta por dois segmentos de arco curvo de semicircunferência, ou arestas curvas semicirculares, $A=2$, separadas por dois vértices, $V = 2$, compondo a integralidade externa da face circular, $F = 1$. Assim sendo, podemos compor, $V_{2\odot} = 2, A_{2\odot} = 2; F_{2\odot} = 1$, onde teríamos, para a expressão da Equação Geométrica das Dimensões (EGD), que resulta no uno, na unidade, a seguinte expressão e em sua visualização na **Figura 97**.

$$V_{2\odot} - A_{2\odot} + F_{2\odot} = 2 - 2 + 1 = 1$$

E a Equação Geométrica das Dimensões (EGD), para a segunda dimensão na formação do círculo também se iguala a unidade, o que a torna, válida para todas as figuras geométricas fechadas desta dimensão como veremos, seja quantos lados tiver.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a bidimensionalidade do círculo:

$$V_{2\odot} - A_{2\odot} + F_{2\odot} = 2 - 2 + 1 = 1$$

Sendo assim, o círculo teria dois lados curvos, sendo que os pontos que separam os lados resultam em dois vértices. Estes vértices não são pontos bem definidos, mas definido apenas um deles, em qualquer posição do círculo, imediatamente todas as outras variáveis dimensionais geométricas já aparecem e estão definidas automaticamente. Seriam definições virtuais, mentais, da lógica mental, através desses elementos a serem discernidos.

Sendo assim, teríamos uma interpretação dos elementos dimensionais das figuras geométricas, do CEGED3, ou da família 3, ou dos H-círculos, que segundo esta conceituação, se aplicaria a Equação Geométrica das Dimensões, que resulta também o uno a unidade. Dois segmentos de reta em uma dimensão fracionária ($A = 2$), dois vértices de separação entre os dois segmentos ($V = 2$) e uma face interna a eles, ($F = 1$), como detalhamos em seguida.

4.27.6 - Paradoxo geométrico das dimensões

Quando temos círculo inscrito em um quadrado, e o quadrado tem lado ℓ , a área do quadrado é $A_{\square} = \ell^2$ e como o raio do círculo é $r = \ell/2$, a medida da área do círculo é $A_{\odot} = \pi r^2 = \pi(\ell/2)^2 = \pi\ell^2/4$. Assim o percentual da medida da área de vazios com da medida da área total é $P\%_{\text{vazios}} = (A_{\square} - A_{\odot})/A_{\square} = 1 - \pi/4 = 0,2146 = 21,46\%$. A área preenchida do quadrado tem por medida $P\%_{\text{preenchida}} = A_{\odot}/A_{\square} = \pi/4 = 0,7854 = 78,54\%$.

Se aumentarmos o número de círculos com raios menores dentro do quadrado de lado ℓ , poderíamos colocar m círculos distintos para preencher um lado do quadrado, assim estes círculos teriam, portanto, raios $r' = \ell/2m$. O número de círculos para preencher toda a área do quadrado seria, portanto, $n = m^2$. Assim a medida da área de cada círculo será $A_{1\odot} = \pi r'^2 = \pi(\ell/2m)^2 = \pi\ell^2/4m^2$. Como o número de círculos é $n = m^2$, a medida da área total dos círculos preenchedores seria, $A_{\odot} = n.A_{1\odot} = n.\pi r'^2 = m^2.\pi\ell^2/4m^2 = \pi\ell^2/4$. O que daria o mesmo percentual de vazios do que de um único círculo, qualquer que seja o número de círculos.

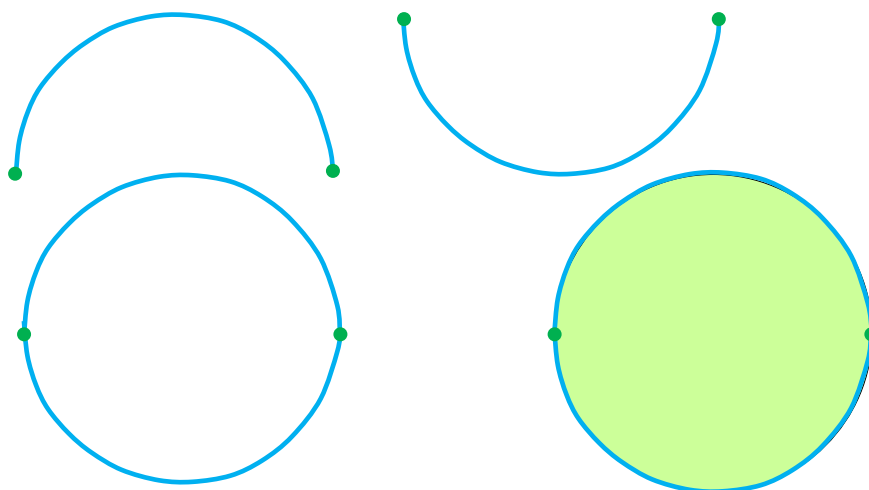
No entanto, se ampliarmos este número de círculos a infinito, $n \rightarrow \infty$, caberiam $m \rightarrow \infty$, pontos na lateral, ou em um dos lados do quadrado, o raio dos círculos tenderia a zero, $r' \rightarrow 0$, assim teríamos infinitos pontos (dimensão zero) com raio zero. Neste caso, em um primeiro momento poderíamos pensar que a medida da área dos círculos tenderia à zero. Assim o percentual de vazios poderia aparentar ser total, $P\%_{\text{vazios}} = (A_{\square} - A_{\odot})/A_{\square} = 1$ ou seja 100%. Ou, em outro contexto, geometricamente aparentaria que o círculo todo foi preenchido pelos pontos, uma vez que esses pontos estavam sem o incremento infinitésimo. Assim, matematicamente, este produto se transformaria em um paradoxo, pois, $A_{\odot} = n.A_{1\odot} = \infty.0$. Este é o ponto sem o incremento bidimensional circular. Se houver o incremento todo o espaço estaria preenchido.

4.27.7 - Reconstrução não Usual, Bidimensional do Círculo

Assim, poderíamos compor uma Reconstrução Bidimensional não usual, $R2_{\tilde{n}u}$, do círculo, considerando um segmento de reta na Geometria Riemanniana, o grande círculo de uma esfera. Este seria composto por dois segmentos de um semicírculo. Sendo assim, dois segmentos de reta destes, em sentidos distintos e interligados, perfazem uma circunferência, que se preenchidos internamente em seu plano com pontos, perfazem o círculo.

O segmento de linha encurvado estaria em uma dimensão não exatamente um, mas entre a dimensão um e dois. E teríamos um segmento de linha da Geometria Riemanniana, feita de um arco de circunferência convexo, de 180° ou π radianos. Arestas curvas unidas com dois vértices dessa união, separando-os virtualmente, como mostra a **Figura 98**. Seriam dois segmentos de linha encurvados, formando os dois lados do círculo.

Figura 98 - Dimensão dois (2D), da construção do círculo com duas arestas curvas externas, separados por dois vértices, lados externos curvos de dimensão fracionária, do lado externo do círculo

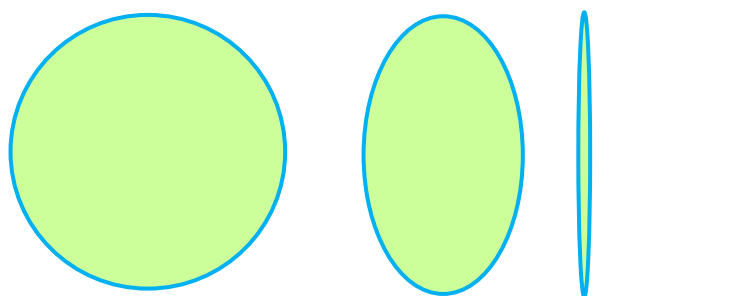


Fonte: Elaborado pelo autor

Formas distintas de se enxergar o círculo, a partir da dimensão três são mostradas na **Figura 99**.

Como o círculo é a figura de maior simetria em duas dimensões, ele pode ser visto a partir da dimensão três, em posições variadas nas seguintes posições dadas na **Figura 99**.

Figura 99 - Formas distintas de se enxergar o círculo, a partir da dimensão três



Fonte: Elaborado pelo autor

4.27.8 - Resumo das Características do Círculo

Como elementos de analogia que já fizemos da dimensão zero para a dimensão um, agora raciocinemos em termo da dimensão um para a dimensão dois, no caso do círculo.

Nota-se que para uma construção do círculo a partir do segmento de reta, são necessários infinitos elementos, ou segmentos de reta de comprimentos iguais, sendo traçados a partir de um ponto em todas as direções, ou rotacionando-se estroboscopicamente, este segmento, em torno de uma de suas extremidades, pontecendo o seu perímetro exterior, para a construção e formação da superfície do círculo. No entanto, neste caso, este segmento de reta ficaria todo escondido dentro da construção da superfície circular finita, ficando com apenas seus vértices reverberados do lado de fora formando externamente o arco de circunferência circular, ainda não definido como sendo um lado, por não ter se pensado ainda no segmento de reta semicircuferencial. Neste caso, a partir das dimensões fracionárias ele fica assim definido.

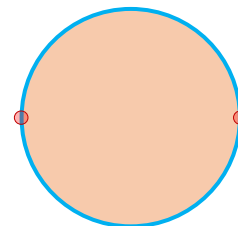
Observa-se, também, que se esses infinitos elementos usados para esta construção, forem colocados de volta na dimensão anterior, lado a lado entre si, preencheriam toda a dimensão anterior, a dimensão um, com uma reta. Vai aparecer, nesta situação, a formação de um novo conceito nesta dimensão dois, o conceito de superfície da figura geométrica, o círculo, criando uma área finita cuja medida é $S = \pi \cdot r^2$.

Por outro enfoque, os dois segmentos de linha curvos que formam a linha exterior do círculo, eles se repetem infinitamente em seu interior em uma simetria de qualquer posição, em todas as direções, precisando para isso ser definido apenas um dos seus vértices. Assim o outro vértice já fica definido e os seus dois segmentos de semicircunferências também.

Resumo das principais características do círculo, no **Quadro 29**.

Quadro 29 - Características da dimensão dois do círculo

Dimensão dois do círculo
Formato de representação: Face circular
Variável Dimensional: uma Face
Exterior: duas Arestas: segmentos de linha curvo; dois Vértices
Finalizadas por infinitas estruturas externas da dimensão zero: Infinitos
Pontos, uma expansão do ponto
Entre um ponto e seu oposto existe um diâmetro, havendo infinitos diâmetros que se cruzam em um único ponto.
Equação Geométrica Bidimensional: $V - A + F = 2 - 2 + 1 = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

Pode-se observar as características das dimensões até o círculo, como nos mostra **Quadro 29**, e no **Quadro 30**, de forma tabular suas Variáveis Geométricas Dimensionais (VGD).

Quadro 30 - Número de elementos geométricos da dimensão zero à dimensão dois para a superfície do círculo

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Aresta A	Face F	Elementos no interior das dimensões anteriores	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	1, ∞	$V - A + F = 1$
1D	2	1	0	∞	$V - A + F = 1$
2D	2	2	1	∞	$V - A + F = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

Para construir essa superfície circular, são necessários infinitos elementos dos segmentos de reta, ou segmentos de semicircunferência, ou de pontos, das dimensões anteriores, com incrementos infinitesimos, para a construção dessa superfície bidimensional do círculo.

4.28 - CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA TRIDIMENSIONAL DA ESFERA

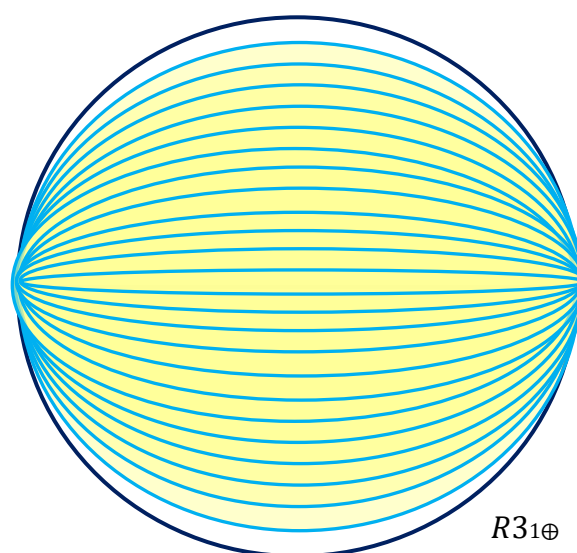
Na estrutura finita do círculo, da dimensão dois, poderíamos passar para a nova dimensão, a dimensão três, na construção de uma esfera.

4.28.1 - Primeira Reconstrução Tridimensional da Esfera

Em uma primeira Reconstrução Dimensional da esfera, ($R3_{1\oplus}$), instrumental, podemos construir a esfera através de uma rotação do eixo que passa pelo diâmetro do

círculo, produzindo uma reverberação no espaço da área do círculo por um ângulo de π radianos, produzindo com este movimento o volume da esfera, como mostra a **Figura 85**.

Figura 100 - Dimensão três (3D), da construção a partir do círculo da dimensão dois (2D), em uma rotação e reverberação do círculo de 180° , como Primeira Reconstrução Tridimensional da Esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

4.28.2 - Segunda Reconstrução Tridimensional da Esfera

Em uma Segunda Reconstrução Tridimensional da Esfera ($R3_{2\oplus}$), fazendo uma Reconfiguração Mereológica da bidimensão, recortamos infinitos círculos de raios diversos variando de 0 até ℓ . partindo da figura bidimensional de um círculo central de raio, produz-se círculos paralelos a ele, em ambas as direções perpendiculares a este círculo central, reverberando círculos paralelos com raios decrescentes, cujas beiradas devem ficar à uma distância do centro da esfera, sempre fixa, e de valor ℓ . Estes círculos de raios decrescentes decaem até um raio zero, um ponto, de ambos os lados, de cima e de baixo, a uma distância ℓ do centro círculo central inicial, formando a estrutura completa da esfera na tridimensão, como na **Figura 86**.

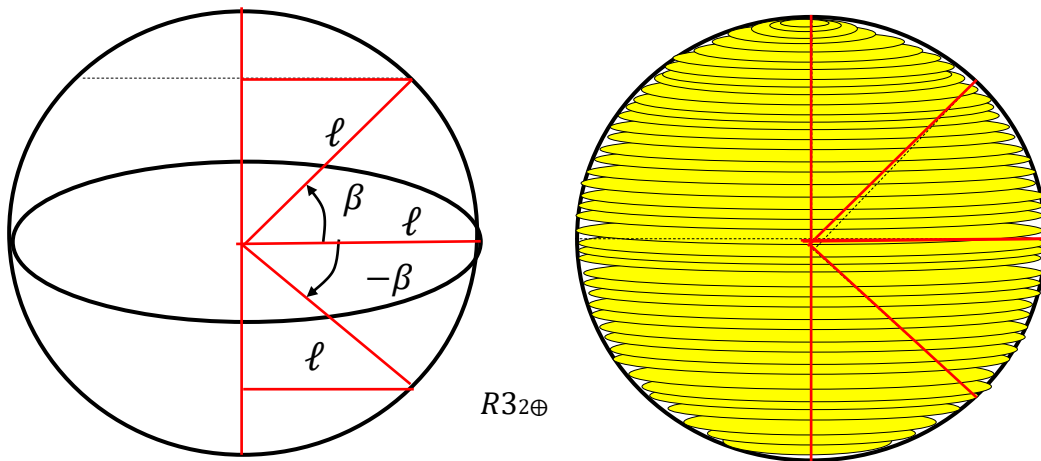
Fazemos uma Reconfiguração Mereológica da bidimensão, recortando infinitos círculos cujo raio vai de ℓ até zero.

Em segundo passo damos um incremento infinitesimal a estas círculos dz .

E em terceiro passo fazemos a Reconstrução Dimensional colocando esses infinitos círculos lado a lado, paralelamente mantendo seus perímetros equidistantes do centro do círculo maior.

Os valores dos raios desses círculos paralelos dependem do ângulo que suas extremidades fazem do círculo central, e têm valor, $r = \ell \cos\beta$, para β variando de 0 à $\pi/2$ e de 0 à $-\pi/2$, como mostra a **Figura 86**.

Figura 101 - Dimensão três (3D), passagem da segunda (2D) para a terceira dimensão (3D) a partir do círculo da dimensão dois (2D), em uma Segunda Reconstrução Dimensional



Fonte: Elaborado pelo autor

E esses planos circulares partindo do círculo máximo central, partem do diâmetro máximo ℓ e vão até zero de ambos os lados da face do círculo máximo. Todos esses círculos, logicamente devem ter a semente da próxima dimensão, a espessura infinitesimal, tendendo a zero.

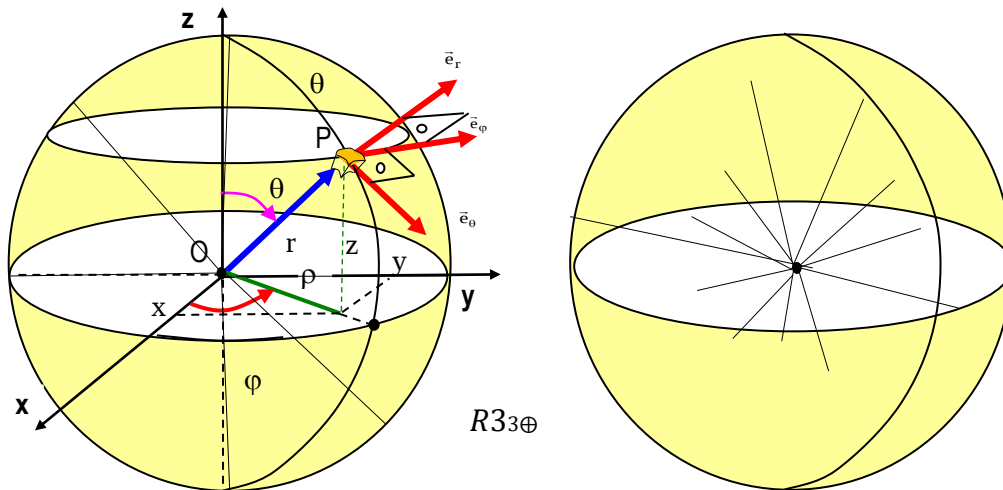
4.28.3 - Terceira Reconstrução Tridimensional da Esfera

Uma terceira Reconstrução Dimensional da esfera, partiríamos da dimensão zero, o ponto e dele faríamos uma retirada de infinitos pontos, em uma reconfiguração mereológica. Em uma segunda instância, daríamos a estes pontos uma semente virtual volumétrica de formato esférico, em infinitésimos tridimensionais mas ainda sendo a manifestação do ponto: $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$, com três infinitésimos na tridimensionalidade, variáveis independentes integradas em todas as três direções ortogonais, com a dimensão radial, r , variando de 0 à ℓ , uma dimensão de latitude, θ , variando de 0 à π , e uma dimensão de longitude, φ , variando de 0 à 2π , integramos a construção de toda a esfera. Esta integral pode ser separada em três integrais independentes,

já que as variáveis são ortogonais e linearmente independentes, varrendo todos os pontos da esfera, com mostra a **Figura 102 (a)**.

Seria equivalente a compor a esfera a partir de seu ponto central de onde saem linhas reverberadas radiais do ponto indo de 0 até a distância $r = \ell$, da latitude θ , de 0 à π e da longitude φ indo de 0 a 2π como mostra a **Figura 102 (b)**.

Figura 102 - Dimensão três (3D), da construção da esfera a partir do círculo da dimensão dois (2D), em uma Terceira Reconstrução Tridimensional ($R3_{3\oplus}$)



Fonte: Elaborado pelo autor

4.28.4 - Quarta Reconstrução Tridimensional da Esfera

Em uma quarta Reconstrução Dimensional, ($R3_{4\oplus}$), pode ser construída a esfera.

Em uma Reconfiguração Mereológica, partimos de infinitas figuras bidimensionais, que seriam cascas esféricas de área $A = 4\pi r^2$ e de raios diferentes que variam de ℓ até zero.

Em uma segunda instância, a partir destas cascas esféricas, incrementamos em cada uma delas, um raio infinitésimo dr , semente volumétrica para as superfícies bidimensionais fechadas, $dV = 4\pi r^2 dr$

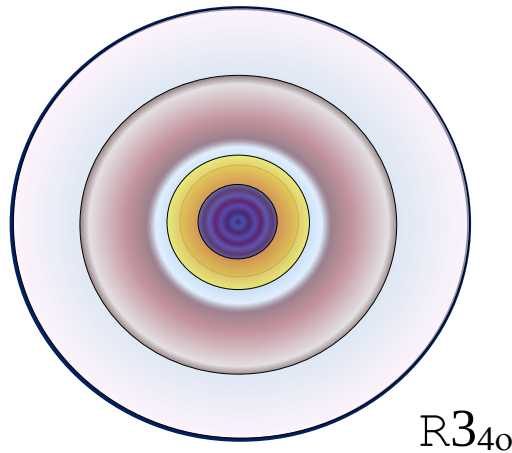
Sabemos que a superfície fechada já caracteriza uma dimensão já fracionária, ou seja, uma superfície interpenetrada na terceira dimensão.

Em uma Reconstrução Dimensional da Esfera, sequencia-se estas superfícies em ordem crescente e continuamente, até perfazer a unidade do Sólido Volumétrico de raio $r = \ell$.

$$V = \int dV = \int 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^\ell r^2 dr = \frac{4}{3}\pi \ell^3$$

Como mostra a **Figura 103**.

Figura 103 - Dimensão três (3D), da construção da esfera a partir do ponto de dimensão zero (0D), e cascas esféricas paralelas em raios crescentes até $r = \ell$, em uma Quarta Reconstrução Tridimensional da Esfera



Fonte: Elaborado pelo autor

4.28.5 - Reconstrução não Usual, Tridimensional da Esfera

Novamente como qualquer poliedro em qualquer dimensão, a Equação Geométrica das Dimensões, deve valer para figuras fechadas e convexas,

No caso da esfera, podemos relembrar o que nos levou aos elementos da dimensão anterior, argumentado a condição de que para os elementos do círculo, teríamos a condição de dois vértices e dois lados curvos.

No caso da esfera, podemos separar os seguintes elementos da esfera, inicialmente o novo conceito de sólido da esfera, $S_{3\oplus} = 1$, depois a separação dos seus dois hemisférios, faces curvas externas da esfera, $F_{3\oplus} = 2$. Nesse raciocínio teríamos, duas arestas curvas que separam estes dois hemisférios $A_{3\oplus} = 2$. E finalmente dois Vértices, $V_{3\oplus} = 2$, que separam as duas arestas.

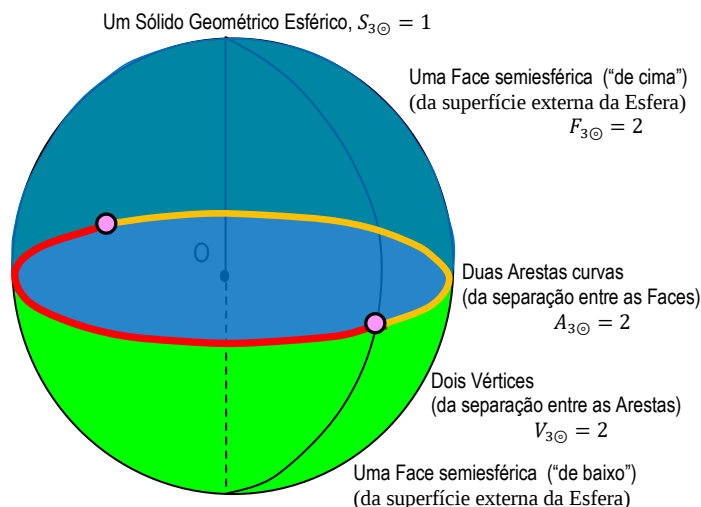
As **Figuras 104, 105 e 106** mostram estas distribuições de variáveis dimensionais.

As duas faces da esfera, $F_{3\oplus} = 2$, são as duas Faces, uma que se ilumina de um lado e a outra que se ilumina do outro.

Assim teríamos, a EGD, Equação Geométrica das Dimensões.

$$V_{3\oplus} - A_{3\oplus} + F_{3\oplus} - S_{3\oplus} = 2 - 2 + 2 - 1 = 1$$

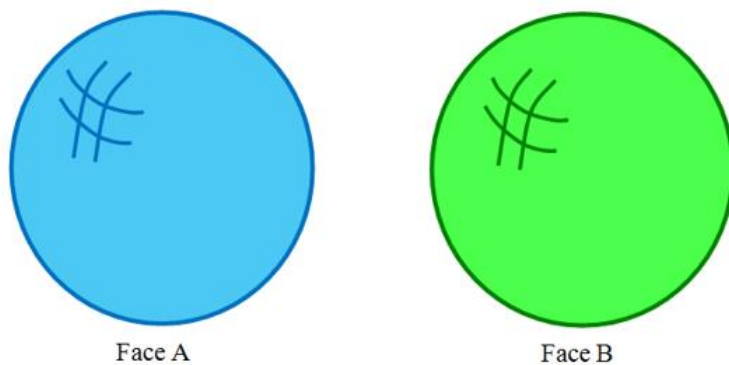
Figura 104 - Forma de se enxergar as duas faces de uma esfera com duas superfícies esféricas, duas faces, separadas por dois segmentos curvos, duas arestas, e separadas por dois vértices



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a esfera é a figura de maior simetria em três dimensões, ela pode ser vista em três dimensões nas seguintes posições, mostrando suas faces, como na **Figura 104 e 105**, olhando-se de um lado e olhando-se de outro lado de cada hemisfério.

Figura 105 - Formas distintas de se enxergar a esfera na dimensão 2, a partir da dimensão 3 e suas duas faces semiesféricas



Fonte: Elaborado pelo autor

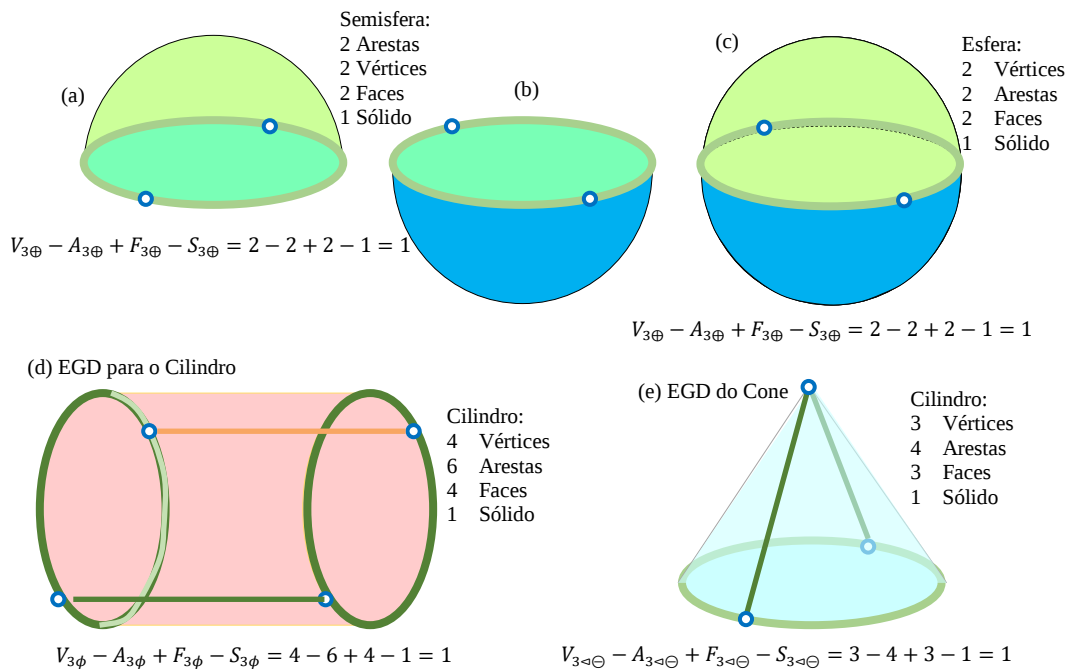
Aqui, deixa-se a ideia, da Reconstrução Dimensional não usual, da esfera. Uma superfície da Geometria Riemanniana, de Reconstrução dimensional 3 não usual, $R3_{\text{nu}}$, Esférica. A Esfera tridimensional contém um Sólido esférico, $S_{3\oplus} = 1$; contém duas Superfícies semiesféricas curvas, formando 2 Faces, $F_{3\oplus} = 2$, sendo que as duas superfícies semiesféricas têm dimensão fracionária, como definido, 2,05; contém duas Arestas curvas, $A_{3\oplus} = 2$, que separam ambas as duas superfícies semiesféricas, e que têm

dimensões fracionárias, 1,05, cada uma, e finalmente os dois Vértices, $V_{3\oplus} = 2$, que separam as duas Arestas.

Sendo assim, as duas semiesferas encurvadas, unidas, e preenchidas internamente, perfazem externamente as duas Faces da esfera. A primeira superfície, Riemanniana, curva, seria semiesférica, de 2π esterorradianos, sendo o mesmo para a segunda superfície, em sentido inverso, de cima e de baixo, como mostra a **Figura 106** (a) e (b). Unindo as duas semiesferas, resultam duas superfícies esféricas, duas Arestas curvas, dois Vértices, obtendo o sólido esférico, como a **Figura 106** (c).

Assim as características geométricas definidas e observáveis na esfera construída, serão: 1 Sólido esférico: $S_{3\oplus} = 1$; 2 Faces, semiesféricas: $F_{3\oplus} = 2$; 2 Arestas, semicircunferenciais: $A_{3\oplus} = 2$; 2 Vértices no término das semicircunferências: $V_{3\oplus} = 2$.

Figura 106 - Dimensão três (3D): (a e b) Semiesferas com 2 Vértices, 2 Arestas curvas, 2 Faces (1 curva e 1 plana) e 1 Sólido; (c) Esfera, o mesmo mas com 2 Vértices, 2 Arestas curvas e 2 faces curvas; para outras peças redondas: (d) o Cilindro: 4 Vértices, 6 Arestas (4 arestas curvas e 2 retas), 4 Faces (2 Faces curvas e 2 planas), 1 Sólido cilíndrico; (e) Cone: 3 Vértices, 4 Arestas (2 arestas curvas e 2 retas), 3 Faces (2 Faces curvas com curvatura indo a infinito e 1 Face plana) e 1 Sólido cônico



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Figura 106** (d) caracteriza, com o mesmo paradigma de contagem, as variáveis dimensionais do cilindro, que teria as seguintes variáveis geométricas: $S_{3\phi} = 1$: 1 Sólido cilíndrico; $F_{3\phi} = 4$: 4 Faces, com 2 Faces planas e 2 Faces curvas, com curvaturas constante; $A_{3\phi} = 6$: 6 Arestas, com 4 Arestas curvas, semicircunferências, e 2 Arestas

retas; $V_{3\phi} = 4$: 4 Vértices. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a tridimensionalidade do Cilindro:

$$V_{3\phi} - A_{3\phi} + F_{3\phi} - S_{3\phi} = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

A **Figura 106 (e)** caracteriza, com o mesmo paradigma de contagem, as variáveis dimensionais do cone, que teria as seguintes variáveis geométricas: $S_{3\triangleleft\ominus} = 1$: 1 Sólido cônico; $F_{3\triangleleft\ominus} = 3$: 3 Faces, com 1 Face plana e 2 Faces curvas, com curvatura crescente tendendo a infinito; $A_{3\triangleleft\ominus} = 4$: 4 Arestas, com 2 Arestas retas e 2 Arestas curvas, semicircunferências; $V_{3\triangleleft\ominus} = 3$: 3 Vértices. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a tridimensionalidade do Cone:

$$V_{3\triangleleft\ominus} - A_{3\triangleleft\ominus} + F_{3\triangleleft\ominus} - S_{3\triangleleft\ominus} = 3 - 4 + 3 - 1 = 1$$

4.28.6 - Paradoxo geométrico

Quando temos uma esfera inscrita dentro de um cubo, e o cubo tem lado ℓ , o volume do quadrado é $V_{\boxplus} = \ell^3$ e como o raio da esfera é $r = \ell/2$, o Volume da esfera é $V_{\oplus} = 4\pi r^3/3 = 4\pi \left(\frac{\ell}{2}\right)^3/3 = \pi\ell^3/6$. Assim o percentual do volume de vazios com o volume total é $P\%_{vazios} = (V_{\boxplus} - V_{\ominus})/V_{\boxplus} = 1 - \pi/6 = 0,4764 = 47,64\%$. O volume preenchido da esfera em relação ao cubo é $P\%_{preenchida} = V_{\ominus}/V_{\boxplus} = \pi/6 = 0,5236 = 52,36\%$.

Se aumentarmos o número de esferas ao longo do lado do cubo de lado ℓ , poderíamos colocar m esferas em um lado do cubo, assim essas esferas teriam, portanto, raio $r = \ell/2m$. O número de esferas, $n = m^3$, dentro do cubo, assim a área de cada círculo será $V_{1\ominus} = 4\pi r^3/3 = 4\pi \left(\frac{\ell}{2m}\right)^3/3 = 4\pi\ell^3/3 \times 8m^3 = \pi\ell^3/6m^3$. Como o número de esferas é $n = m^3$, a área total das esferas seria, $V_{\ominus} = n.V_{1\ominus} = n.4\pi r^2/4 = m^3.\pi\ell^3/$

$6m^3 = \pi\ell^3/6$. O que daria o mesmo percentual de vazios do que de uma única esfera, qualquer que seja o número de esferas.

No entanto, se ampliarmos este número de esferas a infinito, $n \rightarrow \infty$, caberiam $m \rightarrow \infty$, pontos espacialmente incrementados, na lateral do quadrado, o raio dos círculos tenderia a zero, $r \rightarrow 0$, assim teríamos infinitos pontos (dimensão zero) com raio zero, mas incrementados volumétrica e virtualmente. Neste caso a área das esferas tenderia à zero. Assim o percentual de vazios de volumes seria total, ou seja, seria $P\%_{vazios} = (V_{\square} - V_{\odot})/V_{\square} = 1 = 100\%$.

Sendo assim teríamos um número de esferas de raio infinitésimo, com um certo número de esferas possível no cubo,

$$V_{1\odot} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi\left(\frac{\ell}{2m}\right)^3}{3} = \frac{4\pi\ell^3}{3 \times 8m^3} = \frac{\pi\ell^3}{6} m^3.$$

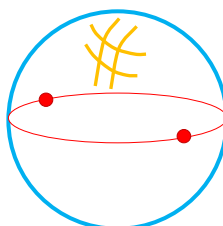
Como o número de esferas é $n = m^3$, a área total das esferas seria, $V_{\odot} = n \cdot V_{1\odot} = n \cdot 4\pi r^3/3 = m^3 \cdot \pi\ell^3/6m^3 = \infty \cdot 0$, uma indeterminação. Esta indeterminação seria resolvida pelo preenchimento, devido aos pontos virtuais?

4.28.7 - Resumo das Características da Esfera

Portanto, a visão por segmentos curvos, faces curvas se aplica à EGD, visão já adaptada à geometria de dimensões fracionárias. Não daria de forma evidente para apontar com o dedo as faces, arestas e vértices, mas definido um ponto da esfera externa como primeiro vértice e um grande círculo, o outro vértice, as arestas e as faces já ficam definidas. Sabemos que na Matemática, não necessariamente temos as definições de forma evidente, mas muitas delas surgem no mundo das ideias, inicialmente, na virtualidades, ou na forma de se ver, como os Enfoques ou Perspectivas, que se definem da *noese*, numa forma semiótica de classificá-la, que depois se tornam imprescindíveis para a explicação e definição dos elementos.

Assim podemos resumir as características da esfera como a **Quadro 31**.

Quadro 31 - Características da dimensão três na Esfera

Dimensão três da Esfera	
Formato de representação: Esfera	
Nova Variável Dimensional: Sólido Esférico	
Finalizadas por duas faces semiesféricas externas, duas arestas semicirculares e dois vértices.	
Internamente havendo infinitos diâmetros, infinitas semicircunferências, infinitos pontos.	
Equação Geométrica Dimensional: $V - A + F - S = 2 - 2 + 2 - 1 = 1$	

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim as características geométricas definidas e observáveis na esfera construída, serão, 1 Sólido, $S_{3\oplus} = 1$, 2 Faces, $F_{3\oplus} = 2$, 2 Arestas, $A_{3\oplus} = 2$, 2 Vértices, $V_{3\oplus} = 2$. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES
para a tridimensionalidade da Esfera:
 $V_{3\oplus} - A_{3\oplus} + F_{3\oplus} - S_{3\oplus} = 2 - 2 + 2 - 1 = 1$

Portanto, definida essas abordagens, utilizamos as analogias das dimensões crescentes, podemos sempre verificar institucionalmente as variáveis dimensionais para a geometria das dimensões.

Os elementos da Família 3, do círculo-esfera se arranjam como no **Quadro 32**.

Quadro 32 - Variáveis Dimensionais da Família 3, ou Família círculo-esfera, ou CEGED 3, Matriz dimensional de Figuras Geométricas da Esfera até a 3D

Dim.D X Var. Dim.	Vértice V	Aresta A	Face F	Sólido S	Elementos interiores	Equação Geométrica das Dimensões
0D	1	0	0	0	1, ∞	$V - A + F - S = 1$
1D	2	1	0	0	∞	$V - A + F - S = 1$
2D	2	2	1	0	∞	$V - A + F - S = 1$
3D	2	2	2	1	∞	$V - A + F - S = 1$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.29 - HIPERESFERA

A estrutura finita da esfera, da dimensão três, pode ser passada para a nova dimensão, a dimensão quatro, na reconstrução dimensional de uma hiperesfera.

4.29.1 - Primeira Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera

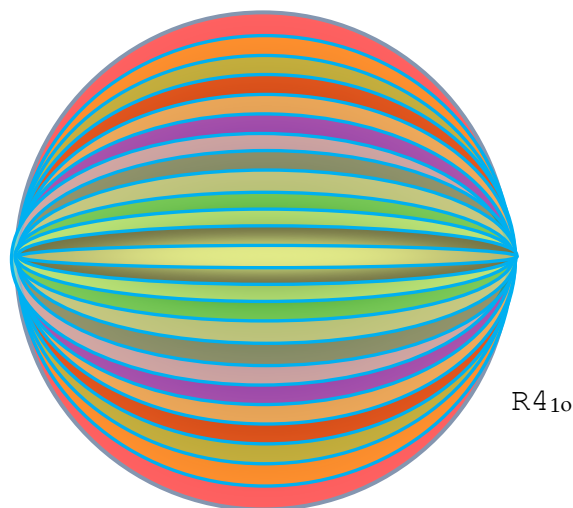
Em uma Primeira Reconstrução quadridimensional da Hiperesfera ($\mathcal{R}4_{10}$), podemos realizá-la em três fases.

Iniciando por realizar uma Reconfiguração Mereológica, recorta-se assim todo o espaço tridimensional em esferas iguais de raio ℓ .

Em um segundo momento, incrementa-se cada esfera de um infinitésimo de arco $d\ell = \ell d\varphi$ de rotação na direção do quarto eixo, em todas as esferas.

Em um terceiro passo, realiza-se a Reconstrução Dimensional, mantendo o eixo de rotação e colocando as infinitas esferas incrementadas do arco, em rotação, até montar por completo a Hiperesfera, como na **Figura 107**.

Figura 107 - Dimensão quatro (4D), da construção da hiperesfera em uma primeira Reconstrução Quadridimensional, a partir da dimensão três da esfera (3D)



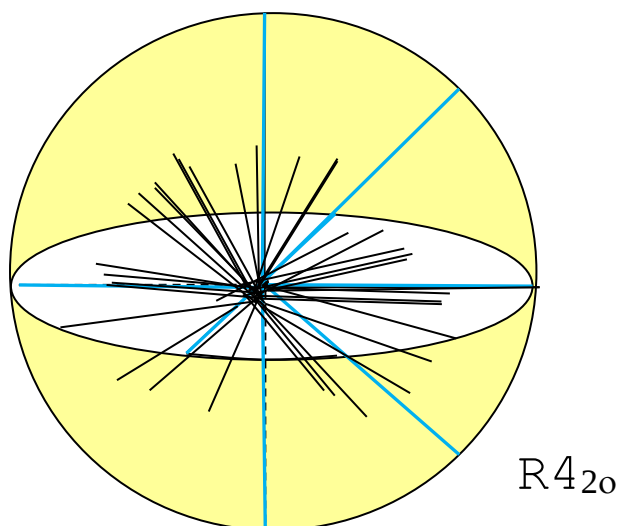
Fonte: Elaborado pelo autor

Veja-se no final do Capítulo 3, sobre o teorema de Pappus, como gerar uma hiperesfera a partir da rotação de uma semiesfera na quarta dimensão. Usamos o teorema de Pappus fazendo uma extrapolação para sua manifestação na quarta dimensão.

4.29.2 - Segunda Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera

Em uma Segunda Reconstrução quadridimensional ($\mathcal{R}_{4_{20}}$) da Hiperesfera, realizada a partir de um ponto, de onde partem raios em todas as direções dos quatro eixos da quadridimensão, variando de 0 à até que perfaçam uma distância do raio de comprimento ℓ , como na **Figura 108**. Fazemos a rotação em φ desses raios de 2π rad, $\text{sen}\theta d\theta$ variando de 0 à π , e finalmente uma rotação na quarta dimensão da esfera $d\psi$, variando de 0 à π . Ou seja um Hipervolume reverberado do ponto, com os infinitésimos, $dH = dr \cdot r d\theta \cdot r \text{sen}\theta d\varphi \cdot r d\psi$, dando portanto, $dH = r^3 \text{sen}\theta dr d\theta d\varphi d\psi$, sendo $H = \frac{1}{2}\pi^2 \ell^4$.

Figura 108 - Dimensão quatro (4D), da construção da hiperesfera em um segundo estilo de visualização, a partir da dimensão zero de um ponto indo com mesmo raio ao (4D)



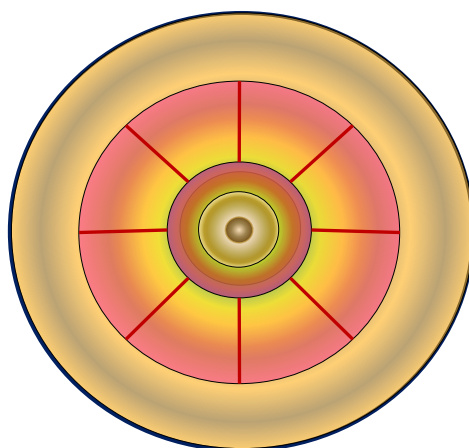
Fonte: Elaborado pelo autor

No caso da hiperesfera, é também uma expressão reverberada do ponto, da dimensão zero para a quadridimensionalidade.

4.29.3 - Terceira Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera

Em uma terceira Reconstrução Quadridimensional, ($\mathcal{R}_{4_{40}}$), esculpe-se a hiperesfera, a partir da quarta dimensão de forma como se enxergássemos sua formação de forma Instrumental, a partir de um ponto, reverberando hiperesferas superpostas de raio dr crescentes, até completar o raio ℓ , como mostra a **Figura 109**.

Figura 109 - Dimensão quatro (4D), da construção da hiperesfera em um terceiro tipo de visualização, em construção Instrumental a partir da 4D

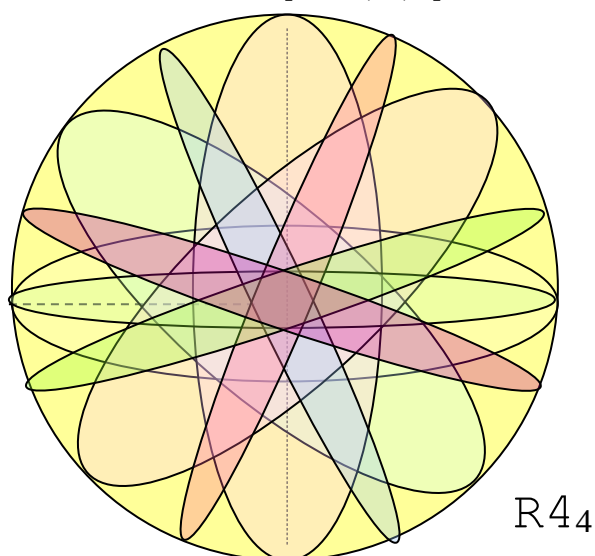


Fonte: Elaborado pelo autor

4.29.4 - Quarta Reconstrução Quadridimensional da Hiperesfera

Em uma quarta Reconstrução quadridimensional ($\mathcal{R}4_0$) da Hiperesfera, parte-se de um sólido esférico de raio ℓ , de onde se gira, ou rotaciona-se este sólido em torno de seu eixo de simetria em direção a nova dimensão 4D, formando a hiperesfera como mostra a **Figura 110**.

Figura 110 - Esfera na Dimensão quatro (4D), quarta reconstrução



Fonte: Elaborado pelo autor

A **Figura 110** ilustra a representação em dimensão quatro (4D), da construção da hiperesfera em uma quarta Reconstrução Quadridimensional, a partir do rotacionar de uma face circular girando em torno do centro desse círculo varrendo as quatro dimensões do espaço (4D).

4.29.5 - Resumo da Dimensão Quatro para a Hiperesfera

Usando os elementos de analogia como já fizemos na dimensão zero para a dimensão um, da dimensão um para a dimensão dois, e da dimensão dois para a dimensão três, agora raciocinemos em termo da dimensão três para a dimensão quatro.

Como todos esses elementos na hiperesfera ficam escondidos, e ela é um elemento único simétrico. Podemos evidenciar elementos em sua simetria como o caso de sua geração pela esfera rotacionada na dimensão quatro que faz aparecer a hiperesfera, mas ela desaparece em seu interior de tal forma que podemos evidenciar **por analogia** as seguintes especificações.

Continuam a aparecer **dois vértices**, $V_{4\odot} = 2$, que separam dois segmentos de reta curvos no formato de **duas semicircunferências (Arestas)**, $A_{4\odot} = 2$, que separam duas faces superficiais curvas, formando **duas faces semiesféricas**, $F_{4\odot} = 2$, e que agora separam **dois sólidos esféricos**, $S_{4\odot} = 2$ que irão compor **um hipersólido hiperesférico**, $H_{4\odot} = 1$.

Assim as características geométricas definidas e observáveis do Hipercubo construído, serão, 1 Hipersólido, $H_{4\odot} = 1$, 2 Sólidos, $S_{4\odot} = 2$, 2 Faces, $F_{4\odot} = 2$, 2 Arestas, $A_{4\odot} = 2$, 2 Vértices, $V_{4\odot} = 2$. E a Fórmula que leva à unidade ou Equação Geométrica das Dimensões se configura abaixo.

EQUAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DIMENSÕES

para a quadridimensionalidade da Hiperesfera:

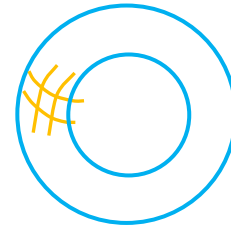
$$V_{4\odot} - A_{4\odot} + F_{4\odot} - S_{4\odot} + H_{4\odot} = 2 - 2 + 2 - 2 + 1 = 1$$

A Expressão, a Equação Geométrica das Dimensões, aparece ao modo de uma equação “divina”, por resultar sempre sua tendência à unidade, ou seja, todas as variáveis geométricas das dimensões (VAFSH) de qualquer figura leva sempre à unidade, que mantém o mesmo resultado desde a dimensão zero, por simetria ou analogia, o uno, a unidade, da qual se demonstra, posteriormente, valer para qualquer dimensão inteira.

Veja-se as características da dimensão quatro da Hiperesfera no **Quadro 33**.

Quadro 33 - Características da dimensão quatro para a hiperesfera

Dimensão quatro
Formato de representação: Hiperesfera
Variável dimensional: Hipersólido Hiperesférico
Uma hiperesfera, separada por duas semiesferas, separadas por duas faces semiesféricas, separadas por duas semicircunferências, separadas por dois vértices.
Entre um ponto e seu oposto existe um diâmetro, havendo infinitos diâmetros que se cruzam em um único ponto nas três direções.
Equação Geométrica das Dimensões: $V - A + F - S + H = 2 - 2 + 2 - 2 + 1 = 1$



Fonte: Elaborado pelo autor

4.29.6 - Resumo dos Elementos Geométricos das Dimensões da Família Dimensional 3

A regularidade nos elementos geométricos dos elementos circulares é distinta nos outros corpos, uma reverberação do ponto na zerodimensionalidade, unidimensionalidade, bidimensionalidade ou tridimensionalidade. Como mostramos no quadro em resumo, **Quadro 34.**

Quadro 34 - Número das variáveis dimensionais geométricas da dimensão zero à dimensão quatro, da Família Dimensional 3 até a hiperesfera (4D). E posteriormente até a dimensão 7

D $\times H$	$V=H_0$ 0H	$A=H_1$ 1H	F 2H	S 3H	H 4H	5H	6H	7H	$\sum_{i=1}^H H_i$ $= 2D + 1$	H_i	EG D_D
0D	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1, ∞	1
1D	2	1	0	0	0	0	0	0	3	∞	1
2D	2	2	1	0	0	0	0	0	5	∞	1
3D	2	2	2	1	0	0	0	0	7	∞	1
4D	2	2	2	2	1	0	0	0	9	∞	1
5D	2	2	2	2	2	1	0	0	11	∞	1
6D	2	2	2	2	2	2	1	0	13	∞	1
7D	2	2	2	2	2	2	2	1	15	∞	1

Fonte: Elaborado pelo autor

Usando o princípio de **analogia**, vamos reconstituir rapidamente as regras dimensionais para a nova figura e de qualquer nova figura dimensional.

São necessários infinitos elementos, Sólidos (esferas), ou Faces (círculos), ou Segmentos de reta, ou Pontos, das dimensões anteriores, com incrementos infinitesimos, para a construção desse Hipersólido quadridimensional da Hiperesfera.

Colocados esses infinitos elementos da formação do Hipersólido quadridimensional da Hiperesfera, de volta na dimensão anterior, ela ficaria totalmente preenchida por eles. Ou seja, na estrutura de cada uma das peças da nova dimensão, cabe um universo dimensional completo da dimensão anterior (Universo Tridimensional).

Relacionada o número dessas variáveis dimensionais externas e finitas da nova figura dimensional formada, Vértice, Aresta e Face e Sólido e Hipersólido, elas obedecem à Equação Geométrica das Dimensões, que sempre leva à unidade:

$$V - A + F - S + H = 2 - 2 + 2 - 2 + 1 = 1$$

Determinando as Equações de Recorrência para as variáveis dimensionais entre $D \times H$, para a Matriz da Família Dimensional 3, onde escrevemos até a 11ª dimensão, ou D-ésima dimensão, no **Quadro 35**, na determinação de qualquer variável dimensional $G_{D,H}$ em cada D-ésima dimensão D inteira, para cada variável dimensional H.

4.30 - FÓRMULAS RECURSIVAS PARA A FAMÍLIA DIMENSIONAL 3

Generalizando a Família Dimensional 3 para as demais dimensões no **Quadro 35**.

Quadro 35 - Generalização da Matriz da Hiperesfera da Família dimensional 3

$G_{D,H}$	H=0 H ₀ =V Vértice	H=1 H ₁ =A Aresta	H=2 H ₂ =F Face	H=3 H ₃ =S Sólido	H=4 H ₄ =H Hipersólido	H=5 H ₅	H=6 H ₆	H=7 H ₇	H=8 H ₈	H=9 H ₉	H=10 H ₁₀	H=11 H ₁₁	$\sum_{H=0}^H$ = 2D + 1	EQD _D
D=0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
D=1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
D=2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	1
D=3	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	7	1
D=4	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	9	1
D=5	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	11	1
D=6	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0	13	1
D=7	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	0	15	1
D=8	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0	0	17	1
D=9	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	0	19	1
D=10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0	21	1
D=11	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	23	1

Fonte: Elaborado pelo autor

4.30.1 - Primeira Fórmula Recursiva dos Elementos da matriz da Família Dimensional 3, círculo-esfera

A Primeira Fórmula Recursiva dos Elementos da matriz da Família Dimensional 3 leva às seguintes expressões.

$G_{D,H>D} = 0$, todos os termos de $H>D$ são nulos
 $G_{D,H=D} = 1$, o último termo ($H=D$) é igual à unidade
 $G_{D,H<D} = 2$, todos os termos de $H<D$ são iguais à dois

sendo

$D = \text{Dimensão } D \text{ ligada às Variáveis Geométricas Dimensionais } 0 \leq H \leq D$

$H = \text{Variável Geométrica Dimensional} = 0(V), 1(A), 2(F), 3(S), 4(H), 5, 6, \dots, D.$

$H = 0 (V \text{ ou } H_0 \text{ ou Vértices}), H = 1 (A \text{ ou } H_1 \text{ ou Arestas (Edges)}),$

$H = 2 (F \text{ ou } H_2 \text{ ou Faces}), H = 3 (S \text{ ou } H_3 \text{ ou Sólidos}),$

$H = 4 (H \text{ ou } H_4 \text{ ou Hipersólidos}), H = 5 (H_5 \text{ ou Hiper-5-sólidos}) \dots$

$G_{D,H} = \text{Elemento da Matriz Dimensional que relaciona na dimensão } D,$

$\text{o número de elementos da variável } H, \text{ da figura geométrica } (0 \leq H \leq D)$

4.30.2 -Equação Geométrica das Dimensões ou Segunda Fórmula

Recursiva dos Elementos de Linha da Matriz válida para toda a Família Dimensional 3, círculo-esfera, e sua Demonstração para qualquer dimensão D

A Segunda Fórmula Recursiva dos elementos linha das Dimensões, na Família Dimensional 3, que é mais conhecida como **Equação Geométrica das Dimensões (EGD)**, pois vale para todas as figuras poliédricas convexas de todas as Famílias Dimensionais, em uma dada dimensão, é dada pela soma dos elementos de linha pares e a subtração dos elementos de linha ímpares, se igualando sempre à unidade.

Em representação algébrica de notação,

$$EGD_D = G_{D,0} - G_{D,1} + G_{D,2} - G_{D,3} \dots \pm G_{D,H_{\text{par ou ímpar}}} = 1$$

$$EGD_D = \sum_{H=0}^D (-1)^H G_{D,H} = 1$$

Mantendo as características definidas para a Família Dimensional 3, da Esfera:

$$G_{D,H>D} = 0$$

$$G_{D,H=D} = 1$$

$$G_{D,H<D} = 2$$

Para dimensão D par:

$$EGD_D = \underbrace{\left[\sum_{H=0}^{D_{\text{par}}} (-1)^H \cdot 2 \right]}_{=0} + 1 = 1$$

Para dimensão D ímpar:

$$EGD_D = \underbrace{\left[\sum_{H=0}^{D_{\text{ímpar}}} (-1)^H \cdot 2 \right]}_{=2} + 1 = 1$$

c.q.d.

Neste caso, quando o número do termo H máximo é ímpar, H_1 , ou H_3 ou H_5 , ou ..., a soma de seus números dois se anulam mutuamente e o último termo é o número um positivo, assim o um é o resultante. E quando o número do termo H máximo é par, H_0 , ou H_2 ou H_4 , ou ..., na soma sobra um número dois que é positivo portanto ao subtrair do último termo a unidade negativa, resulta também sempre igual à unidade final.

Demonstra-se, portanto, que a Equação Geométrica das Dimensões é válida também para qualquer dimensão da Família Círculo-esfera.

4.30.3 - Terceira Fórmula Recursiva da Soma dos elementos de linha da Família Dimensional 3

A Terceira Fórmula Recursiva dos elementos de linha da Família Dimensional 3 recebe a seguinte fórmula, ligada à soma de todas as variáveis de linha da matriz das dimensões.

S_D = Soma dos elementos de linha da matriz da Família Dimensional 3

Nesta forma de representação, a soma dos elementos de linha da matriz dimensional da família círculo-esfera é sempre igual a $2D+1$.

$$S_D = G_{D,0} + G_{D,1} + G_{D,2} + G_{D,3} \dots + G_{D,D} = 2D + 1$$

$$S_D = \sum_{H=1}^D G_{D,H} = 2D + 1$$

$$\sum_{H=1}^D G_{D,H} - 2D = 1$$

4.31 - RESUMO DAS RECONSTRUÇÕES DIMENSIONAIS

Relacionemos em resumo, no **Quadro 36** a seguir, as diversas visualizações das Reconstruções Dimensionais da Geometria das Dimensões, da dimensão zero à dimensão quatro, por meio de Reconfigurações Mereológicas, Incrementos Infinitesimais, Reconstruções Dimensionais e Reconstruções Instrumentais de acordo com a Teoria de Duval, e que foram desenvolvidos nesta pesquisa.

Quadro 36 - Tabela das Reconstruções Dimensionais por meio de Reconfigurações Mereológicas Incrementos Infinitesimais e Reconstruções Instrumentais

Dimensões	Estrutura	Reconstruções Dimensionais
Dimensão 0	Ponto	$R0_1, R0_2, R0_3, R0_4$
Dimensão 1	Infinito Segmento	$R1_\infty, R1_\infty^\sim$ $R1_1, R1_2, R1_3, R1_4$
Dimensão 2	Infinito Quadrado Triângulo Círculo	$R2_\infty, R2_\infty^\sim$ $R2_{1\Box}, R2_{2\Box}, R2_{3\Box}, R2_{4\Box}$ $R2_{1\Delta}, R2_{2\Delta}, R2_{3\Delta}, R2_{4\Delta}$ $R2_{1o}, R2_{2o}, R2_{3o}, R2_{4o}, R2_{flu}$
Dimensão 3	Infinito Cubo Tetraedro Esfera	$R3_\infty, R3_\infty^\sim$ $R3_{1\Box}, R3_{2\Box}, R3_{3.1\Box}, R3_{4.1\Box},$ $R3_{1\Delta}, R3_{2\Delta}, R3_{3\Delta}, R3_{4\Delta}$ $R3_{1o}, R3_{2o}, R3_{3o}, R3_{4o}, R3_{flu}$
Dimensão 4	Infinito Tesseract Pentacoro Hiperesfera	$R4_\infty$ $R4_{1\Box}, R4_{2\Box}, R4_{3\Box}, R4_{4\Box}$ $R4_{1\Delta}, R4_{2\Delta}, R4_{3\Delta}, R4_{4\Delta},$ $R4_{1o}, R4_{2o}, R4_{3o}, R4_{4o}, R4_{flu}$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.32 - DIMENSÃO D - DIMENSÃO D QUALQUER OU ESTRUTURA D-DIMENSIONAL OU MULTIDIMENSIONAL

A teoria das supercordas, unificação das quatro forças de interação principal da natureza, força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear fraca e força nuclear forte, é uma teoria da física que se utiliza da multidimensionalidade. Trabalha-se nesta teoria com 11 dimensões, e na teoria M, das membranas, se utiliza de 26 dimensões, nas Supercordas. Considera esta teoria, as dimensões espaciais acima da dimensão três, enroladas no microcosmo, obtendo modelos e explicações para o comportamento das diversas forças existentes, nos Modelos do Universo e da Mecânica Quântica, tentando sua unificação através da tentativa de uma teoria do tudo, que se preocupa em explicar todos os fenômenos físicos observados, do micro ao macrocosmo.

Na matemática, a geometria multidimensional os espaços curvos, a álgebra de matrizes, a teoria de grupos, a matemática de tensores, permite trabalhar com tais modelos de muitas dimensões.

Na Geometria das Dimensões, expressões se configuram de forma lógica para a existência até uma D-ésima dimensão inteira. A realidade matemática se configura de forma existencial para qualquer dimensão D e com a lógica das equações ou leis naturais da linguagem matemática.

No Capítulo 5, se passa às considerações finais.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

*“A verdadeira ignorância não é a ausência de conhecimentos,
mas é feita da negação em adquiri-los.”*

*“Eu posso estar equivocado e você pode estar com a razão, e com um esforço,
podemos os dois nos aproximarmos da verdade.”*

Karl **POPPER** (1902-1994, 92)

“First they ignore you, then they laugh at you, then they fight you, then you win.”

Mahatma **GHANDI** (1869-1948,79)

“O aumento de conhecimento depende por completo da existência de desacordo.”

“É impossível falar de tal maneira que não se possa ser mal interpretado.”

Our knowledge can only be finite, while our ignorance must necessarily be infinite.”

Karl **POPPER** (1902-1994,92)

*“No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior,
destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que,
no próprio espírito é obstáculo à espiritualização.”*

Gaston **BACHELARD** (1884,1962,78)

*“O estudante aprende por adaptação de si mesmo a um milieu da qual gera contradições, dificuldades e
desequilíbrios, além daquela que a sociedade humana produz. Este conhecimento, resultado da adaptação do
estudante, é manifestado em si mesmo por novas responsabilidades que provê as evidências do aprendizado.”*

Guy **BROUSSEAU** (1933, -,86)

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”

Albert **EINSTEIN** (1879-1955, 79)

“A Ciência é a estética da inteligência.”

Gaston **BACHELARD** (1884-1962, 76)

“A Didática é o eterno aperfeiçoamento da estética do conhecimento que está sempre aumentando.”

Chegando às considerações finais, ressaltamos a importância do estudo da Geometria das Dimensões na Educação Matemática para a ampliação de conhecimentos do estudante.

Esta pesquisa se destina ao ensino da matemática, dando mais estrutura ao referencial epistemológico da Geometria das Dimensões na abrangência dos referenciais da Educação Matemática. A interiorização do conhecimento em cada estudante deve ser identificada por suas manifestações de anseio e entusiasmo, no sentido de se redescobrir, para avançar em reinvenções pessoais.

O que se buscou inicialmente nesta pesquisa, por meio da metodologia sugerida por Duval, foi a utilização como motivo fundamental, do estudo das Dimensões na Geometria, indo até a descrição da quadridimensionalidade, partindo em um crescendo, da dimensão zero, por meio de uma diversidade de visualizações, chegar à descrição das figuras quadridimensionais de forma figural. Não conseguimos encontrar uma pesquisa que

abrangesse esse enfoque de forma satisfatória, daí o interesse na realização e evolução dessa pesquisa.

Não podemos afirmar que não existam trabalhos de pesquisa que pontuem os assuntos desta pesquisa, mas ao buscar por estes elementos, de posse da metodologia de Duval, no desenvolvimento didático da construção objetivando o desenvolvimento da Educação Matemática neste tema, chegamos aos elementos de extremo interesse, na tentativa de dar continuidade ao envolvimento da pesquisa dentro das Dimensões na Geometria. Daí caminhou-se por determinando formas de ampliar a pesquisa dentro da Geometria das Dimensões.

Um desses elementos mais impressionantes que encontramos, “por acaso”, fruto da metodologia de pesquisa aplicada foi a **Equação Geométrica das Dimensões, EGD**, que se mostrou válida para todas as dimensões, famílias de curvas distintas, e também válida para a quarta dimensão, que depois, como Lei Matemática, se mostrou válida para qualquer dimensão acima da dimensão quatro e em todas as Famílias de figuras. Foi neste instante que foi dando certo os elementos dessa equação em todas as dimensões. Naturalmente a Equação Geométrica das Dimensões (EGD) se revelou válida para a Família 1, do Quadrado-cubo. Posteriormente ao se determinar fórmulas recursivas para dimensões maiores dessas famílias, ela também se revelou válida até a décima primeira dimensão que construímos matricialmente de forma tabelar. Posteriormente obtivemos também a validade desta Equação Geométrica das Dimensões para a Família 2, do Triângulo-tetraedro, também válida até a décima-primeira dimensão de forma tabelar.

Uma das últimas famílias que encontramos a validade da EGD, Equação Geométrica das Dimensões, foi a família 3, do Círculo-esfera, uma vez que não conseguíamos adequar a ela as variáveis dimensionais geométricas (VAFSH), Vértice, Aresta, Face, Sólido, Hipersólido, requeridas na EGD. Até que ao recorrermos à Geometria Riemanniana, passamos a definir o segmento de reta nesta Geometria como uma curva em forma de semicircunferência, raio constante e no limite da visualização de um círculo em 2D, para o caso de uma reta completa Riemanniana, o grande círculo (2D) que teria em seus limites externos, terminais à visualização, dois segmentos semicirculares, terminadas por dois vértices, portanto, dois vértices de separação entre as arestas e com uma face circular no meio, na dimensão dois. Assim obtivemos para a EGD, seu valor em 2D da face do círculo, $V - A + F = 2 - 2 + 1 = 1$.

Assim também, obtivemos para o caso da esfera (3D), nos limites do sólido externo formado, que ela teria duas faces superficiais curvas, representando o limite da visualização em 3D, o de uma face superficial semiesférica, separadas por duas arestas semicirculares, sendo que estas duas arestas semicirculares estariam separadas por dois vértices. E a EGD, ficaria, $V - A + F - S = 2 - 2 + 2 + 1 = 1$

Assim todas as figuras com características circulares pareciam estar validadas na EGD. O que se mostrou compatível para o cilindro, o cone, figuras circulares que puderam ser definidas com as variáveis dimensionais geométricas (VDG), levando seus valores das variáveis dimensionais também à unidade, uma Lei Matemática, de validade tão universal e que leva a canônica unidade, tão fenomenal na Geometria, portanto, de alto interesse.

Acabamos assim por reconstituir fórmulas recursivas, dentro de cada Família pesquisada, para determinação do número dessas variáveis dimensionais (H) para qualquer figura geométrica em qualquer dimensão D.

O Professor Saddo, me questionou no meio dessa pesquisa a fazer uma demonstração dessas equações, que pudessem ser válidas, para qualquer n-ésima dimensão, demonstração esta que poderia ser ou por indução ou por absurdo. Foram seis meses de procura pelo método de demonstração e como havia duas variáveis as equações emperravam e não se conseguia obter resultados para a demonstração. Durante as férias escolares, depois de esmiuçar muito as matrizes, pela forma tabelar, conseguiu-se a percepção mais lógica de seus elementos e foi desta forma que as expressões se enquadraram no resultado em uma demonstração completa. E perfeitamente, fizemos sua demonstração com validade das expressões dimensionais até a D-ésima dimensão inteira qualquer, *ad infinitum*.

Começamos inicialmente com as fórmulas recursivas secundárias até obter os elementos essenciais ao desenvolvimento das fórmulas recursivas principais, até que estabelecemos fórmulas válidas para todas as famílias em todas as dimensões. No entanto, poderíamos experimentar até a milésima dimensão, que não estaríamos demonstrando que valeria para todas as dimensões, por isso, daí a necessidade de uma demonstração analítica. Foi assim que depois de muito desmembrar as tabelas que conseguimos adequar suas equações e identificá-la com o Binômio de Newton, e as expressões se enquadraram adequadamente. Realizamos assim uma demonstração da Equação Geométrica das

Dimensões e outras equações correlatas que se demonstram válidas analiticamente até a D -ésima dimensão qualquer, *ad infinitum*. E foi um prazer muito grande quando a obtivemos.

No interesse de desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para a Geometria das Dimensões, buscamos aperfeiçoá-lo em uma ordem crescente, obtendo resultados de grande interesse, e satisfazendo as necessidades e interesses da pesquisa. Uma proposta de aperfeiçoamento constante pede ampliação de sua utilização no ensino e na pesquisa, visando o aumento de discernimento às Dimensões.

Agradece-se a quem possa dar continuidade à estas ideias dentro da Sala de Aula para testar seu ensino e sua posse do saber pela consciência dos estudantes. Assim como quem der acréscimos a esta pesquisa dessa geometria de tão belos aspectos de visualização.

Críticas são sempre bem-vindas, pois o aperfeiçoamento deve ser constante em toda realização. Ainda se está no início do desenvolvimento dos aspectos dessa geometria das dimensões, por isso muita pesquisa ainda é necessária para a realização de suas aplicações, seu ensino, seu aperfeiçoamento e seu aprendizado na Educação Matemática.

É um incentivo que se amplie a observação e o anseio espontâneo, de se estar sempre consciente na identificação da diversidade de geometrias contidas nas pequenas amostras do dia a dia e busca de sua unificação. Leva-se o desafio de se ter em mente, a consciência da busca dos elementos da multidimensionalidade geométrica, em analogia às dimensões menores e maiores.

Isso dá ao ensino da Geometria das Dimensões na Educação Matemática a busca de uma aprendizagem mais natural, com lucidez, nos elementos extrapoladores que potencializam a utilização de um maior número de Registros de Representação Semiótica que facilita a compreensão da diversidade de assuntos e resoluções mais simples de uma diversidade de problemas.

Veja-se na História, que os problemas da Física foram sendo resolvidos a partir do desenvolvimento da Matemática. A grande linguagem da lógica *de per si*.

A Educação Matemática sempre deve reorganizar seus elementos, não preocupada com a realidade necessariamente, mas subindo à patamares da abstração, da analogia, do imaginável. Estes elementos formam a mente científica do estudante e a Educação Matemática amplia seus horizontes na reconfiguração de sua necessidade de compor valores, para argumentar com propriedade consciente, os elementos que participarão de seu

futuro, sua criatividade, gerindo inúmeras possibilidades de intermediar, geometrizar, algebrizar, graficar, tabelizar e equacionar, aprender, registrar, ensinar com propriedade.

Em novos patamares de visualização, novas fontes de conhecimento, novos vincos de memória, determina-se a posse de uma imensa quantidade de símbolos, que complementam o conhecimento ao lado do mais fluido aprendido, ampliando o conhecimento dentro da epistemologia.

Caracteriza o modo de se armazenar no cérebro, microfigurações de conceitos, estruturas do conhecimento, que amplificam as visões de mundo. O que demonstra que o real, são novas aplicações, como é o caso da multidimensionalidade aplicada à Física.

As múltiplas dimensões trouxeram um desenvolvimento múltiplo e facilitado, que auxiliaram a compreensão das Ciências Físicas do século XX, por isso a Geometria das Dimensões foi objeto dessa pesquisa, em função de aplicações na Educação Matemática. Houve grandes compreensões na aplicação dos fenômenos físicos da quadridimensionalidade dentro do Eletromagnetismo, Relatividade, Teoria Quântica Relativística, Eletrodinâmica Quântica, Cromodinâmica Quântica, Teoria de Supercordas, Gravitação, Teoria de Partículas, Astrofísica, e uma infinidade de aplicações na Natureza, em que os jovens se interessam por compreender e se atualizar.

Faz-se aqui a menção da importância da aplicação prática pelo professor usando os elementos da TSD, Teoria das Situações Didáticas à prática dos alunos em seu aprendizado para entendimento das dimensões e suas formas de subida da dimensão zero à dimensão quatro e suas visualizações e métodos de Reconstrução Dimensional, finalizando nos Princípios Analógicos Dimensionais.

Estes elementos primitivos e suas analogias de crescimento dimensional, sempre passarão a fazer parte de uma abstração essencial ao ensino para formar uma estrutura de base no aprendizado, uma vez que, aberta essas reconstruções à mente, não mais poderão mais, ser esquecidas ou dispensadas. Ficarão registrados na memória, nas Reconstruções Dimensionais que mais simpatia convier a cada ser, em seu nível de diversidade humana, nos tipos de Reconfigurações Mereológicas mais fáceis de memorizar, ou nas Reconstruções Instrumentais buscadas e seus métodos realizados.

Levar-se-á mais fortemente na memória a redescoberta das induções vividas, nas diversas formulações de criatividade e inovação. A busca de diferentes Reconstruções

Dimensionais abrange a aquisição significativa do saber na Educação Matemática que se acumulou ao longo da História da Geometria, em um dos grandes acervos das ciências.

No ensino básico, quando a mente do estudante está no mais alto estado de formação ativa, encontra-se a aptidão necessária ao aprendizado de grandes abstrações, para inferir formatos, produzir configurações lógicas, conferir discernimentos, através de visualizações geométricas distintas. Este será, portanto, o melhor momento em que, nas proposições da Educação Matemática, poder-se-á obter, um maior efeito em seu aprendizado Matemático. Priorizando as composições de diversidades, nas formas e fôrmas geométricas, elas atendem ao estudante na formulação do seu entendimento, sendo este o momento de se introduzir a ele, os elementos do crescimento dimensional, indo da dimensão zero à dimensão quatro, ao modo das Reconstruções Dimensionais de Duval, forçando sua imaginação à abstração desses elementos, na proposição da diversidade, bem vinda, nos intercâmbios múltiplos dos Registros de Representação Semiótica. Ao se trabalhar o ensino com inovação, nas estruturas neurológicas do estudante, se produz vincos de aprendizado que jamais serão esquecidos, transformando o seu futuro em múltiplas manifestações heurísticas de criatividade, para percepção do inusitado, em aplicabilidades surpreendentes, soluções singulares, de onde, ao se ensinar com responsabilidade a Geometria, se lhe ampliará as capacidades de aplicações múltiplas no futuro, ampliando as redescobertas mais criativas e intensas manifestações nas virtudes pessoais do seu próprio caráter epistemológico.

O conhecimento novo das Dimensões, através do ensino da Educação Matemática, leva à liberdade na amplitude de visualização do estudante e o saber geométrico em múltiplas possibilidades e formatos inéditos que se misturam ao dia a dia, em múltiplas analogias dimensionais, diminui a distância entre o saber e as formas da experiência de vivência, entre os formatos e a geometria, entre a natureza e a matemática, entre as equações e as famílias geométricas.

Chegamos nesta pesquisa até a D-ésima dimensão, mostrando a lógica matemática, que prescinde o aprendizado. Diz a filosofia que, onde a matemática chega a realidade existe, e porque essas realidades matemáticas podem ser utilizadas de forma prática pela consciência.

Indo mais além, onde a imaginação é capaz de voar, é porque ali existe realidade científica a se chegar e possibilidades de realização prática para o futuro.

Pode-se construir um conjunto de situações-problema que têm por objetivos o ensino e a aprendizagem da Geometria das Dimensões no Ensino Médio, apoiando-se da TSD e na TRRS e focando os seguintes aspectos: compreensão e direcionamento das estruturas dimensionais inteiras 1, 2, 3, e 4), dimensionalidade fracionária entre a dimensão um e a dimensão dois, construção do triângulo equilátero, construção dimensional do círculo, a construção das dimensões fracionárias entre dois e três, a construção do cubo a partir de uma face quadrada, a construção do tetraedro a partir de um triângulo equilátero etc.

Podemos deixar à pesquisa, ao ensino e ao aprendizado do futuro o seguinte desafio.

Desafio. Como sofisticar de forma didática, teórica e prática, a pesquisa, o ensino e o aprendizado, das Dimensões na Geometria dentro dos parâmetros da Educação Matemática? Usando a Metodologia oferecida e desenvolvida pela Educação Matemática para garantir o aprendizado dos estudantes e promover o entendimento dos elementos dimensionais, até a quarta dimensão, e dando sequência ao entendimento das dimensões virtuais superiores para nos ajudar, nos diversos seguimentos das aplicações da Matemática, no número de proposições que interligam novos desenvolvimentos e aparelhagens com a ciência moderna. Esses elementos puxam o interesse pelo estudo da Matemática de forma agradável, promovendo a imersão e o aperfeiçoamento constante da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag, **Fundamentos da Didática da Matemática**, Curitiba, UFPR, 218 p., p.31-59, 71-88, 2010

ARISTÓTELES, **Metafísica**, Ed. Cremos, Espanha, Madrid, 2003, p. 222-499

ARISTOTLES de Estagira, **Metaphysics**, Great Books of the Western World, Vol. 8 Aristotle I, Book I, 986p., p. 504, 1952

BACHELARD, Gaston, **A Formação do Espírito Científico**, contribuição para a psicanálise do conhecimento, 1938 Ed. Contraponto, Rio de Janeiro, 1996, 5ª reimpressão, 314 p. 2005

BALZAC, Honoré de, **Máximas e Pensamentos de Honoré de Balzac**, 1852, Ed. Martins Fontes, São Paulo, 2010

BICUDO, Irineu, Palestra: **Geometria Grega**, You Tube, 2010
<https://www.youtube.com/watch?v=O3ap76TFG9k>;
<https://www.youtube.com/watch?v=xTKu7FgaMts>

BROUSSEAU, Guy, **Fundamentos de Métodos da Didática da Matemática**, p. 35-113, em *Didáticas das Matemáticas*, direcção de Jean Brun, Instituto Piaget, 1996 (Publicado originalmente em: *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7/2, 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage éditions, 1986)

BROUSSEAU, Guy, **La théorie des situations didactiques**, Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, a paraître dans « Interactions didactiques » (Genève), Cours Université de Montréal, p. 1-57, 1997

BROUSSEAU, Guy, **Theory of Didactical Situations in Mathematics, Didactique des Mathématiques**, Kluwer Academic Publishers, vol.19, New York, Boston, p. 3-72, 2002

CHIZZOTI, Antonio, **Pesquisas em Ciências Humanas e Sociais**, 3ª ed., São Paulo, Ed. Cortez, p. 26-38, 1991

COURANT, Richard, **ROBBINS**, Herbert, **O que é a Matemática?** Ed. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, p. 249-270, 2000

DE SOUZA, Samuel, **Mecânica do Corpo Rígido**, Gen, LTC Ed., Rio, p. 24-31, 41-50, 2016

DOUADY, Régine, Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, v.7.2, p.5-31, 1986.

DUVAL, Raymond, Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et Sciences Cognitives*, vol.5. IREM-ULP, Strasbourg, p.37-65, 1993

DUVAL, Raymond, Semiósis et Pensée Humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, Bern, Berlin, Frankfurt/M., New York, Paris Wien, 395 pag., p. 1-85, 1995

DUVAL, Raymond, “Les Conditions Cognitives de L’apprentissage de la Géométrie : Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de Leurs Fonctionnements” v.10, p.5-53, IREM de Strasbourg, 2005

DUVAL, Raymond, Annales de Didactique et Sciences Cognitives, Vol. 10, p. 5 - 53.© IREM de Strasbourg, 2005

DUVAL, Raymond, Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais, Introdução e Capítulo 1, São Paulo: Editora Livraria da Física, 119 pags., p. 37-110, 2009

DUVAL, Raymond, Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do Pensamento. Tradução de Mércles Thadeu Moretti, Revemat: R. Eletr. Deedu. Matem. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v.07, n. 2, p.266-297, 2012

DUVAL, Raymond, Diferenças Semânticas e coerência Matemática: Introdução aos Problemas de Congruência”, Tradução de Mércles Thadeu Moretti, Revemat: R. Eletr. De Edu. Matem. ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n.1, p.97-117, 2012

DUVAL, Raymond, Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Mércles Thadeu Moretti, Revemat: R. Eletr. Deedu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v.07, n. 1, p.118-138, 2012

DUVAL, Raymond, Understand the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations, Springer International Publishing AG 2017, ISBN 987-3=319-56909-3, 117 pags., 2017

EINSTEIN, Albert, LORENTZ, Hendrich A., MINKOVSKI, H., “O Princípio da Relatividade”, Textos Fundamentais da Física Moderna, Volume I, Fundação Calouste Gulbenkian, 279 p., p.47-90, p.93-114, 1958

EINSTEIN, Albert, Relativity, The Special and the General Theory, Three Rivers Press, New York, p.3-178, 1961

EUCLIDES de Alexandria, **Elementos**, Ed. UNESP, tradução e Introdução de Irineu Bicudo, São Paulo, p.97-99 p.481-483, 2009

FIORENTINI, Dario, **LORENZATO**, Sergio; **Investigação em educação matemática, percursos teóricos e metodológicos**, coleção formação de professores, 3ª Edição atualizada, Autores Associados, p.3-228, 2012

FRISH, David H., **SMITH**, James H., **Measurement of Relativist Time Dilatation Using - Mesons**, American Journal of Physics, 31, 341-355, 1963

GAMBARATO, Renira Rampazzo, **Design inFormação, morfologias da linguagem** tese da Pontifícia Universidade Católica, Pós-Graduação em Comunicação e Semiótica, 144 pags. p.82 ,2005

GAMOV, George, **Biografia da Física**, Ed. Zahar, Rio de Janeiro, p.172-226, 1963

GAMOV, George, **One, Two, Three... Infinity, Facts and Speculations of Science**, Dover Publ. Ed., p. 50-112, 1988

GOMES, Jonas de Miranda, **SANTOS**, Geovan Tavares dos, **O Hipercubo**, Matemática Universitária, n.6, Dez, pags. 87-100, 1987

GONTIJO, Leonardo Cabral; **PINTO**, Ângela Emília de Almeida; **Currículo Básico Escola Estadual, Ensino Médio**, Volume 2, Área de Ciências da Natureza, **Física**, p.77, Programa, Guia de Implementação, Secretaria da Educação, Espírito Santo, Vitoria, p. 83-85, p.741-743 - SEDU, 2009

GREENBERG, Marvin Jay, **Euclidian and Non-Euclidian Geometries, Development and History**, W.H. Freeman and Company, New York, p.15-25, 138, 2008

GREINER, Walter, **Relativistic Quantum Mechanics**, wave equations, Third Edition, Springer, Berlin, p.2-4, 2000

HEISEMBERG, Werner, **Física e Filosofia**, Ed. Universidade de Brasília, p.56-76, 1981

HINTON, Charles Howard, **Speculations on the Fourth Dimension**, RUCKER, Rudolf org., Dover Publ. Inc., New York, p. 1-240, 1980

HOUAISS, Antônio, **VILLAR**, Mauro Sales, **Franco**, Francisco Manuel de Melo, **Dicionário da Língua Portuguesa** 1ª Edição, Editora Objetiva, Rio de Janeiro, palavra: dimensão , 2001

KAKU, Michio, **Hiperespaço**, uma odisséia científica através de universos paralelos, empenamentos do tempo e a décima dimensão, Ed. Rocco, Rio de Janeiro, 382 p., 2000

KOESTLER, Arthur, **The roots of coincidence**, Pan Books, p.82-105, 1979

JUNG, Carl Gustave, **Synchronicity, An Acausal Connecting Principle**, Princenton University Press, p. 5-124, 2011

LEGRAND, Marc, **La concept de situation fondamentale**. Richesse et limites de ce concept. Quelles autres problématiques croise-t-il ? Son rapport à l'enseignement ? Actes de la septième École d'Été, Saint-Sauves d'Auvergne, Mathématiques, Edition coordonnée par Robert Noirfalise - IREM- Clermont-FT, p.121-129, 1993

LANDAU, Lev Davidovich, **LIFSHITZ**, Evgeny Mikhailovich; **The Classical Theory of Fields**, Course of Theoretical Physics, Volume 2, Fourth revised English Edition, Elsevier, p.1-23, 2007

LAO ZI, Dao De Jing, China, sem editora, 81Capítulos, 167 pags., sem data

MACHADO, S.D.A. et al., **Educação Matemática: uma introdução**, São Paulo, EDUC, 208 p., 18 cm, Série Trilhas, p.65-88, 135-154, 1999

MARÍAS, Julian, **História da Filosofia**; 2.ed., Martins Fontes, São Paulo, 589p., p.62-64, 2015

MARTINEAU, John, **Quadrivium**, as quatro artes liberais clássicas da Aritmética, da Geometria da Música e da Cosmologia, Realizações Editora, 414 p., 2014

MASLOW, Abraham Harold, **Motivation and Personality**, Harper and Brothers, 1954, 411 p. , 1954

MENEZES, Luiz Carlos de, FINI, Maria Inês, **CURRÍCULO do Estado de São Paulo, Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, Ciclo II, Ensino Médio; 1ª Edição Atualizada - São Paulo -152 pags. - Currículo de Física p. 102-123 - 2012
<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/780.pdf>

MICHELSON, Albert Abraham e **MORLEY**, Edward William, **On the Relative Motion on the Earth and the Luminiferous Æther**.The American Journal of Science (3) 34, Third series, Vol. XXXIV, Art. XXXVI, nº 203, Nov. 1887, p. 333-345, Philosophical Magazine and Journal of Science (5) 24, nº 151, Dec., p.449-463, 1887

MÖLLER, C., **The Theory of Relativity**, Oxford University Press, second edition, p.90-143, 1977

NÖTH, Winfried, **Hanbook of Semiotics**, Indiana University Press, p.174-177, 1995

PAULING, Linus; Química Geral, Ao Livro Técnico, p. 654-656, 1982

PATHRIA, R. K., The Theory of Relativity, second edition, Dover Publications, Inc., p.29-100, 2003

PEIRCE, Charles Sanders; **Semiótica**, Ed. Perspectiva, São Paulo, Estudos 46, 337 pags., p. 32-35, 2015

POINCARÉ, Henri; **On the Dynamics of the Electron**, Wikisourse translation, p. 129-176, 1905-1906

POPPER, Sir Karl R., **A Sociedade Aberta e seus inimigos**, Ed. Universidade de São Paulo e Ed. Itatiaia Limitada, Belo Horizonte, vol.1, p.238

POPPER, Karl, **Conjecturas e Refutações**, O Progresso do Conhecimento Científico, Ed. Universidade de Brasília, Brasília, 1982, 2ª Ed., p.37-40

RALPHS, John D., **A Quarta Dimensão**, Editoria Estampa, p.17-293, 1994

RESNICK, Robert, **Introdução à Relatividade Especial**, Ed. Universidade de São Paulo, p.3-194, 1971

RUCKER, Rudy, **A Quarta Dimensão, para uma geometria da realidade de Ordem Superior**, Ciência Aberta, Ed. Gradiva, p.17-324, 1991

SAMPAIO, J.L., **CALÇADA**, C.S., **Física, Volume único**, Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM 2009,2010,2011) FNDE Ministério da Educação; Editora Atual, 2ª Edição, São Paulo, Unidade 6, Física Moderna, Cap. 72, A Teoria da Relatividade, p. 390-401, 2005

SANT'ANNA, Douglas A.; **Derivadas Fracionárias, Funções Contínuas não Diferenciáveis e Dimensões**; Universidade Federal do ABC, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Santo André, 81 p., 2009

TORRES, C.M.A., **FERRARO**, N.G., **SOARES**, P.A.T.; **Física, Ciência e Tecnologia**, Vol. 3; Livro Distribuído pelo Governo Federal; Unidade II, Física

URBANEJA, Pedro M.G., **Pitagoras, el filósofo del número**; Nivola, 2001, p.28-32, Moderna e Contemporânea, Cap. 5 Relatividade Especial, Ed. Moderna, 2ª Edição, São Paulo, p. 226-251, 2010

WELLS, H.G., The Time Machine, Webster's Thesaurus Edition, p.3-4, 2006

WOLFSON, Richard, Simplesmente Einstein, A Relatividade Desmistificada, Ed. Globo, p.124-142, p.274, 2005