PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

RITA LOBO FREITAS

Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2019

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

RITA LOBO FREITAS

Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud

São Paulo

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Assinatura: _____ Data___/___/___

Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica para Teses e Dissertações com dados fornecidos pelo autor

Freitas, Rita Lobo
Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta / RitaLobo Freitas. -- São Paulo: [s.n.], 2019.
406p ; cm.

Orientador: Saddo Ag Almouloud.
Tese (Doutorado em Educação:Matemática)-- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática, 2019.

1. Educação Matemática. 2. Geometria Analítica Plana. 3. Teoria Antropológica do Didático. 4. Percurso de Estudo e Pesquisa. I. Almouloud, Saddo Ag. II. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática. III. Título.

CDD

RITA LOBO FREITAS

Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: constituição do conhecimento docente para o ensino de geometria analítica plana do ponto e da reta

Área de concentração: Educação Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTORA em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud

Aprovado em ____ de ____ de 2019

BANCA EXAMINADORA

_____
Dr. Saddo Ag Almouloud -PUC-SP

_____
Dr. Gerson Pastre de Oliveira- PUC-SP

_____
Dra. Maria José Ferreira da Silva-PUC-SP

_____
Dra. Flávia Cristina de Macêdo Santana-UEFS

_____
Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, UFMS

DEDICATÓRIA

Às filhas amadas Ana Camylle e Louise pelo precioso tempo que se furtaram da presença protetora de sua mãe. À minha mãezinha pelo valor que reconheceu da importância do estudo.

AGRADECIMENTO À CAPES

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço a **CAPES,** pelo apoio financeiro com a bolsa de estudo e a bolsa PDSE do estágio sanduiche, fundamental para a realização da pesquisa.

AGRADECIMENTOS

*Agradeço a primeiramente a **Deus** pela saúde, resiliência e coragem para concluir esta etapa da aminha vida. Aos meus pais **Maria da Paixão** e **José Freitas** por tudo que me proporcionaram, me impulsionando chegar até aqui.*

*Ao querido professor doutor **Saddo Ag Almouloud**, pelo competente e cuidadoso trabalho de orientação e principalmente pelas lições que levarei para toda a vida, a amizade, o carinho dessa pessoa extraordinária, que tive a felicidade de compartilhar este trabalho de tese.*

*Ao professor **Yves Matheron** pela dedicada orientação e paciência no período que estive na França, pelas importantes contribuições para a constituição desta Tese.*

*Aos Professores doutores, **Gerson Pastre de Oliveira, Maria José Ferreira da Silva, Flávia Cristina de Macêdo Santana, José Luiz Magalhães de Freitas,** que fizeram parte da banca avaliadora, cujas sugestões foram valiosas para a finalização deste trabalho.*

*Ao amigo **Yves Chevallard** que me recebeu em seu país com carinho e cuidado quando eu estava distante dos meus, se fez como alguém da família. Pela imensa contribuição teórica na pesquisa brasileira e especialmente nesta Tese.*

*A equipe de **colegas e pesquisadores** da Aix Marseille Université, especialmente as professoras doutoras **Michèle Artaud** e **Tereza Assude.***

*Ao amigo de todos os momentos **Nilo Silveira Monteiro de Lima**, pela amizade, o apoio nos momentos difíceis, sempre pronto a ajudar.*

Aos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática da universidade pesquisada, que doaram a seu precioso tempo de forma gentil e generosa, pelas contribuições e dedicação ao projeto.

*Agradeço as amigas **Cleusiane Vieira da Silva** e **Eliana Gomes de Oliveira** pelo apoio e por todos os momentos que compartilhamos nossa formação.*

*Ao grupo de pesquisa **PEA-MAT** por ter me proporcionado conhecer as Teorias de Educação Matemática, por meio das discussões e trocas de experiências.*

Agradeço a todos os colegas e professores da PUC-SP que de alguma forma especial contribuíram no percurso do meu caminho formativo.

A todas as pessoas que contribuíram com esta tese, direta ou indiretamente.

Muito Obrigada!

FREITAS, Rita Lobo. Dispositivo de pesquisa e formação profissional PEP-FP/TAD: construção do conhecimento para o ensino de da geometria analítica plana. [Tese] São Paulo. Doutorado em Educação Matemática Paulo Pontifícia Universidade Católica e São Pulo, 2019.

RESUMO

O presente trabalho se insere no campo da formação inicial de professores de matemática, especificamente na Licenciatura em Matemática brasileira. A pesquisa objetivou responder a seguinte questão: quais conhecimentos novos (ou não), em Geometria Analítica Plana podem ser adquiridos por professores estagiários, com a ajuda de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), e quais benefícios poderão obter para projetar (conservá-los) esses conhecimentos no ensino médio? Para responder à questão de pesquisa, foi desenvolvido um dispositivo-metodológico-teórico PEP-FP/TAD, por meio do qual desenvolveu-se treze sessões de estudo e pesquisa com estudantes (professores-estagiários) de um curso de Licenciaturas em Matemática na Bahia, participantes de turmas de estágio curricular supervisionado. O referencial teórico adotado foi a Teoria Antropológica do Didático, tendo o aporte dos estudos sobre conhecimentos docentes. Sobre o constructo supracitado, delimitamos, como objetivos específicos, a (re)construção dos conhecimentos matemáticos e didáticos para o ensino de geometria Analítica Plana do ponto e da reta. As etapas da pesquisa se constituíram na estruturação e análise de modelos epistemológicos a respeito de Geometria Analítica Plana, e posteriormente, o desenvolvimento de um PEP de formação profissional. Os principais resultados da pesquisa apontam que os estudantes submetidos ao processo de formação profissional, com aporte do dispositivo PEP-FP/TAD, mobilizaram e (re)construíram certos saberes docentes didáticos, pedagógicos e tecnológicos de geometria analítica plana, mais especificamente, sobre o ponto e a reta. O conjunto de condições e restrições do PEP-FP indicaram que o dispositivo permite desenvolver vários PEP de formação profissional pontual ou regional, a respeito de conhecimentos docentes para o ensino de objetos matemáticos. Os resultados da investigação trazem várias perspectivas de pesquisas futuras como forma de continuidade dos estudos a formação inicial do professor de matemática.

PALAVRAS- CHAVE: Geometria Analítica Plana**;** Licenciatura em Matemática; Estágio Supervisionado; TAD; PEP-FP

ABSTRACT

This work belongs to the research field of initial training of math teachers, mainly in brazilian mathematics graduation courses. The research aimed to answer the following question: Which new knowledge (or not) in plane analytic geometry could be acquired by apprentice teachers, helped by a Study and Research Route for Teachers in Training (SRR-TT), and which benefits could be achieved by them in order to project (keep them) this knowledge on high school? In order to answer the question above, a methodological-theoretical device SSR-TT/ATD was developed, whereby which thirteen “studies and research” sessions with students of a mathematics graduation course in Bahia were conducted, those students being participants of classes on curricular supervised practice. The theoretical framework chosen was The Anthropological Theory Didactic (ATD), it being supported by studies on teaching knowledge. Related to the device explained above, we delimited as specific objectives, the (re)building of mathematical and didactic knowledge for the teaching of plane analytic geometry. The stages of this research were set on elaboration and analysis of epistemological models about plane analytic geometry and the development of a RSS of professional education. The main results from the whole research point that students under the professional formation, with the support of the device RSS-TT/TAD, raised resources and (re)built some teaching, pedagogical and technological knowledge of plane analytic geometry, especially those about point and the line. The conditions and restrictions set of RSS-TT suggested it was possible to develop many specific professional education or regional RSS’s, concerning to teaching knowledges for the instruction of math objects. The investigation results bring numerous perspectives to future studies as a way to keep investigating the initial training of math teachers.

Keywords: Plane Analytic Geometry; Brazilian Mathematics Graduation; Curricular supervised Practice; PEP-FP/ATD

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AEP	Atividade de Estudo e Pesquisa
ERA	*Activité d'étude et de Recherche*
AL	Álgebra Linear
AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BAC	*Baccalauréat*
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CC	Conhecimento do Conteúdo
CD	Conhecimento Didático
CP	Conhecimento Pedagógico
CPDTC	Conhecimentos Pedagógicos Didáticos Tecnológicos do Conteúdo
CT	Conhecimento Tecnológico
D	Didático
EUA	Estados Unidos da América
F	Fala Feminina
FP	Formação Profissional
GA	Geometria Analítica
GAE	Geometria Analítica Espacial
GAP	Geometria Analítica Plana
GE	Geometria Euclidiana
H	Fala Masculina
IFI	Interpretação de Informação Figurativa
IFPA	Instituto Federal do Pará
IREM	*Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques* (Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática)
LD1	Livro Didático 1 (IEZZE et al, 1990)
LD2	Livro Didático 2 (SOUZA, 2010)
LDBEN	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
M	Matemático
MAA	*Mathematical Association of America* (Associação Matemática da América)
MEC	Ministério da Educação

MED	Modelo Epistemológico Dominante
MER	Modelo Epistemológico de Referência
MERA	Modelo Epistemológico de Referência Alternativo
MMM	Movimento da Matemática Moderna
OCEM	Orientações Curriculares para o Ensino Médio
OD	Organizações Didáticas
OM	Organizações Matemáticas
OMG	Organização Matemática Global
OML	Organização Matemática Local
OMLRC	Organização Matemática Local Relativamente Completa
OMP	Organização Matemática Pontual
OMR	Organização Matemática Regional
P	Fala da Professora Pesquisadora
PCN+	Parâmetro Curriculares + do Ensino Médio
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
PEA-MAT	Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PEP-FP	Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores
PEPGEM	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática
PER	*Parcours D'étude et de Recherche* (Percurso de Estudo e Pesquisa)
PER-FP	Percurso de Estudo e Pesquisa de Formação Profissional
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PMA	Pensamento Matemático Avançado
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PNLDEM	Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio
PPP	Projeto Político Pedagógico
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
PV	Processamento Visual
Q	Questão
SI	Sistema Impossível
SPD	Sistema Possível e Determinado
SPI	Sistema Possível e Indeterminado

T	Tarefa
T	Tipo
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDS	Teoria das Situações Didáticas
THA	Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
TLFi	*Trésor de la Langue Française informatisé* (Tesouro Informatizado da Língua Francesa)
TSD	Teoria das Situações Didáticas
TTSRP	*Teacher Training Study and Research Path* (Estudo de Formação de Professores e Trajetória de Pesquisa)
UA	Unidade de Aprendizagem
UEBA	Universidades Estaduais da Bahia
UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPA	Universidade Federal do Pará
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
UNEB	Universidade do Estado da Bahia
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNIAN	Universidade Anhanguera
UNICSUL	Universidade Cruzeiro do Sul
USP	Universidade de São Paulo
τ	Técnica Matemática
θ	Tecnologia da Técnica
Θ	Teoria

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Quadro geral das sessões do estudo piloto parte I 44
Quadro 2 - quadro geral das sessões do estudo piloto parte II 45
Quadro 3 - Pesquisas com uso de TIC 53
Quadro 4 - Quadro das pesquisas de campo por instituição 60
Quadro 5 - Aprendizagens a respeito da docência a partir do estágio de observação 83
Quadro 6 - Quadro de tarefas do MER 161
Quadro 7 - Sistemas de coordenadas no século XIX 268
Quadro 8 - Diferentes sistemas de coordenadas 269
Quadro 9 – AEP 1, introdução ao tema 272
Quadro 10 - Material de estudo sobre o olho humano e as lentes de aumento simples 273
Quadro 11 - Material de estudo parte 2 274
Quadro 12 - Atividade de estudo e pesquisa: lentes esféricas 275
Quadro 13 - Atividade de estudo e pesquisa, articulação entre o matemático-didático 280
Quadro 14 - Atividade exploratória 285
Quadro 15 - Tarefa pontos no campo de visão 286
Quadro 16 - Tarefa exploratória 290
Quadro 17 - Tarefas de provas e demonstrações 293
Quadro 18 - Atividade de integração do didático 295
Quadro 19 – Quadro de conhecimentos docentes da pesquisa 357
Quadro 20 - Quadro de conhecimentos docentes da pesquisa 358

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Escala dos níveis de co-determinação didática 38
Figura 2 - Fases dos ciclos de experimentação 73
Figura 3 - Mapa de esquema da pesquisa por meio dos modelos 92
Figura 4 - Esquema de evolução do saber 95
Figura 5 - Capa da obra de Descartes Discurso do Método 101
Figura 6 - Representação da a dição de duas distâncias 103
Figura 7 - Começo da publicação - A Geometria de Descartes 104
Figura 8 - Ilustração da multiplicação de distâncias 105
Figura 9 - Produto de duas distâncias 106
Figura 10 - Ilustração de Descartes para da raiz quadrada 107
Figura 11 - Ilustração atual para o modelo de Descartes 107
Figura 12 - Ilustração problema de Papus 111
Figura 13 - Ilustração de sistema de coordenadas retilíneas 116
Figura 14 - Representação de coordenadas retilíneas retangulares 117
Figura 15 - Ilustração de coordenadas polares 118
Figura 16 - Ilustração da intersecção com o círculo 118
Figura 17 - Coordenadas bi- polares 119
Figura 18 - Generalização para um sistema de coordenadas 119
Figura 19 - Linha plana 120
Figura 20 - Representação geométrica da equação 10 126
Figura 21 - Representação da reta HH' 127
Figura 22 - Representação da reta para $a > 0$ 128
Figura 23 - Representação de $y = a.x$ 128
Figura 24 - Ilustração tarefa 2 132
Figura 25 - Ilustração tarefa 3 133
Figura 26 - Distância de um ponto a origem 134
Figura 27 - Ilustração do problema 4 134
Figura 28 - Pontos alinhados, problema 6 137
Figura 29 - Representação geométrica problema 7 137
Figura 30 - Exemplo de pontos alinhados 138
Figura 31 - Representação geométrica problema 8 140
Figura 32 - Representação geométrica problema 9 141
Figura 33 - Representação geométrica do eixo polar 144
Figura 34 – Representação geométrica da circunferência 145
Figura 35 - Circunferência em coordenadas oblíquas 146
Figura 36 - Representação geométrica de uma curva 148
Figura 37 - Representação geométrica do problema 14 149
Figura 38 - Ilustração problema 15 150
Figura 39 – Ilustração problema 16 151
Figura 40 - Ilustração de um sistema genérico de coordenadas 154
Figura 41 - Esquema de ilustração de razão de ser de GA 160
Figura 42 - Ilustração do Modelo Epistemológico de Referência (MER) da pesquisa 163
Figura 43 - Mapa de organização e articulação dos modelos 166
Figura 44 - Esquema das praxeologias dentro de uma instituição 182
Figura 45 - Sistema cartesiano de $LD1$ 184
Figura 46 - Regiões do plano cartesiano 185
Figura 47 - Modelo para dedução da distância entre dois pontos 187
Figura 48 - projeção de um segmento orientado 191
Figura 49 - ilustração do sentido das projeções de AB 192
Figura 50 - Multiplicação de um segmento orientado 192

Figura 51 - Exemplo de multiplicação de um número por um segmento orientado 193
Figura 52 - Produto de segmentos no plano cartesiano 193
Figura 53 - Representação no plano do ponto médio de um segmento 196
Figura 54 - Ilustração da tarefa A 197
Figura 55 - representação geométrica do triangulo ABC 198
Figura 56 - Coordenadas do baricentro do triângulo ABC 199
Figura 57 - Representação figural do problema 200
Figura 58 – Ponto médio de um segmento no plano cartesiano 200
Figura 59 - Representação das coordenadas do ponto médio 200
Figura 60 - Triângulo e suas medianas 202
Figura 61 - Baricentro de um triangulo ABC 202
Figura 62 - Alinhamento de três pontos 203
Figura 63 - Pontos alinhados 205
Figura 64 - ilustração da regra de Sarrus 206
Figura 65 - Representação geométrica da reta e três pontos 207
Figura 66 - Equação segmentária da reta 208
Figura 67 - Determinação da reta pelas equações paramétricas 212
Figura 68 - Ângulo entre a reta r e o eixo, ... 213
Figura 69 - Cálculo do coeficiente angular 214
Figura 70 - Retas paralelas 216
Figura 71 - Ilustração da tarefa do tipo $T50$ 220
Figura 72 - Ilustração do exemplo de tarefa do tipo $T45$ 221
Figura 73 - Ilustração de $T46$, $T47$ e $T48$ 222
Figura 74 - Ilustração do problema contexto de funções 223
Figura 75 – Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo 234
Figura 76 - Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA) 239
Figura 77 - Domínios de conhecimento para ao ensino 250
Figura 78 - Diferentes categorias de conhecimento docente 250
Figura 79 - Exemplo de mapa de questões 259
Figura 80 - Cronogênese de "A", possível desenvolvimento $Q0$ $(\boldsymbol{A})$ 264
Figura 81 - Mapa de questões do dispositivo PEP-FP/TAD, sessão B e C 266
Figura 82 - Mapa de questões dos episódios três e quatro 271
Figura 83 – Ilustração da situação 274
Figura 84 - Representação geométrica do sistema óptico reduzido 275
Figura 85 - Mapa de questões dos episódios E a J 283
Figura 86 - Representação gráfica de feixes de luz 285
Figura 87 - Ilustração da tarefa campo de visão 286
Figura 88 - Representação geométrica de três pontos alinhados letra (A) 287
Figura 89 - Representação geométrica letra (B) 288
Figura 90 – Reta que intercepta os eixos X e Y 289
Figura 91 - Ilustração da tarefa 291
Figura 92 – Cópia de tela da tarefa A e B, Grupo A, AEP de lentes esféricas 313
Figura 93 - Cópia de tela grupo A distância 317
Figura 94 - Cópia tela primeira parte plano de aula Grupo A 321
Figura 95 - Cópia de tela segunda parte plano de aula 322
Figura 96 - Cópia de tela da parte 3 da produção do Grupo A 324
Figura 97 - Cópia de tela da produção do grupo B 325
Figura 98 - Proposta de atividade grupo B. parte I 326
Figura 99 - Atividade parte 2, grupo B 326
Figura 100 - Cópia de tela da produção do grupo A 328
Figura 101 - Cópia de tela da produção do grupo B 329
Figura 102- Cópia de tela da produção do grupo C 329

Figura 103- - cópia de tela do grupo B, parte B tarefa 330
Figura 104 - cópia de tela do grupo D, parte B tarefa 331
Figura 105 – Cópia de tela tarefa grupo D, parte B 331
Figura 106 – Construção a priori (fig. 88) capítulo 5 332
Figura107 - Produção escrita, grupo A 333
Figura 108 - Produção escrita grupo A 334
Figura 109 – Produção escrita do Grupo C, parte 2 da tarefa 335
Figura 110 – Representação da tarefa $T3$ 338
Figura 111 – produção do grupo tarefa $T3$ 339
Figura 112 – Produção ecrita tarefa $T5$ 340
Figura 113 – Representação geométrica de $T5$ 340
Figura 114 – Produção escrita do grupo B da tarefa $T5$ 341
Figura 115 – Mapa conceitual do grupo A 344
Figura 116 - Figura da tarefa $TA5$ 350
Figura 117 – Ilustração das tarefas grupo B 352
Figura 118 - Estrutura do olho 392
Figura 119- Ilustração da formação da imagem 393
Figura 120 - Formação da imagem modelo do olho reduzido 394
Figura 121 - Ilustração do ponto próximo 395
Figura 122 - Objeto infinitamente afastado 396
Figura 123 - Ilustração da imagem com o uso de lente corretiva 396
Figura 124- olho reduzido do míope 398
Figura 125- Olho míope sem esforço de acomodação, objeto no ponto remoto 398
Figura 126 – Olho míope coma lente sem esforço, o objeto no infinito tem imagem na retina 399
Figura 127 - Traçado dos raios de lentes finas convergentes e divergentes 400
Figura 128 – Formação da imagem de um objeto por uma lente convergente 401
Figura 129 – Pontos conjugados no sistema de eixos ortogonais para o modelo de olho reduzido 402
Figura 130 - Diferentes posições do eixo óptico 404
Figura 131 - Síntese do modelo para lente convergente 405
Figura 132- Sistemas ópticos sobrepostos 405
Figura 133 - Situação problema, lente divergente 407

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS: INTRODUÇÃO 23

1.1 MOTIVAÇÕES 25

1.2 PROBLEMÁTICA: JUSTIFICATIVA, PROBLEMA DE PESQUISA, QUESTÕES E OBJETIVOS 29

1.3 IDEIAS TEÓRICAS GERAIS E ESTUDO PILOTO 37

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE LITERATURA 50

2.1 PESQUISAS QUE TRATARAM DE GEOMETRIA ANALÍTICA 50

2.1.1 O estado da arte de GA segundo Santos (2016) 51
***2.1.2 Teses com enfoque na GA** 67*
2.1.2.1 A pesquisa de Lebeau (2009) 67
2.1.2.2 A pesquisa de Andrade (2012) 70
2.1.2.3 A pesquisa de Gaita (2014) 72
2.1.2.4 A pesquisa de Costa (2015) 74
2.1.2.5 A pesquisa de Matos (2017) 76
2.1.2.6 A pesquisa de Nguyen (2017) 78

2.2 PESQUISAS QUE TRATARAM DA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E DO ESTÁGIO SUPERVISIONADO 82

2.3 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 2 88

CAPÍTULO 3 - MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA (GAP) 90

3.1 A OBRA DE DESCARTES E A GEOMETRIA ANALÍTICA DO SÉCULO XVII 99

3.1.1 PROBLEMA DE PAPUS E O SISTEMA DE COORDENADAS 110

3.2 A GEOMETRIA ANALÍTICA NO SÉCULO XIX (1801 – 1900) 113

3.2.1 Diferentes sistemas de coordenadas 115
3.2.2 Representação de linhas planas por equações 120
3.2.3 Homogeneidade 121
3.2.4 Estudo de Reta 126
3.2.4.1 Significação dos coeficientes 130
3.2.4.2 Equação geral da reta e tarefas associadas 131
3.2.4.3 Equação de reta em coordenadas polares 144
3.2.5 O Círculo 145

3.3 LUGARES GEOMÉTRICOS 153

3.4 ELEMENTOS DE CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 157

CAPÍTULO 4 CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO PARA O ESTUDO DE GAP 165

4.1 GEOMETRIA ANALÍTICA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS 167

4.2 GEOMETRIA ANALÍTICA NOS MANUAIS ESCOLARES 179

4.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas e estudo do ponto 183
4.2.2 Estudo da reta a partir de LD1 *..... 207*
4.2.3 Estudo da reta por meio de LD2 *..... 220*

4.3 GEOMETRIA ANALÍTICA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA 229

4.4 CONSTITUIÇÃO DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE 232

4.5 CONCEPÇÕES DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO (MERA) PARA O ESTUDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA 235

CAPÍTULO 5 CONCEPÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA DE FORMAÇÃO PROFISSIONAL (PEP-FP) 241

5.1 CONCEPÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA E DE FORMAÇÃO PROFISSIONAL: DISPOSITIVO PEP-FP /TAD 241

5.2 MOMENTOS DIDÁTICOS E DESENHO *A PRIORI* DOS EPISÓDIOS DE ESTUDO 253

5.3 DESENHO *A PRIORI* DAS SESSÕES DE ESTUDO: ATELIÊ DE MODELIZAÇÃO DIDÁTICA SOBRE GAP 260

5.3.1 Construção a priori do primeiro episódio de estudo: definindo geometria analítica 260
5.3.2 Episódio dois (B): diferentes sistemas de coordenadas 264
5.3.3 Descrição a priori do episódio três (C): distância entre pontos e alinhamento de pontos no plano cartesiano 270
5.3.4 Episódio quatro (D): Alinhamento de três pontos organização didática e avaliação 279
5.3.5 Episódio cinco (E): reta como lugar geométrico 281
5.3.6 Episódio seis (F): coeficiente angular da reta 290
5.3.7 Episódio sete (G): demonstrações envolvendo a reta no plano 292
5.3.8 Episódio oito (H): momento exploratório entre o matemático e do didático 294
5.3.9 Episódio nove (I): momento exploratório entre o matemático e do didático 295
5.3.10 Episódio dez (J): análise e avaliação do processo de estudo realizado 296

CAPÍTULO 6 EXPERIMENTAÇÃO: DESCRIÇÃO *A POSTERIORI*, ANÁLISE DOS ACHADOS 297

6.1 EPISÓDIO PRIMEIRO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A *POSTERIORI* 298

6.2 EPISÓDIO DOIS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 301

6.3 EPISÓDIO TRÊS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 303

6.4 EPISÓDIO QUATRO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 308

6.5 EPISÓDIO CINCO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 311

6.6 EPISÓDIO SEIS: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 312

6.7 EPISÓDIO SETE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 319

6.8 EPISÓDIO OITO: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 327

6.9 EPISÓDIO NOVE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 332

6.10 EPISÓDIO DEZ DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 337

6.11 EPISÓDIO ONZE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 342

6.12 EPISÓDIO DOZE: DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 346

6.13 EPISÓDIO TREZE (FINAL): DESCRIÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI 347

6.14 PRINCIPAIS RESULTADOS SEGUNDO AS CATEGORIAS DE CONHECIMENTO DOCENTE 354

6. 15 AVALIAÇÃO DO PEP-FP/TAD ENQUANTO DISPOSITIVO DE PESQUISA E FORMAÇÃO PROFISSIONAL E RESULTADOS GLOBAIS 359

CAPÍTULO 7 REFLEXÕES FINAIS 362

7.1 IMPLICAÇÕES DA PESQUISA: ELEMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS 362

7.2 IMPLICAÇÕES DA REVISÃO DE LITERATURA PARA PESQUISA 365

7.3 RESULTADOS IMPORTANTES DE NOSSA PESQUISA 368

7.4 VARIÁVEIS DE DIFÍCIL CONTORNO, CONTRIBUIÇÕES PARA A ÁREA E PESQUISAS FUTURAS 369

REFERÊNCIAS 372

ANEXO A PLATAFOMA BRASIL 386

ANEXO B TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) ESTUDANTE 388

APÊNDICE A: SITUAÇÕES MODELIZÁVEIS COM GAP: ESTUDO DO SISTEMA ÓPTICO DO OLHO 390

CAPÍTULO 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS: INTRODUÇÃO

O texto desta Tese visa apresentar a pesquisa de doutorado desenvolvida junto ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), durante o período de 2015 a 2019. A investigação tem ligação com a universidade « Aix Marseille Université- Marseille», na França, com o grupo de didática do instituto de pesquisa em ensino de matemática (IREM), « Instituts de recherche sur l'enseignement de mathématiques », da Aix Marseille[1], pois desenvolvemos parte do estudo teórico com este grupo.

A pesquisa faz parte do corpo de trabalhos desenvolvido no âmbito dos projetos do PEA-MAT[2] (Processos de ensino e aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos) devidamente autorizado pelo comitê de ética e pesquisa com seres humanos da instituição, conforme documento Anexo A.

Neste **primeiro capítulo,** apresentamos as perspectivas gerais e específicas da nossa investigação. Iniciamos por apresentar as motivações pessoais para a realização da pesquisa, na sequência definimos a problemática e justificativa do estudo, tendo como elementos: a questão de pesquisa, os objetivos, a hipótese, a justificativa científica e a relevância do estudo proposto para a Educação Matemática. Além disso, apresentamos uma discussão sobre os principais elementos que constituirão o texto, as escolhas metodológicas e teóricas.

Ressaltamos que a escolha que fizemos para escrita desta Tese foi discutir os referenciais teóricos e metodológicos, de forma a aprofundá-los, ao longo do trabalho, mais especificamente nas análises e na coleta dos dados, o que não nos impede de trazer a discussão de aspectos teóricos no transcorrer do texto.

Ainda assim, apresentamos neste capítulo os elementos teóricos e metodológico gerais da pesquisa. Os elementos específicos se farão presente ao longo do texto sempre que julgarmos necessário, conforme já foi elucidado.

---

[1] Grupo de trabalho e equipe do Ifé (Institute Français de l'éducation) de Marseille, coordenado pelo **Dr. Yves Matheron**, na qualidade de **Co-orientador** desta tese, durante o período do estágio de doutoramento, realizado de setembro 2017 a janeiro de 2018. O professor universitário Dr. Yves Matheron é responsável pelo grupo de didática do IREM de Marseille, tendo direcionado importantes contribuições na constituição desta tese, em conjunto com o orientador.

[2] Grupo de pesquisa Processos de Ensino e de Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT) do programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

O **capítulo 2** compreende a revisão de literatura sobre algumas pesquisas de mestrado e doutorado que envolveram a Geometria Analítica e a formação inicial de professores de Matemática.

No **capítulo 3**, realizamos um estudo epistemológico dos objetos fundamentais da Geometria Analítica Plana (GAP), para a constituição de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), elucidando um panorama histórico do desenvolvimento deste campo da matemática e certos elementos ecológicos do processo de evolução dos objetos desta Geometria.

No **capítulo 4,** trazemos uma discussão do ponto de vista da transposição didática e da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a partir dos manuais escolares brasileiros e dos documentos oficiais que prescrevem o currículo da educação básica. Incluímos na discussão os elementos essenciais do currículo de Geometria Analítica (GA) prescrito para a Licenciatura em Matemática. O objetivo principal deste capítulo é identificar o Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo brasileiro, para o ensino de GA. Em seguida, constituímos um Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA), para o ensino de geometria analítica plana (GAP): ponto e reta. Este MERA é fundamental para nortear a proposta de formação de professores estagiários, que atuam em classes de ensino médio.

No **capítulo 5,** apresentamos os elementos constituintes do dispositivo metodológico-teórico: Percurso de Estudo e Pesquisa de Formação Profissional/Teoria Antropológica do Didático (PEP-FP/TAD). Discutimos, *a priori,* os fundamentos, a construção e realização das sessões de estudo, as questões norteadoras que engendram o dispositivo. Inclui-se também, a descrição *a priori* das sessões de estudo e as atividades desenvolvidas na experimentação.

No **capítulo 6,** descrevemos e analisamos *a posteriori,* à luz da TAD e dos referenciais para conhecimentos docentes*,* o processo de experimentação propriamente dito. Destacamos os resultados específicos identificados de cada episódio de estudo e pesquisa. Realizamos uma avaliação da abrangência do dispositivo PER-FP/TAD e a identificação das categorias de conhecimentos docentes mobilizadas durante o estudo.

Por fim no **capítulo 7,** apresentamos as reflexões finais da pesquisa. Discutimos as questões limitadoras, as restrições, os resultados que respondem ou não às questões de pesquisa, a relevância e contribuições do trabalho para

a Educação Matemática. Por fim, discutimos as possibilidades e indicações de pesquisas futuras.

A partir dessa ideia geral do texto, neste primeiro capítulo trazemos os elementos motivacionais para a realização da pesquisa e os elementos teóricos gerais que fundamentam o trabalho.

1.1 Motivações

A motivação inicial desta pesquisa se configurou pela minha trajetória como docente da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), na qual leciono desde 2010, atuando em diferentes cursos de graduação e na formação de professores, especialmente no curso de Licenciatura em Matemática. Anteriormente, nos anos de 2000 a 2014, atuei como professora de matemática, na educação básica, tendo a oportunidade de lecionar em diferentes níveis de ensino, desde turmas do 6º ano ao 9º ano no ensino fundamental (1999 a 2003), até turmas do 1º ao 3º ano do ensino médio (2001 a 2014), neste último também lecionei a matéria física por dez anos.

Em um primeiro momento de minha atuação como docente do ensino superior, lecionei nos componentes curriculares de estágio supervisionado, lógica, trabalho de conclusão de curso, didática, tópicos especiais de Educação Matemática e fundamentos da matemática. Em um segundo momento, atuei em outros componentes de Matemática (matemática aplicada, cálculo I, estatística, matemática básica e matemática financeira) nos cursos de administração, ciências contábeis e pedagogia com a disciplina metodologia do ensino de matemática.

A experiência como docente no curso de Licenciatura em Matemática suscitou em mim diversos questionamentos sobre a formação inicial do professor, tais questionamentos perpassaram desde a aquisição do conhecimento[3] matemático pelos futuros professores, até a atuação desses estudantes nas atividades de regência em classes de ensino fundamental e médio, durante o estágio curricular supervisionado.

Quando eu atuava como docente e supervisora de estágio, observei que os estudantes, na posição de estagiários atuando como professores regentes em turmas de ensino fundamental e médio, evidenciavam que não tinham

[3] Escolhemos o termo “conhecimento docente” no lugar de saber docente, pois o termo saber tem, neste trabalho, como significado o conhecimento cientificamente construído e reconhecido com tal pela comunidade cientifica da área.

domínio adequado dos conhecimentos matemáticos, mobilizados para ministrar as aulas, por outro lado também não estabeleciam relações concretas entre conhecimentos matemáticos e didáticos, pedagógicos e outros, próprios a profissão de professor.

Foi lecionando em outros cursos, que observei outros fenômenos que estão relacionados exclusivamente à aprendizagem de conhecimentos matemáticos, coerentes em contexto da graduação de cursos de serviço, em uma perspectiva diferente da Licenciatura em Matemática. Os estudantes do curso de ciências contábeis, por exemplo, não necessitam aprender matemática para lecionar, aprendem a matéria para operacionalizar certos processos que não têm na matemática a sua centralidade, ela é uma parte importante desta formação, mas é periférica no corpo de conhecimentos e de saberes das ciências contábeis, ou do futuro profissional desta área (o contador)

Nesse sentido, a formação inicial do professor de matemática era algo que estava “além”, que me inquietava, instigava-me a pesquisar. A formação inicial do professor de matemática, no âmbito do estágio curricular supervisionado, parecia abranger certos conhecimentos da profissão, que os estudantes mesmo no final da Licenciatura, davam indícios que não possuíam em seu repertório como futuros profissionais.

Em 2012, iniciei meus estudos de mestrado, na PUC-SP em Educação Matemática e a participar do grupo de pesquisa PEA-MAT. Em conjunto com meu orientador, realizamos a pesquisa do mestrado, defendida em 2015 (FREITAS, 2015), tendo como foco o processo de aprendizagem de função exponencial. Os sujeitos da pesquisa foram estagiários da Licenciatura em Matemática inseridos em uma turma de estágio IV[4], componente curricular ministrada pela professora de estágio, na época a própria pesquisadora.

Na pesquisa segundo Freitas (2015), o foco da investigação era o conhecimento matemático, a respeito da função exponencial, com estagiários do último período de curso. Visou-se analisar como esses conhecimentos eram mobilizados, no âmbito de uma engenharia didática (ARTIGUE, 1988). Essa experiência suscitou outras indagações e inquietações que mesmo com a finalização da pesquisa de mestrado não foram acomodadas, pelo contrário,

[4] O estágio IV é um componente curricular do curso de Licenciatura em Matemática, que faz parte do currículo das universidades estaduais da Bahia. Esta componente consiste na atuação dos estudantes como professores regentes em turmas de ensino médio, sob a supervisão do professor de estágio.

fortaleceram ainda mais meus questionamentos e a constatação da frágil formação inicial do professor de matemática na Bahia.

De acordo com Freitas (2015), os estudantes participantes da pesquisa evidenciaram, por meio das atividades realizadas, não terem consistência sobre conhecimentos didáticos e pedagógicos, mesmo quando estes se relacionavam com objetos matemáticos estudados (função exponencial) nas sessões de ensino.

Os aspectos sobre a formação de futuros professores, descritos na minha trajetória como pesquisadora, do ponto de vista pessoal e profissional, motivaram a pesquisa do doutorado. Nesse sentido, investigar fenômenos didáticos ligados aos processos de ensino e de aprendizagem em matemática, na formação inicial do futuro professor, configurou-se, portanto, como uma proposta inicial de trabalho. Assim, delimitamos como tema inicial, a construção de conhecimentos/saberes docentes de futuros professores de matemática.

Os sujeitos da pesquisa, foram estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, submetidos a um processo de formação. Quando escolhemos o campo matemático de estudo, buscamos algo que fosse considerado de muita relevância para alunos e professores, em nosso ponto de vista, a Geometria Analítica, por ser uma área em que há muita reprovação nos cursos de graduação, e Geometria Analítica Plana (GAP) por ser a parte de GA que é estudada na educação básica.

O grupo de pesquisa PEA-MAT teve um papel fundamental nas escolhas de investigação, pois os objetivos desse grupo vão ao encontro dos anseios da pesquisadora: “estamos assim interessados em pesquisar fenômenos didáticos ligados aos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos e estratégias quando estes estão relacionados a um objeto matemático” (PEAMAT, 2015). Nessa perspectiva, os estudos teóricos da Didática da Matemática se constituem como marco decisivo no desenvolvimento da pesquisa.

Observamos em Freitas (2015) que os sujeitos, mesmo submetidos a uma proposta de formação sobre o função exponencial, não conseguem relacionar os conhecimentos matemáticos inerentes a esses saberes com outros que também fazem parte do cabedal de conhecimentos importantes para a formação do futuro professor, tais como, pedagogia, didática, tecnologia (da informação e comunicação) etc.

Ao considerarmos o processo e desenvolvimento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) na contemporaneidade, há uma tendência para que as investigações dos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática incorporem o uso de tecnologias. Em nossa pesquisa, assumimos que a perspectiva dessa tendência é promover maior aproveitamento de tempo didático, facilitar os processos de ensino e de aprendizagem, partindo da hipótese que o uso de ambientes tecnológicos pode facilitar a visualização de propriedades e de construções geométricas, por exemplo, que são inacessíveis com tecnologias ditas tradicionais (lápis, papel, quadro, giz, retroprojetor, etc.).

É nesse contexto que esta pesquisa propõe, a partir do objetivo geral, trabalhar na formação inicial de estagiários, futuros professores, com um estudo sobre Geometria Analítica Plana (GAP), incorporando ao espaço de formação, o ambiente tecnológico.

Nossa investigação é uma pesquisa qualitativa de cunho exploratório, especificamente, apoia-se na Engenharia Didática do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)[5] (CHEVALLARD, 2009, p. 1).

Supomos que as construções dos sujeitos da pesquisa durante o PEP, poderiam evidenciar elementos que nos levassem a responder nossa questão de pesquisa. Para tanto, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) articulada com os referenciais sobre conhecimentos docentes defendidos por Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006), Silva e Lima (2015), foram a base que apoiou o desenvolvimento do PEP.

Destacamos ainda, nesse processo de motivações pessoais e escolhas de pesquisa, a importância da realização do estágio de doutoramento na universidade, « Aix Marseille Université, Marseille » França.

A participação da pesquisadora, nos grupos de trabalho do mestrado I e II, desenvolvidos respectivamente, no instituto de matemática de Marseille e na escola superior de professores e de educação, « Ecoles supérieure du professorat et de l'éducation de Aix Marseille», foi uma experiência de aprendizado teórico no berço do surgimento da Teoria Antropológica do Didático, bastante significativo. Além disso, destaco a participação, como, observadora, no grupo de trabalho de PEP, de formação de professores de matemática em exercício, numa escola pública da cidade supracitada.

---

[5] *Parcours D'étude et de Recherche (PER).* Manteremos a abreviação da tradução em português "Percurso de Estudo e Pesquisa - PEP"

Esse trabalho na França, possibilitou aprofundar e aprimorar as questões teóricas da Didática da Matemática e a respeito da formação de professores, tendo em conta, que apesar de ser diferente o sistema educacional francês, os problemas na formação de professores perpassam por aqueles também enfrentados por nós no Brasil, inclusive os fenômenos do ensino e aprendizagem. O estágio foi uma etapa crucial para o direcionamento do estudo, no sentido de equipar a pesquisadora teoricamente e buscar o desenvolvimento de um dispositivo teórico-metodológico, que ao mesmo tempo tivesse a perspectiva da pesquisa e da formação docente.

O desenho da pesquisa partiu da complexa relação entre teoria e prática, pesquisa e estudo, para a formação inicial do professor de matemática. Essa complexidade se evidencia a partir da problemática que apresentamos a seguir e que justifica a relevância de nossa investigação, do ponto de vista científico.

1.2 Problemática: justificativa, problema de pesquisa, questões e objetivos

O quadro de problemas que envolvem a formação inicial do professor de matemática no Brasil, não é uma realidade nova, diferentes aspectos problemáticos da formação têm sido objetos de estudos nas pesquisas. Nesse sentido, buscamos o aporte de resultados de pesquisas que já foram realizadas tendo como centralidade essa temática.

O estudo realizado por Fiorentini, Nacarato, Ferreira, Lopes, Freitas e Miskulin (2002) apresenta um panorama histórico das pesquisas sobre formação do professor que ensina matemática, de 1978 a 2002. A partir dos resultados apontados por esses autores, identificamos importantes contribuições que constituem um retrato da formação do professor de matemática no Brasil do final do século XX ao início do século XXI. Realidade que, de acordo com as pesquisas realizadas posteriormente (ZIMMEER, 2017; LEAL,2016, TEIXEIRA, 2013), parece não ter se modificado muito.

Fiorentini et al (2002) analisaram 112 trabalhos entre teses e dissertações, sendo que 59 se reportam à formação inicial. Categorizaram essas pesquisas em três sub focos de estudo: o antigo magistério, a licenciatura curta e ciências e a licenciatura plena em matemática. Nesses sub focos, os autores destacaram um total de 12 trabalhos a respeito de prática de ensino e estágio supervisionado, estes registrados dede a década de 70 até os anos 2000.

Com relação aos problemas dos cursos de licenciatura, os autores afirmam que não houve significativas mudanças nos últimos 25 anos anteriores à pesquisa. Eles afirmam que ainda prevalece a dicotomia entre a teoria e a prática, entre as disciplinas específicas e pedagógicas, além do distanciamento entre o que os licenciandos aprendem na graduação e o que de fato necessitam para o exercício da prática escolar.

Há ainda, segundo Fiorentini et al (2003), a predominância de práticas de ensino e de processos avaliativos tradicionais, em especial por parte dos professores da área específica. Identifica-se avanços dessa visão negativista a partir do final dos anos 90, particularmente nos grupos de professores ligados à Educação Matemática.

Com relação aos estudos que tratam da prática de ensino e do estágio supervisionado (12 pesquisas), os autores relatam que metade deles ocorreram nos últimos cinco anos que antecederam sua pesquisa. Inicialmente as pesquisas tinham como preocupações “propor e avaliar, utilizando pré e pós testes ou questionários e fichas, do desempenho dos estagiários” (FIORENTINI et al, 2003, p. 144).

Diagnosticar como acontece o estágio e a prática de ensino, foi o tema mais recorrente, ao longo dos 25 anos, os autores ainda destacam os trabalhos de Pohlenz (1999) e Gavanski (2000) que envolveram os graduandos (estagiários) em projetos com modelagem matemática, sobre a constituição e a ressignificação de saberes de professores e da prática escolar, durante a prática de ensino e do estágio supervisionado. Destacaram também os trabalhos de Freitas (2000) e Castro (2002) que utilizaram registros etnográficos, entrevistas, registros de campo e relatórios, com o objetivo de descrever e interpretar o processo de “vir a ser professor” (FIORENTINI, et al., 2003, p. 145).

Dez anos após o estudo de Fiorentini et al (2003), Teixeira e Cyrino (2013) publicam uma pesquisa que apresenta um panorama das pesquisas brasileiras, especificamente sobre o estágio supervisionado nos cursos de licenciatura no Brasil. Nesse estudo os autores levantaram 21 trabalhos, entre dissertações de mestrado profissional e acadêmico (dezenove dissertações) e teses de doutorado (duas teses).

Após as suas análises, identificaram os eixos temáticos desenvolvidos nas pesquisas: análises de propostas de estágio supervisionado; potencialidades da utilização de uma estratégia metodológica específica durante

o estágio; o papel do estágio supervisionado ou de ações específicas realizadas no estágio supervisionado na formação de professores de matemática; incorporação de aspectos da legislação referentes ao estágio supervisionado por cursos de Licenciatura em Matemática; percepções de professores formadores responsáveis pelo estágio a respeito de prática de ensino e saberes docentes.

A maioria das pesquisas ressalta, essencialmente, as potencialidades do estágio supervisionado na formação inicial de professores de Matemática. De acordo com Teixeira e Cyrino (2013, p.47), as pesquisas de alguma forma "levam em conta aspectos formativos essenciais ao futuro professor como a articulação entre teoria e prática, a reflexão a respeito da prática docente e a aproximação entre a universidade e a escola".

Os estudos de Fiorentini et al (2003), Teixeira e Cyrino (2013) e outros, como Pires (2000), Gatti (2014), Pimenta e Lima (2012),Freitas (2015), Leal (2016) e Zimmer (2017), colocam o estágio supervisionado na centralidade da formação inicial, sendo *a priori* o elo de ligação entre a teoria e a prática dentro da Licenciatura em Matemática, a universidade e a escola, o estudante e o professor.

Em nosso ponto de vista, apoiados nos resultados das pesquisas e no trabalho de estágio realizado desde 2010, na Bahia, a falta de articulação entre a teoria e prática, a falta de aproximação entre a universidade e a escola, são sintomas de um problema mais profundo na formação inicial, especialmente na licenciatura.

O problema se refere a uma carência no repertório de conhecimentos e de saberes docentes inerentes à profissão de professor, que deveriam ser construídos, ainda que parcialmente, ao longo desta formação. Consideramos preocupante o nível de despreparo observado em estudantes em fase final de Licenciatura e a falta de articulação de diferentes conhecimentos, especialmente com o conhecimento matemático.

Se, de um lado, o repertório de conhecimento matemático dos sujeitos acarreta problemas, dificuldades de entendimento e apropriação do saber, de outro, articular esses saberes com as especificidades próprias dos processos de ensino e aprendizagem se torna ainda mais difícil para o futuro professor.

Nos parágrafos que seguem, destacamos algumas pesquisas sobre formação inicial e continuada de professores que corroboram com as nossas

proposições, a respeito das diferentes fragilidades existentes na formação dos professores de matemática.

Zuffi (1999, 2004) e Rossini (2006) na formação continuada, trataram do estudo de funções e apontaram diferentes problemas da formação associados ao domínio de tal campo matemático. Na formação inicial, nosso estudo de mestrado, segundo Freitas (2015), identifica outras fragilidades a respeito de função afim e função exponencial principalmente e sobre o conceito geral de função.

Da mesma forma, outros autores como Fernandes e Fonseca (2015), Gravina (2001), Pietropaolo (2005), Serralheiro (2007), Dias (2009), afirmam que no campo da Geometria, as demonstrações e provas têm presença insignificante em salas de aula de matemática na educação básica, e que este fato reforça o despreparo observado de professores em lidar com tais atividades. Serralheiro (2007) aponta ainda a ausência de estudos de demonstrações e provas durante a Licenciatura em Matemática, ou se ocorrem são de forma superficial.

Lorenzato (1995) já alertava no final da década de noventa que os professores não possuem os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas de sala de aula. O autor sinaliza ainda a carência dos estudos de Geometria nos cursos de formação de professores.

O estudo de Freitas (2015) também sinalizou o pouco domínio do conhecimento matemático dos sujeitos, no que se refere aos conceitos básicos de álgebra e das representações de funções, ou equação da reta. Ainda assim, a pesquisa de Freitas (2015) revelou avanços quanto à aquisição de conhecimentos relativos à função exponencial, no entanto, a articulação entre as representações algébricas e gráficas desenvolvidas pelos estudantes pesquisados ainda não contempla um campo de conhecimento que permita a esses sujeitos lecionar esses conceitos com segurança.

Esses resultados de diferentes pesquisas reforçam a escolha da GAP, como campo temático de estudo profícuo para realização da pesquisa, tendo em vista, as diversas dificuldades apontadas, oriundas do campo geométrico e algébrico.

Além do problema na formação matemática, levantamos outras reflexões acerca da formação inicial de professores, no que se refere às questões da prática de ensino, dos saberes didáticos, pedagógicos e matemáticos desenvolvidos durante a Licenciatura em Matemática.

Pires, Silva e Santos (2006) relatam em sua pesquisa, com coordenadores dos cursos de Licenciatura em Matemática, sobre a visão dos professores do ensino superior, que o estágio supervisionado, é a única oportunidade em que se discute a prática de ensino como atividade docente. Neste caso, os componentes de cálculo, geometria, álgebra e outros são abordados de forma desarticulada dos conceitos relacionados à prática de ensino e dos saberes docentes, perspectiva também apontada por Gatti (2010).

Os estudos realizados por Pires (2012) indicam a fragilidade da formação do professor de matemática relacionada com o estágio supervisionado desenvolvido nos cursos de licenciaturas, em específico na Bahia. Segundo Pimenta e Lima (2012), o estágio costuma ser visto como menos importante que outros componentes curriculares.

A pesquisa de Freitas (2015) realizada com estagiários da Licenciatura em Matemática evidenciou que seus sujeitos de pesquisa, uma vez submetidos a uma proposta de formação inicial, no âmbito do estágio supervisionado, não desenvolveram certos saberes matemáticos aplicados na sequência didática proposta. Eles, também, não conseguiram estabelecer inter-relações entre o conhecimento matemático ensinado e o conhecimento didático. Não incorporaram ao seu repertório os aspectos didático-pedagógicos do trabalho de formação realizado, pois quando foram solicitados para construir uma proposta de ensino, para seus eventuais alunos, repetiram a mesma prática tradicional de ensino.

Destacamos um importante resultado de pesquisa no âmbito da geometria, que dialoga com o problema identificado em Freitas (2015). A pesquisa de doutorado de Silva (2015), realizada com professores do ensino básico em serviço, sinaliza um resultado semelhante. A autora levantou como hipótese que o processo reflexivo sobre a prática (desenvolvido durante a pesquisa) pode, além de influenciar os saberes docentes de professores de matemática do ensino fundamental nas séries finais, pode ser capaz de provocar alterações sobre sua prática docente. Está hipótese não foi validada na pesquisa. A autora acrescenta como proposta de estudos futuros a seguinte questão: “porque mesmo sabendo que algumas práticas de ensino adotadas não eficientes, quando levamos em conta a aprendizagem de alunos sobre a simetria ortogonal, alguns professores voltam a insistir nessas mesmas práticas?” (SILVA, 2015. p. 290).

Os aspectos apontados nos parágrafos anteriores a respeito dos resultados das pesquisas com formação de professores nos levam a afirmar que, não é apenas o domínio dos conhecimentos matemáticos que representa o ponto fundamental da formação docente, mas a articulação intrínseca e extrínseca entre esses “saberes” e aqueles didáticos e pedagógicos dos conteúdos, estes saberes são inerentes à formação inicial docente, os quais poderão impactar diretamente nas futuras práticas de sala de aula.

O trabalho de Freitas (2015) se configurou como uma alavanca inicial para esta tese, a partir da indicação da autora para pesquisas futuras:

> Indicamos também como possibilidade uma nova pesquisa que pudesse construir e/ou escolher, de forma autônoma, uma sequência didática, cujo objetivo é introduzir conceitos matemáticos, desenvolver os saberes docentes, na perspectiva de um trabalho colaborativo com classes de Ensino Médio, nas quais os estudantes de estágio pudessem aplicar a sequência didática construída por eles. Isso poderia dar conta de (re)construir, durante o Estágio Supervisionado, saberes docentes necessários à prática do professor (ou futuros professores). (FREITAS, 2015, p. 161)

A perspectiva seria realizar uma pesquisa sobre os saberes docentes, levantando questões novas, ou sobre outras perspectivas, trazendo assim contribuições para o debate sobre a formação inicial docente.

Apesar dessa indicação de estudos futuros, no âmbito das escolhas de nossa pesquisa, nos confrontamos com um rico espaço dos campos matemáticos a serem explorados na formação inicial de professores de matemática, na Álgebra, no Cálculo e na Geometria etc.

Delimitamos, portanto, o estudo do objeto matemático para os tópicos de Geometria Analítica Plana (GAP). Tomamos como hipótese que a Geometria Analítica (GA) é um dos campos da matemática que possibilita aos sujeitos desenvolver diversas habilidades e competências cognitivas que têm fundamental importância na construção do conhecimento matemático do futuro professor, pois articula diferentes campos do conhecimento matemático a Álgebra e a Geometria, e até o próprio Cálculo.

Em uma análise inicial de currículos de cursos de Licenciatura em Matemática, constamos que a Geometria Analítica (GA) se apresenta como componente pré-requisito para o estudo do cálculo e da álgebra linear. Nesse sentido, é relevante desenvolver um estudo sobre a formação inicial de professores, tendo a GA como campo matemático de fundo, visto que as

pesquisas já citadas têm revelado dificuldades dos sujeitos em formação no domínio de conceitos matemáticos, tanto no campo da Álgebra como na Geometria.

Um dado que reforça o problema com GA, foi revelado partir de entrevistas realizadas com professores que atuavam nas escolas públicas do município de Barreiras-BA, participantes do projeto de estágio (desenvolvido pela pesquisadora) no âmbito do estágio curricular supervisionado da UNEB, nos anos de 2010 a 2012. Revelou que os professores, quando questionados como era no ensino médio o estudo de GA, respondiam que tal estudo só acontecia no último ano de curso (3º ano) e de forma bem superficial. A justificativa apresentada é que os conteúdos que devem ser ministrados ao longo do ensino médio, não são cumpridos em tempo e são realocados nos períodos escolares subsequentes, assim a GA é um dos conteúdos que ficam, muitas vezes, relegados para segundo plano ou não é ministrado.

Diante de tudo isto exposto, vale a pena salientar que segundo Tardif (2012), Silva e Lima (2015), Freitas (2015), determinados conhecimentos docentes, só serão constituídos na prática de sala de aula. Em nossa pesquisa estamos interessados em discutir os problemas relacionados aos conhecimentos docentes próprios da formação inicial, e imprescindíveis à prática do (futuro) professor.

Em nosso ponto de vista, os estudos já relatados, revelam que o professor recém-formado ou em fase final da formação da licenciatura, apresentam um cabedal de conhecimentos insuficientes para iniciar a carreira docente, no entanto, ainda assim passa a atuar em sala de aula, levando muitas vezes as dificuldades da formação inicial para a formação continuada.

Levantamos como hipótese seja possível desenvolver conhecimentos docentes inerentes à prática profissional, durante a licenciatura. Pesquisadores, como Shulman (1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006), Tardif (2012), Silva e Lima (2015), apontam quais conhecimentos são necessários para a formação de professor. Sintetizamos e delimitamos esses conhecimentos apoiados nas ideias de Silva e Lima (2015). Esses autores evidenciam quatro blocos de conhecimentos necessários para a formação do professor: conhecimento do conteúdo (CC), conhecimento pedagógico (CP), conhecimento tecnológico (CT) e conhecimento didático (CD), nossa pesquisa

se apoia *a priori*, nesses conhecimentos, discutiremos sobre eles mais tarde no texto.

Considerando a problemática apresentada e os resultados das pesquisas consultadas, nos diferentes aspectos da formação inicial do professor de matemática, delimitamos a seguinte questão[6]: **Quais conhecimentos podem ser adquiridos por professores estagiários em geometria analítica plana, com a ajuda de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), e quais benefícios poderão obter para projetar (conservá-los) esses conhecimentos no ensino médio?**

A questão de pesquisa suscitou como questão intermediária, especialmente para a fase experimental da investigação: quais conhecimentos da docência são mobilizados por estagiários quando submetidos a um percurso de estudo e pesquisa de formação de professores (PEP-FP) desenvolvido durante o estágio supervisionado?

Diante das questões, delimitamos como **objetivo geral** de pesquisa: analisar os conhecimentos docentes, evidenciados a partir de um conjunto de praxeologias de GAP do ponto e da reta com os sujeitos e (re) construídas por eles, a partir de um dispositivo-metodológico-teórico (PEP-FP/TAD) desenvolvido com estudantes envolvidos no estágio curricular supervisionado de Licenciatura em Matemática. A partir dessa delimitação do estudo, elaboramos os seguintes **objetivos específicos**:

A) Identificar um modelo epistemológico de referência para o estudo de geometria analítica plana;
B) Identificar o modelo epistemológico dominante para o estudo de GAP, voltada para o ensino médio brasileiro;
C) Proporcionar aos sujeitos condições para discutirem e analisarem Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) com intuito de identificar o significado de conceitos de GAP para o ensino com seus potenciais alunos;

[6] Nossa questão de pesquisa foi construida originalmente em francês : « Quelles connaissances nouvelles (ou pas) peut-on faire acquérir aux professeurs stagiaires en géométrie analytique plane à l'aide d'un PER-FP, et quel(s) bénéfice(s) peuvent-ils en retirer pour concevoir cet enseignement au lycée ? ». (FREITAS, ALMOULOUD, MATHERON, 2018). Apresentada no formato de pôster, e posteriormente em artigo completo, contendo as construções parciais da pesquisa de doutorado, trabalho inédito do PEAMAT no « Citad 6 -6eme Congrés Internationale de la Théorie Anthoopologique du Ditactique », sexto congresso internacional da teoria antropológica do didático, realizado de 21 a 26 de janeiro de 2018, Grenoble, França.

D) Organizar um PEP-FP a ser desenvolvido com estagiários de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior brasileira, apoiado em um Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA) para o ensino e a aprendizagem de tópicos de GAP (ponto e reta) contemplando o conhecimento: matemático e didático;

E) Proporcionar aos sujeitos condições para elaborarem e analisarem uma organização matemática e didática voltadas para os alunos do ensino médio;

F) Analisar as construções e as praxeologias dos professores estagiários, identificando os conhecimentos docentes mobilizados por eles.

A partir da delimitação dos objetivos que se deseja alcançar com a pesquisa, no sentido de responder ou ampliar as reflexões acerca das questões levantadas, formulamos como **hipótese**:

- Considerando que os estudantes da licenciatura, na etapa do estágio supervisionado, não têm em seu equipamento praxeológico os conhecimentos matemáticos e didáticos suficientes à prática de regência de classe, voltados para o ensino de GAP, conjectura-se que seja possível desenvolver, (re) construir ou mobilizar tais conhecimentos em uma proposta de formação, por meio de um dispositivo- metodológico-teórico.

Iniciamos a pesquisa desenvolvendo preliminarmente um estudo piloto, com os estagiários de um curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de identificar quais as *condições e restrições* para o desenvolvimento da engenharia didática de PEP com as características definidas a partir dos objetivos de pesquisa. Nesse sentido, traremos os principais resultados desse piloto, que influenciaram na concepção do nosso PEP- FP, além de abordar as ideias teóricas fundamentais que foram utilizadas.

1.3 Ideias teóricas gerais e estudo piloto

Abordamos de forma sucinta alguns construtos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que são fundamentais nesta pesquisa e que também nortearam o estudo piloto.

Chevallard (2011, p. 12, tradução nossa) define “que a didática é a ciência de *condições* e *restrições* da difusão social, junto de pessoas, instituições e

praxeologias".[7]O objetivo do autor é esclarecer a distinção entre "condições" e "restrições".

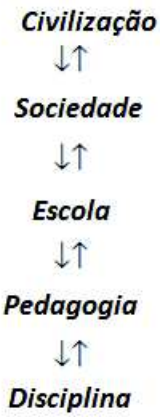
Segundo o autor, tudo é condição, mas, pode-se afirmar que uma *condição* é uma *restrição*, por uma determinada instância (*U*), uma pessoa ou uma instituição, quando, dadas outras condições prevalecentes, *U* não pode esperar um certo período para poder modificar esta condição. Ou seja, uma restrição é uma condição não modificável por *U*. As condições que não aparecem como restrições, como dito, serão chamadas de *condições*, em síntese, condições são modificáveis (por U). (CHEVALLARD, 2011).

De acordo com o autor, as *condições* que são objetos de estudo da Didática da Matemática, não podem ser enumeradas *a priori*; sua progressiva descoberta e a compreensão de sua função na disseminação de uma praxeologia ou entidade praxeológica $\wp$, são o objetivo permanente da pesquisa em didática (da matemática).

Nesse sentido o autor elabora uma classificação geral, que ele chamou de escala de níveis de co-determinação didática, segundo a figura 1.

Segundo Chevallard (2011), em cada nível da escala de co-determinação didática tem origem certas condições. O que é condição em um nível pode ser restrição em um outro. Por exemplo, o ensino e aprendizagem de cálculo diferencial, no nível universitário é uma instância na qual há certas condições para o ensino deste campo de estudo, já na instância escola básica, tais condições serão consideradas restrições.

Figura 1 - Escala dos níveis de co-determinação didática



Fonte: Adaptado de Chevallard (2011, p. 12)

[7] Je partirai de la définition suivante de la didactique : la didactique est la science des conditions et contraintes de la diffusion sociale – auprès des personnes et des institutions – des praxéologies. (CHEVALLARD,2011, p.12)

No caso do nível de civilização, por exemplo, o autor explica que existem condições que prevalecem em todo um conjunto de sociedades, porém em um dado momento, algumas sociedades podem vir a analisar ou até mesmo contestar tais condições, mas segundo o autor, não vão mudar.

Na figura 1, as flechas são lidas da seguinte forma: a criação ou modificação de uma condição em um nível dado, pode influenciar ou mudar as coisas em níveis inferiores. Por exemplo, no nível escolar pode ocorrer mudanças que poderão impactar os fenômenos que ocorre no nível pedagógico. Isto também pode ocorrer em níveis superiores, no nível de sociedade ou até mesmo no nível de civilização.

Nessa perspectiva, a ideia de engenharia didática, em nosso entendimento, visa propor, enquanto dispositivo didático, transformações das *condições* que nascem no interior das instituições, especialmente na universidade. Chevallard (2011) destaca que há uma tensão existente entre as engenharias didáticas, ditas de pesquisa e de desenvolvimento. Em nosso ponto de vista, o processo de evolução natural das pesquisas pelo uso das engenharias, permite que estas se aprimorem, no sentido de uma ampliação de seu uso, sem prejuízo ou distorções de suas concepções, fornecendo resultados passíveis de validação.

Apoiamo-nos no trabalho de Sierra (2006) para a constituição do dispositivo PEP-FP/TAD, para desenvolver o processo de formação e pesquisa com professores estagiários, em uma instituição de ensino superior. É importante salientar que, na formação de professores, há saberes fundamentais para o exercício da docência, os quais não são apenas conhecimentos matemáticos, por exemplo, o conhecimento didático, o pedagógico, o conhecimento do currículo, dos alunos etc.

Em nossa investigação, o dispositivo da pesquisa visou, *a priori*, enquanto proposta de formação, explorar conhecimentos docentes que poderiam aparecer interligados e articulados com o saber matemático, ou constituírem-se de forma independente, como por exemplo, o conhecimento pedagógico, das ciências da educação, ou o conhecimento tecnológico (de TIC) voltado para o ensino.

A organização do dispositivo da engenharia (PEP) poderia, ou não, permitir que certos conhecimentos, não previstos *a priori*, desenvolverem-se no *equipamento praxeológico* dos sujeitos envolvidos na formação.

Chevallard (2007) define equipamento praxeológico, denotado por *EP*(*x*), a partir da noção de relação pessoal e institucional (*R* (*x*, *o*) e *RI* (*p*, *o*,)) de um sujeito com um objeto. É um conjunto de praxeologias de uma pessoa $\boldsymbol{x}$**,** relacionadas a um assunto, ou conteúdo de uma instituição $\boldsymbol{I}$ na posição $\boldsymbol{p}$ dentro dela *EPI*(*p*), está última sigla, significa o equipamento praxeológico de uma pessoa dentro de uma instituição em uma posição $\boldsymbol{p}$. Em nossa pesquisa, chamamos de equipamento praxeológico dos professores estagiários, as praxeologias seriam *a priori*, ativadas, mobilizadas, (re) construídas durante o desenvolvimento do PEP-FP.

Aprofundaremos as questões relacionadas à construção do percurso de estudo e pesquisa de formação profissional (PEP-FP), no desenvolvimento do texto, principalmente nos capítulos 5 e 6.

Em nosso ponto de vista, a engenharia didática de PEP tem potencialidade para responder nossa questão de pesquisa. Nesse sentido, identificamos uma inseparável relação entre o trabalho a ser desenvolvido com esta metodologia e certos elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), tais como: tipos de *tarefas*, *técnicas*, *tecnologia* e *teoria.* Tais elementos dialogam com outros da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986,1997), mesmo que implicitamente.

Sobre a TSD, destacamos a ideia de tarefa fundamental, apoiada no conceito de situação fundamental e *milieu* adidático, segundo Brousseau (1997) bem como as dialéticas de *ação*, *validação*, *formulação* e *institucionalização*. São elementos que poderão estar presentes no trabalho experimental do PEP-FP, mesmo que implicitamente.

Como parte dos estudos preliminares da pesquisa, desenvolvemos um estudo piloto, cujo principal objetivo foi identificar as *condições* e *restrições* para a realização do PEP, e os conhecimentos presentes no seu equipamento praxeológico.

Nesse sentido, realizamos entre dezembro de 2016 e maio de 2017 um estudo piloto com um grupo de estudantes de um curso de licenciatura, na Bahia. O piloto foi norteado por questões provisórias relacionadas ao problema de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de tópicos de GAP e os conhecimentos da docência, segundo Silva e Lima (2015).

Assim, na construção de cada sessão de ensino, tentamos articular os referenciais teóricos com intuito de fazer emergir fenômenos relacionados aos

achados da fase experimental. Esses fenômenos foram identificados a partir das respostas dadas pelos sujeitos, para as diferentes questões propostas na condução de cada sessão de ensino. (FREITAS e ALMOULOUD, 2018)[8]

As *condições* e *restrições* identificadas no piloto, se caracterizaram basicamente em duas categorias: institucionais e formativas. Na categoria institucional, ou seja, em termos de instituição (I), incluímos aspectos da estrutura da universidade, do livro didático, o currículo prescrito para o estágio supervisionado, o contrato didático vigente no estágio, elementos que não tínhamos condições de contornar naquele momento.

Na dimensão da formação, incluímos os conhecimentos matemáticos dos sujeitos sobre GAP, conhecimentos relacionados ao uso de tecnologias digitais, por exemplo, *software* para o ensino (Geogebra) de matemática, conhecimentos da Didática da Matemática[9] e conhecimentos pedagógicos, aqueles globais sobre a prática de ensino e a educação, (FREITAS e ALMOULOUD, 2018)

De acordo com Freitas e Almouloud (2018), para realização do estudo piloto foi necessário constituir um *milieu* mínimo de trabalho, com base na noção de PEP segundo Chevallard (1999).

Os autores identificaram os sujeitos participantes e os elementos gerais de um sistema didático de trabalho provisório realizado no piloto.

> - X é o grupo de estudantes da licenciatura que participam do estágio supervisionado, que chamaremos apenas de estagiários, pode estar incluído nesse grupo o professor de estágio, em nossa pesquisa, esse ator não se configura como sujeito de análise;
> - Y é o conjunto composto pela própria pesquisadora, quem ao mesmo tempo conduz e organiza o estudo, sob o apoio do orientador;
> - Q_0 é uma questão geratriz, ou seja, geradora do estudo e de outras questões
> -R é a resposta para questão, deve satisfazer ao conjunto de restrições *a priori*. (FREITAS, ALMOULOUD, 2018, p. 5)

O sistema didático provisório estabelecido pelos autores foi chamado de piloto, e a questão geradora foi: "*quais saberes e conhecimentos da docência são mobilizados por estagiários no percurso de um estudo sobre GAP*?". A partir da questão geradora, questões intermediárias (provisórias) foram levantadas

[8] Os resultados parciais da pesquisa e do estudo piloto, foram apresentados em forma de artigo no II Simpósio Latino Americano de Didática da Matemática, de 03 a 08 dezembro de 2018 Jarinu- São Paulo- Brasil. O artigo encontra-se, aguardando publicação na Revista Educação Matemática Pesquisa da PUC-SP

[9] [...] Ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos" (ALMOULOUD, 2007, p. 17).

sobre os conhecimentos de futuros professores, constituindo-se o pano de fundo de cada sessão de trabalho (FREITAS e ALMOULOUD, 2018, p. 5)

O conjunto de tarefas de diferentes tipos, desenvolvidas com os estudantes, envolviam em algum nível os quatro blocos de conhecimentos docentes, bem como suas possíveis interseções, conforme descritas em Silva e Lima (2015), como conhecimento da interseção.

As tarefas matemáticas aplicadas foram predominantemente adaptadas de livros didáticos do ensino médio, basicamente sobre o estudo do ponto e da reta no plano cartesiano. Assim, o sistema didático provisório deveria fornecer, *a priori*, igualmente um conjunto de respostas provisórias que sintetizamos como sendo $R_p = \{R_{p1}R_{p2}.., R_{p8}\}$ donde, $S_p(X_p, Y, Q_p) \rightarrow R_p$. O funcionamento desse sistema foi engendrado pelo desenvolvimento de oito sessões de ensino, tendo como centralidade a organização matemática (ou praxeologia) sobre ponto e reta.

Segundo Chevallard (1999), a ideia chave de praxeologia se concentra na noção solidaria de tarefa *t* e de tipo de tarefa *T*. Segundo o autor, quando uma tarefa *t* exprime um determinado tipo de tarefa *T,* podemos escrever que $t \in T$, ou seja, *t* é do tipo *T*. Significa dizer, que numa praxeologia, podemos ter um conjunto de tarefas $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, \dots, t_n\}$ do mesmo tipo *T.*

Uma praxeologia relativa à um tipo de tarefa $\boldsymbol{T}$ ou a vários tipos de tarefas, $T_1, T_2, ..., T_n$, contém, para cada tipo, pelo menos uma técnica $\boldsymbol{\tau}$ associada a cada tipo de tarefa $\boldsymbol{T}$**,** ou seja:

> [...] uma praxeologia relativa a um tipo de tarefas contém, portanto, em princípio, uma técnica relativa à $\boldsymbol{T}$. Ela contém assim um bloco $[T/\tau]$, que se chama bloco prático-técnico, e que se identifica genericamente para o que frequentemente chama-se **saber fazer:** um certo tipo de tarefas**,** é de alguma maneira, de cumprir tarefas desse tipo. (CHEVALLARD, 1999, p.2, tradução nossa)[10]

Significa dizer que, se um sujeito se confronta com uma tarefa matemática de um certo tipo, ele deverá empregar uma técnica "adequada" de resolução. Chevallard (1999) chama esse processo de desenvolvimento de bloco prático-técnico de um tipo de tarefa (ou saber fazer). Uma técnica normalmente é reconhecida e aceita pela instituição que a propôs. Por exemplo, uma técnica

[10] Une praxéologie relative au type de tâches *T* contient donc, en principe, une technique relative à *T*. Elle contient ainsi un « bloc » $[\boldsymbol{T}/\boldsymbol{\tau}]$, qu'on appelle bloc *pratico technique*, et qu'on identifiera génériquement à ce qu'on nomme couramment *un savoir-faire* : un certain type de tâches, *T*, et une certaine manière, $\boldsymbol{T}$, d'accomplir les tâches de ce type.

apresentada a um professor de um determinado período escolar, poderá ser aceita ou rejeitada por ele, pois para cada tipo de tarefa existe um número limitado de técnicas, especialmente reconhecidas por cada instituição. Pode-se excluir técnicas alternativas possíveis que podem existir efetivamente, mas em outras instituições.

As tarefas desenvolvidas nas atividades do piloto, evidenciaram a necessidade de os estudantes justificarem as técnicas utilizadas para o cumprimento das tarefas. Chevallard (1999) explica que existe um discurso racional, um *logos*, da técnica $\boldsymbol{\tau}$ **.** O objetivo principal desse discurso é justificar racionalmente a técnica**.** O autor o chama de *tecnologia* e usa a notação $\boldsymbol{\theta}$ **.** Além disso, o discurso permite o bom desempenho das tarefas, ou seja, conseguir o que é pretendido.

Segundo o autor, o discurso tecnológico-teórico (tecnologia $\boldsymbol{\theta}$/ teoria Θ) contém asserções, mais ou menos explícitas, as quais podem requerer uma justificação. Nesse sentido, Chevallard (1999) sugere passar para um nível superior de justificação, explicação e produção, o nível da *teoria,* que ele denotou por, Θ. A teoria vai assumir, em relação à tecnologia, a mesma função que a tecnologia desempenha em relação à técnica.

Como já dito anteriormente, objetivo geral do estudo piloto foi identificar as *condições* e *restrições* que influenciariam a realização do nosso PEP-FP. De acordo com Freitas e Almouloud (2018), os quadros 1 e 2 representam uma síntese com as questões norteadoras do piloto, os objetivos de cada sessão de ensino e a descrição das tarefas propostas. Algumas das tarefas realizadas, por exemplo, atividades sobre o uso do software ou da plataforma virtual, não são efetivamente tarefas matemáticas, o que não se caracteriza como uma distorção do uso da teoria, pois segundo Chevallard (1999) o conceito central de uma tarefa se insere no campo da antropologia, ou seja, como qualquer atividade humana.

No quadro 1, apresentamos uma síntese da primeira parte do estudo piloto, ressaltado as questões norteadoras, os objetivos para cada sessão e as tarefas e/ou tipos de tarefas aplicadas.

Ressaltamos que, o objetivo principal do uso da interface do *Geogebra* foi destacar as diferenças nas técnicas empreendidas com o uso da tecnologia digital e com o uso da tecnologia tradicional, lápis, régua e papel, em que pese,

em certas situações, o *software* permite desenvolver técnicas inacessíveis com tecnologias tradicionais, em outras utilizar as duas tecnologias.

Quadro 1 - Quadro geral das sessões do estudo piloto parte I

SESS-ÃO	QUESTÕES NORTEADORAS	OBJETIVOS	TAREFAS
01	$\boldsymbol{Q_1}$:Quais saberes pedagógicos e das tecnologias são mobilizados e/ ou construídos pelos sujeitos durante as atividades de estudo em ambiente tecnológico?	Aproximação dos sujeitos com o conhecimento pedagógico tecnológico	$\boldsymbol{t_1}$**:** acessar o ambiente virtual $\boldsymbol{t_2}$**:** atualizar o perfil $\boldsymbol{t_3}$**:**participar do fórum virtual $\boldsymbol{t_4}$:desenvolver a atividade diário
02	$\boldsymbol{Q_2}$:Quais conceitos geométricos, pedagógicos e tecnológicos são mobilizados durante a sessão de ensino?	Re(significar) noções de ponto, reta e o conceito de distância entre dois pontos.	$\boldsymbol{t_5}$:marcar pontos no plano cartesiano. $\boldsymbol{t_6}$:movimentar pontos no plano cartesiano $\boldsymbol{t_7}$:representar uma reta no plano cartesiano $\boldsymbol{t_8}$: movimentar uma reta no plano cartesiano $\boldsymbol{t_9}$:determinar geometricamente a distância entre dois pontos $\boldsymbol{t_{10}}$: determinar algebricamente a distância entre dois pontos $\boldsymbol{t_{11}}$: elaborar uma sequência de ensino sobre distância
03	$\boldsymbol{Q_3}$: Quais construções podem ser realizadas pelos estudantes quando estes estão de posse do livro didático?	i)Identificar as organizações matemáticas sobre GA presentes no livro didático; ii)Identificar as tarefas do livro didático	$\boldsymbol{t_{12}}$: identificar tópicos de GA no livro didático $\boldsymbol{t_{13}}$:identificar as tarefas ($\boldsymbol{t}$) matemáticas no livro didático $\boldsymbol{t_{14}}$**:** identificar diferentes tipos ($\boldsymbol{T}$) de tarefas no livro didático
04	$\boldsymbol{Q_4}$: quais tarefas, técnica e tecnologias são apresentadas pelos sujeitos no estudo do livro didático? $\boldsymbol{Q_5}$: quais conhecimentos didáticos são mobilizados pelos estudantes durante o estudo do livro didático?	Reconhecer os elementos t didáticos da TAD, ($\boldsymbol{T, \tau, \theta, \Theta}$)	$\boldsymbol{t_{15}}$:identificar uma técnica matemáticas ($\boldsymbol{\tau}$) $\boldsymbol{t_{16}}$**:**identificar a tecnologia ($\boldsymbol{\theta}$) de uma tarefa $\boldsymbol{t_{17}}$**:**identificar a teoria ($\boldsymbol{\Theta}$) de uma tarefa
05	$\mathbf{Q_6}$: Quais **os** blocos prático-técnico e tecnológico-teórico em tarefas sobre distância entre dois pontos, baricentro de um triângulo, ponto médio e mediana de um segmento	Reconhecer os blocos prático-técnico e tecnológico-teórico em tarefas sobre distância entre dois pontos, baricentro de um triângulo, ponto médio e mediana de um segmento	$\mathbf{t_{18}}$**:** Mostre que a "figura dada" é um triângulo retângulo e isósceles. $\mathbf{t_{19}}$**:**Identificar a técnica utilizada na tarefa t_{18} $\mathbf{t_{20}}$**:** identificar o bloco tecnológico-teórico da tarefa t_{18} $\mathbf{t_{21}}$**:** determine as coordenadas do ponto médio de cada lado do triângulo. $\mathbf{t_{22}}$**:** Calcular o comprimento dos segmentos cujas extremidades são os vértices do triângulo dado $\mathbf{t_{23}}$**:** Calcular o ponto médio dos segmentos cujas extremidades são os vértices do triângulo dado

Fonte: Freitas e Almouloud (2018, p. 9)

Na estruturação e aplicação das sessões de ensino apoiamo-nos na análise *a priori* e *a posteriori*, respectivamente, à luz das dialéticas da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização). Essas análises permitiram identificar quais condições e restrições podem ser evidenciadas como possibilidade de realização de um PEP-FP, dentro do contexto institucional da pesquisa.

As sessões de ensino deveriam *a priori* produzir situações que têm um potencial para os sujeitos pudessem desenvolver a fluência necessária para o

uso da interface digital do *software Geogebra*, bem como debruçar-se sobre certos aspectos teóricos da TAD, no caso, a noção de *tarefa* e *tipo de tarefa*, técnica, *tecnologia* [11]e *teoria.*

A análise e o estudo das organizações matemáticas dominantes nos livros didáticos, forneceram subsídios para uma suposta organização de sala de aula, do currículo, dos conhecimentos matemáticos em jogo, do planejamento escolar além de possibilitar desenvolver nos sujeitos, um olhar mais crítico sobre o livro didático (FREITAS e ALMOULOUD,2018).

Na segunda parte do piloto, segundo o quadro 2, priorizou-se durante o estudo explorar situações que favorecessem o conhecimento matemático aliado ao conhecimento didático, segundo a noção de conhecimento de interseção.

Quadro 2 - quadro geral das sessões do estudo piloto parte II

SESSÃO	QUESTÕES NORTEADORAS	OBJETIVOS	TAREFAS
06	$Q_{7:}$ quais saberes pedagógico, didático, matemático e tecnológicos são mobilizados pelos sujeitos. O conteúdo matemático de fundo é a definição/ propriedade de alinhamento de três pontos e a noção do conceito de reta.	(re)construir a noção de reta, por meio de tarefas sobre alinhamento de três pontos	$\boldsymbol{t_{24}}$**:**mostrar que três pontos no plano cartesiano XOY, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ são alinhados $\boldsymbol{t_{25}}$**:** Quais as condições para que três pontos no plano XOY, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ sejam alinhados?
07	Q_8: como os sujeitos mobilizam o conceito de tarefa, técnica, tecnologia e teoria para elaborar atividades sobre função afim?	Identificar elementos básicos da teoria das situações: situações didáticas, adidáticas e situações-problema; Estabelecer relações entre os elementos teóricos da TAD e da TSD; Estabelecer relações entre a noção de reta e a representação gráfica de uma função afim e a equação da reta no plano.	$\boldsymbol{t_{26}}$**:**representar graficamente uma função afim $\boldsymbol{t_{27}}$:representar algebricamente a lei de formação de uma função afim $\boldsymbol{t_{28}}$**:** comparar duas retas que se interceptam em um ponto como representantes de duas funções afins. $\boldsymbol{t_{29}}$:construir uma sequência didática sobre o ensino de função afim $\boldsymbol{t_{30}}$**:** escrever uma previsão dos possíveis comportamentos dos alunos frente a atividade matemática sobre função afim proposta.
08	Q_9 : como os sujeitos articulam o estudo da função afim com o estudo da reta, envolvendo o conhecimento didático/tecnológico/matemático*?*	re(significar) a noção de reta e o conceito de função afim, suas relações bem como as representações gráficas e geométricas.	$\boldsymbol{t_{30}}$**:** determinara a declividade de uma reta dada no plano cartesiano $\boldsymbol{t_{31}}$**:** determinar a relação entre a equação da reta e o ângulo de declividade da mesma.

Fonte: Freitas e Almouloud (2018, p.9)

A análise *a posteriori* visou identificar os fenômenos que emergiram da realização desse estudo, permitindo assim, confrontar os resultados obtidos, *a priori. O*s dados coletados na experimentação foram passíveis de múltiplas análises, no entanto, destacamos no quadro 2, apenas os aspectos que julgamos

[11] Ressaltamos que o uso da palavra “tecnologia” no sentido da TAD, será usado itálico: *tecnologia*, para diferenciá-la de tecnologia digital ou tecnologia da informação e da comunicação (TIC)

relevantes na condução do piloto, que poderiam contribuir na constituição do nosso PEP.

O conjunto de restrições que identificamos durante a realização do estudo, são globalmente de duas categorias: institucionais e de formação. As primeiras, perpassam por questões de estrutura e recurso material da universidade, sobre o currículo e a concepção institucional sobre o estágio supervisionado.

Com relação ao currículo refletimos que, em termos gerais, as disciplinas de estágio não apresentam em suas ementas tópicos matemáticos e didáticos, os conteúdos teóricos inerentes ao estágio são mais restritos aos conhecimentos pedagógicos. Perdura ainda na universidade a visão que no componente curricular, estágio curricular supervisionado, não se estuda matemática, estuda-se somente conhecimentos pedagógicos, parâmetros curriculares, teoria da educação e práticas gerais de sala de aula, visto que, os conhecimentos matemáticos já foram, em tese, estudados nas componentes anteriores, Zimmer (2017) também apontou estas questões.

No que se refere às dificuldades dos sujeitos frente à proposta de trabalho, do estudo piloto, globalmente apresentaram uma certa resistência em se posicionarem como protagonistas da construção do próprio conhecimento. Particularmente em relação às tarefas matemáticas, sinalizaram avanços em alguns momentos e retrocessos em outros. Algo que parece normal no processo de aprendizagem, no entanto, refletimos que existiam muitas lacunas na formação matemática de GA dos sujeitos envolvidos no estudo piloto, mesmo em tópicos elementares. As principais dificuldades identificadas, por meio das condutas dos sujeitos, não são efetivamente *restrições* no sentido de Chevallard (2011), são *condições* passíveis de modificação. Entre as dificuldades identificadas citam:

> -Resistência em verbalizar e escrever detalhadamente em língua natural os processos de resolução de tarefas, procedimentos ou estratégias didáticas de ensino dos objetos matemáticos;
> -Dificuldade de elaborar e propor provas e demonstrações ainda que sejam construções simples para o nível escolar dos sujeitos;
> -Descrição muito geral dos processos de ensino (planejamento), das técnicas matemáticas para resolução de tarefas;
> -Resistência em criar, adaptar, resolver e discutir tarefas matemáticas voltadas para sala de aula, bem como o detalhamento das técnicas de resolução;
> -Falta de clareza quanto a conceitos básicos de geometria e álgebra, dificuldade de incorporar o discurso tecnológico- teórico das técnicas de respectivas tarefas;

> -Dificuldade de associar as interpretações gráficas e geométricas, representadas no plano cartesiano, com propriedades e definições algébricas, ou noções de ponto e reta no plano, trigonometria do triângulo retângulo, semelhança de triângulos, teorema de Tales. (FREITAS, ALMOULOUD,2018, p. 12)

Porém, no momento das atividades do piloto, não foi possível modificá-las. Ponderamos que o tempo disponível para o piloto, o volume de atividades propostas e o nível de exigência frente a produção dos sujeitos não foram adequados. Além disso, na organização do estudo, muitas variáveis didáticas se impuseram, tornando difícil uma análise e uma articulação teórica como pensado *a priori.*

Para cada eixo de conhecimentos: matemático, pedagógico, tecnológico e didático, diferentes fenômenos de aprendizagem dos sujeitos emergiram e se interacionaram. Por exemplo, no caso do conhecimento tecnológico (CT), os fenômenos relacionados propriamente à aprendizagem do software, tais como: a manipulação da interface, compreensão do funcionamento da interface, das ferramentas etc., isso tudo relacionado com conceitos matemáticos em jogo gerou várias variáveis a serem analisadas.

Em nossa concepção, a formação inicial do professor sobre o conhecimento tecnológico, em virtude da natureza efêmera das tecnologias digitais, deve ser incorporada desde o início da formação, perpassando por todos os componentes de ensino, e se consolidando futuramente na prática profissional. Por esta razão, a partir dos dados coletados no piloto, conjecturamos, que uma experiencia de formação como o PEP poderia fazer com que os sujeitos, mobilizassem e/ou construíssem certos conhecimentos pedagógicos didáticos tecnológicos do conteúdo (CPDTC), e estes seriam restritos às situações propostas.

Esta constatação nos fez refletir que as categorias de conhecimentos, segundo Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006), Ball, Thames e Phelps (2008) e Silva e Lima (2015) são concepções gerais. Cada situação didática pode fazer emergir novos conhecimentos docentes de natureza específicas, passíveis ou não de serem categorizadas no quadro descritos por esses autores.

Por exemplo, numa formação de professores, o estudo da parábola poderá fazer os sujeitos mobilizarem aspectos do ensino e da aprendizagem próprios para a parábola, que serão diferentes no caso do estudo da reta. Supomos também, que outros conhecimentos que são comuns aos objetos parábola e reta estarão presentes.

Isto se dá também com relação ao conhecimento didático, por exemplo, reconhecer a diferença entre um objeto matemático e sua representação, como no caso da reta e da equação da reta, respectivamente, ou seja, parte do conhecimento didático a respeito da reta. Tais especificidades não são totalmente evidentes na categorização geral no quadro de conhecimento docentes (segundo os autores) outras questões relacionadas à concepção de Didática da Matemática, surgem também no debate.

Todos esses aspectos, que se configuraram como variáveis de análises, nos deram a percepção de não ter mais controle sobre qual fenômeno deveríamos nos debruçar, pois muitas variáveis se impuseram no piloto e cada uma delas suscitou diferentes caminhos para investigação.

Assim, concluímos com o piloto, que o desenvolvimento do PEP pode indicar quais conhecimentos efetivamente são mobilizados ou desenvolvidos, sendo limitados pela situação didática e o saber em jogo.

Com essas ponderações, optamos por definir nosso foco de pesquisa, tendo os quatro blocos de conhecimentos: conhecimento do conteúdo (CC), conhecimento pedagógico (CP), conhecimento didático (CD) e conhecimento tecnológico (CT), em torno do estudo de dois blocos: o conhecimento matemático e conhecimento didático, sobre GAP. Conjecturamos que esses dois conhecimentos constituem a centralidade da formação do futuro professor, e de seus saberes, além de ser a principal fragilidade identificada na formação. Ressaltamos ainda que, na prática do processo de estudo e pesquisa, voltado para o ensino e a aprendizagem de GAP, o pedagógico e o tecnológico também poderiam ser evocados a qualquer instante que se fizesse necessário, a depender da situação didática.

Por fim, apresentamos um conjunto de características identificadas ao longo do percurso do estudo piloto, que sugeriram mudanças no comportamento dos sujeitos frente ao conhecimento visado e às situações didáticas vivenciadas. Tais características ~~são~~ configuraram-se como condições (favoráveis) à realização do PEP-FP e ainda podem modificar-se.

> -Desenvolvimento de fluência com as interfaces digitais: ambiente moodle, Geogebra, word, paint;
> -Diferenciação entre os conhecimentos pedagógicos e didáticos;
> -Aquisição de saberes teóricos /didáticos relacionados a TAD, noção de tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria;
> -Diferenciação entre exercícios e situação-problema
> -Apreensão e ressignificação de conhecimentos pedagógicos articulados com conhecimento didático, nas funções de planejamento e avaliação;

> -Elaboração de atividades matemáticas incorporando a tecnologia digital como parte integrante das tarefas;
> -Aquisição da prática de fazer previsão de comportamentos dos alunos diante do conhecimento/saber;
> -Incorporar a análise praxeológica dos objetos matemáticos com parte integrante do planejamento de aula;
> -Percepção de que os objetos matemáticos não são a sua representação, diferenciação entre objeto e representação (ponto, reta, plano, função etc.);
> -Incorporar ao repertório de conhecimentos uma metodologia para analisar livros didáticos, com base na TAD. (FREITAS e ALMOULOUD,2018, p, 16)

Usarmos o termo situação-problema, segundo Almouloud (2016), que afirma que:

> é constituída por um conjunto de questões abertas e/ou fechadas formuladas em um contexto mais ou menos matematizado, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões dos alunos no momento da resolução do problema. Os alunos devem compreender os dados do problema e se engajar na sua resolução usando seus conhecimentos disponíveis. Essas situações devem colocar em jogo um campo conceitual que queremos efetivamente explorar e no qual o conhecimento visado está inserido. (ALMOULOUD, 2016, p. 115)

Um ponto fundamental para reflexão na conclusão do piloto foi a impossibilidade de afirmar que as condições de realização desse estudo preliminar, em face da incorporação de determinados aspectos dos conhecimentos docentes, vão se estender ou se reproduzir em diferentes níveis de conhecimentos ou para outras experiências de formação. O volume de variáveis e a subjetividade evolvidos no estudo, restringiu nossas análises apenas com o foco para nossos sujeitos, na instituição de ensino pesquisada e com os objetos matemáticos estudados.

Concluímos que o processo de desenvolvimento do piloto foi importante porque permitiu a pesquisadora, conhecer as condições e restrições para a realização da experimentação da pesquisa, os problemas didáticos que promoveram tensões nos estudantes frente ao saber, a organização do tempo didático x tempo cognitivo, a visão do que é importante na delimitação dos temas matemáticos a serem estudados e a percepção das variáveis de difícil contorno.

CAPÍTULO 2 - REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, apresentamos as contribuições para o nosso estudo das pesquisas de mestrado e doutorado de programas de pós-graduação brasileiros, tendo como mecanismo de busca o portal da coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior (capes) e as páginas dos programas que disponibilizam suas teses e dissertações.

O objetivo principal deste capítulo é trazer elementos essenciais de cada pesquisa visitada, ressaltando os aspectos que julgamos relevantes, com o intuito de auxiliar-nos a compreender o entorno das nossas questões de investigação, tendo como parâmetro o que já foi pesquisado especialmente nos trabalhos de Lebeau (2009), Andrade (2012),Gaita (2014), Matos (2017), Nguyen (2017) e outros.

Elegemos duas categorias principais que serviram de base para a busca e análise das pesquisas: *pesquisas que trataram de geometria analítica* e pesquisas que trataram da *formação inicial de professores de matemática e do estágio supervisionado.*

Ressaltamos, que ao longo do texto da tese alguns trabalhos poderão ser retomados a qualquer momento à discussão, por fazerem emergir aspectos, que elucidem questões ainda não abordadas. Nesse sentido, a revisão de literatura não se esgota neste segundo capítulo. Além disso, aspectos de outros trabalhos que não compõem esta revisão podem aparecer ao longo do texto por trazerem elementos teóricos ou resultados de pesquisa que auxiliam a compreender ou fundamentar elementos de nossa investigação.

2.1 Pesquisas que trataram de geometria analítica

Nesta seção trouxemos os aspectos relevantes das pesquisas que tiveram a geometria analítica como objeto matemático de estudo, ressaltando elementos da Didática da Matemática envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem descritos nas pesquisas. O primeiro trabalho que destacamos é a tese de Santos (2016), não iniciamos pela ordem cronológica tendo em vista que o trabalho desta autora é um estado da arte que comporta teses e dissertações defendidas antes de 2015, nesse sentido esses trabalhos são abordados sobre o olhar da autora.

2.1.1 O estado da arte de GA segundo Santos (2016)

A pesquisa desenvolvida em Santos (2016) propôs “o estado da arte das pesquisas brasileiras sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria Analítica (GA), publicadas no período de 1991 a 2014”, entre teses e dissertações de mestrado. Focamos levantar elementos relevantes para o nosso estudo, além disso traçar um desenho das pesquisas do período, a partir do olhar da autora, no âmbito do mapeamento por ela realizado.

As pesquisas de estado do conhecimento, em nosso ponto de vista, são importantes para a retomada de novos trabalhos sobre a temática investigada, pois fornecem um panorama geral do que já foi realizado em termos de investigação e as lacunas existentes, podendo indicar os rumos de novos estudos. Nessa perspectiva, buscamos em Santos (2016) uma visão geral das pesquisas desenvolvidas de 1991 a 2014, no campo da GA, sobre o olhar dessa pesquisadora, considerando que a autora realizou um estudo detalhado nesses trabalhos. Assim, apoiamo-nos nos resultados e nas análises apresentados por ela para retratar tais estudos e visitá-los diretamente quando julgarmos necessário.

O estado da arte sobre GA desenvolvido pela autora apoiou-se inicialmente no trabalho de Di Pinto (2000). Este último, forneceu panorama do estado das produções acadêmicas sobre ensino de GA no Brasil na década de 90. Na visão de Santos (2016), a conclusão deste trabalho mostrou que a principal preocupação presente nas pesquisas analisadas por Di Pinto (2000) foi a ideia de que os estudantes não dão significado aos objetos matemáticos estudados, e ainda, sobre a ênfase dada para o ensino de GA por meio da manipulação de algoritmos, além disso apontavam, a importância da GA como pré-requisito para o estudo da Álgebra Linear.

A dificuldade de apropriação dos conceitos, por parte dos estudantes, foi apontada por Di Pinto (2000) como sendo o principal fator que favoreceria a reprovação. No caso da UNICAMP e da USP, a disciplina GA foi considerada aquela que mais reprovava, na Unesp, o índice de reprovação nesta disciplina também foi considerado alto. (DI PINTO, 2000).

A partir da problemática apontada, Santos (2016) levanta os seus questionamentos de pesquisa no sentido de trazer um retrato das pesquisas realizadas sobre GA ao longo de dez anos. A autora tentou verificar se as sugestões apontadas, nas pesquisas realizadas nesse período (anos 90), sobre

o ensino de GA foram adotadas e se o avanço e o acesso às Tecnologias da Informação (TIC) contribuíram para a compreensão dos conceitos de GA e se houve decrescimento nas reprovações dos alunos que cursam a disciplina.

Santos (2016) direcionou sua pesquisa com questões focadas em identificar a abordagem dos temas de GA em diferentes momentos da pesquisa brasileira, de forma a identificar nessas pesquisas a realidade do ensino de GA, além disso, no que esse refere aos problemas relativos ao ensino e à aprendizagem identificados, quais alternativas foram propostas ou estudadas nessas pesquisas.

Os resultados da pesquisa se Santos (2016) contribuíram para a caracterização das organizações matemáticas e didáticas que foram ~~serão~~ desenvolvidas em nosso PEPFP, no sentido que buscaram minimizar os problemas apontados por esta autora e propôs estratégias para lidar com certas estrições didáticas.

Santos (2016) discutiu aspectos históricos gerais da GA e apresentou uma breve discussão sobre a presença da GA no ensino superior, médio e nos documentos oficiais do ensino médio. O referencial teórico declarado pela autora apoiou-se nos processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA), segundo Dreyfus (1991) e o uso das tecnologias da informação e comunicação.

Para a análise dos dados utilizou a metodologia de pesquisa denominada análise de conteúdo fundamentada em Bardim (2011) em cinco polos cronológicos: pré- análise, exploração do material, tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A autora levantou 51 produções acadêmicas que retrataram fatos históricos sobre GA, nesse sentido deteve seu foco em pesquisas que estavam relacionadas ao ensino e aprendizagem de GA, totalizando 41 produções, sendo 39 pesquisas de mestrado e duas de doutorado. E linhas gerais o objetivo foi trazer reflexões a respeito de quais conhecimentos têm sido priorizados no ensino e na aprendizagem de GA no o período de 1991 a 2014. Das pesquisas levantadas pela autora, vinte focalizam o objeto de estudo no ensino médio e dezenove no ensino superior, três não focalizaram seus objetos em nenhum nível de ensino específico.

Dado o número volumoso de trabalhos analisados pela autora, especialmente dissertações de mestrado, optamos por direcionar o nosso olhar para evidenciar apenas os aspectos que julgamos mais relevantes, tendo em

conta que as pesquisas em Educação Matemática, embora possam trazer contribuições para área, necessariamente podem não estar relacionadas com nosso tema de investigação.

Uma primeira observação que destacamos sobre os achados dessa autora é que em um espaço de 23 anos, só foram desenvolvidas duas pesquisa de doutorado com esse tema, são elas, as de Fusco (2002) e Andrade (2012), ao passo que de 2015 a 2016, mais três teses foram desenvolvidas sobre GA (PARANHOS, 2015, COSTA, 2015) e a da própria autora (SANTOS, 2016).

A pesquisadora identificou as preocupações em comum a todas as pesquisas, desde o uso dos mesmos referenciais teóricos, pesquisa diagnósticas e estudos epistemológicos sobre GA, assim, classificou as pesquisas em duas categorias: produções que tiveram foco com o uso de TIC e aquelas que não tiveram foco com o uso de TIC. Das vinte pesquisas que utilizaram como foco principal TIC, destacamos 19 dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, de acordo com o quadro 3 elaborado pela autora.

Quadro 3 - Pesquisas com uso de TIC

Fusco (2002)	Lucas (2009)	Santos (2011)
Passos (2004)	Fialho (2010)	Ahmad (2012)
Richit (2005)	Lagdem (2011)	Mattos (2012)
Silva (2006)	Paula (2011)	Cunha (2013)
Carvalho (2007)	Lemke (2011)	Souza (2014)
Hajnal (2007)	Paralli (2011)	Silva (2014)
Santos (2008)	Correia (2011)	---------

Fonte: Santos (2016, p. 107)

Globalmente, destacamos como principal característica nestes trabalhos o uso de softwares, *como: cabri- géomètre, Geogebra, the geometer's Sketchpad3, winplot, GrafEq, geometricks e ambiente virtual de aprendizagem (AVA)*, da plataforma moodle. Dada a quantidade de trabalhos nesse primeiro bloco (quadro 1) e da natureza das pesquisas, fortemente relacionada ao uso de tecnologias, optamos por abordar os aspectos específicos de cada pesquisa de forma geral.

De acordo com a autora, as pesquisas com foco em TIC, utilizaram diferentes recursos tecnológico desde softwares distintos, ambientes virtuais de aprendizagem, como o moodle, as tecnologias tradicionais como régua e compasso. Santos (2016) destaca a predominância do uso do software Geogebra nas pesquisas, e utiliza a expressão "software em geometria dinâmica", para caracterizar este recurso. Além disso, a autora destaca que os

entes geométricos ponto, segmento de reta, reta e seções cônicas, da geometria analítica são facilmente manipulados nesse software. O Geogebra também é uma possibilidade para incorporar o ambiente digital nas atividades de estudo e pesquisa, que serão realizadas em nossa experimentação.

Nenhuma dessas pesquisas trata do conhecimento tecnológico de GA na formação de professores de matemática ou no estágio supervisionado, as pesquisas realizadas com estudantes da licenciatura matemática tiveram como foco principal desenvolver os aspectos de GA, considerados pontos de dificuldades na apreensão dos conceitos dos objetos matemáticos.

Em linhas gerais, essas pesquisas apresentadas pela autora visaram o uso do software como forma de facilitar o processo de aprendizagem, a visualização e manipulação de representações dos objetos de GA no ensino médio e no ensino superior. Na análise desses trabalhos, a autora apresentou as vantagens do uso de software, especialmente o Geogebra, no sentido de que favorece o processo de aprendizagem, na medida que podem gerar imagens dos objetos matemáticos representados, possibilitando a ligação de diferentes representações de um mesmo objeto.

De acordo com Santos (2016), aliar ambiente computacional a um software de *geometria dinâmica* tem potencial para desenvolver os processos de PMA: comparar, conjecturar, visualizar, argumentar, explorar e validar. Em nosso ponto de vista, os dados apresentados na tese da autora, apoiados nas pesquisas levantadas, não são suficientes para tal afirmação, visto que nenhuma destas pesquisas realizaram uma investigação exploratória, com a aplicação de atividades com GA e software, com base nos processos de PMA. No entanto, concordamos que é possível que atividades, pensadas e construídas com o intuito de desenvolver o processo de PMA, possam lograr tal êxito.

Assim, entendemos que a aprendizagem de matemática é que pode potencializar o desenvolvimento dos processos de PMA, sendo o software o mediador do processo didático empreendido pelo professor. Supomos que foi isso que a autora tentou explicar.

Segundo Santos (2016), em diferentes estudos há relatos das dificuldades dos sujeitos investigados nessas pesquisas, na realização das conversões de registros de representação algébrico para gráfico e vice-versa, no sentido de Duval (2003). Ainda com relação às dificuldades dos estudantes do ensino

superior, com a realização de demonstrações, representação de pontos e superfícies no espaço são oriundas, segundo a autora, da educação básica.

Esses aspectos, considerados pontos de dificuldade na aprendizagem de GA, também estão presentes em outros campos da matemática, como já justificamos anteriormente. Nesse sentido, tais aspectos foram levados em consideração no momento que propomos as atividades para os sujeitos, durante o percurso experimental, descrito nos capítulos 5 e 6.

A autora também apresenta como lacuna nos trabalhos analisados, a falta de relação entre os estudos históricos realizados nas pesquisas e nas atividades propostas aos alunos. Em nossa pesquisa, nos debruçaremos sobre a evolução do saber a respeitos de GA, como um panorama histórico, para a constituição de um modelo epistemológico de referência do saber em estudo, neste modelo a dimensão histórica é parte intrínseca da dimensão epistemológica, e permite, uma análise ecológica de certos objetos do conhecimento, isto será melhor discutido nos capítulos 3 e 4.

Sobre os objetos de GA, identificamos, no mapeamento das pesquisas que utilizaram TIC, que os mais explorados foram: estudo dos vetores, da reta, do ponto e do plano. Os estudos com parametrização de curvas e cônicas foram em menor quantidade (apenas dois), sendo que algumas pesquisas elegeram dois desses tópicos de GA. Santos (2016) destacou que o fato de somente a GAP fazer parte do currículo do ensino médio, pode ser a justificativa pelas dificuldades apresentadas por alunos do ensino superior na visualização e interpretação de problemas em 3D.

Em nossa pesquisa, conjecturamos que esse resultado não deveria se aplicar para os estudantes da licenciatura, pois estes estudam, *a priori,* tanto a GAP como a GA em três dimensões.

Dos trabalhos levantados pela autora que utilizaram o software Geogebra identificamos que, alguns focalizaram mais o aprendizado da manipulação da interface do software em detrimento de um trabalho que visa a aprendizagem dos objetos matemáticos. Outros trabalhos focalizaram objetos de geometria analítica espacial, nesse sentido buscamos contribuições naqueles categorizados pela autora, mas que têm alguma relação relevante com a nossa pesquisa. Dentre esses trabalhos nenhum relacionam o uso de softwares, ou a manipulação das interfaces com o desenvolvimento de conhecimento tecnológico, enquanto saber ou conhecimento docente.

A segunda categoria de análise das pesquisas levantadas por Santos (2016) foi de pesquisas que *não utilizaram TIC como foco principal*, mas outras estratégias para o ensino e a aprendizagem de GA. Nesse sentido, a autora apontou duas classificações para essas pesquisas: bibliográficas, dentro da perspectiva histórica, análise de livros didáticos e pesquisa de campo de uma maneira mais geral.

Na perspectiva histórica temos quatro trabalhos Giardinetto (1991), Frazon (2004), Bordallo (2011) e Soares (2013).

O primeiro trabalho que destacamos é de Giardinetto (1991). Esta pesquisa buscou trazer as relações entre o abstrato e concreto e a relação lógico- histórica de GA, apoiada no referencial teórico das ciências sociais.

O autor apresenta algumas características da trajetória histórica de GA, destacando a importância da obra de Descartes para os processos algébricos. Buscou evidenciar as relações entre o abstrato e o concreto na GA, a partir de trechos históricos apresentados, reafirmando a concepção, por exemplo, da ênfase dada na abordagem desse texto às fórmulas, revelando uma dissociação entre os procedimentos algébricos dito pelo autor, abstratos, e as relações intrínsecas às figuras geométricas.

O segundo trabalho é de Frazon (2004) que analisou o livro I, “A geometria” de Descartes por meio de traduções em português, propondo como questão quais discussões pedagógicas a acerca dos conceitos de GA podem ser levantadas a partir do livro 1, a geometria? A autora destaca que a abordagem da GA no ensino médio tem uma opção metodológica tecnicista. Cita a história da Matemática como potencialidade pedagógica no ensino de matemática.

O principal objetivo da autora foi investigar a viabilidade da inclusão da história (da Matemática) no ensino de Matemática. Assim, propõe que o currículo seja articulado com o desenvolvimento histórico em detrimento do enfoque dado no ensino tradicional.

A dissertação de Bordallo (2011), trouxe a questão de pesquisa: “como ensinar as seções cônicas nos dias de hoje? Como mostrar para os alunos que a elipse, parábola e hipérbole são da mesma família?”

O objetivo da pesquisa segundo a autora, foi realizar um estudo epistemológico e histórico das cônicas na perspectiva de buscar respostas para a evolução do ensino desses objetos no Brasil. A autora se apoiou nos livros didáticos do período de 1892 a 1930, verificando nas obras a forma de

abordagem das cônicas. Por exemplo se a abordagem era unificada ou fragmenta, analítica ou geométrica, relacionando os resultados em um quadro com as reformas educacionais de cada período.

A autora não apresenta nenhum método específico para tais análises, sintetiza cada obra, segundo supomos, a partir do índice, pois apresenta um resumo do que é abordado por cada título a partir do capítulo dedicado às seções cônicas. Por fim, mostra as definições matemáticas gerais de cada seção cônica, do que seria, segundo a autora, uma abordagem unificada das cônicas, ressaltamos que não aparecem tarefas relacionadas.

A pesquisa de **Soares (2013)** é um estudo histórico sobre a disciplina de GA, como componente curricular de um curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), nas décadas de 1960 e 1970. As análises foram realizadas com base em entrevistas com professores e ex-alunos buscando compreender como se deu a estabilização da disciplina. A autora também analisou as notas de aula e apostilas elaboradas por um professor, material que segundo ela, influenciou o processo de estabilização da disciplina.

Segundo Soares (2013), a análise da trajetória da disciplina permitiu verificar a existência de um movimento que reduziu a GAP, no ensino superior, a um pequeno tópico desta disciplina. Até 1996, a autora a firma, que a GAP ainda era considerada como disciplina na UFJF, são os conteúdos trazidos nas apostilas que estabilizaram a disciplina no estudo de vetores, a partir da representação de coordenadas. Segundo a autora, a geometria vetorial no plano não se estabilizou.

Os professores entrevistados relataram as dificuldades dos alunos em GA, resultantes de reprovação, afirmam ainda, que a GA era ensinada mais com a finalidade de dar suporte à disciplina de cálculo.

Os resultados de Soares (2013) sinalizam mudanças na disciplina de GA, na Licenciatura, na qual a GAP vai “desaparecendo”. Não é possível afirmar que isto ocorreu em todos os cursos no país, no entanto, reforça a necessidade de olharmos para disciplina de GA, ao menos no curso de Licenciatura em Matemática onde desenvolvemos nossa pesquisa, esses elementos estão indicados no capítulo 4, quando tratamos da GA na Licenciatura em Matemática.

Na sequência, tratamos das pesquisas bibliográficas apresentadas por Santos (2016), cujo foco foram livros didáticos: Varella (2010) e Jammal (2011) e Júnior (2013).

No estudo de **Varella (2010):** “prova e demonstração na GA: uma análise das organizações didática e matemática em materiais didáticos”. Teve como objetivo identificar as organizações matemáticas e didáticas envolvendo provas e demonstrações em materiais didáticos do ensino médio, a respeito de GA.

A autora tomou por base o Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLDEM) do ano de 2009 e os cadernos da secretaria de educação do estado de São Paulo, para analisar os títulos do 3º ano do ensino médio, limitada ao estudo da reta. A autora focalizou o estudo pela relação entre a Geometria e a Álgebra, por meio dos teoremas relativos à equação da reta, passíveis de demonstração.

O referencial teórico se apoiou na TAD (CHEVALLARD, 1999) e na tipologia de provas (BALACHEFF, 1988), tendo por base, nas análises, a identificação de tarefas, técnicas e discursos tecnológico- teóricos.

As análises dos livros se apoiaram em quatro questões, que, em síntese, tratam da abordagem utilizada nos livros didáticos na introdução de GA: dos conceitos que antecedem o estudo da reta; das tarefas propostas para o estudo da reta; se aparecem os termos propriedade, teorema, demonstração e prova na introdução dos conceitos que antecedem o estudo da reta; e por fim, se as tarefas apresentadas no estudo da reta contêm demonstrações e provas.

Sobre os principais resultados, a autora aponta a abordagem histórica utilizada na introdução de GA; o estudo do sistema cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta e condição de alinhamento de três pontos, são conteúdos que antecedem o estudo da reta; há presença de atividades de demonstração. Nos materiais aparecem as quatro formas de representação da reta: equação geral, reduzida, paramétrica e segmentária. Esses resultados variaram de uma obra para outra analisada.

A pesquisa de **Jammal (2011)** teve como foco na análise de livros didáticos os ostensivos e não ostensivos utilizados nos estudos das noções de ponto e reta no plano no ensino médio.

As questões que nortearam a pesquisa foram duas: como são trabalhadas as noções de ponto e reta no ensino médio, quais os ostensivos e não ostensivos

são privilegiados? A articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, se esses aspectos se desenvolvem implícita ou explicitamente?

A pesquisa teve como referencial teórico principal adotado, dentre outros, a TAD e a mudança de quadros de Régine Douady. A autora desenvolveu as análises em torno dos ostensivos e não ostensivos identificados nos livros didáticos do 3º ano do ensino médio, além disso, fez a análise das expectativas institucionais esperadas para o trabalho de professores e estudantes, dentre outros aspectos observados nos distintos referenciais teóricos abordados.

Os resultados apontados pela autora indicam que as relações institucionais esperadas e existentes, por meio da articulação de quadros, da manipulação dos ostensivos e da evocação de não ostensivos, dependem dos conhecimentos prévios de que os estudantes dispõem ou são capazes de mobilizar. Além disso, são desenvolvidas as noções de ponto e reta no plano dentro dos quadros das funções, da geometria euclidiana plana e do cálculo algébrico. A autora concluiu que de forma geral, o nível de conhecimento que se espera dos estudantes difere em função dos documentos analisados.

A pesquisa de **Júnior (2013)** poderia também ser categorizada como estudo histórico da década de 90. O autor buscou investigar o percurso da GA como conteúdo do ensino secundário, por meio de análise de livros didáticos utilizados na Reforma Capanema e o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Além disso, investigar as supostas transformações que tenham ocorrido no conteúdo de GA, nesses materiais, no período de 1940 até a metade da década de 1970.

Além dos livros didáticos da época, o autor buscou outras fontes documentais como, atas e diários de classe. Fundamentou-se teoricamente nas ideias do historiador Marc Bloch (2002).

Os principais resultados obtidos com a análise dos livros indicaram que nas décadas de 1940 e de 1950, as obras eram semelhantes e convergentes com os programas de ensino, no caso de GA se constituiu, segundo o autor, num dos blocos que compunham a matemática do colégio, fragmentada em ramos, como herança das décadas anteriores.

A GA deixou de aparecer, explicitamente, na década de 1950 e ficou diluída entre o estudo de limites e derivadas, restrita apenas ao estudo da reta e da circunferência. A GA veio ganhar força novamente com o advento do MMM,

porém segundo o autor, não teve a mesma padronização observada nas décadas anteriores, ao que parece pela ausência de uma orientação oficial.

Destacamos também a análise da obra de Gelson Iezzi (1974), de acordo com o autor, Iezzi (1974) reduziu a formalização tendo como avanço as “primeiras” figuras coloridas com os gráficos, ou seja, embora explore a GA como nas décadas anteriores, utiliza a representação gráfica e apresenta os assuntos reta, circunferência e cônicas pela primeira vez com a análise geométrica das inequações do primeiro e segundo grau.

A pesquisa desse autor revela a importância da obra de Gelson Iezzi. Em nosso estudo, apresentamos a análise deste livro com ênfase nas organizações matemáticas, ou seja, a análise praxeológica, como propõe a TAD, diferenciando-se do enfoque adotado por Junior (2013), pois o autor evidenciou a influência dos movimentos educacionais no ensino de GA, uma análise de cunho histórico.

A última sub- categoria de trabalhos apresentada por Santos (2016), são pesquisas tipicamente de campo, segundo o quadro 4, temos quatorze trabalhos categorizados pela autora, como pesquisas de campo por instituição, sendo treze dissertações e uma tese (Andrade, 2012).

Quadro 4 - Quadro das pesquisas de campo por instituição

Cavalca (1997)	PUC-SP	Andrade (2007)	UFPA
Silva (1998)	USS	Goulart (2008)	UEFS
Ribeiro (1998)	USS	Rizzon (2008)	PUC-RS
Munhoz (1999)	PUC-SP	Pereira (2011)	PUC-SP
Perotti (1999)	PUC-SP	Faria (2011)	UNICSUL
Castro (2001)	PUC-SP	Andrade (2012)	UFPA
Carneiro (2007)	UFRG	Guerato (2012)	UNIAN

Fonte: Dados da pesquisa

A partir de cada uma dessas pesquisas, trouxemos uma síntese dos aspectos fundamentais que identificamos terem alguma relação como nosso estudo, conforme os dados apontados pela autora. Ressaltamos que a tese de Andrade (2012) foi analisada fora da perspectiva de Santos (2012), portanto, separada dessa subseção, por conta de trazer contribuições para a nossa pesquisa.

A pesquisa de **Cavaca (1997**) tratou sobre o "espaço e representação gráfica: visualização e interpretação”. O objetivo principal do trabalho foi analisar a possibilidade de propor atividades que possibilitassem aos alunos do ensino superior, o desenvolvimento das capacidades de visualizar e interpretar objetos do espaço e suas representações gráficas matemáticas.

O autor utilizou os pressupostos da engenharia didática (ARTIGUE,1988), elaborou e aplicou uma sequência didática com alunos de uma turma da disciplina GA, cujo professor era o próprio pesquisador, o objeto de estudo foi a representação gráfica. O autor, também, aplicou um pré-teste e pós testes antes da elaboração da sequência didática, tendo como base as habilidades de Interpretação de Informação Figurativa (IFI) e do Processamento Visual (PV) descritos por Bishop (1983).

O pós-teste realizado após a aplicação da sequência didática mostrou avanços nas habilidades de IFI e de VP. O autor afirma que o fator que possibilitou os avanços foi uso de material concreto na aplicação da sequência didática.

Entre as conclusões da pesquisa, o autor destacou a existência de uma lacuna na transição da representação geométrica para a algébrica, de seus conceitos e propriedades. Argumentou que os conhecimentos geométricos são constitutivos da funcionalidade do desenho e de seu significado.

O trabalho de **Silva (1998)** teve como título: “Ação Mediadora da Geometria Analítica no Ensino –Aprendizagem da Álgebra Linear”. O objetivo da pesquisa foi estudar a GA como mediadora do ensino e aprendizagem de Álgebra Linear. Segundo autora, esta estratégia poderia ajudar os sujeitos a vencer os obstáculos decorrentes da dificuldade de abstrair e generalizar.

As atividades com GA deveriam se constituir como instrumentos na construção dos conceitos básicos de espaço vetorial, combinação linear, elementos geradores, vetores linearmente dependentes e independentes, bases e dimensões de um espaço vetorial. O estudo foi realizado com estudantes do curso de bacharelado em Matemática. De acordo com a autora, os estudantes demonstraram melhor compreensão dos conceitos da Álgebra Linear após a aplicação do estudo.

O trabalho de **Ribeiro (1998)** apesenta uma abordagem para o ensino de elipse, em um curso de ciências com habilitação em Matemática. Teve como objetivo a construção do conceito de elipse, por meio do material manipulativo e de situações, ditas, do cotidiano, para possibilitar a visualização e a compreensão do objeto elipse.

Utilizou-se de cortes em cones de isopor para a obtenção das cônicas. Os estudantes montaram um experimento de óptica, com espelhos e lâmpadas, que

segundo a autora, possibilitou que visualizassem a propriedade refletora da elipse, envolvendo as leis físicas sobre reflexão.

O estudo de **Munhoz (1999)** teve como questão de pesquisa: o uso cotidiano de termos geométricos contribui para conflitos de natureza conceitual na GA? O referencial teórico adotado foi a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

Foi aplicado um pré-teste com três grupos: estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, da ciência da computação e da engenharia. Um grupo de estudantes não havia cursado GA, outro já havia cursado e um terceiro estava estudando cálculo vetorial, na disciplina GA. O objetivo do pré-teste era conhecer o significado dado pelos alunos a alguns termos geométricos (significantes) básicos utilizados em GA.

Como resultado do pré-teste, foi apurado que os estudantes revelaram problemas conceituais relacionados a tópicos básicos da Geometria. As dificuldades dos estudantes se manifestaram no registro linguístico, figural e na habilidade de reconhecer as representações de objetos matemáticos.

Os significados do cotidiano dado para termos matemáticos, segundo o autor, por exemplo, direção e sentido, quando usado em GA, podem confundir os estudantes. O autor traz ainda outros termos, que em sua ótica, apresentam ambiguidade: *diagonal, paralelepípedo, produto misto, superfície, aresta* e *vértice.*

Com relação aos termos *vértice, aresta* e *diagonal*, o autor destacou que o significado geométrico em sua concepção não foi atribuído pelos sujeitos, havia falhas na concepção do termo ou dificuldades de compreensão.

Outras situações de ambiguidade foram também discutidas pelo autor, que sugere que essas características ambíguas nos termos matemáticos sejam exploradas em sala de aula de forma que o conflito seja esclarecido.

Perotti (1999), na sua pesquisa intitulada “estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino”, apresenta como dificuldade de aprendizagem dos alunos, a compreensão do coeficiente angular de uma reta, bem como estabelecer as relações entre esse coeficiente quando é dada a equação reduzida da reta.

A identificação de tal dificuldade se deu por meio de um pré-teste diagnóstico aplicado a estudantes de cursos de engenharia. O objetivo era analisar as concepções dos sujeitos, participantes de sua pesquisa, a respeito

da equação da reta e se eles conseguiam representar algebricamente uma reta a partir da sua representação gráfica.

O resultado do pré-teste levou o autor a concluir que a principal dificuldade dos sujeitos estava relacionada ao coeficiente angular da reta.

Apoiando-se nesse resultado, o autor elaborou uma sequência didática, com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD), que promovesse a aprendizagem da equação da reta, dando ênfase ao estudo do coeficiente angular, utilizando a taxa de variação. Os resultados, segundo o autor, foram amplamente alcançados, com os sujeitos participantes da pesquisa.

Castro (2001) investigou os fatores relacionados com o ensino e aprendizagem de vetores do plano e do espaço e os registros de representação semiótica desse objeto. O objetivo foi elaborar e aplicar uma sequência didática envolvendo a conversão de representações de registros de representação semiótica sobre o conceito de vetores.

A proposta de Castro (2001) apesenta características semelhantes ao trabalho de Perotti (1999), do ponto de vista da metodologia e dos resultados. Houve aplicação de pré-teste e depois a sequência didática, que focalizou atividades de tratamento e conversão de representações de diferentes registros de representação semiótica.

A autora sinalizou a importância de ensinar vetores levando em conta os diferentes registros de representação desse objeto matemático.

Carneiro (2007), também, usou a aplicação de sequência didática, de forma semelhante aos autores apresentados anteriormente, diferenciando-se na metodologia pelas análises *a priori* e *a posteriori*, pressupostos da engenharia didática (ARTIGUE, 1988).

O autor propõe, a partir da questão de pesquisa, desenvolver o estudo de sistema de equações, de forma a agregar um maior valor formativo. Nesse sentido, a proposta do autor foi fazer adaptações da álgebra vetorial e introduzi-la no ensino médio, por meio da sequência didática elaborada. Essas adaptações justificam-se pelo fato de, para desenvolver um estudo geométrico de sistemas com três incógnitas, ser necessário introduzir a equação do plano no ensino médio. Logo, justifica a necessidade de abordar conceitos iniciais da geometria vetorial, possibilitando assim interações entre a Geometria e a Álgebra.

A sequência de ensino proposta para a transposição didática dos tópicos de geometria vetorial abordou: o conceito de vetor e operações geométricas,

coordenadas do vetor no plano e operações algébricas, ortogonalidade de vetores e a equação da reta no plano, vetores no espaço e operações, equação paramétrica da reta no espaço, ortogonalidade de vetores e a equação do plano no espaço.

Na pesquisa foi identificada a dificuldade dos alunos no estudo da equação da reta a partir da ortogonalidade de vetores, a sequência de atividades foi reelaborada a partir disto, e abordou conceitos de vetores no espaço e a equação do plano. Segundo Carneiro (2007) a experimentação mostrou que, se os conceitos de vetores no plano estiverem bem consolidados, a generalização desses conceitos no espaço poderá ocorrer de maneira natural.

O estudo de **Andrade (2007)**, “geometria analítica plana: praxeologias matemáticas no ensino médio”, teve o objetivo de investigar e construir uma organização didática para GAP, a partir de um tratamento vetorial. O autor propõe utilizar a interação entre conhecimentos prévios dos alunos e os novos conhecimentos, o referencial teórico adotado foi a TAD.

A sequência didática organizada foi aplicada com estudantes do 3º ano do ensino médio. Em termos de organização matemática, o autor trabalhou com tarefas que envolveram a localização de pontos no plano cartesiano, conceito de vetores, soma de vetores, produto de um vetor por um escalar, equação da reta dada um vetor, cálculo de distância, a partir da lei cos cossenos, o autor também introduziu na sequência didática uma atividade de pesquisa sobre ao história dos vetores.

O autor buscou “visibilizar as interconexões existentes entre esses conteúdos e as conexões com outros conteúdos da Matemática e/ou de outras áreas de conhecimento” **(**ANDRADE, 2007, p. 50). Este foi o aspecto principal identificado pelo autor como resultado do trabalho.

O trabalho de **Goulart (2008)** teve como temática o estudo de desenhos e gráficos. O objetivo foi responder à questão: qual o significado que o professor e os alunos dão a um objeto matemático, dado em um determinado ambiente, cercado por várias influências e concepções?

Goulart (200) utilizou as notas de aula do professor regente, e detectou que eram cópias idênticas do livro didático, além disso, observou a sala de aula e analisou as observações dos alunos. O enfoque da pesquisa foi etnográfico.

O auto destaca que nas avaliações em grupo, os alunos mostraram um caminho oposto daquele declarado por eles, revelaram ser importante o aspecto

imagético nas aulas de GA, pois em nenhum momento das avaliações utilizaram as representações gráficas. O autor justificou que esse fenômeno poderia estar ligado ao posicionamento do professor por preferência à Álgebra Linear.

Pesquisa de **Rizzon (2008)** analisou a linguagem matemática de GA no ensino médio, cujo principal objetivo foi compreender as dificuldades de aprendizagem associadas à linguagem matemática empregada pelos alunos, comparando-a com a linguagem que o professor gostaria de ensinar.

A autora utilizou um procedimento metodológico, chamado unidade de aprendizagem (UA), empregado para o ensino e aprendizagem de Matemática. Esta UA é baseada em questionamentos e reconstrução de argumentos a partir da problematização de uma situação real, entre outras características descritas pela autora, há coleta de relatórios escritos pelos alunos.

A autora descreve características positivas proporcionadas pela utilização da UA, identificou conteúdos e soluções não previstas pelos professores, o que parece denotar a capacidade de alguns alunos de criar soluções novas para os problemas propostos.

Destacamos dois dos principais aspectos identificados pela autora nos relatórios dos alunos: o que os alunos lembraram e não lembraram comparado com aqueles dominados pelo professor. Rizzon (2008) identificou no trabalho dos grupos, que eles lembraram da equação da circunferência; o centro da circunferência; os termos do desenvolvimento da equação da circunferência; o ponto que pertence à equação analítica e os eixos coordenados; par ordenado e a equação reduzida da reta.

Os conteúdos menos lembrados por eles foram: o raio da circunferência, o termo independente da equação normal da circunferência, a inclinação (declividade), coeficiente angular interpretado como a tangente do ângulo correspondente ou razão entre os catetos opostos e adjacentes, e o valor do par ordenado correspondente à origem.

O trabalho de **Pereira (2011)** retrata um estudo da reta no ensino médio utilizando Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), apoiadas em Martin Simon (1995). A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3° ano do ensino médio e três professores de uma escola pública. A THA é baseada em três componentes: “objetivo do professor para aprendizagem dos alunos, plano do professor para atividades de aprendizagem e hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem dos alunos” (PEREIRA, 2011, p. 37).

O objetivo principal da pesquisa foi contribuir para desenvolvimento profissional dos professores, como estratégia de articulação entre teoria, prática e pesquisa, por meio de uma THA.

O pesquisador elaborou as atividades que foram discutidas com os professores participantes da pesquisa, na perspectiva que eles pudessem dar suas contribuições. As atividades envolveram tópicos de GAP: equação reduzida da reta, paralelismo, perpendicularismo e intersecção entre duas retas, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento, coeficiente angular da reta e a determinação de uma reta a partir da sua representação gráfica.

Os principais resultados indicados pelo autor foi a atuação dos professores no domínio dos conteúdos matemáticos e a adesão dos alunos ao projeto. O autor sinaliza que alguns alunos se limitaram a observar o que os colegas e o professor realizavam, além disso, ressalta que faltou a validação das respostas.

Faria (2011) investigou sobre uma abordagem didática em relação à aprendizagem das equações da reta no estudo de GA para o ensino médio. O objetivo da pesquisa foi investigar quais as facilidades ou dificuldades que os alunos encontram ao resolver tarefas sobre equação da reta, que envolvem diferentes representações semióticas. O referencial teórico se apoiou na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (2005) e nos níveis de mobilização do conhecimento de Aline Robert[12] (1998).

O autor utilizou um questionário e um conjunto de tarefas sobre equação da reta como instrumentos de coleta de dados. A maior dificuldade dos alunos detectada nas tarefas foi a passagem de um registo para outro, por exemplo, do registro gráfico para o algébrico.

A pesquisa de **Guerato (2012)** teve como objetivo apresentar uma perspectiva de estudo, tendo como foco o tratamento vetorial da GAP, fazendo uma comparação com a abordagem clássica para o estudo da reta no plano, a noção de coeficiente angular e a equação geral da reta. Objetivou, também, verificar se o tratamento vetorial tornaria efetivo o processo de ensino e aprendizagem de GAP, no ensino médio, e verificar se os alunos que estudaram com essa abordagem teriam uma aprendizagem efetiva em Geometria Analítica

[12] *Outils d´analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l´université, Grenoble : R*echerches en didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage Éditions, vol. 18, nº 2, p. 139-190, 1998.

Espacial (GAE). Os participantes da pesquisa foram estudantes do curso de Licenciatura em Matemática. Segundo a autora, os objetivos da pesquisa foram alcançados e verificados por meio dos resultados de desempenho nas disciplinas, ou seja, os alunos que estudaram GAP, com o enfoque vetorial, tiveram um desempenho melhor de GAE.

Após nos debruçarmos sobre muitas de dissertações, que, de alguma forma abordaram GA ou GAP, tendo o apoio do estado da arte de Santos (2016), concluímos que esses trabalhos contribuíram na constituição do quadro geral dos estudos de GA no Brasil nos últimos anos (até 2015), especialmente, no que tange a aprendizagem da GA, permitindo identificar certas lacunas nesse campo de estudo. Embora alguns desses trabalhos tenham tratado também do ensino, os aspectos identificados não dialogam com aqueles da formação do professor de matemática considerados fundamentais nesta tese.

2.1.2 Teses com enfoque na GA

Damos, portanto, continuidade a nossa revisão de literatura apresentando os principais aspectos identificados especialmente nas teses selecionadas que tratam de GA: Lebeau (2009), Andrade (2012), Gaita (2014), Costa (2015), Matos (2017) e Nguyen (2017).

2.1.2.1 A pesquisa de Lebeau (2009)

Destacamos alguns aspectos relevantes da pesquisa de Lebeau (2009), intitulada: **“**Etude d’une genèse d’un modèle algébrique du système formé par les points, droites et plans de l’espace usuel”, ou seja, estudo da gênese de um modelo algébrico do sistema formado por pontos, retas e planos do espaço usual. A autora realizou um estudo sobre GA, no âmbito da educação secundária da Bélgica, no que esse refere a retas e planos no espaço tridimensional. O quadro teórico utilizado pela autora teve como aporte principal a TAD e a TSD.

A pesquisa desenvolveu uma engenharia didática tradicional com estudantes do ciclo secundário, que corresponde no Brasil ao ensino fundamental II e o ensino médio.

A autora discute e questiona a transposição didática tradicional em vigor no ciclo secundário da Bélgica, que apresenta a GA como um subproduto da álgebra linear, em que os objetos reta e plano são definidos como espaço e subespaços vetorial, ou seja, de acordo com a autora tradicionalmente o que se

chama GA na Bélgica se apresenta como um caminho que consiste em definir os objetos retas e planos de maneira vetorial e traduzir em seguida em equações vetoriais e equações paramétricas, sem a devida justificativa dessas escritas para desencadear em fim uma caracterização cartesiana.

A atora justifica que essa transposição se apresenta como praxeologia "com buracos" quando as mudanças de registros (vetorial-paramétrica - cartesiana) se efetuam pela referência não mais a um discurso tecnológico, mas para um discurso naturalizado pela instituição. Em síntese, esta transposição didática padronizada resulta em dois modelos, o primeiro subordina a uma organização mais global de GA e Álgebra Linear, e o segundo que leva esse modelo para o lado oposto.

Dessa forma, autora propõe, via uma engenharia didática (ARTIGUE, 1988), elaborar e analisar uma transposição didática que tivesse a característica contraria à tradicional, além disso, estudar a gênese de ostensivos algébricos para caracterizar os objetos geométricos reta e plano.

Implicitamente, a autora propõe um modelo alternativo para o estudo de GAE, que não perpassa obrigatoriamente pelo estudo de vetores. Nesse sentido, a pesquisa se aproxima da nossa investigação e do nosso modelo alternativo para estudo de GAP por buscar como apoio um discurso tecnológico teórico na Geometria Euclidiana, de certa forma independente da álgebra vetorial.

A autora aplicou um questionário como pré-teste e caracterizou as dificuldades de alunos do primeiro ano de BAC (segundo ano do Ensino Médio) cujos resultados serviram para caracterização dos seus questionamentos na pesquisa.

A caracterização dessas dificuldades é um aspecto que pode estar, também, relacionado com dificuldades na GAP, conforme a autora:

- Os alunos confundem os parâmetros desconhecidos com as variáveis na equação do plano;
- Dificuldade de empreender as etapas de resolução do sistema de equações lineares e de interpretar geometricamente as equações lineares de uma reta no espaço;
- Dificuldade de interpretar a coplanaridade de quatro pontos no espaço, utilizando um formalismo vetorial;
- os alunos nem sempre são capazes de explorar as coordenadas de pontos dados para traduzir numericamente os vetores em questão. Essa

exploração se torna, ainda mais difícil quando os pontos não estão localizados na origem;

- o vetor é percebido como uma figura geométrica composta por pontos. Lebeau (2009) mostra que o vetor é, por vezes, é percebido como uma figura geométrica da mesma forma que um segmento de reta, por exemplo.

A autora ainda aponta que os alunos teimam em interpretar a equação, como representada por uma linha reta quando passamos de um trabalho no plano, para um trabalho no espaço, problema que reside no discurso teórico-tecnológico. Concordamos com a autora, quando afirma que este tipo de dificuldade se relaciona com a base do ensino, nesse sentido, uma das questões levantadas é como estender os resultados conhecidos do plano para o espaço?

Em nosso ponto de vista, que coaduna com o da autora, é possível pensar em uma proposta de situações-problema que possam equipar os sujeitos com os conhecimentos no plano, em que se inclua a perspectiva de estendê-los para o espaço, tendo em conta que o nosso modelo alternativo para o ensino de GAP, dentre outros aspectos, prevê uma alternativa que não tenha GA subordinada à álgebra vetorial, ou seja, um tratamento não vetorial.

No entanto, uma possível "dispensa" do uso de coordenadas cartesianas, ou ainda uma abordagem voltada apenas para a álgebra vetorial, no caso do ensino médio do Brasil difere da Bélgica, pois os livros didáticos e os programas de ensino, especialmente do ensino médio, estão fortemente influenciados pelo *ponto de vista* cartesiano, em que pese, o estudo de vetores não se incluírem no currículo de matemática nesta etapa de ensino.

A tese ilustra uma forma de analisar os obstáculos de aprendizagem relacionados às conversões de registros e a facilidade de um certo tratamento desses obstáculos. Os resultados apresentados por Lebeau (2009) mostraram globalmente a possibilidade de trabalhar as dificuldades dos alunos sem, obrigatoriamente subordinar os registros cartesianos ao registro vetorial, favorecendo uma dialética entre o modo de pensar *sintético-geométrico* e o modo de pensar *aritmético- analítico*.

Nessa perspectiva, os resultados da pesquisa desta autora são fundamentadores para a nossa proposta de modelo alternativo para o ensino de GAP, pensado em nossa investigação.

2.1.2.2 A pesquisa de Andrade (2012)

O trabalho de Andrade (2012) tem como título: “a noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores”, com questão de pesquisa: de que forma um percurso de pesquisa e investigação que envolve tarefas fundamentais pode constituir-se um dispositivo metodológico de formação de professores? Este trabalho dialoga diretamente com a nossa investigação, não apenas no estudo de GA, mas também no referencial teórico (TAD) e na metodologia (PEP). Além desses referenciais, o autor usou também as noções de comunidades de prática, segundo Wenger (2001).

A pesquisa tratou do problema praxeológico do professor de matemática e da profissão docente, o fenômeno da desarticulação entre temas, setores e áreas de estudo da matemática na educação básica, ou seja, o problema da desarticulação entre os objetos de estudo da matemática escolar, apoiado em Bosch, Garcia e Gascón (2006).

A problemática da nossa pesquisa vai ao encontro dos aspectos problematizados por Andrade (2012), no entanto buscamos ampliar um pouco mais a noção de equipamento praxeológico do professor, dialogando com os referenciais dos conhecimentos docentes, dentro do contexto da formação inicial do professor de matemática.

O autor conjecturou que existiam tarefas matemáticas que poderiam permitir olhar o conteúdo matemático ao longo do currículo da educação básica possibilitando o desenvolvimento de praxeologias matemáticas de complexidade crescente.

Nesse sentido, propôs como estratégia para o enfrentamento do problema da desarticulação na instituição docente (uma comunidade de professores) construir tarefas, elegendo algumas já existentes no equipamento praxeológico do professor ou nas obras matemáticas. Para essas tarefas, o autor chamou de *tarefas fundamentais*, as que seriam integradas e articuladas para o desenvolvimento de outras tarefas.

Destacamos que Andrade (2012) trouxe aspectos problematizadores das organizações matemáticas (OM), resultados catalogados pelo autor, nos trabalhos de Bosch, Garcia e Gascón (2006) e Bosch, Fonseca e Gascón (2004) que em nosso ponto de vista. Julgamos tais aspectos importantes na concepção e experimentação do nosso PEP-FP:

- Há uma tendência de que as técnicas matemáticas se identifiquem com os próprios objetos ostensivos que se utilizam para descrevê-las e para aplicá-las;
- Existe uma dificuldade em realizar as tarefas que necessitam de interpretação, explicação e justificação da atividade matemática que se está realizando;
- Muitas das técnicas utilizadas para confrontar as tarefas propostas em atividades matemáticas do ensino médio têm um caráter naturalizado e auto tecnológico (uma única maneira de fazer);
- O processo de construção das OM, no ensino médio, não institucionaliza a tarefa matemática de inverter uma tarefa, nem, por conseguinte, a tarefa matemática de inverter uma técnica para realizar a tarefa inversa;
- Há pouca incidência de questões abertas, no ensino médio e quando existem se reduzem à manipulação de um modelo matemático dado previamente no enunciado da tarefa;
- No ensino médio, a relação pessoal dos alunos com as OM é essencialmente determinada pelas relações institucionais.
- Não se pode esperar que os alunos construam espontaneamente uma organização matemática local relativamente completa (OMLRC), se a instituição não a constrói.

O autor realizou um PEP com uma comunidade de prática de professores em serviço, a respeito de GAP, sob certas condições e restrições específicas. No estudo do autor, as tarefas fundamentais apontaram como dispositivo didático que fomentou o enfrentamento ao problema didático da desarticulação.

Dos resultados alcançados com o desenvolvimento do estudo, o autor apontou que as condições complexas da eleição das tarefas para constituição da organização matemática e as influências, tais como, o currículo oficial, as ferramentas didáticas disponíveis, os livros-textos adotados pela escola como obras institucionais de estudo, conformam e limitam as reconstruções das organizações matemáticas e didáticas. No caso particular da pesquisa desenvolvida pelo autor, as tarefas fundamentais exigem mudanças de práticas docentes que somente são possíveis com construções de novas relações dos docentes com o saber em jogo.

O autor ressalta, que vários fatores apontados por ele, coadunam para conclusão que “PEP no seio da comunidade de práticas, mostrou-se como um dispositivo metodológico positivamente diferenciado para formação continuada de professores no efetivo exercício da docência” (p. 156).

2.1.2.3 A pesquisa de Gaita (2014)

Gaita (2014), na sua pesquisa intitulada: “El paso de la geometría sintética a la geometría analítica”, desenvolveu um estudo com estudantes do curso de arquitetura em uma universidade do Peru.

O objetivo principal da pesquisa foi estabelecer conexões entre o conhecimento matemático em torno das construções com régua e compasso e a GA, por meio da identificação de problemas cujas soluções requerem inicialmente técnicas da geometria sintética, mas logo devem evoluir para técnicas algébricas.

O segundo objetivo geral foi analisar de que maneira, ao tratar os conceitos geométricos (reta, circunferência e cônicas) empregando distintas representações semióticas (figurais, algébricas e gráficas), influenciar uma real compressão desses objetos matemáticos.

A autora, a partir de um pré-estudo exploratório da etapa investigativa, identificou as dificuldades dos estudantes, de arquitetura que cursaram uma primeira disciplina de matemática do currículo, na interpretação de procedimentos de resultados obtidos em contextos de geometria analítica. A autora atribuiu as dificuldades desses estudantes a etapas anteriores à formação universitária, um exemplo disso, é a falta de domínio das técnicas relacionadas à geometria sintética.

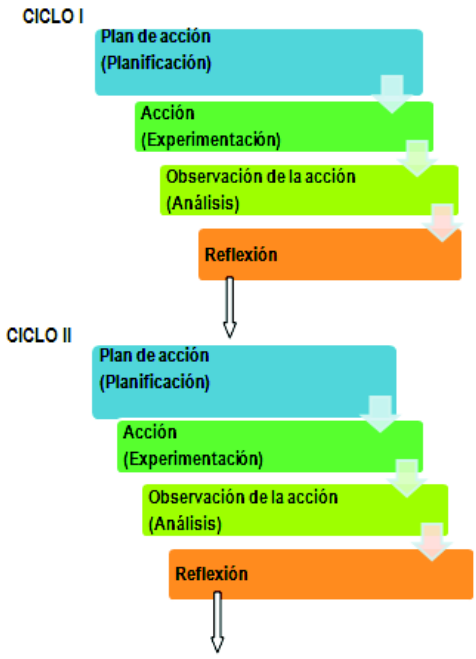
Gaita (2014) propõe um estudo que valorize a análise das conexões entre a geometria sintética e a geometria analítica, no âmbito da formação matemática de futuros arquitetos. A autora propõe construir uma gênese artificial do conhecimento cujo campo conceitual é a GA e elegeu como metodologia uma investigação baseada no *design de experimentos*, segundo Karrer (2006).

Organizou sua fase experimental, em torno das etapas que o método contempla, mais especificamente, a natureza dinâmica do método que considera os ciclos de experimentação, de modo que passagem de um ciclo a outro respondesse às informações obtidas em um ciclo prévio e nas trocas realizadas.

As situações desenhadas são postas a prova durante a realização da experimentação e podem ser refutadas ou reformuladas e novamente postas a

prova em uma experimentação seguinte. Gaita (2014) considerou cinco ciclos de experimentação, durante as quais as situações iam se modificando, de forma a responder satisfatoriamente aos objetivos propostos. A autora ilustra as fases que compõem os ciclos pela figura 2.

Figura 2 - Fases dos ciclos de experimentação



Fonte: Gaita (2014, p. 54)

No contexto da pesquisa desta autora, identifica-se algumas dificuldades em abordar temas de GAP, os quais são descritos em termos de conexões estabelecidas entre os registros de representação. Nesse sentido, a autora tomou como marco teórico a articulação entre a teoria de registro de representação semiótica (DUVAL, 2006) e o jogo de quadros (DOUADY, 1986).

Com relação à análise dos objetos matemáticos, tendo o marco comparativo de análise do aspecto algébrico e o geométrico, autora justificou que a compreensão dos objetos matemáticos perpassa por reconhecer que estes são inacessíveis fisicamente, logo é indispensável empregar representações semióticas para o desenvolvimento da atividade matemática. Esta suposição foi a base da explicação do que ocorre quando estudantes, sujeitos da pesquisa, enfrentam problemas sobre geometria sintética e geometria analítica.

Uma das hipóteses levantadas por Gaita (2014) foi que partindo do pressuposto do desenvolvimento histórico do conceito de lugar geométrico, encontram-se evidências que justifiquem a emergência de GA, nesse sentido

essas evidências podem ser adaptadas e desenvolvidas no nível de ensino em que a pesquisa foi desenvolvida.

Uma das conclusões obtidas por meio das análises das obras, do ponto de vista histórico, foi uma das restrições previstas pela autora, para implementação de uma proposta que buscasse recuperar a ideia essencial da geometria analítica, a de que o uso da álgebra como primeiro recurso para a solução de problemas está muito arraigada nos currículos.

As atividades a respeito lugar geométrico se configuraram com um dos pontos fundamentais da experimentação realizada. A autora organizou as análises a partir das respostas fornecidas pelos estudantes, as categorias foram organizadas por níveis: muito alto, alto, médio, baixo e nulo, em que *muito alto* correspondia ao nível de resolução da tarefa, em que o sujeito tem uma concepção dinâmica de lugar geométrico e considera os pontos que satisfazem a condição. A descrição dos níveis vai progressivamente sendo reduzido de acordo com o nível de desenvolvimento da atividade, chegando até o nível *nulo,* que considera que o estudante não tem concepção alguma de lugar geométrico.

Globalmente, as trocas realizadas na organização dos problemas de construção favoreceram, de acordo com Gaita (2014), a identificação do procedimento de solução, no caso das tarefas de lugar geométrico, contribuíram, também, para que os estudantes tivessem uma concepção adequada de distância entre pontos.

Os principais obstáculos detectados pela autora, em todos os ciclos da implementação, foram que alguns estudantes consideram a reta como segmento. A autora indica que, em futuras experimentações, deve-se construir/escolher atividades que permitem ao aluno não confundir um objeto com a sua representação.

2.1.2.4 A pesquisa de Costa (2015)

A pesquisa desenvolvida por Costa (2015) teve como título: “geometria analítica no espaço: análise das organizações matemática e didática em materiais didáticos.”

O objetivo da investigação foi identificar as organizações matemáticas e didáticas presentes em livros didáticos, no que se refere ao estudo da reta e do plano no espaço. Desenvolveu uma pesquisa bibliografia com livros didáticos do ensino superior.

A pesquisa de Costa (2015) é relevante para nossa investigação no sentido que traz uma visão de como estão organizados os conteúdos de geometria analítica espacial, que tem como principal pré-requisito conceitual, a GAP. Para as análises das organizações matemáticas e didáticas, a autora buscou apoio na TAD (CHEVALLARD, 1999), para caracterizar as organizações e comparar os tipos de tarefas presentes nos manuais, a partir das variáveis didáticas apontadas por Lebeau (2009) para estudo de GAE. Essas variáveis pautadas pelos seguintes questionamentos: “Por onde começar? Pelas retas? Pelos planos? Pelas equações cartesianas ou pelas equações paramétricas?” (COSTA, 2015, p. 56).

Os livros escolhidos foram publicados no período do movimento da matemática moderna. A metodologia apoiou-se na análise de manuais proposta por Chaachoua (2014).

A autora aponta como reflexão final da pesquisa o fato de os livros didáticos analisados, apesar de terem uma diversidade de tarefas, são poucos os títulos que contemplam as sugestões de abordagem da reta e para o plano no espaço indicados por Lebeau (2009).

A análise praxeológica, segundo a TAD, realizada por Costa (2015) nos manuais, revelou a predominância de tarefas, em torno da equação da reta no espaço, da condição de paralelismo de retas no espaço, a condição de alinhamento de pontos no espaço, a equação do plano no espaço por duas retas secantes e o estudo algébrico do paralelogramo. Apontar os tipos de tarefas presentes nos manuais, permitiu obter uma visão geral do que foi abordado sobre GAE, nesses materiais.

A autora ressaltou que a utilização de uma metodologia que envolvesse o referencial teórico, além de ser específica para análise de livro didático, caracterizou-se pelos aspectos indicados por Chaachoua (2014): momento de edição, representatividade, estrutura, análise ecológica (habitat e nicho) e análise praxeológico.

Aponta, também, a importâncias das discussões acerca das variáveis didáticas apontadas por Lebeau (2009) em relação à Geometria Analítica tridimensional,

> no que se refere à Reta e ao Plano, a saber: começar pelo plano? (estratégia sobre ortogonalidade, um plano como superfície regular, uma estratégia construída sobre o paralelogramo), começar pela reta? (uma expressão de alinhamento induzido para trabalhar no plano e que

> deve ser justificado, a projeção para ir do espaço ao plano ou do plano ao espaço, alinhamento e projeção, do alinhamento no plano ao alinhamento no espaço para geometria sintética), passar da reta ao plano (um plano caracterizado por duas retas secantes, um plano visto como uma superfície regular, apostar sobre a caracterização algébrica do paralelogramo), paralelogramo, paralelismo e translação (começar pelo paralelismo de retas, a translação ou o paralelogramo?, iniciar pelo estudo do paralelismo de retas?, começar por caracterizar algebricamente um paralelogramo?), os pressupostos geométricos (as projeções paralelas conservam o alinhamento, as projeções paralelas conservam o paralelismo) e os ostensivos e modos de pensar (articulação dos modos de pensar, a notação B-A). (COSTA, 2015, p. 118)

O trabalho de Costa (2015) nos permite reforçar a importância em nosso estudo, para a análise dos livros didáticos utilizados por professores no ensino médio, no âmbito de GAP, como forma de buscar a partir das praxeologias desses manuais, identificar um Modelo Epistemológico Dominante (MED), em torno de tarefas e técnicas, para o estudo de GAP.

2.1.2.5 A pesquisa de Matos (2017)

A pesquisa de Matos (2017): “praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear”, apesar de não ter seu foco em GA, em nosso ponto de vista, dialoga diretamente com a nossa temática, tendo em vista que o autor utilizou o referencial teórico da TAD e apontou resultados diretos para o ensino e aprendizagem de GA, além disso, pela estreita relação epistemológica existente entre os dois campos matemáticos GA e álgebra linear.

As reflexões apresentadas pelo o autor para a constituição do seu Modelo Epistemológico de Referência (MER) e do PEP, apoiados na TAD, foram importantes fundamentos para nortear nossas escolhas de pesquisa. Matos (2017) justificou a escolha do tema sobre álgebra linear, pela existência de dificuldades dos alunos com essa disciplina, no que se refere às noções básicas. Segundo o autor, essas dificuldades são a consequência de uma abordagem essencialmente axiomática dada pela instituição, no caso, um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Pará (IFPA).

Segundo Matos (2017), a prática docente, em relação aos tópicos de álgebra linear é fruto das praxeologias as quais os professores estiveram sujeitados, seja na formação inicial, continuada e até mesmo na experiência como docente em escolas de ensino superior e nos livros didáticos.

Assim como Lebeau (2009), autor destaca a ideia de que o formalismo é um obstáculo ao ensino de álgebra linear. Propõe pensar em que condições e

restrições, portanto, podem viver, no curso de Licenciatura em Matemática no IFPA, as praxeologias matemáticas propostas no trabalho baseadas no MER, constituídas em um PEP de professores em formação no IFPA.

A autor assevera que sua pesquisa é norteada por duas questões diretrizes: “Que características apresentam as organizações matemática e didáticas assumidas como praxeologias institucionais, referentes ao ensino de álgebra Linear? Que condições são possíveis instaurar, em uma instituição de ensino superior, para fazer viver certas organizações matemáticas e didáticas com características específicas?

O autor desenvolveu um estudo histórico e epistemológico dos objetos da álgebra linear, para evidenciar as transformações que ocorreram em tais objetos. Ele critica o aspecto essencialmente formalista (definições, teorias, conceitos, axiomas e teoremas), o qual da pouca atenção aos aspectos históricos e epistemológicos. Afirma que o histórico e o epistemológico são aspectos que permitem descobrir a gênese dos objetos matemáticos, reconstruir os processos heurísticos, o que possibilita ao professor, quando elaborar seu texto do saber, fazer relações dos saberes matemáticos com suas origens, transcendendo meros processos algorítmicos tão comuns na álgebra linear.

Matos (2017) dedicou uma subseção do seu trabalho para tratar da GA, que, na sua ótica, a GA se caracteriza como uma transgressão. O autor discute sobre o trabalho de Oresme e assume que, foi a partir deste trabalho que o tratado sobre as configurações das formas e sua teoria das proporções, e funções ligadas as representações gráficas, lançou as bases para a GA.

O autor faz um encadeamento a respeito do surgimento da GA, mostrando certas relações entre os conceitos geométricos e o processo de algebrização, bem como as relações com os conceitos de dependência, independência linear e espaço vetorial, e assume que a álgebra linear é uma GA sofisticada.

Matos (2017) faz um estudo histórico no qual discute os conceitos de curvas e as relações históricas em que emergem conceitos de álgebra linear, mostrando assim a estreita relação entre esta última e a GA. Também focou nos estudos de Euller (1750) e os sistemas de equações. O autor, também, acrescenta o estudo dos vetores associado ao conceito de baricentro estabelecendo as relações geométricas presentes.

O estudo epistemológico é fundamental para a definição do MER, pois fundamenta o bloco teórico-tecnológico das tarefas desenvolvidas a partir desse

MER. Segundo o autor, a construção do seu MER é caracterizada com uma dialética entre o ensino e a história. Propôs um MER que visou construir um sistema de tarefas que articulassem práticas, procurando favorecer tal articulação entre os objetos do ensino médio e álgebra linear tomando por princípio sistemas lineares como a base da álgebra linear.

O autor fundamenta a organização do seu MER na TAD, enquanto possibilidade de sustentar a reconstrução de um discurso para a prática de ensinar álgebra linear. Prevê, em seu MER, o estudo de sistemas lineares chegando até espaços vetoriais.

O autor reforça o caráter provisório e relativo do MER, apontando que longe de ser um modelo definitivo, estará sempre sujeito a modificações, já que a TAD revela não existir um sistema privilegiado, absoluto, para se observar e analisar a vida institucional, tanto intra como interinstitucional das OM. O que o autor propôs foram praxeologias que poderiam ser interpretadas para fazer evoluir a atividade matemática de construção dos espaços vetoriais e transformações entre espaços.

A pesquisa de Matos (2017) trouxe apontamentos e reflexões importantes que nortearam alguns aspectos do desenvolvimento de nossa pesquisa, tais aspectos se configuraram no percurso realizado pelo autor para construção do MER e da constituição do PER na instituição de ensino escolhida por ele. Nesse sentido, o estudo de Matos (2017) reforçou a importância de termos realizado um Piloto, como estudo preliminar dos objetos que desejávamos investigar e evidenciar alguns achados que sustentam o percurso de nossa fase experimental.

2.1.2.6 A pesquisa de Nguyen (2017)

A tese intitulada « Ecologie du formalisme “bipoint” dans l’enseignement de géométrie au niveau secondaire[13]», de autoria de Nguyen (2017), revelou significativas contribuições para auxiliar no estudo epistemológico desenvolvido em nossa pesquisa. Nesse sentido, levantamos os pontos importantes em um primeiro momento, no entanto, outros aspectos da pesquisa realizada pelo autor serão novamente evocados ao longo dos capítulos seguintes, quando julgarmos necessário.

[13] Ecologia do formalismo « bipoint » no ensino de geometria no nível secundário.

A autora situa como objeto do seu estudo problemas epistemológicos e didáticos relacionados ao ensino de geometria vetorial no nível secundário (alunos de 15 a 18 anos) da Bélgica. A autora identificou como professora do ensino superior, a existência de um “buraco” entre a geometria vetorial do secundário e aquela ensinada na universidade no Vietnã, esse mesmo problema ocorre na Bélgica.

Utilizou como quadro teórico a TAD e a TSD. A autora propôs construir um MER, segundo Gáscon (1993), o qual daria a chave para a leitura das disfunções dos currículos atuais e das potencialidades das engenharias didáticas em ternos de ecologia.

A autora apresentou um panorama histórico da geometria da época de Euclides até a atualidade, e discutiu as vicissitudes do Movimento da Matemática Moderma (MMM), bem como as contra- reformas subsequentes com o intuito de entender o lugar da geometria vetorial na Bélgica francofone, na França e no Vietnã nos programas dos anos 70 e da atualidade.

A partir dessas análises, evidenciou a relação entre a geometria e álgebra linear, e destacou a subordinação da geometria à álgebra linear e vice e versa. O estudo histórico realizado por Nguyen (2017) evidencia os problemas existentes nos Elementos, nos ajudando a complementar o nosso estudo histórico e evidenciar os avanços que a GA vai trazer frente a geometria sintética.

Na discussão a respeito da geometria euclidiana, a autora explica como se entende um axioma, uma definição e postulado, tenta explicitar o que significa cada termo, e em que um axioma é diferente de um postulado. Nesta perspectiva, assevera que

> Os axiomas são essencialmente proposições concernentes as noções gerais, que giram em torno de grandeza “maior”, “igual”, “tudo”, “parte”. Eles são aparentemente considerados como evidentes, porque são necessariamente implicados na representação mental que podemos ter dessas noções. Os postulados dizem respeito aos entes matemáticos propriamente ditos: sua verdade parece vir da extrapolação da verdade da experiência, por exemplo, o postulado que afirma que uma reta pode ser prolongada indefinidamente, ou o que admite a igualdade de todos os ângulos retos. (DIEUDONNÉ 1962, p. 543–545, apud NGUYEN, 2017, p. 8)[14]

[14] Les axiomes sont essentiellement des propositions concernant les notions générales qui gravitent autour de celle de “grandeur” : “plus grand”, “égal”, “tout”, “partie” ; elles sont apparemment considérées comme évidentes, parce que nécessairement impliquées dans la représentation mentale que nous pouvons avoir de ces not. Les postulats concernent les êtres mathématiques proprement dits : leur vérité semble plutôt provenir d’extrapolation de vérité d’expérience, comme, par exemple, le postulat énonçant que tout droite peut être prolongée indéfiniment, ou celui admettant l’égalité de tous les angles droits.

Essas observações contribuem para nossa tese no sentido de que ampliamos a compreensão a respeito de certos aspectos da geometria euclidiana ao visitar determinadas obras históricas por meio do olhar da autora. Essa perspectiva contribui para perceber a passagem da geometria sintética para GA como um processo de evolução.

De acordo com Rivenc (1992, apud NGUYEN 2017), um conceito não pode ser logicamente fixado somente pela relação entre outros conceitos. Assevera que um objeto matemático é definido unicamente pelas suas relações com outros objetos. Essas relações formam uma estrutura e é o estudo dessa estrutura que forma o coração da atividade matemática.

Nguyn (2017) faz uma discussão a respeito da GA, em que tenta traçar os pontos de sucessos e críticas desse campo da matemática. Ela afirma que historicamente a relação entre a geometria e a álgebra não começam a aparecer apenas com o início ou primórdios da GA. Os primeiros a utilizar as ferramentas analíticas da geometria foram Descartes e Fermat. O método analítico ganhou muito sucesso entre a comunidade de matemáticos por solucionar muitos problemas de geometria. As ferramentas analíticas permitem classificar as curvas por meio de suas equações e, portanto, classificar os próprios problemas de geometria.

A autora assinala ainda que:

> [...] a busca de invariantes de um referencial (cartesiano) a outro, mesmo de maneira bastante natural para operar mudanças de coordenadas, conduziu ao desenvolvimento do estudo que na época se chamava substituições lineares, em termos modernos, transformações lineares (NUGUYEN,2017, p. 45).[15]

Outro aspecto relatado pela autora sobre GA é que a algebrização da geometria permite tratar problemas geométricos de maneira mais organizada e genérica, esse fato é considerado um progresso. Mesmo com esse progresso, o método analítico leva a cálculos pesados e complicados, o que pode esconder o significado geométrico da questão, e não favorecer o recurso da intuição geométrica.

Outro ponto de vista conceitual, apresentado na pesquisa, é que alguns consideram a ideia de usar números na resolução de problemas geométricos

[15] La recherche d'invariants, d'un repère à l'autre, mène de manière assez naturelle à opérer des changements de coordonnées (soit de repères) et conduit par là au développement de l'étude de ce qui était à l'époque appelé substitutions linéaires, ou, en termes modernes, les transformations linéaires.

inaceitável, e que a escolha do sistema de coordenadas é arbitrária. Nossa perspectiva é que essa visão é limitada, pois a GA fornece um ponto de vista diferente, para os problemas geométricos, daqueles praticados até o surgimento dos sistemas de coordenadas.

Os resultados apresentados por Nguyen (2017) perpassam por conclusões analíticas. Além de um extenso estudo histórico e epistemológico e a constituição de um MER baseado no formalismo de “dois-pontos”, inspirado na história, a autora também analisou os currículos vigentes.

No que diz respeito aos paradigmas geométricos, por meio da história do ensino da geometria na Bélgica e na França, a autora concluiu que, antes da reforma da matemática moderna, a geometria ensinada no secundário estava assentada no paradigma da axiomática natural, onde os desenhos desempenham um papel efetivo nas demonstrações geométricas.

Sobre os aspectos das geometrias em relação à álgebra, de acordo com Nguyen (2017), o modelo algébrico revela uma geometria analítica compacta. Resume duas ou três dimensões de relações homólogas entre as coordenadas respectivas dos pontos envolvidos, relações invariantes da escolha do referencial. Na geometria afim, as configurações de base são o paralelogramo e as configurações particulares de pontos alinhados, os quais estão adicionadas as noções de perpendicularidade e de distância da geometria métrica.

O modelo algébrico dá conta de propriedades intrínsecas de vetores próprias a cada uma dessas geometrias, mas ele mesmo é validado pelos teoremas de uma geometria “subordinada” à geometria euclidiana, os quais são os únicos resultados conhecidos dos alunos, cada isometria e similitude dos triângulos, teorema de Tales e de Pitágoras.

Nguyen (2017) também analisou os achados de uma experimentação com futuros professores de matemática do ensino médio da Bélgica. Eram estudantes que já atuavam como professores do ensino secundário (ensino fundamental), participaram da disciplina Didática da Matemática de um programa de formação de professores, na universidade de Liége. Os resultados apontados pela autora revelaram aspectos da formação desses sujeitos que vão ao encontro das mesmas condições identificadas com professores estagiários no Brasil, em nosso estudo piloto.

De acordo com a autora, pôde-se observar que os estudantes, por obrigação ou por imitação, adotam escolhas pedagógicas e didáticas de ensino

que se enquadram em um modelo. Por exemplo, esses futuros professores estagiários, quando preparam suas aulas de estágio, o fazem a partir dos manuais escolares ou retornam aos livros e cadernos de matemática de suas próprias aulas no curso universitário, em todo caso, as escolhas desses estudantes-professores refletem os efeitos da transposição didática em vigor.

2.2 Pesquisas que trataram da formação inicial do professor de matemática e do estágio supervisionado

Neste tópico, o objetivo foi trazer elementos de pesquisas que tratam, de alguma forma, da formação de professor de matemática, especialmente no âmbito do estágio supervisionado, enquanto componente curricular. O objetivo é ter uma visão geral dessas teses e dissertações.

Encontramos um número expressivo de pesquisas que tratam da formação de professor. A respeito do professor de matemática, encontramos mais trabalhos em relação à formação continuada, mas fora de nosso foco de estudos relacionados ao estágio curricular supervisionado e a GA na formação docente. Diante disso, selecionamos três trabalhos que podem contribuir com os aspectos da formação inicial docente que investigamos.

O primeiro trabalho selecionado foi o de **Teixeira (2013)**: “O Estágio Supervisionado e o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática: uma análise a respeito da identidade profissional docente”.

Destacamos que no estudo desse autor, que realizou entrevistas semiestruturadas com graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática, o foco principal da pesquisa foi a investigação a respeito da “participação do Estágio Supervisionado no desenvolvimento da identidade profissional docente de futuros professores de matemática, na ótica dos licenciandos” (TEIXEIRA, 2013, p. 15).

A questão principal da pesquisa foi “quais elementos da identidade profissional docente são mobilizados/desenvolvidos no contexto do Estágio Supervisionado?” (TEIXEIRA, 2013, p. 15). Além desta, o autor buscou responder: “como as ações desenvolvidas no âmbito do Estágio Supervisionado contribuem para a mobilização/desenvolvimento desses elementos”? (TEIXEIRA, 2013, p. 15). Tais questionamentos vão ao encontro de nossa questão de pesquisa. Os resultados apontados por Teixeira (2013) sinalizam o que os graduandos mobilizaram em termos de identidade docente e como as

ações do estágio podem contribuir na mobilização dos elementos da identidade docente.

O autor apresentou um quadro com três categorias de análises interligadas. A primeira apresenta os elementos relacionados à identidade profissional docente mobilizada/desenvolvida por algum estagiário, a segunda como o estágio de observação contribuiu para a mobilização/desenvolvimento desse elemento por parte do estagiário e a terceira indicou as aprendizagens a respeito da docência associadas ao elemento da identidade que foi desenvolvido/mobilizado.

Apresentamos esses resultados no quadro 5, adaptado a partir dos resultados apresentados pelo autor, que relacionamos a primeira categoria com relação à identidade docente com a terceira categoria a respeito das aprendizagens mobilizadas acerca da docência.

Quadro 5 - Aprendizagens a respeito da docência a partir do estágio de observação

Elemento relacionado à identidade profissional docente mobilizado/desenvolvido por algum estagiário	**Aprendizagens a respeito da docência associadas ao elemento da identidade que foi desenvolvido/mobilizado**
a intenção de incorporar ou não aspectos da prática pedagógica observados em outros professores	Necessidade de planejamento das aulas; Necessidade de ter clareza sobre o que é esperado que o aluno aprenda; aspectos que podem auxiliar no controle da sala de aula; possibilidades de abordagem de conteúdos matemáticos
a apropriação do valor teórico da profissão docente	Necessidade de se colocar em um processo contínuo de estudo de conteúdos matemáticos.
a apropriação do valor social da profissão docente	Necessidade de o professor manter seu compromisso social com a aprendizagem dos alunos.
crenças sobre o ensino	Valorizar e potencializar a experiência profissional; como lidar com seus sentimentos em relação ao trabalho docente.
Visão a respeito de uma boa aula	Necessidade de o professor: conhecer estratégias de ensino e de aprendizagem que possibilitem aulas diferenciadas daquelas conduzidas sob a perspectiva tradicional de ensino; ter preocupação com a dinâmica da aula; reconhecer a importância da interação entre professor e alunos e dos alunos entre si; reconhecer os alunos como agentes ativos no seu processo de aprendizagem; promover um ambiente favorável à aprendizagem
visão do tipo de professor que querem ou não querem ser.	Necessidade de agir com responsabilidade, empenhando-se ao máximo para ministrar uma boa aula, conduzida de maneira diferenciada em relação às aulas em que o foco fica apenas na exposição do conteúdo por parte do professor, oportunizando aos alunos uma participação ativa nos processos de ensino e de aprendizagem; não querer se tornar indiferente, rude ou omisso durante o desenvolvimento de seu trabalho, nem demonstrar estar infeliz com a profissão

Fonte: Adaptado de Teixeira (2013, p. 125-126)

Os resultados apresentados por Teixeira (2013) e que retomamos no quadro 5, identificam as aprendizagens desenvolvidas no estágio de observação. Ressaltamos que no estágio de observação, os estudantes apenas observam a prática escolar, sem participação efetiva na regência de classe. O autor ressaltou que, no momento de planejamento das atividades de regência, os estagiários destacaram a importância de aprofundar os conhecimentos

matemáticos e revelaram reconhecer a diferença entre os conteúdos abordados nos diferentes níveis de ensino. No entanto, não ficou evidente se na preparação do plano de aula foi estabelecida conexão entre os conteúdos estudados na universidade e os que deveriam ser ensinados no estágio de regência.

Estes resultados, descritos no quadro 5, revelam-se importantes para nossa pesquisa, por dois motivos: O primeiro é que as aprendizagens estão contidas em um quadro de conhecimentos/ saberes docentes que se inserem no conhecimento do conteúdo do currículo (matemático) e saberes relacionados ao conhecimento pedagógico. Ainda significa dizer que, é possível construir aprendizagens a respeito da docência, durante o estágio supervisionado.

O segundo ponto é que a partir dos resultados de Teixeira (2013) com o estágio de observação, podemos conjecturar que no estágio de regência a construção de conhecimentos/saberes docentes seria ainda mais efetiva e ampla, visto que os estagiários atuam como professore de uma classe, por um período determinado. Não podemos afirmar que esta segunda hipótese será verificada em nossa pesquisa, mas é uma questão que deve ser considerada.

O autor, também, apresenta mais dois quadros de resultados relacionados às aprendizagens evidenciadas pelos estagiários durante a participação na orientação e preparação das aulas para a regência e das aprendizagens evidenciadas durante a própria regência de classe.

No quadro das aprendizagens durante a regência de classe, há evidências, além dos elementos do conhecimento pedagógicos, de conhecimentos didáticos.

Aparecem como elementos do conhecimento didático os seguintes tópicos: necessidade de refletir a respeito de critérios utilizados para a escolha das tarefas a serem desenvolvidas com os alunos; é possível desenvolver um trabalho na perspectiva da resolução de problemas em sala de aula; antecipação de possibilidades de respostas dos alunos para as tarefas que serão propostas e a mobilização de conhecimentos em relação ao conteúdo e aos alunos.

Os aspectos que destacamos como relevantes da pesquisa de Teixeira (2013) poderão mais tarde no desenvolvimento das sessões do PEP estar presentes nas construções os sujeitos como elementos prévios ou potencializadores do desenvolvimento de outros conhecimentos docentes que serão propostos na pesquisa.

A segunda pesquisa selecionada foi a tese de **Leal (2016).** Buscamos trazer as contribuições desse trabalho para nossa pesquisa, a razão dessa escolha se deu por dois motivos: o primeira foi por conta de o trabalho dessa autora trazer reflexões atuais a respeito da formação inicial, na Licenciatura em Matemática, e a segunda razão é o fato de ter pesquisado exatamente uma universidade baiana, que é o lócus de nossa investigação.

A autora desenvolveu uma investigação, em um curso de Licenciatura em Matemática, na Bahia, que teve como questão de pesquisa “quais as possíveis articulações entre teoria e prática no Projeto Político Pedagógico (PPP)?” (LEAL 2016, p. 48). Tendo como objetivo de pesquisa investigar como se dá a articulação entre a teoria e a prática no PPP do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia.

A autora aponta três questões auxiliares para a questão de pesquisa principal A questão principal apresentada pela autora é parte relevante das discussões a respeito do nosso tema de pesquisa, pois suas conclusões nos permitirão fazer uma confrontação entre o que seria uma entre teoria e prática no estágio supervisionado e àquela proposta (PPP) de um determinado curso e Licenciatura em Matemática analisado. A autora apresenta mais três questões de pesquisa auxiliares:

> O curso de Licenciatura em Matemática descrito no PPP apresenta mecanismos de articulação teoria-prática? Que tipos de conhecimentos do saber fazer previstos no PPP favorecem no licenciando a aquisição do conhecimento prático do ensinar? O que revelam os estudantes que estão em diferentes momentos do curso de Licenciatura em Matemática quanto aos saberes provenientes da matriz curricular? (LEAL, 2015, p. 48)

Leal (2016) buscou verificar se no PPP desse curso são descritos mecanismos de articulação entre teoria- prática, quais tipos de conhecimentos do saber fazer estavam previstos no PPP e o que os estudantes revelam como saberes provenientes da matriz curricular. A autora destaca o posicionamento apresentado das pesquisas levantadas em sua revisão de literatura, quanto à visão sobre teoria e prática. Primeiro relaciona as pesquisas que tratam da formação de professores, e em seguida aquelas que revelam o que entendem os estudantes concluintes ou em fases de conclusão de cursos de Licenciatura em Matemática, sobre a prática. E por fim apresenta a visão das pesquisas relacionadas à prática como componente curricular em projetos pedagógicos.

As reflexões levantadas pelo trabalho de Leal (2016) nos levam a considerar que no estágio supervisionado não poderia existir essa dicotomia entre teoria e prática, mesmo que isto perdure nas demais componentes curriculares.

Segundo Leal (2015) no atual modelo de formação do licenciado, o Estágio Supervisionado, é o espaço mais propício para o desenvolvimento de propostas diferenciadas de ensino e aprendizagem, que efetivamente possibilitem um processo agregador e articulador entre teoria e prática e considere nesse processo formativo elementos da pesquisa em educação matemática, tomando está última como fonte inspiradora. Para tanto é importante clarificar o sentido de teoria e prática que assume.

Nesse sentido, concordamos com a autora quando expressa a necessidade que possa ser oportunizado aos licenciandos momentos que posam experenciar, vivenciar e refletir, “momentos provenientes de situações que emergem do contexto real da sala de aula, ou de simulações, para que este tenha a oportunidade de incorporar atitudes práticas e adquirir uma visão crítica de sua área de atuação profissional”(LEAL, 2016, p. 68). É nessa perspectiva que as atividades experimentais propostas em nossa pesquisa se inserem nas atividades de estágio supervisionado.

A autora identificou que os mecanismos utilizados para operacionalização da articulação ente teoria é prática se apresentam frágeis, além disso, o relato dos estudantes possibilitou a autora concluir que mesmo com um o currículo organizado em eixos, ainda perdura a aplicação de teorias estudadas durante o curso, como atividades práticas. Assim, o currículo reafirma o caráter dicotômico entre a teoria e a prática.

Quanto aos tipos de conhecimentos previstos pelo PPP, a autora formulou como questão: Esses conhecimentos favorecem a aquisição do conhecimento prático de ensino, por parte dos licenciandos? A autora relata que a construção curricular do curso de Licenciatura em Matemática investigado, apresenta uma composição de eixos de formação, sendo que cada eixo considera sua especificidade, contribuindo para revelar conhecimentos necessários ao ensino. No entanto, a aquisição de conhecimentos específico não é suficiente para revelar o conhecimento prático, seja ele científico ou pedagógico. De acordo com a autora, são as atividades organizadas com o intuito de desenvolver

competências e o potencial de reflexão, que são capazes de desenvolver o conhecimento prático.

Em nossa visão, essas atividades práticas devem envolver os conhecimentos teóricos dos diferentes componentes curriculares ou eixos de conhecimentos desenvolvidos nas diferentes disciplinas do currículo, em uma perspectiva voltada para o ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. Tais atividades devem ser desenvolvidas durante o estágio curricular supervisionado, o qual não deve se restringir à observação e à regência nas escolas, sem os momentos de discussão, reflexão e produção teórica e prática do conhecimento matemático a ser ensinado no espaço da universidade. Esta é a perspectiva que defendemos em nossa pesquisa, como meio alternativo para discutir os conhecimentos/ saberes docentes no estágio supervisionado.

A pesquisa de **Zimmer (2017),** traz um estudo realizado em cinco universidades brasileiras de diferentes regiões, retratando o resultado da análise dos projetos políticos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e de entrevistas com sete professores orientadores e vinte estagiários. Os dados, segundo a autora foram interpretados com base na análise de conteúdo de Bardin (2011).

A autora faz um breve histórico que retrata da visão existente sobre o estágio e a formação docente nas contribuições de Fiorentini et al (2012), Pires (2000), Gatti (2014) e Pimenta e Lima (2012). O estágio supervisionado como espaço formativo do curso de Licenciatura em Matemática, a ressignificação do saber docente e escolar e a tentativa da superação de uma concepção que aponta o estágio meramente de aplicações de teorias, isolado da experiência prática. De outro lado o estágio supervisionado poderia ser um espaço no qual a teoria e a prática estão interconectadas aos contextos escolares e possibilita a construção da aprendizagem escolar e da docência.

Zimmer (2017) conclui que não é essa a concepção dominante no estágio, e sim o insucesso e a fragilidade dos estágios. Além disso, os currículos existentes, não conseguem revelar como os estágios de fato acontecem.

A maioria dos projetos pedagógicos analisados pela autora indicaram modificações no formato do estágio em atendimento à legislação, observação também apontada nas entrevistas. Os professores e estudantes apontaram que existe uma desarticulação entre a licenciatura e o estágio supervisionado, e que

o estágio não tem o mesmo reconhecimento das demais componentes curriculares do curso.

Ressaltamos que o estudo de Zimmer (2017) traz um retrato, nas vozes dos sujeitos, sobre questões fundamentais relacionadas ao projeto pedagógico de curso e o estágio supervisionado, destacamos as seguintes questões: “como ocorre realmente o estágio supervisionado nos cursos de Licenciatura em Matemática? desarticulado da teoria? o projeto pedagógico do curso apresenta clareza e objetividade sobre o estágio?”(ZIMMER, 2017, p. 192).

Os principais resultados apontados pela autora caracterizaram-se em três categorias: a forma como os estágios acontecem nas universidades investigadas, a atuação do professor de estágio e do professor regente e as concepções dos estagiários a respeito da experiência de estágio. A interação entre estas categorias, em nosso ponto de vista, foi fundamental nos relatos dos estagiários sobre a experiência de estágio, para construir uma concepção a respeito do estágio.

Globalmente, as pesquisas sobre estágio supervisionado e a Licenciatura em Matemática, em nosso ponto de vista, nos remetem ao desenvolvimento de um estudo que venha de alguma forma trazer contribuições, que fossem, também, alternativas a serem discutidas no trabalho com a componente estágio curricular supervisionado, promovendo as devidas articulações entre os conhecimentos matemáticos e aqueles ditos didáticos-pedagógico.

Nossa abordagem, nesta pesquisa, em termos de conhecimentos/saberes docentes, tentamos ampliar as discussões, de modo a se distanciar um pouco do discurso meramente pedagógico, compreendendo assim, que os conhecimentos docentes englobam diferentes categorias de conhecimento, inclusive o pedagógico.

2.3 Conclusão do Capítulo 2

Concluímos este capítulo trazendo globalmente os principais aspectos das pesquisas analisadas, dando ênfase aos aspectos que buscamos contemplar em nossa investigação.

Das pesquisas cuja ênfase foi o uso de tecnologias, o aspecto principal que identificamos, quanto à aprendizagem, foi o uso de softwares como “facilitador” desse processo. No entanto, a dificuldade de sujeitos aprendizes com a mudança de registros de representação perdurou na maioria dos

trabalhos. Os trabalhos visitados não discutem o conhecimento tecnológico do conteúdo, enquanto conhecimento docente. Por outro lado, não encontramos pesquisas, com o foco na formação do professor de matemática, sobre GAP.

Na perspectiva da discussão sobre a formação do professor, com o foco no estágio supervisionado, não encontramos pesquisas semelhantes à nossa, com o caráter experimental, tendo os eixos norteadores de estudo, os conhecimentos docentes, integrando o estudo matemático e didático como propomos. De fato, há uma carência de estudos com estagiários de Matemática dessa natureza, no Brasil, pelo menos nos motores de busca que procuramos não foram encontrados.

Com relação ao aspecto histórico-epistemológico, as pesquisas trouxeram alguns elementos para auxiliar a constituição do nosso MER.

CAPÍTULO 3 - MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA A GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA (GAP)

Neste capítulo, apresentamos os elementos fundamentais para constituição de um modelo epistemológico de referência para o estudo de GAP. O objetivo foi identificar um modelo de referência que nos permitisse analisar o sistema educativo atual e constituir um modelo de referência alternativo, que fundamentasse o desenvolvimento do PEP voltado para a formação inicial de professores de matemática que atuarão na educação básica no Brasil, mais especificamente, no ensino médio.

Apoiamo-nos em Gáscon (2014) no que diz respeito ao construto Modelo Epistemológico de Referência (MER). Nesta perspectiva, identificamos um paradigma de pesquisa que se alinha a um projeto de Educação Matemática emancipatória, o qual pode possibilitar uma emancipação epistemológica e didática da Didática da Matemática, ainda que algumas restrições se sobreponham, seja no interior ou exterior das instituições, aos modelos epistemológicos de referências. Neste ponto de vista, Gascón afirma que

> [...] modelos epistemológicos de referência (MER) construídos no âmbito da TAD podem ser considerados como tipos ideais que permitam a emancipação da didática das matemáticas em relação aos modelos epistemológicos dominantes nas diversas instituições que fazem parte do seu objeto de estudo, e, graças à sua função fenomenológica, os MER tornam visíveis novos fenômenos didáticos. (GÁSCON, 2014, p, 106. Tradução Nossa)[16]

O autor assevera que esses modelos constituem ferramentas metodológicas e teóricas, que podem possibilitar tal emancipação. Nesse sentido, faz-se necessário, em nossa investigação, no âmbito da TAD, desenvolver um estudo epistemológico que possibilite o desenho de um MER, que será, a *priori,* contrastado com um modelo epistemológico dominante (MED). A análise desses dois modelos (MER e MED), no âmbito das organizações matemáticas e didáticas, pode fazer emergir fenômenos didáticos que serão trabalhados, *a priori*, em um novo modelo alternativo, que será proposto, por exemplo, para o estudo de objetos da GAP. Esse novo modelo, deve ter um

[16] [...] modelos epistemológicos de referencia (en adelante, MER) construidos en el ámbito de la TAD pueden considerarse como tipos ideales que han permitido la emancipación de la didáctica de las matemáticas respecto de los modelos epistemológicos dominantes en las diversas instituciones que forman parte de su objeto de estudio y, gracias a su función fenomenotécnica, los MER han hecho visibles nuevos fenómenos didácticos (GASCÓN, 2014, p. 106).

caráter emancipatório, tendo em conta as condições e restrições dos modelos epistemológicos dominantes das diversas instituições analisadas.

A incorporação da prática descrita acima, como fase de pesquisa, voltada para a formação docente, em nosso ponto de vista, se caracteriza como uma prática emancipatória tanto dos referenciais históricos, quanto dos institucionais. Gascón (2014) explica que a dita emancipação pode ser interpretada como uma liberação das condições que são impostas pela ideologia dominante nas instituições que formam parte do seu objeto de estudo.

O autor ainda defende, que essa emancipação é imprescindível para que a comunidade científica construa, de uma forma relativamente autônoma, o objeto de estudo da disciplina. Corroborando como autor, defendemos que este processo de pesquisa, tendo o aporte teórico da TAD, pode viabilizar a produção de conhecimento novo e ressignificação de conhecimentos antigos.

Diante dessas considerações, apresentamos um esquema de trabalho, com os modelos que foram construídos de acordo com os objetivos metodológicos da pesquisa, segundo o esquema apresentado na figura 3.

Antes, porém, insistimos em clarificar que a escolha da escrita desta Tese, não se apoiou nos paradigmas tradicionais (comumente usados no Brasil) da descrição teórica e metodológica e dos procedimentos metodológico, estes elementos, embora estejam explicitamente presentes no texto, não se apresentam em um único capítulo ou seção dedicada para isto. A metodologia foi identificada como qualitativa e exploratória no primeiro capítulo, por meio da Engenharia Didática. Está última foi engendrada e articulada com os aspectos teóricos da TAD, constituindo-se em um dispositivo-metodológico-teórico de pesquisa.

A metodologia perpassa pelas fases fundamentais da Engenharia Didática: as análises preliminares (prévias, inclui o Piloto), com os estudos desenvolvidos pelos modelos epistemológicos, a análise e descrição *a priori* dos episódios de estudo do PEP-FP, a experimentação, a análise *a posteriori* dos episódios de estudo, a avaliação e resultados do PEP-FP.

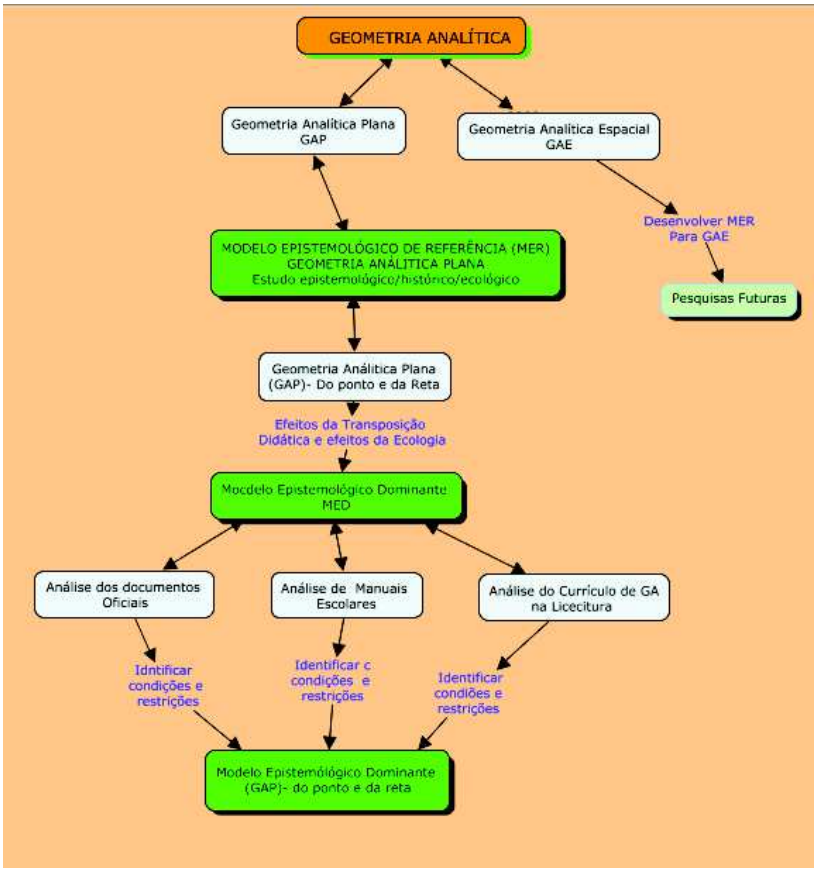
Temos três modelos básicos de análises: nosso modelo epistemológico de referência, o modelo institucional baseado no estudo das obras, mais especificamente, os manuais escolares e os documentos oficiais (orientações curriculares) ou modelo epistemológico dominante (MED) e o modelo epistemológico de referência alternativo (MERA). Ressaltamos que, dentro do

estudo de GAP, diversos modelos podem ser propostos sobre diferentes objetos de estudo e/ou dos mesmos objetos.

Da mesma maneira que temos um modelo dominante apoiado em manuais escolares e no programa curricular do ensino médio, por exemplo, teremos também um modelo dominante para o ensino de GAP na Licenciatura em Matemática, apoiado nos manuais e no currículo da licenciatura, que chamamos de modelo de formação, ou modelo dominante na licenciatura. Aliado ao estudo desses modelos, precisamos incorporar no modelo alternativo a dimensão do estágio supervisionado no âmbito curricular e de suas bases epistemológicas.

No esquema da figura 3, situamos os modelos que foram construídos nesta Tese diante do saber matemático a respeito de GAP. O referido esquema, se apresenta, também, como uma forma de entendermos a função desses modelos em nossa pesquisa, partindo do saber matemático científico (saber sábio).

Figura 3 - Mapa de esquema da pesquisa por meio dos modelos



Fonte: Elaborado pela autora

O apoio principal para o nosso MER, foi a pesquisa histórica de fontes primárias, consideradas cientificamente como as primeiras produções sistematizadas, a respeito de GA, publicadas em francês.

Em linhas gerais, o objetivo final com a construção de cada modelo foi desenhar um MERA para o estudo de GAP, ou seja, de tópicos de GAP, que nortearia as etapas subsequentes da pesquisa. Para tanto, se fez necessário uma análise dos efeitos da transposição didática e da ecologia dos objetos matemáticos, no sentido de identificar quais transformações ocorreram com determinados objetos sob efeito da transposição didática, quais objetos "vivem" e quais desapareceram das instituições. Todas essas análises trarão elementos para a construção do dito MERA.

Neste capítulo, apoiando-se em Gascón (2014), construímos um MER que vai norteou os estudos das dimensões ecológica e econômica da GA. Este estudo tem um caráter epistemológico, ainda que trouxemos os aspectos históricos e ecológicos quanto ao estudo de GA. Mais tarde no texto, como já foi explicitado, evidenciamos o saber matemático vigente sobre GA, no âmbito dos manuais escolares brasileiros, principalmente do ensino médio e/ou superior e dos programas de ensino.

Em nosso MER, buscamos situar ~~esse~~ o saber a respeito de GA na história da matemática de maneira a fornecer elementos ecológicos que justificam a razão de ser dos objetos dessa geometria, ou seja, quais são as condições e restrições sob as quais os conhecimentos/saberes da GA são gerados, vivem, se desenvolvem, se transformam, se enfraquecem, se disseminam, desaparecem etc.

Iniciamos por um panorama histórico tendo como marco principal o trabalho de René Descartes. Buscamos apresentar os principais aspectos que apontam para o estudo de GA de maneira a elucidar sua evolução, especialmente da GAP, passando pelo marco do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Assim, esse capítulo é construído em torno de dimensões de estudo: a dimensão epistemológica e histórica, a dimensão ecológica e a dimensão escolar (transposição didática), esta última será tratada no capítulo subsequente. Consolidar uma visão histórico-epistemológica sobre GA permitiu questionar a transposição didática e em seguida repensar o ensino de GAP em termos de situações fundamentais.

3.1 A Geometria Analítica (GA): panorama histórico

Nesta sessão, nosso intuito é situar a GA na história da Matemática, tendo como objetivo central identificar a razão de ser dos objetos matemáticos de GA. A principal questão que de impôs como central para o estudo dessa geometria foi: qual a razão de ser da geometria analítica? Por que a geometria analítica existe? Como a geometria analítica se constituiu como setor da matemática? Como chegou a ser a GA que conhecemos nos dias de hoje?

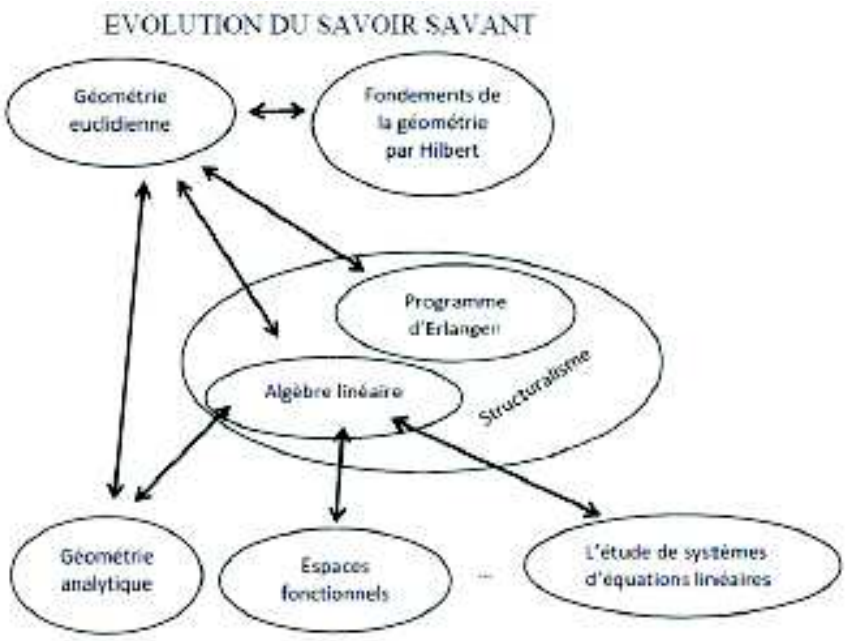
As respostas para essas questões são próprias ao desenvolvimento dos modelos que vai tecendo a trajetória da disciplina até o ponto em que propomos uma formação para estagiários de um curso de Licenciatura com ênfase em GAP.

De maneira geral, a GA situa-se no quadro geral de saberes matemáticos e está diretamente relacionada à álgebra linear. Há autores, por exemplo Nguyen (2017) que defendem claramente uma dependência entre a geometria analítica e álgebra linear e vice-versa. Ao mesmo tempo, o desenvolvimento dessa Geometria apoia-se diretamente na Geometria de Euclides, ao passo de trazer como avanço o uso de sistemas de coordenadas. Estas e outras questões, tentamos abordar neste capítulo.

Em princípio, apresentamos um esquema (figura 4) da evolução do saber científico que ilustra as inter-relações entre GA e outros saberes constituídos historicamente, de acordo com os estudos já realizados por Nguyen (2017). A partir do panorama histórico realizado por esta autora, propomos um estudo epistemológico que tem a GA no centro da discussão. Neste estudo, ressaltamos a GAP na tentativa de trazer uma discussão ecológica de seus objetos, tendo como marco decisivo as contribuições de Descartes e Fermat.

Nguyen (2017) trouxe os aspectos essenciais constituintes do MER desenvolvido em sua pesquisa sintetizados no esquema descrito segundo figura 4, destacando as relações dialógicas entre os campos de conhecimento.

Figura 4 - Esquema de evolução do saber



Fonte: Nguyen (2017, p. 68)

Em síntese, a autora destacou alguns aspectos presentes na evolução do saber para constituir seu MER, sobre a geometria de dois pontos, "*bi-point*" conforme o esquema da figura 4.

Primeiramente, a dupla relação entre a Geometria euclidiana e os fundamentos da geometria de Hilbert, ou seja, uma evolução do raciocínio dedutivo na Geometria de Euclides até os fundamentos da geometria de Hilbert.

Em seguida, destacamos, a partir da GA, uma estreita relação entre a álgebra linear e a geometria, a primeira oferecendo um quadro simbólico rigoroso para o estudo da segunda, que nutre a primeira de intuições fecundas. Dito de outra forma, significa dizer que a GA e álgebra linear se relacionam dialogicamente, assim como a GA e a Geometria euclidiana.

A álgebra linear se relaciona com outros aspectos cuja base é álgebra que vai justificar certas construções do ponto de vista algébrico, segundo o autor, os espaços funcionais e o estudo dos sistemas lineares.

As relações dialéticas entre as entidades que são evidenciadas na figura 4, no sentido de Nguyen (2017), referem-se as trocas de discursos. A autora ressalta que tais trocas supõem um salto no tempo, mas com efeitos de retroação.

A autora assevera que a relação dialética entre a geometria euclidiana e a álgebra linear se traduz na expressão "linearização da geometria e a geometrização do linear", que seria gerada pela GA.

Para constituição do nosso MER, retomamos a discussão histórica a partir dos estudos de Roque (2012). A autora apresenta uma visão crítica sobre as transformações na matemática ocorridas durante o século XVII, particularmente na geometria, com a introdução dos métodos algébricos. René Descartes e Pierre Fermat aparecem no centro dessas mudanças, que culminaram com a "invenção" do que chamamos hoje de Geometria Analítica.

Roque (2102) tenta mostrar que essas transformações matemáticas do século XVII estavam inseridas em um contexto mais amplo relacionado aos desenvolvimentos intelectuais com as mudanças que a sociedade passava, particularmente, o crescimento da valorização da técnica.

Para compreendermos a referência que buscamos para o estudo da GA, é importante visualizar o surgimento desse campo de estudo da matemática conectado ao contexto sócio-histórico-econômico da época, ainda que, não nos debrucemos sobre tais questões das ciências sociais.

O surgimento do saber matemático em cada período histórico traz importantes relações com o saber, tal como o conhecemos na atualidade, século XXI, ou período dito pós-moderno. Ao mesmo tempo, as transformações educacionais podem mostrar possíveis influências no desenvolvimento da matemática e da ciência.

A ciência europeia, por exemplo, é impulsionada, a partir século XII, pelo surgimento das primeiras universidades, Paris, Oxford e Bolonha. Os currículos eram baseados em sete artes liberais baseadas nos antigos "*trivium* (incluindo lógica, gramática e retórica) e *quadrivium* (aritmética, geometria, música e astronomia)". (ROQUE, 2012, p. 280). Além das universidades, também, se instalaram escolas urbanas. O surgimento dessas instituições traz importantes influências para aquisição e acesso ao saber científico, ou saber sábio, saber no sentido de um saber institucionalmente reconhecido.

Roque (2012) afirma que a matemática era estudada para possibilitar a compreensão das proposições aristotélicas sobre a lógica e a natureza. A geometria era tirada de Euclides e outras geometrias práticas. A autora destaca alguns movimentos que antecederam o surgimento da geometria analítica e que não guardam nenhuma relação com ela, como algumas vertentes tradicionais da história tentam sugerir. No século XIV em particular, foram elaboradas diversas teorias acerca do movimento usando-se a linguagem de razões e proporções, expressas pela matemática. Embora tenha havido um desenvolvimento de

práticas algébricas durante os séculos XV e XVI, a geometria ainda era o principal domínio da matemática e o aprendizado de qualquer pessoa deveria começar pelos *Elementos* de Euclides.

Fazemos um parêntese nas contribuições de Roque (2012) para tecer algumas observações. É inegável a contribuição do trabalho de Euclides, sua obra representa um importante marco para o estudo da geometria, como um todo. Nguyen (2017), em seu estudo histórico e epistemológico sobre geometria de dois pontos, traz uma discussão sobre aspectos da obra de Euclides, que julgamos relevantes para o nosso estudo, porque vão pôr em evidencia uma visão sobre os objetos matemáticos definidos por Euclides que mais tarde vão ser enxergados sob a perspectiva da GA.

A autora assevera que Euclides introduziu expressões como comprimento, largura, profundidade, linha e outros, desde o início como se já fosse conhecido, por todos, o significado geométrico dessas coisas.

De acordo com os estudos desenvolvidos pelo IREM[17] (1982), a obra “os Elementos de Euclides” é, em primeiro lugar, uma teoria de grandezas geométricas, definidas a partir de dados empíricos. A problemática euclidiana não é construir a geometria a priori, mas, a partir de dados iniciais, apresentar definições que se referem a objetos e suas respectivas funções. Para algumas delas, particularmente, as primeiras definições, o objetivo é dar uma descrição mesmo vaga, que explicitar um status existencial ou operatório.

Nguyen (2017) afirma que as asserções de Euclides são essencialmente definições descritivas que são referências para esclarecer outras definições, ou seja, cada definição fundamenta uma outra. Nessas definições, nenhuma característica operatória que poderia se tomar um raciocínio dedutivo é evidente, por exemplo: “um ponto é o que não tem partes” ou uma “linha é um comprimento sem largura” (IREM, 1982, p.14)

No documento do mesmo instituto, afirma-se que ao lado dessas definições, Euclides utilizou outro tipo de definição que consistem em dar um nome a um objeto definido por um objeto construído ou uma propriedade característica. São essas definições, por exemplo, a definição do círculo, que vão permitir engajar as deduções.

> Um círculo é uma figura plana, cercada por uma única linha, chamada circunferência, e de tal forma que todas as retas, chamadas raios,

[17] IREM – Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques

> tomadas nessa circunferência, de um certo ponto situado no interior da figura, são iguais entre si. Esse ponto é chamado centro do círculo. (IREM, p. 15,1982, tradução nossa)[18]

Essas definições, como as dos triângulos, quadriláteros etc., são, mais tarde, chamadas por Pascal de definições nominais, que são somente imposições de nomes a coisas claramente conhecidas (NGUYEN, 2017).

A autora afirma que essa forma desenvolvida pelas epistemologias das matemáticas, essas definições operatórias como definições descritivas, são consideradas de uma forma que nós distância do ponto de vista atual. As definições de Euclides, os postulados e axiomas também têm funções diferentes nas matemáticas contemporâneas.

Sobre os processos de ensino e de aprendizagem dos objetos matemáticos na atualidade, no que se refere às definições, axiomas e postulados da obra de Euclides, por exemplo, é de fundamental importância que os sujeitos envolvidos nesses processos entendam o que são tais objetos do ponto de vista da geometria sintética (geometria de Euclides) e como se comportam os mesmos objetos do ponto de vista da geometria analítica. Isso quer dizer que existem técnicas que a geometria analítica permite desenvolver, e não são possíveis na geometria euclidiana, ideia chave que tentaremos mostrar no decurso deste capítulo.

Em geral, não só as ideias matemáticas ou as definições de Euclides que diferem das noções contemporâneas, mas, também, todas as noções de ciência antiga. Nesse sentido, Roque (2012) crítica à tese de uma revolução científica no século XVII, a qual sugere que a noção de ciência, que temos atualmente, estava presente naquela época. Ela argumenta que o termo “ciência” possui conotações modernas que são inadequadas para compreender o pensamento daquele século. E ainda assevera, que as principais manifestações da matemática do movimento, chamado de Revolução Científica, foram a geometria cartesiana e o cálculo infinitesimal. Esse movimento, além do seu pensamento mecanicista, foi associado à expansão de uma ciência experimental à matematização da natureza, então atribuídas a Galileu.

---

[18] Un cercle est une figure plane, entournée par une seule ligne, appelée circonférence, et telle que toutes les droites, appelées rayons, menées à cette circonférence, d’un certain point situé à l’intérieur de la figure, sont égales entre elles. Ce point se nomme le centre du cercle. (IREM, p.15)

Compreender como se davam os fenômenos naturais foi uma ideia que adquiriu características próprias e associada à quantificação e medidas, e a evolução das técnicas. É nesse contexto de ciência que se insere o trabalho de Descartes (1596-1650), e os estudos que mais tarde são chamados de Geometria Analítica. (ROQUE, 2012).

Destacamos que o sistema de coordenadas, chamado de “cartesiano” foi introduzido pela geometria de Descartes para o tratamento algébrico dado a problemas geométricos, destaca-se, também, os trabalhos geométricos de Fermat e suas discussões com Descartes (ROQUE, 2012).

3.1 A obra de Descartes e a geometria analítica do século XVII

Tomando a obra de René Descartes como um marco da matemática do século XVII, buscamos os elementos essenciais para compreender essa obra. Identificamos esses aspectos no texto de Buhler, Gregoire,Hallez, Jozeau, Kneerr, Perrineau, Plane e Verley (1990), trabalho desenvolvido IREM, de Paris VII, apoiados no texto original de Descartes (1637) e da tradução latina de 1649, além do próprio texto de Descartes, então editado e publicado por Ian Maire (1637) e no estudo epistemológico de Nguyen (2017). Apoiamo-nos nas asserções desses autores para trazer uma discussão a respeito de alguns aspectos da obra de Descartes, os quais julgamos relevantes no percurso histórico do saber que se constituiu no que conhecemos atualmente como a GA.

Esses atores que discutem a obra de Descartes, especialmente sobre o discurso do método, estão, globalmente, de acordo, que a obra tanto quanto para nós, como para os contemporâneos da época, ser um livro de leitura difícil, pois considera como um elemento essencial de seu método que o leitor deve estar ativo, como se diria atualmente, não se contentar com indicações sumarias, ou resumidas sobre demonstrações.

As principais publicações de René Descartes foram: meditações metafisicas (publicada em latim em 1641 depois em francês 1647), os princípios da filosofia (publicada em latim 1644 depois em francês 1647), as paixões da alma (1649). As publicações póstumas são: a álgebra da música (1650), o homem (1662), o mundo (1664) e a Mecânica (1668). O discurso do método (1637) é um dos textos decisivos para o pensamento científico do século XVIII. (BUHLER et al, 1990).

De acordo com Buhler et al (1990), o discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade dentro das ciências, se propõe essencialmente a procurar regras que permitam construir uma ciência cuja certeza é igual à da matemática, depois de deduzir uma metafisica racional, conciliando o homem com Deus. Se apoia em quatro preceitos simples: o primeiro diz que não se admite uma verdade absoluta, é o princípio da *dúvida cartesiana*; o segundo é dividir cada problema em problemas particulares, possíveis de resolver, é a *análise*; o terceiro conduzir nosso pensamento do mais simples ao mais complexo, é a *síntese* e o quarto princípio é fazer uma enumeração completa dos dados de um problema e dos elementos de sua solução para estar certo de que a solução é correta, é a *verificação*.

Atualmente, a influência do pensamento filosófico de Descartes pode ser percebida a partir desses quatro princípios e estão plenamente presentes, seja nos processos de resolução de problemas matemáticos, seja no pensamento científico em geral.

O discurso do método é composto por três obras: « Dioptriqve, Les meteores et La géométrie », destacamos a publicação de « La Géométrie », muito importante para a história da matemática. O texto original encontra-se disponível na biblioteca nacional da França, e data de 1637, sua primeira publicação, feita por Ian Maire, de acordo com a ilustração na figura 5.

A tradução latina de *a geometria*, (1649) é seguida de importantes comentários, realizados pelo matemático holandês F. Van Schooten (1615-1660), que, após visita à Paris, recomendada por Descartes, tomou conhecimento dos manuscritos de Viète e de Femat. Em 1643 preparou uma edição coletiva das obras matemáticas de Viète, publicadas em 1643 e em 1649, a tradução latina de a Geometria. Esse texto representava quase o dobro do texto original de Descartes. A segunda edição é formada por dois volumes que aparecem em 1659 e 1661, respectivamente. O segundo volume contém tratados de matemática que foram diretamente inspirados pelo método cartesiano. (BUHLER et al 1990)

Figura 5 - Capa da obra de Descartes Discurso do Método

Fonte: Ian Maire (1637)

No livro primeiro, no qual se encontra o começo do celebre trabalho « la Géométrie », explica que por meio de construções geométricas sobre linhas (ou de outro modo, comprimento) é possível realizar todas as operações de Aritmética, isso graças a uma verdadeira inovação para a época, a utilização de uma *unidade de comprimento.*

Diferentemente de Euclides, para o qual uma distância é uma grandeza, uma abstração geométrica, não é um número, para Descartes todos os comprimentos são considerados como número, que nada mais são do que sua medida relativamente à unidade escolhida. Euclides também considerou como possível as operações com comprimentos, que podem ser realizadas com régua e compasso. (BUHLER et al, 1990)

Euclides não utiliza multiplicação de grandezas, pois muda de gênero, ou seja, não especifica nenhuma relação entre números e grandezas, pois as grandezas não são os números e não se pode lhe atribuir quantidade-medida (NGUYEN, 2017)

De acordo com Buhler et al (1990), a principal contribuição de Descartes é a numeralização da geometria, pela escolha de uma unidade de comprimento, ou seja, uma unidade de medida. Identificou os comprimentos com a Aritmética, para realizar operações de adição, subtração, multiplicação divisão e raiz quadrada, escapando da regra de homogêneos de Viète.

Assim, designou as quantidades geométricas pelas letras a, b, c, quantidades conhecidas e x, y, z por quantidades desconhecidas. Além disso,

ele reduz os problemas geométricos a problemas algébricos de resolução de equações, introduzindo, em particular com esse objetivo, o método de coordenadas, que fez dele o criador da GA. (BUHLER et al, 1990)

De fato, o método de coordenadas permite o tratamento de problemas de Geometria por métodos da álgebra ou inversamente, dar soluções geométricas a problemas de álgebra. Além disso, curvas e construções geométricas permitem resolver graficamente equações, este último método está presente no livro terceiro, a resolução completa de equações de terceiro e quarto grau, pela intersecção de um círculo com uma parábola.

Segundo Buhler et al (1990), apesar de construções análogas já serem conhecidas pelos árabes, foi Descartes que empregou sistematicamente notações literais, escreveu o primeiro tratado moderno sobre a teoria das equações.

O livro primeiro é consagrado aos problemas ditos *planos*, significa dizer que incluem somente a *reta* e o *círculo*. Após expor o método para esses problemas, propõe uma aplicação. (BUHLER et al, 1990).

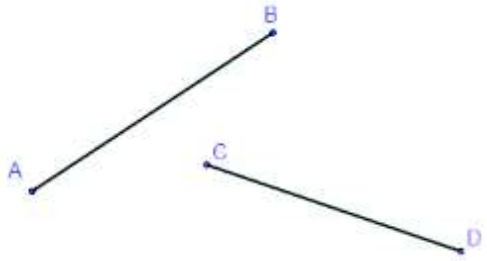
No segundo livro (discurso segundo), « De la Nature des Lignes », ou seja, *a natureza de linhas*, Descartes apresenta uma classificação para *curvas* de acordo com o grau de sua equação, e identifica particularmente as *cônicas* como sendo curvas de segundo grau, para as quais ele apresenta uma classificação sistemática. Em seguida, estuda analiticamente *ovais,* ditos por Descartes, curvas do quarto grau que intervêm na óptica. Desta maneira a Geometria, segundo os autores, é reduzida à Álgebra. Talvez está seja uma das razões para alguns contemporâneos defenderem uma subordinação da GA à Álgebra Linear, uma afirmação que em nosso ponto de vista precisa ser aprofundada, e que talvez este estudo epistemológico possa efetivamente elucidar tal afirmação.

No terceiro livro: « *De la construction des problèmes solides ou plus que solides* », ou seja, a construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos, inicia por um tratamento das equações algébricas, em particular das transformações dessas equações e das construções geométricas das soluções

No livro I: A Geometria, Descartes apresenta todas as operações da aritmética por construções geométricas: adição, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada.

De acordo com o dicionário francês TLFi[19], traduzimos « longueur » como o mesmo significado que distância, ou comprimento de uma linha, ou seja, a maior dimensão horizontal, ou ainda a dimensão que está dentro de sua orientação. Também o dicionário explica como distância, extensão que corresponde ao comprimento de um objeto. Esse conceito vai influenciar diretamente a noção matemática da atualidade que temos a respeito de distância entre dois pontos, por exemplo. No entanto, a palavra distância, « distance » no estudo da geometria analítica vai aparecer bem mais tarde, mas, ao que parece, pode ser a ideia chave para todo desenvolvimento posterior de GA.

Figura 6 -Representação da a dição de duas distâncias



Fonte: Adaptado de Buhler (1990, p. 115)

É notório que a dimensão será horizontal, em relação a um determinado referencial, algo que no texto dos autores e mesmo na definição do TLFi, não está evidenciado.

De acordo com os autores inicialmente considera-se as operações de adição e subtração de dois “comprimentos”. “Aqui está dois comprimentos AB e CD: faz-se como um geômetra grego as construções dos segmentos $AB + CD$ e $AB - CD$” (BUHLER ,1990, p. 115, tradução nossa).

No texto ilustrado na figura 7, início do livro que mais nos interessa no Discurso do Método, “A *Geometria”*. Descartes explica, por meio da utilização de uma unidade de distância, a realização de todas as operações da Aritmética.

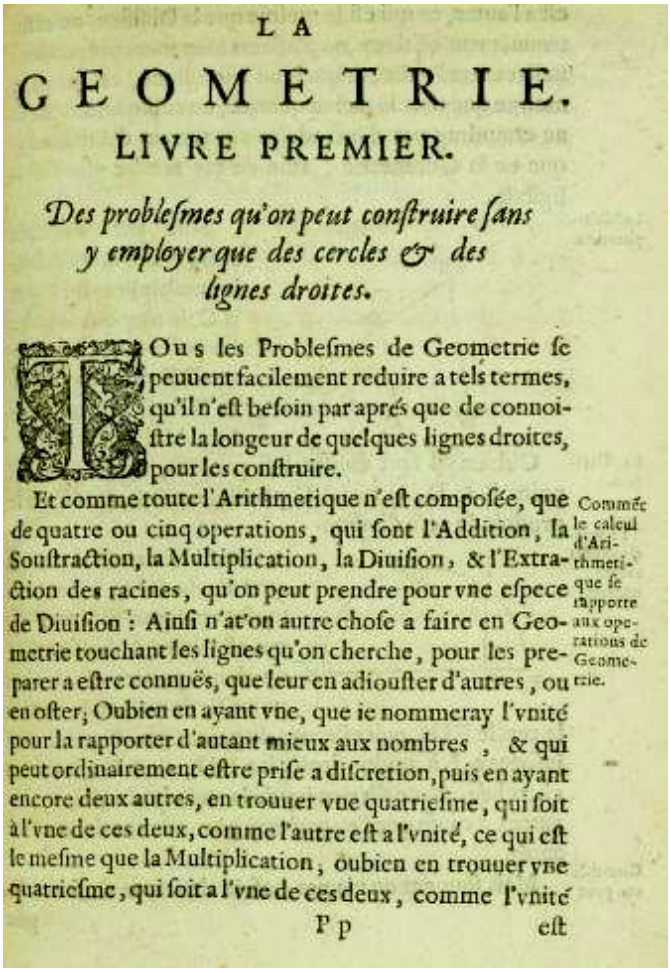
Diferentes autores, conforme já foi dito, relatam a dificuldade de compreensão desse texto, além disso compõe-se de um francês latino, com letras arcaicas. O que torna necessário uma tradução para o francês moderno.

Nesse sentido, além de buscarmos o texto original, a releitura por meio de outros autores nos possibilita uma melhor compreensão das ideias, principalmente nos aspectos relevantes da obra para a nossa pesquisa, entre

[19] La plus grande dimension horizontale (d'un objet, d'une surface, d'un volume) ou la dimension qui est dans l'axe de son orientation […]. (CUVIER, *Anat. comp.,* t. 2, 1805, p. 129).
Distance, étendue correspondant à la longueur d'un objet (HUGO, *Misér.,* t. 2, 1862, p. 436). Disponível em : <http://atilf.atilf.fr/dendien/scripts/tlfiv5/visusel.exe?12;s=2957986995;r=1;nat=;sol=1

esses aspectos está a noção primitiva de distância entre dois pontos, que claramente não era definida como conhecemos na atualidade, mas a ideia central está presente na obra de Descartes.

Figura 7 – Começo da publicação - A Geometria de Descartes



LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion: Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter; Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comme le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Pp eſt

Fonte: Ian Maire (1637, p. 297-298)

Conjecturamos, portanto, que o conceito de distância entre dois pontos, mais tarde distância entre dois pontos no plano cartesiano e no espaço, parece compor a razão de ser de GA. Evidentemente, a ideia de distância, de medida de um comprimento, está presente na vida da humanidade desde os egípcios e mesopotâmios e outros povos antigos. Destacamos aqui, a noção de distância do ponto de vista *cartesiano*, ou seja, a partir das coordenadas dos ditos pontos que delimitam tal distância. Além disso, ainda pode-se operar com essa distância, e escrevê-la por meio de uma equação, como se faz na contemporaneidade. Nesse sentido, esta noção evoluiu e vive no sistema educativo da forma como conhecemos, como veremos mais precisamente no decorrer do texto.

Como já foi dito, graças a utilização de uma unidade de comprimento é possível realizar as operações da Aritmética. (adição, subtração, multiplicação, divisão, e extração de raiz) como afirma Ian Maire:

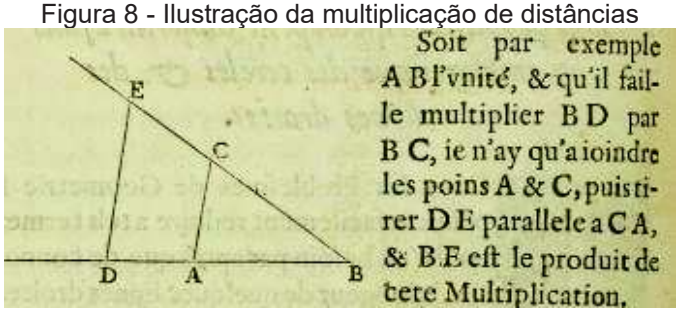
> Todos os problemas da geometria podem ser facilmente reduzidos a tais termos, que é necessário depois conhecer apenas o comprimento de algumas linhas retas, para construí-las. E como toda a Aritmética é composta de apenas quatro ou cinco operações, que são adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz, que podem ser tomadas para uma espécie de divisão[...] (IAN MAIRE, 1637, p. 297, Tradução nossa)[20]

Neste trecho da obra atribui-se uma unidade de medida, o que seria um valor conhecido, adiante veremos que para valores conhecidos será atribuído letras minúsculas do alfabeto a, b, c, ...etc.

Assim, concluímos que os segmentos AB, CD segundo a figura 6, poderiam ser representados com suas unidades de comprimento, por exemplo, $AB = a$ e $CD = b$. A adição $AB + CD$ e a subtração $AB - CD$ poderia ser reescrita como $a + b$ e $a - b$, respectivamente. Esta representação algébrica, ao que parece, pode ter influenciado a forma como conhecemos atualmente a adição de segmentos de reta, de vetores sendo conhecido seus comprimentos (módulo), a, b, c, ...etc. Inicialmente uma construção na reta (linear) e em seguida atribuindo coordenadas aos pontos extremos dos segmentos, para o plano.

No texto representado na figura 8, Descartes ilustra a multiplicação. Seja AB a unidade, e BD deve ser multiplicado por BC, temos apenas que unir os pontos A e C, depois desenhar DE paralelamente a CA, e BE é o produto desta multiplicação.(IAN MAIRE, 1963, p.298)

Figura 8 - Ilustração da multiplicação de distâncias



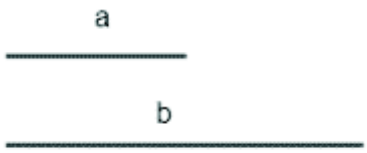
Fonte: Ian Maire (1637, p. 298)

[20] Ous les Probleſmes de Géométrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoitre la longueur de quelques lignes droites, pour les conſtruire. Commét le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie. Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : (IAN MAIRE, 1637, p. 297).

Se tomarmos $BE = a$; $BD = b$ e $BC = c$ podemos afirmar que, na figura a igualdade das razões $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$, é $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$, visto que $AB = 1$, pois foi tomado como uma unidade de medida, deduz-se: $a = b.c$.

Segundo Buhler et al (1990), usando o método de Descartes e uma "distância" unitária escolhida, pode-se construir o produto dos comprimentos a e b representados na figura 9:

Figura 9 - Produto de duas distâncias



Fonte: Buhler et al (1990, p.118)

Em seguida, procurar as medidas aproximadas, relativamente à unidade escolhida de comprimento a e b , bem como o comprimento obtido BE. Se a construção for correta $BE = a\,.b$. A distância obtida depende da unidade escolhida. (BUHLER et al ,1990, p.118)

Para a divisão, Descartes propõe que: "para dividir BE por BD, unindo os pontos E e D, segundo a figura 8, desenha-se AC paralelo a DE, e BC é o produto dessa divisão". (IAN MAIRE, 1637, p.298)[21]

Analogamente à multiplicação, temos que $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{AB}$ se $\frac{a}{b} = \frac{c}{1}$, então podemos deduzir que: $c = \frac{a}{b}$, é o quociente desta divisão. Esta técnica se apoia em uma teoria das razões, que permite multiplicar os meios e os extremos da igualdade de duas razões.Em seguida, Descartes propõe a extração de raiz quadrada, inspirado na construção classica de média propoporcional, segundo a figura 10.

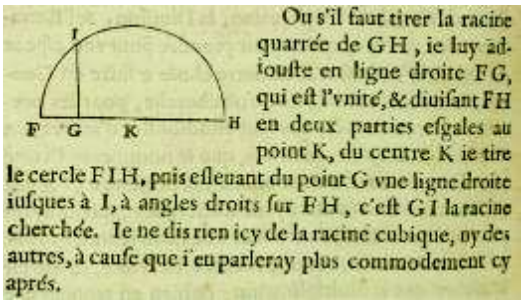
Para tirar (calcular, extrair) a raiz quadrada de GH, adiciona-se a GH uma linha reta FG, que é a unidade, e dividindo FH em duas partes igual no ponto K, do centro K, desenha-se um o círculo FIH, então levando do ponto G uma linha reta até I, formam-se ângulos retos sobre FH, GI a raiz quadrada procurada. (IAN MAIRE, 1637)

Podemos então afirmar que: o quadrado da altura GI vem do ângulo direito do triângulo retângulo formado por FIH e é igual ao produto dos comprimentos (distâncias) FG x GH, GI^2 = FG × GH = 1× GH = GH, ou seja, $\mathrm{GI} = \sqrt{\mathrm{GH}}$.

[21] Ou bien s'iſ faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division. (IAN MAIRE, 1637, p. 299)

Nesta propriedade, (figura 10) observa-se que se pode determinar um triângulo FIH inscrito em um semicírculo é retângulo em I.

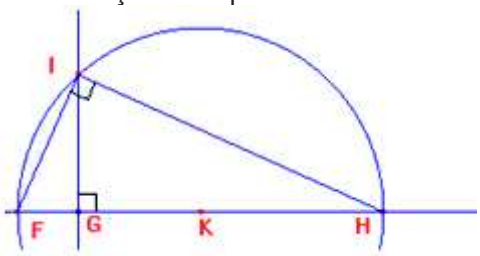
Figura 10 - Ilustração de Descartes para da raiz quadrada



Fonte: Ian Maire (1637, p. 298)

As tangentes dos ângulos H e Î dos triângulos retângulos semelhantes IHG e FIG são iguais, segundo a figura 11, $tan\, H = \frac{GI}{GH}$; $tan\, \hat{I} = \frac{FG}{GI}$, dai a igualdade de relações== $\frac{GI}{GH} = \frac{FG}{GI}$, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Logo $\mathrm{GI}^2 = \mathrm{FG}\,.\,\mathrm{GH} = 1 = 1.\,\mathrm{GH} = \mathrm{GH}$, GI é a média geométrica de FG e GH dode $GI = \sqrt{GH}$. Está última construção foi atribuída a Euclides, antes de Descartes[22].

Figura 11- Ilustração atual para o modelo de Descartes



Fonte: Descartes, 2018

Com relçaão à extração de raiz quadrada e média proporcional, segundo: Buhler (1990, p. 120), temos que "dados a e b dois números reais estritamente positivos, x é a média proporcional entre a e b se e somente se $a, x, x,$ e b formarem uma proporção em $\mathbb{R}^{+*}$". Para esta construção Descartes se inspirou na construção de Euclides de média proporcional entre duas linhas dadas.

Além das quatro operações fundamentais e da raíz quadrada, Descartes também propõe a extração da raiz cubica.

[22] Disponível em < http://debart.pagesperso-orange.fr/geometrie/geom_descartes.html#introduction> acesso: nov/2017

Decartes propõe a soma de duas “linhas” BD + GH , tomado cada uma como letras minusculas: $BD = a$ e $GH = b$ e escrever a soma $a + b$, a subtração $a - b$, a multiplicação de uma por outra ab e a divisão $\frac{a}{b}$.

Para tirar a raíz quadrada de $a^2 + b^2$, utiliza-se $\sqrt{a^2 + b^2}$, e $\sqrt{Ca^3 - b^3 + abb}$ para tirar a raíz acúbica $a^3 - b^3 + abb$, onde se denota por a^2 ou b^2, ou algo semelhante, concebe-se geralmente que todas as linhas são simples, ainda que para usar os nomes usados na álgebra nomeia-se quadrados e cubos etc. (IAN MAIRE, 1637)

A constante $C = 1$ é utilizada para respeitar a regra homogênea. Multiplicar ou dividir pela unidade para obter a mesma dimensão em todo os termos, Descartes propõe atribuir “nomes” às linhas, podemos dizer que atribui valores reais $AB = 1;\ GH = a$ e $BD = b$. Ao que parece, o que Descartes chama de linhas geométricas têm o status de variáveis reais ou incógnitas, isso se confirma na continuação do estudo que introduz como se chegar a equações que permitem resolver problemas.

Para resolver qualquer problema, o primeiro passo é nomear todas as linhas que pareçam necessárias para construir, tanto as que são conhecidas ou desconhecidas. Não deve-se considerar nenhuma diferença entre linhas conhecidas e desconhecidas, deve-se percorrer a dificuldade de acordo com a ordem que aparecem e mais naturamente qual maneira elas dependem uma da outra, até que se encontre uma maneira de expressar a mesma quantidade de duas maneiras. Esse procedimento de “organizar” as quantidades de duas maneiras e compará-las, por meio da igualdade é o que se Descartes chama de equação, justificando que esses termos dessas duas maneiras são iguais uma em relação a outra. (IAN MAIRE, p. 300, 1637)

Ao mesmo tempo na resolução de um dado problema , deve-se encontrar tantas equações, que supõe-se ser de linhas que eram desconhecidas. Se não se encontra tantas equações, e se nada foi omitido, isto atesta que ela não é totalmente determinada. E quando pode-se tomar com discrição linhas conhecidas por todas as desconhecidas às quais nenhuma equação corresponde. (IAN MAIRE, p. 300, 1637)

Aqui aparece a clara relação direta entre uma linha e sua representação algébrica por meio de equações, baseada em linhas desconhecidas.

Descartes toma a comparação para explicar as ditas “linhas” desconhecidas, e isolando em um mebro da igualdade, ou o quadrado, ou o cubo, etc, e explica ainda:

> [...] Igual ao que acontece pela adição ou subtração de duas ou mais outras quantidades, das quais uma é conhecida, e as outras são compostas de algumas médias proporcionais entre a unidade e o quadrado, ou cubo, ou quadrado de quadrado, etc., multiplicado por outro conhecido.Seja igual ao que se produz pela adição ou subtração de duas ou várias outras quantidades, cuja uma só é conhecida, e as outras são compostas de quaisquer medias proporcionais entre a unidade e este quadrado, ou cubo, ou quadrado de quadrado, etc., multiplicados por outros conhecidos. O que eu escrevo da seguinte maneira[23]: $z = b$; ou $z^2 = -az + b^2$; ou $z^3 = +az^2 + b^2z - c^3$; ou $z^4 = az^3 - c^3z + d^4$ etc. (IAIN MAIRE, p.301, 1637, tradução nossa)

Toma-se Z como a quantidade desconhecida e atribui o valor b, ou o quadrado de Z, igual ao quadrado de b menos a multiplicado por Z; ou o cubo de Z igual a multiplicação de a pelo quadrado de Z somado o quadrado de b multiplicado por Z menos o cubo de c, e assim outros.

Em síntese, Descartes quando as primeiras letras do alfabeto (*a, b, c,)* para linhas conhecidas, e as últimas (*x, y, z*) para as linhas desconhecidas. E afirma que se pode sempre reduzir todas as quantidades desconhecidas a uma somente, quando o problema pode ser construído por círculos e linhas retas, ou também seções cônicas.

Destacamos aqui as construções iniciais do trabalho de Descartes em “a geometria”, que inspiram a razão de ser de GA, a partir desses princípios que foram evoluindo até chegar ao que conhecemos hoje. Podemos inferir a partir do texto original de Descartes que as primeiras ideias de GA, ou a razão de ser dessa geometria, estão relacionadas à noção de distância (comprimento de uma linha), retas, chamadas de linha retas, a inovação da época: o uso de unidade de medida para operar com tais distâncias e a noção de segmentos proporcionais, que embora já trabalhada por Euclides, se agrega às operações mostradas por Descartes. Daí também surgiu a noção de sistema de coordenadas e de eixos coordenados.

---

[23] […] soit égal à ce qui se produit par l'addition ou soustraction de deux ou plusieurs autres quantités, dont l'une soit connue, et les autres soient composées de quelques moyennes proportionnelles entre l'unité et ce carré, ou cube, ou carré de carré, etc., multipliées par d'autres connues. Ce que j'écris en cette sorte : $z = b$; ou $z^2 = -az + b^2$; ou $z^3 = +az^2 + b^2z - c^3$; ou $z^4 = az^3 - c^3z + d^4$. (IAN MAIRE, 1637, p.301)

Todas essas ideias são, pós Descartes, explicadas de forma mais clara, visto que vários dos trechos da obra carecem de explicações. Conforme já explicitamos, é uma obra de difícil compreensão, por esta razão trazemos autores mais contemporâneos que se debruçaram sobre a obra e as origens de GA. A leitura desses autores nos permitiu elucidar de forma mais clara essas ideias. Nesse sentido, buscamos outros textos que explicaram o porquê da GA.

Voelke, Piccard e Lausanne (2014) nos trazem uma síntese que resume um pouco do que já abordamos e avança mais além. Esses autores, conforme já expusemos, atribuem o surgimento da geometria analítica à obra « la géométrie » de René Descartes e ao trabalho de Pierre Fermat (1679) « l'Introduction aux lieux plans et solides », ou seja, *A introdução de lugares planos e sólidos*. O texto de Fermat, está em latim e foi redigido por volta de 1636, e divulgado por matemáticos parisienses, mas publicado somente como obra póstuma.

Segundo Voelke et al (2014), o principal objetivo de Descartes, é resolver problemas geométricos, seu método consiste em traduzir em equações o enunciado de um problema, resolver essas equações e finalmente procurar uma solução. Descartes resolveu em particular o célebre problema de Papus, utilizando uma técnica nova na época, que consistia em identificar pontos do plano por coordenadas. Um lugar então representado por uma equação com duas incógnitas.

3.1.1 Problema de Papus e o sistema de coordenadas

O problema de Pappus, solução nova (em 1637) para um problema antigo, vai permitir à Descartes explicitar suas teorias sobre soluções, para régua e compasso e a natureza de curvas planas. No problema, ele aplica seu método: supor o problema resolvido; colocar o lugar em forma de equação; analisar a equação (aqui ele mostra que as soluções são as cônicas).

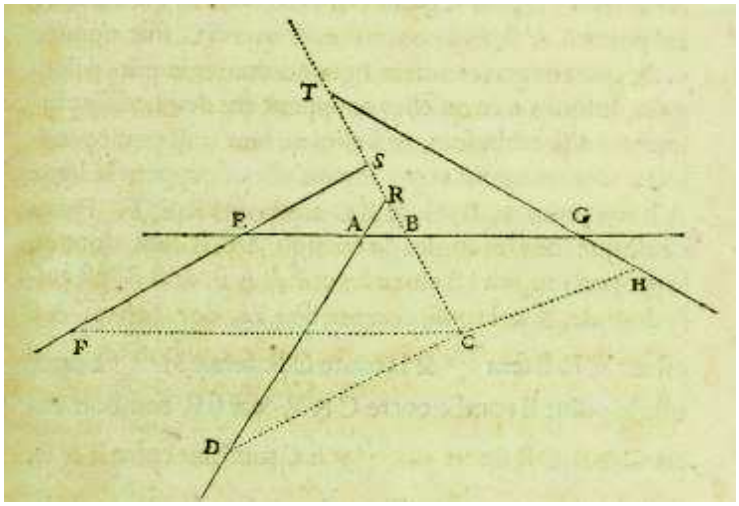
Este problema, tendo por base a ilustração da figura 12, para três ou quatro retas é a procura do lugar geométrico de um ponto C tal que algumas condições sejam verificadas: o produto das distâncias de C a duas retas seja igual ao produto das distâncias de C à duas outras retas para o problema de quatro retas; o produto das distâncias de C entre as retas seja igual ao quadrado das distâncias de C à terceira reta para o problema de três retas.

Os geômetras gregos não falam do produto de distância, mas dos retângulos que contém (CB, CF) de área igual àquele que contém (CD, CH). Este é o lugar, dito para quatro retas, conjunto dos pontos C, tal que $CB \times CF = CD \times CH$. Se houver apenas três retas, o retângulo (CB, CF) é igual ao quadrado descrito sobre CD o lugar do ponto C tal que $CB \times CF = CD^2$.Estes lugares são um conjunto de duas cônicas, uma das duas curvas foi esquecida por Descartes.

Na formulação de Pappus, o problema foi generalizado supondo que os segmentos CB, CD, CF e CH não são perpendiculares às quatro retas, mas conduzidas, a partir de C , sob os ângulos dados. Esses lugares são sempre as cônicas. Podemos considerar mais que quatro retas, então os lugares obtidos não são cônicas.

Descartes utiliza as relações de similaridade em vez de distâncias e procura o lugar geométrico do ponto C, segundo a figura 12, cujos segmentos conduzem a esse ponto para cada uma das retas seguintes das direções dadas têm os produtos iguais.

Figura 12 - Ilustração problema de Papus



Fonte: IAN MAIRE (p. 309, 1637)

Segundo Voelke et al (2014), Descartes propôs a resolução do problema de Papus, utilizando uma técnica que consiste em localizar os pontos do plano por coordenadas. Um lugar, ou seja, uma curva é representada por uma equação com duas incógnitas. Esta técnica permite estudar as propriedades de uma curva a partir de sua equação, é considerada atualmente como a característica constitutiva da geometria analítica, mesmo que não seja, o elemento fundamental do livro de memórias de Descartes (VOELKE et al, 2014).

De acordo com Voelke et al (2014), esta característica se encontra no trabalho de Fermat, que introduz as coordenadas no plano e considera que uma equação de duas variáveis representa um lugar geométrico, em seguida mostra que uma equação de primeiro grau representa uma reta e a de segundo grau, um círculo ou uma cônica.

De acordo com os autores essa caraterística se encontra na obra de Fermat, que introduz coordenadas no plano e considera que uma equação com duas incógnitas representa um lugar, em seguida, mostra que uma equação do primeiro grau representa uma linha e uma equação do segundo grau um círculo ou uma cônica

Esses autores afirmam que a geometria analítica de Descartes e Fermat tem pontos em comum que são ensinados no ensino fundamental. Há um eixo de coordenadas sobre o qual a origem é fixa, as coordenadas são grandezas no sentido de Euclides (segmentos) e não nomes. As coordenadas negativas não foram abordadas nestas obras.

Em termos da tradição antiga, os dois matemáticos trabalham com expressões homogêneas, mesmo que Descartes mostra que isto não é necessário, introduz- se uma unidade de comprimento.

Em «La Géométrie», acha-se uma breve alusão que uma equação do primeiro grau representa uma reta. De acordo com Voelke et al (2014), a denominação “equação cartesiana de uma reta” não é, portanto, justificada, seria mais correto, “equação fermatiana”. Os autores afirmam que Fermat começa de fato seu memorial estudando “o lugar geométrico” que é representado por uma equação do primeiro grau.

Após Descartes e Fermat, a geometria analítica vai se desenvolvendo durante a segunda metade do século XVII e em seguida durante todo século XVIII. A identificação de coordenadas a números, bem como a consideração de coordenadas negativas vão progressivamente se impondo e se estabelecem em meados do século dezoito. A GA no espaço, também, foi desenvolvida nesta época.

As figuras estudadas pelos geômetras, entretanto, permanecem, em primeiro lugar, as curvas ou superfícies, não é muito comum encontrar reta, círculo, plano ou a esfera. Esta situação vai aparecer bem, no segundo volume do tratado de Leonhard Euler « *Introductio in analysin infinitorum »*. O livro apresenta uma síntese dos resultados de geometria analítica da época.

Apesar de Euller estabelecer a equação da reta, não resolve problemas envolvendo apenas esta figura. Ele afirma que a natureza da “linha” é já bem conhecida pelos Elementos da geometria e passa imediatamente ao estudo das curvas de 2º grau. Para Euller, a reta e o plano são figuras muito simples para prender a atenção dos geômetras da época. Esta situação vai se estender até o fim do século XVIII, com a primeira publicação importante de Joseph-Louis Lagrange (1773) intitulada: *soluções analíticas de problemas de pirâmides triangulares*[24], completado no final do século XVIII e início do século XIX com os trabalhos e Gaspard Monge.

3.2 A Geometria Analítica no século XIX (1801 – 1900)

O final do século XVIII e início do século XIX foram marcados pelos estudos de Gáspar Monge com a geometria descritiva e *aplicações de análise à geometria*. A expressão geometria analítica não aparece antes do início do século XIX, o termo utilizado era: «application de l’analyse à la géométrie », ou seja, *aplicação da análise a geometria*. Monge exerceu uma influência decisiva sobre a geração de matemáticos dando origem, particularmente, a uma série de manuais de geometria analítica publicados na França no início do século XIX, período em que surgiram publicações que foram consideradas os primeiros manuais modernos, inclusive os de Monge.

A Geometria Analítica, no século XIX, aparece de uma forma mais sistematizada e mais próxima daquela que conhecemos atualmente, por meio dos manuais escolares franceses. Até o século XVIII, como vimos, diferentes matemáticos se debruçavam sobre diferentes aspectos e objetos matemáticos dessa geometria; ao que parece, carecia de trabalhos que abordassem GA de uma forma mais completa, incluindo todos os objetos matemáticos estudados nesse campo.

Nessa perspectiva, trazemos os objetos de GA, relevantes para nossa pesquisa, o estudo dos sistemas de coordenadas, o estudo de ponto e de reta, por meio do manual de Charles August Briot (1817-1882)[25] e Jean Claude Bouquet (1819-1885)[26]. Um dos poucos livros desta época, que encontramos

---

[24] Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires.

[25] Charles Briot (1817-1882), disponível em:
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Briot.html>>, acesso em :jul/2018.

[26] Jean Claude Bouquet (1819-1885), disponível em :
<<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bouquet.html>>acesso em: jul/2018.

disponíveis, em nossa busca online. Esses autores figuram como personagens importantes no desenvolvimento do ensino de matemática na França no século XIX. De acordo com “Mathematical Association of America (MAA)”:

> August Briot (1817-1882) e Jean Claude Bouquet (1819-1885), foram dois matemáticos franceses particularmente lembrados por suas contribuições à análise. Em colaboração, eles produziram muitos trabalhos de matemática, um dos quais foi *Leçons de Géometrie Analytic* (1875). Este livro tornou-se muito popular e passou por várias edições europeias antes de uma 14ª edição ser publicada em inglês como *Elements of Analytic Geometry* em 1896. (MAA, 2019, tradução nossa).[27]

O livro trata especialmente de GA de forma mais completa. Ressaltamos, que nesta tese não temos a pretensão de analisar toda a obra de Briot e Bouquet (1860), visto que o volume de conteúdo a serem analisados extrapola os objetivos e o tempo disponíveis para esta pesquisa. Nesse sentido, analisaremos nesta obra o que trata da geometria analítica plana (GAP), especificamente abrangendo o estudo de sistemas de coordenadas e representação de um ponto, a reta e o círculo, bem como o que os autores apresentam como conceitos e ideias fundantes para compreensão da GA.

A obra, intitulada Lições de Geometria Analítica, foi publicada em sua terceira edição em meados do século XIX (1860). « *Leçons de Géométrie Analytique* », aborda uma definição para GA que atribui a Descartes as representações das figuras por meio de símbolos algébricos.

> A geometria analítica tem por objetivo o estudo de figuras por processos de cálculo ou de análise algébrica. Foi Descartes quem encontrou o meio de representar figuras por símbolos algébricos, e quem reduziu assim a ciência das figuras à ciência dos números. (BRIOT e BOUQUET,1860, p. 1, tradução nossa)[28]

Nessa obra, a GA é dividida em duas partes: na primeira, os autores ocupam-se e abordam as figuras planas, ou em duas dimensões, e, em seguida, as figuras no espaço. Antes de abordar as figuras no plano, a obra traz um capítulo introdutório no qual são definidos diferentes tipos sistemas de coordenadas, algo que não se vê nos livros atuais do sistema educativo brasileiro.

---

[27] Charles Briot (1817-1882) and Claude Bouquet (1819-1885) are two French mathematicians who are particularly remembered for their contributions to analysis. In collaboration, they produced many works of mathematics, one of which was *Leçons de Géometrie Analytic* (1875). This book became very popular and went through several Europeans editions before a 14th edition was published in English as *Elements of Analytic Geometry* in 1896.

[28] La Géométrie Analytique a pour but l’étude de figures par les procédés du calcul ou de l’analyse algébrique. C’est Descartes qui a trouvé le moyen de représenter les figures par des symboles algébriques, et qui a ramené ainsi la science des figures à la science des nombres. (p. 1)

Comparando essa obra, com os manuais escolares brasileiros do século XXI (até 2015), percebe-se que estes últimos trazem a GA, fazendo uma referência ao sistema, dito cartesiano, como sendo sistema de coordenadas ortogonais, no último ano do ensino fundamental.

Este sistema é abordado de forma superficial, e não é informado nos livros a existências de outros sistemas de coordenadas. No que se refere aos manuais escolares brasileiros, trataremos esse aspecto no capítulo 4.

3.2.1 Diferentes sistemas de coordenadas

Briot e Bouquet (1860) destacam a existência de uma infinidade de sistemas de coordenadas: coordenadas retilíneas, coordenadas retilíneas retangulares, coordenadas polares, coordenadas bipolares etc. Preliminarmente definem coordenadas de um ponto:

> Determina-se a posição de um ponto em um plano por meio de duas quantidades que nomeamos de coordenadas do ponto. Há uma infinidade de sistemas de coordenadas. Nós indicaremos somente os sistemas mais simples e mais frequentemente empregados (BRIOT e BOUQUET,1860, p.1, tradução nossa)[29].

Destacamos que, na educação básica brasileira, os estudos em GA limitam-se às coordenadas retilíneas retangulares e no ensino superior, especificamente na Licenciatura em Matemática, avança-se para outros sistemas de coordenadas, como por exemplo, as coordenadas polares, que abordaremos mais adiante no desenvolvimento do texto.

Os autores abordam os diferentes tipos de coordenadas e explicam o modelo para *coordenadas retilíneas*:

> Sejam duas retas ou eixos fixos X'X e Y'Y traçadas no plano; a posição de um ponto qualquer M do plano será determinado pela intersecção de duas retas G'G, H'H paralelas aos eixos. A posição da paralela H'H é definida por sua distância ao eixo Y'Y, distância computada sobre outro eixo; deve-se, além disso, indicar de qual lado do eixo está situado a paralela, seria será pelo sinal; convém atribuir a distância OP o sinal +, se ela recai sobre OX, o sinal -, se ela recai sobre OX'. Do mesmo modo, a posição da paralela G'G é definida por sua distância OQ ao eixo X'X, distância computada sobre o segundo eixo e tomada com o símbolo + ou -, seguinte que ele recai sobe OY ou OY´. Estes dois comprimentos OP e OQ, a que são atribuídos, respectivamente, o sinal conveniente, que determina assim a posição das duas paralelas,

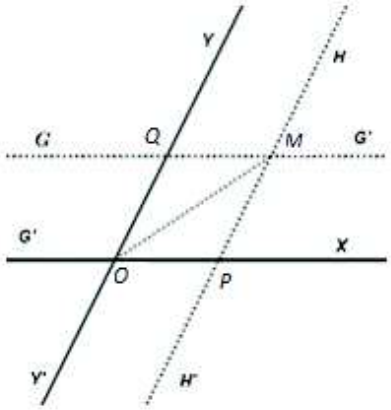
[29] On détermine la position d'un point dans un plan au moyen de deux quantités que l'on nomme coordonnées du point. Il y a une infinité de systèmes de coordonnés. Nous indiquerons seulement les systèmes les plus simples et les plus fréquemment employés (p.1).

> e por consequência o ponto M, são *coordenadas retilíneas* do ponto. (BRIOT e BOUQUET, 1860, p. 2, tradução nossa)[30]

Este modelo se aproxima do modelo que conhecemos na escola básica, por meio do estudo de funções reais.

Analisando a figura 13, percebe-se que os autores conseguem explicar de forma clara as ideias que aparentemente estavam por trás do que apresentou Descartes, em sua época, de forma ainda pouco evidente para seus leitores, porém mais tarde aprimorada. A análise da figura 13 evidencia a correspondência com sistema "cartesiano" que conhecemos.

Figura 13 - Ilustração de sistema de coordenadas retilíneas



Fonte: Adaptado Briot e Bouquet (1860, p.2)

Em seguida, os autores designam as letras **x** e **y,** respectivamente como abscissa e ordenada, as duas retas X'X e Y'Y, que são chamados de eixos coordenados, a primeira reta o eixo de x e a segunda o eixo de y, ainda definem o ponto **O** como origem das coordenadas de cada eixo. Os valores de x e y pode ser qualquer, ou seja, podem variam de $-\infty$ a $+\infty$, sendo assim pode-se obter todos os pontos do plano, cada par de valores fornece um e somente um ponto.

Nota-se, ainda, que as coordenadas do ponto M são as projeções da reta OM sobre os eixos OX e OY, a projeção de cada eixo, ou seja, a projeção sobre o eixo X como coordenadas x ela mesma, é o segmento OP, atribuído pelo sinal

---

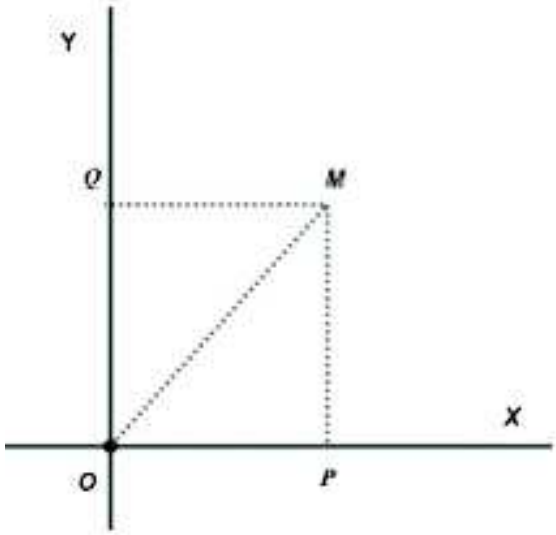
[30] Soient deux droites ou axes fixes X'X et Y'Y tracés dans le plan, la position d'un point quelconque M du plan sera déterminée par l'intersection de deux droite G'G, H'H parallèles aux axes. La position de la parallèle H'H est définie par sa distance OP à l'axe Y'Y, distance comptée sur l'autre axe ; il faut, de plus, indiquer de quel côté de l'axe est située la parallèle ; ce sera par le signe ; on convient d'affecter la distance OP du signe + si elle tombe sur OX, du signe − si elle tombe sur OX'. De même, la position de la parallèle G'G est définie par sa distance OQ à l'axe X'X, distance comptée sur le second axe et prise avec le signe + ou le signe −, suivant qu'elle tombe sur OY ou OY´.
Ces deux longueurs OP et OQ, affectées chacune du signe convenable, qui déterminent ainsi la position des deux parallèles, et par conséquent le point M, sont les *coordonnées rectilignes* du point. (p. 2)

positivo ou negativo, respectivamente na direção OX e na direção oposta OX'. Da mesma forma, a projeção sobre o eixo Y como coordenada y é o segmento OQ, atribuído do sinal positivo ou negativo, respectivamente na direção OY ou na direção oposta OY'.

Do estudo de coordenadas retilíneas, aparece a especificação de *coordenadas retilíneas retangulares*, ou seja, as retas paralelas respectivamente aos eixos, são também perpendiculares. Geralmente traça-se eixos perpendiculares em um ponto O (figura 14) e em seguida retas paralelas a cada eixo X e Y, respectivamente. Os segmentos QM e PM, são as projeções ortogonais da reta OM sobre os eixos.

No estudo das funções, até o ano de nossa pesquisa no Brasil, este sistema é utilizado como sistema de referência para a representação gráfica de funções. Ele começa a ser abordado no ensino fundamental II, para a representação de pontos no plano cartesiano e será utilizado ao longo de todo o ensino médio

Figura 14 - Representação de coordenadas retilíneas retangulares

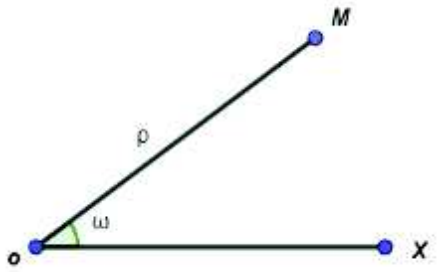


Fonte: Adaptado Briot e Bouquet (1860, p. 3)

Um terceiro sistema apresentado por Broit e Bouquet (1860) é o de *coordenadas polares*.

Esse sistema é concebido da seguinte forma: seja O um ponto fixo nomeado *polo*, ou *centro O*, OX é um eixo fixo (figura 15). Pode-se determinar as posições de um ponto M para o segmento ρ do raio vetor OM e pelo ângulo ω que esse raio vetor faz com o eixo, segundo a figura 15.

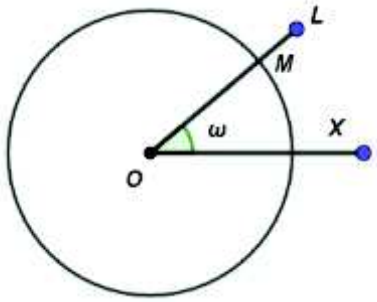
Figura 15 - Ilustração de coordenadas polares



Fonte: Adaptado Briot e Bouquet (1860, p. 3)

A posição do ponto M é determinada pela intersecção de um círculo, de raio ρ, tendo por centro o *polo*, e uma semirreta OL partindo do polo, e fazendo um ângulo com o eixo OX. (figura 16)

Figura 16 - Ilustração da intersecção com o círculo

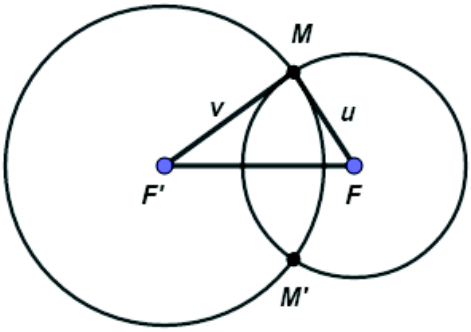


Fonte: Adaptado Briot e Bouquet (1860, p. 3)

É necessário concordar a direção na qual consideramos ângulo ω, a partir do eixo OX. Obtém-se todos os pontos do plano fazendo variar ρ de 0 a $+\infty$ e ω de 0 a 2π. De fato, se deixarmos ω constante, deve-se fazer variar ρ de 0 a $+\infty$, tem-se todos os pontos da semirreta OL, se em seguida fizermos variar ω de 0 a 2π, a semi- reta OL parte da transposição OX e descreve todo o plano.

As *coordenadas bipolares,* parte da ideia das coordenadas polares, e. define-se também a posição de um ponto M por suas distâncias u e v a dois pontos fixos F e F', conforme a figura 17.

Figura 17 - Coordenadas bi- polares

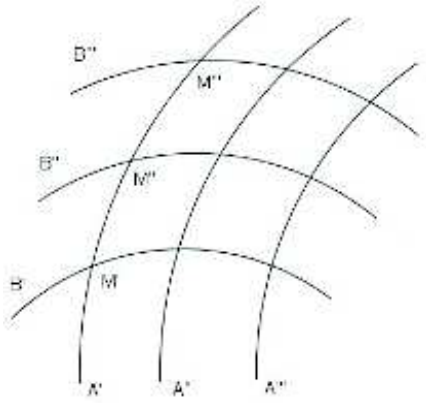


Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.4)

A posição do ponto M é, então, determinada pela intersecção de duas circunferências descritas pelos pontos FF' como centros com raios u et v. Mas esse sistema, segundo Briot e Bouquet (1860), não oferece a mesma perfeição teórica que os anteriormente descritos, em princípio, nem todo par de valores de u et v é admissível. É necessário que a distância dos polos seja menor que sua soma e maior que sua diferença, quando esta condição é atendida, as duas circunferências se interceptam em dois pontos, isto vai resultar em uma ambiguidade indesejável.

A ideia geral de um sistema de coordenadas, é como uma generalização, pois o número de sistema de coordenadas segundo os autores é infinito. Determina-se um ponto dentro do plano pela intersecção de duas linhas traçadas nesse plano, de acordo com a figura 18.

Figura 18 - Generalização para um sistema de coordenadas



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 4)

Dados A', A'', A''', A'''', ... a primeira série de linhas da mesma espécie, correspondente a diversos valores $u', u'', u''', \ldots$ da variável u e B', B'', B''', B'''',... uma segunda série de linhas da mesma espécie, correspondente a diversos

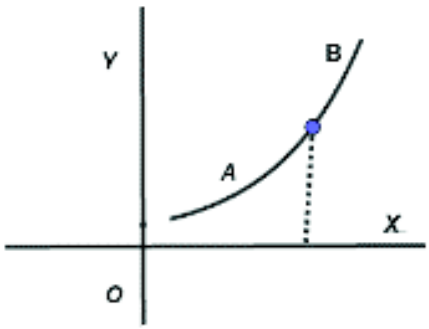
valores $v', v'', v''', \ldots$ da variável v , um ponto qualquer do plano é definido por um par de duas linhas que que passam por este ponto. Os valores particulares que devem ser dados às variáveis u e v para ter essas linhas chamam-se coordenadas do ponto. O conjunto dessas séries de linhas constituem um sistema de coordenadas. (BRIOT e BOUQUET, 1860)

O primeiro sistema que destacamos no estudo, é composto por linha retas paralelas entre si, por isso é designado coordenadas retilíneas. No sistema polar a primeira série e compõe de semirretas que saem do polo *O*, e definida pelo ângulo variável ω,que elas fazem com o eixo OX. Na segunda série de círculos concêntricos em torno do polo com o raio variável ρ. No sistema bi-polar, cada série se compões de círculos concêntricos.

3.2.2 Representação de linhas planas por equações

Seja uma linha plana qualquer AB, (figura 19), traçamos no plano dois eixos OX e OY, e designamos por x e y as duas coordenadas OP e MP de um ponto M qualquer da linha; quando o ponto M se move sobre a linha, as duas coordenadas variam simultaneamente; Se atribuirmos à abscissa um valor arbitrário OP, a medida da ordenada correspondente MP é perfeitamente determinada e a variação da abscissa implica na da ordenada. Então a ordenada MP é uma função da abcissa OP;a natureza desta função depende da natureza a linha.

Figura 19 - Linha plana



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 5)

Quando a linha é definida geometricamente, concebemos que podemos, da definição geométrica da linha, deduzir uma equação entre x e y que serve para definir analiticamente a função y. A equação x e y encontrada dessa maneira se chama *equação da linha.*

Supomos, reciprocamente, que dando uma equação $F(x,y)=0$, entre duas variáveis x e y, cada par de valores reais de x e y que satisfazem a esta equação determina um ponto do plano; contudo, se variarmos x de uma maneira contínua entre certos limites, a equação é ordinariamente satisfeita pelos valores de y reais e contínuos. O conjunto de pontos obtido deste modo formam uma sequência contínua,
isto é uma linha. Assim, em geral, uma equação entre as duas coordenadas representa uma linha plana.

O que nós vimos, que dizemos coordenadas retilíneas ocorre em qualquer outro sistema de coordenadas. No sistema polar, quando um ponto se move sobre a linha, o raio vetor ρ caria com o ângulo ω. E a linha é representada por uma certa equação entre ρ et ω.

A representação das figuras por equações é fundamental na geometria analítica, é isto que permite aplicar o estudo de figuras e processos de cálculos algébricos. Deve-se ocupar em geometria analítica de três questões fundamentais: quando a figura é definida geometricamente, procura-se a sua equação. Reciprocamente, aprende-se a construir a figura que representa uma equação dada, enfim, estuda-se as relações que existem entre as propriedades geométricas das figuras e as propriedades analíticas das equações.

Os autores apresentam alguns exemplos, que representam linhas por equações: o círculo, a elipse, a hipérbole, a parábola, tangente, cisoide etc. Optamos em princípio por suprimir esses exemplos visto que globalmente não farão parte do recorte de estudo da pesquisa, enquanto objetos matemáticos. A seguir apresentaremos um conceito importante para o estudo de GA: a *homogeneidade,* o qual os autores incluíram na obra.

3.2.3 Homogeneidade

Briot e Bouquet (1860) afirma que uma função de lei $f(a,b,c,\dots)$ é homogénea em relação às letras $a,b,c,\dots$, quando substitui-se a por ka, b por kb ,... tem-se: $f(ka,kb,kc,\dots)=k^m(a,b,c,\dots)$; o expoente m é o grau da função homogênea. Eles apresentam como exemplos as funções definidas por : a^2+2ab ; $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{c}\,\sin\frac{c}{a}}{a+b}$;$\frac{a+\sqrt{ab}}{a+c}$; $\frac{a}{a^2+b^2}$; o grau da primeira função é 2, da segunda é $\frac{1}{2}$, da terceira é 0 e da quarta é -2. Os autores, ainda, classificam algumas propriedades de funções homogêneas, como segue:

> (A) A soma ou a diferença de duas funções homogêneas do mesmo grau é uma função homogênea do mesmo grau que as funções propostas;
> (B) O produto de várias funções homogéneas de qualquer grau é uma função homogénea, cujo grau é igual à soma dos graus das funções propostas;
> (C) O quociente de duas funções homogêneas é uma função homogênea cujo grau é igual ao excesso do grau do dividendo sobre o grau do divisor, ou seja, significa a subtração do grau do dividendo pelo grau do divisor;
> (D) A potência de uma função homogênea é uma função homogênea cujo grau é igual a função proposta multiplicada pelo índice da raiz;
> (E) A raiz de uma função homogênea é uma função homogênea cujo grau é igual ao grau da função proposta dividida pelo índice da raiz;
> (F) Uma função *transcendente* [31] de uma função homogênea de grau zero é ela mesma homogênea de grau zero. Por exemplo as funções: $\sin\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right), \log\left(\frac{b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right)$ são homogêneas e grau zero, pois se substituirmos a e b por ka e kb, a letra k desaparece debaixo do sinal de transcendente (sinal de divisão) e pode-se por antes do fator K^0. Mais que a quantidade colocada sobre a linha da divisão, ainda que homogênea, não era do grau zero, a letra K não pode ser colocada como fator antes do sinal de divisão e a função não será mais homogênea, logo a função $\sin a + \sqrt{bc}$ não é homogênea.(BRIOT e BOUQUET, 1860, p. 29, tradução nossa).

A noção de homogeneidade e suas propriedades estão presentes atualmente no estudo de funções, por exemplo, de funções exponenciais e logarítmicas. No entanto, apresentam uma linguagem mais simples e uma representação simbólica algorítmica. Essas noções são o fundamento das propriedades de potência de números reais. Isto pode ser verificado nos livros didáticos de ensino médio e até de ensino superior utilizados no Brasil.

Segundo os autores, quando um monômio é racional e inteiro em relação às letras $a, b, c, ...$, se chama grau do monômio, em relação a uma letra, o expoente desta letra no monômio. O grau do monômio, em relação a várias letras é a soma dos expoentes dessas letras. Um monômio é sempre uma função homogénea de um grau igual ao grau do monômio: logo a soma de vários monômios de mesmo grau é um polinômio homogêneo de mesmo grau. Por exemplo: $a^3 - 4a^2b + 5\,ab^2\, - 2b^3$, é uma função homogênea de terceiro grau, em relação às letras a e b.(BRIOT e BOUQUET, 1860)

Em nosso ponto de vista, as asserções de A à E podem ser definidas como propriedades das funções homogênea, que visam justificar o processo de cálculo e operações com essas funções. Do ponto de vista da TAD, dizemos

[31] Toda função que não é algébrica se diz transcendente. As únicas funções transcendentes estudadas no cálculo são as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencias e logarítmicas. (SIMMONS,1987, p.44)

que faz parte do bloco teórico tecnológico, que justifica possíveis técnicas, cujas tarefas requerem operar com tais funções.

Os autores explicam que quando se busca as relações entre os comprimentos de diversas linhas A, B, C, ... de uma figura, imagine essas linhas relacionadas a uma unidade de comprimento, pois, geralmente, não são especificadas e fica tudo absolutamente arbitrário. Designamos pelas letras a, b e c, os números que exprimem as medidas das linhas da figura, e supomos que tenha achado entre esses números a relação: $f(a,b,c,\dots)=0$ (I)

Ainda afirmam que o raciocínio para chegar a essa relação sendo independente da unidade de comprimento, a relação subsiste, qualquer que seja esta unidade. Se chamarmos $\alpha,\beta,\gamma,\dots$, os valores particulares de a,b,c ... para uma primeira unidade; $\alpha',\beta',\gamma',\dots$ os valores dessas quantidades por uma outra unidade, essas duas séries de números verificam as relações: $f(\alpha,\beta,\gamma,\dots)=0$ (II) e $f(\alpha',\beta',\gamma',\dots)=0$ (I).

Briot e Bouquet (1860) assevera que, quando mudamos a unidade, os números variam proporcionalmente, de maneira que, se designarmos para k a relação da primeira unidade para a segunda, tem-se: $\frac{\alpha'}{a}=\frac{B'}{B}=\frac{\gamma'}{\gamma}=\cdots=k$; donde temos; $\alpha'=k\alpha$; $\beta'=k\beta$; $\gamma'=k\gamma\dots$ Substituindo em (III) temos que: $f(k\alpha,k\beta,k\gamma,\dots)=0$ (IV)

Os autores afirmam que se considerarmos a primeira unidade fixa, a segunda varia, $\alpha,\beta,\gamma\dots$ serão números constantes, k um número arbitrário e a equação IV deve ser verificada seja qual for o número k. Se a equação (I) é verificada, quando substitui-se as letras $a,b,c,\dots$, pelos números $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ a equação também será verificada quando substituir-se as mesmas letras para $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$ seja qual for o número k. A condição anterior é preenchida quando o primeiro membro da equação (I) é uma função homogênea com as letras $a,b,c,\dots$ pois então temos:

$f(k\alpha,k\beta,k\gamma,\dots)=k^m\ (\alpha,\beta,\gamma,\dots)$; se $f(\alpha,\beta,\gamma,\dots)$ é nulo, ele será o mesmo que $f(k\alpha,k\beta,k\gamma,\dots)$ qualquer que seja k.

Os autores demonstram que, reciprocamente, a homogeneidade é necessária, limitando o processo de demonstração às equações apresentadas na forma completa.

> Suponha-se que $f(a,b,c,\dots)$ seja um polinômio inteiro, se todo os termos não são do mesmo grau, serão reunidos por grupos de termos cujo grau é o mesmo; chamaremos de $\varphi(a,b,c,\dots)$ o conjunto de

> termos de grau mais alto m, da mesma forma $\psi\,(a, b. c, \ldots)$ o conjunto de termos de grau n etc., a equação (IV) torna-se:$k^m\varphi\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + k^n\psi(\ \alpha, \beta, \gamma \ldots) + \cdots = 0$. Para que esta equação seja verificada, qualquer que seja k , é necessário que se tenha separadamente: $\varphi\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$; $\psi(\ \alpha, \beta, \gamma \ldots) = 0; \ldots = 0, \ldots$ .Portanto, se a equação (I) não é homogênea, ela equivale a várias equações homogêneas separadamente.(BRIOT e BOUQUET, 1860, 31, tradução nossa)

No entanto, os autores afirmam que pode acontecer que uma equação não homogênea seja verificada, quando se faz a escolha de uma unidade particular, sem que as partes que a compõem sejam nula separadamente, mais então, mudando a unidade, a equação deixa de ser verificada.

Vejamos um exemplo apresentado pelos autores (p. 32): determinar as dimensões de um cilindro de maneira que sua superfície seja equivalente à superfície de uma esfera de raio dado A e seu volume seja o de uma esfera de raio B. Seja X o raio e Y a altura do cilindro; chama-se a, b, e y as medidas das linhas A, B, X, Y relacionadas a uma unidade qualquer relacionada a uma unidade qualquer, as incógnitas devem satisfazer as duas equações:

$$x^2 + xy - 2a^2 = 0 \qquad (5)$$

$$x^2y - \frac{4}{3}b^3 = 0 \qquad (6)$$

Cada uma dessas equações é homogênea: uma é do segundo grau e a outra do terceiro grau. Se elas são verificadas quando relaciona- se as linhas a uma certa unidade, será o mesmo quando se relacionar a uma outra unidade. As incógnitas x e y devem igualmente satisfazer a equação não homogênea, obtida quando adicionamos os precedentes membro a membro:

$$(x^2 + xy - 2a^2) + \ (x^2y - \frac{4}{3}b^3) = 0 \qquad (7)$$

Considerando a equação (7), abstração feita de sua origem. Pode-se achar as linhas A, B, X, Y, tal que, se as medidas com uma unidade particular, os números obtidos verificam esta equação sem anular separadamente as duas partes. Supomos por exemplo, que as linhas relacionadas a uma primeira unidade tendo por medida os quatro números $a = 1$; $b = 3$; x= 1; $y = 18{,}5$; dos quais três são atribuídos arbitrariamente e o quarto determinado em seguida pela equação (7); se medir-se as mesmas linhas com uma unidade *duas vezes menor*, obtém-se $a = 2$; $b = 6$; x= 2; $y = 37$, que não satisfazem mais a equação.

O cilindro construído com as linhas X e Y assim determinados goza desta propriedade que a soma de números que, com a unidade escolhida, exprimem

as medidas da sua superfície e de seu volume, é igual à soma dos números que exprimem as medidas da superfície da esfera e do volume de outra esfera; mas a mesma relação não tem mais o mesmo lugar quando a unidade linear muda.

A equação (7) não pode ser verificada pelas medidas de mesmas linhas, quando faz-se variar arbitrariamente a unidade de comprimento, com tanto que essas linhas satisfaçam as equações (5) e (6) tomadas de forma isoladas.

Os autores afirmam que na resolução de problemas de geometria, não se faz jamais combinações de equações análogas à precedente. As equações, que dão imediatamente os teoremas da geômetra elementar, são homogêneas. E quando se adiciona duas equações membro a membro, é a fim de obter uma nova equação mais simples que uma das propostas; para isso, inicialmente as equações somadas sejam são do mesmo grau. O princípio da homogeneidade poderá, portanto, servir a cada instante para verificar as transformações algébricas efetuadas.

Quando se toma por unidade de comprimento uma das linhas de uma figura, as equações deixam de ser homogêneas, mais é fácil de reestabelecer a homogeneidade. Seja $f\ (\ b', c'\ \ldots) = 0$, a equação obtida tomando por unidade a linha A, as letras $b', c', \ldots$ designam as medidas das linhas B, C, ... relacionadas a A. Deixamos a unidade arbitraria e chamamos $a, b, c, \ldots$ as medidas das linhas A, B e C; tem-se : $\frac{1}{a} = \frac{b\prime}{b} = \frac{c\prime}{c} = \cdots$, onde : $b' = \frac{b\prime}{a\prime}, c' = \frac{c}{a} = \cdots$, e a equação (8) se transforma na seguinte: $F\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0$ (9) que é homogénea.

Assim, por exemplo, se os lados do ângulo direito de um triângulo retângulo estão relacionados à hipotenusa deste triângulo tomado como uma unidade, as medidas dos lados satisfazem a equação não homogênea:

$$b'^2 + c'^2 = 1 \qquad (8)$$

Da qual deduz-se a equação homogênea $\frac{b}{a^2}^2 + \frac{c^2}{a^2} = a^2$ ou $b^2 + c^2 = a^2$ em substituição de b' por $\frac{b}{a}$ e c' por $\frac{c}{a}$. Os curvas, elipses, hiperbole, parabola, cisoide etc, são definidas cada uma por uma equação homogênea Uma equação homogeneia qualquer $f(\ x, y, a, b, c) = 0$ (9), entre as coordenadas x e y de um ponto do plano e os comprimentos a, b, c,... de diferentes retas, détermina uma curva cuja posição e as dimensões são independentes da unidade com a qual medimos as linhas.

Os autores consideram, ao contrário, uma equação númerica entre x e y, $f(x,y)=0$, que não contém outras letras diferentes de x e y, e supõe-se que esta equação não é homogênea. Para representar por dois pontos do plano as soluções reais desta equação, deve-se começar por escolher arbitrariamente uma escala ou a linha cujo comprimento tem por medida a unidade. Quando a escala varia, a linha não ficará a mesma, os autores indicam que mostrarão mais adiante que diversas curvas obtidas têm analogias notáveis; são curvas chamadas *homotéticas.*

Antes de adentrar o estudo da (linha) reta, os autores apresentam o estudo de transformações de coordenadas, no entanto, optamos por suprimir este tópico, tendo em vista que não será explorado em nosso modelo alternativo para a formação de professores. As transformações de coordenadas, de um sistema para outro, é somente abordada no ensino superior e não faz parte do currículo da educação básica brasileira.

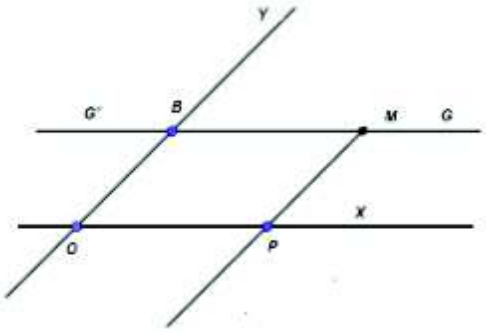
3.2.4 Estudo de Reta

Os autores começam por discutir a construção da equação de primeiro grau com duas variáveis. Apresentam a forma:

$$Ax+By+C=0 \qquad (10)$$

Destacam que uma reta é representada pela equação (10), não pode ser cortada por uma reta em mais de um ponto, é necessariamente uma reta. Em seguida verifica-se que a equação (10) de fato representa uma reta, de acordo com a figura 20:

Figura 20 - Representação geométrica da equação 10



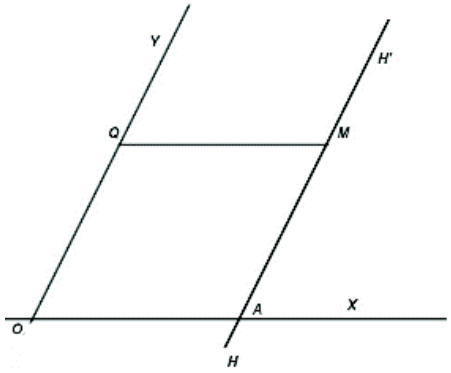
Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.47)

É impossível que dois coeficientes A e B de variáveis sejam nulos ao mesmo tempo, ou seja de uma só vez, pois então deveria ser C= 0, e a equação

se reduziria a uma identidade. Mas é possível ter um dos coeficientes nulo, se por exemplo o coeficiente A é nulo, a equação se reduz à forma $By + C = 0$ ou $y = b$. Esta equação representa o lugar de um ponto M cuja ordenada MP é constante e igual a *b*, qualquer que seja a abscissa OP. Uma reta G'G paralela ao eixo OX, segundo a figura 18, obtém-se marcando sobre o eixo OY, a partir da origem, um comprimento OB igual ao valor absoluto de *b*, dentro de um sentido ou de outro, segundo o sinal de *b*, e levando para o ponto B uma paralela G'G ao eixo OX. Em particular a equação $y = 0$ representa o eixo OX.

Quando o coeficiente B é nulo a equação se reduz a $Ax + C = 0$ ou $x = 0$. Esta equação representa o lugar do ponto M cuja a abscissa MQ é constante e igual a ***a***, qualquer que seja a ordem OQ; é uma reta H'H , segundo a figura 21, paralela ao eixo 0Y; que obtém-se levando sobre o eixo OX, a partir da origem, um comprimento OA igual ao valor absoluto de ***a***, em um sentido ou em outro, seguindo de a e levando para o ponto A uma paralela H'H ao eixo OY. Em particular, a equação $x = 0$ representa o eixo OY.

Figura 21 - Representação da reta HH'



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.48)

Quando o coeficiente B não é nulo, pode-se dividir a equação por B e utiliza-se a equação na forma:

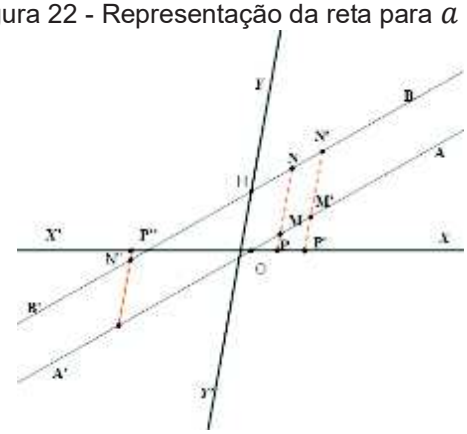
$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B} \qquad (11)$$

ou ainda,

$$y = ax + b \qquad (12)$$

No caso em que a é um número positivo, todos os pontos do lugar, tendo suas coordenadas o mesmo sinal, se acham nos ângulos YOX, ou no seu oposto pelo vértice Y'OX', segundo a figura 22.

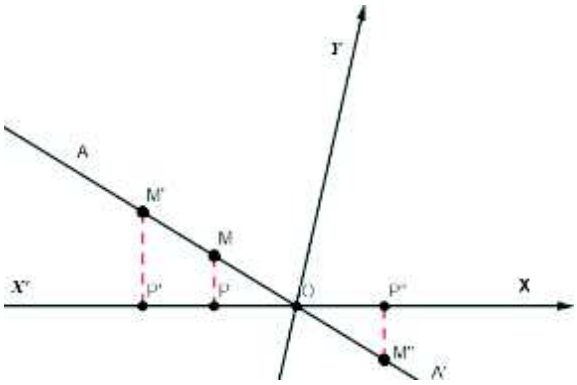
Figura 22 - Representação da reta para $a > 0$



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.48)

Tomando uma abscissa qualquer OP, e pelo ponto P levamos uma paralela ao eixo Y, podemos, sobre essa paralela, achar um ponto M tal que $\frac{MP}{OP} = a$, o ponto M será um ponto do lugar. Sejam M, M', M', ... , diversos pontos do lugar construído desta maneira, obtém-se relações iguais: $\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \cdots$ (13). O que resulta que os triângulos OPM, OP′M′, OP′′M′′... são semelhantes, em consequência os ângulos MOP, M′OP′,M′′OP′′... são iguais, portanto os pontos M, M′, M′′, ... estão todos sobre a mesma reta A′A, passando pela origem. Por outro lado, a equação é verificada pelas coordenadas de cada um dos pontos desta reta, logo a equação $y = a\,x$ representa a reta indefinida A′A.

Figura 23 - Representação de $y = a.x$



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.49)

Quando a é negativo, todos os pontos do lugar (do plano) que têm coordenadas de sinais contrários estão situados dentro dos ângulos Y′OX e YOX′ (Figura 23). Os pontos M, M′, M′′, ... diferentes neste plano, determinam a relação:

$$\frac{MP}{-OP} = \frac{M'P'}{-OP'} = \frac{-M''P''}{OP''} = \cdots = a \qquad (14)$$

Dessa relação, pode-se deduzir os triângulos OPM, OP´M´, OP´´M´´ .... são semelhantes, e que os ângulos MOP, M´OP´, M´´OP´´ ...., têm mesma medida, portanto, os pontos M, M´, M´´ ...., (Figura 23) pertencem a mesma reta passando pela origina dos eixos, e cuja equação é $y = a\,x$ representa uma reta passando pela origem.

Os autores comparam as equações $y = ax + b$ e $y = ax$ e observam que a diferença entre as ordenadas correspondentes a uma mesma abscissa, é igual a uma constante b. Pode-se aumentar ou diminuir, de acordo com o sinal de b, as ordenadas de todos os pontos da reta AA´ de comprimentos MN, M´N´, M´´N´´, ... iguais ao valor absoluto de b.(figura 22). Os pontos N. N´, N´´, ..., obtidos formam uma reta B´B paralela à reta A´A. Conclui-se que toda equação do primeiro grau entre duas variáveis x e y representa uma linha reta.

Em seguida, os autores mostram que, reciprocamente, toda reta é representada por por uma equação de primeiro grau. Se a reta é paralela ao eixo OX, como todos os seus pontos tem a mesma ordenada, sua equação é da forma $y = b$. Se a reta é paralela ao eixo OY, todos os seus pontos tendo a mesma abscissa, a equação é da forma $x = a$. (figura 19). Se a reta passa pela origem, ela ocupa uma das duas posições indicadas nas figura 22 e 23 e os triângulos semelhantes fornecem a equação:

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = \cdots \qquad (14)$$

Ou,

$$\frac{MP}{-OP} = \frac{MP'}{-OP'} = \frac{-M''P''}{OP''} = \cdots \qquad (15)$$

Se chamamos a a razão constante, a equação da reta é $\frac{y}{x} = a$ ou $y = ax$.Por fim supõe-se que se a reta não for paralela a um dos eixos, não passa pela origem (figura 22). Os autores ainda asseveram que se pode supor a reta, sem ser paralela a um dos eixos, não passa pela origina dos eixos. Uma reta que passa pela origina terá por equação, de acordo com o resultado anterior, y = ax. O “excesso” do valor da ordenada da reta proposta, sobre a ordenada correspondente da paralela é uma quantidade constante b, portanto a reta proposta tem equação dada por $y = ax + b$. Em seguida os autores vão discutir a respeito da significação dos coeficientes da equação da reta, a e b.

3.2.4.1 Significação dos coeficientes

Para esta construção da significação dos coeficientes, os autores não apresentaram uma representação geométrica ou ilustração. Considerando que a equação de toda reta não paralela ao eixo dos Y pode ser escrita a sobre a forma $y = ax + b$. A constate b é a ordenada de um ponto H onde a reta corta o eixo dos y, e se chama ordenada da origem. A constante a depende apenas da direção da reta, que é a mesma para todas as retas paralelas, a constante a se chama *coeficiente angular* ou de direção. Levamos pela origem e acima do eixo X´X, uma paralela AO até a reta proposta. Chamaremos de θ o ângulo dos eixos, de α o ângulo AO com OX, ângulo que pode variar 0 a π, donde temos dois casos, no primeiro:

$$a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{OP} = \frac{\operatorname{sen} MOP}{\operatorname{sen} OMP} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)'}$$

E no segundo caso $a = \frac{y}{x} = \frac{MP}{-OP} = \frac{\operatorname{sen} MOP}{-\operatorname{sen} OMP} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\operatorname{sen}(\alpha-\theta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$; E portanto em todos os casos : $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)} = a.$ (15)

Quando os eixos são retangulares, desta fórmula deriva $\tan \alpha = a.$ Esta fórmula determina o ângulo α, que faz com o eixo OX a reta proposta, quando os eixos são retangulares. Quando os eixos são oblíquos, a equação se reduz a:$\tan \alpha = \frac{\mathrm{a} \sin \alpha}{1+a \cos \theta}$.

Como nota-se os autores utilizaram as relações e transformações trigonométricas para reescrever as equações encontradas, pois afirmam que não é possível calcular esta equação usando logaritmos, quando quer se obter o ângulo α por meio de tabelas, tem-se o recurso de outra fórmula a equação dada por: $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{1} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{a+1} = \frac{\sin \alpha - \sin(\theta-\alpha)}{a-1}$; se transformarmos em produtos a soma e a diferença dos senos temos:

$\frac{2 \sin\frac{\theta}{2} \cos(\alpha-\frac{\theta}{2})}{a+1} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2} \sin(\alpha-\frac{\theta}{2})}{a-1}$ (16).

Donde $\tan(\alpha - \frac{\theta}{2}) = \frac{a-1}{1+1} \tan \frac{\theta}{2}$ .Por fim conclui-se que para construir a reta representada por uma equação de primeiro grau com coeficientes numéricos, procura-se normalmente os pontos A e B quando eles cortam os eixos, e a reta passa por esses dois pontos. Por exemplo, seja a equação $2x - 3y = 5$; para $y = 0$, tem-se $x = \frac{5}{2}$; vamos usar a partir da origem sobre o eixo de x o

comprimento $\frac{5}{2}$ no sentido positivo, sobre o eixo y o comprimento $\frac{5}{2}$ no sentido negativo. Quando a equação não contém termo constante, a reta passa pela origem.

Determina-se um segundo ponto atribuindo-se a x um valor particular. Seja por exemplo a equação $2y + 3x = 0$, se a equação for verificada para $x = 0\,, y = 0$, a reta passa pela origem. Se fizermos $x = 2$, tem-se $,y = -3$; construindo-se o ponto cujas coordenadas são $x = 2$ e $y = -3$ obter-se-á um segundo ponto que juntar-se-á com origem.

3.2.4.2 Equação geral da reta e tarefas associadas

Neste item, a partir da equação geral de uma reta, os autores trazem alguns exemplos de problemas, em que é possível identificar determinados tipos de tarefas e suas técnicas respectivas, bem como a tecnologia e teoria que justificam as técnicas. Os autores apresentam problemas do ponto de vista geométrica e sua correspondente resolução algébrica.

Briot e Bouquet (1860) assevera que a equação geral $Ax + By + C = 0$ de uma reta, contém dois coeficientes ou paramétricos arbitrários, pois podemos dividir a equação por um dos coeficientes e teremos os resultados da divisão dos dois outros coeficientes com àquele pelo qual dividimos. Quando põe- se a equação sob a forma $y = ax + b$, os dois parâmetros são a e b. Para fixar a posição da reta no plano, será necessário fornecer os valores dos dois parâmetros, ou um sistema de duas equações cujas incógnitas são esses dois parâmetros utilizados para determinar seus valores. É preciso, portanto, duas condições geométricas para determinar uma linha reta supõe-se que cada condição se exprime por uma equação.

Os problemas apresentados pelos autores, em nosso ponto de vista podem ser caracterizados como tarefas fundamentais, pois como veremos a seguir são tarefas genéricas, cada uma de um certo tipo diferente, envolvendo a reta e sua equação.

Problema 1

O primeiro problema que chamaremos de *tarefa 1* é: "*encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado*" (BRIOT e BOUQUET, 1860, p.52, tradução nossa). Descrevemos a resolução proposta pelos autores a seguir.

Inicialmente designam por x' e y' as coordenadas de um ponto dado M, sabendo que uma reta qualquer tem por equação $y = ax + b$. Para esta reta

passar pelo ponto M, é necessário que as coordenadas desse ponto verifiquem a equação da reta. Se, portanto, substituirmos as coordenadas x e y pelas coordenadas x' e y' do ponto M, teremos a equação de condição $y' = ax' + b$.

Esta relação entre os dois parâmetros a e b determina um dos parâmetros em função do outro, por exemplo o parâmetro b em função de a, ou seja, $b = y' - ax'$. Portanto, $y - y' = a\,(x - x')$ (17)

A equação 17, na qual o coeficiente angular a é arbitrário, representa todas as retas que passam pelo ponto M. Quando fazemos o parâmetro a variar, a reta gira em torno do ponto M.

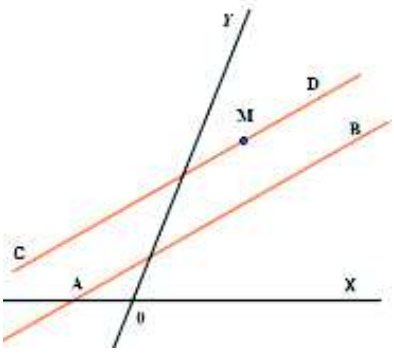
Os autores tinham considerado que toda reta é representada por uma equação da forma $y = ax + b$, qualquer que seja a posição do plano. No entanto, eles reconhecem que há uma exceção, quando a reta é paralela ao eixo y; pois nesse caso o coeficiente angular a é infinito, assim como a ordenada b. No entanto, se na equação 17, substituirmos a pela relação $\frac{m}{p}$, e que escrevemos a equação na forma: $n(y - y') = m(x - x')$, fazendo $n = 0$, obtém-se a equação $x = x'$, que representa a reta paralela ao eixo dos Y, que passa pelo ponto M.

Problema 2

Na *tarefa 2,* propõem: "*por um ponto dado, construir uma reta paralela a uma reta dada*". (BRIOT e BOUQUET,1863, p. 53). A tarefa parece ser meramente geométrica, no entanto, os autores apesar de construírem uma figura, apresentam uma resolução algébrica que apresentamos a seguir.

Sejam $y = ax + b$ a equação de uma reta dada AB, M (x´, y´) o ponto dado, (Figura 24). A reta solicitada deve passar pelo ponto dado, sua equação, como já foi dito será da forma $y - y' = a'(x - x')$.

Figura 24 – Ilustração tarefa 2



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 53)

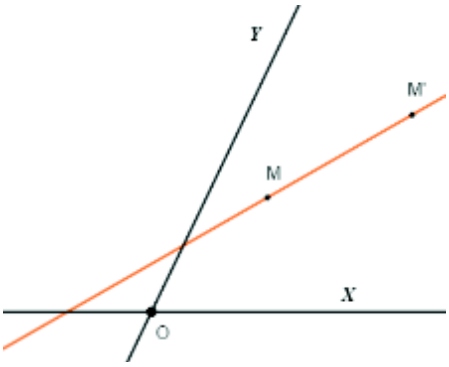
Esta reta deve ser paralela à reta AB, seu coeficiente angular a' será igual ao coeficiente a da reta AB, tem-se, portanto $a' = a$ e a paralela solicitada CD será representada pela equação $y - y' = a(x - x')$.

Problema 3

O terceiro problema que chamamos de *tarefa 3;* é *"construir uma reta por dois pontos dados"* (BRIOT e BOUQUET, 1863, 54, tradução nossa).

Sejam M e M' dois pontos dados (Figura 25), x' e y' as coordenadas do ponto M, x'' e y'' as coordenadas do ponto M''. A reta MM', passando pelo ponto M, é representada por uma equação da forma $y - y' = a(x - x')$.Trata-se de determinar o coeficiente a, de maneira que a reta passe também pelo ponto M'.

Figura 25 - Ilustração tarefa 3



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 53)

É preciso para isto que as coordenadas do ponto M' verificam a equação da reta, que fornece a relação $y'' - y' = a(x'' - x')$ donde se deduz que:

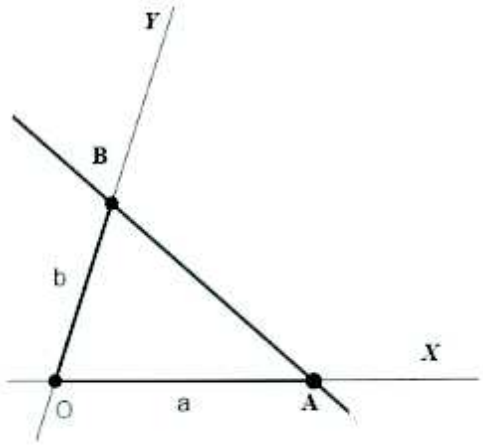
$a = \frac{y''-y'}{x''-x'}$, que representa o coeficiente angular da reta MM'. Se na equação 17, substituir-se a pelo seu valor, obtém-se a equação da reta MM'

$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}\ (x - x')$, que pode ser escrita como:

$$\frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y'-y'} \qquad (18)$$

Quando o ponto M está na origem, têm-se $x' = 0$ e $y' = 0$, neste caso a equação (18) se reduz a: $y = \frac{y''}{x''}\ x$. Isto acontece frequentemente que a reta, definida por dois pontos A e B, corta os eixos (Figura 26). Chamam-se a e b a distância da origem a seus pontos.

Figura 26 – Distância de um ponto a origem



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 55)

Se fizermos na equação da reta representada por $Ax + By + C = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, obtemos os pontos onde a reta corta os eixos. Temos, assim: $a = -\frac{C}{A}$ e $b = -\frac{C}{B}$. Substituindo A e B pelos valores deduzidos dessas relações, coloca-se a equação sob a forma simples $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Problema 4

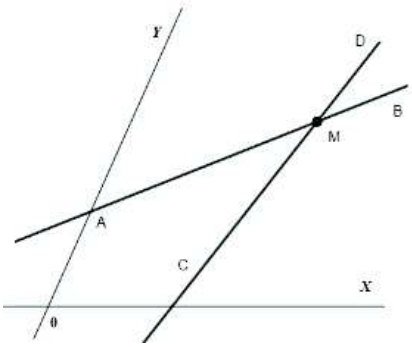
A *tarefa 4*, consiste em "*achar o ponto de intersecção de duas retas dadas"*. (BRIOT e BOUQUET, 1863, 55, tradução nossa). Os autores apresentam a seguinte solução:

Sejam as equações 18 e 19 de duas retas dadas AB e CD, M o ponto de intersecção dessas duas retas (Figura 27).

$$Ax + By + c = 0 \quad (18)$$

$$A'x + B'y + C' = 0 \quad (19)$$

Figura 27 - Ilustração do problema 4



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 55)

Como o ponto M pertence a cada uma dessas retas, suas coordenadas verificam as duas equações, ou seja, são soluções do sistema: $\begin{cases} Ax + By + c = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$. Resolvendo esse sistema, obtém-se as coordenadas desse ponto: $x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}$ e $y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}$.

Quando o denominador $AB' - BA'$ é diferente de zero, as fórmulas dadas por x e y fornecem valores finitos e determinados e as duas retas se cortam efetivamente em um ponto M.

Mas, se o denominador $AB' - BA'$ é nulo, sem que os numeradores sejam, obtém-se para $x\ e\ y$ valores infinitos. Sobre esta afirmação, em nosso ponto de vista, entendemos que os autores queriam dizer que quanto mais próximo de zero o valor do denominador os valores de x e y se aproximam do infinito, pois numericamente não podemos dividir um número por zero, mas, podemos dividir por números muito pequeno bem próximos de zero, isto tem a ver com o conceito de limite.

Este resultado indica que que as duas retas propostas são paralelas, com efeito, nesse caso elas têm os seguintes coeficientes angulares, $-\frac{B}{A} = -\frac{B'}{A'}$. Se temos um vez $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, os dois numeradores são nulos ao mesmo tempo que os denominadores, os valores de xe y se apresentam sob forma $\frac{0}{0}$, há uma indeterminação, com efeito as duas retas propostas coincidem pois, se colocarmos $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k$, donde $A' = A$, $B' = Bk, C' = Ck$, que substitui-se na segunda equação, e que divide-se por k,esta equação torna-se idêntica à primeira.

Problema 5

A *tarefa 5 é a seguinte: achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas.* (BRIOT e BOUQUET, 1863, 56, tradução nossa). A resolução se inicia de foram semelhantes à anterior, tomando as equações gerais das retas dadas.

Sejam $Ax + By + c = 0$ (20) e $A'x + B'y + C' = 0$ (21), as equações de duas retas dadas. Podemos tratar a questão procurando as coordenadas do ponto de intersecção de duas retas para a resolução das equações 20 e 21 e fazendo uma reta qualquer passar por esse ponto. Mas, chegaremos ao mesmo resultado de uma forma muito mais rápida.

Os autores asseveram que somando-se as duas equações (20 e 21), uma delas sendo multiplicada por uma quantidade arbitraria, obtém-se uma equação de primeiro grau:

$$(Ax + By + C) + \lambda\,(A'x + B'y + C') = 0 \qquad (22)$$

A equação 22 representa uma terceira reta que passa pelo ponto de intersecção das duas primeiras. De fato, as coordenadas desse ponto verificam as duas equações (equações 20 e 21), anulando os dois parênteses e por consequência satisfazendo a equação 22. Esta equação, na qual o coeficiente λ é arbitrário, representa todas as retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas, pois podemos determinar esse coeficiente de maneira que a reta passe por um ponto qualquer M do plano, tendo por coordenadas x' e y'. Basta, para que isso aconteça, que a equação $(Ax' + By' + C) + \lambda(\,A'x' + B'y' + C') = 0$ seja verificada. Nessas condições, temos que:

$$\lambda = \frac{(Ax' + By' + C)}{A'x' + B'y' + C'} \qquad (23)$$

Quando $\lambda = 0$, a equação (22) se reduz a equação da primeira reta $Ax + By + c = 0$. Se substituir λ por $\frac{m}{n}$, e multiplicarmos por n, fazendo $n = 0$, tem-se a segunda reta $A'x + B'y + C' = 0$.

Se substituirmos na equação 22 o valor de λ obtido na equação 23 teremos a equação (24) a qual representa a reta que passa pelo ponto M e o ponto de intersecção de duas retas dadas

$$\frac{Ax + By + C}{Ax' + By' + C} = \frac{A'xB'y + C\prime}{A'x' + B'y' + C\prime} \qquad (24)$$

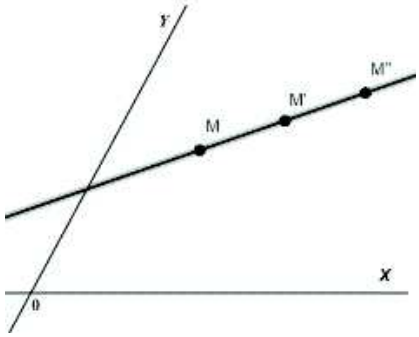
Os numeradores são os primeiros membros das equações de duas retas dadas, os denominadores os valores de seus polinômios, quando se substitui x e y pelas coordenadas do ponto dado. Analisando a equação observa-se que que a reta que ela representa passa pelo ponto dado e pelo ponto de intersecção de duas retas dadas.

Problema 6

A *tarefa 6* propõe: *reconhecer, se três pontos estão alinhados* BRIOT e BOUQUET, 1863, 57, tradução nossa). Na linguagem atual utilizamos o alinhamento de três pontos dados no plano cartesiano, segundo a figura 28.

A solução começa por identificar três pontos dados M (x´, y´), M'(x´´, y´´) e M'''(x´´´, y´´´).

Figura 28 - Pontos alinhados, problema 6



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 58)

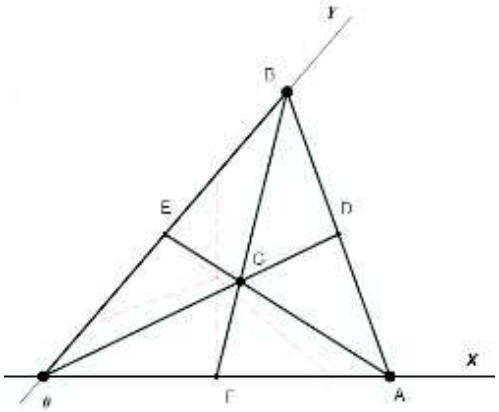
A reta MM' tem como coeficiente angular $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, e a reta MM'' tem como coeficiente angular $\frac{y'''-y'}{x'''-x'}$. Quando os três pontos M, M', M''' estão alinhados, as duas retas MM', MM'' coincidem e têm mesmo coeficiente angular, as coordenadas dos três pontos devem portanto verificar a condição: $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y'''-y'}{x'''-x'}$

No **problema 7**, é proposto *reconhecer, se três retas passam por um mesmo ponto dado*.

Sejam as equações de três retas dada: $Ax + By + C = 0$; $A'x + B'y + C' = 0$ e $A''x + B''y + C'' = 0$. Para verificar se as três retas passam por um mesmo ponto, procura-se um ponto de intersecção das duas primeiras retas e substitui-se as coordenadas desse ponto na terceira equação. Destacamos, que do ponto de vista geométrico, em nossa adaptação da figura 29, com o recurso do Geogebra, é possível determinar a mediana de cada lado do triângulo formado por OAB de forma simples, igualmente como feito nas demais figuras, adaptadas no texto da tese, utilizando a interface do software para construí-las.

Normalmente quando três pontos passam por um mesmo ponto, reconhece-se a verificação dessas equações, uma delas sendo a combinação das duas outras.

Figura 29 - Representação geométrica problema 7



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 58)

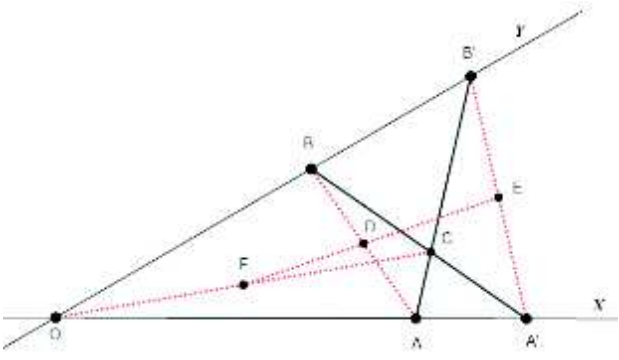
Os autores apresentam um exemplo, considerando três medianas de um triângulo OAB (Figura 29). Consideram O como sendo a origem, os dois lados AO e OB como eixos de coordenadas, e designamos por a e b comprimentos dos segmentos OA e OB.

A mediana AE, corta os eixos em um ponto que está em uma distância a e $\frac{b}{2}$ da origem dos eixos, tem por equação $\frac{x}{a} = \frac{y}{\frac{b}{2}} = 1$, do mesmo modo, a mediana BF tem por equação $\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{b} = 1$. O ponto D, meio de AB, tem por coordenadas $OF = \frac{a}{2}, OE = \frac{b}{2}$; a reta OD, que vai da origem a esse ponto, é representada pela equação $y = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}} x$. E resolvendo as duas primeiras equações, obtém-se as coordenadas $x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$, do ponto de intersecção G das duas primeiras medianas AE e BF.

Essas coordenadas verificam a terceira equação, deduz-se que a terceira mediana passa também pelo ponto G. Observa-se que as três medianas passam por um mesmo ponto, portanto se suprimir-se as duas primeiras equações membro a membro, obtém-se a terceira.

Um exemplo de três pontos alinhados, Briot e Bouquet (1860) consideram um quadrilátero OACB (Figura 30). Se prolongar os quatro lados desse quadrilátero indefinidamente, formaremos o que se chama quadrilátero completo.

Figura 30 - Exemplo de pontos alinhados



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 59)

Os lados se cortam dois a dois em seis pontos. Unindo os vértices opostos, obtém-se três diagonais, AB, A'B', OC. Os autores demonstram que os três pontos D, E, F, que dividem essas diagonais em duas partes iguais, estão alinhados.

Tomam os lados AO e OB como eixos de coordenadas, e designam por a e a' os comprimentos dos dois segmentos AO e OA', por b e b' os comprimentos dos dois segmentos OB e OB'. O ponto D, o ponto médio de AB, tem por coordenadas $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$. O ponto E, ponto médio de A'B' tem por coordenadas $x'' = \frac{a'}{2}$, $y'' = \frac{b'}{2}$. Para ter as coordenadas do ponto F, ponto médio de OC, procuramos as coordenadas do ponto C, intersecção das duas retas AB', A'B', que tem por equações $\frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1$ e $\frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1$. Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1 \\ \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$, obtém-se as coordenadas do ponto C: $x = \frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}$; $y = \frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}$.

O ponto F sendo o ponto médio da reta OC, suas coordenadas x''' e y''' são metade das coordenadas do ponto C, temos, portanto: $x''' = \frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}$; $y = \frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}$.

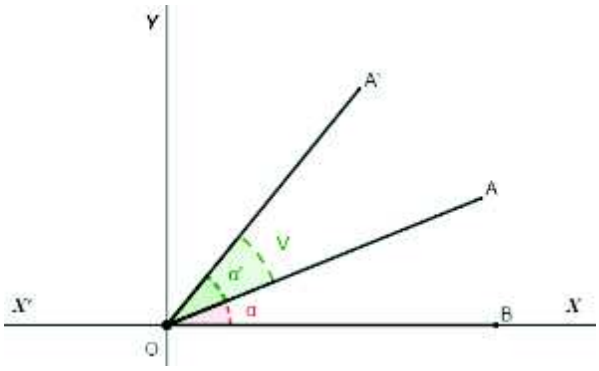
Tendo as coordenadas dos pontos D, E, F verifica-se facilmente, de acordo com os autores que os três pontos estão alinhados. As retas DE e DF tem como coeficientes angulares $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{b'-b}{a'-a}$ e $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}-b}{\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}-a} = \frac{b'-b}{a'-a}$ respectivamente. Esses dois coeficientes angulares, portanto, são iguais entre si, conclui-se que os três pontos D, E, F estão alinhados.

Problema 8

No problema 8, a tarefa solicitada, (Figura 31), envolve ângulo, que até então não havia sido explorada pelos autores nas tarefas propostas no estudo da reta. Nesta tarefa VIII, os autores solicitam "*encontrar o ângulo de duas retas" (*BRIOT E BOUQUET, 1860, p. 61).

Para fazer a demonstração, eles consideram duas equações de duas retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$.Pela origem e acima do eixo X'X, os autores construíram as paralelas AO e OA' às retas dadas, e chamaram de α e α' os ângulos formados por estas duas retas com o eixo OX, tais que $\alpha' > \alpha, V$ o ângulo dessas duas retas (Figura 31). Logo, tem-se V= $\alpha' - \alpha$. Os autores usam a relação trigonométrica da tangente para determinar uma relação para o ângulo V; $\text{tang(V)} = \frac{tang\,\alpha' - tang\alpha}{1 + tang\alpha\, tang\alpha'}$.

Figura 31- Representação geométrica problema 8



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 61)

Quando os eixos são retangulares, tem-se $tang\alpha = a$, $tang\ \alpha' = a'$; se substituirmos esses valores na equação anterior teremos: $tang\ V = \frac{(a'-a)}{1+a.a'}$ quando os eixos são oblíquos, temos $tang\ \alpha = \frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta'}$, $tang\ \alpha' = \frac{a'\sin\theta}{1+a'\cos\theta'}$ em seguida obtemos:

$$tang\ V = \frac{(a'-a)\sin\theta}{1+aa'+(a+a')\cos\theta} \qquad (25)$$

Pode-se deduzir que a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si. Quando o ângulo V é reto, sua tangente torna-se infinita e tem-se condição $1 + a' = 0$ (26)

Se os eixos são retangulares, e a condição: $1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0$ (27), se os eixos são oblíquos.

Problema 9

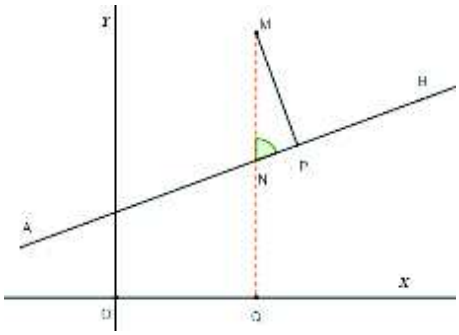
O problema nove é enunciado da seguinte forma: "*de um ponto dado construir uma perpendicular sobre uma reta dada, e achar o comprimento dessa perpendicular*[32] *"(* BRIOT E BOUQUET, 1860, p*. 62).*

Para resolver a tarefa, os autores seguem o seguinte procedimento:

Seja $y = ax + b$ a equação de uma reta AB, x' e y' as coordenadas do ponto dado M, (Figura 32).

[32] Na realidade, os autores querem dizer, na linguagem de hoje, "achar o comprimento do segmento MP (Figura 32)

Figura 32 - Representação geométrica problema 9



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 62)

Se os eixos são retangulares, uma reta qualquer passando pelo ponto M tem por equação $y - y' = a\,(x - x')$ (28)

Para que esta reta seja perpendicular à reta AB, a relação $1 + aa' = 0$, deve ser verificada. Se for verdade, deduz-se dela a relação $a' = -\frac{1}{a}$. Substituindo-se a' pelo seu valor na equação 28, obtém-se a equação da reta perpendicular MP: $y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$. (29)

Encontraremos as coordenadas x e y de P, o ponto de interseção das duas retas AB e MP, resolvendo o sistema $\begin{cases} y = ax + b \\ y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \end{cases}$. Pode-se, também procurar as diferenças $x - x'$ e $y - y'$, a equação pode ser escrita sob a forma:$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b)$, se nesta equação substitui-se $y - y'$ pelo seu valor dado pela equação 29, encontra-se:$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2}$ e por conseguinte, em virtude da equação 27,$y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}$

Aplicando a fórmula de distância de dois pontos, obtém-se o comprimento l da perpendicular MP,

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\frac{(y' - ax' - b)^2\,(1 + a^2)}{(1 + a^2)^2}}\text{, donde}$$

$$l = \frac{(y' - ax' - b)}{\pm(1 + a^2)} \qquad (30)$$

Coloca-se “na frente” do radical o símbolo do numerador, a fim de ter para l um comprimento positivo. Esse numerador é positivo ou negativo, de acordo com o ponto M esteja situado acima ou abaixo da reta AB. De fato, seja N o ponto de intersecção da reta AB e a paralela ao eixo y e passando pelo ponto M. O ponto N sendo situado na reta AB, a ordenada y_1 desse ponto é igual a $ax' + b$, portanto, a fórmula 30 torna-se $l = \frac{y' - y_1}{\pm\sqrt{1 + a^2}}$.

A diferença $y' - y_1$ é positiva se o ponto M esta em cima de N, negativa se está abaixo.

Os autores asseveram que se pode obter imediatamente o comprimento da perpendicular sob esta última forma, observando que o triângulo MNP fornece: $MP = MN \sin MNP = \pm(y - y_1)\cos\alpha = \frac{y'-y_1}{\pm\sqrt{1+a^2}}$

No caso de os eixos coordenados fossem oblíquos, as retas AB e MP serão perpendiculares se seus coeficientes angulares a e a' verificam a relação: $1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0$ donde deduz-se $a' = -\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}$. A perpendicular MP tem, portanto, como equação: $y - y' = -\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta} - (x - x')$ (31)

Resolvendo o sistema de equações $\begin{cases} y = ax + b \\ y - y' = -\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta} - (x - x')' \end{cases}$ obteremos as coordenadas x e y do ponto P. Se, como anteriormente, procura-se as diferenças $x - x', y - y'$, obtém-se :

$$x - x' = \frac{(y'-ax'-b)(a+\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta}; \; y - y' = \frac{(y'-ax'-b)+(1+a\cos\theta)}{1+a'+2a\cos\theta}$$

Substituindo estas diferenças na fórmula de distância de dois pontos teremos:

$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta}$, tem-se:

$$l = \pm\frac{(y' - ax' - b)\sqrt{(a + \cos\theta)^2 + (i + a\cos\theta)^2 - 2(a + \cos\theta)(1 + a\cos\theta)\cos\theta}}{1 + a^2 + 2a\cos\theta}$$

Desenvolvendo os cálculos, observa-se a quantidade de termos no radical contém o fator $1 + \cos\theta^2$ ou $sen^2\theta$ e se escreve-se ($(1 + a^2 + 2a\cos\theta)sen^2\theta$, vai resultar em: $l = \frac{(y'-ax'-b)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\pm\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}$ (32)

O numerador é positivo ou negativo a depender de o ponto estar acima ou abaixo da reta dada.

Esta resolução leva em conta a equação da reta dada apresentada sobe a forma $y = ax + b$. Se esta equação estivesse na forma geral $Ax + By + C = 0$, o coeficiente angular a da reta dada sendo $-\frac{A}{B}$, teríamos no caso de coordenadas retangulares $a' = -\frac{1}{a} = \frac{B}{A}$ e a perpendicular baixada do ponto M será representada pela equação $y - y' = \frac{B}{A}(x - x')$ ou mais simplesmente $\frac{x-x'}{A} = \frac{y-y'}{B}$.

Se substituirmos a e b pelos seus valores $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$, temos:

$$l = \frac{Ax' + By' + c}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (33)$$

Esta fórmula exprime a distância de um ponto a uma reta em coordenadas retangulares: o numerador é o primeiro membro da equação da reta, na qual substitui-se x e y pelas coordenadas do ponto. O denominador é a raiz quadrada da soma dos quadrados dos coeficientes de x e y. Quando os eixos são oblíquos, temos

$a' = \frac{B - A\cos\theta}{A - B\cos\theta}$, a perpendicular tem por equação, $\frac{x - x'}{A - B\cos\theta} = \frac{y - y'}{B - A\cos\theta}$ (34)

Da equação 32 , vem que: $l = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A' + B' - 2AB\cos\theta}}$ (35)

Identifica-se o sinal do numerador, segundo a posição do ponto M em relação à reta AB. Seja N o ponto de intersecção de AB e a reta NQ paralela ao eixo y. Para o ponto N, a expressão $Ax + +By + C$ é nula, quando o coeficiente B é positivo, se andarmos no sentido dos y positivos ,o termo By aumenta, e a função toma valores positivos, cada vez maiores. Se andarmos no sentido oposto (negativo), a função toma valores negativos. É o contrário que tem lugar, quando B é negativo.

Problema 10

Briot e Bouquet (1860, p. 66, tradução nossa) apresentam a seguinte tarefa:" um ponto de intersecção de duas retas dadas levar uma reta perpendicular a uma reta dada".

Para seu comprimento, os autores seguem o seguinte procedimento: Sejam as equações de três retas dadas $Ax + By + C = 0$; $A'x + B'y + C' = 0$; $A''x + B''y + C'' = 0$. Toda reta que passa pelo ponto de intersecção das duas primeiras retas é representada por uma equação da forma:$(Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + + C') = 0$. Para que ela seja perpendicular a terceira reta, deve-se ter, supondo que os eixos são retangulares, que: $1 + \frac{A''(A + \lambda A')}{B''(B + \lambda B')} = 0$. Donde deduz-se o valor da constante λ, pela equação: $\lambda = -\frac{AA'' + BB''}{A'A'' + B'B''}$

Substituindo-se λ por seu valor, obtém-se a equação da reta procurada:

$$(A'A'' + B'B'')\,(Ax + By + C) = (A''A + B'B)\,(A'x + B'y + C) \quad (36)$$

As três retas dadas formam um triângulo cujos vértices são os pontos de intersecção dessas retas dois a dois. A equação (36) representa a perpendicular baixada de um dos vértices do lado oposto. Trocando os acentos teremos as

equações das perpendiculares baixadas de cada uma dos outros vértices sobre o lado oposto: $(A''A + B''B)(A'x + B'y + C) = (AA' + BB')(A''x + B''y + C'') \Rightarrow (AA' + BB')(A''x + B''y + C'') = (A'A'' + B'B'')(Ax + By + C)$

Comparando essas três equações, vemos que, somando as duas primeiras, membro a membro, obtém-se a terceira. Conclui-se que as três alturas de um triângulo passam pelo mesmo ponto.

Problema 11

O problema 11 é seguinte: "A*char o lugar dos pontos igualmente distantes de dois pontos dados" (*BRIOT E BOUQUET, 1860, p. 67, tradução nossa). O seguinte procedimento foi adotado pelos autores para cumprir a tarefa solicitada: Supomos os eixos retangulares e sejam x'e y', x'' e y'', as coordenadas dos dois pontos dados. Se nos designamos x e y as coordenadas de um ponto qualquer desse "lugar", esse terá por equação:

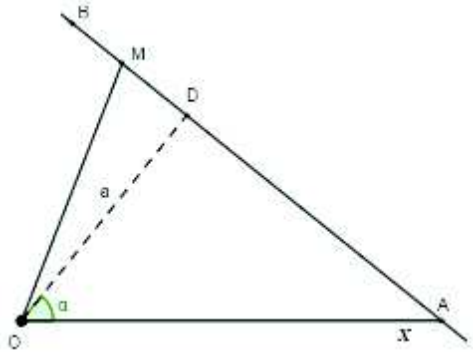
$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')$, ou mais simplesmente

$(x'' - x')\left(x - \frac{x'+x''}{2}\right) + (y'' - y')\left(y - \frac{y'+y''}{2}\right) = 0$. É uma reta perpendicular à reta suporte do segmento determinado pelos dois pontos dados e que passa pelo ponto médio desse segmento.

3.2.4.3 Equação de reta em coordenadas polares

Seja O o centro, chamado de polo e OX o eixo polar, podemos determinar a posição de uma reta AB pelo comprimento a, da perpendicular OD a essa reta e passando pela (Figura 33), e pelo ângulo α que esta perpendicular faz com o eixo polar.

Figura 33 - Representação geométrica do eixo polar



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 62)

Se chamarmos ρ e ω as coordenadas de um ponto qualquer M da reta, o triângulo retângulo ODM fornece $\rho = \frac{\alpha}{\cos(\omega - \alpha)}$. Esta equação é da forma: $\rho = \frac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}$.

Reciprocamente, toda equação desta forma representa uma reta, pois se retornarmos às coordenadas retangulares, tomando o eixo polar como eixo dos X, e uma perpendicular levada até o polo pelo eixo dos Y, esta equação toma a forma $AX + +By = C$.

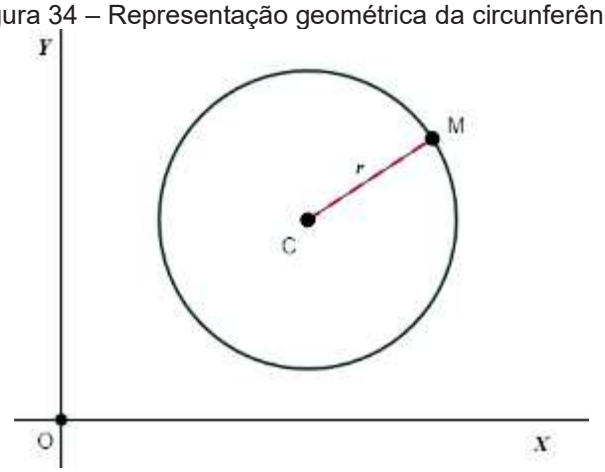
Após o estudo da reta, os autores apresentam o estudo do círculo, que para fins de nossa pesquisa se torna relevante, tendo em conta a possibilidade de desenvolvermos tarefas mais elaboradas envolvendo a reta e o círculo em nosso PEP, por exemplo.

3.2.5 O Círculo

Briot e Bouquet (1860) procuram, inicialmente, a equação da circunferência em coordenadas retangulares. Para isso, designam por α e β as coordenadas do centro C, conforme representado na figura 34, e tendo r como raio. A circunferência sendo o lugar de dois pontos cuja distância ao centro é igual ao raio, tem como equação:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \qquad (37)$$

Figura 34 – Representação geométrica da circunferência



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 68)

Desenvolvendo a equação temos, temos:

$x^2 - x\alpha - x\alpha + \alpha^2 + y^2 - y\beta - y\beta + \beta^2 = r^2 \Rightarrow x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + y^2 - 2y\beta + +\beta^2 = r^2$. Fazendo $-2\alpha = a$ e $-2\beta = b$ e $C = \beta^2 - r^2$ (constante) temos a equação:

$$x^2 + ax + by + C = 0 \qquad (38)$$

Para este resultado, os autores apontam que a equação 38 representa a equação do círculo em coordenadas retangulares, equação de segundo grau que não contém o produto xy, e nas qual os termos x^2 e y^2 têm o mesmo coeficiente.

Reciprocamente toda equação desta forma em coordenadas retangulares representa uma circunferência, quando ela representa um lugar geométrico. De fato, a equação 38 pode ser escrita como: $(x+\frac{a}{2})^2 + (x+\frac{b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2}{4} - c$.

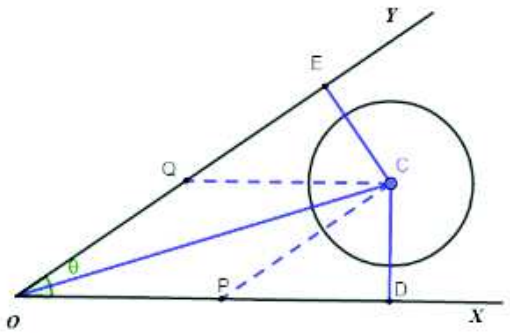
Seja o ponto C de coordenadas $-\frac{a}{2}$ e $-\frac{b}{2}$ .Supondo que o segundo membro é positivo, o primeiro membro representa o quadrado da distância do ponto qualquer ao ponto C. A equação será verificada pelas coordenadas de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto C é constante e igual a: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c}$, ela representa, portanto, uma circunferência de círculo. Se o segundo membro é nulo, o primeiro membro, sendo a soma de dois quadrados, só pode ser nulo se: $x = -\frac{a}{2}$ e $y = -\frac{b}{2}$, a equação será verificada apena pelas coordenadas do ponto C. O lugar geométrico é um ponto. Finalmente, quando o segundo membro é negativo, os autores afirmam que a equação não representa nenhum lugar geométrico. Ela não pode ser verificada por nenhum sistema de valores reais de x e y, quer dizer por nenhum ponto do plano, pois a soma de dois quadrados não pode ser igual a uma quantidade negativa.

Supomos, agora, os eixos das coordenadas obliquas, figura 35, e fazendo entre eles o ângulo θ. Exprimindo que a distância de um ponto qualquer do lugar ao centro é igual ao raio, teremos a equação da circunferência

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2\,(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = r^2 \qquad (39)$$

esta equação é da forma $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + ax + by + c = 0$ (40)

Figura 35 - Circunferência em coordenadas oblíquas



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.69)

Assim a equação do círculo em coordenadas obliquas é uma equação de segundo grau, na qual os termos x^2 e y^2 tem por coeficientes a unidade e o termo xy duas vezes o cosseno do ângulo dos eixos

Reciprocamente, toda equação desta forma representa uma circunferência do círculo, quando ela representa um lugar geométrico. Com efeito, podemos determinar as três constantes α, β, r^2, de maneira a identificar as equações (41) e (42). A equação (42) desenvolvida, se escreve: $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2(\alpha + \beta\cos\theta)x - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y + (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2) = 0$. Comparando esta equação com a equação (40), tendo que:

$$\alpha + \beta\cos\theta = -\frac{a}{2};$$

$$\beta + \alpha\cos\theta = -\frac{b}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta cos\theta - r^2 = c$$

As duas primeiras ralações fornecem a α e β valores finitos, já que o denominador $1 - cos^2\theta$ ou $sen^2\theta$ é diferente de zero. A terceira fornece:

$$r^2 = \alpha^2 + +\beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - C.$$

Seja C, o ponto de coordenadas α e β. Os autores afirmam que o primeiro membro da equação (41) representa o quadrado da distância de um ponto qualquer M ao ponto C. Se acharmos para r^2 uma quantidade positiva, a equação será verificada pelas coordenadas de todos os pontos do plano cuja distancia ao C é r; ela representa, portanto, uma circunferência de círculo. Se acharmos por r^2 uma quantidade nula, a distância MC devendo ser nula, a equação será verificada apenas pelas coordenadas do ponto C, ela representa um único ponto. Finalmente se acharmos por r^2 uma quantidade negativa, a equação não é verificada por nenhum sistema de valores reais de x e de y, ou pelas coordenadas de nenhum ponto do plano, pois o quadrado da distância de um ponto ao ponto C não pode ser igual a uma quantidade negativa.

Para esse estudo, Briot e Bouquet (1860) apresentam algumas tarefas envolvendo a tangente a um círculo, que apresentam a seguir

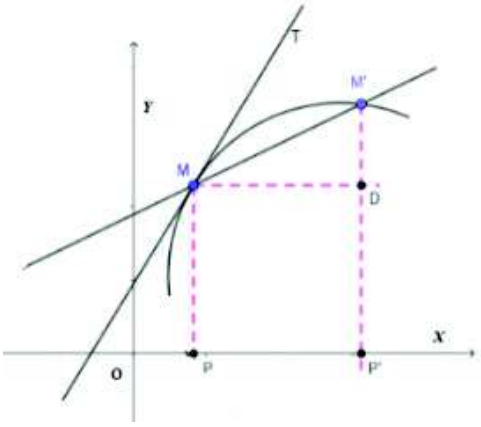
Problema 12

"E*ncontrar a equação tangente a uma curva qualquer" (*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.71, tradução nossa).

Para o cumprimento dessa tarefa, os autores propõem a definição da tangente, apoiados na figura 36. Se em torno do ponto M traçarmos uma secante MM' de maneira que o ponto M se aproxime indefinidamente do ponto M, a secante tende para uma posição limite MT, esta reta MT é a t*angente* à curva no ponto M.

Se $M(x, y)$ e $M'(x + h, y + k)$, a secante MM´ terá por coeficiente angular $\frac{k}{h}$. Quando o ponto M' se aproxima indefinidamente do ponto M, os dois aumentam h e k tendem simultaneamente par zero, e o coeficiente angular da tangente é igual ao limite de $\frac{k}{h}$, quer dizer, a derivada da ordenada considerada como função da abscissa.

Figura 36 - Representação geométrica de uma curva



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.71)

Se a equação da curva é resolvida em relação à y expressa pela forma $y = f(x)$, a tangente terá como coeficiente angular $y' = f'(x)$. Quando a equação da curva é $f(x, y) = 0$ não é resolvida, obtém-se a derivada y' da função implícita y a partir da equação: $f'x + y'f'y = 0$, na qual f' e f'_y designam as derivadas parciais da função $f(x, y)$ em relação a x ou em relação a y, donde deduz-se: $y' = -\frac{f'x}{f'y}$ (43)

Problema 13

Trata-se de "*encontrar a equação da tangente ao círculo" (*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.72, tradução nossa).

Para resolução desta tarefa, os autores consideram um plano cartesiano (de eixo perpendiculares) e cujo origem é o centro do círculo. Este último terá

por equação x^2+$y^2 - r^2 = 0$. Resolvendo a equação, temos: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ e tomando a derivada dessa função, temos $y' = \frac{-x}{\pm\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-x}{y}$

Conservando a equação não resolvida e aplicando na equação 43, obtêm-se o mesmo valor $y' = -\frac{x}{y}$.

A reta, suporte do raio, tendo por coeficiente angular $\frac{y}{x}$, vê-se que a tangente é perpendicular ao raio. Sejam M o ponto de tangência e (X, Y) as coordenadas de um ponto qualquer da tangente. A tangente tendo por coeficiente $-\frac{x}{y}$ e passando pelo ponto M é representada pela equação

$$Y - y = -\frac{x}{y}\,(X - x),$$

que podemos escrever da seguinte forma: $xX + yY = x^2 + y^2$. Haja visto que o ponto M está sobre o círculo, suas coordenadas verificam a equação do círculo, e tem-se $x^2 + y^2 = r^2$. A equação da tangente torna-se

$$xX + yY = r^2 \qquad (44)$$

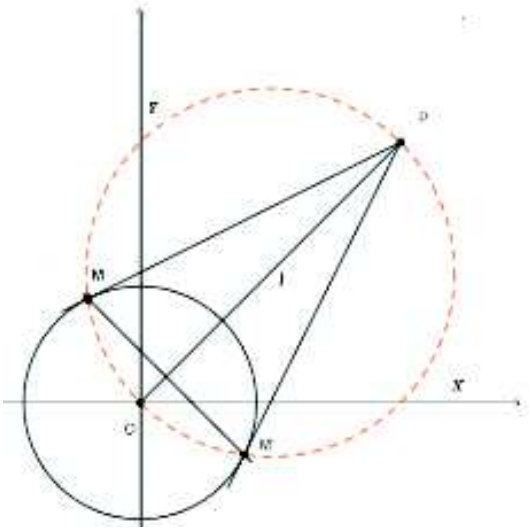
Problema 14

A tarefa a cumprir é a seguinte: "*construir uma tangente ao círculo por um ponto fora dele" (*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.73, tradução nossa).

Para resolver esta tarefa, os autores consideram um plano cartesiano (eixos perpendiculares) cuja origem é o centro do círculo considerado (Figura 37). A equação desse círculo representada por:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (45)$$

Figura 37 - Representação geométrica do problema 14



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.69)

Sejam P (x_1 , x_2) e PM uma tangente ao círculo no P. O problema agora é determinar o ponto de M (x, y). O ponto M estando sobre o círculo, suas coordenadas verificam a equação 44. A tangente ao ponto M tem por equação:

$$xX + yY = r^2. \quad (46)$$

Esta tangente passando pelo ponto P, sua equação deve ser verificada pelas coordenadas desse ponto, o que fornece a segunda equação;

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \quad (47)$$

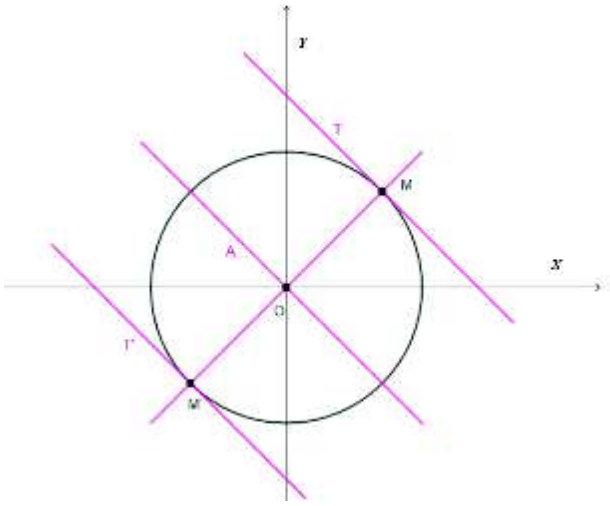
Resolvendo o sistema $\begin{cases} xX + yY = r^2. \\ xx_1 + yy_1 = r^2, \end{cases}$ obtém-se os valores desconhecidos x e y. A primeira equação representa o círculo proposto, a segunda reta. Procurar os valores x e y, soluções do sistema acima, é procurar os pontos de intersecção da reta e do círculo.

Problema 15

A tarefa proposta pelos autores é "*construir uma tangente ao círculo, paralela a um reta dada*" *(*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.75, tradução nossa)*.*

Para seu cumprimento, os autores consideram um círculo de equação $x^2 + y^2 = r^2$, e se propoem em determinar uma tangente paralela a reta $y = mx$, a qual podemos supor que passa pela origem, confirme a figura 38.

Figura 38 - Ilustração problema 15



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.75)

Se designamos por x e y as coordenadas do ponto M, sabe-se que o coeficiente angular da tangente é igual a $-\frac{x}{y}$, para que a tangente MT seja paralela à reta dada, o seu coeficiente angular deve ser igual a m, ou seja:

$$-\frac{x}{y} = m \text{ ou, } y = -\frac{1}{m}\, x \quad (48)$$

Os autores sugerem uma outra forma de cumprir essa tarefa. Eles procuram os pontos de intersecção da tangente de um circulo de equação $x^2 + y^2 = r^2$ e de uma reta qualquer de equação $y = mx + k$. Substituindo-se o valor de y na equação do circulo, obtém-se $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$, ou $(m^2 + 1)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$. Quando esta equação tem suas raízes reais, a reta corta o círculo em dois pontos cujas abscíssas são raízes desta equação.Se as raízes são iguais, os dois ponto de intersecção se confundem e a secante torna-se secante ao círculo.Enfim, quando as raízes são imaginarias, a reta não enconta o círculo.

Assim, a condição para que a reta seja tangente ao círculo é: $m^2k^2 - (m^2 + 1)(k^2 - r^2) = 0$,ou $k^2 = r^2(m^2 + 1)$. A equação da reta, na qual substitui-se k pelo seu valor, torna-se: $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ (49)

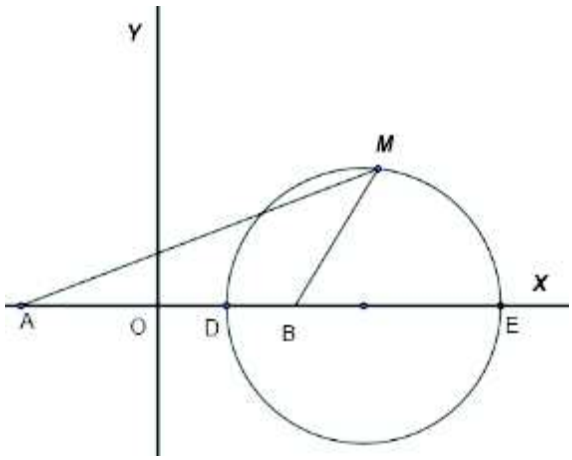
Esta equação,que contém um parâmetro arbitrario m, representa todas as tangentes ao círculo. Se dermos a direção da tangente, o coeficiente angular m sendo conhecido, temos imediatamente todas as equações de duas tangentes paralelas à direção dada.

Problema 16

Pede-se "*encontrar o lugar geometricos de pontos cujas distâncias a dois pontos fixos sejam entres si em uma realção dada" (*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.76, tradução nossa).

Para fazer a demonstração, os autores apoiam-se na figur 39 e consideram os pontos A e B, a reta AB sendo tomada como eixo das abscissas.

Figura 39 – Ilustração problema 16



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.76)

e como eixo dos y a perpendicular passando pelo ponto medio do segmento AB.

Os autores designam por $2a$ a distância AB, $\frac{m}{n}$ uma dada razão e x e y as coodenadas de um ponto qualquer do *lugar geométrico*, esse lugar terá por equação: $\frac{y^2+(x+a)^2}{y^2+(x-a)^2} = \frac{m^2}{n^2}$ ou

$$x^2 + y^2 - 2ax \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} + a^2 = 0 \qquad (50)$$

É um círculo cujo centro é situado sobre o eixo dos x, as duas estremidades do diâmetro DE são os pontos que dividem a reta AB na relação de m a n.

Problema 17

Na tarefa 17, vislumbra-se "*achar os pontos de intersecção de dois círculos*" *(*BRIOT e BOUQUET, 1860, p.77, tradução nossa).

Considerando que os dois círculos têm por equações, em um plano cartesiano,

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + a'x + b'x + c' = 0.$$

As coordenadas dos pontos de de intersecção são as soluções, se existirem, do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'x + c' = 0 \end{cases}$

Os autores asseveram que se pode substituir o segundo círculo pela reta de equação:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') \qquad (51),$$

obtida subtraindo as duas equações anteriores membro a membro, consequentemente, o problema agora é procurar os pontos de intersecção do primeiro círculo e dessa reta. Se a reta corta o círculo, os dois círculos terão dois pontos de intersecção, e a equação (51) representará a secante comum.Se a reta torna-se tangente ao círculo, os dois pontos de intersecção se confundem.e os dois círculos são tangentes. A equação (51) representa, neste caso, a tangente comum. Enfim, quando a reta não encontra o círculo, os cois circulos não tem ponto em comum.

No entanto a equação (51) tem, em todo caso, uma significação géometrica que deve-se observado, segundo os autores. As equações de dois

círculos podem ser escritas sob a forma: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2=0$ e $(x-\alpha')+(y-\beta')-r'^2=0$.

A partir de ponto exterior qualquer P, construir dos circulos das tangentes PM, PM', temos $\overline{PM'}^2=\overline{PC'^2}-\overline{CM}^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2$ e $\overline{PM'}^2=\overline{PC'}^2-\overline{C'M'}^2=(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2-r'^2$.

Os primeiros membros das equações dos círculos, nas quais x e y são quaisquer, representam os quadrados dos comprimentos das tangentes PM e PM', passando por um ponto P do plano . Todavia, igualando a zero a diferença, escreve-se que esses dois quadrados são iguais entre si, e por consequaência que as duas tangentes PM e PM' são iguas. Assim a equação (51) obtida de certa maneira representa o lugar dos pontos donde as tangentes conduzidas aos dois círculos são iguais entre si. Esta reta é o que chamamos de *eixo radical* de dois círculos.

Por fim sendo dado três círculos $x^2+y^2+ax+by+c=0;x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$; $x^2+y^2+a''x+b''y+c''=0$, os eixos radicais dos círculos combinados dois a dois e tem por equação $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0;(a'-a'')x+(b'-b'')y+(c'-c'')=0$ e $(a''-a)x+(b''-b)y+(c''-c)=0$

A terceira equação sendo uma combinação de duas outras,o que resulta que os três eixos radicais passam por um mesmo ponto. Fianlizamos a sessão do estudo da obra com a abordagem dos autores sobre a concepção de lugar geométrico.

3.3 Lugares geométricos

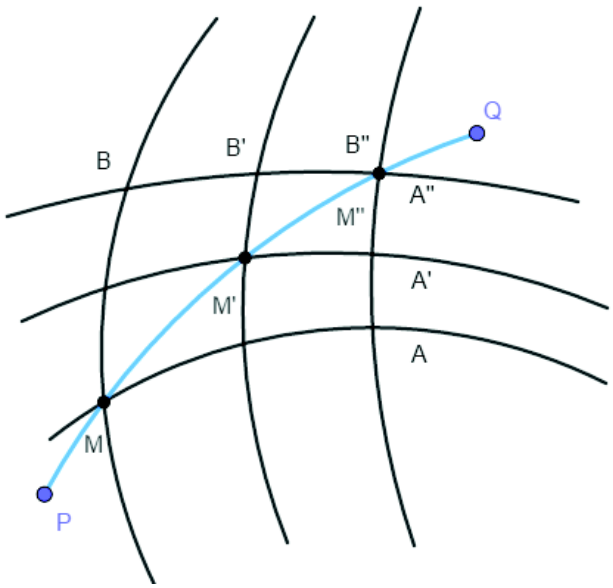
Para o estudo de lugar geométrico, Briot e Bouquet (1860) duas equações contendo uma constante ou *parâmetro* arbitrário a. Se se atribui a esse parâmetro um valor particular, obtém-se duas linhas A e B que se cortam em um ponto M (Figura 40) cujas coordenadas verificam simultaneamente as duas equações (52 e 53).

$F(x,y,a)$ (52)

$F_1(x,y,a)$ (53)

Quando se atribui ao parâmetro α um outro valor a', as duas linhas ocuparão as posições A', B', e o ponto de interseção virá em M'; um terceiro valor a'' atribuído ao parâmetro dará as duas linhas A'', B'', e o ponto de intersecção M'', e assim por diante, conforme representado na figura 40.

Figura 40 - Ilustração de um sistema genérico de coordenadas



Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p.79)

Os autores afirmam que se fizer variar o parâmetro α de uma maneira contínua, as duas linhas A e B se deslocarão no plano de maneira contínua e o ponto de intersecção M descreverá uma linha PQ. Esta linha PQ que eles chamam de lugar do ponto de intersecção de linhas variáveis A e B.

Obteremos a equação da linha PQ, lugar do ponto M eliminando o parâmetro a. De fato, ao eliminar a entre as duas equações (52) e (53) obteremos um equação $f(x, y) = 0$ (54), que não contém a letra a e tal que se substituirmos uma das equações propostas, por exemplo a equação (53) pela equação (54), o sistema de duas equações (52) e (53) seja equivalente ao sistema de duas equações (52) e 54). Diz-se que dois sistemas são equivalentes, quando eles são verificados pelos mesmos valores atribuídos às letras. Quando se atribui a a um valor particular, as coordenadas x e y do ponto M, juntas com este valor a, formam um sistema de valores de três quantidades x, y, a verificando ambas as equações (52 e 53), como o sistema de equações (52 e 54) é equivalente ao precedente, esses valores verificam também a equação 54, esta última equação não contendo o parâmetro a, é verificada pelas coordenadas de quaisquer pontos do lugar geométrico. Assim, a equação 54 representa uma linha fixa onde se move o ponto M, quando se faz-variar o parâmetro α.

Reciprocamente, todo ponto M, cujas coordenadas x e y verificam a equação 54, pertencem ao lugar geométrico, pois, de acordo com Briot e Bouquet (1860), se determinarmos o valor de a que verifica a equação 52 na qual se atribui a x e y os valores anteriores, obtém-se um sistema de valores de três

quantidades x, y, a verificando o sistema equações 52 e 54. O sistema de equações 52 e 53 sendo equivalente ao anterior, a equação (53) será verificada pelos mesmos valores, obtém-se, assim, duas linhas A e B passando pelo ponto M.

Os autores asseveram, no entanto, que pode acontecer que a um sistema de valores reais de x e de y verificando a equação (54) correspondesse um valor α, para o qual as equações 52 e 54 não representem linhas, é isso que aconteceria, por exemplo, se o valor a fosse imaginário. Mais, em todos os casos, os valores de x e y satisfarão equações 52 e 53.

Na sequência os autores continuam abordando dentro do âmbito de lugares geométricos, porém agora acrescentando mais um parâmetro às equações dos sistemas, como veremos a seguir.

Os autores consideram equações com dois parâmetros como segue:

$F(x, y, a, b) = 0$ (55)

$F_1(x, y, a, b) = 0$ (56)

Tais que $\varphi(a, b) = 0$. (57)

Neste caso, os autores, como anteriormente, atribuem ao parâmetro a um valor particular, consequentemente, a equação 57 permite determine o valor de b, e as equações 55 e 56 representam duas linhas A e B interceptando-se no ponto M pertencente a uma linha PQ, cuja equação pode ser obtida eliminando os dos dois parâmetros a e b nas três equações 55, 56 e 57. Isto significa encontrar uma equação do tipo $f(x, y) = 0$ (58) que não contèm a e b, e que junto com as equações 55 e 56 formam um sistema de três equações propostas.

Quando se atribui à a e b valores, verificando a equação (58), as coordenadas x e y do ponto M, juntos a esses valores de a e b, formam um sistema de valores de quatro quantidades x, y, a, b verificando as três equações 55, 57 e 58. Visto que este sistema de três equações é equivalente ao sistema 55, 56 e 58, os valores verificam também a equação (58). Esta última equação, sendo independente de a e de b, é verificada pelas coordenadas x e y de todos os pontos do lugar.

Reciprocamente, todo ponto M, cujas coordenadas x e y verificam a equação (58), pertence ao lugar geométrico, pois se determinarmos os valores de a e de b que verificam as duas equações (55 e 56) nas quais atribui-se a x e y os valores precedentes, obtém-se então um sistema de valores de quatro

quantidades x, y, a, b verificando o sistema das três equações 55, 56 e 58. O sistema de três equações 55,56 e 57 sendo equivalente ao anterior, a equação (57) será também verificada, e tem-se duas linhas A e B, passando pelo ponto M.

Para generalizar as proposições anteriores, os autores consideram as equações supomos duas equações 58 e 59:

$$F(x, y, a, b, c, \dots, h) = 0 \tag{58}$$

$$F_1(x, y, a, b, c, \dots, h) = 0 \tag{59}$$

contendo n parâmetros variáveis $a, b, c, \dots, h$, relacionados entre eles pelos $n - 1$ equações de condição:

$$\begin{cases} \varphi(a, b, c, \dots, h) = 0, \\ \varphi_1(a, b, c, \dots h) = 0. \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \varphi_{(n-2)}(a, b, c, \dots, h) = 0 \end{cases} \tag{60}$$

Se atribuirmos ao parâmetro a um valor particular, os valores correspondentes dos $n - 1$ outros parâmetros são determinados por $n - 1$ equações 60, e as duas equações 58 e 59 representam duas linhas A e B que se cortam em um ponto M.

Quando variamos o parâmetro a, os outros, também, variam simultaneamente, e o ponto M descreve-se um lugar geométrico. Obtém-se a equação desse lugar geométrico, eliminando os n parâmetros entre as $n + 1$ equações (58, 59 e 60).

Os autores asseveram que se supomos que os dois parâmetros variáveis a e b contidos nas equações 55 e 56 estão ligados por uma equação de condição (57), seus valores seriam determinados por essas duas equações, as duas curvas A e B seriam fixas, assim como o ponto M, e não haverá o lugar geométrico. Se ao contrario, os dois parâmetros não estiverem ligados por nenhuma relação, poderiamos lhe atribuir valores tais que os duas curvas A e B se interceptassemm em um ponto dado “à vontade”, no plano , e o ponto M descreveria todo o plano.

Em geral, para que o ponto de intesecção descreva um lugar geometrico, é necessário que os n parametros contidos nas equações de duas linhas A e B, estejam ligados por $n - 1$ equações de condição. Essas $n - 1$ equações de condição, com as equações de duas linhas A e B, formam desta maneira um

sistema de $n+1$ equações, contento $n+2$ quantidades variáveis $a, b, c, \ldots, h, x, y,$ das quais uma só é arbitrária.

Se o número de equações de condição ´fosse apenas $n-2,$ essas equações, com as duas equações das linhas A e B formem um sistema de n equações entre $n+2$ quantidades variáveis, duas quaisquer dessas quantidades, por exemplo x e y, poderiam ser escolhidas “à vontade”. É possível que as duas linhas variáveis A e B se cortem em vários pontos. Neste caso, de acordo com os autores, o cálculo precedente dá o lugar geométrico descrito pelo conjunto desses pontos.

Os autores apresentam problemas a respeito das proposições acerca do estuo de lugares geométricos, no entanto, escolhemos não as trazer, pelo fato de a maioria não fazer de nosso estudo da fase experimental.

Na sequência, os autores continuam a abordar outros objetos que fazem parte do campo da geometria analítica plana da época, os quais são caracterizados como as curvas de segundo grau: *gênero elipse, gênero hipérbole, gênero parábola, e* outras curvas como *cissoide de diocles, estrofóide, limaçon de Pascal, a rosácea de quatro pétalas*, e estudo das *seções cônicas*.

Tais objetos, além de não fazer parte de nosso escopo de estudo, necessitam, em nosso ponto de vista, um estudo aprofundado, inclusive das razões de ser desses objetos, de fazerem parte do referido campo de estudo de GA.

Incluem-se num possível estudo, as relações ecológicas entre esses objetos, seu nicho originário com a mecânica celeste, os corpos celestes, a física, portanto, fenômenos da natureza etc. Em geral, é necessária a compressão de como tais objetos foram incorporados à GA, ou como a partir da razão de ser dessa geometria, o conhecimento evolui chegando ao conhecimento que hoje chamamos GA, como o estudo destas ditas curvas de segundo grau se constituíram ao longo da história dentro do campo da geometria. Tudo isso, para afirmarmos que extrapola os objetivos desta tese, razão pela qual sugerimos para estudos futuros em novas pesquisas que podem ou não levar em conta a nossa investigação como ponto de partida.

3.4 Elementos de conclusão do capítulo

A partir do estudo realizado é possível sintetizar de forma geral de que se ocupa a GA: procurar a equação de uma figura definida geometricamente,

reciprocamente construir uma figura geométrica dada a sua equação e por fim estudar as relações existentes entre as propriedades geométricas das figuras e as propriedades analíticas das equações.

Do ponto de vista epistemológico, o estudo que desenvolvemos neste capítulo nos permitiu construir um modelo de referência para GAP, especialmente, tendo como alcance o estudo dos sistemas de coordenadas, do ponto, da reta e o círculo até o final do século XIX. As questões ecológicas que foram apresentadas ao longo do estudo corroboram para a conclusão dos objetos que estão no cerne da razão de ser e de existir GA. A dimensão didática deste estudo está apoiada na referência de manual escolar da época. É notório que as organizações matemáticas encontradas neste estudo sofreram algumas mutações até chegar a ser mais próximas das organizações matemáticas dos manuais atuais, conjecturamos que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) pode ter influenciado tais transformações, no entanto, não aprofundamos tal conjectura em nosso estudo.

Observamos que Birot e Bouquet (1863) estabeleceram relações dos conceitos utilizados, como por exemplo, sistema de equações, com a álgebra linear. Em nosso ponto de vista, a abordagem inicial estava mais ou menos pautada na geometria sintética e nas operações algébricas tradicionais, muito mais próxima de uma aritmética algebrizada e da álgebra propriamente dita.

É possível observar na organização matemática, principalmente, partir do estudo da homogeneidade, da noção de lugares geométricos, do estudo de equações lineares, e em seguida o aparecimento dos sistemas lineares, os fundamentos presentes no que chamamos atualmente de Álgebra Linear (AL). Nesse sentido, esses dois campos de estudo estão intimamente ligados e de fato como alguns autores, afirmam, há uma dependência entre esses campos de estudo.

Destacamos ainda, na obra de Birot e Bouquet (1863), implicitamente, a noção de dependência linear, o conceito de vetor, mesmo não abordado de forma explicita nos tópicos estudados. Como veremos no capítulo quatro, o que permaneceu vivo foi a álgebra linear como fundamentadora dos processos algébricos para a resolução das tarefas de GA. No caso da obra analisada, os aspectos geométricos estão sempre presentes e articulam-se com o algébrico, tendo o apoio da geometria sintética.

Nesse sentido, o MER, constituído neste estudo será a base de diálogo entre o modelo de referência dominante para o ensino de GA na atualidade e um modelo alternativo que será proposto para a formação de futuros professores.

Antes de apresentarmos um esquema que representa e sintetiza o nosso MER, julgamos necessário discutir as questões que se põem em torno da razão de ser de GA. Levando em conta o recorte temporal que realizamos no estudo, não focalizamos o estudo das cônicas e seções cônicas.

Buscamos as primeiras publicações oficiais que trataram de geometria analítica, pois esse nome só passou a ser usado depois de 1800. Anteriormente, os estudos dessa área eram chamados de *aplicações de análise a geometria.* Se faz necessário traçar um esboço do corpo de saberes ou de objetos que se constituem como a razão de ser dessa geometria.

Nesse sentido, o que identificamos é que no trecho da obra de Descartes chamado pelos contemporâneos de futura GA, o autor propôs operações aritméticas, com segmentos de reta, que vão se constituir, primeiro como segmentos, e depois evoluir para operações tendo como conceito fundante a noção de distância. Tais operações até então não eram realizadas com os Elementos de Euclides. A partir disso, utilizou letras para representar valores desconhecidos, esse fato foi um passo importante para inserção da álgebra em GA.

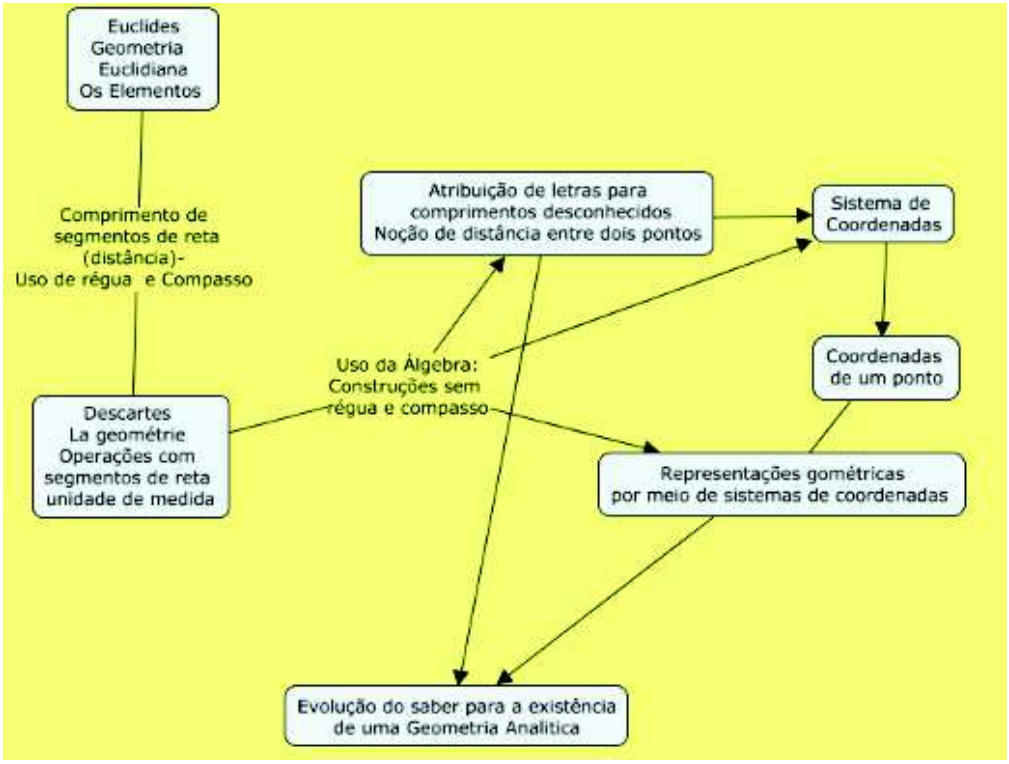
Outro ponto fundamental, é o problema que traz em si a noção de coordenadas de um ponto, que vai revolucionar esta noção para diferentes tipos de sistemas de coordenadas e representação de diferentes objetos, como uma reta, um círculo, cônicas etc. Ressaltamos que, embora os sistemas recebam na contemporaneidade o nome de cartesiano, sabemos pelos relatos históricos da época, da imensa contribuição de Fermat, que poderia inclusive, talvez, garantir a existência do sistema fermatiano. No entanto, optamos como marco para o nosso estudo a obra de Descartes, como indicadora do surgimento de GA.

Que seria a ideia da razão de ser de GA? Inferimos, diante de nosso estudo, que todos os teoremas e construções matemáticas, nesse campo de estudo, foram geradas a partir da noção de operações com segmentos delimitados por dois pontos, além disso, do ponto de vista de um sistema de coordenadas, a abordagem foge da linearidade (uma dimensão) da geometria Euclidiana.

Ponderamos, ainda, que a GA que conhecemos na atualidade se constituiu, pós Descartes, com as inúmeras e diferentes contribuições dos matemáticos que estruturaram este corpo de conhecimento, que se distancia das ideias iniciais, frente ao marco da matemática moderna.

Uma questão fundamental que ressaltamos é que, em nosso ponto de vista, a razão de ser de GA (Figura 41) reside no estudo da geometria, por meio das representações geométricas, aliada a ferramentas da álgebra. Com a evolução da GA, ela recair também sob o domínio da álgebra linear, como aporte tecnológico-teórico (no sentido da TAD). Entretanto, não nos debruçamos especificamente sobre álgebra linear, mas apenas no tocante aos objetos compartilhados com GA e dentro do nosso arcabouço de estudo, no plano.

Figura 41 - Esquema de ilustração de razão de ser de GA



Fonte: Elaborado pela autora

Diante de tudo exposto, sintetizamos o nosso MER em um esquema que mostra as relações entre os objetos (Figura 42). Neste esquema fica claro que a geometria analítica a qual nos debruçamos é a plana, ainda que não daremos conta de todos os seus objetos, mas apenas de parte deste setor de GA, por meio de alguns objetos de estudo.

Com relação à organização matemática do estudo, dividimos em três organizações: a organização matemática dos sistemas de coordenadas e representação do ponto, a organização matemática para o estudo da reta e uma

organização matemática para o estudo do círculo. Como veremos no texto mais adiante, há diferentes tipos de organizações matemáticas, segundo Chevallard (1999), que se completam para constituir um campo de estudo, como a GA, por exemplo.

As organizações matemáticas identificadas neste estudo se apoiam em problemas, que em nosso ponto de vista, são tarefas fundamentais, segundo o quadro 6, cujas técnicas, a teoria e a tecnologia se constituem como o ambiente tecnológico- teórico que vai fundamentar o estudo de GAP (ponto, reta e círculo no plano), consolidando uma *teoria* fundamentadora.

Quadro 6 - Quadro de tarefas do MER

QUADRO DESCRITIVO DAS TAREFAS	
TIPO DE TAREFA	**DESCRIÇÃO**
T_1	*encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado*
T_2	*por um ponto dado levar uma reta paralela a uma reta dada*
T_3	*levar uma reta por dois pontos dados*
T_4	*achar o ponto de intersecção de dois pontos dados*
T_5	*achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas*
T_6	*reconhecer se três pontos estão em linha reta. Na linguagem atual utilizamos o alinhamento de três pontos dados*
T_7	*reconhecer se três retas passam por um mesmo ponto dado*
T_8	*encontrar o ângulo de duas retas, o que os autores parecem propor é determinar ângulos entre duas retas dadas no plano*
T_9	*de um ponto dado baixar uma perpendicular sobre uma reta dada, e achar o comprimento dessa perpendicular*
T_{10}	*por um ponto de intersecção de duas retas dadas levar uma reta perpendicular a uma reta dada*
T_{11}	*Achar o lugar dos pontos igualmente distantes de dois pontos dados*
T_{12}	*encontrar a equação tangente a uma curva qualquer*
T_{13}	*encontrar a equação da tangente ao círculo*
T_{14}	*levar uma tangente ao círculo por um ponto exterior*
T_{15}	*levar uma tangente ao círculo, paralela a um reta dada*
T_{16}	*encontrar o lugar de pontos cuja as distâncias a dois pontos fixos sejam entres si em uma realção dada*
T_{17}	*achar os pontos de intersecção de dois círculos*

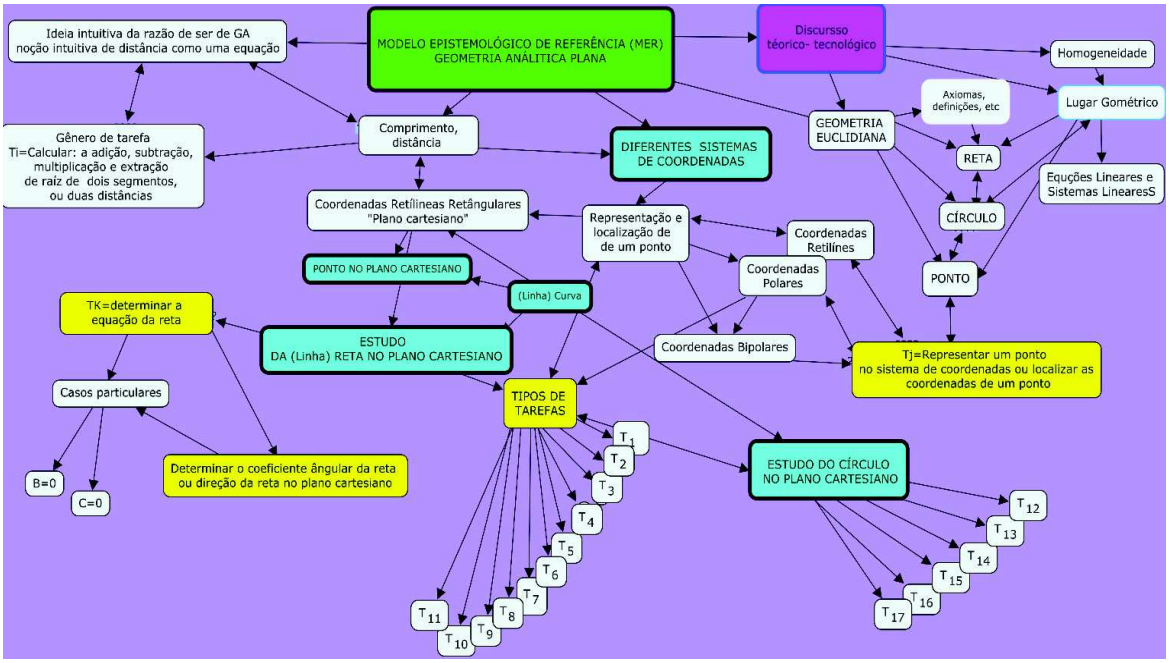
Fonte: Elaborado pela Autora

Os problemas propostos se configuram como parte integrante do nicho ecológico de GAP. É importante identificar, de um lado, se as tarefas e as técnicas (bloco técnico-prático) empregadas para resolução dessas tarefas vivem nas instituições contemporâneas, nos manuais escolares que serão analisados, por outro lado, se igualmente é possível identificar, em tais materiais os blocos tecnológicos-teórico (teoria e tecnologia) das técnicas, ainda que fossem seus vestígios.

Sintetizamos, no quadro 6, as principais tarefas identificadas no MER, em seguida, apresentamos um mapa sintético do ME, segundo a figura 42, posicionando tais tarefas no constructo geral das organizações matemáticas.

Dizemos que são os tipos de tarefas principais porque, elas podem demandar a resolução de *subtarefas*, as quais não incluímos no quadro descritivo. São tipos de tarefas que são a essência para a resolução de uma tarefa principal, em alguns casos, é caracterizada como técnica.

Figura 42 - Ilustração do Modelo Epistemológico de Referência (MER) da pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora

O mapa descrito, na figura 42, sintetiza as relações existentes entre os elementos fundamentais das organizações matemáticas (*tarefa, técnica, tecnologia e teoria)*. Ressaltamos que as técnicas já foram descritas no desenvolvimento do estudo do MER.

O nosso MER, ilustrado sinteticamente (figura 42), corresponde a várias organizações matemáticas locais, que apesar de não completar todo o campo da geometria analítica plana, corresponde a uma parte muito importante do estudo de GA, na educação básica brasileira, na contemporaneidade. Nesse sentido, como veremos nas demais etapas desenvolvidas nesta pesquisa, a geometria analítica (plana) estudada desde os fundamentos do sistema cartesiano, no ensino fundamental brasileiro, chegando até a GA, no ensino médio, corresponde à base imprescindível na formação de futuros professores de matemática. Em que pese a GA do ensino superior, há necessidade de um diálogo com aquela estudada na educação básica.

Para fins de nossa pesquisa, realizamos um recorte, do ponto de vista epistemológico, para constituição de um modelo alternativo, para desenvolver uma proposta de formação de professores. Assim, no próximo capítulo, desenvolvemos o estudo dos referenciais curriculares e manuais de ensino, como etapa importante para fornecer elementos de construção de um modelo alternativo para a formação inicial do professor de matemática.

Nessa perspectiva, propomos realizar uma análise da dimensão didática, nos manuais que podemos chamar de atuais. Neste caso, nos debruçaremos sobre manuais em português brasileiro, que trazem a grande influência do movimento da matemática moderna, a partir dos anos 90.

No âmbito TAD, nossa hipótese é que, do ponto de vista matemático, a matemática atual se fundamenta na matemática do século XIX, trazendo alterações que podem ter sido influenciadas pelo MMM. No entanto, a abordagem didática empregada nessas obras mais atuais, é diferente, ao mesmo o tempo, alguns objetos ou estudos podem ter desaparecido do habitat institucional, a escola, em contra partida, parece que não surgiram novos objetos. Estas questões serão contempladas no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 4 CONSTRUÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA ALTERNATIVO PARA O ESTUDO DE GAP

Neste capítulo, buscamos discutir a ecologia de GAP no sistema educativo brasileiro a partir dos documentos oficiais nacionais, manuais escolares e o currículo de um curso de Licenciatura em Matemática. Ressaltamos a importância dos livros didáticos (manuais escolares), que são um ponto de apoio para o professor da educação básica, especialmente no ensino médio.

O objetivo inicial desse capítulo, é delinear um modelo epistemológico dominante (MED) baseado em três categorias de análise: um modelo de referência dominante para o ensino de geometria analítica plana a partir dos documentos oficias do ensino médio, um segundo modelo dominante a partir dos manuais escolares e um terceiro modelo que se refere ao currículo de GA prescrito para a Licenciatura em Matemática.

Na constituição e discussão dessas três categorias, ressaltamos duas dimensões que foram fundamentais nas análises: a dimensão epistemológica e a dimensão didática. Nesta perspectiva, buscamos analisar como o desenvolvimento do saber e sua transposição didática, a partir dos anos 1990, se efetivou nas obras, e quais foram as eventuais mudanças. O que ainda vive no sistema educativo e o que desapareceu?

Por fim, propomos um Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA) para o estudo de GAP do ponto e da reta, este último é a base de articulação ente o MER e o MED como fundamentação epistemológica e didática para o desenvolvimento do PEP. A seguir, descrevemos o percurso realizado na constituição desses modelos por meio do mapa descrito na figura 43, situando-o enquanto etapas da pesquisa bibliográfica.

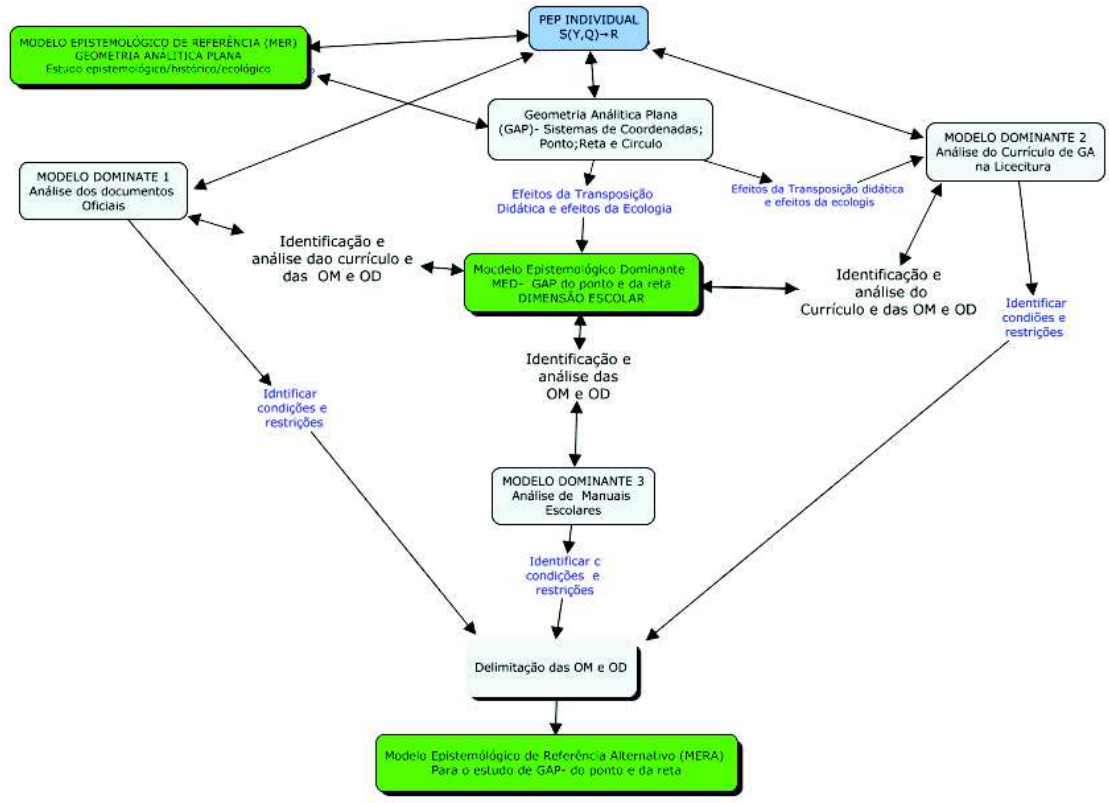
Organizamos um mapa, segundo a figura 43, que descreve globalmente o percurso da pesquisa e o os aspectos gerais estruturantes da descrição e análise de cada modelo epistemológico.

Inicialmente, partimos de nosso PEP individual, da pesquisa (figura 43), para estudar a razão de ser de GAP (o que é GA?), constituindo o nosso MER que explica os objetos dessa geometria, tendo como marco o panorama histórico, apresentado no capítulo 3.

Articulamos os modelos dominante, MED_1, MED_2 MED_3, correspondentes respectivamente ao estudo dos documentos oficiais, do currículo da Licenciatura

em Matemática e dos manuais escolares brasileiros, de forma que a partir das condições e restrições (no sentido da TAD) identificadas, propuséssemos o nosso MERA para o estudo de GAP do ponto e da reta.

Figura 43 - Mapa de organização e articulação dos modelos



Fonte: Elaborado pela autora

Globalmente os modelos se apoiam no construto da noção de praxeologia, (CHEVALLARD, 1999) e contemplam duas categorias de análises: organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD). O MERA será a base referencial para o desenvolvimento do dispositivo *PEP-FP/TAD*, o qual discutiremos no capítulo 5. Globalmente, ilustramos a ideia do trabalho realizado com os modelos por meio do mapa ilustrado pela figura 43.

O trabalho de construção do MER se caracterizou como um PEP individual, $S\ (Y,\ Q) \rightarrow R$, pois é o um percurso solitário da pesquisadora cuja questão norteadora se apoia na razão de ser de GA: *o que é GA?* A resposta encontrada é um modelo de referência que comporta os objetos matemáticos, julgados mais importantes para pesquisa em curso.

Nesta seção, trataremos também de um desenho, ainda que global da GA, que é estudada nos cursos de licenciatura, atualmente, por meio do currículo prescrito pra GA do curso de licenciatura que realizamos os experimentos. O

objetivo foi identificar qual a geometria analítica é *a priori*, conhecida por esses sujeitos.

4.1 Geometria analítica nos documentos oficiais

O ensino médio brasileiro compreende a quarta etapa de ensino da Educação Básica, na vida dos estudantes, está última se constitui pela educação infantil, ensino fundamental I, ensino fundamental II e ensino médio. As reformulações que vem passando o ensino médio no Brasil foram estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) de 1996, regulamentada em 1998 pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000) que buscaram atender a uma reconhecida necessidade de atualização da educação brasileira e mais recentemente pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC) em 2018.

Os documentos oficiais são aqueles que norteiam o currículo como um todo e as práticas escolares brasileiras, a partir de documentos específicos para cada etapa de ensino. No entanto, em nosso ponto de vista, *a priori* e de maneira geral, esse currículo não está bem delimitado em termos de organizações matemáticas e didáticas, são orientações gerais, o que identificamos, em todos os documentos analisados. Nesta subseção, vamos discutir a abordagem de GA proposta pelos documentos oficiais, com o objetivo de traçar um desenho de como a GA deve ser ensinada nas escolas de ensino médio, por meio das praxeologias prescritas. Ressaltamos que o currículo brasileiro é organizado por meio de parâmetros e documentos oficiais que norteiam o trabalho das escolas no país.

Nesse sentido, selecionamos os seguintes documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), Brasil (2000); Parâmetro Curriculares + do Ensino Médio (PCN+), Brasil (2002); Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM), Brasil (2006) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), Brasil (2018).

Para revelar o modelo de referência dominante no currículo brasileiro, levantamo-nos como questão: quais organizações matemáticas e didáticas a respeito de GA estão presentes nos documentos oficiais, ou no currículo do ensino médio do Brasil?

O primeiro documento que selecionamos para ser analisado foi o PCNEM (BRASIL, 2000). Esse documento é organizado por área de conhecimento e a

matemática se situa na parte III, que compreende as ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Como o foco da nossa pesquisa é a formação inicial do professor de matemática, não vamos no debruçar detalhadamente sobre as finalidades do ensino médio, porque tal discussão consta em diversos trabalhos já publicados, nos interessa analisar o lugar da GA no currículo proposto nos referenciais.

Na sua introdução, o documento apresenta as finalidades do ensino de matemática para o ensino médio, mais especificamente, uma discussão geral sobre os diferentes aspectos da matemática que são fundamentais e que devem ser priorizados ao longo desta etapa de ensino bem como as habilidades que devem ser desenvolvidas nos alunos. Nesse documento, afirma-se que

> é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de ideias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (BRASIL, 2000, p. 40).

Ao longo do documento, as orientações se configuram como aspectos gerais de como deve ser o ensino de matemática, física, química e biologia. As habilidades que devem ser desenvolvidas pelo aluno, são expressas em termos de ser capaz de fazer representação e comunicação, interpretar por fim investigar e compreender. No desenvolvimento da representação e comunicação, documento indica as seguintes habilidades:

> Ler e interpretar textos de interesse científico e tecnológico; Interpretar e utilizar diferentes formas de representação (tabelas, gráficos, expressões, ícones...); exprimir-se oralmente com correção e clareza, usando a terminologia correta; Produzir textos adequados para relatar experiências, formular dúvidas ou apresentar conclusões; Utilizar as tecnologias básicas de redação e informação, como computadores; Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para a produção, análise e interpretação de resultados de processos e experimentos científicos e tecnológicos; Identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade; Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações; Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socio- econômicos, científicos ou cotidianos.(BRASIL, 2000, p. 12)

Observa-se neste trecho relações gerais com os objetos matemáticos, especificamente, com os campos gerais dos conhecimentos, por exemplo

geometria e álgebra. O mesmo ocorre na competência investigação e compreensão, o documento indica as habilidades relacionadas:

> Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando, regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções; Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender; Formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já enunciadas; Desenvolver modelos explicativos para sistemas tecnológicos e naturais; Utilizar instrumentos de medição e de cálculo; Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema; Formular hipóteses e prever resultados; Elaborar estratégias de enfrentamento das questões; Interpretar e criticar resultados a partir de experimentos e demonstrações; Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar; Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais; Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades.(BRASIL, 2000, p. 12)

Nesta segunda competência, aparece o desenvolvimento de hipótese, experimentação e demonstração. Destacamos que o uso de tecnologias aparece nos três blocos de habilidade.

Concluímos, portanto, que neste documento aparecem ideias gerais sobre as organizações didáticas relacionadas ao saber matemático, são vestígios. As OM e OD propriamente ditas não estão contempladas nesse documento.

O segundo documento analisado foi publicado dois anos depois dos PCNEM, “Parâmetros Curriculares + Ensino Médio”. São orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, tendo eixos norteadores das diferentes áreas. Nos do eixo: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: “este volume dedicado às Ciências da Natureza e Matemática procura trazer elementos de utilidade para o professor de cada disciplina, na definição de conteúdo e na adoção de opções metodológicas” (BRASIL, 2002, p. 12).

No texto, apresentam-se as competências e habilidades em termos de objetivos de ensino. Em certos casos, os documentos relacionam as habilidades a certos campos de estudo da matemática, por exemplo: “compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social” (BRASIL, 2002, p. 117). Para esta competência associa-se como habilidade:

> Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais,

> políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes. (BRASIL, 2002, p.122)

Na sequência, o documento aborda em termos de habilidades, e orienta sobre a escolha dos conteúdos que devam permitir ao aluno desenvolver tais habilidades e competências. O documento sugere os conteúdos por meio de temas gerais, a geometria analítica está incluída na temática de geometria e medidas: “Para o desenvolvimento desse tema, são propostas quatro unidades temáticas**:** geometrias plana, espacial, métrica e analítica” (BRASIL, 2002, p. 123). Com relação a unidade de GA o texto propõe que:

> A unidade Geometria analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. (BRASIL, 2002, p. 124)

O documento sugere para o ensino da GA estratégias gerais como pode ser na seguinte asserção:

> [...] mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão o que a geometria analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1º e 2º graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas. Além de conhecer uma forma de pensar em Matemática, entender o mundo do século 17, que deu origem ao cartesianismo, pode ser uma excelente oportunidade para que o aluno perceba o desenvolvimento histórico do conhecimento e como certos momentos dessa história transformaram a ciência e a forma de viver da humanidade. (BRASIL, 2002, p. 124)

Por fim, o documento apresenta os objetivos e as habilidades para a unidade dedicada a GA

> Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras; interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características; Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.(BRASIL, 2002, p. 125)

Apesar de anunciar que apresentará os conteúdos com suas respectivas habilidades, o que é apresentado no documento são os conteúdos gerais para cada período letivo e as habilidades gerais: “geometria analítica: representações

no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras" (BRASIL, p. 128).

A partir da análise desse documento, podemos inferir que ele indica procedimentos e estratégias gerais para o ensino de GA, mas não apresenta tarefas e técnicas/tecnologias associadas aos diferentes objetos que devem ser ensinados. Consequentemente o documento não apresenta de forma explicita organizações matemática e didáticas para o ensino de GA, o que vemos são vestígios de como estas últimas podem ser elaboradas.

O terceiro documento (Brasil, 2006) que analisamos traz orientações curriculares para o ensino médio (OCEM), ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.

Neste documento, as orientações são direcionadas ao professor, em seguida, aborda-se cada área em separado como anteriormente, no entanto o documento se reporta especialmente aos conteúdos e cada área: matemática, biologia, química e física com os seguintes tópicos: questões de conteúdo, questões metodológicas, o uso de tecnologias, a organização curricular e o projeto político- pedagógico, temas complementares e considerações finais.

O documento, como os anteriores, foca as competências e habilidades que devem ser desenvolvias: "partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o pensar matematicamente". (BRASIL, 2006, p. 70). De acordo com o documento, o currículo deve estar organizado em quatro blocos de conteúdo: "números e operações; funções, geometria, análise de dados e probabilidade" (BRASIL, p. 70). No que se refere a geometria analítica o documento traz algumas considerações:

> A geometria analítica tem origem em uma ideia muito simples, introduzida por Descartes no século XVII, mas extremamente original: a criação de um sistema de coordenadas que identifica um ponto P do plano com um par de números reais (x, y). Partindo-se disso, podemos caracterizá-la como: a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). Esses dois aspectos merecem ser trabalhados na escola. (BRASIL, 2006, p. 77).

Além disso, apresenta ainda, de maneira geral, a abordagem didática que deve ser dada aos conteúdos e elucida possíveis estratégias de ensino, como pode ser observado na seguinte citação:

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre geometria e álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico de geometria analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos. (BRASIL, 2006, p. 77)

Neste trecho, observa-se um resumo dos conteúdos que devem ser ensinados no ensino médio e abordagens que não devem ser adotadas pelo professor. O estudo do ponto, da reta e de distância aparece no cerne das orientações. Algo que nos chama atenção é a orientação a respeito de conversões de representações dos registros de representação semiótica, envolvendo figuras geométricas e equações, e a articulação entre a geometria e a álgebra, neste caso há vestígios de uma organização didática.

Na sequência, Brasil (2006) apresenta elementos de possíveis organizações matemática e didática por meio de exemplo que relaciona uma equação à representação de uma reta.

> Uma vez definido o sistema de coordenadas cartesiano, é importante trabalhar com os alunos o significado de uma equação. Por exemplo: fazê-los entender que a equação corresponde a uma reta paralela ao eixo y ou que qualquer ponto que tenha segunda coordenada negativa não pode estar na curva. O entendimento do significado de uma equação e de seu conjunto de soluções não é imediato, e isso é natural, pois esse significado não é explícito quando simplesmente se escreve uma equação. (BRASIL, 2006, p. 77)

O documento ainda explicita os conteúdos que devem ser ensinados: sistema cartesiano, ponto, distância, reta, círculo, vetores, sistemas de equações, posições relativas entre retas e círculos, sistemas de equações, regra de Cramer. Além disso, apresenta como esses conteúdos devem ser tratados em sala de aula:

> Entendido o significado de uma equação, deve-se iniciar o estudo das equações da reta e do círculo. Essas equações devem ser deduzidas, e não simplesmente apresentadas aos alunos, para que, então, se tornem significativas, em especial quanto ao sentido geométrico de seus parâmetros. As relações entre os coeficientes de pares de retas paralelas ou coeficientes de pares de retas perpendiculares devem ser construídas pelos alunos. Posições relativas de retas e círculos devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações. Aqui estamos tratando do entendimento de formas geométricas via álgebra. (BRASIL, 2006, p. 77)

Quanto ao estudo de vetores, o documento sinaliza a importância de desenvolver com os alunos tanto o ponto de vista geométrico (conjunto de segmentos orientados de mesma direção, comprimento e sentido), quanto algébrico, caracterizado pelas suas coordenadas, relacionando as operações com coordenadas (soma, multiplicação por escalar com seu significado geométrico).

Apesar de a noção de vetor não estar indicada no currículo de matemática, no ensino médio, está presente, no ensino de física, inclui-la nas aulas de matemática, poderia corrigir essa distorção.

Enfim, de acordo com Brasil (2006), o estudo de sistemas lineares pode ser feito associado à posição relativa de duas retas no plano, bem como a discussão da solução das possíveis soluções de sistemas 2x3 e 3x3, pelo uso de escalonamento, e sugere que se abandone a regra de Cramer na resolução de sistemas 3x3 e o estudo de determinantes, como indicado na seguinte sugestão:

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2 X 2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. (BRASIL, 2006, p. 78)

Há neste trecho do documento Brasil (2006) vestígios de possíveis organizações matemática, incluindo tarefas dos tipos: determinar a solução de um sistema linear e determinar posição relativa de duas retas. Estes tipos de tarefas estão implícitos nas orientações. A técnica de escalonamento está também presente, bem como a indicação de qual técnica não se deve utilizar.

Por fim, nos debruçamos sobre o documento oficial mais atualizado que norteia a educação básica como um todo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Inicialmente ressaltamos que este documento tem como marco legal as alterações promovidas na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBN), por meio da lei nº 13.415/2017, destacamos dois artigos que

fundamentam a base para o ensino médio, seu currículo e áreas de conhecimento:

> Art. 35 -A. A Base Nacional Comum Curricular definirá direitos e objetivos de aprendizagem do ensino médio, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas seguintes áreas do conhecimento [...] Art. 36. § 1º A organização das áreas de que trata o caput e das respectivas competências e habilidades será feita de acordo com critérios estabelecidos em cada sistema de ensino. (BRASIL, 2017, p. 1)

Diante desse marco legal, a BNCC define dois parâmetros como decisões de ações para a educação, traz uma caracterização para organizações didáticas.

> Contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas; Decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;(BRASIL, 2018, p. 16).

Tendo em conta essa perspectiva, supomos que a BNCC poderia trazer novos elementos de análises que corroborassem com a nossa pesquisa, no sentido de um currículo detalhado para o ensino médio, em termo de organizações matemáticas que incluíssem tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, envolvendo os objetos matemáticos de ensino, tais como: sistema de coordenadas cartesianas, representação de um ponto no plano cartesiano, reta, círculo e cônicas. Vale ressaltar que o documento abrange todas as áreas do ensino escolar, no entanto nossa lupa se detém sobre possíveis organizações matemáticas e didáticas em torno de GA.

Neste sentido, o documento não avança em relação aos parâmetros anteriores, o trabalho curricular se apoia em competências e habilidades que, em nosso ponto de vista, representam vestígios de organizações didáticas. Algumas habilidades parecem dar a ideia de tarefa ou técnica (CHEVALLARD,1999).

Com relação aos objetos que fazem parte do campo de estudo de GA, identificamos alguns objetos, tais como: as equações lineares, plano cartesiano, pares ordenados e ponto no plano cartesiano.

Tais objetos de conhecimento identificados, para possíveis organizações matemáticas, se relacionam com as habilidades voltadas para o ensino fundamental, series finais, que compreende do 6º ao 9º ano. Nesse sentido O

primeiro objeto de estudo relevante que identificamos é o estudo do plano cartesiano, das equações lineares e propriedades de igualdade que apresenta elementos para constituição de uma organização matemática.

> [...]Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados. [...]Habilidade: associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono; Propriedade de igualdade [...] Habilidade: reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 301-302)

Na sequência, o documento apresenta o estudo algébrico, por meio das equações,

> Linguagem algébrica: variável e incógnita.[...]Habilidade: Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita; Equações polinomiais do 1º grau.[...]Habilidade: resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma , fazendo uso das propriedades da igualdade (BRASIL, 2018, p. 306-307)

Sobre o estudo de geometria, há uma associação dos objetos de estudo da geometria sintética, porém no plano cartesiano, o que revela que o estudo das noções de GA se inicia exatamente nessa etapa de ensino. Nesta perspectiva, o documento descreve os elementos que devem ser fonte de ensino e aprendizagem:

> Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem.[...] Habilidades: realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro; reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem. (p. 308- 309)

Em seguida, aparece o estudo das equações lineares e sua associação com a representação de uma reta no plano cartesiano bem como o sistema de equações. Tais conhecimentos se apoiam na álgebra linear, como é possível concluir a partir do seguinte trecho do documento:

> Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano; Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano Cartesiano. [...] Habilidades: associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano; resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso; resolver e

> elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo .(BRASIL, 2018, p. 312-313)

Destacamos que, embora apareçam as equações polinomiais de segundo grau, o documento não faz referência à sua representação gráfica no plano cartesiano ou sua relação com o objeto (lugar geométrico) parábola, que só vai aparecer no estudo da função polinomial de 2º grau, no ensino médio. Por fim, o estudo de distância entre pontos no plano cartesiano é também um dos focos sugerido pelo documento:

> Distância entre pontos no plano cartesiano.[...]Habilidade: determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano;(BRASIL, 2018, p. 318-319)

Identificamos no documento da BNCC que as ideias fundamentais, que correspondem a razão de ser de GA, aparecem no ensino fundamental séries finais (do 6º ao 9ºano). No entanto, ressaltamos que na prática esse estudo será, *a priori*, mais aprofundado no ensino médio, etapa subsequente da educação básica.

No caso da abordagem do currículo do ensino médio deste documento, não aparece com o mesmo detalhamento que se fez para o ensino fundamental, o que trouxe elementos para constituição de organizações matemáticas e didática para as séries finais do ensino fundamental. Na BNCC o currículo é baseado em competências gerais e habilidades gerais para o ensino de matemática, não aborda o estudo dos objetos de GA de forma detalhada. Para o pensamento geométrico por exemplo, o texto indica que:

> Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança. (BRASIL, 2018, p. 527)

Diante desta abordagem genérica de competência gerais para o ensino de matemática, buscamos identificar no documento, qual habilidade específica poderia guardar alguma relação com o estudo de GA. Nesse sentido, encontramos a habilidade, representada pelo código, EM13MAT301, descrita como:

> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 536)

Analisando cada habilidade específica para cada campo de estudo, foi possível perceber que nenhuma delas estão relacionadas ao estudo de GA propriamente dito. O documento faz referência ao estudo de funções polinomiais de primeiro e segundo grau, estabelecendo relações geométricas com o plano cartesiano:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;[...] (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (BRASIL, 2018, p. 543)

Neste caso a habilidade encontra-se inserida no eixo definido pelo documento como “números e álgebra”. No eixo de habilidades relacionadas à “geometria e medidas”, não há qualquer relação com GA, aparece apenas uma alusão ao termo “cônica”: (EM13MAT509) “Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital”. (BRASIL, 2018, p. 543)

Neste documento da BNCC, a GA aparece mais fortemente com os conceitos de base, que devem ser desenvolvidos no ensino fundamental. O próprio texto justifica isso, e, é o único trecho que encontramos fazer alusão à GA:

> Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica.(BRASIL, 2018, p. 272).

A análise da BNCC, no que tange aos objetos que fazem parte do corpo de estudo de GA, revelou, em nosso ponto de vista, uma evolução no que se refere à inserção de tópicos matemáticos, que são a base para o estudo de GA,

a serem explorados no ensino fundamental, em relação aos documentos oficiais anteriores. No que esse refere ao ensino médio, houve uma total retração, ou seja, o desaparecimento deste tópico do currículo, o qual permanece, ainda descrito por habilidades. A ausência de organizações matemáticas e didática ainda perdura nesse documento, assim como nos anteriores.

Concluímos o estudo dos documentos oficiais, que representa um modelo dominante do currículo no âmbito nacional da educação. Ressaltamos que as habilidades apresentadas em todos os documentos analisados, ora se assemelham a ideia de tarefas genéricas, ora de técnicas, no sentido da TAD, e ou como objetivos de ensino. Este último, em nosso ponto de vista, contém ideias de como proceder para construir organizações didáticas. No entanto, as praxeologias matemáticas e didáticas não são apresentadas.

Esclarecemos que incluímos nas análises o ensino fundamental, séries finais a partir da BNCC, porque o documento faz alusão ao início do estudo dos objetos de GA, nesta etapa de ensino, mas não nos debruçamos sobre outros documentos específicos do ensino fundamental por duas razões: primeiro porque julgamos desnecessário diante dos achados nos parâmetros e nas organizações curriculares do ensino médio; segundo por ser a BNCC o documento oficial mais recentemente publicado pelo Ministério da Educação (MEC).

Nesse sentido, o modelo dominante proposto nos documentos oficiais para o ensino de GA parte de ideias fundamentais desenvolvidas na educação básica que se configuram em torno da Geometria Analítica Plana (GAP), ou seja, cujo estudo tem como base os objetos sob o ponto de vista de coordenadas retangulares, dito sistema cartesiano. Este modelo será sintetizado em um mapa, envolvendo outros elementos que influenciam e norteiam o ensino de GA no sistema educativo brasileiro, como veremos na continuidade do texto.

O estudo de GA presente no currículo do ensino médio, nos documentos oficiais analisados, não inclui o estudo de vetores, GAE e cônicas. O currículo não exibe conjuntos de tarefas, ou uma organização matemática específica. No que se refere aos sistemas de equações, é indicada a técnica de escalonamento e a regra de Crammer.

Concluímos que as relações estabelecidas entre os objetos matemáticos se distanciam do MER que propomos, porque não exploram as organizações

matemáticas e didáticas, em torno dos objetos matemáticos, por meio de tarefas e suas técnicas.

4.2 Geometria Analítica nos manuais escolares

Esta seção continuamos por constituir um modelo dominante para o ensino de GA, partir da análise de manuais escolares brasileiros. Antes de adentrarmos na discussão, levantamos algumas considerações gerais de pesquisa a respeito da abordagem de GA em livros didáticos.

No âmbito da escola francesa, antes da reforma da Matemática Moderna, segundo Nguyen (2017), a geometria ensinada na educação básica e presente nos manuais escolares, compartilhava das mesmas fraquezas dos Elementos. Ela carece de fundamentos suficientes para provas rigorosas, pois a base era uma axiomática que permitia valer-se do que as figuras traziam como informações.

A autora destaca ainda que, por esta razão, no início dos anos 1950 na Bélgica e especialmente na França, os matemáticos começam a achar o ensino de geometria um tanto “empoeirado” e encorajam uma reforma no ensino. Ressaltamos que a autora está referindo-se à geometria sintética, especialmente, pois não fez um estudo dos manuais de GA que já existiam desde o início dos anos 1800. Aqui tentaremos identificar as mudanças ocorridas no ensino de GA, por meio dos manuais escolares, pós reforma.

A abordagem da Geometria Analítica atualmente, especialmente nos currículos de cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, está de acordo com a perspectiva descrita por Lebeau e Schneider (2010) e Nguyen (2017), que afirmam que existe uma dependência entre a GA e a álgebra linear. Esta dependência aparece mais claramente quando o estudo adentra as equações e sistemas lineares, porque as técnicas são justificadas por teorias que têm como base a álgebra linear, no entanto, estão bem explicadas e definidas no corpo de GA apresentado no manual francês que constituiu a base do nosso MER.

De acordo com Nguyen (2017), ao que concerne os tipos de abordagens, a geometria ensinada é um misto entre a geometria sintética, geometria analítica e a geometria vetorial. Ela afirma que várias propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço são exploradas experimentalmente, mas podem ser demonstradas dentro do quadro da geometria sintética. Em nosso ponto de vista, não há elementos suficientes par afirmar que no quadro de GA isso se efetiva,

pois, o estudo dos espaços vetoriais, por exemplo, e a própria álgebra vetorial permite demonstrações que são inacessíveis para geometria sintética, pois lhe falta o sistema de coordenadas.

Segundo Lebeau e Schineider (2010), a relação entre álgebra linear e a GA permanece sobreposta, pois as definições iniciais dos objetos matemáticos são dadas em termos de variáveis lineares e variáveis afins. A passagem do registro vetorial para o registro cartesiano se faz por intermédio do registro paramétrico, ou seja, a passagem de um registro a outro ocorre sem nenhuma referência teórica nem discurso tecnológico (sentido da TAD).

Para o nosso estudo, o modelo epistemológico alternativo, visa desenvolver o estudo de GAP, de forma independente do espaço vetorial, ou seja, nossa abordagem se apoiará na passagem da geometria sintética para geometria analítica, levando em conta os modelos de transposição diádica dominantes. Significa dizer que buscaremos apoio teórico na geometria sintética e na GA propriamente dita, assim, temos a influência da álgebra linear no estudo, mas, não teremos uma abordagem vetorial.

De acordo com os autores, os aspectos apontados sobre o currículo de GA conduzem a dificuldades de aprendizagem, particularmente relacionadas a equações cartesianas dos objetos geométricos.

Diante da necessidade de desenhar um modelo epistemológico dominante para o ensino de GA e dessas considerações a respeito da abordagem didática sobre GA, apoiados em nosso MER e nas asserções de Lebeau e Schneider (2010) e Nguyen (2017), nos debruçamos sobre os manuais escolares brasileiros, com o objetivo de estudar o lugar e as funções da GA.

Os livros didáticos de matemática publicados no Brasil, especialmente voltados para a educação básica, têm sido objeto de estudo de algumas pesquisas no campo da educação matemática, especialmente, as pesquisas que têm como referencial teórico a TAD. Além disso, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) facilitou o acesso das escolas, alunos e professores a diferentes coleções. O programa existe desde 1937, com diferentes nomes e por meio de decretos e resoluções. Ele visa distribuir livros didáticos gratuitos para os estudantes do ensino fundamental e médio das escolas públicas.

Com o passar dos anos, o PNLD foi se aprimorando e os livros didáticos também. Vale ressaltar que nem todas as publicações da área compõem o PNLD, mas somente aquelas que são indicadas pelo MEC, a partir de certos

critérios definidos nos editais, que ocorrem a cada três anos. No campo das pesquisas que analisam livros didáticos, com aporte da TAD, é comum que as análises dos títulos ou de parte deles, coadunem para um resultado que contesta os critérios indicados pelo MEC. Por exemplo, segundo Freitas (2015), a análise dos títulos a respeito de função exponencial indicou que o livro mais completo em termos da TAD, não fazia parte daqueles indicados no PNLD da época.

Em nossa pesquisa, a análise de livros didáticos do ensino médio que tratam de GA, começou quando realizamos o *estudo piloto*, naquela etapa da pesquisa (realizada em 2017). Selecionamos cinco títulos com base no PNLD de 2012 e 2015, esses títulos foram analisados em conjunto com os estudantes, *professores estagiários*, envolvidos no estudo piloto.

A metodologia para análise dos títulos apoiou-se em Almouloud (2015), com aporte da TAD. Devido a limitação de tempo do estudo, não foi possível indicar as organizações matemáticas e didáticas, de forma detalhadas para todos os títulos. Foi possível perceber globalmente que os blocos de conteúdo sobre GA em cada título não são diferentes, apenas a disposição deles em cada obra que é diferente.

Os tipos de tarefas presentes em cada obra são igualmente semelhantes. Para a constituição do modelo dominante nos livros didáticos, enquanto instituição, no sentido de Chevallard (1999), optamos por analisar dois títulos sendo um dos anos 1990 e um segundo dos anos 2000 e incluído no PNLD.

Escolhemos aleatoriamente um dos cinco títulos, analisados no estudo piloto, Souza (2010) e a segunda escolha foi Iezzi, Dolce, Machado, Gouçart, Castro e Machado (1990). Este segundo título foi escolhido por ser uma obra muito utilizada nos anos 90.

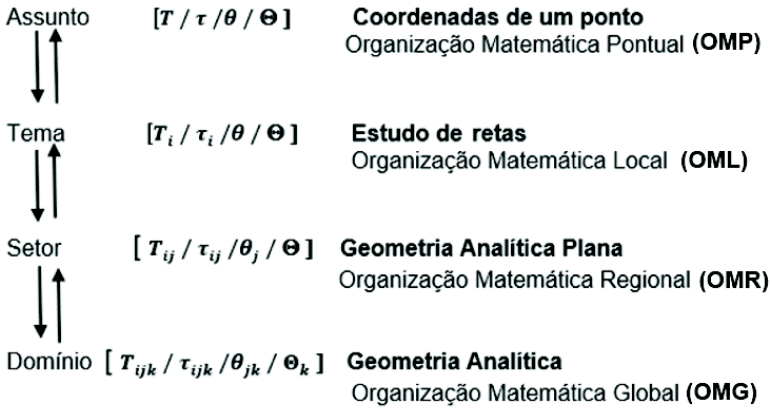
Ressaltamos que a análise dos livros didáticos selecionados visa evidenciar as organizações matemáticas (OM) ou potenciais praxeologias e as organizações didáticas (OD) neles propostas. Em termos da TAD, as organizações didáticas podem representar, em um momento, a organização do estudo, em outro a direção do estudo, entendemos que se faz necessário clarificar melhor tais denominações de acordo com a teoria.

Retomamos a noção de praxeologia, apresentada no capítulo 1, no sentido de Chevallard (1999), para ressaltar os elementos teórico- tecnológico-teóricos presentes em um conjunto de tarefas.

> Em torno de um tipo de tarefas T, encontramos, assim, em princípio, um trio formado por uma técnica (pelo menos), τ ,de uma tecnologia de τ, θ, e de uma teoria θ, Θ. Todo denotado por [T / τ /θ / Θ], constitui uma praxeologia pontual, esse qualificador significa que é uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefa, T. Tal praxeologia – ou organização praxeológica- é, portanto, constituída de um bloco prático-técnico [T/τ] e de um bloco tecnológico – teórico, [θ /Θ]. (CHEVALLARD, 1999, p. 5, tradução nossa). [33]

Apoiados em Chevallard (1999), organizamos, conforme a figura 43, um esquema da co-determinação dos domínios do conteúdo em termos dos tipos de organização, relativo às praxeologias em uma instituição, tomando como exemplo organizações matemáticas a respeito de GAP.

Figura 44 - Esquema das praxeologias dentro de uma instituição



Fonte: Elaborado pela autora

Chevallard (1999) assevera que as organizações pontuais (figura 44) vão, assim, se agregar, primeiro, em organizações locais, centradas sobre a mesma tecnologia determinada, em seguida em organizações regionais, formadas em tono de uma teoria, e por fim, o complexo praxeológico [$\boldsymbol{T_{ijk}}$ / $\boldsymbol{\tau_{ijk}}$ /$\boldsymbol{\theta_{jk}}$ / $\boldsymbol{\Theta_k}$], obtido em uma instituição dada pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias $\boldsymbol{\Theta_k}$.

Diante desse aporte teórico, visamos identificar, nos livros didáticos, as possíveis organizações matemáticas e didáticas em torno de GA. Para tanto, escolhemos dois livros. O primeiro que chamamos de Livro Didático 1 (LD_1) de Gelson Iezze e outros autores (IEZZE et al, 1990) e o segundo (LD_2), o livro de Joamir Souza (SOUZA, 2010).

---

[33] Autour d'un type de tâches *T*, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une *technique* (au moins), τ, d'une technologie de τ, θ, et d'une théorie de θ, Θ. Le tout, noté [T / τ /θ / Θ], constitue une praxéologie *ponctuelle*, ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, *T*. Une telle praxéologie – ou *organisation praxéologique* – est donc constituée d'un bloc pratico-technique, [T/τ], et d'un bloc *technologico-théorique*, [θ / Θ]. (CHEVALLARD, 1999,p. 5)

Inicialmente, para a análise dos livros, identificamos a divisão e distribuição dos conteúdos de GA nas obras selecionadas. LD_1 é dividido em cinco unidades, a terceira unidade explora GA em dois capítulos, o capítulo cinco aborda o ponto e a reta e o capítulo seis a circunferência e as cônicas. Na organização dos temas de LD_2, a GA, está dividida em quatro capítulos, o primeiro versa sobre o ponto, o segundo sobre a reta, o capítulo três aborda a circunferência e o capítulo quatro as cônicas. Em ambos os livros a GA abordada se limita a GAP, ou seja, ao estudo no plano cartesiano.

Com base no MER desenvolvido em nossa pesquisa (capítulo 3), abordamos aspectos gerais de GA, do seu surgimento e GAP cobrindo até o estudo do círculo. Em nossas análises para constituição do modelo dominante nos livros didáticos delimitamos como objetos, o estudo de ponto e a reta.

4.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas e estudo do ponto

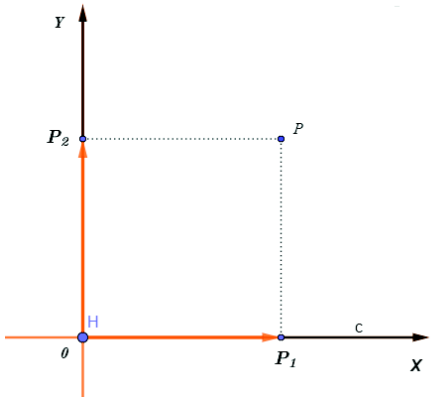
Organizamos nossas análises por temática de estudo de cada obra, por exemplo, ponto, reta e circunferência. Descreveremos a organização didática do tema relacionado e na sequência o bloco de tarefas e técnicas associadas a esta organização. A primeira organização didática identificada corresponde à forma de conduzir e direcionar o estudo de ponto.

Segundo LD_1, o estudo de do ponto delimita-se em quatro assuntos: as coordenadas cartesianas no plano, distância entre dois pontos, obtenção dos pontos numa reta, ponto médios de um segmento e condição de alinhamento de três pontos.

As *coordenadas cartesianas* são introduzidas pela representação de um ponto no plano cartesiano, em LD_1 justificando que a abordagem pelas figuras será substituída gradativamente por elementos algébricos, pares ordenados e equações.

De imediato, os autores da obra apresentam a figura no plano cartesiano (figura 45, reconstruído no Geogebra), a definição dos eixos x e y perpendiculares, as projeções ortogonais sobre os eixos x e y, a definição das coordenadas do ponto P.

Figura 45 - Sistema cartesiano de LD_1



Fonte: Adaptado de Iezze et al (1990, p. 1)

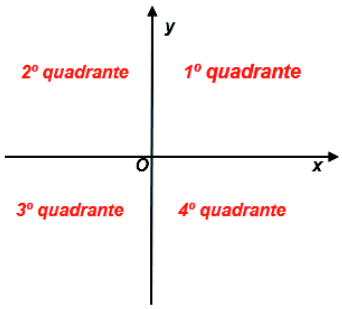
Os autores utilizam a representação da figura 45, para ilustrar e definir um sistema cartesiano, como segue:

> Num plano α, vamos considerar dois eixos x e y, perpendiculares no ponto O. Sendo P um ponto qualquer de α, chamando P_1 e P_2 suas projeções sobre os eixos x e y, respectivamente, definimos: *abscissa* de P: é o número real $x_p = \overline{OP_1}$; *ordenada* de P $y_p = \overline{OP_2}$. Ao par de eixos x e y,com origem em O, denominamos *sistema cartesiano ortogonal* e indicamos por xOy.O ponto *O* chama-se origem do sistema. O eixo x também indicado por *Ox é* o eixo das abscissas e, enquanto eixo y, ou *Oy*, é o eixo das ordenadas. O plano α, munido do sistema cartesiano, é denominado de plano cartesiano. A abscissa e a ordenada do ponto P são chamadas *coordenadas* de P em relação ao sistema *xOy* e geralmente são representados na forma de um par ordenado (x_p, y_p), no qual o primeiro elemento é sempre a abscissa. Portanto, mostramos que a cada ponto P de α associamos um único par ordenado de números reais (x_p, y_p), também é verdade que a cada par ordenado de reais está associado um único ponto α.(IEZZE et al, 1990, p, 1- 2)

Nota-se que os autores começam a abordagem do conteúdo a partir do bloco tecnológico-teórico que servirá de justificativas para a execução das técnicas das tarefas. Nesse sentido, definimos como sendo Θ_1= sistema cartesiano ortogonal, o conjunto teórico que justifica a existência e funcionamento de um sistema cartesiano ortogonal e dos elementos que o compõem, ou seja, $\Theta_1 = \{$*projeções de um ponto, coordenadas de um ponto, par ordenado, abscissas e ordenadas*$\}$.

Na sequência, os autores apresentam mais elementos desse bloco tecnológico- teórico que são a definição dos quadrantes, as propriedades dos eixos coordenados e as propriedades de bissetrizes, assim, dizemos que um ponto pertence a uma das regiões do plano, chamada de quadrantes, segundo a figura 46.

Figura 46 - Regiões do plano cartesiano



Fonte :Adaptado de Iezze et al, 1990, p. 2

Além da definição dos quadrantes, os autores estabelecem propriedades dos eixos coordenados e propriedades das bissetrizes dos quadrantes:

> - Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada igual a zero e reciprocamente, todo ponto de ordenada nula está no eixo *Ox;*
> - Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa igual a zero, reciprocamente, todo ponto de abscissa nulo está no eixo *Oy;*
> - Todo ponto da bissetriz b_1 dos quadrantes ímpares (1º e 3º quadrantes) tem ordenada igual a abscissa e reciprocamente, todo ponto de coordenadas iguais está na bissetriz b_1;
> - Todo ponto da bissetriz b_2 dos quadrantes pares (2º e 4º quadrantes) tem ordenada igual ao oposto da abscissa e, reciprocamente, todo ponto de coordenas simétricas está na bissetriz b_2.(IEZZI et al, 1990, p.3)

Essas propriedades podem ser também incluídas no bloco tecnológico teórico (θ_1, Θ_1), que justifica possíveis tarefas a respeito do sistema cartesiano ortogonal.

Com relação às tarefas propostas para este tópico, identificamos basicamente os seguintes tipos: identificação das coordenadas de pontos no plano cartesiano, representar pontos no plano cartesiano por meio de suas coordenadas, identificar o quadrante (localização) de um ponto, esta tarefa também corresponde a estabelecer relações entre a localização de um ponto com o eixo x, ou o eixo y. Sintetizamos os seguintes tarefas:

t_1: representar pontos no plano cartesiano, por meio de suas coordenadas;

t_2: identificar as coordenadas de um ponto, por meio de sua representação no plano cartesiano;

t_3: localizar um ponto no plano cartesiano;

t_4: determinar um ponto simétrico à um ponto dado em relação aos eixos coordenados à origem.

Analisando essas tarefas presentes na obra (LD_1), embora elas estejam descritas em formas diferentes, integram um mesmo objetivo, um mesmo tipo de

tarefas, que sintetizamos por $\boldsymbol{T_1}$ = *localizar pontos em um plano cartesiano*. Com relação à técnica empregada para este tipo de tarefa, a qual identificamos por meio da representação e identificação, dos pontos dados, como exemplos para as propriedades.

O recurso da visualização é fundamental para que o sujeito, aluno usuário do livro, consiga estabelecer as relações entre a localização do ponto, seu quadrante, os eixos x e y, bem como a coordenada de origem. Sintetizamos tal técnica simplesmente *por* $\boldsymbol{\tau_1}$ = *marcar as coordenadas de um ponto no plano cartesiano*. Para cumprir essa tarefa, a régua ou malha quadriculada pode ser utilizada. A técnica é tão simples que se confunde com a tarefa, pode também em outras situações se confundir com a tecnologia, no entanto, as correlações que precisam ser feitas, na compreensão do que implica a localização de um ponto vai depender da intervenção do professor.

Com relação ao LD_2, no capítulo dedicado ao estudo do ponto e da reta, autor faz alusão à história da matemática citando a obra de René Descartes e Pierre Fermat. Em seguida, apresenta o plano cartesiano de eixos perpendiculares, por meio de um exemplo de representação de pontos nesse plano. Com uma nota lateral em que afirma: “Se um ponto *P* pertence ao eixo *x*, então a ordenada de *P* é zero. De maneira semelhante, se *P* pertence ao eixo *y*, a abscissa de *P* é zero” (SOUZA, 2010, p. 148). Na sequência, o autor já apresenta tarefas relacionadas ao tema.

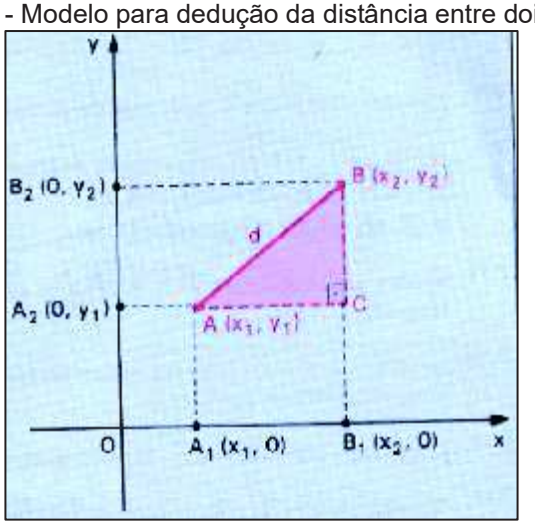
Os elementos teóricos são apresentados como se fossem uma revisão para o leitor. A notação de par ordenado, como coordenadas de um ponto (x, y) é representada por letra diferentes da obra anterior, ou seja, letras diferentes (a, b), sendo a abscissa e b a ordenada do ponto.

Nesta seção, os autores de LD_2 não apresentam qualquer propriedade ou relação das coordenadas de um ponto com a bissetriz do ângulo de cada quadrante do plano, estas vão ser apresentadas por meio das tarefas que serão propostas. Nesse sentido, os elementos teóricos deverão ser mobilizados no desenvolvimento das tarefas propostas

Concluímos que neste tópico em LD_1, há uma estrutura teórica bem mais sistematizada e explícita que em LD_2. Na segunda obra, o discurso tecnológico-teórico das tarefas apresentadas, não está evidente e requer que o professor realize tal sistematização.

Com relação aos tipos de tarefas e técnicas, do tópico em estudo (coordenadas cartesianas no plano) no segundo livro (LD_2), embora tenha atividades diferentes de LD_1, integram tarefas e técnicas do mesmo tipo, T_1 e τ_1, respectivamente. No entanto, uma das tarefas de LD_2 , aparece incluídas em um contexto problematizador da geografia que é o estudo de paralelos e meridianos, por meio de um atlas geográfico.

Figura 47 - Modelo para dedução da distância entre dois pontos



Fonte: Iezze et all (1990, p. 5)

O segundo tópico desenvolvido no estudo do ponto, em ambos os livros, é sobre a *distância entre dois pontos*.

Em LD_1, os autores apresentam a figura 47, em que expõem as projeções dos pontos formando um triângulo retângulo, dele deduz a distância a partir da relação entre o comprimento dos segmentos, pelo teorema de Pitágoras.

A figura 47, evidência elementos, como a relação entre os lados de um triângulo, cujo lado que representa a distância que se deseja calcular, corresponde à hipotenusa, evocando assim, o Teorema de Pitágoras. Este último é a teoria que justifica a técnica para dedução da equação que representa a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Tem-se ainda, as propriedades que envolvem a localização de pontos, ou seja, o bloco tecnológico-teórico $[\theta_1, \Theta_1]$, o teorema de Pitágoras e o conceito de distância linear entre dois pontos, ou seja, módulo, comprimento de um segmento cujas extremidades são dois pontos. Tudo isto para justificar a dedução da equação da distância.

Apoiados na figura 47, os autores justificam a seguir, como calcular a distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano:

> Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, vamos calcular a distância d entre eles. Essa distância também será indicada por d_{AB}. Inicialmente observemos na figura que: $d_{AC} = d_{A_1B_1} = |x_2 - x_1|$ e $d_{CB} = d_{A_2B_{21}} = |y_2 - y_2|$. Em seguida aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo *ABC,* temos: $d^2 = (d_{AC})^2 + (d_{CB})^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Logo, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, por exemplo, se $A = (7{,}4)$ e $B = (13{,}12)$, temos: $d = \sqrt{(13-7)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{6^6 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. (IEZZE, et al, 1990, p. 5)

Nota-se que esse novo bloco tecnológico-teórico é composto por saberes que a *priori* são conhecidos pelos alunos do ensino médio. Definimos como $\Theta_2 =$ *{Θ_1, teorema de Pitágoras, definição de módulo, distância linear, distância entre dois pontos no plano cartesiano*}, e o bloco tecnológico teórico $[\theta_2\Theta_2]$, sabendo que θ_2, inclui θ_1, e o discurso justificativo evidenciado na resolução de equações seja, do 2º grau, ou com radicais.

Do ponto de vista da organização didática, os autores valorizam mais o processo algorítmico do cálculo da distância, que efetivamente, o processo de dedução da equação da distância, pois apresenta um resultado pronto e acabado. Como veremos na sequência, as tarefas propostas nessa organização têm um caráter meramente algorítmico, de uso de "fórmula".

Na análise dos exercícios resolvidos, identificamos o seguinte tipo de tarefa: $T_2 =$ *calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano,* e a técnica que deverá ser utilizada na resolução das tarefas subsequentes é τ_2: *substituição de valores na fórmula que permite calcular a distância.* Destacamos outras tarefas apresentadas, como: calcular a medida do perímetro de um triângulo, sendo dados as coordenadas dos pontos que são vértices do mesmo, ou ainda calcular as medidas dos lados de um triângulo (ou de um polígono conhecido), sendo dado as coordenadas dos pontos que representam os vértices do triângulo (ou polígono).

Nas atividades propostas, das tarefas apresentadas nos exercícios resolvidos, estão presentes tarefas que consistem em: determinar as coordenadas de um ponto, sendo dadas as coordenadas de dois outros pontos no plano cartesiano; determinar um ponto na bissetriz dos quadrantes ímpares, sendo dada a distância desse ponto a um ponto dado, bem como as coordenadas desse ponto.

Em síntese, todas as tarefas se constituem em torno da fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos e das propriedades relacionadas com a localização de pontos no plano cartesiano. Nessa perspectiva,

identificamos, pelo menos, dois tipos de tarefas: $\boldsymbol{T_2}$ =*calcular a distância entre dois pontos* $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_2)$ *dado*; $\boldsymbol{T_3}$ =*determinar um ponto na bissetriz dos quadrantes ímpares (ou pares)*, sabendo sua distância ao ponto $P(x, y)$. Além dessas duas tarefas, identificamos uma terceira tarefa que aciona as coordenadas dos pontos dados, $\boldsymbol{T_4}$ = *mostrar que os pontos dados* $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ *e* $B(x_2, y_2)$ são vértices de um triângulo isósceles e retângulo.

Tomamos como exemplo a seguinte tarefa do tipo T4: Sendo dados os pontos A (4,-3), B (3,4) e C (-4,3), mostrar que esses pontos são vértices de um triangulo isósceles e retângulo. Em síntese, observamos que as tarefas apresentadas sobre distância se apoiam no bloco $[\theta_2\Theta_2]$.

A abordagem apresentada em LD_2 a respeito de distância entre dois pontos é semelhante à descrita em LD_1. Se diferencia apenas pelo fato de o autor de *LD₂* apresentar, primeiro um exemplo de distância entre dois pontos contidos em uma reta paralela ao eixo x, depois, para a distância entre dois pontos quaisquer. O bloco tecnológico-teórico é o mesmo que no *LD₁*.

Em termo de tipos de tarefas o segundo livro LD_2, apresenta atividades como situações-problema.LD_1, no entanto, o objetivo final das atividades leva às mesmas técnica do primeiro livro. A exceção é uma tarefa que utiliza a noção de circuncentro: $\boldsymbol{T_4}$**:** *determinar as coordenadas do circuncentro C do triângulo de vértices dados [P (0,5)*, Q (3,6) e R (8,1)]. Neste caso, as coordenadas dos pontos podem ser quaisquer desde que formem os vértices de um triângulo.

Em LD_2, o bloco tecnológico-teórico em torno de T_4 agrega, além do conceito de distância entre dois pontos, a noção de circuncentro, centro e raio de uma circunferência, ou de triângulo circunscrito. Para este tipo de tarefa (T_4), o bloco tecnológico- teórico se diferencia daquele descrito em LD_1, ou seja, teremos uma nova composição teórica Θ_3 = {distância entre dois pontos, centro e raio de uma circunferência, sistemas lineares}. O autor exemplifica com um exercício resolvido:

> Resolução: O circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que passa por seus vértices. Calculando a distância de cada ponto (P, Q, R) ao centro $C(x_c\, y_c)$ da circunferência temos: $d(P,C) = \sqrt{(x_c - 0)^2 + (y_c - 5)^2} = \sqrt{{x_c}^2 + {y_c}^2 - 10y_c + 25}$; $d(Q,C) = \sqrt{(x_c - 3)^2 + (y_c - 6)^2} = \sqrt{{x_c}^2 + {y_c}^2 - 6x_c - 12y_c + 45}$; $d(R,C) = \sqrt{(x_c - 8)^2 + (y_c - 1)^2} = \sqrt{{x_c}^2 + {y_c}^2 - 16x_c - 2y_c + 65}$;Note que a medida do raio da circunferência é dada por $r = d(P,C) = d(Q,C) = d(R,C)$. Assim, podemos escrever e resolver o seguinte sistema:$\begin{cases} d(P,C) = d(Q,C) \\ d(P,C) = d(R,C) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{{x_c}^2+{y_c}^2-10y_c+25}=\sqrt{{x_c}^2+{y_c}^2-6x_c-12y_c+45}\ (I)\\ \sqrt{{x_c}^2+{y_c}^2-10y_c+25}=\sqrt{{x_c}^2+{y_c}^2-16x_c-2y_c+65}\ (II)\end{cases}$ Elevando os membros de I e II ao quadrado, temos: $\begin{cases}{x_c}^2+{y_c}^2-10y_c+25={x_c}^2+{y_c}^2-6x_c-12y_c+45\\ {x_c}^2+{y_c}^2-10y_c+25={x_c}^2+{y_c}^2-16x_c-2y_c+65\end{cases}\Rightarrow$
$\begin{cases}6x_c+2y_c=20\ .(4)\\ 16x_c-8y_c=40\end{cases}$
$\begin{cases}24x_c+8y_c=80\\ 16x_c-8y_c=40\end{cases}\Rightarrow 40x_c=120\Rightarrow x_c=3.$ Substituindo $x_c=3$ na equação $6x_c+2y_c=20\Rightarrow 6.3+2=20\Rightarrow 2y_c=2\Rightarrow y_c=1.$ Portanto, as coordenadas do circuncentro do $\triangle PQR$ são $C(3{,}1)$. O circuncentro de um triângulo pode ser interno ou externo a ele. (SOUZA, 2010, p. 151)

Os procedimentos realizados foram a substituição de valores na fórmula de distância entre dois pontos do plano, e resolução de sistema de duas equações. Neste exemplo, a resolução do sistema de equações se caracterizou como a técnica, mas efetivamente poderia ser uma subtarefa, cujo discurso tecnológico -teórico se apoia na definição de sistema lineares.

Desta forma, a subtarefa faz parte da técnica para resolução da tarefa principal (T_4). Assim, esta tarefa se apoia em $[\theta_3\Theta_3]$ no qual θ_3 é todo o discurso justificativo já descrito, da técnica $\tau_4 =$ *resolução de equações, resolução de sistema de equações*.

Com relação às demais tarefas descritas em LD_2 aparecem tarefas do tipo calcular o perímetro de um polígono, sendo dada as coordenadas dos pontos que representam os vértices.

Acrescenta-se ainda, mais um tipo de tarefa que envolve o conceito de seno, $T_5 =$ *Calcular seno de um dos ângulos de um triângulo retângulo, sendo dadas as coordenadas de seus vértices, como no exemplo:* "Considerando o triângulo de vértices $A(4,5), B(4,2)$ e $C(1,5)$, retângulo em A, calcule *sen* $\hat{c}$." (SOUZA, 2010, p. 152).

Esta tarefa é uma repetição das tarefas apresentadas que envolveram polígono, com a diferença de ela incluir o seno. Nesse sentido, a técnica desenvolvida será o cálculo da distância entre dois pontos, que representam os lados do triângulo, e em seguida a substituição dos lados na razão que define o seno de um ângulo interno de um triângulo retângulo.

A técnica, portanto, não difere daquela já descrita como τ_1, o que teremos é um discurso tecnológico- teórico cuja definição de seno é agregada, por meio de sua razão matemática, além disso, a teoria descrita por Θ_1,logo, o bloco $\Theta_4 =$ {Θ_1, *definição de seno dos ângulos de um triângulo retângulo*}

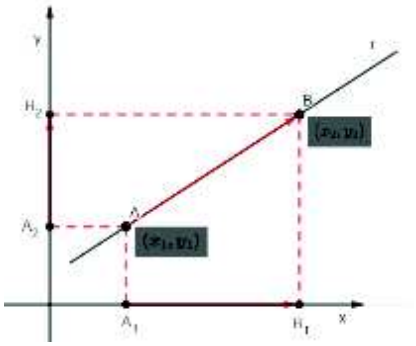
Dando continuidade ao estudo do ponto retomamos a organização didática de LD_1, o autor apresenta uma subseção que tem como título “obtenção de pontos numa reta” (IEZZE et al, 1990, p. 6). Os autores apresentam três situações que envolvem projeções de um segmento orientado, multiplicação de um número real por segmento orientado e enfim a obtenção de pontos numa reta. Para cada situação, o autor, apoiando-se em representações gráficas no plano, justifica o processo pelo qual pode-se obter pontos de uma reta, desde que sejam conhecidas as coordenadas de dois pontos distintos dessa reta.

No primeiro tópico, projeções de um segmento orientado, considera-se uma reta r do plano cartesiano, se tomarmos dois pontos distintos: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. “Vamos orientar o segmento AB no sentido de A para B. Assim, estamos considerando o ponto A como origem (ponto de partida) do segmento orientado.” (IEZZE et al, 1990, p. 6). Neste trecho começa a aparecer, implicitamente, a noção de vetores.

Os autores vão justamente argumentar sobre os resultados que podem ser deduzidos apoiando-se na figura 48.

> Quando projetamos o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ nos eixos x e y, obtemos os segmentso orientados $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$, cujas medidas algébricas medida do segmento geométrico afetada do sinal relativo à orientação) são dadas por: $\overrightarrow{A_1B_1} = x_2 - x_1$; $\overrightarrow{A_2B_2} = y_2 - y_1$.Essas fórmulas são validas para qualquer posição de A e de B (IEZZI et al, 1990, p. 7)

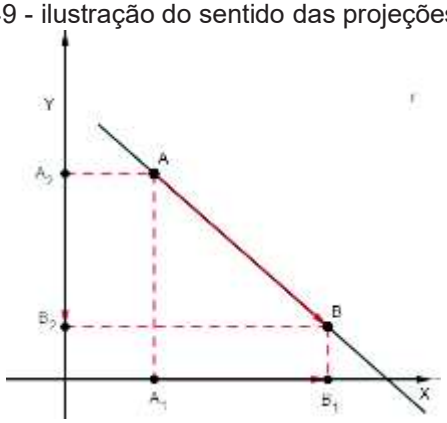
Figura 48 - projeção de um segmento orientado



Fonte: Adaptada de Iezzi et al (1990, p.7)

Com relação aos sinais, os autores afirmam que o segmento orientado $\overrightarrow{A_1B_1}$, tem o mesmo sentido que o eixo OX, enquanto que o segmento orientado $\overrightarrow{A_2B_2}$, tem sentido contrário ao do eixo OY.”(IEZZI et al, 1990, p. 7). Essa explicação foi ilustrada pela figura 49.

Figura 49 - ilustração do sentido das projeções de AB

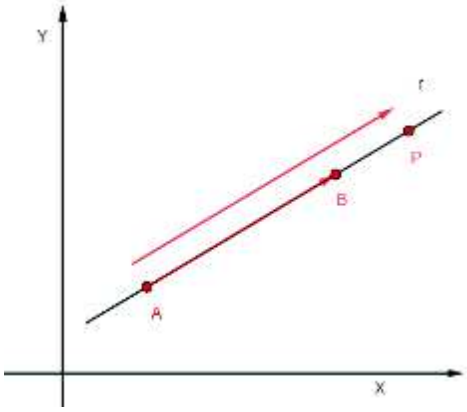


Fonte: Adaptada de Iezzi et al. (1990, p.7)

Nota-se que as justificativas apresentadas, para segmentos orientados e suas projeções, estão apoiadas na figura 50 e nas seguintes asserções:

> Sobre uma reta r tomamos um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, com $A \neq B$. Qualquer outro ponto P de r é extremidadde de um segmento orientado $\overrightarrow{AP}$, e existe um único numeral real t, tal que $\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{AB}$. Esta última igualdade significa que $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ estão sobre a mesma reta, têm a mesma origem A, a medida de $\overrightarrow{AP}$é igual à de $\overrightarrow{AB}$ multiplicada por $|t|$ e o sentido de $\overrightarrow{AP}$ é igual ao de $\overrightarrow{AB}$, quando $t > 0$, ou o contrário quando $t < 0$.(IEZZI et al, 1990, p.8)

Figura 50 - Multiplicação de um segmento orientado

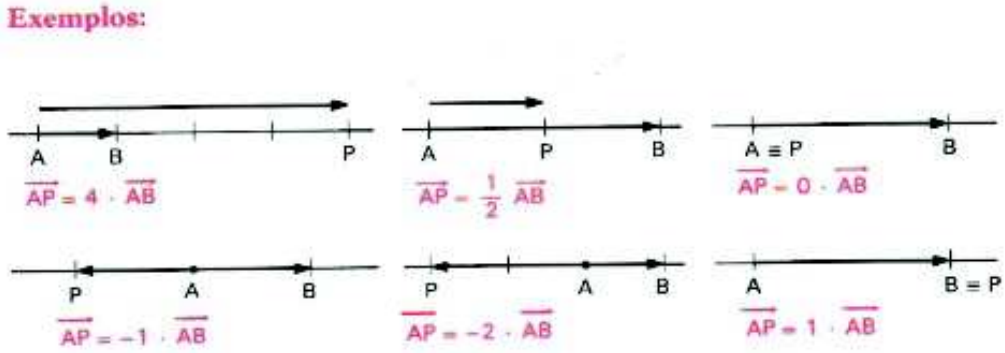


Fonte: Adap433tado de Iezzi et al, 1990, p. 7

Os autores apresentam alguns exemplos, conforme figura 51. A tarefa proposta envolve a ideia de segmentos orientados proporcionais. Essa ideia aparece no estudo de vetores e na álgebra linear, especialmente, a dependência linear de vetores. Ressaltamos que os fundamentos são geométricos e a escrita algébrica aparece como uma complementação.

Os autores chamam atenção que quando o ponto P coincide com o ponto A, tem-se $t = 0$. Se P≠ A, então os segmentos orientados $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm o mesmo sentido se e somente se $t > 0$ e sentidos opostos se e somente se $t < 0$.

Figura 51 - Exemplo de multiplicação de um número por um segmento orientado

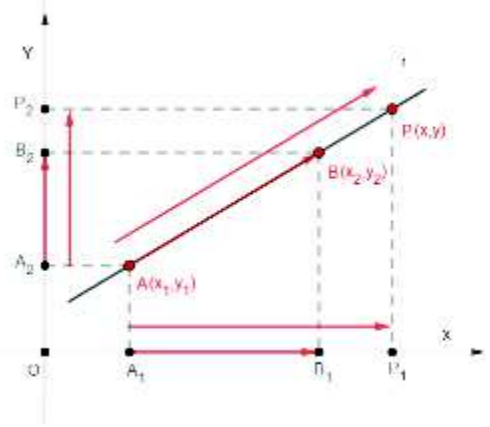


Fonte: Iezzi et al (1990, p. 8)

Em seguida, o autor propõe obter pontos numa reta dada no plano cartesiano, ou seja, considerando uma reta r no plano cartesiano, definida pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$,sendo $A \neq B$, obter as coordenadas de pontos de r.

Em linhas gerais, o objetivo é determinar dois pontos de uma reta dada no plano cartesiano, ou seja, determinar as coordenadas desses pontos. O que significa dizer que obteremos uma equação que seja capaz de expressar o que buscamos.

Figura 52 - Produto de segmentos no plano cartesiano



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p. 8)

Os autores asseveram:

> Dado um número real t, vamos determinar o ponto $P(x_3, y_3)$ de r, tal que $\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{AB}$. Projetando $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ sobre os eixos coordenados (ver figura 52) a orientação de $\overrightarrow{AP}$ relativa à de $\overrightarrow{AB}$ é mantida em projeção (se $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm o mesmo sentido, então $\overrightarrow{A_1P_1}$ e $\overrightarrow{A_1B_1}$ também têm, o mesmo ocorrendo $\overrightarrow{A_2P_2}$ e $\overrightarrow{A_2B_2}$. As retas $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ e $\overleftrightarrow{PP_1}$ são paralelas cortadas pelas transversais r e OX. Aplicando o teorema de Tales temos: $\frac{AP}{AB} = \frac{A_1P_1}{A_1B_1}$, portanto $t = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$ portanto $x_3 - x_1 = t.(x_2 - x_1)$ (1) e aplicando o teorema às paralelas $\overleftrightarrow{AA_2}$, $\overleftrightarrow{BB_2}$ e $\overleftrightarrow{CC_2}$, resulta : $\frac{AP}{AB} = \frac{A_2P_2}{A_2B_2}$ portanto $t = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$ portanto $y_3 - y_1 = t\,(y_2 - y_1)$ (2). Usando as fórmulas (1) e (2), determinamos as coordenadas de P. (IZZI et al, 1990, p. 8-9)

Esta sequência de construções que conduzem às equações (1) e (2) descritas pelos autores, em nosso ponto de vista, constitui uma situação fundamental, no sentido de Brousseau (1986)[34], pois preserva o significado do paralelismo de duas retas do ponto de visa da GA.

Como exemplo, os autores propõem uma tarefa que vai representar o tipo de tarefa predominante nesta seção de estudo: "dados $A(3,2)$ e $B(5,6)$, vamos obter a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o ponto $P(x_3, y_3)$ tal que $\overrightarrow{AP} = 2.\overrightarrow{AB}$."(IEZZI et al, 1990, p. 9).

Reescrevemos esta tarefa como sendo $T_6 =$ *determinar a equação de uma reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *e um ponto* $P(x_3, y_3)$*, sendo dados dois pontos* $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_2)$ *tal que* $\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{AB}$.Para resolver esta tarefa, os autores apresentam a seguinte técnica:

Como $\overrightarrow{AP} = 2.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} \overline{A_1P_1} = 2.\overline{A_1B_1} \Rightarrow x_3 - x_1 = 2.(x_2 - x_1)\ (I) \\ \overline{A_2P_2} = 2.\overline{A_2B_2} \Rightarrow y_3 - y_1 = 2.(y_2 - y_1)\ (II) \end{cases}$. Então, substituindo os valores dados dex_1 e x_2 na equação (I) e analogamente y_2 e y_1 temos que : $x_3 - 3 = 2.(5 - 3)$ e daí obtemos $x_3 = 7$.Da mesma forma $y_3 - 2 = 2.(6 - 2)$ e daí obtemos $y_3 = 10$. "Portanto $P = (7; 10)$." (IEZZI et al, 1990, p. 9).

Nota-se que os autores exibem as coordenadas de P, mas não indicam a equação da reta. Neste caso, a representação poderia ser algébrica por meio das equações exibidas na resolução, ou ainda uma representação geométrica no plano por meio das coordenadas de dois pontos pertencentes à reta. Em todo caso, os autores não apontam esse resultado, pois em nenhum momento chamou as equações obtidas (I) e (II) como equações paramétricas da reta

Assim, sintetizamos a técnica como $\tau_5 =$ *substituir valores das coordenadas dos pontos conhecidos na equação da reta e resolver as equações paramétricas da reta.*

Nota-se que está tarefa se diferencia das demais em termos da resolução de equações, por conta do uso das equações paramétricas da reta. Embora o estudo desta seção seja sobre o ponto, as equações obtidas que chamamos de *equações paramétricas da reta no plano* representam um importante resultado para o estudo da reta.

[34] Cada conhecimento pode ser caracterizado por, no mínimo uma situação adidática que preserva seu sentido, chamada de situação fundamental. Constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada

Chamamos a atenção que as equações paramétricas têm o parâmetro t em comum e os segmentos orientados serão chamados de vetores direção. No entanto, os autores não adentram a abordagem vetorial.

Sobre a tecnologia θ_4, no caso da tarefa, ela simplesmente se apoia na equação paramétrica, que neste caso é teoria e tecnologia, pois a teoria de fato não é declarada.

No entanto, se partirmos da ideia de *situação fundamental* para a determinação de uma reta genérica ou das coordenadas de um ponto sobre esta mesma reta, o bloco tecnológico- teórico se caracteriza como todo o processo de construção e dedução por meio da figura que possibilitou o resultado encontrado: $\begin{cases} x_3 - x_1 = t.(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = t.(y_2 - y_1) \end{cases}$. (61)

Neste caso, chamaremos de Θ_6, a teoria que justifica a tecnologia da técnica que permitiu encontrar o resultado anterior (equação 61), nesse sentido Θ_6= {θ_1,*segmento orientado, projeção de segmento orientado, teorema de tales*}.

Na sequência, notamos que as atividades propostas pelo autor de LD_2, vão seguir a mesma característica de T_6, significa dizer que vão explorar as possibilidades de cálculo por meio das equações paramétricas. Ou de outra maneira, as tarefas propostas têm como base T_6 e solicitam outras informações que dependem de resultados desta última.

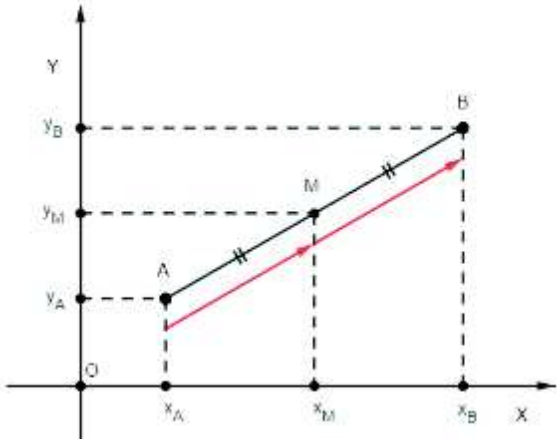
No caso da atividade a seguir, o bloco tecnológico- teórico é o mesmo de T_6, mas, a tarefa se apresenta com uma linguagem diferente: " calcule as medidas algébricas das projeções de $\overrightarrow{AB}$ sobre os eixos coordenados, nos seguintes casos, $A = (1; 2)$ e $B = (8; 9)$, [...]." (IEZZI et al, 1990, p. 9). Significa dizer que as tarefas vão mudar de acordo com os elementos que se deseja calcular nas equações. Sendo assim, temos nesse exemplo mais um tipo de tarefa, T_7 = *calcular as medidas algébricas das projeções de um segmento de reta ($\overrightarrow{AB}$) sobre os eixos coordenados, sendo dado as coordenadas de dois pontos de uma reta.* Por exemplo, "prolonga-se o segmento $\overrightarrow{AB}$, no sentido de A para B, até o ponto P tal que o comprimento de $\overrightarrow{AP}$ é o quádruplo do comprimento de $\overrightarrow{AB}$. Sendo $A = (5; -1)$ e $B = (2; 2)$, determine P" (IEZZI et al, 1990, p. 9).

Os blocos prático-técnico e tecnológico- teórico permanecem os mesmos do tipo de tarefa descrita em T_6. As demais atividades propostas se enquadram no mesmo tipo de tarefa, T_7.

Continuando a análise da seção de estudo do ponto, retomamos o LD_2 para verificar como o autor desta obra abordou o estudo das projeções, ou obtenção de um ponto numa reta, ou ainda as equações paramétricas de uma reta. Identificamos, no entanto, que no estudo do ponto em LD_2 a temática a qual nos referimos não é abordada.

Dando continuidade ao estudo do ponto, o próximo tema a ser abordado tomando por base LD_1, é o ponto médio de um segmento. Consideramos que este tema é bem simples para os estudantes do ensino médio, quando temos medidas lineares, ou seja, em uma dimensão. No entanto, a abordagem de GA, demanda definir ponto médio no plano cartesiano, nesse sentido o autor de LD_1, continua a sua abordagem didática apoiada na representação geométrica, segundo a figura 53 e apresenta a interpretação algébrica:

Figura 53 - Representação no plano do ponto médio de um segmento



Fonte: Adaptado Iezzi et al (1990, p. 10)

Segundo o autor, dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, determinar o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ sabendo que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Se projetarmos A, M e B sobre o eixo dos x teremos: $x_M - x_A = x_B - x_M$ e sobre o eixo y, teremos: $y_M - y_A = y_B - y_M$.Dessas igualdades resultará $2x_M = x_A + x_B$ e $2y_M = y_A + y_B$,teremos então:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (62)$$

$$y_M = \frac{y_A + Y_B}{2} \quad (63)$$

Na sequência o autor exemplifica o cálculo do ponto médio de um segmento $\overrightarrow{AB}$, com a substituição das coordenadas dos pontos A (1,1) e B (5,7), que formam o segmento $\overrightarrow{AB}$, nas equações (62) e (63) respectivamente.

$X_M = \frac{1+5}{2} = 3$ e $Y_M = \frac{1+7}{2} = 4$

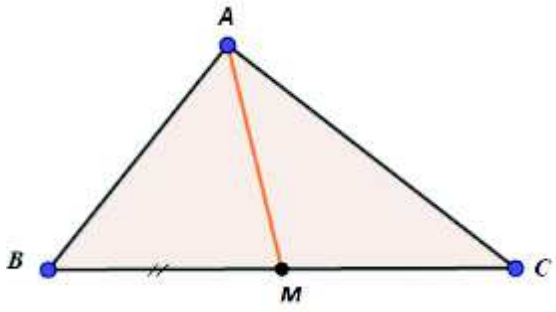
E m seguida o autor apresenta dois tipos de tarefas, que se apoiam no conceito de ponto médio de um segmento, propostas como exercícios resolvidos. As tarefas são tipos de tarefas, fundamentais, que vão justificar a noção de comprimento da mediana do lado de um triângulo qualquer e de baricentro de um triângulo.

Exemplo A: “dados A (2,2), B (9,3) e C (11,13) calcule o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC” (IEZZI et al, 1990, p. 11). O autor apoia-se na figura 54, por ele fornecida.

Propõe como solução a aplicação direta das equações (60) e (61): $x_M = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{9+11}{2} = 10$ e $y_M = \frac{y_B+Y_C}{2} = \frac{3+13}{2} = 8$, logo $M = (10,8)$. Em seguida aplica-se a equação de distância, calculando-se a distância do ponto A a M:

$$d_{AM} = \sqrt{(x_m + x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(10-2)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

Figura 54 - Ilustração da tarefa A



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p.11)

Analisado a tarefa A, do ponto de vista algébrico, identificamos que o discurso tecnológico-teórico que justifica a técnica, se apoia no conceito de ponto médio e do cálculo de distância entre dois pontos no plano cartesiano. No entanto, do ponto de vista geométrico, a figura 54 apresentada é meramente uma ilustração, uma representação geométrica, que não corresponde de fato às dimensões do triângulo, cujos vértices foram dados pelas coordenadas dos pontos A, B e C.

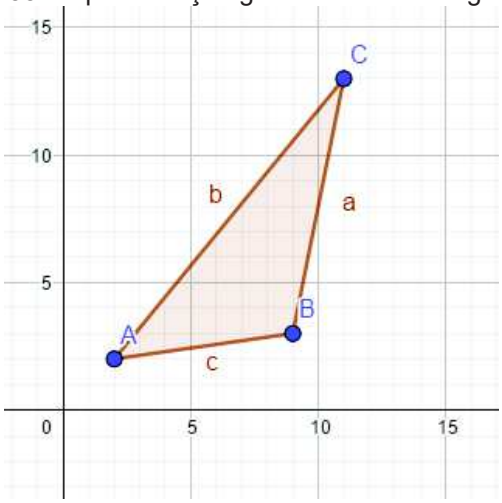
Neste caso, a partir das coordenadas fornecidas pelo autor na tarefa, reconstruímos o triângulo ABC utilizando a interface do Geogebra, obtendo assim a figura 55, representação geométrica do triângulo ABC no plano cartesiano.

Esta construção nos permite afirmar que a “representação geométrica” fornecida pelo autor, além de não explicitar os eixos ortogonais X e Y, marco importante na abordagem de GA, e a noção que embasa todo o estudo das

coordenadas cartesianas, pode criara uma certa distorção e desarticulação ente o geométrico e o algébrico

Além disso, esta prática se adotada pelo professor, poderá se configurar como uma dificuldade para o aluno no processo de aprendizagem, pois ele não vê a representação geométrica das coordenadas dos vértices do triângulo no plano cartesiano, sendo respeitadas as suas dimensões geométricas “reais”, como construídas com régua e compasso. O que é evidenciado é uma ilustração sem conservar a escala e unidade de medida.

Figura 55 - representação geométrica do triangulo ABC

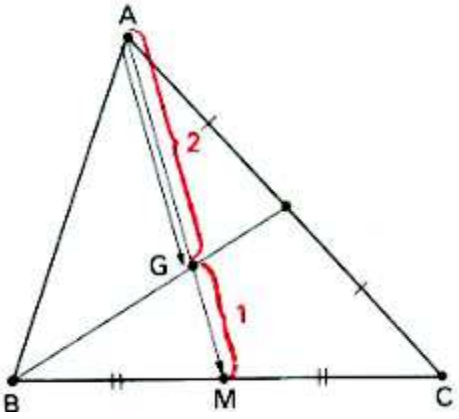


Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, supormos que, se tivermos uma tarefa desse mesmo tipo, sendo que não é dado as coordenadas nem a representação no sistema cartesiano, o aluno poderia tentar resolver por meio da geometria sintética, desconsiderando o sistema de coordenadas cartesiano.

Exemplo B: obter as coordenadas do baricentro do triângulo ABC, dados $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$. Está tarefa, é uma proposta de resolução genérica (figura 56), em que os pontos podem ser quaisquer, caracteriza-se como uma tarefa fundamental, cuja técnica utilizada produzirá um resultado que poderá ser utilizado em qualquer tarefa desse tipo.

Figura 56 - Coordenadas do baricentro do triângulo ABC



Fonte : Iezzi et al (1990, p. 12)

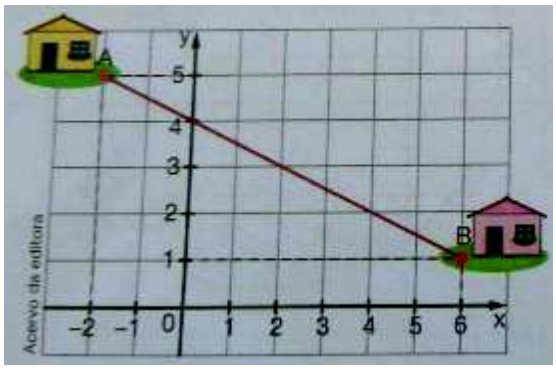
Neste caso o triângulo é qualquer, mas a representação figural também não considera os eixos ortogonais X e Y. Os resultados que são deduzidos pelo autor, se apoiam exatamente na relação geométrica dos segmentos proporcionais, identificados na figura 56. Significa dizer, que a figura é fundamental para compreensão da construção realizada como técnica, apresentada pelos autores:

> O baricentro é o ponto de intersecção das medianas, ele divide cada uma delas em duas partes que estão na razão de 2 para 1, no sentido do vértice para o ponto médio do lado oposto. Portanto, sendo M o ponto médio do lado BC, temos que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Projetando esses segmentos sobre os eixos Ox e Oy, temos; em Ox: $x_G - x_A = \frac{2}{3}(x_m - x_A)$ em Oy: $y_G - y_A = \frac{2}{3}(y_M - y_{A)}$. Então: $x_G - x_1 = \frac{2}{3}(\frac{x_2+x_3}{2} - x_1)$ e $x_G - y_1 = \frac{2}{3}(\frac{y_2+y_3}{2} - y_1)$. Daí decorre que: $x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ e $y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. (IEZZI et al, 1999, p.12)

Esse tipo de tarefa está apoiada, em parte, nos exercícios resolvidos anteriormente, nesse sentido os autores propõem dois tipos de tarefa, a primeira é: T_8 = *determinar o ponto médio de um segmento* $\overleftrightarrow{AB}$ *(segmento orientado), sendo dado as coordenadas dos pontos A e B*. E a tarefa do tipo T_9= *determinar o baricentro de um* Δ *ABC, dadas as coordenadas dos pontos A, B e C,* lembrando que A, B e C, são os vértices do triângulo.

O livro LD_2, traz uma abordagem diferente de LD_1, no que se refere ao ponto médio, tanto no aspecto matemático como no didático. O autor toma como discurso tecnológico - teórico a semelhança de triângulos, não sendo necessário utilizar segmentos orientados como no caso de LD_1. Inicia o estudo a partir de um problema do "cotidiano" que envolve distância e localização de pontos, segundo a ilustração da distância de duas casas (Figura 57).

Figura 57 - Representação figural do problema

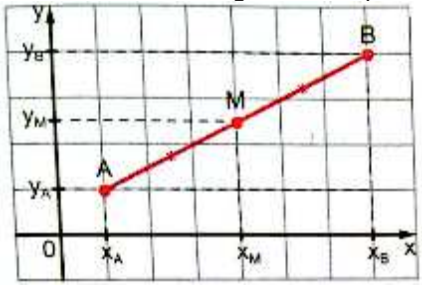


Fonte: SOUSA (2010, p. 152)

> No plano cartesiano, os pontos A e B representam duas casas de uma propriedade rural. Deseja-se perfurar um poço equidistante às casas, de maneira que essa distância seja a menor possível. Qual devem ser as coordenadas do ponto M onde o poço deve ser construído? (SOUSA, 2010, p. 152)

A tarefa visa desenvolver fazer o aluno compreender a relação entre a localização de cada casa e a distância delas ao poço. A localização do poço, portanto, fica no ponto médio (M) do segmento que determina a distância entre as duas casas (A e B), no plano cartesiano, conforme a figura 58.

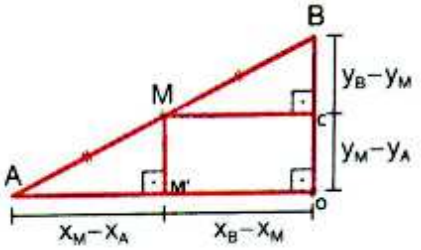
Figura 58 – Ponto médio de um segmento no plano cartesiano



Fonte: SOUZA (2010, p 153)

Em seguida, o auto traz a representação do problema no plano cartesiano e o triângulo formado pelas projeções no eixo X e no eixo Y, determinando os triângulos semelhantes, conforme a figura 59.

Figura 59 - Representação das coordenadas do ponto médio



Fonte: Adaptada SOUSA (2010, p. 153)

Acrescentamos alguns elementos na figura 59, os pontos O, M' C, não elencados pelo autor, apenas para facilitar a identificação dos triângulos retângulos, semelhantes, ABO, AMM' e MBC.

Analisando a figura 59, temos os triângulos semelhante que determinam a relação de proporcionalidade entre seus lados, assim AM está para MB assim como AM' está para M'O. Donde temos que: $\frac{AM}{MB} = \frac{X_M - X_A}{X_B - X_M}$ (I) analogamente AM está para MB, assim como OC está para CB, donde temos que: $\frac{AM}{MB} = \frac{Y_M - Y_A}{Y_B - Y_M}$ (II).

Sabendo que AM tem a mesma medida de MB, temos que $\frac{AM}{MB} = 1$, assim, desenvolvendo (I) e (II) teremos respectivamente $1 = \frac{X_M - X_A}{X_B - X_M}$ e $1 = \frac{Y_M - Y_A}{Y_B - Y_M}$, donde, de (I) temos $X_M - X_A = X_B - X_M \Rightarrow \boldsymbol{X_M = \frac{X_A + X_B}{2}}$ e de (II) temos $Y_M - Y_A = Y_B - Y_M \Rightarrow$

$\boldsymbol{Y_M = \frac{Y_A + Y_B}{2}}$**.** "Portanto as coordenadas do ponto médio M de um segmento AB, em que $A(X_A, Y_A)$ e $B(X_B, Y_B)$, são $\boldsymbol{M}$ $(\frac{\boldsymbol{X_A + X_B}}{\boldsymbol{2}}, \frac{\boldsymbol{Y_A + Y_B}}{\boldsymbol{2}})$" (SOUSA, 2010, p. 153).

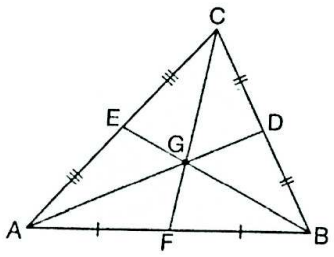
A técnica usada pelo autor de LD_2, nesta tarefa, se apoia no discurso tecnológico- teórico da semelhança de triângulos e na relação de proporcionalidade entre os lados do triângulo. Em LD_1 a base teórica é também a proporcionalidade de segmentos, no entanto, quando temos dois segmentos proporcionais, eles podem ser escritos um como combinação linear do outro, como por exemplo, na tarefa (descrita) do tipo T_7, em que o comprimento do segmento $\overrightarrow{AP}$ é o quádruplo do comprimento de $\overrightarrow{AB}$, ou seja $\overrightarrow{AP} = 4\ \overrightarrow{AP}$.

Temos, então, uma justificativa teórica que vai apoiar-se nesta noção de combinação linear, ou seja, pode-se escrever um seguimento como combinação linear de outro. Em LD_1, os autores utilizam esse discurso tecnológico – teórico em vários momentos do texto, no entanto não exprime a expressão combinação linear.

Sobre o conceito de baricentro de um triângulo, o autor de LD_1, o define partir do conceito de medianas:

> Em um triângulo, as medianas correspondem aos segmentos de reta cujas extremidades são o ponto médio de um dos lados e o vértice oposto a esse lado. As três medianas do triângulo se cruzam em um único ponto denominado baricentro. O baricentro divide cada mediana em dois segmentos, sendo que aquele cuja extremidade são o vértice do triângulo e o baricentro tem o dobro do comprimento do outro. No exemplo apresentado, $AG = 2.GD, BG = 2.GE$ e $CG = 2.GF$ (SOUSA (2010, p. 153)

Figura 60 - Triângulo e suas medianas

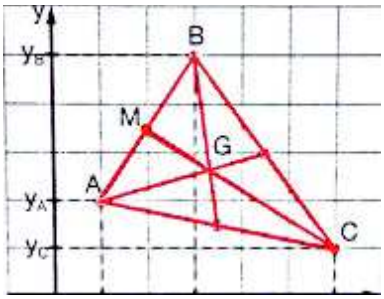


Fonte: SOUSA (2010, p. 153)

O autor apoiou-se no triângulo representado na figura 61, definindo, portanto, que o baricentro é o ponto G, ponto de intersecção das medianas correspondem a $\overline{AD}, \overline{BE}$e $\overline{CF}$.

A partir desta definição do conceito de baricentro, o autor de LD_2 apresenta a tarefa do tipo T_9: *dados três pontos não colineares* $A(x_A, y_A)$ *e* $B(x_B, y_B)$ *e* $C(x_C, y_C)$*, pode-se determinar as coordenadas do baricentro G* do triângulo ABC, tarefa ilustrada pela figura 61.

Figura 61 - Baricentro de um triangulo ABC



Fonte: SOUSA (2010, p. 154)

O triângulo é representado no plano cartesiano, sendo possível visualizar e identificar as coordenadas de seus vértices. A técnica utilizada pelo autor se apoia no conceito de ponto médio do segmento de reta (não orientado) que corresponde a um dos lados do triângulo ABC, $\overline{AB}$, M $(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2})$. A autor partiu da afirmação que $CG = 2.GM$,e em seguida substitui as distância correspondentes aos segmentos CG e GM respectivamente obtendo: $x_c - x_G = 2.(x_G - x_M)$ (I) e $y_C - y_G = 2.(y_G - y_M)$ (II) resolvendo as equações (I) e (II) respectivamente temos: (I) $x_c - x_G = 2.x_G - + 2x_M \Rightarrow 3x_G = 2\,x_M + x_C \Rightarrow 3x_G \Rightarrow 2.\frac{x_A + X_B}{2} + x_C \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, analogamente de (II) teremos $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

O autor ainda explica que, a partir de uma atividade prática com cartolina e barbante, pode-se determinar na prática o baricentro. E afirma que

> o baricentro corresponde ao centro de equilibro de m triângulo. Ao desenhamos um triângulo numa cartolina e determinarmos seu baricentro, podemos recortá-lo e pelo baricentro passar um barbante como mostra a figura. ao suspender o triângulo (SOUSA, 2010, p. 153)

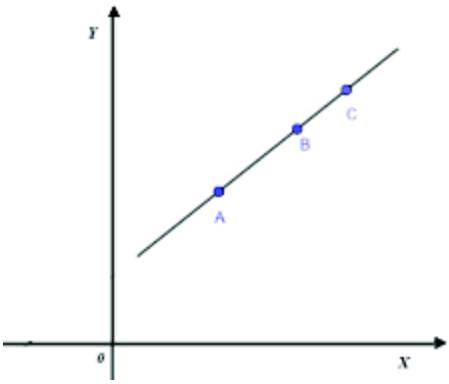
O autor destaca que as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC correspondem à média aritmética das coordenadas correspondentes de A, B e C.

Com relação às tarefas sobre ponto médio e baricentro são do mesmo tipo daquelas apresentadas em LD_1, T_8 e T_9, no entanto, destacamos que o autor não abordou segmentos orientados logo incluímos T_{10}: *determinar as coordenadas do ponto médio de um seguimento AB dados os pontos A e B, no plano cartesiano.*

Além disso, as tarefas propostas em LD_2 demonstram de uma maneira geral a tentativa de contextualização com o cotidiano do aluno, por exemplo na tarefa: “Observe no esquema parte da rota de um ônibus. Entre os pontos de paradas A e B, deseja-se instalar outros dois pontos, C e D, tal que a distância entre pontos adjacentes seja a mesma” (SOUSA, 2010, p. 156), na tarefa é apresenta uma figura ilustrando a localização dos ônibus. Apesar da contextualização não identificamos novos tipos de tarefas dentre aquelas já evidenciadas.

Para finalizar o estudo de ponto, identificamos o alinhamento de três pontos, segundo LD_1. Os autores iniciam a abordagem trazendo a propriedade, que é condição algébrica para o alinhamento de três pontos (Figura 62).

Figura 62 - Alinhamento de três pontos



Fonte: Adaptado de IEZZI et al (1990, p.13)

A propriedade coloca em evidência a relação entre as coordenadas dos pontos alinhados, associando as coordenadas desses pontos, por meio do cálculo do determinante dessas coordenadas, tendo a última coluna a unidade: “Se três pontos (x_1, y_1) e $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, são colineares, então

$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$" (IEZZI et al, 1990, p. 13).

Destacamos que em nosso MER o modelo de técnica para reconhecer o alinhamento de três pontos, não faz alusão ao uso do determinante. No estudo realizado no capítulo 3, no problema 6, os autores referenciados utilizaram a definição de coeficiente angular, para retas paralelas e chegam à equação $\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y'''-y'}{x'''-x'}$, para reconhecer que três pontos estão alinhados. Apesar do determinante não estar presente, o desenvolvimento da igualdade apresentada, vai chegar numa relação algébrica que conhecemos atualmente, como sendo do cálculo de um determinante 3x3, igualada a zero. Do ponto de vista ecológico, significa dizer que houve uma evolução desse conceito que vive na atualidade no sistema educativo, mas com mutações, as quais, ao que parece, justificam-se pelo processo de transformações que ocorreram na matemática em meados do século XX devido ao MMM.

Retomando o texto de LD_1, na sequência, os autores apresentam o discurso tecnológico–teórico que justifica a propriedade por meio de uma demonstração, partindo da noção de segmentos orientados e proporcionais, e ao mesmo tempo, em nosso ponto de vista, a noção de segmentos linearmente dependentes.

Tomando o caso geral em que três pontos (Figura 62), são distintos e pertencem a uma reta não paralela a nenhum dos eixos. Existe neste caso, um número real t tal que: $\overrightarrow{AC} = t.\overrightarrow{AB}$, conforme já definido anteriormente pelos autores, quando trataram da determinação de uma reta, a partir de seguimentos orientados. Da relação acima, deduzimos que $t = \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$ (I) e $t = \frac{y_3-y_2}{y_2-y_1}$ (II), sendo que $x_2 \neq x_1$ e $y_2 \neq y_1$, portanto nenhum denominador se anula.

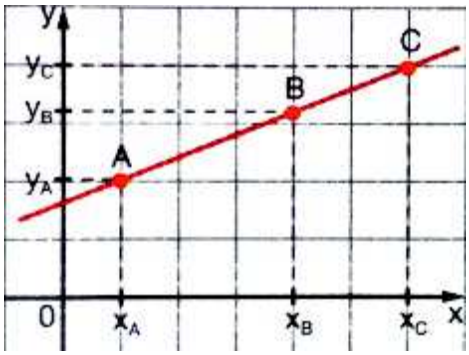
Igualando as equações (I)e (II) temos que $\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_2}{y_2-y_1} \Rightarrow (x_3 - x_2).(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1).(y_3 - y_2)$. O desenvolvimento dessa nova equação, fatorando os termos semelhantes, nos dará: $x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_1(y_1 - y_2)$, que pode ser escrito como:$x_1 . \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2 . \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3 . \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (III) que corresponde a $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Esta propriedade,

segundo os autores também se verifica no caso em que dois pontos coincidem ou se a reta ABC for paralela a um dos eixos.

As tarefas propostas pelos autores são do tipo T_{11}: *verificar se três pontos, dados as suas coordenadas, são alinhados (ou colineares)*. A técnica de resolução é a aplicação direta da propriedade $D = 0$, com a resolução do determinante decompondo o determinante 3x3 em três determinantes 2x2, como feito na equação (III). O autor encerra o capítulo a respeito do estudo do ponto.

O autor de LD_2 aborda o alinhamento de três pontos, com base na figura 63, o discurso tecnológico - teórico justificativo da técnica se apoia no teorema de Tales. Mas, vai encontrar uma equação, com uma representação um pouco modificada, mas na essência, a mesma encontrada pelos seus antecessores nas análises anteriores.

Figura 63 - Pontos alinhados



Fonte: SOUSA (2010, p.157)

O autor identifica que os pontos A, B e C são colineares e é valido o Teorema de Tales, usando a proporcionalidade dos segmentos determinados pela reta e as projeções ortogonais dos segmentos AB, AC, logo pode-se deduzir as seguintes igualdades: $\frac{AB}{AC} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A}$ (i) e $\frac{AB}{AC} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$ (ii). Comparando as duas equações temos que (i) = (ii), portanto $\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow (x_B - x_A).(y_C - +y_A) = (x_C - x_A).(y_C - y_A)$. Desenvolvendo os produtos e isolando todos os termos no primeiro membro da equação, teremos simplificadamente $x_b\, y_c - x_b y_a - x_A y_c - x_c y_B + x_c y_A + x_A\, y_B = 0$ (iii) Segundo o autor o primeiro membro da equação corresponde ao cálculo do determinante, $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$. Na sequência, o autor mostra que a afirmação é verdadeira aplicando a regra de Sarrus, como ilustrado na figura 64, para cálculo do determinante, provando sua afirmação.

Afirma, ainda, que se realizarmos o processo inverso, verificar-se-á que, se $D = 0$, então $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares.

Figura 64 - ilustração da regra de Sarrus

Fonte: Sousa (2010, p.157)

Os tipos de tarefas propostas pelo autor, são do mesmo tipo daquelas apresentadas em LD_1, no entanto, a regra para o cálculo do determinante, ou seja, a técnica empreendida é diferente, pois se apoia na rega de Sarrus para o cálculo do determinante 3x3, enquanto em LD_1 o cálculo do determinante usa a propriedade de determinante.

O autor apresenta mais um tipo de tarefa T_{12}: *calcular a medida da área de um triângulo cujos vértices são três pontos não colineares* $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ *e* $C(x_C, y_C)$. Este tipo de tarefa, também, é apresentado pelos autores de LD_1, mas, somente no final do estudo da reta.

A técnica para resolução desta tarefa consiste em desenvolver o cálculo do determinante (D), utilizado quando os pontos são colineares, no entanto obedece a seguinte equação: $S_{ABC} = \frac{1}{2}|D|$. Para obter este resultado, o autor parte da exploração da relação de semelhança estabelecida entre os triângulos formados, a partir do triângulo dado no plano cartesiano, sendo conhecidas as coordenadas dos vértices. Desenvolvendo a proporção e fazendo as devidas simplificações o autor obtém S_{ABC}.

Optamos por não trazer a prova da validade da equação de S_{ABC}, por considerar que os cálculos algébricos realizados pelo autor de LD_2 foram extensos e de pouca relevância para nosso estudo, visto que o aparecimento do determinante, técnica dominante nestas tarefas, já foi devidamente justificado anteriormente.

Em LD_1. Os autores, para determinar o cálculo da medida da área de um triângulo no plano cartesiano, sendo dadas as coordenadas dos seus vértices, fizeram um percurso diferente e um pouco mais simplificado, mais econômico, do ponto de vista da TAD, porém ainda extenso.

Tomando a fórmula que permite calcular a medida da área de um triângulo, $S = \frac{1}{2} . b. h$, sendo b a base do triângulo e h a altura, os autores tentam descobrir a base e a altura do triângulo que serão dadas pela fórmula de distância e pela equação da reta. A equação dessa reta foi dada pelo determinante, envolvendo as coordenadas dos pontos alinhados nesta reta. O resultado é a mesma equação encontrada em LD_1, $S_{ABC} = \frac{1}{2}|D|$, nesse sentido, suprimimos tais cálculos.

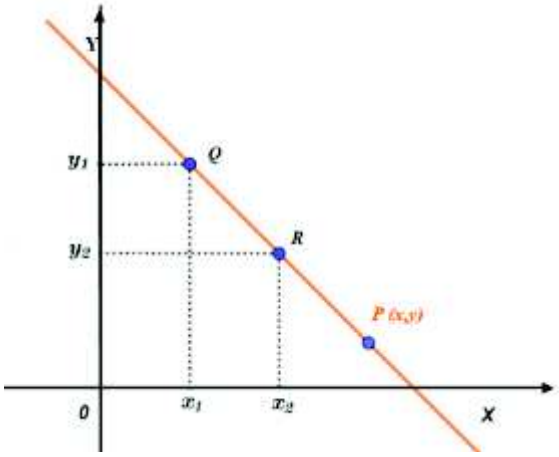
4.2.2 Estudo da reta a partir de LD_1

Sobre o estudo da reta em LD_1 os autores desenvolvem um capítulo separado do estudo do ponto, já em LD_2 o estudo da reta é desenvolvido num mesmo capítulo do estudo do ponto.

O primeiro ponto abordado em LD_1é a equação geral de uma reta no plano cartesiano. Os autores partem de três pontos colineares $P(x, y)$, $Q(\ 1{,}1)$ e $R(4{,}5)$, (Figura 65) e calculando o determinante das coordenadas dos três pontos, chegam na a equação $-4x + 3y + 1 = 0$, da reta $\overleftrightarrow{QR}$.Na sequência enuncia como propriedade que: “a toda reta $\boldsymbol{r}$ no plano cartesiano está associada uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde $a \neq 0\ ou\ b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico de $\boldsymbol{r}$” (IEZZI et al, 1990, p. 18).

Para a demonstração desta afirmação, os autores se apoiem exatamente na condição de alinhamento de três pontos (Figura 65). Logo a equação de condição de alinhamento vai fornecer a equação da reta (r).

Figura 65 - Representação geométrica da reta e três pontos



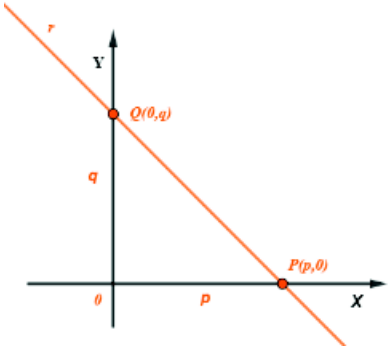
Fonte: Adapta do de IEZZI et al (200, p.18)

O ponto $P(x,y)$ é desconhecido e pode variar de posição sobre a reta. De acordo com os autores, considerando dois pontos $Q(x_1,y_1)$ e $R(x_2,y_2)$, com $Q \neq R$. sendo $P(x,y)$ um ponto que percorre a reta r, suas coordenadas x e y são variáveis, se P, Q e R são colineares, então, teremos o seguinte determinante: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Calculando o determinante, obteremos a equação: $x.(y_1 - y_2) + y.(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$, fazendo o artifício de substituir as expressões constantes pelas letras a, b e c, ou seja,
$(y_1 - y_2) = a, (x_2 - x_1) = b$ e $(x_1y_2 - x_2y_1) = c$ teremos que todo ponto P da reta r deve verificar a equação $ax + by + c = 0$.

Nota-se que o discurso tecnológico-teórico para deduzir a equação da reta se apoia na condição de alinhamento de pontos, a técnica usada é o cálculo de. Este recurso teórico não aparece na dedução da equação da reta no nosso MER, ao que parece ele se constitui nos livros didáticos após o MMM, como já foi justificado anteriormente.

Na sequência o autor propõe uma tarefa, como exercício resolvido, cuja base teórica será a mesma utilizada para a dedução da equação geral da reta. A solução da tarefa será exatamente a equação segmentária de uma reta, parte do corpo de conteúdo de estudo, reta. A tarefa proposta T_{13} : *obter a equação da reta r que intercepta os eixos coordenados nos pontos* $P(p,0)$ *e* $Q(0,q)$, $P \neq Q$, tem como técnica de resolução o determinante: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$.A figura 66, ilustra o exercício resolvido.

Figura 66 - Equação segmentária da reta



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p. 19)

Desenvolvendo o determinante teremos:

$-qx - px + pq = 0 \Rightarrow qx + px - pq = 0.$

Da equação obtida, os autores propõem dividir todos os termos por pq, e chegam no seguinte resultado: $\frac{qx}{pq}+\frac{py}{pq}=\frac{pq}{pq}$, obtendo-se $\boldsymbol{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1}$, a equação segmentária de r. Os denominadores p e q, são as medidas dos segmentos que r determina com os eixos coordenados.

Esta tarefa se caracteriza como tarefa fundamental e está presente em nosso estudo do MER (capítulo 3), embora o desenvolvimento algébrico, como explicitado nos exemplos anteriores, não se apoiou na noção de determinante.

As tarefas propostas, em seguida, pelos autores são semelhantes à T_{13}, assim, definimos tais tarefas como sendo do tipo T_{14}: *obter a equação da reta que passa pelos pontos dados A*(x_1, y_1) *e B*(x_2, y_2).Há ainda tarefas nas quais é solicitada mais de uma equação a partir de um polígono, mas são tarefas do mesmo tipo que T_{14}. Os autores propõem também um tipo de tarefa idêntica à T_{14}, porém a reta está representada geometricamente no plano cartesiano, e as coordenadas dos seus pontos também.

Em seguida, definem como propriedade: "se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, então a equação $ax+by+c=0$ representa uma reta do plano cartesiano, isto é, o conjunto de pontos (x, y) que satisfazem a equação é uma reta" (IEZZI et al, 1990, p. 20).

Dando sequência ao estudo da reta, os autores de LD_1 discutem a localização da reta no plano cartesiano, a partir dos valores de seus coeficientes, dada a equação geral da reta $ax+by+c=0$. No primeiro caso, se $b=0$ (e $a \neq 0$) temos que $ax+c=0 \Rightarrow x=-\frac{c}{a}$, e todos os pontos que satisfazem a equação têm a mesma abscissa, logo formam uma reta paralela ao eixo Y. No segundo caso, se $b \neq 0$, então a equação $ax+by+c=0$ (I) é equivalente a $y=-\frac{a}{b}\,x-\frac{c}{b}$ (II). Os autores atribuem os valores $x=0$ e $x=1$ e substituindo na equação (II), obtêm-se, respectivamente, os valores de $y=-\frac{c}{b}$ e $y=-\frac{a+c}{b}$. Substituindo esses valores de x e y, no determinante, chega-se a:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & -\frac{c}{d} & 1 \\ 1 & -\frac{a+c}{b} & 1 \end{vmatrix}=0$, que, depois de desenvolvido, leva ao resultado seguinte:

$y=-\frac{a}{b}\,x-\frac{c}{b}$, conclui-se, portanto, $ax+by+c=0$, representa uma reta.

Os autores reforçam que dar ou obter uma reta significa dar ou obter a equação da reta. Em nosso ponto de vista, esta afirmação é distorcida

linguisticamente, no sentido de Duval (1999,2003), pois o que é possível obter é a representação da reta por meio de sua equação, ou de sua representação geométrica, pois o objeto matemático não é acessível, sem suas diferentes formas de representá-lo. Nesta perspectiva, a equação da reta é uma representação algébrica do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano, que verificam a condição de alinhamento, denominado "reta".

Os autores, ainda, apresentam uma série de exercícios, que envolvem a condição que deve ser verificada para um ponto, do plano, pertencer a uma reta. Para isso, eles procedem da seguinte forma: Sejam um ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$. Tem-se: $P \in r \Leftrightarrow a(x_0) + b(y_0) + c = 0$.

A partir dessas considerações, os autores propõem exercícios que sintetizamos nas tarefas dos seguintes tipos:

- T_{15} :*Desenhar no plano cartesiano uma reta, dada sua equação* $r: 2x + 3y - 6 = 0$
- T_{16}*: Verificar se os pontos* $A(-6,0), B(-4,3), C(0,10)$ *pertencem a reta* $r: x + y - 5 = 0$*;*
- T_{16}*: Qual é o ponto da reta* $(r)\ 2x + 3y - 6 = 0$ *que tem abscissa igual a 15?*
- T_{17}*: Qual é o ponto da reta* $(r)3x - 7y = 0$ *que tem ordenada igual a -6?*
- T_{18}*: Quais das retas* $(r)x + y - 6 = 0, (s)x - y + 1 = 0, (t)\ 5x + 4y - 22 = 0$ *passam pelo ponto médio do segmento de extremidades* $A(11, -9)$ *e B(-7,15)?*
- T_{19}*:Entre as retas* $r: 4x + 3y = 0, s: 2x - 5y + 1 = 0, t: 2x - y = 0$ *e* $u: 3y - 2 = 0$*, quais as que passam pela origem do sistema cartesiano?*

Dando continuidade ao estudo da reta, os autores apresentam modelos de tarefas a partir da posição relativa de duas retas no plano cartesiano. Definem que no plano cartesiano duas retas distintas, só podem ser paralelas ($r \parallel s$) ou concorrentes ($r\ X\ s$).

No caso de as retas serem concorrentes, o ponto de intersecção estará em ambas e deverá satisfazer as equações de ambas as retas. Os autores propõem, como exemplo, a tarefa do tipo T_{20} : *determinar o ponto de interseção das retas dadas* $(r)4x + 3y - 11 = 0$ *e* $(S)\ x + 3y - 5 = 0$.

A técnica desenvolvida para a solução da tarefa é resolver o sistema linear formado pelas duas equações das retas dadas: $\begin{cases} 4x + 3y - 11 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$. Os valores x e y obtidos representam as coordenadas do ponto de intersecção buscado.

Os autores propõem diferentes tarefas do tipo T_{20}, por exemplo, mostrar que as retas dadas r e s são concorrentes em um ponto, ou obter a intersecção de duas retas, dadas as suas equações etc.

Há ainda, nesta seção, um tipo de tarefas que envolve outros conceitos já trabalhados, como por exemplo o baricentro:

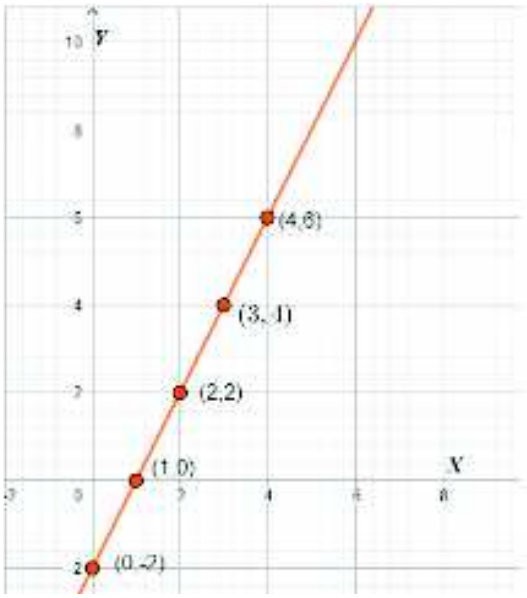
- T_{21}*: obtenha as equações das retas suporte das medianas do triângulo ABC,* $A(5,-9), B(3,5)$ *e* $C(1,1)$*, e prove que elas são concorrentes num mesmo ponto G(baricentro).*
- T_{22}*: determine a equação da reta suporte de um segmento que tem ponto médio* $(5,0)$ *e extremidade em cada uma das retas* $x - 2y + 3 = 0$ *e* $x + y + +1 = 0$*.*
- T_{23}: *dados os pontos* $A(0,0)$*e* $B(1,2)$ *determine o ponto* C *da reta de equação* $y = 2x - 1$ *tal que* ABC *seja um triângulo retângulo com hipotenusa* $\overleftrightarrow{BC}$*.*

Após propor 17 exercícios sobre retas concorrentes, os autores apresentam as equações paramétricas e uma reta. Os autores afirmam que se pode "obter a lei a ser obedecida pelos pontos da reta, dando as coordenadas x e y de um ponto variável da reta em função de uma terceira variável t, chamada *parâmetro"* (IEZZI et al, 1990, p. 26). Nesse sentido, eles definem as equações paramétricas como: $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$, fornecendo como exemplo as equações $x = t + 1$ e $y = 2t$.

Para determinar a representação geométrica da reta, os autores constroem uma tabela, atribuem valores para t nas equações paramétricas, obtendo-se assim, x e y, conforme ilustrado na figura 67. Dessa construção, na representação tabular, por meio dos pontos encontrados (x, y) obtém-se a representação geométrica da reta no plano.

Figura 67 - Determinação da reta pelas equações paramétricas

t	x	y	Ponto (x, y)
−1	-1+1=0	2(-1) =2	(0 -2)
0	0+1=1	2(0) = 0	(1,0)
1	1+1=2	2(1) = 2	(2,2)
2	2+1=3	2 (2) =4	(3,4)
3	3+1=4	2 (3) = 6	(4,6)



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (2010, p. 27)

A equação geral que representa a reta pode ser obtida aplicando a condição de alinhamento de três pontos, tomando dois pontos quaisquer da reta, por exemplo $(4,6)$ e (2,2) e calculam o determinante: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{2x - y - 2 = 0}\ (I)$.

Os autores apresentam, ainda, outra técnica para encontrar a equação geral da reta (I), pela resolução do sistema com as duas equações paramétricas $x = t + 1$ e $y = 2t$. eliminando o parâmetro t: $\begin{cases} x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1 \\ y = 2t \Rightarrow t = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x - 2 = y$ **,** encontra-se portanto $\boldsymbol{2x - y - 2 = 0}$**.**

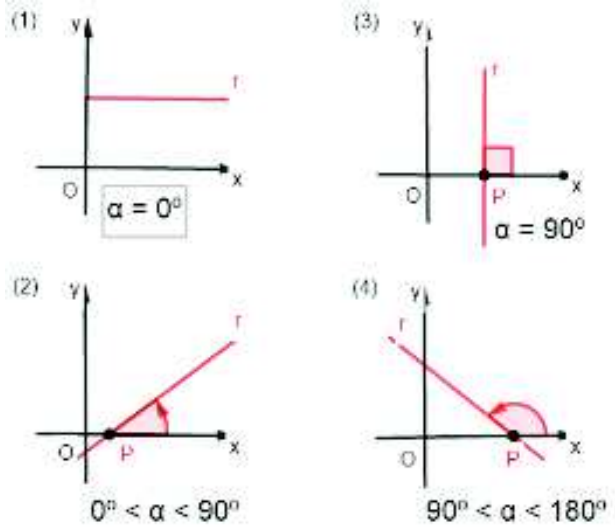
As tarefas propostas estão de acordo com tipos de tarefas, e para seu cumprimento, mobilizem as técnicas descritas pelos autores, bem como o discurso tecnológico- teórico associado. Neste caso, apresentam dois tipos de tarefa, T_{24}*: desenhe a reta cujas equações paramétricas são* $x = 2t - 3$ *e* $y = 1 - t$, ou seja, determinar a representação geométrica das equações paramétricas dadas por $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$; e T_{25} :*obter os pontos em que a reta de equações paramétricas dadas* $x = 5t - 3$ *e* $y = 4t + 6$, *intercepta os eixos coordenados*. Outro exemplo de tarefa do tipo T_{25} é: *determinar o ponto de abscissa 3 da reta dada pelas equações paramétricas* $x = 2t - 5$ *e* $y = 7t - 3$.

Destacamos que, em nosso ponto de vista, a representação geométrica da reta, a partir da substituição de valores na tabela, é semelhante à construção

do gráfico de uma função polinomial do primeiro grau definida por, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, esta equação pode ser reescrita como $y = ax + b$.

No tópico seguinte, os autores uma praxeologia para o estudo do ângulo de inclinação de uma reta (r), em relação ao eixo OX: o ângulo $\widehat{xr}$. O autor define $\widehat{xr}$, em quatro casos, segundo a figura 68.

Figura 68 - Ângulo entre a reta r e o eixo,

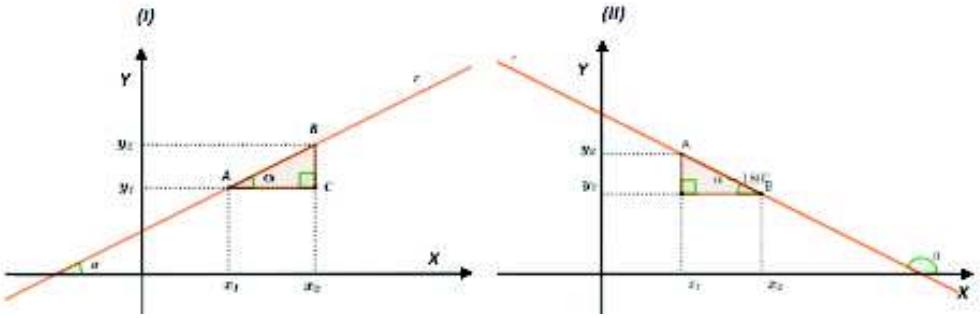


Fonte: IEZZI et al (1990)

Como pode ser observado na figura 68, eles apresentam quatro casos possíveis para ângulo $\widehat{xr}$. No primeiro caso (1), se a reta r é paralela a, então o ângulo $\widehat{xr}$ é nulo $(\alpha = 0)$;se a reta r interceptar OX no ponto P, $\widehat{xr}$ é o menor ângulo que o eixo OX deve descrever girando em torno de P, no sentido anti-horário, até que coincida com r $(0 < \alpha < 180°)$

O coeficiente angular da reta r, não perpendicular ao eixo Ox, é definido pelos autores, como sendo o número real $m = tg\alpha$. O sinal de m varia de acordo com o valor α e a posição da reta (Figura 69), ou seja, se $\alpha = 0°$ $(r \parallel Ox)$, então $m = 0$,se $0° < \alpha < 90°$ (agudo), então $m > 0$, se $90° < \alpha < 180°$(obtuso), então, $m < 0$, e por fim se $\alpha = 90°$ $(r \perp Ox)$, então, r não tem coeficiente angular, nesse caso, r é vertical.

Figura 69 - Cálculo do coeficiente angular



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p. 29)

Para calcular o coeficiente angular, dada uma reta $r: ax + by + c = 0$, os autores consideram dois pontos que estão em r: $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, conforme a figura 69, em cada caso.

Na situação (I) $m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{medida\ de\ \overline{BC}}{medida\ de\ \overline{AC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, analogamente, na situação (II) temos $m = tg\ \alpha = -tg(180° - \alpha) = \frac{medida\ de\ \overline{AC}}{medida\ de\ \overline{BC}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Logo em ambos os casos $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. O coeficiente angular pode, também, ser verificado a partir da equação da reta, tendo os pontos A e B pertencentes à reta. Assim, temos que: $B \in r \Rightarrow ax_2 + by_2 + c = 0\ (i)$, ao mesmo tempo $A \in r \Rightarrow ax_1 + by_1 + c = 0\ (ii)$. Resolvendo o sistema das equações (i) e (ii), temos $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b}{a}$, donde conclui-se que o coeficiente angular da reta dada por $ax + by + c = 0$ é $m = -\frac{b}{a}$.

Nessa construção do coeficiente angular, o discurso tecnológico- teórico que fundamenta a determinação do coeficiente angular são as relações trigonométricas no triângulo retângulo, a tangente, os resultados obtidos serão utilizados como técnica para a resolução de tarefas do tipo: determinar o coeficiente angular de uma reta.

Nessa perspectiva, os autores propõem exercícios que sintetizamos a seguir, na forma de tarefas:

- $T_{26(A)}$:*dê o coeficiente angular (se existir) de uma reta paralela ao eixo* OX;
- $T_{26(B)}$:*dê o coeficiente angular (se existir) de uma reta paralela ao eixo* Oy;
- $T_{26(C)}$:*dê o coeficiente angular (se existir) da bissetriz do 1º e 3º quadrantes;*
- $T_{26(D)}$: *dê o coeficiente angular (se existir) da bissetriz do 2º e 4º quadrantes;*

- $T_{26(E)}$: *calcule o coeficiente angular da reta AB no caso em que* $A = (5,4)$ *e* $B = (6,0)$*;*
- T_{27}: *calcule o coeficiente angular dada a reta de equação* $x - y = o$
- T_{28}*: determine o coeficiente angular da reta que tem equações paramétricas* $x = 6t - 1$ e $y = 8t + 7$;
- T_{29}: *determinar* k*,sabendo que a reta determinada pelos pontos* $A = (2,3)$ *e* $B = (k, 3k - 1)$ *tem inclinação* $\alpha = 45°$*.*

A partir do estudo do coeficiente angular, os autores deduzem uma outra equação que representa uma reta, a *equação reduzida,* que passa por um ponto $\mathrm{P}(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_0)$ e tem por coeficiente angular m, também conhecido. Se um ponto A(x, y) (diferente de P), é um ponto da reta, então, o coeficiente $\frac{y-y_0}{x-x_0} = m \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$.

Os tipos de tarefas, que aparecem nos exercícios propostos, solicitam a forma reduzida de uma reta, dada a equação geral, ou dados os pontos e o coeficiente angular ou ainda, dadas as equações paramétricas. São tarefas, por exemplo, dos seguintes tipos:

- T_{30}: *coloque na forma reduzida equação* $4x + 2y - 7 = 0$*, ou determinar a equação reduzida da reta;*
- T_{31}*: dê a equação da reta que passa por* P *e tem coeficiente em,* $P(4,9)$ *e* $m = 3$*;*
- T_{32}*:conduza pela origem do sistema cartesiano a reta* s *paralela à reta* r *cujas equações paramétricas* $x = 3t + 2$ *e* $y = 1 - 2t$*;*
- T_{33}: *dadas as retas suporte* $(r) y = x$ *e* $(s)\ y = -x$ *de dois lados de um paralelogramo e um vértice* $A(4,3)$*, obtenha os outros vértices;*
- T_{34}: *determine a reta que passa pela interseção das retas* $(p)\ 2x + y - 3 = 0$ *e* $(q) 3x - y - 7 = 0$ *e é paralela à reta* $(r) 5x - 7y + 13 = 0$.

Outras tarefas que aparecem nos exercícios propostos, sintetizam globalmente esses tipos no que se refere à equação reduzida da reta.

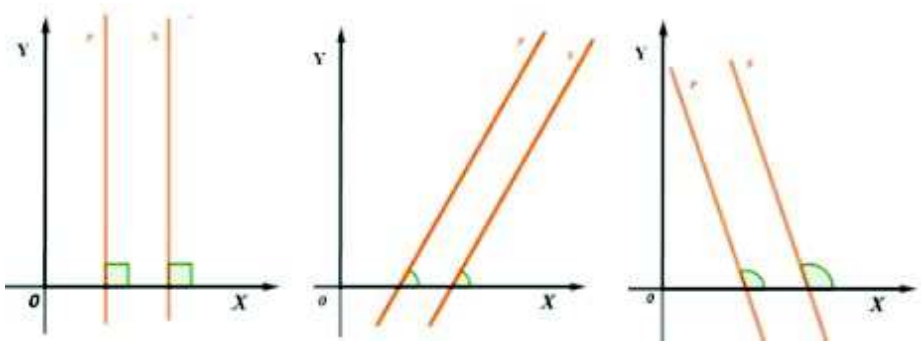
Na organização didática dos temas, os autores apresentam o paralelismo entre retas antes de abordar a equação reduzida, nesse sentido, pode-se usar, as relações de retas paralelas para auxiliar na resolução da tarefa do tipo T_{38}.

Posições relativas de duas retas no plano cartesiano

Na sequência do estudo da reta, Iezzi et al (1990) passam a discorrer sobre as posições relativas de duas retas no plano cartesiano, e mostram as implicações algébricas que podem ser verificadas a partir de cada situação. A primeira é o paralelismo, significa dizer, que para reconhecer quando duas retas são paralelas no plano cartesiano, verifica-se que: ou ambas são verticais, ou ambas possuem coeficientes angulares iguais, segundo a figura 70.

A localização das retas neste caso, ilustrado na figura 70, está no primeiro quadrante, mas podem ocupar qualquer localização no plano cartesiano. Além disso, duas retas são paralelas se e somente se seus coeficientes angulares forem iguais.

Figura 70 - Retas paralelas



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p.31)

Esta proposição é facilmente provada, pois sendo os ângulos de inclinação das duas retas em relação ao eixo OX, α_r e α_s respectivamente, iguais, as tangentes desses ângulos serão iguais e consequentemente os coeficientes angulares também serão iguais, ou seja, $r \parallel s \Leftrightarrow \alpha_s = \alpha_r \Leftrightarrow tg\ \alpha_s = tg\ \alpha_r \Leftrightarrow m_s = m_r$.

Em seguida, os autores sintetizam as posições relativas de duas retas a partir das suas equações gerais.

> Dadas duas retas, r e s, cujas equações são $(r) a_1x + b_1y + c_1$ e $(s)\ a_2x + b_2y + c_2$, elas podem ocupar duas posições notáveis no plano cartesiano: ou são concorrentes $(r \times s)$ ou são paralelas $(r \parallel s)$.Vamos deduzir uma regra para verificar a posição relativa das retas a partir dos coeficientes $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ (IEZZI et al, 1990,p.32)

Considerando que os coeficientes $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, são diferentes de zero, os autores mostram que: $r \parallel s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ e $r \times s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Os tipos de tarefas propostas sobre a posição relativa de duas retas, de acordo com a abordagem dos autores, têm como objetivo principal verificar ou

provar que duas retas, no plano cartesiano, são paralelas ou concorrentes, dado os pontos da reta ou as suas equações gerais, ou paramétricas. Sintetizamos nas tarefas dos tipos:

- $T_{35(A)}$: *verificar se* r *e* s *são paralelas ou concorrentes* $(r)\ 2x - 4y + 7 = 0$ *e* $(S)3x - 6y + 11 = 0$*;*
- $T_{35(B)}$:*dê a posição relativa (paralela ou concorrente) das retas* $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3t - 7 \end{cases}$.
- T_{36}: *prove que as retas* $\overleftrightarrow{AB}$ *e* $\overleftrightarrow{CD}$ *são paralelas, sendo dados* $A(-1,3), B(2,6), C(0,-1) e\ D(-4,-5)$.

Nesta obra, LD_1, os autores abordam ainda a perpendicularidade de duas retas. Em síntese, propõem estabelecer relações entre os coeficientes angulares das retas perpendiculares entre si, como construído no caso das retas paralelas. Optamos por omitir as deduções e a prova realizada pelos autores, que sintetizam a perpendicularidade de duas retas com a seguinte proposição: $s \perp r \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$.

Os tipos de tarefas propostas pelos autores são variados, destacamos como principal, a tarefa do tipo T_{37}*: identificar, se as retas* $(r)2x = 3y - 1 = 0$ *e* $(s)5x - 4y + 7 = 0$ *são perpendiculares*. A tarefa do tipo T_{38}: *obter a projeção ortogonal do ponto* $P(2,8)$ *relativamente à reta* $(r)x - y - 4 = 0$ é também bastante explorada pelos autores. Neste caso, a tarefa consiste em encontrar o ponto Q, "pé" da perpendicular baixada de P até r.

A técnica utilizada consiste em encontrar a equação da reta suporte s por meio do cálculo dos coeficientes angulares $m_r = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-1} = 1$ e $m_s = -\frac{1}{m_r} = -1$. Desse modo obtém-se $(s)y - 8 = -1(x - 2)$, logo $(s)x + y - 10 = 0$. Como o que busca-se é o ponto de interseção entre r e s, então basta resolver o sistema das duas equações (r e s), e encontrar a solução que representa as coordenadas de $Q(x,y)$: $\begin{cases} (r)\ x - y - 4 = 0 \\ (s)\ x + y - 10 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ Resolvendo o sistema pelo método da adição temos $Q(7,3)$.

Neste tópico há trinta exercícios, com variações diferentes na elaboração, no entanto, são tarefas que podem ser sintetizadas como do tipo T_{40} e T_{41}. Em todos os casos a técnica aplicada se apoia na equação $m_s = -\frac{1}{m_r}$, julgamos

desnecessário elencar todas elas por conta das pequenas variações na elaboração, destacamos os seguintes tipos:

- T_{39}*: obtenha o ortocentro do triângulo de vértices* $A(0,0), B(1,-2)$ *e* $C(3,2)$*;*
- T_{40}*:dê equação da mediatriz do segmento de extremidade* $A(-1,7)$ *e* $(5,-3)$*;*
- T_{41}*:obtenha o circuncentro (interseção das mediatrizes) do triângulo de vértices* $B(3,4), B(-4,3)$ *e* $C(0,-5)$*;*
- $T_{42(A)}$*: prove que* $A(2,3), B(6,0), C(12,8)$ *e* $D(8,11)$ *são vértices e um retângulo;*
- $T_{42(B)}$*:prove que* $A(-1,-3), B(0,-6)$ *e* $C(-4,-4)$ *são vértices de um triângulo retângulo;*
- T_{43}*: um triângulo retângulo apesenta a hipotenusa na reta* $r: 4x + 3y = 0$*, um cateto paralelo à reta* $s: x - y + 1 = 0$ *e o vértice do ângulo é* $A(5,1)$*. Calcule a medida da hipotenusa.*

Ainda nesse estudo, os autores tratam dos ângulos entre duas retas e das relações que podem ser estabelecidas entre esses ângulos e os coeficientes das respectivas retas.

Nesse sentido, sintetizamos dois casos para calcular o ângulo agudo entre duas retas r e s.No primeiro caso uma das retas não tem coeficiente angular, o ângulo agudo formado pelas retas (r e s) é dado por θ_1 e é válida a relação $tg\theta_1 = \left|\frac{1}{m_r}\right|\ (i)$, onde m_r é o coeficiente angular da reta r. No segundo caso, as duas retas têm coeficiente angular, pode-se então, estabelecer para o ângulo agudo a seguinte relação, tendo os coeficientes angular(m_s e $m_{r)}$ das retas : $tg\theta_1 = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s.m_r}\right| (ii)$

Sobre os tipos de tarefas relacionadas ao estudo de ângulos entre retas, especialmente o ângulo agudo, menor ângulo formado entre duas retas concorrentes, destacamos genericamente a tarefa do tipo T_{48}: *calcular o ângulo agudo formado pelas retas* $(r)a_1x + b_1y + c_1$ *e* $(s)\ a_2x + b_2y + \ c_2$. As equações das retas variam de acordo com valores reais dos seus coeficientes, mas genericamente o formato é da equação geral de cada reta r e s respectivamente.

As técnicas para resolução das tarefas, apoiam-se na aplicação direta das equações (i) e (ii), o discurso tecnológico- teórico são as proposições definidas pelos autores nas etapas anteriores, a respeito da posição relativa das retas, a

perpendicularidade, retas concorrentes e as equações relacionadas a esses temas.

Há ainda em LD_1, no capítulo dedicado ao estudo da reta, uma breve abordagem sobre as equações das bissetrizes dos ângulos definidos por retas concorrentes, e uma outra sobre semiplanos e inequações.

Sobre bissetrizes, os autores definem que dadas duas retas concorrentes $(r)a_1x + b_1y + c_1$ **e** $(s)\, a_2x + b_2y + c_2$, pode-se obter as equações das bissetrizes dos ângulos definidos pelas retas (r e s).Neste caso as equações são definidas por: $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}} \pm \frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}} = 0\ (iii)$.Os exercícios propostos são aplicações diretas dessas equações, sintetizadas por exemplo, como a tarefa do tipo, T_{49}:*obter as equações das bissetrizes dos ângulos definidos por* $(r)\ 3x + 4y - 1 = 0$ *e* $(s)\ 24x + 7y + 1$. A técnica para resolução das tarefas é a aplicação direta e resolução da equação (iii), por substituição dos valores dos termos das equações das retas.

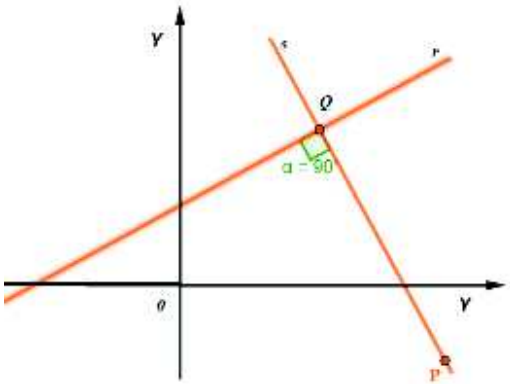
Por fim, os autores apresentam um breve estudo sobre semiplanos. Mostram como resolver as inequações do 1° grau (tarefas) com uma ou duas incógnitas por meio do semiplano formado entre a reta e o plano cartesiano, em seu respectivo quadrante. A técnica para resolução das tarefas se resume à resolução direta de inequações com uma ou duas variáveis, por meio da análise do seu sinal. As tarefas são, por exemplo, do tipo T_{45}*: resolva a inequação* $2x - y \leq 6$.

Um tema que os autores abordam após as posições relativas de duas retas e que fecha o estudo, é o cálculo de distância entre ponto e reta. Os autores apresentam como tipo de tarefa T_{50}: *calcular a distância entre* $P(3, -2)$ *e* $(r)3x - 4y + 3 = 0$. Consiste em calcular a distância entre um ponto $P(x, y)$ no plano cartesiano e uma reta definida pela equação $(r)\ ax + by + c$.

De acordo com os autores, três etapas são descritas na técnica: primeiro traçar, por P a reta s perpendicular a r, segundo a figura 71. Desta forma calcula o coeficiente angular de s: $m_s = \frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} = = \frac{4}{3}$, como $P \in s \Rightarrow (s)\ y + 2 = -\frac{4}{3}(x - 3)$, ou seja $(s)4x + 3y - 6 = 0$. A segunda etapa é obter o ponto Q de interseção de r com s, resolvendo o sistema $\begin{cases}(r)3x - 4y + 3 = 0\\(s)4x + 3y - 6 = 0\end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$ e $y =$

$\frac{6}{5} \Rightarrow Q\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$. A terceira etapa é calcular a distância PQ: $d_{PQ} = \sqrt{(3-\frac{3}{5})^2 + (-2-\frac{6}{5})^2} = \sqrt{16} = 4$.

Figura 71 - Ilustração da tarefa do tipo T_{50}



Fonte: Adaptado de Iezzi et al (1990, p.45)

Nesta última seção do estudo da reta, a partir da obra de Iezzi et al (1990), optamos por suprimir e sintetizar algumas abordagens no LD_1, por julgar globalmente não irão agregar significativamente conteúdo ao nosso MERA e posteriormente na organização do PEP-FP. Ao mesmo tempo não avançamos nos demais temas relativos a GAP, em LD_1, a circunferência e as cônicas, justamente porque esses temas também não farão parte da experimentação e já foram suprimidos do MER, especialmente o estudo das cônicas.

4.2.3 Estudo da reta por meio de $\boldsymbol{LD_2}$

A partir das organizações matemáticas e didáticas identificadas em LD_1,vamos analisar $\boldsymbol{LD_2}$, tentando identificar em que essas duas obras se diferenciam em termos de tipos de tarefas, de tarefas, técnicas associadas a essas tarefas e o bloco tecnológico-teórico associado às técnicas que serão identificadas tendo por base o nosso MER.

De início, destacamos que o autor de LD_2 abordou o estudo da reta no mesmo capítulo dedicado ao estudo do ponto. Os temas estão, portanto, organizados em pequenas seções assim como em LD_1. O autor aborda, nesta ordem, a teoria, em seguida atividades resolvidas e depois atividades propostas.

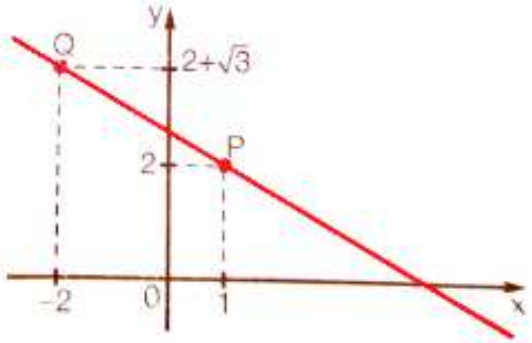
O primeiro tópico no estudo da reta é o coeficiente angular da reta. Em termos do discurso tecnológico-teórico não há diferença do que foi apresentado em LD_1. No entanto, o autor inicia o estudo apresentando uma situação-problema da física que envolve o movimento uniforme, relacionando a equação da reta,

com a equação de posição da mecânica $S = S_0 + vt$, além disso, apresenta os gráficos que representam as possíveis posições de um automóvel, com uma certa velocidade. Tais gráficos representam retas no plano cartesiano.

Com reação às tarefas, propõe alguns dos tipos de tarefas encontradas em LD_1, por exemplo T_{26},. Acrescenta-se dois exemplos de tipos de tarefas que não aparecem em LD_1, a primeira é T_{44}: *sabendo que a reta r passa pelos pontos $A(2,3)$ e $B(x, x+2)$ e tem coeficiente angular $m = -1$, calcule o valor de x.*

O segundo tipo de tarefa que não aparece em LD_1, é o tipo de tarefa que descreveremos genericamente, pois ela depene da representação gráfica da reta e de pelo menos dois de seus pontos, T_{45}: *determinar a medida do ângulo de inclinação de uma reta, sendo dado a representação geométrica no plano cartesiano,* ilustramos como exemplo da tarefa, a figura 72

Figura 72 - Ilustração do exemplo de tarefa do tipo T_{45}



Fonte: SOUSA et al (1990, p. 163)

O segundo tópico apresentado pelo autor é a equação da reta, tendo um ponto e o coeficiente angular. A técnica para dedução da equação tem o mesmo discurso tecnológico- teórico de LD_1.

Salientamos, que, apesar de a abordagem teórica adotada por esse autor, apoiar-se nos mesmos fundamentos teóricos de LD_1, a organização matemática de LD_1 é mais detalhada. O autor também relaciona a equação reduzida da reta à função afim $f: \mathbb{R}\ em\ \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, na qual a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear.

Com relação às atividades (tarefas), elas estão organizadas em termos de situações-problema, com diferentes contextos. Diferente de LD_1,que em todas as organizações usou apenas o contexto matemático como variável didática.

Nessa perspectiva, de diferentes contextos, cada situação-problema integra mais de uma tarefa, ou mais de um tipo de tarefa. O autor também utiliza atividades apenas com o contexto matemático, mas explora em tais atividades, mais de um tipo de tarefa. Nota-se, portanto, a diferença das organizações

didáticas de cada obra, na primeira há uma quantidade bem maior de exercícios, e repetições de tarefas do mesmo tipo.

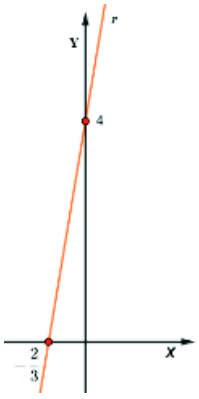
No segundo livro, a quantidade de atividades (o autor não usa o termo exercícios) é menor que em LD_2, porém elas exploram o conteúdo a partir de diferentes contextos, requerendo dos potenciais alunos uma capacidade de correlacionar e interpretar contextos do cotidiano com o tema matemático em estudo.

No entanto em LD_2, em termo das organizações matemáticas a variação dos tipos de tarefas é maior, ou seja, apesar de repetições, há uma grande variedade de tipos de tarefas, tornando a organização matemática mais rica e mais completa, mesmo tendo em LD_2 alguns temas não abordado em LD_1, como por exemplo o modelo de equações segmentária e equações paramétricas.

Globalmente, as situações-problema integram os seguintes tipos de tarefas já apresentadas: T_{30} e T_{31}. Aparecem ainda, outros tipos de tarefas, por *exemplo T_{46}: dada a reta r representada no plano cartesiano*, figura 73*, ou escreva (ou determine) a equação de r na forma reduzida*. Neste caso, os dados do problema aparecem na representação geométrica no plano cartesiano, os valores dos coeficientes angular e linear a e b respectivamente, são identificados nos pontos contidos na reta $A(0,4)$ e $B(-\frac{2}{3},0)$.

Ainda com relação ao contexto da figura 73, podemos associar a tarefa do tipo: T_{47}: determinar a *função f associada à r ;* e T_{48}*: determinar quais valores de x a imagem é negativa;* T_{49}*: determinar qual o quadrante do plano cartesiano a parte correspondente de f está inserida*

Figura 73 - Ilustração de T_{46} , T_{47} e T_{48}



Fonte: Adaptado de Sousa (2010, p. 167)

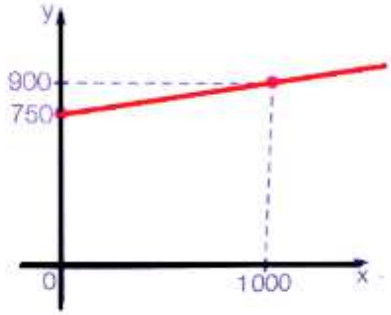
Dando continuidade ao estudo, autor apresenta mais um tipo de tarefa, a qual, visa a identificação da equação reduzida sendo dados os coeficientes

angular, linear e múltiplas equações para assinalar a correta, T_{50}*: se a reta* r *tem coeficiente angular* -6 *e coeficiente linear* -9*, então a equação reduzida* r*é: (a)* $y = 9x + 6$*, (b)*$y = -9x - 6$*, (c)* $y = 6x - 9$ *(d)*$y = -6x - 9$*,(e)*$y = -2x - 3$.

As situações-problema propostas pelo autor integram o mesmo tipo de tarefas já descritas, por exemplo, segundo a ilustração da figura 74:

> Certa empresa oferece um salário mensal fixo no valor de R$750,00 e mais uma comissão que corresponde a 15% do valor (em reais) das vendas feitas pelo funcionário. O gráfico a seguir apresenta o salário de um funcionário dessa empresa em função do valor (em reais) de suas vendas; (a) escreva uma função que represente o salário de um funcionário a partir do valor das vendas feitas por ele; (b) qual será o salário deste funcionário se o valor de suas vendas for: R$750,00;R$1.200,00;R$3.585,00?; (c)quanto deve ser o total das vendas realizadas por um funcionário para que seu salário seja de R$1.800,00? (SOUSA, 2010, p.167)

Figura 74 - Ilustração do problema contexto de funções



Fonte: Sousa (2010, p.167)

No entanto, tais tarefas estão organizadas no contexto de funções, cabendo ao professor explorar esse contexto relacionando-o com o estudo do objeto reta. Neste exemplo, destacamos as tarefas propostas nas letras *a, b, c* do problema. T_{51}:*escreva a função que representa o salário de um funcionário a partir das vendas, a partir do gráfico,* ou ainda*, escreva a lei que representa a função do salário a partir das vendas;* T_{52}*:qual o do salário se o valor das vendas for R$750,00; R$ 1.200 e R$3.585,00,* ou seja*, qual o valores das abscissas* x *dadas ordenadas* y *(750, 1200 e 3.585)?*A tarefa do tipo T_{53}*,* consiste em*: determinar o valor da ordenada* y *(total de vendas) dada a abscissa* x *(salario R$1.800)*

T_{51}, T_{52} e T_{53} são tipos de tarefas próprias do estudo de funções, sob outro ponto de vista didático, são tipos de tarefas típicas do estudo da reta, cuja *técnica* é a da equação obtida pela substituição de valores de x ou de y. O discurso tecnológico- teórico se apoia na equação reduzida da reta, a partir da localização dos pontos que pertencem a esta reta no plano cartesiano.

No estudo de reta, o autor apresenta uma construção semelhante ao do livro LD_1. A tecnologia apoia-se no alinhamento de três pontos e no desenvolvimento do cálculo de determinante de ordem 3x3, para encontrar a equação geral da reta.

O autor apresenta tipos de tarefas não exploradas em LD_1, no entanto, o nível de complexidade exigido é elementar. Na perspectiva da obra LD_1, tais tarefas são triviais e de cálculos imediatos. Escrevemos genericamente os tipos dessas tarefas:

- T_{54}*: escrever a equação geral da reta* r *dados dois pontos* $A(x_1, y_1)$ *e* $B(x_2, y_2)$*;*
- $T_{55(A)}$*: dada a equação geral da reta* $ax + by + c = 0$ *determinar o coeficiente angular de* r
- *;* $T_{55(B)}$*: dada a equação geral da reta determinar o coeficiente angular de* r*;*
- T_{56}*: dada a equação geral da reta determinar o coeficiente linear de* r*.*
- T_{57}: *determinar os pontos que não pertencem a reta.*

Estes tipos de tarefas estão presentes nas atividades propostas, que optamos por suprimir, pois já formam desenvolvidas nas abordagens de LD_1.

Por fim, o autor aborda a posição relativa de duas retas de forma também resumida, em comparação ao que foi apresentado sobre esse tema em LD_1. O autor se limitou a definir o que são duas retas paralelas, concorrentes e perpendiculares, apresentando apenas a relação entre os coeficientes angulares das retas perpendiculares.

Nota-se que a relação entre os coeficientes das retas (r e s) não se apoia na equação geral, como feito e demonstrado pelo autor em LD_1, que as relações entre os coeficientes(m_r e m_s) são estabelecidas a partir da representação geométrica de duas retas concorrentes (r e s) e suas equações deduzidas: "Dadas duas retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ não verticais, temos que elas são perpendiculares entre si se e somente se $m_s = -\frac{1}{m_r}$: $r \perp s \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$ ou $r \perp s \Leftrightarrow m_r . m_s = -1$" (SOUSA, 2010, p.171).

Com relação aos tipos de tarefas identificadas nas atividades sobre a posição reativa de duas retas, temos tipos de tarefas já apresentadas em LD_1. Mesmo com pequenas diferenças na elaboração delas, em síntese, são tarefas do mesmo tipo que T_{33}, T_{34} e $T_{42(A)}$. Além desses tipos de tarefas tem-se a tarefa

do tipo, por exemplo, T_{65}: *determinar os valores reais de* a *para que as retas dadas pelas equações* $y = 6 - \frac{(a+1)}{2}\ x$ *e* $x + ay + 2 = 0$. Há também tipos de tarefa, chamadas pelo autor de "desafio". São tarefas mais elaboradas e com nível de complexidade maior que as demais, estas também integram os tipos de tarefas já apresentadas em nosso texto. Há, no entanto, o caso do problema a seguir, cujo contexto, enquanto variável didática é matemático, foi retirada pelo autor de uma prova de vestibular:

> (UFG-GO) Considere o triângulo cujos vértices são pontos A, B e C, sendo que suas coordenadas no plano cartesiano, são dadas por $(4,0), (1,6)$ e $(7,4)$, respectivamente. Sendo PC a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, calcule as coordenadas do ponto P. (SOUSA, 2010, p. 175)

Neste problema, a tarefa principal é encontrar o ponto de intersecção entre duas retas perpendiculares, ou seja, obter a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta (r). Esta tarefa corresponde ao tipo de tarefa T_{38}, já desenvolvida na subseção anterior, em LD_1, mas, as equações das retas perpendiculares não foram dadas.

Na seção que segue, o autor aborda a discussão de sistemas lineares com duas incógnitas e duas equações. Nota-se, que na obra já analisada, LD_1, o autor não abordou a solução de sistemas lineares, como um tema ou seção de estudo .Os sistemas lineares, em LD_1,aparecem como parte da *técnica* para a resolução das *tarefas* que envolvem posição relativa de duas retas e eventualmente tarefas sobre outros temas. O discurso tecnológico- teórico justificativo a resolução de sistema lineares, enquanto uma técnica, é que o ponto de intersecção entre duas retas concorrentes, corresponde também à única solução simultânea das equações dessas retas.

O autor de LD_2, apresenta três casos para a análise da solução de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

> Em um sistema linear com duas incógnitas de duas equações $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ em relação ao par de retas$r$: $a_1x + b_1y = c_1$ e s: $a_2x + b_2y = c_2$ e as soluções correspondentes a esse sistema, temos as seguintes possibilidades: sistema possível e determinado (SPD): r e s são concorrentes, cruzando-se em um único ponto, cujas coordenadas correspondem à única solução do sistema; sistema possível e indeterminado (SPI): r e s são coincidentes, possuindo infinitos pontos comuns, cujas coordenadas correspondem às infinitas soluções do sistema; sistema impossível (SI): r e s são paralelas e distintas. Nesse caso, o sistema não tem solução. (SOUSA, 2010, p. 176)

Analisando do ponto de vista da TAD, neste tema apresentado pelo autor em LD_2, o sistema linear assume o papel de *teoria,* e não de t*écnica*, como utilizado nas tarefas que envolvem posições relativas de duas retas (em LD_1). Nota-se que este fenômeno parece ser próprio da constituição das organizações matemáticas, ou seja, um objeto, pode na resolução de tarefas, assumir o papel, ora de técnica, ora de discurso tecnológico-teórico ou de teoria.

As *técnicas clássicas* para resolução de sistemas lineares de duas equações, por exemplo, são desenvolvidas no ensino fundamental II: a regra da adição, a regra da substituição e a regra da comparação. A regra do escalonamento é estudada normalmente no ensino superior. Para fins desta pesquisa, não adentramos na discussão dessas regras, pois as organizações matemáticas desenvolvidas nos modelos epistemológicos (dominante e de referência) focalizam apenas os determinantes de ordem 2x2 ou 3x3, os quais tiveram suas técnicas devidamente justificadas.

Retomando a discussão de LD_2, a respeito da solução, a técnica concebida como mais econômica, depende do tipo de sistema, no entanto, no âmbito da posição relativa de duas retas no plano cartesiano, em LD_2, a técnica utilizada para fornecer a solução de um sistema, consiste em: a partir dos coeficientes angular e linear das respectivas equações das retas r e s, traçar o gráfico da reta e identificar o tipo de solução (SPD, SPI e SI) por meio da posição relativa das duas retas, portanto, é uma discussão da solução do sistema linear.

A solução propriamente dita de um sistema linear, representa as coordenadas do ponto $P(x, y)$, de intersecção das duas retas r e s que satisfazem as equações simultaneamente, deve ser obtida por meio das técnicas fundamentais de resolução de sistemas lineares.

A partir das definições (*teoria*) para discussão de um sistema linear o autor propõe os seguintes tipos de tarefas:

- T_{58}: *classificar os sistemas em SPD, SPI ou SI;*
- T_{59}*: analisar o coeficiente angular e o coeficiente linear*
- T_{60}*: determinar a solução de um sistema de equações, caso exista;*
- T_{61}*: representar graficamente os sistemas de equações;*
- T_{62}*: escrever um sistema de equações que representa uma situação problema;*

Esses tipos de tarefas aparecem nas atividades propostas como resolução direta de um sistema de equações dado, ou no âmbito de uma

situação-problema, como é o caso do tipo de tarefa T_{63}, conforme exemplo a seguir:

> Em uma lanchonete, são oferecidos dois tipos de lanches, A e B, sendo que o lanche A custa R$4,00 reais a unidade, e o lanche B, R$6,00. Em um final de semana, essa lanchonete arrecadou R$162,00 na venda de 33 lanches. (a) escreva o sistema de equações que representa essa situação. (b)classifique o sistema que você escreveu no item (a) em SPD, SPI ou SI. (c) quantas unidades de lanche foram vendidas no final de semana? (SOUSA,2010, p. 177)

As técnicas para encontrar a solução dos sistemas, o par ordenado (x, y), não são evidenciadas pelo autor nas resoluções propostas, pois nos casos de tarefa T_{55} as respostas de soluções são fornecidas de forma imediata em nosso ponto de vista, estão implícitas as técnicas clássicas.

Os últimos temas abordados em LD_1, sobre o estudo de reta, apresentam-se tal como em LD_2, são eles*: ângulos entre duas retas concorrentes* e *inequações com duas variáveis*. Nestes casos, as temáticas são apresentadas de forma resumida em relação às construções matemáticas realizadas pelos autores de LD_1. Apresentam as mesmas equações e propriedades, porém com demonstrações mais abreviadas.

Com relação ao corpo de tarefas, identificamos os mesmos tipos de tarefas descritas em LD_1.Optamos por não detalhar a abordagem da solução de inequações por semiplanos, conforme justificado anteriormente.

Concluímos o estudo dos livros didáticos do ensino médio, ressaltando a importância de se buscar um modelo alternativo para o estudo de GAP. Os dois livros analisados apresentam pontos significativos para a formação matemática dos educandos. No entanto, LD_1 tem uma abordagem didática focada no discurso tecnológico-teórico, as tarefas têm seu nível de complexidade aumentando à mediada que a organização matemática se amplia. Os autores ainda mantêm um modelo didático de exemplos (exercícios resolvidos) e depois aplicações desses modelos. Em nosso ponto de vista, falta incorporar situações-problema de diferentes contextos, além do matemático, bem como explorar mais detalhadamente as *técnicas.*

No entanto, ressaltamos a abordagem teórica bem fundamentada em grande parte do que analisamos, refletindo a influência da matemática moderna, adequada para momento histórico no qual a obra foi publicada.

A segunda obra analisada, publicada vinte anos mais tarde que a primeira, incorpora um elemento importante, a resolução de situações-problema dos mais variados contextos. Nesse sentido, há um avanço na abordagem didática do

conteúdo, no entanto, o discurso tecnológico- teórico, ou a própria *teoria*, é pouco explorada, apesar de ter muitas tarefas semelhantes a algumas utilizadas em LD_1.

Do ponto de vista ecológico, as tarefas identificadas como tarefas fundamentais, são tarefas oriundas da GA do século XIX, descritas em nosso MER. No entanto, sofreram modificações ou mutações em duas perspectivas: a primeira é do ponto de vista dos registros de representação semiótica, especialmente do registro algébrico e a segunda é do ponto de vista das técnicas desenvolvidas, que foram aprimoradas e incorporadas mais fortemente pelos elemento da álgebra linear, especialmente o cálculo de determinantes.

Por outro lado. as tarefas fundamentais que aparecem no MER se constituem, em alguns casos, como o discurso tecnológico-teórico do MED.

Quanto ao surgimento de determinante em nosso estudo sobre GA, ponderemos que a equação gerada pelo determinante 3x3, em torno das coordenadas de pontos pertencentes a uma reta, é exatamente igual ao desenvolvimento das equações propostas no estudo do nosso MER, justificadas teoricamente pela geometria sintética.

Outro aspecto, presente no modelo dominante dos livros didáticos analisados, é o completo desaparecimento de diferentes sistemas de coordenadas, bem como da ideia central do que é um sistema. Na atualidade, adota-se apenas as coordenadas retangulares, como sendo o único sistema cartesiano ou plano cartesiano, como é chamado na educação básica. Significa dizer, que os alunos só saberão da existência de outros sistemas, *a priori*, se tiverem a oportunidade de estudar GA no ensino superior ou se o professor incorporar essas informações históricas ao seu projeto de ensino.

Tudo isso, para destacar algumas modificações identificadas nas análises das organizações matemática e didáticas, que ocorreram no sistema educativo brasileiro, desde que se começou a falar a expressão “Geometria Analítica Plana” (especialmente nos manuais escolares franceses do século XIX). Tais modificações coadunaram, em nosso ponto de vista, para o distanciamento da GAP que conhecemos, na atualidade, da sua constituição histórica desde Descartes. Nesse sentido, temos atualmente uma GAP cada vez mais entrelaçada e dependente da Álgebra Linear, ao passo que vai se distanciando da Geometria.

4.3 Geometria Analítica na Licenciatura em Matemática

Nesta seção, temos por objetivo fazer uma análise global de como a GA é abordada na Licenciatura em Matemática. Fazemos um contraponto entre a GA do ensino médio e da Licenciatura, tendo por base a análise dos livros didáticos e a nossa experiência no curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade na Bahia.

Na sequência, traremos elementos do currículo da Licenciatura de uma universidade baiana, na qual realizamos nossa experimentação. E por fim, evidenciaremos os elementos que norteiam as organizações matemáticas e didáticas, tendo por base a bibliografia principal indicada no currículo da licenciatura.

Em nossa experiência de docência no ensino superior é sabido que nos cursos de Licenciatura em Matemática uma das disciplinas que mais reprova os estudantes é a geometria analítica. Matos (2017) sinaliza essa questão, incluindo a álgebra linear.

Par fins de nossa pesquisa, construímos um modelo alternativo para o estudo de GAP que requer conhecer aspectos fundamentais da realidade que se deseja estudar. Nesse sentido, nos debruçamos sobre as ementas do curso de Licenciatura em Matemática, especificamente, das componentes de GA. O documento oficial do curso é o Projeto Pedagógico do Curso de Matemática[35] (UEFS, 2004). Tomamos conhecimento que o projeto estava em fase de reformulação, mas não tivemos acesso às futuras alterações no currículo, razão pela qual apoiamo-nos no projeto que ainda estaria em vigor até 2019.

Neste documento, identificamos, além de toda a constituição e fundamentação legal, teórica e pedagógica do projeto, o currículo prescrito por meio das ementas de cada componente curricular. Nessas ementas, constam as disciplinas, seu código no currículo, a carga horária de trabalho e os temas gerais a serem desenvolvidos pelo professor:

> EXA 180 - GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR I – 90h
> Sistemas de Coordenadas (cartesianas, polares, esféricas). Transformação de Coordenadas. Álgebra Vetorial, Matrizes e Determinantes. Espaço Vetorial, Dependência Linear.
> EXA 215 - GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR II – 90h

[35] Disponível em: <<http://matematica.uefs.br/arquivos/File/ppc/Projeto_Reforma_Curricular_05.pdf>> acesso em: Dez/2016.

> Sistemas de Equações Lineares, Reta e Plano. Transformações Lineares, Operadores, Autovalores e Autovetores. Formas Quadráticas, Cônicas e Quádricas. (UEFS, 2004)

Além das informações básicas da disciplina, o documento, também, indica as referências básicas e as referências complementares indicadas, para o uso de professores e estudantes. Sendo as referências básicas obrigatórias e as complementares opcionais, a depender do trabalho desenvolvido pelo professor, ele tem uma orientação curricular geral, tendo o aporte do referencial bibliográfico a ser utilizado. No caso dos componentes EXA180 e EXA215, observa que o conteúdo é fracionado, sendo estudado em cada disciplina parte da geometria analítica plana e parte da álgebra linear.

As referências bibliográficas básicas de EXA180 se apoiam em quatro autores: Callioli, Domingues e Costa (1991), Edwards (1998), Simmons (1987) e Feitosa (1981). Dessas quatro referências, as duas primeiras abordam somente a álgebra linear, incluindo as matrizes e os sistemas lineares. As duas últimas trabalham especialmente com a GA. A bibliografia básica, de acordo com o título das obras, está voltada para álgebra linear, a geometria analítica no espaço, a álgebra vetorial e a geometria analítica (um tratamento vetorial).

A partir dessas observações das obras adotadas, identificamos em dois livros a existência dos temas relacionados ao nosso estudo, tais temas já foram analisados anteriormente no MER e na análise de livros didáticos voltados para o ensino médio.

A partir disso, nos debruçamos em duas obras, Simmons (1987) e Feitosa (1981) para identificar o que aparece de GAP, especialmente, o estudo do ponto, da reta e do círculo, tendo em conta que são as principais temáticas de GA a serem desenvolvidas pelo futuro professor no ensino médio.

Na obra de Simmons (1987)[36], a partir do sumário, identificamos no primeiro capítulo temas de interesse para nossa pesquisa. O autor, no primeiro capítulo intitulado números, funções e gráficos, traz os seguintes tópicos de estudo: a reta real, o plano cartesiano, coeficientes angulares e equações de retas, circunferências e parábolas, conceito de função, tipos de função, fórmulas de geometria e gráficos de funções.

No tópico referente ao plano cartesiano, o autor o define pelo sistema de coordenadas retangulares no plano (sistema coordenado), em seguida

[36] Disponível em : << https://pt.slideshare.net/MoniseSousa/clculo-com-geometria-analtica-vol-1-george-f-simmons>> Acesso em: jun/2017

apresenta como subtemas: a fórmula de distância, a fórmula de ponto médio, o coeficiente angular da reta, a equação geral da reta e sua forma reduzida. Na sequência, apresenta as relações entre os coeficientes quando as retas são paralelas e perpendiculares, a equação da circunferência e da parábola. Por fim, começa o estudo de funções reais e no tópico fórmulas de geometria, aparece as fórmulas da geometria espacial, área e comprimento do círculo, volume da esfera, do cilindro e do cone.

O que concluímos a respeito de GAP nesta obra é que o autor apenas passa superficialmente por fórmulas e definições dos temas descritos, como uma espécie de revisão básica do conteúdo. Em nosso ponto de vista, a abordagem didática dos temas descritos, se dá desta forma, porque o objetivo da obra é estudar a fundo o cálculo, e a geometria analítica vai aparecer, inevitavelmente no desenvolvimento das organizações matemáticas, mas, ao que parece, não é o foco principal da obra, pois todos os demais temas não têm a GA, como centralidade do estudo.

Esses achados corroboram com as proposições de Soares (2013), quando identificou em sua pesquisa no ensino superior, o desaparecimento de GAP na disciplina de GA ou a sua redução à apenas um tópico de estudo na Licenciatura em Matemática, além disso, a emergência cada vez mais forte do estudo de vetores em detrimento de GAP.

Na segunda obra verificada, Feitosa (1981), toda a abordagem comporta os vetores no espaço, ou seja, é uma abordagem completamente dependente da álgebra linear. O modelo de estudo de GA na licenciatura está apoiado na álgebra linear e na álgebra vetorial, isto é, a base de estudo da geometria analítica neste curso é o estudo de vetores. A geometria analítica, praticada no ensino médio, aparece no começo de um dos livros adotados como referência básica para o estudo, no entanto é uma rápida abordagem. Neste segundo livro analisado, o estudo de GAP nem aparece, toda a abordagem é relativa a vetores e álgebra vetorial no espaço ($\mathbb{R}^3$).

Concluímos que no formato em que o currículo da Licenciatura em Matemática está desenhado, o estudo da GAP para o ensino médio, tende a ser compactado, frente ao volume de objetos de estudo que precisam ser desenvolvidos, em níveis de complexidade mais avançados.

Refletindo um pouco mais sobre o currículo de GA na Licenciatura, concluímos que a articulação necessária dos estudos básicos de GAP com

álgebra vetorial e a álgebra linear, em nosso ponto de vista, fica completamente a cargo do trabalho do professor em apenas dois semestres, incluindo o currículo de GAP, GAE e de Álgebra Linear.

Independentemente desses aspectos curriculares, as dificuldades e as restrições na formação dos estudantes da licenciatura e as restrições institucionais identificadas no nosso estudo piloto, nos permite reafirmar que tal articulação não obtém sucesso da forma como o currículo se apresenta.

Um fator que consideramos como restrição do ponto de vista institucional, identificado na análise das ementas de GA, do curso de Licenciatura em Matemática, é o volume de conteúdo a ser estudados em dois semestres. A priori esse volume de conteúdos comportaria, quatro ou cinco semestres. Praticamente a GA e a álgebra linear são vistas em uma única disciplina. Em nosso ponto de vista, o estudo tende a ser aligeirado e superficial, exigindo do professor um grande esforço para abarcar todos os conteúdos propostos.

Essas reflexões, justificam o fato da GAP, conforme sinalizou Soares (2013), estar desaparecendo da licenciatura, ou sendo, apenas, um tópico e revisão. Assim, o estudo de GA tende a ser cada vez mais reduzido à álgebra vetorial, se distanciando pouco a pouco da Geometria.

4.4 Constituição do Modelo Epistemológico Dominante

Nesta seção, visamos, a partir do estudo dos três modelos dominantes selecionados no sistema educativo brasileiro (nos documentos oficiais do ensino médio, nos manuais escolares do ensino médio e na Licenciatura em Matemática) apresentar um modelo epistemológico dominante geral por meio do mapa descrito na figura 74.

O currículo de GA, presente na Licenciatura, como vimos, apresenta restrições, pois não há a inclusão detalhada do estudo de GAP, na perspectiva do ensino médio (sem a abordagem vetorial), ou seja, abordagem desta parte da GA parece ser aligeirada e compactada. Parece que as organizações matemáticas e didáticas foram sintetizadas por meio de fórmulas, apresentadas nos livros didáticos prescritos pelas ementas.

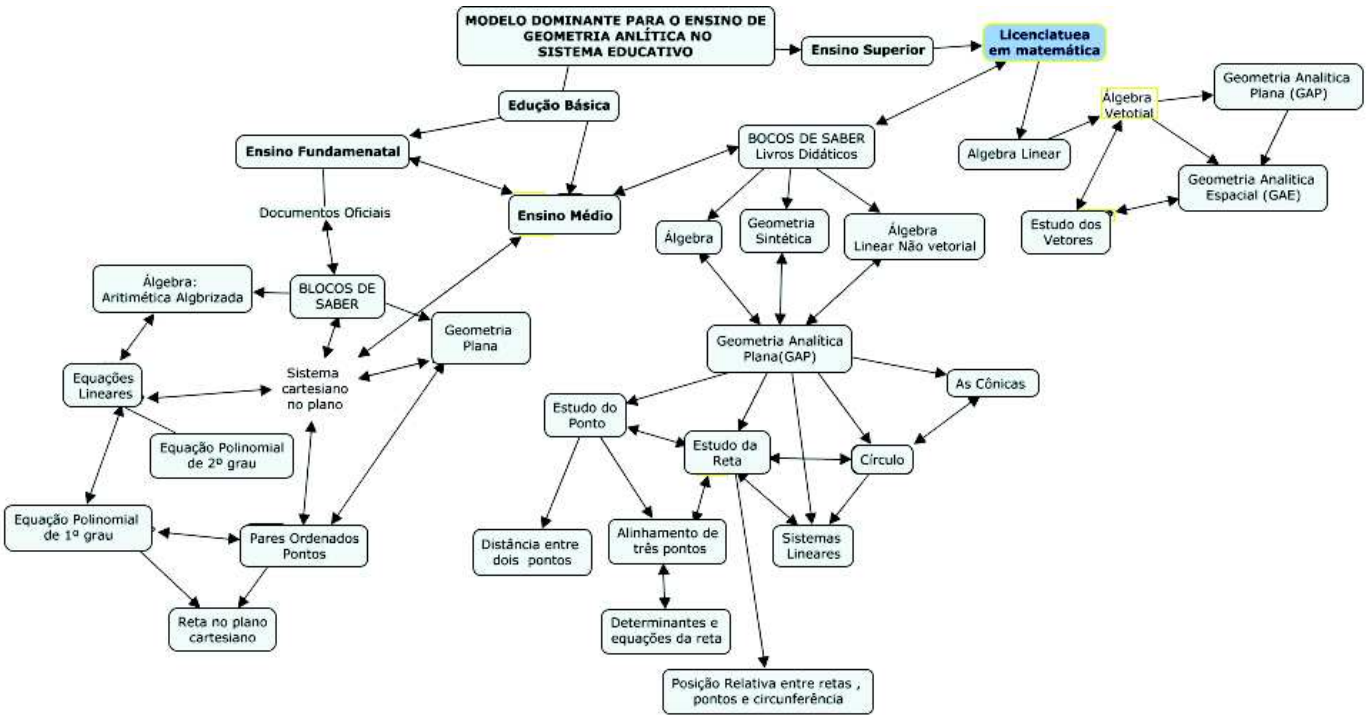
Diante dessas considerações e das análises realizadas nesse capítulo, sintetizamos o modelo epistemológico dominante no sistema educativo brasileiro, para o estudo de GA, com ênfase em GAP, por meio de um mapa conceitual, representado na figura 75.

Apesar do foco principal das análises dos modelos dominantes, ter sido em torno das organizações matemáticas e didáticas. Estas organizações estão representadas no mapa por meio dos tópicos de estudo. Ressaltamos que o detalhamento das tarefas e técnicas trará influências no modelo alternativo, apesar de não estar visível no mapa do MED, ao mesmo tempo já foram descritas nas análises dos documentos que compões o MED.

No mapa, segundo a figura 75, o esquema está organizado em três partes: a primeira parte situada mais à esquerda, elenca as conexões entre os objetos matemáticos prescritos no ensino fundamental, por meio dos documentos oficiais, estes, conectam-se por setas duplas aos objetos matemáticos prescritos para o ensino médio, localizados na parte central do mapa, tendo por base os manuais escolares (livros didáticos).

O terceiro eixo e conexões estão localizados na parte superior direita da figura e ilustra o currículo da Licenciatura em Matemática. O que destacamos entre o eixo da educação básica e do ensino superior é a presença ou não do estudo de vetores, ou da álgebra vetorial.

Figura 75 – Modelo Epistemológico Dominante (MED) no sistema educativo



Fonte: Elaborado pela autora

A GA presente no ensino superior, especialmente na Licenciatura, como vimos, está muito mais focada numa abordagem vetorial, e enxerga a GA, somente pelo âmbito da álgebra linear. No caso do ensino médio, o estudo dos objetos se foca apenas na GAP, ou seja, no plano cartesiano, associando a álgebra linear como parte fundamentadora, mas sem considerar a abordagem vetorial, eventualmente recorrendo aos teoremas da geometria sintética (Tales, Pitágoras, semelhança de triângulos etc.)

A base de saberes para o ensino fundamental, série finais (blocos situados no lado esquerdo do esquema) que se relaciona com GA, apoia-se na geometria plana e na aritmética algebrizada. A geometria articulada com sistema cartesiano no plano apresenta alguns objetos de estudo do campo de GA, tais como: o próprio sistema cartesiano, a representação de pontos nesse sistema, a distância entre dois pontos e a noção de par ordenados. No âmbito da álgebra aparece as equações lineares de 1º e 2º grau, mas ainda sem as conexões com GA.

Com relação à álgebra, identificamos na resolução de equações lineares de uma variável, o discurso tecnológico- teórico apoiado na noção de homogeneidade, justificada no capítulo 3 em nosso MER, para as propriedades e operações com equações. Mas, globalmente, a álgebra apresentada no ensino fundamental está apoiada nas operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).

No bloco de saberes (no centro do mapa), encontram-se as conexões identificadas entre ensino médio (figura 75), o ensino fundamental e superior. É no ensino médio que há uma ampliação desses blocos de conteúdo em torno dos objetos de GAP, com o estudo efetivamente do ponto, da reta, do círculo e das cônicas, estes dois últimos suprimidos da análise dos manuais didáticos. Além disso, o modelo dominante nos livros didáticos traz as organizações matemáticas e didáticas a serem exploradas enquanto praxeologias para professor.

4.5 Concepções de um modelo epistemológico de referência alternativo (MERA) para o estudo de Geometria Analítica Plana

Neste tópico finalizamos o capítulo, apresentando uma síntese das escolhas de investigação em termos das etapas subsequentes de nossa pesquisa, tendo por base o estudo realizado nos capítulos 3 e neste capítulo.

Uma das premissas para tais escolhas é que uma vez identificadas certas restrições ao percurso que se pretende, um modelo alternativo visa contornar ou controlar as variáveis que *a priori* se configuram como restrições ao estudo.

O nosso modelo epistemológico de referência alternativo (MERA), simplesmente tem como apoio as conclusões e reflexões que levantamos após o estudo preliminar do MER e do estudo do modelo dominante de transposição didática no Brasil, por meio das análises dos currículos e dos livros didáticos, nesse sentido, apresentamos as justificativas para as escolhas da condução da pesquisa, nas etapas subsequentes.

O MER desenvolvido aponta para um estudo aprofundado dos objetos de GAP, tendo um aporte teórico da geometria euclidiana, de aspectos da álgebra linear e da geometria de Descartes e Fermat, no entanto, se configuram distanciados da realidade do que é praticado em sala de aula na contemporaneidade. Em contrapartida, os problemas apresentados ao longo do estudo (MER), os quais definimos como tarefas fundamentais, podem ser reescritos em termos de atividades de estudo e pesquisa (AEP), segundo Chevallard (1999), com o intuito de compor um PEP-FP.

De acordo com as análises do documento proposto na construção do MER, o conjunto de tarefas descritas consolidam-se progressivamente em termos de organizações matemáticas pontuais, locais e se desenvolvem até chegar a uma organização matemática regional, como estudo de GAP, e global, esta última compreenderia todo o campo de estudo de GA. Ressaltamos que, o alcance de nosso estudo chegou até o que compreende o círculo no plano em nosso MER.

No caso do MED dos livros didáticos, nos limitamos ao estudo de ponto e de reta, a partir de organizações matemáticas locais no âmbito do corpo de GAP. Inferimos, após nossas análises, que o modelo dominante das organizações matemáticas nos livros didáticos se distancia cada vez mais de um discurso tecnológico-teórico, mais precisamente, da teoria que fundamenta uma potencial praxeologia do professor. O modelo de livro analisado do começo do século XXI se apoiam mais nas técnicas, ou seja, em um bloco prático-técnico que no bloco tecnológico-teórico identificado em nosso MER, o que vai exigir do professor um trabalho mais aprofundado.

Por outro lado, as organizações matemáticas, especialmente nos livros dos anos 1990, se integram em uma organização matemática de dimensão

crescente, pontual, local, regional e assim sucessivamente, completando uma organização regional em termos de GAP.

As organizações didáticas identificadas as análises dos livros ressaltam, por um lado, um modelo *conteúdo* ⇒ *exemplo*⇒ *atividade,* presente nesses manuais. Tal proposta não permite, provavelmente, o desenvolvimento da autonomia do aluno, pois se apoia em um modelo de repetição de tarefas e técnicas, pré-estabelecidas. Por outro lado, a abordagem didática, centrada em atividade de contexto ⇒ exercícios e problemas, implica em uma desarticulação teórica que pode dificultar o trabalho do professor e construção do conhecimento por parte do aluno. Isto porque, nessa segunda abordagem, há um vácuo quanto ao discurso-tecnológico teórico. Nesse sentido, o desenvolvimento de Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP) tendo tarefas fundamentais como provocadoras do estudo, pode representar uma alternativa viável para esses dois sistemas.

Consideramos ainda, um terceiro sistema, o modelo dominante da formação em GA praticada no curso de Licenciatura em Matemática, ora em estudo. De acordo com as análises do currículo e das referências (livros) básicas utilizadas nas ementas, a GA estudada na formação inicial não se articula adequadamente com aquilo que é desenvolvido no ensino médio. O estudo desse componente curricular está completamente vinculado à álgebra linear e ao estudo dos vetores. A temática de GAP (estudo do ponto, reta, círculo) aparece nos livros de forma sintetizada, em blocos de revisão. Em nosso ponto de vista isto ocorre porque essa GAP, não é o objetivo dessas obras, o que nos leva a concluir que, esse o estudo, conforme descrito para o ensino médio o não parece ser prioritário.

Esta forma de organização curricular, em nossa perspectiva, dificilmente permitiria ao estudante visualizar o estudo universitário de forma articulada com o trabalho a ser realizado com seus potenciais alunos do ensino médio e do fundamental (séries finais), tendo em vista que a geometria analítica do ensino médio não aborda, por exemplo vetores.

Com relação ao MERA, é necessário fazer escolhas, portanto, a inclusão do estudo de vetores extrapola os limites do nosso MER, bem como àquilo que é indicado como parte do currículo para o ensino médio. Por esta razão, deixaremos a cargo de pesquisas futuras, embora a noção de vetores esteja presente de forma implícita nos modelos. Ressaltamos que a noção geométrica de vetor pode aparecer no desenvolvimento do PEP-FP, mas certamente se

limitará a uma noção intuitiva de vetores, pois no estudo epistemológico, não adentramos neste campo.

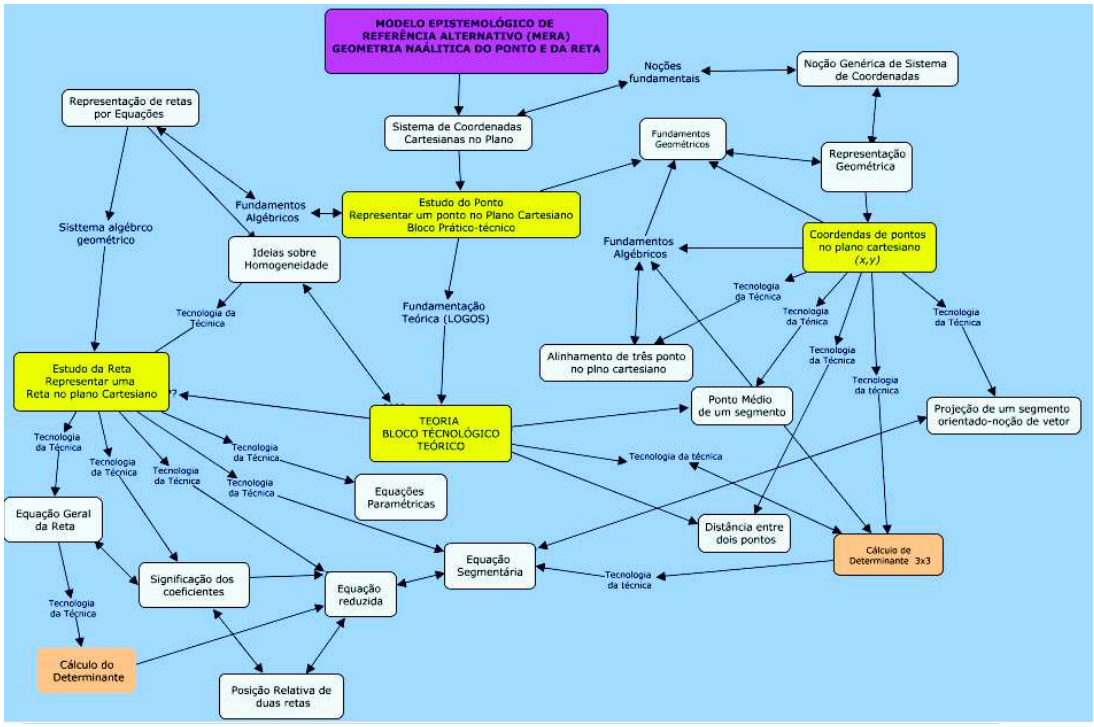
Nosso modelo alternativo, MERA, apoiar-se-á nas tarefas fundamentais propostas no MER, reorganizando-as em termo de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) no trabalho do dispositivo PEP-FP/TAD. Esta ação tem por objetivo, possibilitar aos sujeitos estudarem a GA, de forma mais próxima a sua razão de ser, algo que não é feito na Licenciatura, conforme já justificamos. Outro aspecto do MERA é que ele utilizará alguns aspectos da organização curricular descrita, no modelo de referência dos livros, agregando aspectos do MER, não contemplados nesses manuais e vice-versa.

Em termos da TAD, o trabalho visa desenvolver organizações matemáticas locais, uma primeira em torno da noção de sistemas de coordenadas, OM_{sc} , uma segunda em torno do estudo do ponto OM_P e uma terceira em torno do estudo da reta, OM_R, ressaltando o caráter progressivo das organizações, para desenvolver este setor da GAP. Ou seja, a construção progressiva de cada organização fara, por meio do dispositivo, construir cada organização contribuindo na construção da organização seguinte, conforme: $OM_{sc} \Rightarrow OM_P \Rightarrow OM_R \Rightarrow OM_{GAP_{ponto\ e\ reta}} \Rightarrow MERA$.

A análise da organização didática dos livros, especialmente, segundo Iezzi et al (1990), mostra que a tecnologia e a teoria vão se ampliando progressivamente com o estudo dos objetos e agregando tarefas, técnicas e tecnologias mais simples na construção de outras mais elaboradas, esta organização didática possibilita retomada de conceitos.

Por fim, sintetizamos as ideias do nosso $MERA$ em um sistema, que representa os objetos de estudo que nortearão o processo de experimentação, ilustramos esse sistema no mapa da figura 76. Vale salientar, que é o dispositivo PER-FP/TAD que deve fazer emergir o estudo dos objetos que aparecem em nosso $MERA$.

Figura 76 - Modelo Epistemológico de Referência Alternativo (MERA)



Fonte: Elaborado pela autora

Com relação ao mapa da figura 76, os objetos descritos e relacionados por setas, podem ser, objetos matemáticos, incluindo propriedades, definições, questões, tarefas, tudo aquilo que é parte do estudo e que ao mesmo tempo lhe fundamenta. (CHEVALLARD, 2009)

As setas em ambos sentidos, significam que as relações entre os objetos são diretas geram novas relações em torno do saber em jogo.

Este modelo é a base da fase experimental, dada as características da metodologia desta pesquisa é possível que elementos implícitos, não aparecem diretamente no $MERA$, mas possam efetivamente ser incluídos, na etapa de experimentação.

A experimentação se apoiará nos momentos de estudo, proposto pela TAD, ao mesmo tempo sendo permeada pelas concepções metodológicas de PEP-FP. A organização, descrição a priori dos episódios de estudo e os referenciais teóricos sobre os *momentos de estudo* serão discutidos no capítulo a seguir.

CAPÍTULO 5 CONCEPÇÃO E CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA DE FORMAÇÃO PROFISSIONAL (PEP-FP)

Neste capítulo, iniciamos com as construções teóricas do processo de experimentação apoiado em um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), segundo Chevallard (2009). Ao longo do capítulo, apresentamos uma discussão a respeito das noções fundamentais para compreensão desse tipo de engenharia didática em articulação com a TAD. Além disso, os referenciais teóricos que norteiam e fundamentam os episódios de experimentação, seja na sua concepção, nas atividades de ensino e pesquisa (AEP), nas análises a *priori* e a *posteriori,* na avaliação e em todo o processo de desenvolvimento e conclusão da experimentação

5.1 Concepção de um percurso de estudo e pesquisa e de formação profissional: dispositivo PEP-FP /TAD

As pesquisas que se desenvolveram em torno da TAD, tanto na França como na Espanha desde 1999, trazem contribuições teóricas que nos permitem afirmar que a teoria passou e talvez possa ainda passar por um processo de transformação. Tais transformações surgem, cada vez mais, com o objetivo de dar conta de analisar e explicar os fenômenos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Incluímos em tais fenômenos as atividades e funções do professor, quando se propõe a ensinar algo a seus alunos, ou ainda, a formação desse professor quando está diante do desafio que a tarefa de ensinar lhe impõe.

Neste processo, a transposição didática (interna) que se dá no interior da instituição sala de aula, na prática do professor, é influenciada consciente ou inconscientemente pelo equipamento praxeológico do professor, que inclui diferentes conhecimentos inerentes à profissão e construídos ao longo da formação. Tais conhecimentos, que abordaremos neste texto, incluem conhecimentos didáticos, os quais estão, em nosso ponto de vista, no cerne da atividade de transposição didática dos saberes matemáticos.

A abordagem da TAD, em nosso estudo, visa também explicitar durante os episódios de experimentação, o conhecimento didático do futuro professor que participa da atividade matemática escolar.

Apoiamo-nos nas asserções de Sierra (2006) quando nos fala da abordagem antropológica da TAD e da função da “didática” nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática em diferentes instituições.

> [..] o desenvolvimento da Teoria da Transposição Didática deu origem à Abordagem Antropológica e, posteriormente, à Teoria Antropológica do Didático. Essa teoria defende que a atividade matemática deve ser interpretada ou, antes, modelada como uma atividade humana como as outras, em vez de ser considerada como um sistema de conceitos ou como um processo cognitivo. A TAD propõe um modelo de atividade matemática institucional, que inclui a atividade matemática escolar como um caso particular, e um modelo de conhecimento matemático que permite descrever a matemática escolar como um caso particular do processo didático. A didática aparece, dentro desse enfoque, como tudo relacionado ao estudo, produção e disseminação (ou reprodução) do conhecimento matemático em diferentes instituições sociais, o que coloca o ensino e a aprendizagem da matemática na escola como um todo, caso particular de processo didático.(SIERRA, 2006, p.30, tradução nossa)[37]

Na visão do autor, no âmbito de sua pesquisa, a didática é tudo que aparece na perspectiva do enfoque antropológico, seja o próprio processo de estudo, disseminação, produção e reprodução do conhecimento matemático. Tal afirmação nos fornece uma primeira aproximação para definirmos posteriormente o conhecimento didático do professor, tendo o aporte da TAD.

Voltando à discussão a respeito do processo de evolução da TAD, a diversas pesquisas que se debruçaram sobre esta teoria, também, contribuíram em nosso ponto de vista, para a consolidação de nosso referencial teórico, segundo Chevallard (2009), de uma nova engenharia didática: o "*parcours de étude et de recherche*", mais popularmente conhecido como PER do francês, ou percurso de estudo e de pesquisa (PEP) no português brasileiro, ou ainda "*recorrido de estudio e investigación"* (REI) do espanhol. Adotamos em nosso estudo a sigla brasileira PEP.

Dito isto, trouxemos alguns elementos que, em nosso entendimento, podem ajudar a explicar o funcionamento do dispositivo PEP-FP no âmbito da TAD. Nesse sentido, destacamos alguns aspectos da abordagem de Sierra (2006) e Sierra e Gascón (2018) que contribuíram com nossas asserções acerca da constituição de um "*parcours de étude et de recherche de formation*

[37] Así es como el desarrollo de la Teoría de la Transposición Didáctica dio lugar al Enfoque Antropológico y, posteriormente, a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Esta teoría propugna que la actividad matemática debe ser interpretada o, mejor dicho, modelizada como una actividad humana como las demás, en lugar de considerarla como un sistema de conceptos o como un proceso cognitivo. La TAD propone un modelo de la actividad matemática institucional, que incluye la actividad matemática escolar como caso particular, y uno modelo del saber matemático que permite describir la matemática escolar como caso particular. Lo didáctico aparece, dentro de este enfoque, como todo aquello que tiene relación con el estudio, la producción y la difusión (o reproducción) del saber matemático en las distintas instituciones sociales, lo que sitúa la enseñanza y aprendizaje escolares de las matemáticas como un caso particular de proceso didáctico. (SIERRA, 2006, p.30)

professionnelle- PER-FP" a sigla PEP-FP se refere à formação de professional.[38], abordaremos mais detalhadamente esta caracterização no decorrer do texto.

Na sua pesquisa, Sierra e Gascón (2018) desenvolveram um PEP de formação de professores sobre sistema de numeração, com professores do ensino secundário (espanhol), utilizando-se de uma estratégia para construção de uma praxeologia matemática para o ensino. Esta estratégia consiste em linhas gerais, a expandir uma rede de questões que surgiram, à medida em que o processo de experimentação se realiza, incluem-se novas questões que fazem parte da razão de ser, a qual desejava-se destacar para os participantes, sobre numeração na instituição de formação de professores.

Nosso interesse na investigação desenvolvida por esses autores está na compreensão, construção e discussão do que estamos chamando de *funcionamento do dispositivo teórico TAD/PEP-FP*, que é a base de nossa experimentação.

Os elementos que levantamos, parte integrante desse dispositivo (PEP-FP/TAD), estão definidos por Chevallard (2009) quando caracteriza um PEP:

> X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, um jornalista, etc.) e Y uma equipe (em geral reduzida: y pode até ser um conjunto vazio) de ajuda ao estudo e de diretores de estudo (professor, tutor, orientador de pesquisa, diretor de redação, etc.). O objetivo da construção desse sistema didático é estudar *Q*, isto é procurar fornecer uma resposta R que satisfaz certas restrições *a priori,* inclusive de pôr a prova pela confrontação com o *milieu x adidático* apropriado. A síntese do trabalho esperado de X sob a orientação e supervisão de Y pode ser escrito como *S* (*X*, *Y*, *Q*) ➥ *R*. (CHEVALLARD, 2009, p. 2, tradução nossa)[39]

Em nossa investigação, retomamos os elementos constituintes do sistema didático $S(X, Y, Q_0)$, em que:

- X é o grupo de estudantes da licenciatura que participam do estágio curricular supervisionado, que chamaremos apenas de estagiários ou professores estagiários, poderia estar incluído nesse grupo o professor de

[38] A diferenciação da sigla se deu para mantermos a versão do estudo concebida e apresentada no 6° Congresso Internacional da TAD, realizado de 22 a 26 de janeiro, Autrans, França. PEP de formação profissional, em vez de formação de professores.

[39] *X* est un collectif d'étude (une classe, une équipe d'élèves, une équipe de chercheurs, un journaliste, etc.) et *Y* une équipe (en général réduite : *Y* peut même être l'ensemble vide) d'aides à l'étude et de directeurs de l'étude (professeur, tuteur, directeur de recherche, directeur de la rédaction, etc.). Le but de la constitution de ce système didactique est *d'étudier Q*, c'est-à-dire de chercher à lui apporter une réponse *R* qui satisfasse certaines contraintes *a priori*, dont celle de résister à sa mise à l'épreuve par la confrontation avec des « milieu x adidactiques » appropriés. Le bilan du travail attendu de *X* sous la conduite et la supervision de *Y* peut être noté ainsi *S* (*X*, *Y*, *Q*) ➥ *R*.

estágio, mas em nossa pesquisa, esse ator não se configura como sujeito de análise, pois não participou efetivamente em nossa fase experimental, mas, levamos em conta certas restrições institucionais que se relacionem com as ações do professor de estágio.

- Y é o conjunto composto pela própria pesquisadora, quem ao mesmo tempo conduz e organiza o estudo, sob a supervisão do orientador, é a condutora do estudo;
- Q_0 é uma questão geratriz, ou seja, geradora do estudo e de outras questões;
- R é a resposta para questão Q_0, R deve satisfazer ao conjunto de restrições *a priori*;

O sistema didático *S* é a base da organização do *estudo*. No âmbito da TAD, o *didático* é tudo que está relacionado com o estudo em desenvolvimento, englobando as noções de ensino e aprendizagem normalmente utilizadas na cultura "pedagógica", a palavra "estudo" tem uma visão ampla. O *estudo* é, portanto, tudo aquilo que é realizado em uma determinada instituição com o objetivo de fornecer as respostas às perguntas ou mesmo para realizar as tarefas "problemáticas" se aparecem. Mas, a atividade de estudo não deve ser restrita ou confinada. (SIERRA, 2006)

Segundo esse mesmo autor, a noção de estudo, no caso da matemática, aparece como uma noção integradora que permite analisar, sob uma mesma ótica, o trabalho que realiza o matemático investigador, que realiza o professor quando ensina matemática e o aluno que aprende na escola.

A atividade de estudo, segundo Sierra (2006), se realiza em comunidade, o que ele chama de *comunidades de estudo*, tanto no caso em que se constrói matemática nova, como quando se ensina e aprende matemática conhecida (situação do professor e dos alunos). Tal atividade se realiza com ajuda de vários diretores de estudo, o investigador principal e o professor, e é guiada por um programa de estudo, em forma de programa de investigação e de currículo. Neste esquema o professor aparece como diretor ou um dos diretores, de uma comunidade de estudo formada por ele mesmo ou seus alunos.

Ressaltamos que, em nossa investigação, o investigador principal é a pesquisadora, tendo o professor de estágio e o supervisor, a função de viabilizar a realização dos encontros de estudo, apoiar as atividades, no entanto, é a pesquisadora que organiza e conduz a realização dos episódios.

A TAD parte do princípio de que o saber matemático se constrói, como resposta ao estudo de questões problemáticas, aparecendo assim como resultado, o produto de um processo de estudo. Essa ideia está fortemente presente no desenvolvimento de um PEP.

Nesse sentido, o PEP parte de uma questão geratriz Q_0 proposta dentro de um sistema didático $S(X;Y;Q)$, ou seja, segundo Chevallard (2009), o objetivo em construir este sistema didático é estudar Q. Procurar fornecer uma resposta R, que satisfaça certas restrições *a priori,* inclui pôr a prova por meio de confrontação *com o milieu adidático* apropriado*,* adidático porque os aprendizes desconhecem a intenção *do professor*. A síntese que se espera do trabalho de X sob a supervisão de Y pode ser escrito, segundo autor, como: $S\ (X,Y,Q)$ ➥ R.

Chevallard (2009, p.1) chama esse domínio de pesquisa de *didática da investigação codisciplinar*[40]*.* O autor explica que este tipo de investigação raramente mobiliza uma ferramenta praxeológica, de uma única disciplina, na produção da resposta R; normalmente precede uma heterogênese. Significa dizer que, com algumas exceções, a pesquisa "trabalha" ferramentas praxeológicas de várias disciplinas, portanto, é uma abordagem multidisciplinar.

De acordo com Chevallard (2009, p. 1), engajar-se nesta investigação equivale a participar de PEP, motivado por esta mesma investigação. Para elaborar uma resposta R, é necessário reunir e organizar um ambiente de trabalho (milieu) que contenha recursos antigos e novos que X utilizará. Nesses recursos, incluem-se algumas respostas "prontas" para Q_i, que são validadas pela instituição ou outras instituições. Essas respostas serão aquelas que supostamente receberam um "selo" institucional e denota-se por $R^{\Diamond}{}_i$,ou seja. são respostas que se justificam e fazem parte de um repertório no interior da instituição. A análise dessas respostas fornecerá materiais para a construção da resposta R, ela mesma denotada por $R^{\heartsuit}$ por Chevallard (2009).

O autor ressalta ainda que, outras obras O provenientes da cultura, que serão também da dimensão cultural, fornecerão ferramentas para analisar as respostas $R^{\Diamond}$ e a construção da reposta esperada $R^{\heartsuit}$. As obras de O serão em parte resultados de várias disciplinas estabelecidas, mesmo se algumas delas provenham de disciplinas não reconhecidas, porque são emergentes ou culturalmente depreciadas.

[40] Didactique de l'enquête codisciplinaire

Em nosso ponto de vista, no âmbito do dispositivo teórico voltado para a formação do professor de matemática, os diferentes elementos de $O = \{O_1, O_2, \dots O_n, O_{n+1} \dots O_m\}$ podem ser aqueles que emergem da cultura escolar, sob a ótica do professor que ensina, por exemplo, os conhecimentos oriundos da tecnologia e da pedagogia, ou até mesmo do conhecimento cotidiano dos sujeitos, os quais nem sempre possuem o selo institucional. Significa dizer que os O_m poderão auxiliar como ferramentas de análise das respostas $R^{\Diamond}{}_1, R^{\Diamond}{}_2, \dots R^{\Diamond}{}_n, \dots$ de cada questão gerada no decurso do PER, tudo isto corrobora para a resposta esperada $R^{\blacktriangledown}$.

Segundo Chevallard (2009), a síntese detalhada do trabalho de investigação se inscreve no que chamou sistema herbatiano, denotado de forma condensada pela representação: $(S(X;Y;Q) \rightarrow M) \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}$. Na forma desenvolvida teremos:

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow \{ R^{\Diamond}{}_1, R^{\Diamond}{}_2, \dots R^{\Diamond}{}_n, O_{n+1}, \dots O_m \rightarrow M\}] \hookrightarrow R^{\blacktriangledown}.$$

A noção de PEP, segundo Chevallard (2009), vai possibilitar incluir em um contexto mais amplo, um conjunto de práticas sociais de conhecimentos, mais ou menos discrepantes, seja uma pesquisa científica, uma investigação policial ou jornalística etc. Nesse sentido, incluímos os processos de ensino e de aprendizagem de matemática, ou outras áreas, como na física, na química etc.

No âmbito dessas práticas sociais, a Educação Matemática, enquanto área em constituição, se beneficia da metodologia de engenharia didática de PEP, tanto no âmbito da pesquisa, como no âmbito dos processos de ensino e de aprendizagem. O sistema antropológico da TAD está no cerne da constituição e da análise das práticas que são desenvolvidas por meio do funcionamento do dispositivo *TAD/PEP-FP,* tendo a base na praxeologias matemáticas.

O autor esclarece que o estudo escolar é o que parece menos passível de modelagem em termos do PEP, de fato pode-se reproduzir as formas mais tradicionais de ensino, dizendo que se ela supõe uma enquete (investigação) sobre Q. Isto é o que faz o professor operar em outra cena. O autor assevera que

> [...] O estudo escolar é, no entanto, o que parece menos prestar-se a uma modelização em termos de PEP, na verdade, podemos descrever as formas tradicionais dizendo que, se ela supõe uma enquete sobre Q, isto é feito pelo professor e opera-se em outra cena que a classe. (CHEVALLARD, 2009. p. 2, tradução nossa)[41]

[41] L'étude scolaire est pourtant ce qui semble le moins se prêter à une modélisation en termes de

O PEP nos traz a possibilidade de romper com o modelo tradicional e ascender para um outro, em que o aluno é responsável por sua aprendizagem e retoma o processo de investigação científica.

Ao que parece, é nesse sentido que Chevallard (2009) explica, na sequência, que o esquema « herbartien » evoca uma forte obrigação de uma democracia a cumprir, quando cada cidadão ou coletivo de cidadãos deve ser capaz de investigar qualquer assunto que goste ou tenha interesse, usando em particular o equipamento praxeológico que a base de sua formação escolar lhe forneceu.

Em nosso ponto de vista, uma suposta contradição, na verdade, depõe a favor de um modelo emancipatório e democrático, por esta razão que é difícil de ser implementado no âmbito escolar. No entanto, várias pesquisas na França, Espanha e no Brasil, por exemplo, vêm conseguindo implementar o PEP, o que significa dizer que as restrições estão sendo contornadas durante o processo de investigação com essa engenharia didática.

No caso de um estudo com futuro professores, como os *professores estagiários*, o equipamento praxeológico, no sentido de Chevallard (2009), deve incluir além dos conhecimentos adquiridos na formação escolar (educação básica) aqueles adquiridos durante a formação inicial de professor (na licenciatura), incorporados em seu repertório. Nossa hipótese é que o seu equipamento praxeológico também possa ser ampliado, e os saberes associados possam também ser ressignificados, durante as sessões (episódios) do PEP. Estamos supondo que um PEP-FP poderá possibilitar aos professores estagiários incorporar conhecimentos novos e/ou ressignificar aqueles já existentes, em termos de saberes docentes.

O PEP-FP, ou PEP de formação profissional, se refere ao fato de estamos incluindo na formação desses *professores estagiários,* conhecimentos que em nosso ponto de vista, são básicos para a profissão de professor. Segundo Tardif (2012), os saberes profissionais são aqueles transmitidos pelas instituições que formam professores, das ciências da educação. Nesse sentido, o estágio supervisionado na licenciatura deve ser um desses espaços de formação.

PER ; de fait, on peut peindre les formes les plus traditionnelles d'enseignement en disant que, si elle suppose bien une enquête à propos de *Q*, celle-ci est le fait de l'enseignant et s'opère en une autre scène que la classe.

Ampliamos a perspectiva de Tardif (2012), quando evocamos conhecimentos específicos necessários à formação inicial do professor de matemática que muito mais se aproximam de conhecimentos relacionados ao conteúdo específico da matéria, na perspectiva de Shulman (1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006), Silva e Lima (2015).Segundo Shulman (1987), "*general pedagogical knowledge*", ou seja, conhecimento pedagógico geral do conteúdo. Ao mesmo tempo, buscamos identificar o lugar do conhecimento pedagógico no âmbito da formação do professor de matemática no Brasil.

A ideia de conhecimento do conteúdo parte do estudo desenvolvido na década de 80, por Lee S. Shulman (1986), professor de educação e professor afiliado de psicologia da faculdade de educação, da Universidade de Stanford, EUA. Basicamente, o autor levanta questionamentos a respeito dos saberes que o professor mobiliza quando age na tarefa de ensino. Em nosso ponto de vista, são questões bem pertinentes seja para o professor já atuante como profissional, seja para futuro professor em formação inicial.

Além disso, o autor evidência questões que ainda são atuais nas pesquisas de formação de professores, em diferentes níveis escolares, quando faz os seguintes questionamentos:

> Quais são as fontes de conhecimento do professor? O que um professor sabe e quando ele buscou esse saber? Quando um novo conhecimento é adquirido, o conhecimento antigo é recuperado, e ambos combinados para formar uma nova base de conhecimentos? [...] Como o professor se prepara para ensinar algo nunca aprendido pelos estudantes? Como ele aprende para ocorrer o ensino? (SHULMAN, 1986, p. 8, tradução nossa)[42]

Com relação às fontes do conhecimento do professor, para fins desta pesquisa, podemos afirmar que o construto de saberes docentes que corresponde aos conhecimentos dos futuros professores (professores estagiários) tem como ponto de partida, desde a formação escolar desses sujeitos, até a formação universitária, podendo ter incluídos nesses conhecimentos, aqueles adquiridos nas experiências temporárias (contratos temporários de trabalho no sistema público de ensino) de docência, em classes de ensino básico. As demais questões levantadas pelo autor e em seu estudo,

[42] What are the sources of teacher knowledge? What does a teacher know and when did he or she come to know it? How is new knowledge acquired, old knowledge retrieved, and both combined to form a new knowledge base? […] How does the teacher prepare to teach something never previously learned? How does learning for teaching occur? (SHULMAN, 1986, p. 8).

vão levar à uma síntese, ou um quadro de conhecimentos constituídos como saberes docentes:

> conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral, considerando, especialmente, aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização de sala de aula que transcendem o âmbito do assunto; Conhecimento do currículo, com especial domínio dos materiais e dos programas que servem como 'ferramentas para o ofício' do professor; conhecimento pedagógico do conteúdo: essa especial amálgama entre conteúdo e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, suas próprias fontes de compreensão profissional; conhecimento dos estudantes e suas características; • Conhecimento dos contextos educacionais, que variam desde o grupo ou sala de aula, ou gestão e financiamento dos distritos escolares, para o caráter das comunidades e culturas; e conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educacionais, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. (SHULMAN, 1987, p.8, tradução nossa).[43]

Ball, Thames e Phelps (2008) dão continuidade ao estudo de Shulman (1986), mais tarde, por meio de suas próprias pesquisas. De acordo com esses autores, os saberes docentes se constituem de domínios do conhecimento para o ensino.

Tais domínios se dividem em duas categorias: a primeira está relacionada ao conhecimento ou saber sobre um assunto e a segunda, ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Na primeira categoria estão incluídos o conhecimento comum do conteúdo, o conhecimento do horizonte do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo. Na segunda categoria, incluem-se o conhecimento do conteúdo e dos estudantes, o conhecimento do conteúdo e do currículo e por fim o conhecimento do conteúdo para o ensino. Os domínios de conhecimentos estão sintetizados pelos autores na figura 77.

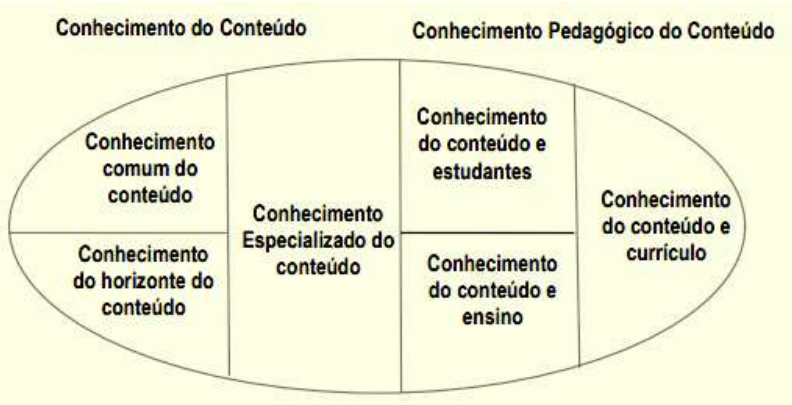
Uma outra linha de raciocínio, também apoiada no trabalho de Shulman, aparece a partir da ideia de intersecção de conhecimentos, o estudo de Mishra e Koehler (2006). Esses autores incorporam ao corpo de conhecimentos do professor o conhecimento tecnológico e suas intersecções com os conhecimentos pedagógicos e matemáticos, por exemplo, o conhecimento tecnológico do conteúdo. Esta mesma ideia de "conhecimento da intersecção" é

---

[43] Content knowledge; general pedagogical knowledge, with special reference to broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter; curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as "tools of the trade" for teachers; pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding; knowledge of learners and their characteristics; Knowledge of educational contexts, ranging from the working of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds. (SHULMAN, 1987, p. 8).

evocada por Lima e Silva (2015), incorporando, além do pedagógico, o matemático e o tecnológico e conhecimento didático.

Figura 77 - Domínios de conhecimento para ao ensino

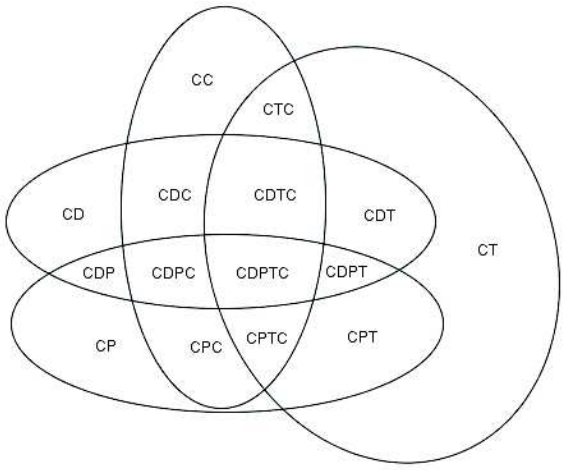


Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 404)

Esta última categoria, embora esteja presente nas ideias dos demais autores apresenta-se mais forte em nosso estudo, tendo como base as concepções de Didática da Matemática da escola francesa, evidenciada por Silva e Lima (2015), a qual discutiremos mais adiante no texto.

Apoiamo-nos na discussão já realizada por Silva e Lima (2015), que sintetizam o saber docente em quatro blocos de conhecimentos, segundo a figura 77: conhecimento pedagógico (CP), conhecimento do conteúdo (CC), conhecimento tecnológico (CT) e conhecimento didático (CD). Esses autores ainda propõem a intersecção desses quatro blocos de conhecimentos gerando mais onze categorias, segundo a figura 78. Cada uma destas onze categorias é uma combinação que envolve ao menos duas das quatro apresentadas (CP, CC, CT e CD).

Figura 78 - Diferentes categorias de conhecimento docente



Fonte: Silva e Lima (2015, p.4)

A categoria CDPTC, conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo é aquela que engloba os quatro blocos de conhecimento ao mesmo tempo, o qual, é nosso ponto de vista representa um conhecimento completo na formação do professor, sobre um determinado objeto matemático a ensinar.

Como já afirmamos anteriormente, a partir da problemática a respeito da formação inicial do futuro professor, em nosso estudo, delimitamos, enquanto parte constituinte do equipamento praxeológico do professor, o conhecimento matemático e didático como sendo o centro da formação profissional. Esta base pode agregar outros conhecimentos importantes para tal formação, como, por exemplo, o conhecimento pedagógico e tecnológico.

As reflexões que acabamos de tecer nesta parte da Tese, mostram a relevância do corpo de saberes do professor, mais especificamente, todos esses conhecimentos apontados por diferentes autores. Diante do estágio atual da formação inicial do professor na Licenciatura em Matemática no Brasil e da limitação de tempo desta pesquisa os dois corpos de conhecimentos de base CM e CD conjecturamos que se (re) constroem como equipamento praxeológico dos professores estagiários no âmbito de nosso PEP-FP. Nesse sentido, tais conhecimentos combinam-se e recombinam-se para gerar novos conhecimentos para o futuro professor.

O conhecimento matemático em jogo integra o saber relativo a tópicos de geometria analítica plana. Não temos a pretensão de desenvolver um PEP de todo o corpo teórico de GAP, mas no âmbito de nosso modelo alternativo de referência. Esta ampliação de estudos em GA, pode ser realizada em pesquisas futuras.

A respeito do conhecimento didático, nos identificamos com a designação defendida por Silva e Lima (2015, p. 6), esse tipo de conhecimento “trata de reflexões didáticas relativas ao ensino de Matemática”, diferenciando-se do conhecimento pedagógico, principalmente, por considerar sistematicamente os conteúdos específicos de Matemática.

Silva (2017) fez um estudo aprofundado sobre o conhecimento para o ensino de taxa de variação na educação básica, o objetivo foi construir uma base de conhecimento para o ensino do referido objeto matemático. A concepção de conhecimento didático, na perspectiva do conhecimento para o ensino de taxa de variação, bem como de qualquer outro conhecimento matemático, segundo

este autor, perpassa pelo conhecimento mínimo das teorias da Educação Matemática, especialmente, em nosso caso, da didática francesa:

> Dentre as teorias e metodologias que forjam a Didática da Matemática, consideramos crucial para o ensino de Matemática e, consequentemente, para o ensino de taxa de variação, que o professor tenha, minimamente, conhecimentos referentes a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria Antropológica do Didático, a Engenharia Didática, a noção de Contrato Didático e a noção de Obstáculo, que são apresentadas resumidamente nos próximos subitens.(SILVA, 2017, p. 179).

Do ponto de vista da formação inicial do professor de matemática no Brasil, especialmente, nos cursos de Licenciatura em Matemática na Bahia, o currículo dos componentes curriculares da área de educação, como por exemplo, o estágio supervisionado, ainda não contempla um estudo consistente das teorias de Didática da Matemática, indicadas pelo autor. Mesmo a Didática da Matemática, enquanto componente curricular da licenciatura é por muitas vezes desenvolvida em uma perspectiva da didática geral, ou de teorias gerais da educação.

A *priori,* não temos elementos de pesquisa suficientes, para afirmar que o conhecimento didático do professor seja capaz de contemplar o corpo de teórico proposto por Silva (2017), por conta de ser um grosso arcabouço de conhecimentos que, em nosso ponto de vista, nossa pesquisa não seja capaz de desenvolver. Não podemos afirmar sequer, que um professor experiente, ou o pesquisador em formação possua tais conhecimentos, pois a formação docente se constituiu ao longo de muitos anos de experiência e formação continuada, e as necessidades de formação, também, mudam com a rápida evolução tecnológica que a sociedade está submetida.

Conjecturamos que elementos básicos dessas teorias podem estar presentes e/ou se desenvolverem no repertório dos futuros professores, no desenvolvimento de nosso PEP, além desses elementos, outros aspectos do que chamaremos de conhecimento didático, podem passar pelo processo de aquisição e/ou ressignificação por parte dos sujeitos ao longo do estudo.

Assim, para nós, o conhecimento didático engloba tudo aquilo que se refere ao conhecimento teórico da Didática da Matemática, seus elementos, aplicações, ou ainda tudo aquilo que se refere ao conhecimento específico dos processos de ensino e de aprendizagem de matemática tal que são discutidos no âmbito da Didática da Matemática.

Todos os aspectos que refletimos a respeito da formação de futuros professores em termos de saberes e de conhecimentos, são fundamentais antes de propormos uma enquete, como o PEP. É importante reconhecer as restrições da formação inicial, em termos de apropriação de conhecimentos didáticos e matemáticos existentes na instituição de formação de professores, como já foi exposto no estudo piloto.

5.2 Momentos didáticos e desenho *a priori* dos episódios de estudo

Esta subseção visa construir e analisar *a priori* os episódios de estudo, assim como descrever os principais elementos que constituirão as etapas de experimentação, e supondo a priori as respostas globais que serão fornecidas pelos sujeitos. Antes, porém, de passarmos à descrição e análise sessão por sessão, ressaltamos as concepções que nortearão a organização do estudo, em termos da TAD.

A organização do estudo, que chamamos de episódios, tem como fundamentos internos os momentos de estudo ou momentos didáticos. Chevallard (1999) assevera que, como em toda organização praxeológica, uma organização didática articula-se em tipos de tarefas, normalmente cooperativas, em tecnologias e teorias. As questões que se põem, no âmbito dessa pesquisa, é como descrever essa organização? Quais os principais tipos de tarefas? Chevallard (1999) levanta esses questionamentos e explica:

> Não se pode esperar que a (re) construção, no decorrer de um processo de estudo, de uma organização matemática dada seja ela mesma organizada de uma maneira única. Mas, percebe-se, no entanto, que qualquer que seja o caminho de estudo, alguns *tipos de situações* estão necessariamente presentes, mesmo se os são de maneira muito variável, tanto no plano qualitativo quanto no plano quantitativo. Tais tipos de situações serão chamados aqui de momentos de estudo ou momentos didáticos, porque podemos dizer que, qualquer que seja ao caminho seguido, tem necessariamente um momento em que tal ou tal "gesto de estudo" deverá ser cumprido: onde por exemplo, o estudante deverá "fixar" os elementos elaborados (momento de institucionalização); onde ele deverá se perguntar "quanto vale" o que foi construído até agora (momento de avaliação),etc.(CHEVALLARD, 1999, p. 19, Tradução Nossa))[44]

[44] On ne saurait s'attendre à ce que la (re)construction, au cours d'un processus d'étude, d'une organisation mathématique donnée soit elle-même organisée d'une manière unique. Mais on s'aperçoit pourtant que, quel que soit le cheminement de l'étude, certains *types de situations* sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. De tels types de situations seront appelés ici *moments de l'étude* ou *moments didactiques* parce qu'on peut dire que, quel que soit le cheminement suivi, *il arrive forcément un moment* où tel ou tel « geste d'étude » devra être accompli : où, par exemple, l'élève devra « fixer

Segundo o autor, a noção refere-se a uma estrutura temporal do processo de estudo apenas na aparência, significa dizer que o sentido dado a esta palavra se refere a uma dimensão em um espaço muitidimensional, um fator em um processo multifatorial. O autor explica, ainda, que uma boa gestão do estudo requer que cada um dos *momentos didáticos* seja realizado no momento adequado, pois um *momento de estudo* geralmente se realisa em várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episodios distribuidos no tempo.

Os *momentos didáticos* são uma realidade do funcionamento do estudo e não uma realidade cronológica, ou seja a ordem dos diferentes *momentos* é arbitrária. Os momentos são seis sintetizados segundo Chevallard (1999).

O momento do *primeiro encontro*, corresponde ao primeiro contato dos sujeitos com a organização matemática, pelo menos, o contato com um tipo de tarefa dessa organização. O segundo momento é de exploração do tipo de tarefas e de elaboração da técnica, *momento exploratório*.

O terceiro, é o momento constituição do ambiente *tecnológico- teórico* [q/Q] relacionado com a técnica τ_i. De forma geral é o momento de estreita inter-relação com os outros momentos, no caso do primeiro encontro com um tipo de tarefa, normalmente há uma relação com o ambiente tecnológico- teórico, anteriormente elaborado.

O quarto momento é o do trabalho *da técnica* que deve ao mesmo tempo melhorara-la tornando-a mais eficiente e confiável. O quinto momento é a *institucionalização*, tem como objetivo esclarecer o que exatamente a organização matemática elaborou, além de distinguir quais elementos farão parte definitivamente da organização e aqueles que não serão integrados a ela.

Por fim, o sexto momento é da *avaliação,* é um momento de reflexão e se articula com a institucionalização (em alguns aspectos pode ser considerado um sub momento) em que se avalia o que foi aprendido, principalmente é momento quando se aprecia o controle ou o domínio da organização matemática criada, e ainda se avalia a organização matemática, sua validade.

Cada um desses momentos, segundo o autor, pode ser realizado várias vezes, não somente porque procedem de episódios de tempo, mas também por que, por exemplo, um episódio de trabalho de uma técnica pode conduzir a

---

» les éléments élaborés (moment de l'institutionnalisation) ; où il devra se demander « ce que vaut » ce qui s'est construit jusque-là (moment de l'évaluation) ; etc.

retocar a organização matemática estabelecida e, portanto, eventualmente realizar, ou viver, um novo episódio tecnológico, em todo caso considerar um outro episódio de *institucionalização.*

Em linhas gerais, os momentos de estudo constituem uma grade para análise dos processos didáticos, nesse sentido, será incorporada ao processo de análise *a priori* e *a posteriori* do desenvolvimento do processo de estudo e os episódios de estudo, em nossa investigação.

Para constituição dos episódios de estudo, o primeiro passo é identificar a nossa questão geratriz. A questão inicial será norteadora e motivadora do processo de estudo. Tal questão deverá ser capaz de gerar outras questões que, ao final do processo de estudo, tem como produto uma praxeologia desenvolvida com os professores estagiários, tendo como base nosso modelo alternativo de referência$MERA$.

De acordo com Sierra (2006), o processo de estudo é conduzido por esta questão geratriz, embora o que seja derivado dela, não seja a priori totalmente determinado, tendo em vista que muitas das decisões terão que ser tomadas para realizar o percurso de estudo e pesquisa que esta questão implica.

A determinação de Q_0 perpassa por algumas questões relacionadas às restrições que *a priori* foram identificadas no estudo piloto, bem como nos modelos dominantes. Sierra (2006) promove reflexões a respeito dessa escolha.

Segundo esse mesmo autor, os processos de estudo devem estabelecer um tempo relativamente amplo, pois o trabalho matemático vai requerer o desenvolvimento da organização matemática no âmbito de várias sessões sucessivas, com o intuito de permitir ao sujeito aprofundar e trabalhar de uma maneira útil e eficaz. Consequentemente, considera-se que um processo de estudo deve conter um objeto matemático amplo e não se deve propor processos de estudos isolados.

Nessa perspectiva, a dosagem do conteúdo frente ao tempo de estudo é fundamental, diante das restrições institucionais que encontramos na Universidade do Estado da Bahia (UEFS), local onde o estudo foi realizado. Delimitamos o estudo em torno dos objetos fundamentais de GA (o estudo do ponto e da reta e os sistemas de coordenadas) e o tempo relativamente suficiente para o desenvolvimento da proposta.

Conforme descrevemos em nosso modelo alternativo M_A, e apoiados em Sierra (2006), a questão que propomos visa a priori desenvolver organizações matemáticas em torno dos objetos que definimos para o estudo.

Esta questão pode ser formulada em primeira instância: $\boldsymbol{Q_0}$: ***como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?***

Esta questão, também, é a questão geratriz do desenho a priori e como motor do processo de estudo de geometria analítica do ponto e da reta. Denotamos pela sigla GAP_{PR} para Geometria Analítica no Plano do Ponto e da Reta, para evitar repetições no texto, assim, $\boldsymbol{Q_0} \Rightarrow OM_{sc} \Rightarrow OM_P \Rightarrow OM_R \Rightarrow GAP_{PR}$.

Apoiamo-nos em Chevallard (2009) para afirmar que os trabalhos (matemáticos) desenvolvidos a partir deste tipo de questão em um PEP, poderão ser caracterizados por uma infraestrutura *intramatemática*. Segundo o autor, como alguns trabalhos matemáticos, que são elaborados para permitir o trabalho de engenheiros. ou químicos, ou biólogos. A estrutura deste trabalho levará a estudar, por um lado, muitos problemas, a maioria *intramatemáticos*, ou seja, dentro da própria matemática.

Por outro lado, o dispositivo de pesquisa deve fazer emergir outros problemas racionados aos processos de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático, de uma técnica, ou de uma tarefa sobre esse objeto. Por exemplo, como ensinar a equação da reta? São problemas que geram questionamentos a respeito do processo de ensinar, da tarefa do professor, da transposição didática.

Exemplificamos de outra forma, durante o desenvolvimento de uma tarefa matemática, o dispositivo de pesquisa deve fazer emergir para os professores estagiários, questões de como desenvolver a mesma tarefa para os seus potenciais alunos do ensino médio. Deve levá-los a questionar: a tarefa é adequada? Por quê? qual a melhor técnica? qual a abordagem da técnica que facilita aprendizagem dos alunos? qual teoria o aluno precisa saber para desenvolver a técnica? quais dificuldades de aprendizagem podem ser geradas a partir da escolha de um tipo de transposição didática?

De fato, tais questões, vêm de problemas (didáticos) que suscitem nos professores estagiários o questionamento da transposição didática, chamamos esses problemas, nesta tese de *intradidáticos,* porque estão no interior da dinâmica didática do ensino. A propósito do problema didático posto como questão geradora do estudo Q_0, (como ensinar GA...), seu desenvolvimento no âmbito do dispositivo de pesquisa, fará emergir e ao mesmo tempo (re)significar

os conhecimentos, em torno de GAP, voltados par a transposição didática no ensino médio.

É o próprio dispositivo de pesquisa, como ele é engendrado, que *a priori* faz viver, no âmbito do trabalho desenvolvido com as organizações matemáticas e didáticas, os conhecimentos docentes: o conhecimento do conteúdo, no caso GAP, conhecimentos didáticos do conteúdo, o conhecimento didático tecnológico do conteúdo, o conhecimento didático pedagógico do conteúdo e por fim o conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo.

Optamos por utilizar uma representação mais sintéticas sobre estas categorias, que elegemos, *a priori*, a partir de uma representação simbólica, ou uma abreviação que respectivamente corresponde a cada categoria de conhecimento: o conhecimento de GAP - C_{GAP}, conhecimento didático de GAP - CD_{GAP}, conhecimento didático pedagógico de GAP- CDP_{GAP} e o conhecimento didático pedagógico tecnológico de GAP- $CDPT_{GAP}$.

Tendo em conta esse conjunto de conhecimentos, apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006) e Lima e Silva (2015), definidos no dispositivo de pesquisa como categorias, que se compõem numa instância cognitiva do sujeito, assumimos que são conhecimentos que estão em conformidade com as relações entre os *sujeitos* e os *objetos*, segundo Chevallard (2007).

Significa dizer, que existe uma *relação pessoal*, « raport personnel » $R(x,o)$ entre o professor (ou futuro professor) e um objeto (ou conjunto de objetos de GA, por exemplo), e uma *relação institucional* do sujeito dentro de uma instituição $R_I(p,o)$ com um objeto, « rapport institutionnel » que compõe portanto, o *equipamento praxeológico do professor* $EP(x)$, e das relações relativas aos assuntos da instituição *I* na posição *p* dentro dela $EP_I(p)$, essa articulação se apoia segundo Chevallard (2007).

> Falava-se das relações pessoais e institucionais *R*(*x*, *o*) et *RI*(*p*, *o*) a um objeto *o* .Pode-se agora falar de conjunto de praxeologias de uma pessoa x, o que chamamos (cavalheiramente) o equipamento praxeológico x, e que eu denoto *EP*(*x*), e evidentemente, daqueles relativas aos assuntos de uma instituição *I* na posição p dentro dela, *EPI*(*p*). A relação de *x a o* é então de alguma forma o "corte" de *EP*(*x*) pelo objeto *o.* Ele será constituído à partir de praxeologias que o *EP*(*x*) ativam, *o* de uma maneira ou de outra- por exemplo no plano técnico, ou no registro tecnológico, etc. A teoria praxeológica assume e assim,

> amplia a teoria das relações, para a qual sempre se pode retornar se necessário (CHEVALLARD, 2007, p. 11, tradução nossa)[45]

A partir dos elementos teóricos, com o aporte da TAD, identificados, propomos a articulação dos elementos da formação profissional docente, no caso da nossa pesquisa, com as categorias definidas *a priori*. Assim partimos para o desenho a priori da experimentação.

Apresentamos inicialmente, sessão por sessão, o desenho *a priori* do processo de estudo para, em seguida, no próximo capítulo, discutir os resultados da experimentação desenvolvida de março a maio de 2019, no campus da UEFS.

Prevemos que cada episódio de estudo ocorresse em três horas-aula (3 h/aula) de sessão de trabalho com os professores estagiários (estudantes da Licenciatura em Matemática). Sabendo que o estudo é norteado por questões geradas a partir da questão inicial, propomos um mapa de questões, levantadas *a priori* que devem ajudar a responder Q_0, essa rede de questões tem o intuito de estabelecer uma teia de relações entre suas respostas que permitirão chegar à resposta desejada.

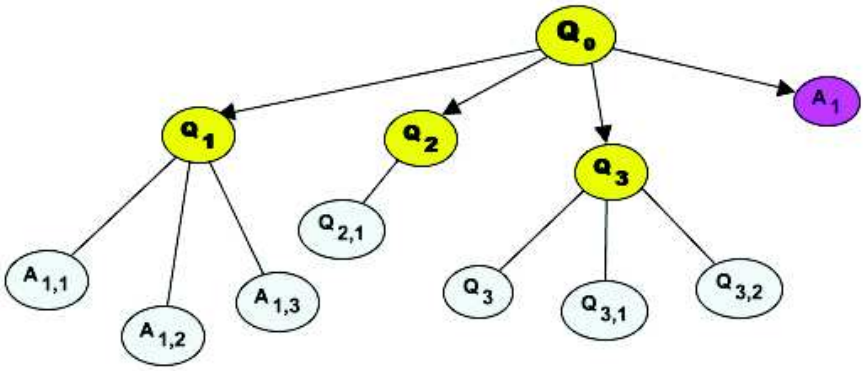
Apesar do percurso do PEP não ser pré-estabelecido, a análise *a priori* visa estudar o poder gerador de Q_0, por um processo aberto e largo (*cronogênese),* pelo qual as questões são engendradas a partir da questão inicial (Q_0), depois as respostas intermediárias e, assim o ciclo recomeça com novas questões, até chegarmos a uma resposta para a questão geradora (A_1) lustramos essa ideia por meio da figura 79, apresentada por Bosch (2018)[46].

---

[45] On a parlé des rapports personnel et institutionnel *R* (*x*, *o*) et *RI* (*p*, *o*) à un objet *o*. On peut maintenant parler de l'ensemble des praxéologies d'une personne *x*, ce que j'appelle (un peu cavalièrement) l'*équipement praxéologique* de *x*, et que je note *EP*(*x*) ; et, bien sûr, de celles relatives aux sujets d'une institution *I* en position *p* en son sein, *EPI*(*p*). Le rapport de *x* à *o* est alors en quelque sorte la « coupe » de *EP*(*x*) par l'objet *o* : il sera constitué à partir des praxéologies qui, dans *EP*(*x*), « activent » *o* d'une manière ou d'une autre – par exemple au plan technique, ou dans le registre technologique, etc. La théorie praxéologique reprend et prolonge ainsi la théorie des rapports, à laquelle on peut toujours revenir si besoin est.

[46] Palestra apresentada no seminário de estudos do programa de estudos pós-graduado em Educação Matemática, PUC-SP. Brasil, 2018.

Figura 79 - Exemplo de mapa de questões



Fonte: Adaptado de Bosch (2018)

Cada questão gera novas respostas intermediárias e estas novas questões até chegar à resposta para Q_0.

Nas subseções seguintes, vamos retratar *a priori* o percurso de estudo de Q_0, a ser desenvolvido em cada episódio de estudo, norteado pelas questões, que ilustramos por meio de mapas de questões e/ou esquemas, que visam identificar cada etapa do estudo. As questões geradas Q_0 produzirão respostas intermediárias, e estas levantarão novas questões que nutrem o processo de inquérito, a dialética de questões e respostas contribui para auto alimentar o processo, que será detalhado a cada episódio de estudo. Chevallard (2009) chama esse processo de *cronogênese.*

As respostas obtidas precisam ser testadas com dados empíricos e com conhecimentos disponíveis para serem integradas ao meio (milieu), essa integração leva a novas questões Q_i, *(mesogênese*). O autor chama essa dialética de "*mídia-milieu*". O meio evolui durante o processo de inquérito, e a dinâmica é descrita em termos de dialética (CHEVALLARD, 2003). A dinâmica de trabalho entre os sujeitos está permeada por um contrato didático de partilha de responsabilidades, significa dizer que os sujeitos envolvidos no processo de inquérito partilham a responsabilidade, por meio de planejamento, levantando questões, organizado e priorizando relatórios e validando, chegando a um acordo para uma resposta final e defendê-la (*topogênese*).

A noção de mídia, no sentido de Chevallard (2007b), significa qualquer sistema de representação de uma parte do mudo natural ou social endereçado a um determinado público, por exemplo um curso de um professor de matemática, um tratado de química, um site na internet, um jornal de um apresentador de televisão etc., nesse sentido, revela um sistema de mídia.

5.3 Desenho *a priori* das sessões de estudo: ateliê de modelização didática sobre GAP

Ao iniciar o primeiro encontro (episódio de estudo), primeiramente, ocorrerá socialização da proposta do projeto, previamente aceito pelos estudantes e pelo professor de estágio, intitulamos o projeto de: "*Ateliê de modelização didática sobre GAP*"*.* Este momento se faz necessário para poder compartilhar com os estudantes a filosofia do projeto, tendo as bases nos pressupostos da engenharia didática de PEP, descrita anteriormente, em síntese, a emancipação institucional e o paradigma de questionamento do mundo.

Definimos o estudo experimental como ateliê, porque ocorreu no âmbito dos componentes de estágio supervisionado (estágio II, III e IV), tendo também a participação de estudantes que fazem parte do projeto residência pedagógica. No entanto, os episódios de estudo ocorrerão em período e horário diferente das aulas das disciplinas, com um cronograma específico, acordado com os estudantes e numa dinâmica própria de trabalho, a carga horária de estudo será de 3 horas/aula por sessão. A professora-investigadora deverá informar o tempo de duração do estudo, o número de sessões e a forma de avaliar.

5.3.1 Construção a priori do primeiro episódio de estudo: definindo geometria analítica

Para a **primeira sessão**, os estudantes terão o primeiro contato com a organização matemática (OM) e a organização didática (OD). Identificamos como possibilidades para nortear o início do estudo, algumas questões que descreveremos a seguir. Os estudantes podem tomar dois caminhos na construção do estudo, questionar no âmbito de uma dimensão puramente didático-pedagógica e uma outra dimensão didático-matemática, mas ainda, desarticulada. As questões iniciais que serão propostas, são perguntas simples que nortearam o início do processo de estudo. Na escolha das questões levamos em conta as duas dimensões: matemática (*M*) e o didática (*D*).

Este primeiro episódio atende a duas funções: realizar o primeiro encontro com a *razão de ser* da organização matemática GAP_{PR}, que se pretende reconstruir (com algumas das questões que a OM deverá responder) ao mesmo tempo viver um primeiro encontro, com a organização didática (OD), que estruturará o processo de estudo. Destacamos que, aqui, já aparece um primeiro aspecto da inter-relação entre o matemático, a atividade que se pretende realizar

e o didático, a maneira como os futuros professores propõem organizar tal atividade.

Para organizar o trabalho desta sessão, os estudantes poderão formar equipes de quatro a seis pessoas. **O objetivo** da sessão é promover o momento do primeiro encontro com a organização matemática em torno de GA.

Propomos aos estudantes como primeira tarefa de estudo[47], debruçar-se a respeito da questão inicial e de outras que podem surgir, tendo como base seus conhecimentos prévios, em que cada Q_i^D corresponde a questões de natureza didática (D) em que i é a variação dos diferentes questionamentos Q, são questões que serão progressivamente sendo geradas ($i = 0,1,2,3$), a cada sessão de estudo. Seguindo esta ideia em Q_i^M, são questões de natureza matemática ou intramatemática (M).

Q_0: como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?
Q_1^D: A quem ensinar GA
Q_2^D: Onde ensinar GA?
Q_1^M: O que é GA?
Q_2^M: De forma geral, o que diferencia GA de outras geometrias?
Q_3^M: O que GA estuda?
Q_1^{DM}: o que devo ensinar de GA na educação básica?

Inicialmente, propomos a questão Q_0, dando tempo para que os estudantes se organizem e comecem a trabalhar e se entrosar na tarefa. Algum tempo depois fornecemos as questões descritas Q_i^D, Q_i^M,Q_i^{DM}, elas também podem ser fornecidas paulatinamente, para que os estudantes possam construir repostas. Mais precisamente, a sigla Q_i^D é usada para indicar que tal questão evoca conhecimento didático (D), no mesmo sentido, Q_i^M indica que a questão evoca conhecimentos matemáticos (M) e por fim, Q_i^{DM} evoca conhecimentos matemáticos e didáticos de forma articulada(DM).

Os estudantes podem buscar ajuda de pesquisa nas mídias digitais, como computador, celular ou tablet que possuam em mãos. Podem também buscar mídia tradicionais como livros na biblioteca, a ajuda do pesquisador (que compartilha o papel de professore e condutor do estudo), essa dialética *mídia-milieu*, possibilitará aos sujeitos encontrar respostas intermediarias, geradas por Q_0, para a primeira sessão, $\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_A = \{ R_1^D; R_2^D;\ R_1^M; R_2^M; R_3^M;\ Q_1^{DM}\}$. A sigla $\boldsymbol{R}^{\Diamond}{}_A$ corresponde ao conjunto de respostas intermediárias para o conjunto de

[47] Optamos por destacar no texto as questões propostas e as construções dos estudantes por meio de um recuo de 3 cm e a fonte itálico (11), possibilitando assim uma melhor visibilidade desses elementos no corpo do texto.

questões da sessão (A), respectivamente dadas por R_i^D resposta de natureza didática (D) e i varia como variam as questões postas para a sessão (A). Essas nomenclaturas serão progressivamente adaptadas a sessão A, B. C etc. descritas *a priori*, neste capítulo.

Reforçamos o sentido que já destacamos, o PEP não pode ser pré-determinado, no entanto, podemos prever ao menos as possíveis direções ou caminhos que o estudo poderá levar os estudantes, tendo em conta que as questões iniciais não fazem parte de um *milieu* de dificuldade, *a priori*.

Supomos, portanto, que os estudantes conhecem o currículo da educação básica, ou pelo menos sabem onde encontrá-lo. Deverão buscar nesses documentos ou diretamente na internet outras fontes que abordem o tema, ou poderão ainda solicitar a ajuda da pesquisadora para indicar fontes de pesquisa, como livros didáticos e outros, na perspectiva de fornecer as respostas R_1^D, R_2^D e R_3^{DM}.O contexto dessas respostas envolvem claramente, uma inter-relação entre o matemático, em torno dos objetos e o didático mais precisamente os elementos do currículo. Este sendo o ponto em comum, o estudo das questões, deverá levar os professores-estagiários a se debruçar sobre o currículo em torno de GA. Destacamos que, nos estudos a respeito do conhecimento docente, o conhecimento do conteúdo e currículo é definido no quadro de Ball, Thames e Phelps (2008), no entanto, para fins de nossa pesquisa incluímos essa definição na categoria conhecimento didático pedagógico matemático ($CDPM_{GAP}$).

As respostas (R_1^D e R_2^D) podem ser sintetizadas, em linhas gerais, da seguinte forma: o currículo da educação básica prevê o ensino de noções de geometria analítica plana no 7º e 8º ano, GAP no 3º ensino médio, e que a GA, também, é ensinada nos cursos da área de ciências exatas, como matemática, engenharias, física etc.

As questões $\mathrm{Q}_1^{\mathrm{M}}$ e $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{M}}$, como respostas, $\mathrm{R}_1^{\mathrm{M}}$ e $\mathrm{R}_2^{\mathrm{M}}$, podem apresentar as primeiras noções a respeito de GA, tais noções podem ser encontradas na internet, ou em outras mídias, como já expusemos. Os professores-estagiários poderão trazer como respostas uma perspectiva histórica de GA (trabalhos de Fermat e de Descartes); ou uma perspectiva das disciplinas de GA cursadas por eles durante a licenciatura, ou aquela do livro didático do ensino médio etc. É possível que identifiquem como resposta R_2^M (para a questão $\mathrm{Q}_2^{\mathrm{M}}$) a diferenciação das geometrias a partir da incorporação de um sistema de coordenadas. Em qualquer caso, os objetos, ponto, reta, sistema de coordenadas, segmentos

orientados, entre outros, como cônicas e vetores aparecerão no conjunto da resposta R_3^M.

A questão Q_1^{DM}, embora pareça uma resposta bem simples: “ponto e reta”, visto que é evidente na questão inicial, quando submetida ao dispositivo de pesquisa, poderá fazer emergir nas descobertas dos professores-estagiários OM e OD em torno dos objetos ponto e reta. O sistema de coordenadas poderá aparecer como objeto, por meio do qual ponto e reta podem ser estudados e explorados.

A *priori,* o funcionamento do dispositivo levará os professores-estagiários a validar, por meio da avaliação nos pequenos grupos e no coletivo, as respostas intermediarias. Assim deverão (re)construir, mobilizar, desconstruir as respostas intermediarias $\boldsymbol{R^{\Diamond}_{ij}}$ para integrá-las ao meio (*milieu*), e assim continuar o processo de estudo com vista a encontrar $R^{\heartsuit}$.

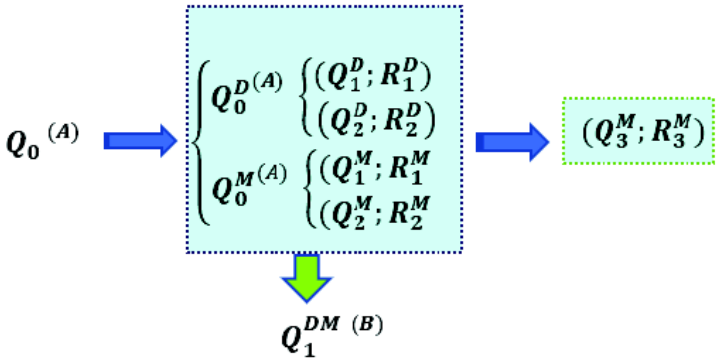
Para a socialização coletiva das construções, os professores-estagiários, poderão usar todos os recursos disponíveis, tanto tecnológicos, como datashow, ou mapas mentais etc., tais orientações serão fornecias ao logo do trabalho. Cada grupo expõe suas respostas a todo o coletivo envolvido. Se analisam, avaliam e classificam as mensagens emitidas, justificando as vantagens e os inconvenientes, o professor-pesquisador pode fazer uma síntese dos resultados obtidos em conjunto com os estudantes.

Os momentos das socializações coletivas neste primeiro episódio devem acontecer, a *priori*, em duas etapas: uma etapa para as respostas de $R_1^D; R_2^D; R_1^M; R_2^M$ e um segundo momento para que o coletivo discuta sobre como irá construir a resposta de Q_1^{DM}. No final dessa socialização, os professores estagiários são orientados quanto ao relatório do trabalho, desenvolvido neste episódio.

O relatório poderá ser construído digitalmente e postado no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) do moodle, espera-se que seja uma construção coletiva da turma, que deverá auxiliar no relatório final do ateliê. Para tanto, os estudantes poderão se articular com a responsabilidade de partilhar as tarefas. Nesse sentido, devem organizar-se para dar continuidade ao estudo para responder à questão Q_1^{DM} que será norteadora do próximo encontro. Sintetizamos o percurso desenvolvido até aqui como um possível desenvolvimento para $Q_0{}^{(\boldsymbol{A})}$, sendo A uma indicação ao estudo do primeiro

episódio: definindo geometria analítica, a primeira rodada de trabalho experimental, esquematizado por meio da figura 80.

Figura 80 - Cronogênese de "A", possível desenvolvimento $Q_0{}^{(A)}$



Fonte: Elaborado pela autora

No âmbito geral o estudo ainda está inconcluso, ou seja, o que temos são respostas intermediárias que pouco a pouco, à medida que forem construídas irão compor a resposta final desejada.

5.3.2 Episódio dois (B): diferentes sistemas de coordenadas

No segundo encontro, a professora pesquisadora retoma a discussão do episódio anterior referente à questão $Q_1^{DM\,(B)}$ (em que B se refere ao episódio 2): *o que devo ensinar de GA na educação básica?* É possível que os estudantes já tragam algumas sugestões de resposta, no entanto, dada as restrições a respeito do conhecimento matemático que identificamos no estudo piloto, é possível que os estudantes apresentem os temas de estudo como *sistema de coordenadas cartesianas, o ponto e a reta*, sem explorar e apresentar as organizações matemáticas.

Eles, ainda, podem apresentar, apoiando-se em livros didáticos, uma OM, neste caso, terão a oportunidade de apresentar como resposta a representação de um ponto num sistema de coordenadas cartesianas, alinhamento entre três pontos, a definição e equação de distância, a equação geral da reta, ou seja, aqueles elementos presentes nos manuais escolares. Uma terceira possibilidade é que os professores-estagiários construam um plano de aula com as etapas de cada passo e momentos didáticos, no sentido geral do termo, com ou sem as organizações matemáticas que serão *a priori* ensinadas a seus potenciais aluno.

Do ponto de vista da proposta de formação que visamos neste dispositivo de pesquisa PEP-FP/TAD, a condução do estudo, por parte da professora

pesquisadora deve permitir, no âmbito da procura pela resposta, desenvolver e introduzir elementos que poderão (re) compor o equipamento praxeológico dos sujeitos, futuros professores, reconstruindo o saber em jogo a partir de uma perspectiva alternativa aos modelos dominantes.

Nesse sentindo, as “questões” que guiam o estudo devem ser incorporadas desses elementos de recomposição. Tais elementos não são apenas os objetos matemáticos em estudo, são também elementos teóricos da TAD, que, neste caso, se constituem ainda como parte do que chamamos de conhecimento didático, por exemplo, a noção de *tarefa, técnica*, *tecnologia* e *teoria*, ou ainda elementos como a noção de *registro de representação semiótica*, a diferenciação entre a *noção do objeto e de sua representação.*

Evidentemente, está (re)composição não será automática, mas sim realizada no decurso do estudo, paulatinamente, e quando a natureza da tarefa didática-matemática permitir. Todas as atividades de estudo e pesquisa (AER) que serão propostas ao longo de nosso PEP, terão esta característica, atividades matemáticas-didáticas, porque visam o ensino, não apenas o conhecimento matemático do aprendiz.

Diante do exposto, ainda que os estudantes apresentem uma resposta para $Q_1^{DM\,(B)}$, altamente satisfatória do ponto de vista didático, matemático e pedagógico, julgamos importante o momento exploratório, em torno da gênese dos sistemas de coordenadas, pois são a base da geometria analítica.

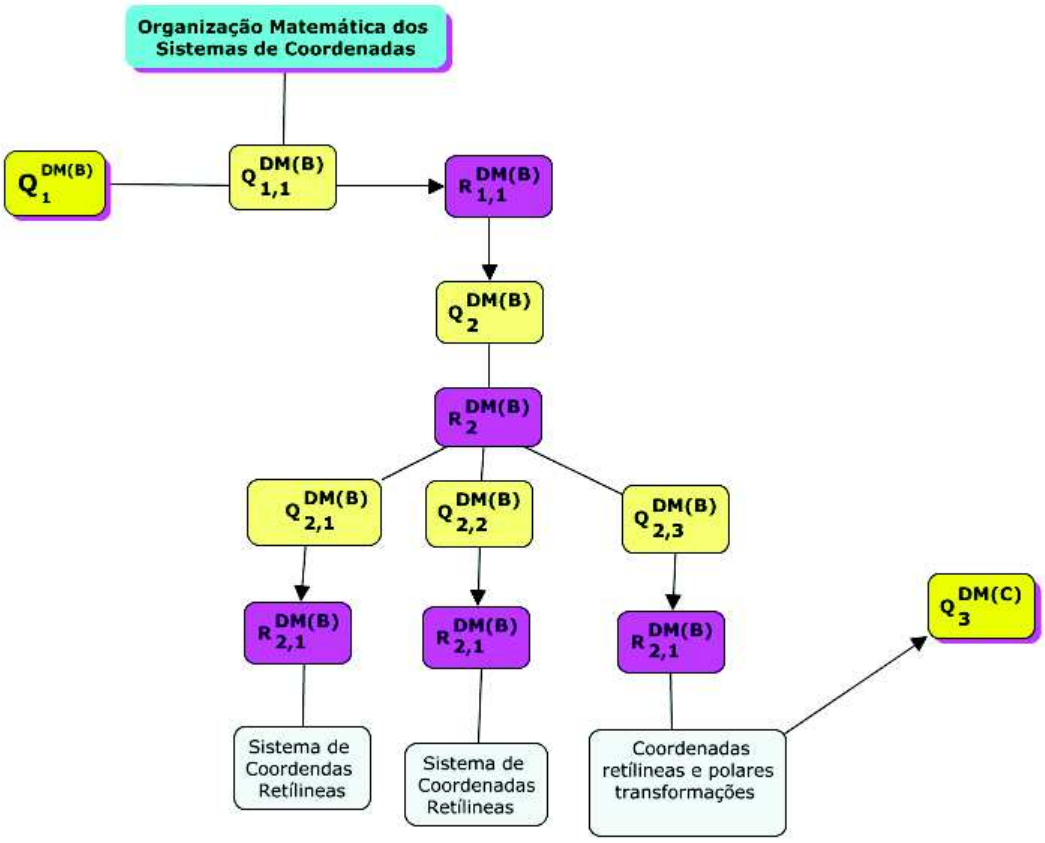
Nesse sentido, um estudo exploratório das *técnicas* utilizadas para deduzir, organizar, ou produzir tais sistemas, que, neste caso, estão mais próximas de uma *tecnologia* (de um bloco tecnológico-teórico), trazer à tona a razão de ser desses sistemas, mesmo sem tratar do problema de Papus, desenvolvido por Descartes, segundo Iain Maire (1637).

Na figura 81, ilustramos a cronogênese do desenvolvimento das sessões B e C. mostrando o funcionamento do dispositivo engendrado pelas tarefas do âmbito das questões geradoras referentes às organizações matemáticas dos sistemas de coordenadas.

Diante disso, as questões que se desdobram a partir de $Q_1^{DM\,(B)}$ (Figura 81), tem por base os sistemas de coordenadas, como gerador do estudo do ponto. Assim, $Q_1^{DM\,(B)}$ deve gerar uma questão ($Q_{1,1}^{DM\,(B)}$) que por sua vez gera uma resposta provisória $R_{1,1}^{DM\,(B)}$que vai gerar uma nova questão $Q_2^{DM\,(B)}$, que por

sua vez vai gerar nova resposta $R_2^{DM\,(B)}$. O ciclo recomeça com novas questões $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$ que vão gerar novas respostas respectivamente $R_{2,1}^{DM\,(B)}$, $R_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $R_{2,3}^{DM\,(B)}$ e o ciclo recomeça *a priori*, em uma nova sessão de estudo, ou seja, esse funcionamento do dispositivo é cíclico, se impõe para construção das próximas etapas de estudo, conforme descrevemos no mapa de questões (Figura 81).

Figura 81 - Mapa de questões do dispositivo PEP-FP/TAD, sessão B e C



Fonte: Elaborado pela autora

Cada questão e resposta envolve elementos da organização matemática e didática, em estudo, engendradas para fazer surgir novas etapas, as respostas são classificadas como provisórias frente à resposta final, que será o conjunto das respostas de cada sessão ou episódio de estudo.

Neste segundo episódio, propomos o estudo, a partir de um trecho do documento histórico analisado no MER, a respeito os diferentes sistemas de coordenadas, de acordo com os quadros 3 e 4. O objetivo é identificar as principais diferenças entre os sistemas de coordenadas bem como, sua ideia genérica enquanto organização matemática, confrontando com o equipamento praxeológico dos professores-estagiários a respeito desta temática. O segundo

objetivo é vivenciar o momento do primeiro encontro e o momento exploratório da OM, “sistemas de coordenadas”. O estudo dos sistemas de coordenadas, inevitavelmente inclui a representação do ponto, posteriormente da reta. Nesse sentido, as próximas etapas do estudo deverão seguir nessa direção.

Ao mesmo tempo, o estudo do recorte desse documento histórico, visa explorar as técnicas para representação e localização de um ponto, no sistema retilíneo e polar. Nesse sentido, esta segunda atividade de estudo e pesquisa (AER_{Q2}) terá duas etapas: a primeira é o estudo do documento, nos quais os estudantes farão em um primeiro momento de trabalho, o segundo momento é a exploração do documento com o olhar direcionado para possíveis técnicas desenvolvidas. Aqui começamos a introduzir as noções básicas da TAD, principalmente a ideia de praxeologia, a noção de *tarefa*, *técnica* e *tecnologia*. Nesta atividade, é a noção de técnica que precisa ser trabalhada, em outros momentos, será retomada e as demais noções introduzidas no estudo.

O trabalho será realizado em grupos de quatro a seis componentes como no encontro anterior. Para a segunda parte do estudo exploratório do documento, os estudantes receberão tarefas que são também questões do estudo:

> $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$: qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas?
> $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$: qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas retangulares?
> $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$: como representar um mesmo ponto no sistema de coordenadas retilíneas e no polar?

Espera-se que os sujeitos reconstruam o trajeto e a técnica usada pelos autores do material histórico (BRIOT e BOUQUET, 1860), justificando cada passagem. Conforme já salientamos, o que estamos chamando nas tarefas descritas pelas questões $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$ de técnica, é na verdade o discurso tecnológico-teórico usado pelos autores na constituição dos sistemas de coordenadas (conforme descrito no quadro 7 e 8)

Quadro 7 - Sistemas de coordenadas no século XIX

Determina-se a posição de um ponto dentro de um plano ao meio de duas quantidades com o nome de coordenadas do ponto. Há uma infinidade de sistemas de coordenadas. Nós indicaremos somente os sistemas mais simples e mais frequentemente empregados.

Coordenadas retilíneas

Sejam duas retas ou eixos fixos X'X e Y'Y traçadas em de um plano; a posição de um ponto qualquer M do plano será determinado pela intersecção de duas retas G'G, H'H paralelas aos eixos. A posição da paralela H'H é definida pela sua distância ao eixo Y'Y, distância computada sobre outro eixo; deve-se, de mais, indicar de qual lado do eixo está situado a paralela, este será pelo sinal; é conveniente atribuir a distância OP do sinal + se ela recai sobre OX, do sinal − se ela recai sobre OX'. Do mesmo modo, a posição da paralela G'G é definida pela sua distância OQ ao eixo X'X, distância computada sobre o segundo eixo e tomada com o símbolo + ou símbolo −, seguinte que ele recai sobe OY. Estes dois comprimentos OP e OQ, cada um atribuído o sinal conveniente que determina assim a posição das duas paralelas, e por consequência o ponto M, são coordenadas retilíneas do ponto.

*Designa-se pelas letras **x** e **y,** respectivamente como abscissa e ordenada, as duas retas X'X e Y'Y são chamados de eixos coordenados, a primeira reta o eixo de x e a segunda o eixo de y, ainda definem o ponto **O** como origem das coordenadas de cada eixo. Os valores de x e y pode ser qualquer, ou seja, podem variam de $-\infty$ a $+\infty$**, sendo assim pode-se obter todos os pontos do plano, cada par de valores fornece um e somente um ponto*

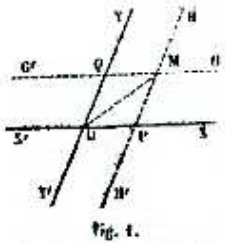


Fig. 1.

Nota-se ainda, que as coordenadas do ponto M são as projeções da reta OM sobre os eixos OX e OU, a projeção de cada eixo, ou seja, a projeção sobre o eixo X como coordenadas x ela mesma, é o segmento OP, atribuído pelo sinal positivo ou negativo, respectivamente na direção OX e na direção oposta OX'. Da mesma forma, a projeção sobre o eixo Y como coordenada y é o segmento OQ, atribuído do sinal positivo ou negativo, respectivamente na direção OY ou na direção oposta OY'.

Para as coordenadas retilíneas, aparece a especificação de coordenadas retilíneas retangulares, ou seja, as retas paralelas dos eixos, são também ortogonais. Geralmente traça-se eixos perpendiculares do ponto, segundo a figura 2 que são as distâncias desse ponto aos dois eixos, são também as projeções ortogonais da reta OM sobre os eixos.

Coordenadas retilíneas retangulares

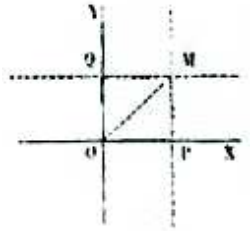


Fig. 2.

Um terceiro sistema de coordenadas polares. Atualmente no currículo da educação básica não contempla este estudo, o qual se relaciona diretamente com elementos da trigonometria, como ângulo e raio do círculo trigonométrico. As coordenadas polares normalmente são estudadas em cursos do ensino superior, inclusive na Licenciatura em Matemática.

Seja O um ponto fixo nomeado polo, ou seja, centro O, OX é um eixo fixo (figura). Pode-se determinar as posições de um ponto M para o segmento ρ do raio vetor OM e pelo ângulo ω que esse raio vetorial faz com o eixo, segundo a figura 3.

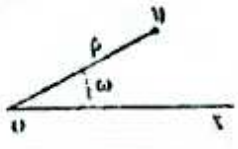


Fig. 3.

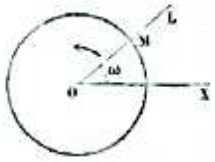
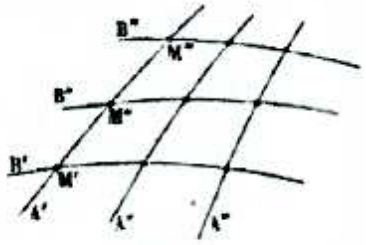
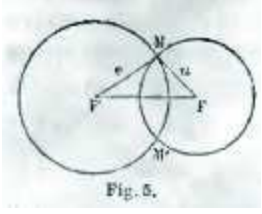
A posição do ponto M é determinada pela intersecção de um círculo, de acordo com a figura 4, de raio ρ, tendo por centro o polo, e uma semi- reta OL partindo do polo, fazendo um ângulo com o eixo OX.

Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p. 1-3, tradução nossa)

A exploração do documento em coletivo visa fundamentar teoricamente o funcionamento dos diferentes sistemas de coordenadas (Quadro 7), o que

poderá ampliar a visão dos estudantes a respeito da abordagem ou tratamento didático que deve ser dado para se ensinar GA na educação básica.

Quadro 8 - Diferentes sistemas de coordenadas

Ilustração da intersecção com o círculo  *É necessário concordar a direção do ângulo ω, a partir do eixo OX. Todos os pontos do plano variam: ρ de 0 a $+\infty$ e ω de 0 a 2π. Se ω é constante, deve-se fazer variar ρ de 0 a $+\infty$, tem-se todos os pontos da semi- reta OL, se em seguida fizermos variar ω de 0 a 2π, a semi- reta OL parte da transposição OX e descreve todo o plano.*	*É necessário que a distância dos polos seja menor que sua soma e maior que sua diferença quando esta condição é atendida, as duas circunferências se interceptam em dois pontos, isto vai resultar em uma ambiguidade* *A ideia geral de um sistema de coordenadas, é como uma generalização, pois o número de sistema de coordenadas segundo os autores é infinito. Determina-se um ponto dentro do plano pela intersecção de duas linhas traçadas nesse plano, de acordo com a figura 6.* *Generalização para um sistema de coordenadas*  Fig. 6. *Dados A', A'', A''', A'''', ... a primeira série de linhas da mesma espécie, correspondente a diversos valores $u', u'', u''', \ldots$ da variável u e B', B'', B''', B'''',... uma segunda série de linhas da mesma espécie, correspondente a diversos valores $v', v'', v''', \ldots$ da variável v, um ponto qualquer do plano é definido por um par de duas linhas que que passam por este ponto. Os valores particulares que devem ser dados às variáveis u e v para ter essas linhas chamam-se coordenadas do ponto. Juntos esses dois conjuntos de linhas constituem um sistema de coordenadas.* O primeiro sistema que destacamos no estudo, é composto por linha retas paralelas entre si, por isso é designado coordenadas retilíneas. No sistema polar a primeira série e compõe de semirretas que saem do polo O, e definida pelo ângulo variável ω,que elas fazem com o eixo OX. Na segunda série de círculos concêntricos em torno do polo com o raio variável ρ. No sistema bi-polar, cada série se compões de círculos concêntricos
Ilustração - Coordenadas bi- polares  Fig. 5. *A posição do ponto M se acha então determinada pela intersecção de duas circunferências descritas pelos pontos FF' como centros com raios u et v. Esse sistema não oferece a mesma perfeição teórica que os anteriormente descritos, em princípio, nem todo par de valores de u et v é admissível.*	

Fonte: Fonte: Adaptado de Briot e Bouquet (1860, p, 4-5, tradução nossa)

Vale salientar que na condução do estudo, a professora pesquisadora forneça alguns comandos. Nesta situação do episódio 2, é importante destacar para os estudantes que eles podem refazer o caminho, o percurso matemático

desenvolvido pelo autor, empreendendo uma nova técnica, desde que justifiquem cada etapa de construção.

As respostas, $R_{2,1}^{DM\,(B)}$, $R_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $R_{2,3}^{DM\,(B)}$ para as questões $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$, $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$ e $Q_{2,3}^{DM\,(B)}$,respectivamente deverão levar a continuidade do estudo em torno da representação de pontos por meio de coordenadas retilíneas retangulares.

Ao final desta segunda parte, os estudantes vão validar e avaliar o que construíram, esta construção deve ser feita de forma sistematizada por escrito, o produto desta construção escrita já será o relatório do trabalho do dia, sendo ainda complementado após o momento de socialização dos grupos e discussão do coletivo.

5.3.3 Descrição *a priori* do episódio três (C): distância entre pontos e alinhamento de pontos no plano cartesiano

Neste encontro, a professora–pesquisadora retoma as discussões do episódio anterior para dar continuidade ao estudo. Nesta etapa do estudo, a questão que surge, do ponto de vista epistemológico, é relativa às consequências das respostas da sessão anterior. A possibilidade de representar pontos por meio de coordenadas retilíneas retangulares, que, *a priori*, serão chamadas pelos estudantes de coordenadas cartesianas no plano, como é assim chamado esse sistema na atualidade, amplia-se o estudo para outros objetos que podem ser construídos nesse sistema a partir de dois pontos, três pontos, segmentos de retas, vetores, polígonos regulares, curvas, etc.

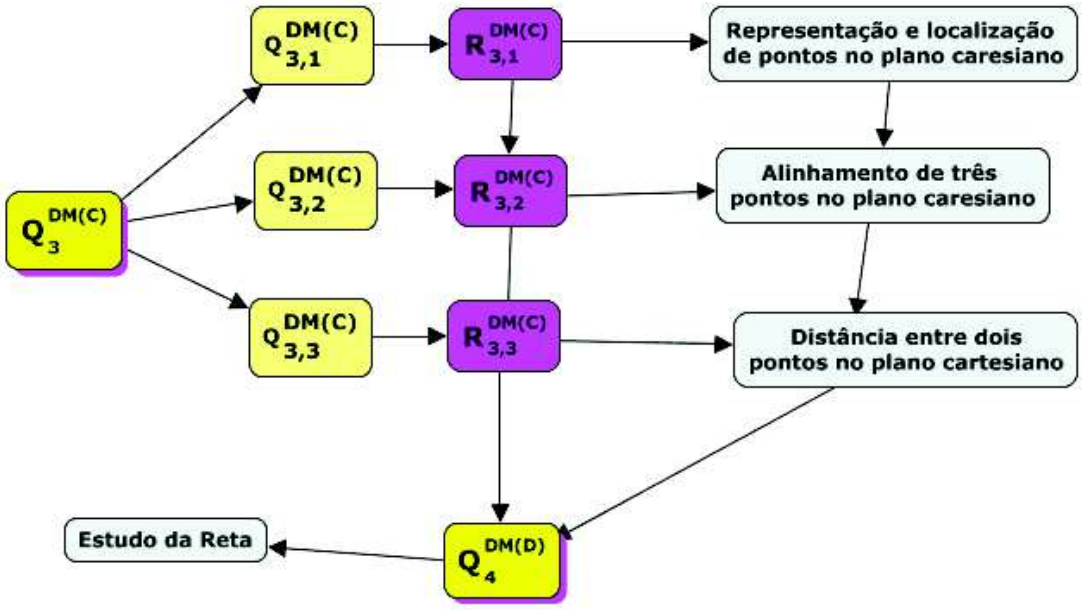
O comprimento de segmentos ou distância entre dois pontos, será a base de cálculo a ser realizado nas tarefas que envolvam esse tópico cuja questão norteadora do estudo para esta sessão, $Q_3^{DM\,(C)}$é: *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto*. A resposta para esta questão deverá, *a priori*, consolidar o conceito de segmento de reta, distância entre dois pontos e pontos alinhados, além disso consolidar a OM_P. É o momento *exploratório da técnica* e de constituição do ambiente *tecnológico-teórico*, em torno do estudo do ponto, além disso, será introdutório para o estudo da reta. Esperamos que o desenvolvimento desta sessão engendrada com atividade de estudo exploratória, possa consolidar OM_P. Nesse sentido, a questão $Q_3^{DM\,(C)}$, geradora desta sessão, trará outras questões, segundo o esquema da figura 82, cujas

respostas poderão ciar condições de alcançar o objetivo final. As questões intermediárias são pano de fundo desta sessão.

$Q_3^{DM\ (C)}$: *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto*?
$Q_{31}^{DM\ (C)}$: quais são coordenadas de um ponto? de dois pontos? etc?
$Q_{32}^{DM\ (C)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos?
$Q_{33}^{DM\ (D)}$: como ensinar o que são pontos alinhados?
$Q_4^{DM\ (D)}$: como ensinar o objeto reta?

O desenvolvimento será engendrado conforme ilustrado no mapa de questões da figura 82.

Figura 82 - Mapa de questões dos episódios três e quatro



Fonte: elaborado pela autora

Como vemos, segundo a figura 81, a última questão surge a partir do desenvolvimento global da estrutura didático-matemática em torno da organização matemática do estudo do ponto no plano cartesiano, ou seja, no desenvolvimento das atividades de estudo, o objeto "reta" aparecera em diferentes momentos, necessitando, assim, questioná-lo e estudá-lo. Nesse sentido, a questão que se levanta sobre o objeto reta, indica o rumo do estudo.

No desenvolvimento dos episódios três e quatro, propomos situações-problema, de modelização do contexto da óptica da visão humana. O objetivo é estabelecer relações entre os elementos GAP, explorando o chamado "sistema de coordenadas cartesianas", ou plano cartesiano (sistema de coordenadas retangulares), a localização de pontos, a determinação da expressão algébrica que permite calcular a distância entre dois pontos, e a condição de alinhamento

entre pontos. Para o desenvolvimento de uma situação de modelização em torno do sistema óptico do olho humano, apoiamo-nos no estudo descrito no apêndice 1, e essencialmente no material de apoio, apresentado nos quadros 9, 10, e 11.

Quadro 9 – AEP 1, introdução ao tema

De acordo com os meios de comunicação, diversos sites que tratam de saúde da visão, inclusive médicos, têm alertado para o aumento de problemas de miopia em crianças, adolescentes e até adultos por conta do uso excessivo e exposição a aparelhos eletrônicos, como smartfones, computadores, tablets etc. Além disso, o uso em excesso e a proximidade constantes dos aparelhos eletrônicos do globo ocular, podem causar ou aumentar os problemas com a visão, especialmente miopia. Aparelhos eletrônicos próximos aos olhos contribuem para um esforço excessivo de acomodação ocular. Isso porque o músculo de nossos olhos, que trabalha como uma espécie de zoom para a captura da imagem, precisa fazer esse trabalho de maneira repetitiva, o que pode proporcionar o início da miopia.[48] ou seu agravamento. Diante deste contexto, a partir do material de estudo, faça uma investigação com o seu grupo de colegas a partir das seguintes questões norteadoras. a) Considere que cada sujeito tem um “ponto próximo” (P_p) e um ponto remoto (P_R)localizado horizontalmente da retina (globo ocular). Qual “ponto próximo” de cada colega? E o ponto remoto? represente geometricamente. b) Diante dos resultados identificados é possível indicar quais dos seus colegas têm problemas na visão?

Fonte: Elaborado pela autora

Para a construção da resolução desta atividade exploratória, os estudantes devem começar por estudar o material de apoio segundo o quadro 9. Fazer a leitura e realizar o experimento com os colegas. Na sequência farão os registros do que conseguirem observar, deverão fazer uso de uma régua comum.

A partir de então, propomos a atividade exploratória 2, que visa trazer a situação real para uma análise geométrica e algébrica, tendo o aporte do estudo das lentes esféricas, (segundo apêndice 1).

A tarefa exploratória 2 tem como objetivo possibilitar aos estudantes realizar um estudo analítico do fenômeno, sob a perspectiva da geometria analítica. Este estudo analítico deverá permitir que os estudantes perceberem que o cálculo das lentes esféricas se apoia no conceito de distância entre dois pontos e de pontos alinhados, em um plano cartesiano. Além disso, é possível que, ao longo do desenvolvimento das tarefas propostas na atividade, identificar um discurso tecnológico-teórico que apoia as relações matemáticas que são estabelecidas entre as grandezas físicas. Para esta atividade de estudo e pesquisa, faz-se necessário um apoio teórico da área da física e dos estudos do

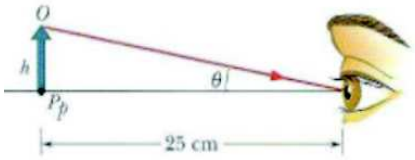
[48] Fonte: Disponível em: http://visaoparaofuturo.com.br/excesso-de-celular-pode-causar-miopia-saiba-mais/ .Acesso em: 19/02/2019.

olho humano. Nesse sentido, é fundamental trazer elementos básicos desses estudos, daí a importância do material de apoio, segundo os quadros 10 e 11.

Quadro 10 - Material de estudo sobre o olho humano e as lentes de aumento simples

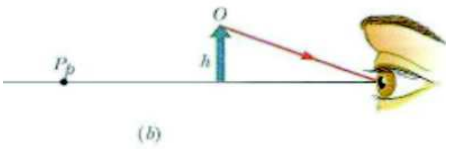
O olho humano normal, só é capaz de focalizar uma imagem de um objeto na retina (situada no fundo do olho) se a distância entre o objeto e o olho for maior que a de um ponto conhecido como *ponto próximo* representado pelo símbolo P_p. Quando o objeto está a uma distância menor que a do ponto próximo, a imagem na retina se torna indistinta. A posição do ponto próximo normalmente varia com a idade. Todos nós conhecemos pessoas de meia idade que ainda não começaram a usar óculos, mas precisa esticar o braço para conseguir ler o jornal. *Para descobrir onde está seu ponto próximo, faça o seguinte experimento: tire os óculos (se estiver usando) e aproxime (vale para quem não tiver óculos) esta página do olho aberto até as letras ficaram indistintas.* Nessa seção, vamos supor que o ponto próximo está a 25 cm do olho, uma distância ligeiramente maior que o valor típico para um adulto jovem.

A figura (a) *representa* um objeto *O* colocado no ponto próximo *P*, de um olho humano. O tamanho da imagem produzida na retina depende do ângulo θ que o objeto ocupa *no campo de visão*



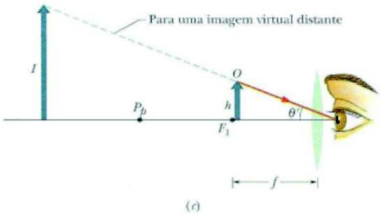
(a)

Aproximando o objeto do olho, como na figura (*b),* aumentando o ângulo e, portanto, a capacidade de distinguir detalhes do objeto. Entretanto, como o objeto agora está a uma distância menor que o ponto próximo, não está mais *em foco,* ou seja, não pode ser visto com nitidez.



(b)

(a) Um objeto *O* de altura *h*, colocado no ponto próximo de um olho humano, ocupa um ângulo θ no campo de visão. (*b*) O objeto foi aproximado para aumentar o ângulo, mas agora, o observador não consegue focalizá-lo



(c)

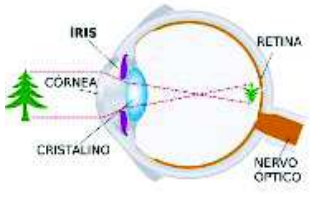
(*c)* Uma lente convergente é colocada entre o objeto e o olho, com o objeto um pouco mais próximo do olho que o ponto focal F_1 da lente. A imagem produzida pela lente agora está suficientemente distante para ser focalizada pelo olho e ocupa no campo de visão um ângulo θ´ maior que o ângulo θ do item (*a*).

Além disso, o ângulo θ´ ocupado pela imagem virtual é maior que o maior ângulo de θ que o objeto sozinho pode ocupar e ser visto com nitidez. A ampliação angular m_θ (que não deve ser confundida com a ampliação lateral m) do objeto é dada por: $m_\theta = \frac{\theta'}{\theta}$. Em outras palavras, a ampliação angular de uma lente de aumento simples é definida como a razão entre o ângulo ocupado pela imagem produzida pela lente e o ângulo ocupado pelo objeto quando o objeto se encontra no ponto próximo do observador.

De acordo com a figura (c), supondo que o objeto O se encontra no ponto focal da lente e que os ângulos são suficientemente pequenos para que $\tan\theta \approx \theta$ e $\tan\theta' \approx \theta'$, temos: $\theta \approx \frac{h}{25}$ e $\theta' \approx \frac{h}{f}$. Nesse caso, $m_\theta = \frac{25\ cm}{f}$ (lente de aumento simples). (HALLIDAY, RESNICK E WALKER, 2009, p. 57).

O olho humano é uma lente *convexo-côncava,* o funcionamento de produção da imagem se processa como as leis físicas de propagação da luz, segundo as lentes esféricas.

Na figura (d), vemos um esquema básico e bem resumido do olho humano, o qual recebe os raios de luz a partir da córnea, estes passam pelo centro óptico do olho, que não aprecem nesta figura. A imagem é processada a partir do funcionamento de vários componentes do olho e após as transformações que ocorrem no cérebro, as imagens reais tornam-se imagens na retina. O processo é bem rápido, porém extremamente detalhado.



(d)

As funções fundamentais do olho humano é propiciar a formação das imagens sobre a retina. O mal funcionamento desse sistema, ou seja, inadequações ópticas, provoca, as ametropias (do grego, falta de boa medida do olho), ou problemas de visão.

Fonte: Adaptado do apêndice A

Quadro 11 - Material de estudo parte 2

Diversos fatores do percurso da vida, desde o nascimento até a idade adulta podem resultar em problemas de visão. Estes entre outros, acometem problemas que impedem a formação das imagens na retina. Vamos analisar uma situação simples que acontece com grande número de pessoas, a necessidade do uso de lentes corretivas.

Podemos organizar uma representação "geométrica" (esquemática), conforme a figura 44, sobre o funcionamento de uma lente convergente colocada no olho, para correção da formação da imagem. Esse modelo está de acordo com o chamado modelo do olho reduzido, no qual foram feitas adaptações. Os raios de luz incidem sobre o olho (com a lente corretiva) e o trajeto desses raios se encontrarão na retina formando a imagem invertida no interior do olho, depois do ponto próximo, tornando possível a visualização da imagem nítida pela retina. A lente tem a função de projetar a imagem para depois do ponto próximo, tornando assim possível de ser identificada pela retina.

Há ainda o ponto distante, chamado de ponto remoto P_R, por um esforço acomodativa, um míope pode focar objetos a distâncias inferiores ao P_R., mas não a distâncias superiores ao mesmo.

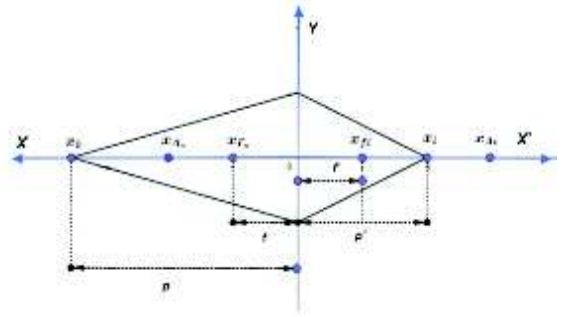
O ponto remoto é a posição do objeto que corresponde à situação em que o olho não realiza esforço de acomodação, e sua distância constitui-se a distância máxima de visão distinta. O globo ocular normal ou emetrope, tem distância máxima de visão distinta infinitamente grande ($D \rightarrow \infty$). É importante salientar que para a óptica da visão, distância superiores a 10 m já são consideradas infinitamente grandes. (SAMPAIO e CALÇADA, 1998, p. 224)

No caso do olho míope o ponto remoto é aquele cuja a posição do objeto se encontra a uma distância finita, sem haver esforço de acomodação, em que é nítida a visão, ou seja, na qual a imagem, está exatamente na retina, de acordo com a figura .Consequentemente a distância máxima de visão distinta míope é *finita* e não infinita, como em um olho normal

Representação geométrica do olho reduzido

Temos um sistema de eixos ortogonais, no qual o lado esquerdo do sistema corresponde aos objetos, o lado direito corresponde às imagens desses objetos. O centro óptico corresponde ao centro dos eixos coordenados, representando a córnea.

Figura 83 – Ilustração da situação



(e)

Conforme vemos na figura (e), temos uma representação geométrica de um objeto no ponto x_o, que projeta sua imagem sobre o centro óptico (O). O ponto x_{F_O} representa o ponto focal (foco da imagem) do objeto e $x_{F_{I_i}}$ o ponto focal da imagem de B. Os valores de f e f' representam as distâncias focais do objeto e da imagem respectivamente. Um dos eixos têm orientações opostas, este eixo é um eixo comum que passa pelos vértices e que passa também pelo centro do eixo óptico, eixo principal, consideramos os eixos das abscissas (o eixo x) com uma orientação contrária àquela da incidência da luz, o eixo x' tem a mesma orientação da direção da luz. O grau da lente colocada sobre o centro óptico, também chamada de vergência, é definido pela relação $V = \frac{1}{f}$. O aumento do grau, promove o aumento da amplitude, ou do ângulo do campo focal, ou seja, do ângulo entre o objeto e o centro óptico.

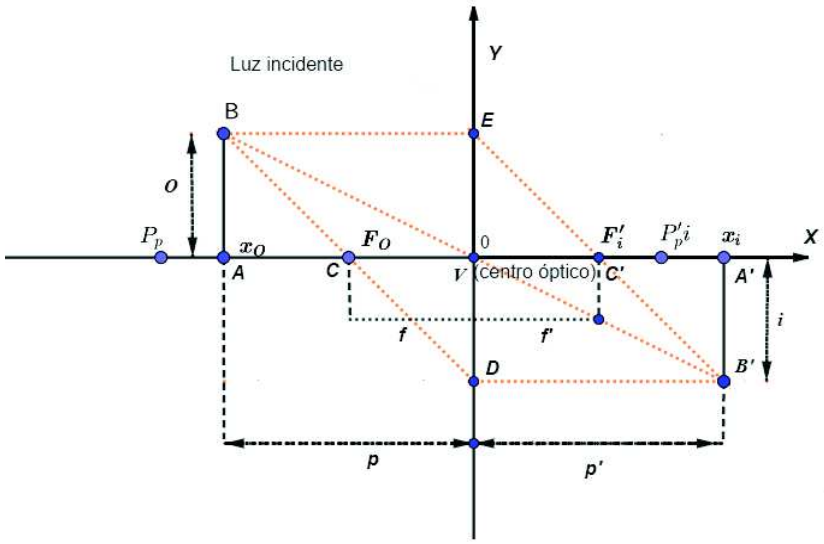
Fonte: Adaptado do Apêndice A

A seguir propomos a atividade 2 que deve ser respondida com base na figura 84, as tarefas da AEP a serem realizadas estão descritas no quadro 12. Tendo como base a figura 84, e o material de estudo descrito nos quadros 10 e 11, cujo detalhamento encontra-se no apêndice A.

Quadro 12 - Atividade de estudo e pesquisa: lentes esféricas

Seja um objeto de comprimento O situado a uma distância p do vértice do centro óptico ametrópico, segundo a figura 84, que aplica uma lente convergente de correção. Neste modelo de sistema, são representados vários pontos no plano que correspondem a um sistema óptico mínimo (olho reduzido. Analisando a figura responda as questões a seguir, justificando e representando geometricamente suas repostas quando necessário.

Figura 84 - Representação geométrica do sistema óptico reduzido



Fonte: Elaborado pela autora

A) Como definimos, a partir da representação geométrica, $p, p', f \; e \; f'$?
B) Analisando os triângulos VAB e VA'B'; ABC e VDC estabeleça relações matemáticas entre i, o, p e p' e $p, p' e \; f$?
C) Determine o comprimento do segmento VB e V'B' e justifique o porquê (argumente e prove) da sua construção.

Fonte: Elaborado pela autora

A tarefa que propomos, a partir do material de estudo (material de apoio), é definir relações matemáticas a partir de conceitos geométricos, que funcionam como discurso tecnológico-teórico, para fundamentar a existência de tais relações. É o momento de constituição do ambiente *tecnológico-teórico*, mas também se caracteriza como momento de *primeiro encontro* com a organização matemática do sistema óptico e o momento exploratório. O contexto da óptica se revela, portanto, uma variável didática rica e potencializadora dos momentos didáticos que vão potencializar funcionamento do dispositivo (PEP-FP/TAD).

A partir do estudo descrito no Apêndice 1, concluímos que as relações matemáticas definidas a partir da representação geométrica do fenômeno físico da formação das imagens e do uso de lentes esféricas corretivas, têm portanto, a geometria analítica plana, como pano de fundo para justificar matematicamente as relações, ou seja , a GAP é a razão de ser matemática do fenômeno de formação da imagem. Nesse sentido, propomos realizar a modelização didática desse fenômeno, em termos dos conhecimentos de GAP, a serviço da formação matemática e didática dos professores estagiários.

As relações matemáticas que podem surgir são diversas desde aquelas básicas desenvolvidas no estudo complementar (apêndice 1), a equação de Gauss e do aumento linear, a dedução da fórmula de distância entre dois pontos no plano, as relações entre o alinhamento de três pontos (pontos colineares). Tais construções, com exceção do referencial de Gauss, já estão descritas no modelo dominante. No entanto, agora, aprecem fundamentadoras do problema, e devem ser evocadas pelos professores estagiários, porém agora num outro contexto. Analisamos as possíveis respostas que serão fornecidas pelos sujeitos, é o *momento do trabalho da técnica,* no qual os estudantes podem também a partir do ambiente *tecnológico teórico* em torno da semelhança e de triângulo e proporcionalidade, deduzir técnicas alternativas para a tarefa proposta.

A resposta da letra (A) por definição do sistema óptico, do olho reduzido, f representa a distância focal do objeto, ou seja, a distância linear $(f-0=f)$ do vértice do centro óptico, situado na origem dos eixos coordenados até o foco do objeto. Analogamente, f' representa a distância focal da imagem do objeto, ou seja, a distância linear $(f'-0=f')$ do vértice do centro óptico, até o foco da imagem objeto.

A resposta da letra (B) corresponde à dedução da equação do aumento linear e da equação do referencial de Gauss. Tomando a proporção $\frac{A'B'}{AB}=\frac{VA'}{VA}$ a partir dos triângulos semelhantes VAB e VA'B' e substituindo segundos valores mostrados na figura temos eu $-\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$ (I) a equação do aumento linear, que exatamente estabelece relações entre i, o, p e p'.

Os triângulos ABC e VDC também são semelhantes temos que $\frac{AB}{AC}=\frac{VD}{VC} \Rightarrow \frac{o}{p-f}=\frac{-i}{f} \Rightarrow f.o=-i(p-f) \Rightarrow \frac{f}{p-f}=\frac{-i}{o}$ (II).Podemos deduzir a equação de

Gauss, importante no estudo da óptica a partir das equações encontradas. Espera-se *a priori* que os estudantes descubram esta construção por meio da pesquisa. Se a necessidade de ser solicitada a tarefa. Portanto se substituirmos (I) em (II), obtemos $\frac{p\prime}{p} = \frac{f}{p-f} \Rightarrow p'(p-f) = p.f \Rightarrow p.p' - p'f = p\,.f \Rightarrow p.p' = p'f + p\,.f$; Multiplicando dois membros da última equação por $\frac{1}{p.p'.f}$, obteremos: $\frac{p.p\prime}{p.p\prime f} = \frac{p'.f}{p.p'.f} + \frac{p.f}{p.p'.f}$, que resulta em: $\boldsymbol{\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p\prime}}$ Equação de Gauss. Esta construção é facilmente encontrada na internet em sites que tratam do estudo das lentes esféricas, como descrito no Apêndice 1

Como relação à letra C, temos que: o segmento de reta VB é hipotenusa do triângulo retângulo AVB, cujos catetos são AB e AV. Usando-se o teorema de Pitágoras, temos: $|VB|^2 = |AV|^2 + |AB|^2$. Temos um segmento horizontal, delimitado por dois pontos, cateto AV (coordenadas de dois pontos em x) e um segmento vertical, delimitado por dois pontos A e B, (coordenadas de dois pontos em y). Portanto, os lados do triângulo têm, respectivamente, os seguintes comprimentos: AV= $(x_A - x_v)$ e AB= $(y_A - y_B)$, portanto, $|VB|^2 = |AV|^2 + |AB|^2 \Rightarrow$ $d(VB) = \sqrt{(x_A - x_v)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d(VB) = \sqrt{(x_o - 0)^2 + (0 - y_B)^2} \Rightarrow \boldsymbol{d(VB) = \sqrt{x_o{}^2 + y_B{}^2}}$

A priori, os estudantes poderiam fazer $d(VB) = \sqrt{o^2 + p^2}$. Analogamente teremos A'V= $(x_i - x_v)$ e o AB= $(y_A - y_B)$. Donde temos que : $|VB'|^2 = |A'V|^2 + |A'B'|^2$,donde $d(VB) = \sqrt{(x_i - 0)^2 + (0 - y_B)^2}$, A priori os estudantes poderiam fazer $d(VB') = \sqrt{i^2 + p'^2}$.

Espera-se que as noções de segmento de reta, de segmento orientado e de reta no plano, também, sejam mobilizadas pelos sujeitos nas discussões a respeito da figura. Na resolução e discussão das questões no grupo, bem como as construções matemáticas, dedução de equações, podemos dizer que é o momento do trabalho da técnica. A tarefa, portanto, visa promover o trabalho da técnica, ou seja, os estudantes devem, a partir das construções realizadas ter a capacidade de síntese e de estruturar o bloco prático-técnico com o tecnológico-teórico, visando-tornar a técnica mais eficiente e confiável.

Como pode ser notado, toda a resolução do problema se apoia no conceito de distância entre dois pontos, a partir da dedução das fórmulas utilizadas, *a priori*.

É possível que os estudantes empreendam uma técnica alternativa, que pode ou não ser exatamente igual à que propomos. No entanto, qualquer que seja a técnica, deverá perpassar pelo discurso teórico-tecnológico que apresentamos.

A noção de localização de pontos no plano é fundamental para a interpretação da figura. Nesse sentido, os estudantes poderão representar figuras (triângulos retângulos) auxiliares para a dedução das distâncias conjugadas.

No trabalho em grupo, os estudantes devem ter como objetivo apresentar uma técnica para a resolução do problema, buscando diferentes fontes de pesquisa, inclusive no material de apoio. Após a socialização dos grupos, a professora pesquisadora deve propor uma institucionalização, que possa contemplar aspectos de dificuldade que tenham surgido durante o trabalho dos grupos.

A avaliação deverá estar articulada com a institucionalização, em que os estudantes, em conjunto com a professora-orientadora, discutirão a respeito das organizações matemáticas que foram construídas até então, avaliando o que foi construído e as limitações da técnica desenvolvida, caso haja. O processo de institucionalização deverá esclarecer o que foi elaborado em termos de organização matemática e promover uma reflexão a respeito do que foi aprendido.

Ao final desta sessão, é importante que os estudantes se articulem para organizar a produção escrita como resposta parcial da questão inicial geradora do percurso, para tanto, o relatório das atividades, além das produções, deve ter como questões norteadoras, questões propostas inicialmente no desenvolvimento do dispositivo. Nesse sentido, a professora pesquisadora propõe as perguntas a seguir (questões intermediárias) para momento de avaliação, de institucionalização e tecnológico-teórico na OM_P. As respostas também vão nortear a organização do relatório de estudo.

$Q_3^{DM\,(C)}$: *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto*?
$Q_{31}^{DM\,(C)}$: quais são as coordenadas de um ponto? de dois pontos? Etc.?
$Q_{32}^{DM\,(C)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos?

Toda a construção escrita realizada pelos professores-estagiários deverá ser postada no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) no moodle da PUC. A forma de registrar por escrito será livre, os estudantes podendo utilizar as

tecnologias que julgarem necessárias e adequadas nas construções que farão. É importante salientar a necessidade de negociação com o coletivo quanto a postagem, ou entrega dos relatórios parciais, pois são eles que irão contribuir para a constituição do relatório final. Isto deve ser realizado desde a primeira sessão de estudo, é importante, também, ter um momento, nos episódios, para orientar os sujeitos à manipulação e acesso ao AVA.

As noções que não serão aprofundadas nesta sessão como, o estudo da reta, serão retomados nos episódios seguintes do estudo. Os estudantes, poderão ainda buscar outros meios de fonte de estudo como forma inclusive de validar suas construções matemáticas. Ao final deste episódio cada monitor de grupo deverá apresentar o registro, ou relatório parcial das atividades.

5.3.4 Episódio quatro (D): Alinhamento de três pontos organização didática e avaliação

Neste episódio a professora pesquisadora, retoma o estudo do episódio anterior para finalizar o processo de discussão, socialização e avaliação proposto.

Este episódio da proposta de trabalho visa organizar o estudo matemático em curso, tendo como problema central elaborar uma organização didática em torno de alinhamento de três pontos. É o momento de avaliação, no qual os estudantes deverão propor uma sequência didática para o estudo de pontos alinhados. A partir das questões norteadoras $Q_{33}^{DM\,(D)}$ e $Q_{34}^{DM\,(D)}$ do estudo. A questão $Q_{4}^{DM\,(E)}$, será norteadora para o episódio de estudo seguinte e deve emergir no estudo do alinhamento de três pontos.

$Q_{33}^{DM\,(D)}$: como ensinar o que são pontos alinhados?

$Q_{34}^{DM\,(D)}$: o que é o lugar geométrico onde se encontram os pontos alinhados?

$Q_{4}^{DM\,(E)}$: como ensinar o objeto reta?

Para o trabalho da atividade descrita no quadro 13, deverá haver uma discussão entre o coletivo e a professora pesquisadora a respeito da construção da proposta ou plano de aula. Em um primeiro momento professora pesquisadora orienta, em um segundo momento os grupos de trabalho se reúnem para discutir como farão a proposta. A terceira parte é a postagem do trabalho no moodle e na sequência a apresentação de cada proposta para o coletivo, que deverá ocorrer nos episódios seguintes

Quadro 13 - Atividade de estudo e pesquisa, articulação entre o matemático-didático

A partir das questões norteadoras elabore com o seu grupo uma proposta de ensino para alinhamento de três pontos, para seus supostos alunos do ensino médio. (a proposta deve incluir, atividades, avaliação etc. Organize o ambiente didático de trabalho). Tempo estimado para propostas duas aulas de 50min Questões: *A) Como ensinar o que são pontos alinhados?* *B) O que é o lugar geométrico onde se encontram os pontos alinhados?*

Fonte: Elaborado pela autora

O que prevemos *a priori* que os estudantes farão, é elaborar um plano de aula e tentar incluir tarefas, a partir do livro didático, ou de atividades disponíveis na internet. Importante que a professora pesquisadora, oriente os estudantes a contemplar a organização matemática em torno do objeto alinhamento de três pontos, como forma de evitar uma proposta meramente descritiva e geral, que não explore a organização matemática e didática, este momento se caracteriza como um *momento de avaliação*, no qual após a primeira parte do estudo, deseja-se avaliar o que foi incorporado ao equipamento praxeológico dos sujeitos em termos de conhecimentos.

Tais conhecimentos podem ser mobilizados em uma atividade nova, cuja característica é de ser uma atividade de cunho profissional e que ao mesmo tempo envolva o matemático e o didático como elementos de formação docente.

No momento para a partilha, espera-se que cada grupo irá apresentar suas propostas e os demais grupos, juntamente com a professora pesquisadora irão interagir, discutindo e levantado questões acerca da viabilidade didática de cada proposta. Não é possível prever precisamente em detalhes quais construções serão propostas pelos estudantes, mas de uma forma geral, deverão chamar a proposta de plano de aula, apontando objetivos, atividades e avaliação.

Esperamos que as orientações da professora pesquisadora, definidas *a priori*, possam influenciar os sujeitos a construírem uma sequência didática, que apresente uma organização matemática de didática bem definidas.

Nesta sessão, retomamos o trabalho em torno das situações de aprendizagem desenvolvidas na sessão anterior. Os estudantes devem fazer a leitura ou apresentação do relatório parcial de estudo e em seguida, vamos propor uma tarefa dentro do campo de estudo da óptica, esta etapa terá como objetivo promover o trabalho da técnica, ou seja, os estudantes devem a partir das construções realizadas, no episódio anterior, ter a capacidade de síntese e

de estruturar o bloco prático-técnico com o tecnológico-teórico, visando-tornar a técnica mais eficiente e confiável.

Ao final desta sessão, é importante que os estudantes se articulem para organizar a produção escrita como resposta parcial da questão inicial geradora do percurso, para tanto, o relatório das atividades, além das produções, deve ter como questões norteadoras questões propostas inicialmente no desenvolvimento do dispositivo. Nesse sentido, a professora pesquisadora propõe as perguntas a seguir (questões intermdiárias) para momento de avaliação, de institucionalização e tecnológico-teórico na OM_P. As respostas também vão nortear a organização do relatório de estudo.

$Q_3^{DM\ (C)}$: o que devo ensinar a partir da localização de um ponto?
$\mathrm{Q}_{31}^{\mathrm{DM\ (C)}}$: quais são as coordenadas de um ponto? de dois pontos? Etc.?
$\mathrm{Q}_{32}^{\mathrm{DM\ (C)}}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos?
$\mathrm{Q}_{33}^{\mathrm{DM\ (C)}}$: como ensinar o que são pontos alinhados?
$\mathrm{Q}_{33}^{\mathrm{DM\ (C)}}$: o que é o lugar geométrico onde se encontram os pontos alinhados?

Toda a construção escrita realizada pelos professorse-estagiários deverá ser postada no ambiente virtual de aprendizagem (moodle).A forma de registra será livre, podendo os estudantes utilizar as tecnologias que julgarem necessárias e adequadas nas construções que farão.É importantae salientar da necessidade de negocaição com o coletivo quanto a postagem,ou entrega dos relatórios parciais, pois são eles que irão contribuir para a constituição do retório final. Isto deve ser realizado desde a primeira sessão de estudo.

5.3.5 Episódio cinco (E): reta como lugar geométrico

Esta etapa do estudo é marcada pelo estudo da reta propriamente dita, neste caso, alguns esclarecimentos são necessários. A partir do estudo piloto realizado no início da pesquisa, várias restrições do ponto de vista da formação matemática dos futuros professores formam identificadas. No quadro destas restrições, encontra-se um aspecto que é fundamental no estudo de GA, trata-se da articulação entre o geométrico e o algébrico, por exemplo, identificar propriedades geométricas e representá-las por meio de equações. Esta articulação, atualmente, pode ser facilitada, ou não, com o uso de interfaces tecnológicas que possibilite aos sujeitos manipular as representações dos objetos, por meio dessa interface. Nesse sentido, o uso do software dinâmico, de geometria, o Geogebra poderá se configurar como parte do *milieu* no

desenvolvimento das tarefas que serão propostas. É possível que a incorporação do uso desse tipo de tecnologia, promova o aspecto econômico do problema didático posto (economia), ensinar GA.

Outro aspecto importante de ser mencionado, é o uso de prova e demonstração, que tem sido uma restrição de difícil contorno, nas pesquisas de campo, desenvolvidas com professores, o nosso estudo piloto também revelou isto. Aliado a tudo isto, o nosso PEP-FP, ora em desenvolvimento, deve ter globalmente duas perspectivas gerais: desenvolver o conhecimento matemático, presente no estudo dos objetos e desenvolver o conhecimento didático presente nesse mesmo estudo, contornando assim o problema didático de ensinar GA.

Por último e não menos importante, tem o aspecto ecológico no estudo de GA, o qual, como vimos no estudo dos modelos epistemológicos de referência e dominantes, revela várias lacunas no desenvolvimento de conhecimentos relacionados com GAP, tendo em vista o desaparecimento de algumas abordagens didáticas, do bloco tecnológico-teórico nas organizações matemáticas, e também o desaparecimento de tarefas que incluem demonstrações, potencializadoras do desenvolvimento da teoria. Um exemplo disso, é a tarefa de mostrar que três pontos estão em linha reta, ou alinhados, sem usar a técnica do determinante, ou o discurso tecnológico- teórico apoiado na geometria sintética e não na Álgebra linear.

Tudo isso exposto, organizamos um mapa de questões que nortearão os episódios de estudo desde a sessão cinco.

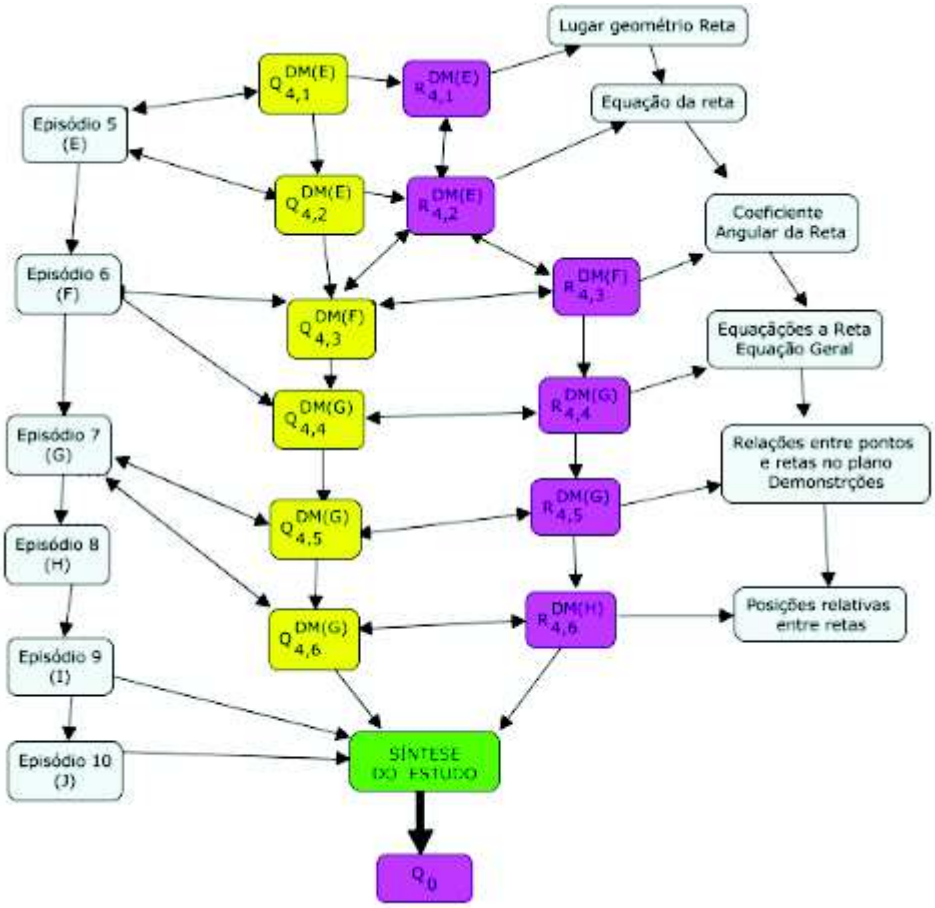
O mapa visa elucidar quais questões podem surgir quando partimos da questão $Q_4^{DM\,(C)}$ (como ensinar reta?), tendo em vista, o modelo alternativo, o qual considera os aspectos relevantes de cada modelo epistemológico, levando em consideração aspectos ecológico, didático e econômico. A partir da questão, como ensinar reta? o que se questiona é o que é o lugar geométrico reta? A resposta para esta questão vai gerar várias questões delineadas em dois aspectos matemáticos: o geométrico e o algébrico. Estes dois aspectos mobilizam a questão didática da noção do objeto e de sua representação (geométrica, algébrica ou outras).

É nesse caminho que a priori, os episódios de estudo se delinearão. O percurso do estudo e de (re)construção das organizações matemáticas e didáticas a respeito da reta, deverá permitir aos sujeitos responder à questão didática: ensinar reta, por meio das questões intermediarias do estudo,

reforçamos que as questões engendradas, representadas no mapa da figura 83, são questões definidas *a priori* , pois é na experimentação efetivamente que outras questões poderão se impor a partir das respostas de cada etapa anterior.

O mapa, figura 85, visa descrever *a priori*, a relações entre as questões de cada sessão estudo até a conclusão. Cada temática relacionada nos blocos em azul, fazem referência ao elemento específico da organização matemática em desenvolvimento e estudo.

Figura 85 - Mapa de questões dos episódios E a J



Fonte: Elaborado pela autora

As questões, a seguir, inserem-se em cada sessão de trabalho, a partir do estudo do lugar geométrico reta, episódio cinco, descrevendo por meio do mapa, suas relações com as respostas provisórias e os temas gerais da organização didática.

$Q_{4,1}^{DM\ (E)}$: o que é o lugar geométrico reta, no plano?
$Q_{4,2}^{DM\ (E)}$: qual(ais) a(s) realção (ões) matemática(s) envolvem uma reta no plano?
$Q_{4,3}^{DM\ (F)}$: qual a direção de uma reta no plano?
$Q_{4,4}^{DM\ (F)}$: Como ensinar a equação geral de uma reta dada?

$Q_{4,5}^{DM\,(G)}$: quais as relações matemáticas podem ser estabelecidas entre pontos e retas no plano?
$Q_{4,6}^{DM\,(H)}$: quais as posições relativas entre duas retas no plano?

Com relação às questões $Q_{4,1}^{DM\,(E)}$ e $Q_{4,2}^{DM\,(E)}$, espera-se que globalmente os estudantes consigam deduzir a equação geral de uma reta dada.

Este episódio cinco, e o *momento de primeiro encontro* com a OM_R e o será o *momento exploratório*. Para tanto, propomos dar continuidade ao estudo a partir do contexto da óptica, com a formação das imagens, realizado nas sessões anteriores, (lentes esféricas, do olho humano, ametropias etc.). Nesse sentido, propomos inicialmente a atividade exploratória, segundo o quadro 14, cujo principal objetivo é relacionar as imagens com a representação geométrica de retas semirretas e segmentos de reta, além de explorar a interface do Geogebra.

Nesta atividade, os estudantes poderão começar a manipular a interface do Geogebra, no sentido de reconstruir a representação dos raios luminosos (representação) e identificá-los com entes geométricos. Os estudantes podem mobilizar as noções segmento de reta, vetores e por fim retas. No último caso, espera-se que os estudantes façam construções geométricas da representação dos raios, associando-os à representação algébrica de retas.

A atividade exploratória 1 tem como objetivos: integrar a tecnologia digital, por meio da interface do Geogebra, como forma de identificar as diferenças na representação geométrica de retas e semirretas; perceber que a representação figural do raios luminosos se assemelha à representação geométrica de retas com diferentes direções; por fim, é o momento exploratório do ambiente da tecnologia digital (Geogebra).

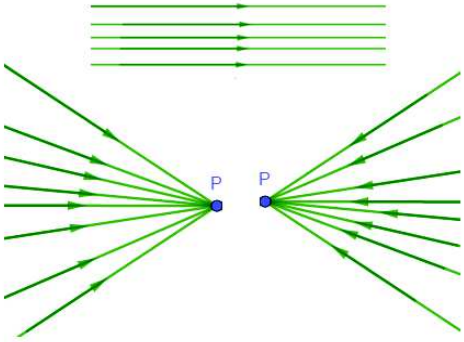
O bloco prático- técnico desta tarefa (quadro 14 são as próprias ações do sujeito na manipulação da interface (o saber -fazer), para construção dos entes geométricos presentes na barra de menu da interface (retas, semirretas, vetores) que vão reproduzir a figura. É importante solicitar que os estudantes desabilitem a janela de visualização, para que isso não influencie na construção da parte algébrica.

Com o objetivo de viabilizar e facilitar a realização da tarefa, é importante que a professora pesquisadora, institucionalize as funções básicas da interface, caso os estudantes nunca tenham tido conato com o software.

Quadro 14 - Atividade exploratória

Como vimos as sessões anteriores para que um observador enxergue um corpo, seus olhos devem receber a luz que esse corpo emite. Por exemplo, uma lâmpada, para representar a luz se propagando e atingindo os olhos do observador, utiliza-se linhas orientadas que fornecem a direção e o sentido de propagação da luz. Tai linhas são denominadas raios de luz, que se representa segundo a figura 85. Um feixe de luz é cilíndrico, quando seus raios são paralelos, é cônico quando todos os raios de luz têm direções que passam por um mesmo ponto P, sendo neste caso, convergente ou divergente. O ponto P é o vértice do feixe. Quando o feixe é composto por retas paralelas, o vértice está no infinito.
Tendo por base a figura, reconstrua no Geogebra esses tipos de imagem e seguida responda as questões.

Figura 86 - Representação gráfica de feixes de luz



Adaptado de Sampaio e Calçada (1998, p. 2)

A) Quais entes geométricos podem ser associados os raios luminosos?
B) E se prolongarmos esses raios indefinidamente em um plano? o que acontece? simule outras situações.

Fonte: Elaborado pela autora

Na construção, os estudantes poderão perceber, por meio da manipulação da interface, e visualizar certas as propriedades geométricas, por exemplo: toda reta é infinita em ambos os sentidos, para determinar uma reta é necessário no mínimo dois pontos, toda reta tem uma direção que é o ângulo de inclinação no plano, um segmento de reta é um intervalo de uma reta, um vetor tem origem direção e sentido.

Estas construções geométricas devem ser realizadas pelos sujeitos de forma livre, individualmente, permitindo que eles explorem as potencialidades da interface. Ao final deverão partilhar no coletivo suas impressões e percepções, refletindo a respeito dessa experiência, indicando os conceitos geométricos que acessaram, e outras conclusões que expuserem.

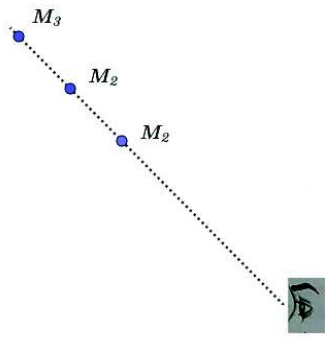
No segundo momento, a professora pesquisadora irá propor uma segunda atividade na qual os estudantes poderão utilizar novamente o Geogebra, mas agora o objetivo é realizar construções algébricas, ou seja, deduzir equações da reta, a partir da figura construída e determinar o coeficiente angular. A atividade deverá ser realizada em equipe.

Na figura 87, da tarefa descrita no quadro 15, não aparece o sistema cartesiano de eixos ortogonais, a proposta é que os estudantes, reconstruam a figura no Geogebra, tendo o eixo cartesiano como referência e a partir de então, possam desenvolver matematicamente as equações que representam: a reta, o ângulo de inclinação da reta e coeficiente angular.

Quadro 15 - Tarefa pontos no campo de visão

Um observador identifica três objetos que estão localizados no seu campo de visão, todos em uma mesma direção. Observe a figura.

Figura 87 - Ilustração da tarefa campo de visão



Fonte: Elaborado pela Autora

Utilizando o Geogebra reproduza uma representação geométrica no plano cartesiano, em seguida, analise essa construção com o seu grupo, indicando quais propriedades geométricas podem ser observadas, em seguida responda as questões.

A) Quais relações matemáticas podem ser estabelecidas a partir dos pontos que representam os objetos no plano cartesiano?
B) Qual a equação da reta determinada pelos pontos M_1, M_2, sabendo que $P(x, y)$ é um ponto que percorre a reta?

Fonte: elaborado pela autora

No primeiro momento, os estudantes vão construir a representação geométrica no plano cartesiano, usando a interface do Geogebra. A ideia é que os estudantes partam de um modelo matemático já conhecido por eles, ou que seja desenvolvido nesta construção e por meio da livre exploração da interface do software cheguem ao modelo de pontos alinhados. Neste modelo, a construção geométrica permite aplicar o teorema de Tales, ou semelhança de triângulos, ou a noção de segmentos proporcionais, ou ainda a dependência linear entre segmentos orientados. Este último conceito traz a noção de vetor que **a priori** não faz parte do conteúdo em estudo, mas pode surgir na discussão dos grupos.

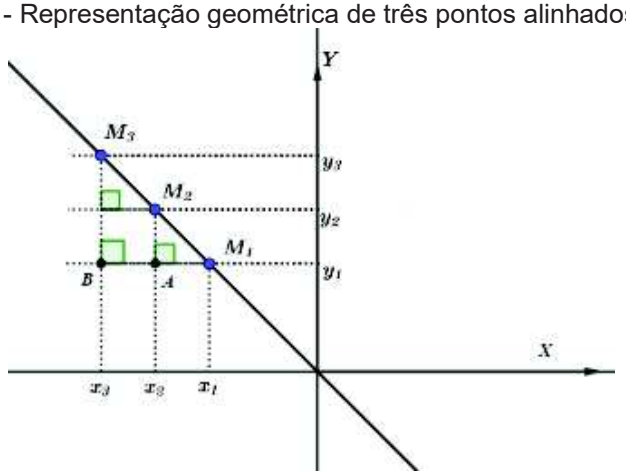
Qualquer caminho escolhido pelos sujeitos, obter-se-á a equação que representa o determinante, portanto a condição para alinhamento de três pontos, quando o determinante entre as coordenadas de três pontos colineares e a matriz unidade é igual a zero.

Esse mesmo modelo deve ser o ponto de partida, como técnica usada pelos sujeitos para encontrar a equação da reta. Salientamos que, este modelo para dedução da equação geral da reta, não aparece no estudo do modelo de referência, apoiado em Briot e Bouquet (1860). No seu texto do século XIX, os autores apresentam de imediato, quase automaticamente, a equação geral da reta, e todas as construções posteriores se apoiam nesta proposição para demonstrar que, a equação: $Ax + By + C = 0$,representa uma reta, mas não mostram o caminho contrário, pelo menos no trecho da obra que analisamos, correspondente ao estudo da reta no plano.

Este modelo, que associa a representação geométrica da reta (por três pontos) ao cálculo do determinante, vai surgir depois do movimento da matemática moderna, já com a influência da álgebra linear. Tal construção consta no nosso estudo dos modelos dominantes dos livros didáticos atuais (século XX e XIX).

Para resolução da letra (A), a priori, o primeiro passo para a resolução é construir a representação geométrica no Geogebra, inicialmente usando a função ponto, na interface podemos marcar vários pontos “alinhados”, em seguida seleciona-se a função reta por dois pontos e escolhe-se dois dos quatro pontos alinhados, para traçar a reta. Traçamos os seguimentos que determinam a localização de cada ponto por linhas tracejadas, o que vai terminar as coordenadas $(x_1\,, y_1)$, $(x_2\,, y_2)$ e $(x_3\,, y_3)$ de cada ponto M_1, M_2 e M_1 respectivamente, segundo a figura 88.

Figura 88 - Representação geométrica de três pontos alinhados letra (A)



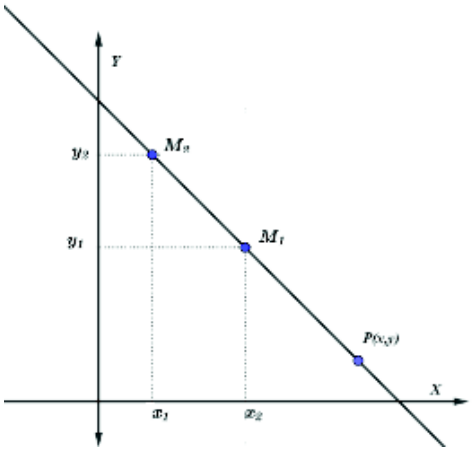
Fonte: Elaborado pela autora

Os pontos estão situados na mesma reta, ou mesma direção, ou seja, estão alinhados, são pontos colineares. Significa dizer que os três pontos determinam sobre a reta segmentos proporcionais. As retas paralelas que determinam as coordenadas de cada ponto, são um feixe de retas

paralelas cortadas pela reta (r), evocam o teorema de Tales. Formam-se também de triângulos (retângulos) semelhantes, M_1M_3B e M_1M_2A, essa propriedade geométricas permitem estabelecer que: $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$ ao mesmo tempo $\frac{M_1M_3}{M_1M_2} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$. O desenvolvimento das igualdades chegaremos ao determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, justamente é a condição para que três pontos estejam alinhados (ou pertencentes à mesma reta).

Para a letra (B), figura 89 os estudantes poderão utilizar a mesma técnica, apoiada nas relações geométricas de semelhança, no teorema de Tales e encontrar a equação do $x(\,y_1 - y_2) + y\,(x_2 - x_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$ (I).

Figura 89 - Representação geométrica letra (B)



Fonte: Adaptado de Iezzi (2010, p. 18)

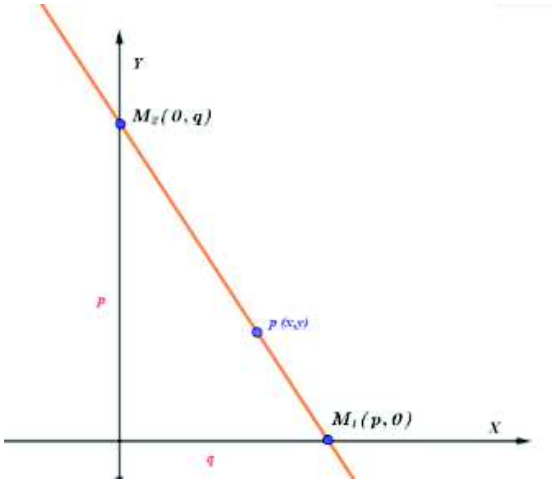
A análise da equação, apoiada na figura 89, permite afirmar que temos valores constantes x_1, x_2, y_1 e y_2 e valores variáveis $x\ e\ y$. Desta forma, pode-se substituir na equação (I), $y_1 - y_2 = a$, $x_2 - x_1 = b$ e $(x_1y_2 - x_2y_1) = c$, teremos: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, a equação geral da reta, relação principal procurada. Podem também desenvolver diretamente o determinante $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ e chegar à mesma conclusão.

Após a resolução da tarefa e a determinação da equação geral da reta a seguinte questão poderá ser proposta pela professora pesquisadora a seguinte questão: o que acontece com a equação da reta se os pontos M_1 e M_2, forem pontos de intersecção entre a reta e os eixos X e Y respectivamente? Simule e

represente geometricamente, utilizando o Geogebra e mostre a equação resultante.

Para responder esta questão, é necessário movimentar os pontos M_1 e M_2 de forma que eles possam interceptar os eixos coordenados X e Y, respectivamente, essa construção deverá ser feita no Geogebra para fazer movimentar os pontos, obtendo-se a figura 90.

Figura 90 – Reta que intercepta os eixos X e Y



Fonte: Eaborado pela autora

Os pontos M_1, M_2 e $p\ (x, y)$ sõa colineares e estão, portanto, alinhados, formam uma reta, logo podemos concluir que:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$. Desenvolvendo esse determinante temos que: $-qx - py + pq = 0$

esta equação é equivalente a: $qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$.

Podemos fazer o artifício matemático de dividir a equação pelo produto pq, paar obtermos uma equação na qual x e y, estejam isolados $\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq}$.

Vamos obter a equação segmentária da reta r: $\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$

Nota-se que os denominadores são exatamente as medidas dos segmentos que a reta r determina sobre os eixos coordenados X e Y

Em síntese, os estudantes devem apresentar as relações matemática por meio das equações das reta que podem ser de três tipos: $y = ax$, ou seja, uma reta que passe pela origem do sistema cartesiano, $y = ax + b$y, uma reta que corta o eixo Y , em um pondo diferente do ponto, origem do sistema cartesiano e uma reta que seja paralela ao eixo X , definida como $y = b$. Sendo $y = ax + b$y o modelo algébrico genérico para a representação de uma reta qualquer. O

modelo reduzido desenvolvimento da equação da reta por meio do determinante, permite também chegar à equação segmentada:$xp + yq = 1$, quando a reta intercepta os pontos (x, 0) e (0, y), é possível que os estudantes desenvolvam também este modelo.

As etapas seguintes do estudo serão fortemente influenciadas por este episódio, pois os estudantes deverão desenvolver uma organização matemática com o intuito de estudar a reta e a sua equação geral. Não dá para prever em detalhes quais construções geométricas e algébricas serão priorizadas pelos estudantes na sessão seguinte. A questão central que deve nortear o estudo é como ensinar a equação da reta para seus potenciais alunos, a resposta desta questão será a síntese acrescida de objetivos didáticos, que vai consolidar o momento tecnológico-teórico.

5.3.6 Episódio seis (F): coeficiente angular da reta

Neste episódio, o objetivo é identificar as relações entre a equação da reta e o ângulo que determina a sua direção. A determinação do coeficiente angular, segundo o modelo dominante, apoia-se no modelo de referência do século de IX que perdura até os dias atuais no sistema educativo do Brasil. A fim de não repetir tudo o que o estudante encontrará na busca às obras, propomos para essa discussão, a retomada da atividade da sessão anterior também.

A professora pesquisadora inicia o encontro retomando aspectos do episódio anterior que julgou necessário e propõe a atividade, segundo o quadro 16.

Quadro 16 - Tarefa exploratória

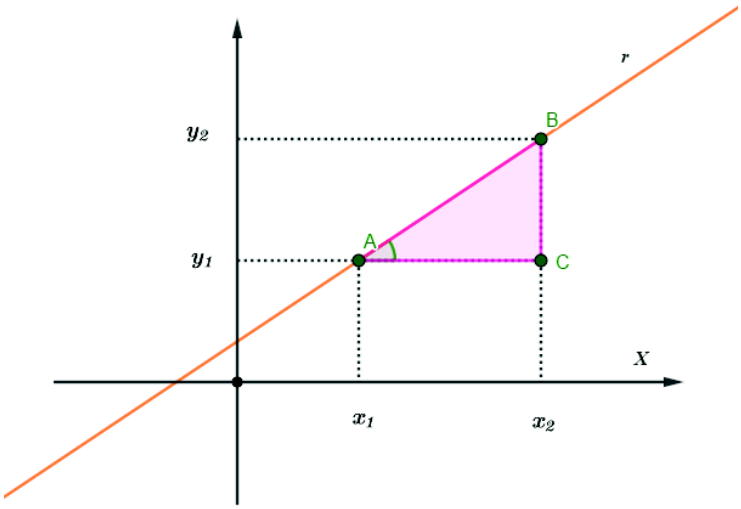
Seja uma reta ***r dada*** no plano cartesiano. Vamos pesquisar e estudar a inclinação de uma reta no plano, a partir da figura tendo por base nas seguintes questões norteadoras do estudo: A) Qual é o ângulo formado entre a reta e o eixo X das abscissas? B) O que é o coeficiente angular de uma reta? C) Como a equação da reta pode ser deduzida tendo um ponto e o coeficiente angular? *Em cada caso justificar com o bloco tecnológico teórico que justificam as técnicas matemáticas empreendida.*

Fonte: elaborado pela autora

Inferimos, *a priori*, que os estudantes não terão dificuldade para a resolução da tarefa, tendo em visto que a fundamentação matemática (bloco tecnológico -teórico), além de estar disponível em diferentes mídias (livros, internet etc.), foi desenvolvida no episódio anterior. Nesta tarefa, destacamos a importância do desenvolvimento do ambiente tecnológico-teórico e do trabalho

da técnica, a partir das relações matemáticas estabelecidas entre as propriedades geométricas e algébricas. Após a conclusão da tarefa, os estudantes socializam as construções com o coletivo.

Figura 91 - Ilustração da tarefa



Fonte: Elaborado pela autora

Do ponto de vista das construções matemáticas, é possível que os estudantes pudessem desenvolver um modelo que se assemelha aquele que apresentamos no modelo dominante do livro didático (anos 90).

Efetivamente, o que os estudantes poderão propor é o cálculo do coeficiente angular, identificando inicialmente o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas X. A figura (Figura 91) já explicita a imagem do triângulo retângulo. Supomos que os estudantes não terão dificuldades para partir das relações trigonométricas do triângulo retângulo BAC, em C, Assim, para a questão (A) qual o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas, podem responder que corresponde ao mesmo ângulo C do triângulo BAC , e deverão escolher uma letra grega para representar este ângulo (como θ ou α). Sobre a o coeficiente angular, a afirmação é que corresponde à inclinação da reta, ou ainda a sua direção, para tanto propõe-se o seguinte cálculo:

$$\tan\theta = \frac{med\,(\overline{BC})}{med(\overline{AC})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ (I)}.$$

A justificativa apoia-se nas relações trigonométricas no triângulo BAC retângulo em C, a tangente do ângulo θ. Significa dizer que a direção ou inclinação da reta depende da variação das coordenadas de X e Y, ou seja,

$\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta = x_2 - x_1$. Logo temos que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Como A e B são pontos que pertencem a r, podemos escrever que: $\begin{cases} ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \end{cases}$. Se somarmos as equações membro a membro teremos: $\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b}{a}$ (II). Comparando (I) e (II) temos que: $m = -\frac{b}{a}$. Esta construção é a dedução clássica do coeficiente angular, que está no modelo dominante. A dedução da equação da reta dado um ponto e o seu coeficiente angular, já se faz presente nesta construção, bastando desenvolver um pouco mais a equação (II).

Na segunda metade do episódio, após a socialização dos grupos a professora pesquisadora propõe as seguintes questões $\mathrm{Q}_{43}^{\mathrm{DM\,(F)}}$: qual a direção de uma reta no plano? $\mathrm{Q}_{44}^{\mathrm{DM\,(E)}}$: como ensinar a equação geral de uma reta dada? É o momento de avaliação, ainda que parcial da OM_R, em que se deseja identificar o que foi aprendido e como esse aprendizado se incorpora enquanto organização didática, no repertório de conhecimento profissional do futuro professor. O episódio deve ser finalizado com o relatório final da sessão de trabalho organizado e construído por cada grupo e na sequência postado no AVA.

5.3.7 Episódio sete (G): demonstrações envolvendo a reta no plano

Neste episódio, visamos dar continuidade à construção de OM_R. Daremos continuidade ao *momento* de trabalho da *técnica* e ao *momento de avaliação*. Neste episódio, as questões norteadoras visam evidenciar as relações matemáticas e as construções geométricas em torno da reta e do ponto. Tendo em conta que, conforme identificamos no estudo piloto, um dos problemas do estudo era a dificuldade de desenvolver atividades de demonstração. Esta restrição, também, aparece nos estudos com formação de professores, já apontado em nossa revisão de literatura.

Nessa perspectiva, a abordagem didática dos momentos de estudo visa priorizar atividades que demandem dos sujeitos a capacidade de demonstração e prova. Modificamos o contexto da óptica para o contexto puramente matemático, e incorporamos a interface tecnológica do Geogebra, como possibilidade para a construção das figuras e favorecer as conjecturas. O desenvolvimento do estudo visa responder às questões: $\mathrm{Q}_{45}^{\mathrm{DM\,(G)}}$: quais as relações matemáticas podem ser

estabelecidas entre pontos e retas no plano? $Q_{46}^{DM\,(G)}$: quais as posições relativas de duas retas no plano?

Nota-se que, dessas questões, outras serão geradas, cujas respostas são as respostas intermediárias que buscamos. Além disso, o momento de trabalho da técnica deve permitir aos estudantes desenvolver técnicas alternativas. Salientamos, no entanto, que as tarefas propostas são, na verdade, a constituição do ambiente tecnológico-teórico das construções matemáticas que envolvem reta e ponto, apoiando-se em nosso MER.

Escolhemos tarefas cujos resultados podem ser utilizados no ensino médio, pois as organizações matemáticas que aparecem no modelo dominante atual (anos 2000) priorizam muito mais as técnicas em detrimento da tecnologia e da teoria.

Temos aqui, um momento exploratório e de trabalho da técnica, mas também o momento de *avaliação,* no qual visamos avaliar como os estudantes mobilizam os elementos da organização matemática, já institucionalizados e outros novos, e de avaliar o domínio da OM.

Na primeira parte da sessão de trabalho será proposto as atividades exploratórias de demonstração e prova (quadro 17). A dinâmica do trabalho será um pouco diferente, pois cada grupo receberá duas tarefas a desenvolver e depois deverão partilhar as construções no ambiente virtual de aprendizagem. Nesta perspectiva, deverá compor-se de dois momentos, um para construção de cada grupo e debate com o coletivo e outro para socialização no ambiente virtual de aprendizagem.

Quadro 17 - Tarefas de provas e demonstrações

As tarefas a seguir são atividades de demonstração e prova, no plano cartesiano.
Desenvolva com seus colegas as tarefas a seguir. Cada grupo deve ficar com duas ou três tarefas para resolver, em seguida, o grupo deve responder, para cada tarefa, às questões a seguir e, apresentar e discutir om o coletivo do ateliê.

1) *Qual a técnica empreendida?*
2) *Qual o discurso tecnológico-teórico?*
3) *Qual teoria fundamenta a tecnologia da técnica?*

T_1: Determine a medida da área de um triângulo cujos vértices são três pontos no plano cartesiano
T_2: Determine a distância entre uma reta (não paralela aos eixos x e y) e um ponto dado
T_3: Encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado
T_4: Determinar uma reta paralela a uma reta que passa por um ponto dado
T_5: Determinar uma reta que passa por dois pontos dados
T_6: Determine o ponto de intersecção duas retas.
T_7: Determine a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas

T_8: Prove que duas retas são perpendiculares
T_9: Prove que duas retas são paralelas
T_{10}: Mostre que as três medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto

Fonte: Elaborado pela autora

Espera-se que a priori, na primeira etapa que é a resolução das tarefas, os professores estagiários mobilizem o equipamento praxeológico a respeito de retas e pontos, equações de uma reta etc., para desenvolver as tarefas solicitadas. Todas as demonstrações aparecem em nosso modelo de referência ou no modelo dominante. *A priori*, os estudantes devem consultar as mídias disponíveis e adaptar ou construir as respostas a partir do seu conhecimento. Possivelmente utilizarão representações diferenciadas daquelas apresentadas nos modelos de referência.

Os estudantes deverão fazer uso do tempo que julgarem necessário para passar a próxima etapa, o momento de avaliação e institucionalização. Espera-se que ao menos um ou dois grupos consigam socializar compartilhando as suas construções com o coletivo e discutindo acerca da validade de cada uma das técnicas empreendidas.

5.3.8 Episódio oito (H): momento exploratório entre o matemático e do didático

A professora pesquisadora inicia o episódio retomando o que foi apresentado pelos grupos na sessão anterior e dar continuidade à partilha do trabalho dos grupos, sintetizando as discussões de cada grupo. Supõe-se que a primeira metade do tempo será suficiente para a conclusão das apresentações e socialização das respostas.

No segundo momento, inicia-se o trabalho com a proposta de atividade que finalizará o estudo proposto para o ateliê de modelização didática. Esta parte terá por objetivo fechar o estudo a partir da retomada e resposta para a questão geratriz.

A partir da análise do material construído ao longo dos episódios de estudo, os estudantes deverão propor uma organização didática, ou um plano de ensino, que responda à questão inicial (questão geratriz). Para tanto, a professora pesquisadora propõe a atividade descrita no quadro 18.

Nesta etapa final do estudo, propomos que os estudantes se reúnam em grupos e analisem o material já construído integrando-o à nova atividade, em

seguida realizar a avaliação com o coletivo, partilhando as reflexões, a respeito das construções realizadas durante o estudo.

Quadro 18 - Atividade de integração do didático

Parte 1: Construa um esquema ou mapa conceitual, representando globalmente a evolução do estudo realizado, em termos dos objetos matemáticos estudados. **Parte 2**: A partir das reflexões realizadas no processo de formação do ateliê de modelização didática, desenvolva uma organização didática de estudo para os seus alunos do 3º ano do ensino médio, com base na seguinte questão: ***como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?***

Fonte: Elaborado pela autora

Os estudantes deverão analisar todo o material construído, fazendo uma síntese de tudo a partir das reflexões realizadas a posteriori, e propor um estudo para seus potenciais alunos do ensino médio. O objetivo principal é possibilitar um ambiente favorável em que os estudantes possam articular os conhecimentos didáticos e matemáticos desenvolvidos durante os episódios de estudo.

Em síntese, objetiva-se avaliar como os estudantes integraram o conhecimento matemático e didático no âmbito do dispositivo PER-FP/TAD desenvolvido e como põem em prática esses conhecimentos. O que vai possibilitar completar as análises posteriores da pesquisa e analisar a questão geral de investigação.

A atividade deverá ser realizada em grupos, com a mesma dinâmica, tendo os momentos de construção, estudo e pesquisa, e na sequência o momento de partilha. A professora pesquisadora poderá, caso julgue necessário, fazer sínteses ao final da socialização de cada grupo, apontando possíveis ajustes às propostas. Todas as produções escritas deverão ser entregues ou postadas no ambiente (AVA).

5.3.9 Episódio nove (I): momento exploratório entre o matemático e do didático

O episódio nove é a continuação e conclusão da atividade iniciada, na sessão anterior, especialmente a parte dois. Supõe-se que os sujeitos deverão explorar várias mídias, inclusive os livros didáticos para propor uma organização matemática e didática coerente com o trabalho do ensino médio. Deverão também solicitar explicações da professora pesquisadora, que poderá fazer momentos de institucionalização a respeito de possíveis pontos não

compreendidos do trabalho a ser desenvolvido. Espera-se que nesta etapa do estudo, os estudantes já tenham percebido, a diferenciação ente o pedagógico o matemático e o didático frente a uma atividade de sala de aula.

Espera-se que os estudantes mobilizem os conhecimentos abordados e desenvolvidos ao longo do processo de estudo e pesquisa do dispositivo, correlacionando as questões didática e matemáticas discutidas nos momentos coletivos de partilha, por exemplo: a noção tarefa, técnica, tecnologia e teoria (segundo a TAD), a diferenciação entre um objeto e sua representação, os tipos de representação de um objeto: figural, geométrica e algébrica, outras noções também podem ser mobilizadas. Ao final deste episódio espera-se que os estudantes já tenham um plano e uma estruturação mínima por escrito do que pretendem desenvolver com seus potenciais alunos, a ser apresentado no encontro seguinte.

5.3.10 Episódio dez (J): análise e avaliação do processo de estudo realizado

Neste episódio o objetivo é avaliar globalmente com o coletivo o desenvolvimento do ateliê, ou seja, a proposta de desenvolvimento do dispositivo PEP-FP/TAD. A avaliação visa permitir que os sujeito por meio da avaliação do ateliê e da autoavaliação de sua participação no estudo, identifiquem suas principais dificuldades, os avanços do ponto de vista dos conhecimentos docentes, e as limitações ainda não contornadas.

Para tanto, a proposta da atividade final é a apresentação dos grupos da atividade desenvolvida nos episódios oito e nove, e cada grupo deverá expor oralmente sua proposta discutindo-a com o coletivo, posteriormente cada grupo fará oralmente e no moodle a sua avalição para o trabalho desenvolvido no ateliê, a autoavaliação será individual e por escrito no ambiente virtual do moodle.

A professora pesquisadora deverá também a priori apontar sugestões e auto avaliar o trabalho desenvolvido apontado os pontos de dificuldade para o avançar do estudo bem como os avanços identificados. Por fim finaliza o trabalho coletando os dados escritos no moodle.

CAPÍTULO 6 EXPERIMENTAÇÃO: DESCRIÇÃO *A POSTERIORI*, ANÁLISE DOS ACHADOS

Neste capítulo, apresentamos a coleta de dados, propriamente dita, ressaltando os fenômenos observados, suas análises em termos teóricos e as conclusões que tais análises nos permitem realizar. Ressaltamos que, dado o volume de dados coletados, especialmente os áudios gravados, julgamos necessário realizar uma seleção dos dados a serem analisados. Nesse sentido, optamos por analisar aqueles dados que mais se relacionam com a nossa questão de pesquisa: *Quais conhecimentos novos (ou não) podem ser adquiridos por professores estagiários em geometria analítica plana, com a ajuda de um PEP-FP, e quais benefícios poderão obter para projetar (conservá-los) esses conhecimentos no ensino médio*?

Para tanto, foi necessário fazer a escuta e transcrição dos áudios produzidos nas sessões de ensino, destacando os observáveis que se relacionam com a questão de investigação direta ou indiretamente. Não traremos todas as transcrições literais, apenas o que for necessário para evidenciar os fenômenos observados a partir desses dados. Além disso, realizamos a confrontação das produções escritas dos sujeitos com os áudios de cada tarefa solicitada.

Salientamos que planejamos *a priori* como estrutura para o PEP-FP dez episódios, no entanto, dadas as restrições, tanto institucionais como da formação dos próprios sujeitos, e a influência das diferentes variáveis de difícil controle, o caminho encontrado, como veremos, foi a ampliação do tempo e da quantidade de sessões, como objetivo de controlar tais variáveis e atingir os objetivos propostos para cada sessão de estudo, fazendo as adequações necessárias.

O estudo foi desenvolvido durante três meses de trabalho com os estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, em uma universidade do interior da Bahia, tendo a aprovação do departamento e colegiado de curso. Os professores de estágio e a supervisora da área participaram do projeto, dando apoio à logística para realização das sessões de trabalho, que ocorriam semanalmente ou quinzenalmente fora do horário de aula. Destacamos que muitos foram os problemas para cumprimento da agenda de trabalho, devido às constantes paralisações de professores e funcionários, e por uma greve docente por tempo indeterminado, o que quase inviabilizou a realização das sessões de

estudo. Contamos com o apoio do comitê de ética e pesquisa do movimento paredista e assim foi possível concluir o projeto.

Sobre a organização do trabalho com os estagiários, a organização dos grupos ao longo dos episódios de estudo se fez de forma livre, a partir da frequência dos professores estagiários no projeto. Desta forma, a cada sessão os grupos poderiam se modificar como quisessem. Isto não influenciou as análises tendo em vista que o dispositivo de pesquisa visa a construção do coletivo articulada com a produção nos pequenos grupos.

6.1 Episódio primeiro: descrição e análise a *posteriori*

Neste primeiro episódio de estudo, o primeiro encontro de trabalho com os estudantes foi a apresentação da proposta do projeto de formação: *o ateliê de modelização didática em geometria analítica.* Realizamos em conjunto a leitura do termo de consentimento livre esclarecido (TCLE) (Apêndice 2), sendo explicado a voluntariedade e os aspectos mais específicos em relação à coleta de dados, tais como gravação de áudio, produção escrita etc. Além dos termos da pesquisa, organizamos em conjunto, um cronograma prévio para a realização dos encontros.

Além do coletivo de 28 (vinte e oito estudantes) e a professora pesquisadora, tivemos a colaboração do professor de estágio, que se propôs a apoiar o estudo e participar sempre que possível. Ressaltamos que a presença do professor de estágio foi importante para esclarecer para os estudantes quanto à proposta de formação, e a contribuição do estudo na trajetória acadêmica deles.

Após a primeira parte demos por início, efetivamente a experimentação conforme descrita no capítulo 5. Apresentamos a questão inicial $\boldsymbol{Q_0}$***: como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?*** Após a apresentação da questão, os estudantes começam a discutir em grupos como responder a esse questionamento. Participaram do trabalho sete grupos, compostos por quatro estudantes cada. Unanimemente, todos os grupos responderam que seria necessário aprofundar e desenvolver algum tipo de pesquisa para responder à referida questão.

Explicamos que a questão $\boldsymbol{Q_0}$ seria a que nortearia todos as sessões de trabalho subsequentes, que seriam desenvolvidas ao longo do percurso de formação previsto para o ateliê, e que a resposta para o questionamento seria

construída ao longo do percurso. Discutimos acerca da importância de estudar e do fazer científico norteado por questionamento, ou questões no sentido da TAD, do paradigma de questionamento do mundo. Logo em seguida, propomos outras questões, a partir dos elementos que compõem $\boldsymbol{Q_0}$**.** Nesse sentido, sugerimos mais duas perguntas que visavam elucidar o que estaria por trás de $\mathbf{Q_0}$**,** a quem ensinar GA? Onde ensinar GA? O que é GA?

Os estudantes retomam o trabalho de discussão no grupo, agora em torno das novas questões propostas. Destacamos as respostas de quatro dos sete grupos, tendo em vista que dos sete, apenas quatro disponibilizaram o relatório escrito desse momento. Ressaltamos, que cada grupo deveria viabilizar o áudio do trabalho da equipe, pelo aplicativo de celular WhatsApp e o relatório escrito das conclusões ou reflexões feitas no grupo. Para tanto, em cada grupo tinha um monitor de áudio e um relator da parte escrita, a ideia foi que a cada sessão de trabalho essas funções fossem revezadas, de forma que todos os membros do grupo pudessem colaborar na produção do material (e dos dados).

Ressaltamos que, sobre a produção de cada grupo, além da descrição geral do trabalho, destacaremos com as falas[49] propriamente ditas dos sujeitos, as informações que julgarmos significativas para a pesquisa e para a composição das análises, deixando os demais dados disponíveis para pesquisas futuras. Não analisaremos, portanto, todos os dados e nem todos os grupos a cada sessão, focaremos nossas análises em algumas das produções que julgamos relevantes, e a produção global do coletivo de estudo a cada sessão.

Como os grupos não necessariamente são compostos pelos mesmos alunos em cada sessão, eles são reorganizados conforme a frequência dos participantes. Nesse sentido, a cada sessão os grupos serão nomeados como A, B, C, D, ... podendo formar novos grupos ou manter os mesmos formados na sessão anterior. Destacamos a seguir o trabalho desenvolvido nos grupos.

O primeiro grupo (Grupo A) começa a discussão questionando os colegas sobre a GA no ensino superior, ou na pós-graduação e na educação básica. Buscaram na internet repostas, especialmente o que é GA, e discutem sobre a diferença entre GA e a Geometria Euclidiana. Uma parte do grupo defendeu que: o que diferencia as duas geometrias é a presença da álgebra, a outra parte do grupo defendeu que, o que diferencia é o surgimento da geometria cartesiana.

[49] As falas diretas dos sujeitos estão destacadas em itálico

O grupo utiliza a pesquisa na internet para identificar o que é GA, nesta pesquisa encontram as seguintes afirmações: “conexão entre geometria e a álgebra; junção da geometria euclidiana com a álgebra”.

Sobre as construções das respostas, este grupo afirmou que a GA deve ser ensinada na educação básica e no ensino superior, na rede pública e privada de ensino. Um dos membros do grupo afirma que na rede particular este ensino é mais aprofundado. Outro membro do grupo acha que a discussão não é pertinente para a pergunta que está sendo proposta, pois faz uma comparação entre o ensino público e privado.

Na sequência, buscam construir a resposta para a segunda pergunta, o que é GA? Um dos membros do grupo relata que encontrou que GA é a conexão entre a geometria e a álgebra, o estudante afirma, ainda, que com “seus alunos” foi essa a explicação que fez para o que é GA. Depois outro membro do grupo afirma que é a junção da geometria cartesiana e da álgebra, perguntam entre si: “a geometria é um ramo da matemática?” Um outro estudante responde que sim, que a geometria assim como a álgebra é um ramo da matemática.

O grupo começa buscar um documento que fundamente as respostas, por exemplo, do porquê se ensinar GA no terceiro ano, do ensino médio. Afirmam, portanto, que se ensina GA no terceiro ano conforme o livro didático e o Parâmetro curriculares Nacionais (PCN). Um dos colegas pergunta: *por que analítica? O que é o analítico? Alguém no grupo responde: analítico vem de análise... detalhado, agora detalhar o que é? plano cartesiano?* Alguém reponde*: analítica vem de análise, análise do plano cartesiano através da álgebra polo: o polo cartesiano? geometria analítica é o que? ramo da geometria que estabelece a relação entre álgebra e geometria...*

No contexto deste estudo, ocorreu, como prevemos, o momento de primeiro encontro com a razão de ser de GA, mais especialmente com os questionamentos a respeito do que é essa Geometria. Os estudantes também mobilizaram seus conhecimentos a respeito do currículo escolar, no sentido de identificar qual a etapa adequada para se ensinar geometria analítica, sendo que um dos grupos consultou BNCC, e identificou alguns assuntos, referentes a GA que são estudados ainda no ensino fundamental e ensino médio, por exemplo.

> *E encontramos que no 6° Ano, os alunos, tomam conhecimentos primórdios do plano cartesiano - o que é o plano cartesiano, o que são pares ordenados no plano cartesiano, O que são quadrantes no plano cartesiano – e terão um pouco mais de aprofundamento no 8°ano com a demarcação de pares ordenados no plano,*

> *conhecimento dos mapas geográficos e coordenadas cartesianas. Mas é na 3° série do ensino médio que a Geometria Analítica toma corpo, com o estudo do Ponto, Distância entre dois pontos, Ponto médio de um segmento de reta, Condição de alinhamento de três pontos, Estudo da Reta, Inclinação de uma reta, Coeficiente angular de uma reta, Equação fundamental da reta, Posições relativas de duas retas no plano, Distância de um ponto a uma reta, Área de uma região triangular, Estudo da Circunferência, Estudo das Cônicas, Parábola, Elipse e Hipérbole.(GRUPO, B)*

Globalmente, as respostas apresentadas por cada grupo foram semelhantes, mas somente o grupo B que identificou detalhadamente os assuntos que se estuda em GA. Todos os grupos afirmam que existe em GA uma "conexão" entre a geometria e a álgebra, o Grupo C, relacionou o sistema cartesiano ortogonal, como plano coordenado.

> *A Geometria Analítica é a parte da matemática que envolve a geometria por meio de uma abordagem algébrica, tendo como base o plano coordenado. Assim constroem-se equações que se relacionam com um lugar geométrico no plano coordenado. (GRUPO, C)*

Após o momento de trabalho dos grupos, propomos uma partilha e socialização das respostas. Chamamos de partilha porque todas as construções poderiam ser compartilhadas ente os grupos com o intuito de socializar os achados de grupo.

6.2 Episódio dois: descrição e análise a posteriori

Neste episódio, iniciamos retomando as questões iniciais do estudo da sessão anterior solicitando aos estudantes a socialização das respostas. Tendo em vista que, o que pensamos na analise *a priori* não foi alcançado no primeiro episódio de estudo, pois não foi possível discutir todas as questões previstas, foram necessárias a retomada do estudo e finalização do trabalho proposto para o episódio 1.

Os membros dos grupos, que estavam presentes, socializaram suas propostas, explicando o relatório escrito, na sequência se reuniram para discutir a última questão da sessão anterior: *de uma forma geral, como GA se diferencia de outras geometrias?*

Após as discussões dos grupos e a partilha das respostas, os estudantes mostraram ter ampliado um pouco mais a visão da razão de ser de GA, quando relacionam o sistema de coordenadas como parte integrante desta geometria. Os estudantes destacaram, no momento da partilha, que apesar de já terem cursado duas disciplinas de geometria analítica, em nenhum momento fizeram a reflexão sobre razão de ser de GA, ou seja, o que é GA?

O momento de partilha, também, mostrou que as respostas apontadas, como, por exemplo, conexão entre a geometria e álgebra, geometria de sistema de coordenadas, não representavam uma resposta final, havia ainda, segundo a fala dos sujeitos, mais informações que deveriam ser buscadas a fim de uma resposta conclusiva.

Destacamos que todo o processo de estudo e pesquisa, a partir das questões propostas, foi norteado pelo saber profissional docente, a respeito do conhecimento do currículo. Os estudantes mostraram conhecer quais fontes deveriam buscar para o currículo da educação básica, no caso os PCN e a BNCC, a partir desses documentos indicar a etapa de ensino adequada para os estudos de GA. No entanto, travaram longas discussões a respeito da real etapa de ensino em que os alunos começam a ver alguma noção de GA, pois alguns defendiam que era apenas no ensino médio, outros que começava com o plano cartesiano no ensino fundamental.

Após finalizarmos o segundo episódio de estudo, propomos aos grupos o estudo do material de apoio apresentado no capítulo 5. Inicialmente sugerimos aos grupos que realizassem uma discussão e o estudo do material histórico e em seguida respondesse as questões propostas.

Nesta dinâmica, após a discussão e construção das respostas, cada grupo deveria socializar, partilhando o que seus integrantes compreenderam dos sistemas de coordenadas no texto e que apresentassem as respostas para os questionamentos, $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$ = *qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas?* $Q_{2,2}^{DM\,(B)}$= *qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas retangulares?*$Q_{2,3}^{DM\,(B)}$ = *como representa-se um mesmo ponto no sistema de coordenadas retilíneas e no polar?*

Três grupos se reuniram em torno do estudo, discutindo entre si o material proposto. Uma questão levantada pelos três grupos foi a compreensão do que seria uma *técnica*. A professora pesquisadora intervém nesse momento para esclarecer o conceito de técnica segundo a TAD, explicar a importância de identificar a técnica em uma tarefa matemática, além disso, foi sinalizado que *tarefa, técnica* e outros elementos teóricos da TAD, fazem parte do domínio de conhecimento da Didática da Matemática, apoiada em Chevallard (1999). Após a intervenção no coletivo, pela professora pesquisadora, os estudantes retomam

o trabalho do grupo e recomeçam o trabalho em torno das questões propostas, com a construção do material escrito.

Neste episódio muitos estudantes precisaram sair antes do horário, o que inviabilizou a continuidade dos trabalhos no grupo, momento em que foi necessário interromper a produção para novamente negociar com a turma os dias e horários destinados ao projeto. Assim o trabalho, foi retomado no encontro seguinte.

6.3 Episódio três: descrição e análise a posteriori

Retomamos o trabalho a partir do ponto que paramos no encontro anterior, os estudantes novamente reuniram-se para estudar e discutir o material de apoio

Neste episódio, previmos que os estudantes buscariam livros didáticos, mas isto não se efetivou, eles buscaram referências complementares na própria internet, no entanto, por ser o texto traduzido de parte de originais antigos, os estudantes alegaram que ainda não conheciam a abordagem e que não encontraram algo semelhante. Alegaram ser o estudo de algo novo para eles e que ainda não haviam tido contato com essa perspectiva histórica, mesmo nos componentes de GA, já cursados.

Os grupos se imbuíram na tarefa tentando entender as concepções dos diferentes sistemas de coordenadas, retilíneos, retilíneos retangulares, polar e bipolar, bem como a ideia genérica para qualquer sistema de coordenadas, apoiados no material de apoio. Os estudantes também fizeram a correlação entre o sistema cartesiano atual e o sistema retilíneo e retilíneo retangular.

Durante as discussões dos grupos, foi possível identificar que no processo de estudo, os estudantes tentaram refazer as etapas da técnica de cada sistema de coordenadas, validando o processo, desenvolvido pelos autores (BRIOT E BOUQUET,1860) do texto fornecido. Em alguns momentos, solicitaram a professora pesquisadora parar tirar dúvidas, ou seja, validar ou não aquilo que compreenderam dos procedimentos matemáticos, geométricos fundamentadores da representação, por exemplo de um ponto, conforme previmos, o momento exploratório durante o estudo e discussão do material fornecido.

Acrescentamos que, de acordo com a fala dos sujeitos no trabalho de cada grupo, as noções geométricas fundamentadoras das técnicas utilizadas

para organizar os sistemas de coordenadas, foram mobilizadas durante as discussões, constituindo assim *o momento* de constituição do *ambiente tecnológico teórico*. As noções de perpendicularíssimo e projeção de segmentos no plano, ortogonalidade foram mobilizadas para explicar a técnica do sistema de coordenadas cartesianas (retilíneas retangulares), por exemplo.

Neste terceiro episódio, dado que, no encontro anterior não foi possível avançar na proposta de estudo pensado *a priori*, devido à interrupção do encontro por parte de alguns participantes da autoavaliação realizada pelos sujeitos quanto à dificuldade de leitura e compreensão do texto. Por esta razão, retomamos o estudo do segundo episódio, porém, agora organizado de diferente. Para os grupos que avançaram na discussão do material de apoio de forma mais dinâmica, a professora pesquisadora propôs um momento de discussão coletiva do material, algo não previsto *a priori*, mas que se mostrou necessário frente às dificuldades dos estudantes em avançar na compreensão do texto e dos conteúdos, nele contidos.

Durante este momento de estudo coletivo, alguns questionamentos foram levantados, por exemplo, a diferenciação entre a GA e as demais geometrias, a geometria Euclidiana, por exemplo. Foi também abordado, nessa discussão coletiva, a diferença entre a distância linear e a distância entre dois pontos num plano cartesiano (retilíneo retangular). Um dos alunos afirma que diferencia é devida ao sistema de coordenadas.

A professora pesquisadora institucionalizou como funciona o sistema de coordenadas cartesianas (retilíneo retangular), e a convenção dos sinais positivo e negativo, a direta e a esquerda da origem, respectivamente, abordou também a importância histórica de GA, e de seu surgimento como conhecemos nos dias atuais e a importância dos estudos de Gáspar Monge, tratou-se rapidamente do surgimento dos primeiros livros didáticos de geometria analítica, na França.

Este *momento de institucionalização* não foi previsto *a priori*, no entanto, durante o funcionamento do dispositivo, os próprios estudantes, por meio dos questionamentos, evidenciaram a necessidade de um feedback, de uma confirmação institucional do que compreenderam o que estava sendo discutido.

Após esse momento de institucionalização, o debate coletivo continuou a respeito do sistema de coordenadas polares, passo a passo, o coletivo foi realizando a leitura e trazendo elementos para a discussão. A professora pesquisadora fez “micro” momentos de institucionalização a respeito dos

sistemas de coordenadas apresentados pelos grupos. Nesta parte do episódio, a cada momento de partilha, de cada grupo, questionamentos debatidos pelos professores estagiários durante as discussões no grupo eram novamente levantados por eles na discussão coletiva e a professora pesquisadora fazia momentos de institucionalização em torno de tais questões levantadas. Um dos pontos teóricos institucionalizados foi a questão do sinal positivo e negativo adotado no sistema cartesiano (ortogonal). A professora pesquisadora explica a questão da adoção de uma notação, dando como exemplo o sistema óptico, que estudado mais tarde.

Nesses momentos de institucionalização, sempre que possível a professora pesquisadora realizava a abordagem ecológica, apontando que, no caso, por exemplo, do sistema cartesiano, a notação adotada no século XIX, a notação dos sinais dos eixos, permanece até os dias atuais. Mas, as nomenclaturas, como, por exemplo, o próprio nome “geometria analítica”, não existiam no século XVII e XVIII. Os tipos de sistemas, como por exemplo, o bipolar, polar etc., não aparecem no ensino básico atual, ou seja, desapareceram desse habitat, sendo estudados na atualidade, no ensino superior, em alguns cursos de gradação. Os relatos dos estudantes mostram que eles não conheciam o sistema bipolar e tão pouco a ideia da pluralidade de sistemas de coordenadas.

Concluímos que os momentos de institucionalização, apoiados em nosso MER, começaram a impactar no andamento do processo de pesquisa e formação, para contornar as *condições* da formação matemática e didática dos sujeitos.

Um dos estudantes sinaliza que o estudo de coordenadas polares é realizado por meio de números complexos, no ensino médio. A professora sinaliza a importância do estudo integrado entre a física e a matemática, por exemplo, no caso dos vetores, que devem ser estudos no ensino médio em matemática e não como acontece, na física de forma desconectada da matemática.

Na continuação do estudo coletivo, a professora pesquisadora pergunta o que diferencia o sistema de coordenadas retilíneas retangulares do sistema de coordenadas retilíneas. Resposta geral do coletivo é a ortogonalidade dos eixos coordenados.

Já no final do tempo estimado para esta sessão, a professora - pesquisadora retoma a seguinte questão: $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$ = *qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas?* Solicita dos estudantes que discutam e no próximo encontro partilhem suas respostas.

No encontro seguinte do Episódio terceiro, retomamos o trabalho iniciado na sessão anterior, os professores estagiários agora reúnem- se em três grupos para discutir a questão apresentada. Ressaltamos que o coletivo agora é menor do que aquele do primeiro encontro, começamos com 28 participantes e a partir da segunda semana de trabalho, o número reduziu para uma média 14 sujeitos por sessão, a razão é que muitos dos estudantes não conseguiram organizar seus horários das atividades da graduação para poder participar do projeto.

Passamos, portanto, a trabalhar com três grupos de quatro ou cinco participantes e nas sessões subsequentes veremos que há momentos de trabalho com apenas dois grupos de cinco ou quatro, em virtude da falta de alguns participantes. Salientamos que a redução do número de participantes não se caracterizou como um aspecto negativo, ao contrário, os estudantes que permaneceram mostraram um forte compromisso com o projeto e à medida que avançávamos no episódios de estudo, as reflexões orais promovidas por eles, dão indícios que eles se sentiam responsáveis pela sua própria formação e muito interessados em aprofundar e alcançar os objetivos propostos como projeto do *ateliê de modelização didática.*

Os estudantes começaram a discutir sobre a questão $Q_{2,1}^{DM\,(B)}$. Os áudios do trabalho dos grupos, em linhas geras, revelaram que os estudantes reconstruíram a técnica para representar um ponto no sistema de coordenadas retilíneos, utilizando mesma técnica das retas paralelas, do sistema retilíneo retangular, conhecido como sistema cartesiano. Após o trabalho de discussão dos grupos a sessão foi encerrada, e o trabalho foi retomado no episódio seguinte.

Neste terceiro episódio, iniciamos retomando a discussão a respeitos dos sistemas de coordenadas polares e bipolares, e dois grupos apresentaram para o coletivo, com base no material de estudo, seus achados. A professora pesquisadora atuou mediando este momento, os próprios estudantes explicaram o funcionamento dos sistemas, sem a necessidade de institucionalização pela pesquisadora. Os estudantes refazem o percurso explicitados pelos autores por meio do material de apoio. Consideramos esse trabalho como um *momento*

exploratório e *do trabalho da técnica*, fundamental para a continuidade do estudo. Se caracterizou também como o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico, que fundamenta a razão de ser dos sistemas de coordenadas.

A professora pesquisadora retoma as questões geradas nesta etapa de estudo, solicitando a dos grupos que retomem a discussão coletiva apresentada sobre o sistema de coordenadas polar e bipolar. O primeiro grupo explica o sistema polar, segundo o material de apoio, um segundo grupo explica o sistema bipolar, comparando com o anterior. Alguns estudantes verbalizaram que nunca viram o sistema bipolar, mas alguns deles conseguiram explicar o funcionamento desse sistema de coordenadas e finalizam com a generalização das características do sistema de coordenadas proposto no material de estuo.

Os objetivos desenhados *a priori*, ao que parece, foram alcançados, entre eles, citamos, por exemplo, identificar as principais diferenças e semelhanças entre os diferentes sistemas de coordenadas bem como as características comuns a todos eles. Há indícios que esses aspectos constituíram uma base teórica-tecnológica que fundamenta a razão de ser de GA. Isto ficou mais claro à medida que o estudo foi avançando.

Na sequência da explanação dos dois grupos no coletivo, cada um deles apresentou suas respostas para as questões demandadas. A primeira questão retoma a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas. Par esta questão, um dos grupos apresentou no quadro para os colegas, conforme as construções escritas a seguir:

> *A técnica empregada para encontrar as coordenadas de um ponto nesse sistema consiste em traçarmos retas passando pelo ponto ao qual desejamos encontrar suas coordenadas sendo essas (retas) paralelas a um dos eixos e concorrente ao outro simultaneamente, os pontos de interseção das retas com os eixos são as coordenadas. (Produção Grupo A)*
> *Utilizamos os conhecimentos prévios de ponto, reta, posição entre retas, espaço, interseção, ângulos. A partir do conceito de coordenada cartesiana, traçamos uma figura plana sendo que traçadas duas retas paralelas uma ao eixo x e a outra ao eixo y assim, a interseção entre as retas será o ponto situado no plano, ou seja, esse será nossa coordenada cartesiana, sendo que os eixos x e y não são ortogonais. (Produção Grupo B)*
> *Traçar retas paralelas ao eixo y e ao eixo x, as quais determinam pontos no plano (Produção Grupo C).*

Na apresentação do Grupo A, a professora pesquisadora questiona se alguém discorda ou acrescenta algo mais, e todos os demais dizem que não. No entanto, na análise das produções dos grupos, percebe-se o grupo B construiu um retângulo no plano cartesiano e identificou seus vértices como sendo pontos

e, o grupo C apresentou uma resposta bem resumida, mas durante à apresentação do Grupo A, a professora pesquisadora sinalizou a necessidade de detalhar matematicamente a técnica empregada no cumprimento da tarefa. Os estudantes do Grupo C, nas suas explicações orais, revelam ter entendido a necessidade desse detalhamento em termos matemáticos.

No que se refere a segunda questão “qual a técnica empregada para deduzir o sistema de coordenadas retilíneas retangulares?”, os três grupos concluíram que a técnica utilizada no sistema de coordenadas retilíneas retangular é a mesma empregada para o sistema de coordenadas retilíneas.

Com relação a terceira questão “como representa-se um mesmo ponto no sistema de coordenadas retilíneas e no polar?”, os estudantes apresentaram justificam a diferença entre representação no sistema polar e retilíneo retangular da seguinte forma:

> *Para representar um ponto M no sistema de coordenadas retilíneas é suficiente denotarmos suas coordenadas, enquanto no polar com mesma origem necessita-se especificar o ponto de intersecção da semirreta OM com o círculo de raio com valor igual a distância do ponto a origem que coincide com a raiz quadrada da primeira coordenada ao quadrado mais a segunda coordenada ao quadrado. (Grupo A)*.

A discussão a respeito do conceito de distância no plano que aparece na justificativa do grupo, e compartilhada pelos demais, ficou em aberto para ser discutido mais adiante, no decorrer do estudo.

6.4 Episódio quatro: descrição e análise a posteriori

Neste quarto episódio, iniciamos uma nova etapa do estudo conforme descrita na análise *a priori,* na seção 5.3.4*.* O objetivo foi responder às questões geradas a partir do estudo da representação de um ponto em diferentes sistemas de coordenadas. As respostas construídas em torno dessas questões nortearam o trabalho realizado nos episódios subsequentes retroalimentando o funcionamento do dispositivo, gerando novos questionamentos e repostas intermediárias (às questões que lembramos abaixo), até chegarmos, como veremos, à última sessão de trabalho e fornecer uma resposta para a questão geradora inicial.

$Q_3^{DM\,(C)}$: *o que devo ensinar a partir da localização de um ponto*?
$Q_{31}^{DM\,(C)}$: quais são coordenadas de um ponto? de dois pontos? etc?
$Q_{32}^{DM\,(D)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos?
$Q_{33}^{DM\,(D)}$: como ensinar o que são pontos alinhados?

$Q_4^{DM\ (D)}$: como ensinar o objeto uma reta?

Nesta etapa, conforme descrito a priori, iniciamos o trabalho com a leitura coletiva do material de apoio (sobre sistema óptico) e as orientações a respeito do experimento proposto para identificar a localização do *ponto próximo* e o *ponto remoto*. Em cada grupo, os estudantes deveriam escolher voluntários para fazer o experimento e tentar identificar quais deles poderiam ter algum problema de visão. Essencialmente a noção e o conceito que podem ser mobilizados por meio da situação-problema é a distância entre dois pontos. Após a leitura e orientações fornecidas ao coletivo, ele se divide em dois grupos que se organizaram para estudar e desenvolver experimento proposto e o material de estudo.

O Grupo A começa a desenvolver o experimento tendo uma colega inicialmente como voluntária, ela explica o que se passa quando aproxima ou distancia um determinado objeto ou imagem do olho, com base no experimento e em seguida na explicação fornecida no material de apoio. A equipe se apoiou muito mais no material de estudo que no experimento em si, e fez as deduções a respeito da distância e do ângulo do capo de visão. Ilustramos com um trecho da transcrição do áudio do trabalho do grupo (F1, F2, são falantes femininas).

> F1: - *Quando eu a... a distância foi menor que o ponto próximo...*
> *F1:- Não. Quando a gente pega o objeto e aproxima ele do olho, de imediato esse ângulo diminui, né, isso?*
> *F2:- Sim. É.*
> *F1:- Quando esse ângulo diminui a gente pode dizer que na verdade diminuiu o nosso campo? Né, isso? Ou seja, a gente... diminui o campo não, aumenta o campo de visão, mas diminui a nitidez, né, do objeto, da visão que nós temos em relação a esse objeto. Por que é que acontece...? Isso acontece porque também onde o objeto ele estava... antes que a gente estava vendo com mais nitidez, ele estava após o ponto próximo, mas nesse momento agora esse passou a ter antes do ponto próximo. Então, toda a vez que nós tivermos um objeto antes do ponto próximo, a nitidez que nós temos... o ângulo em relação a ele é maior, né, isso?*
> *F2: É.* (Transcrição de áudio, Grupo A)

Aparentemente, os membros do grupo, após esse momento inicial de trabalho não identificaram a distância do objeto como sendo o fator moderador de maior ou menor visão nítida. Na sequência discutiram quando deve-se usar as lentes convergentes e divergentes, a partir do material de apoio, e em seguida relacionar a distância de visão nítida com o uso de uma lente ou outra.

O grupo B, faz o experimento com uma palavra escrita na folha de papel testando com dois membros do grupo, a qual a distância do papel conseguiria enxergar ou não, e tentando identificar o ponto próximo de cada um. A partir da leitura do material, fazem o experimento várias vezes, com os colegas tentando

identificar o ponto próximo e medindo (de forma aproximada) com uma régua, conforme vemos na seguinte transcrição do grupo (H1, H2, indica fala masculina).

> *H2: - É, aproxima mais para ver se tem a dificuldade de vista de perto.*
> *H1:- Eu aproximei aqui e não... o meu foi... deu 8 centímetros comecei a... a... não enxergar mais anda.*
> *H2:- Eu vou colocar agora a... 20 centímetros, a 20 centímetros consigo enxergar normalmente. Aproximando o objeto como na figura B, aumentando o ângulo e portanto, a capacidade de distinguir detalhes no objeto, entretanto, como o objeto agora está a um distância menor que o ponto próximo, não está mais em foco, ou seja, não pode ser visto com nitidez, ou seja, tem que aproximar mais.*
> *H1: - [...] mais ou menos... uns 10 centímetros.*
> *H2: - 10 centímetros*
> *H1: - Aí, quando ele chega mais próximo, parece que eu tô... que eu tô enxergando duas palavras ângulos, ó. O negócio parece que ficaram duplicando. Eu consigo enxergar, mas não nitidamente. É isso. Aí, se eu aproximar mais até o meu olho a uns 5 centímetros, eu perco...*
> *H2:- Quanto?*
> *H1: 5 centímetros. Quando eu consigo enxergar mais normalmente, mas não nitidamente*
> (Transcrição de áudio, Grupo B)

Até o final da sessão de estudo o grupo B se limita a identificar quais os membros do grupo, a partir do experimento, indicam ter problemas de visão ou a necessidade de uso e óculos (lente corretiva), o grupo foca na determinação da maior ou menor distância na qual os colegas enxergam de forma nítida ou não. Não avançam nesse momento na continuação do estudo do material de apoio. Após o momento de trabalho dos grupos a sessão de estudo foi encerada, e deveria dar continuidade no encontro seguinte, tendo em vista o término do tempo de trabalho acordado.

Esse momento de trabalho foi o *de primeiro* encontro com a noção intuitiva de distância, ainda não tínhamos uma organização matemática explicita, com relação a essa noção. Essa organização será desenvolvida em próximo momento didático. *A priori* não dimensionamos precisamente o tempo didático para as atividades previstas sobre o sistema óptico, bem como de todos os episódios de estudo. O estudo do sistema óptico e as atividades propostas foram redimensionadas em três sessões, ou episódios, ao invés de um único.

Esse redimensionamento, em nosso ponto de vista, ocorreu de forma natural no funcionamento do dispositivo PEP-FP/TAD, visto que a análise ou descrição *a priori* é uma organização “mais ou menos” de previsão dos comportamentos dos sujeitos, frente às tarefas propostas e ao próprio saber em jogo.

Tais comportamentos, se subordinam, também, ao processo cognitivo do coletivo de trabalho e ao tempo cognitivo dos sujeitos. O que pode implicar em readequações para o tempo destinado a cada sessão ou tópico de estudo do PEP-FP, como aconteceu na sessão três, que se desdobra nas sessões quatro, cinco e parte da sessão seis, sem prejuízo aos objetivos do trabalho, mas essencialmente visando alcançá-los.

6.5 Episódio cinco: descrição e análise a posteriori

Neste episódio, foi dado continuidade ao momento de estudo, pesquisa e debate entre os estudantes em cada grupo. Retomaram o material de apoio, para avançar na segunda parte do trabalho, que corresponde à atividade de estudo e pesquisa descrita no quadro 9, na seção 5.3.3. Os estudantes, no trabalho em grupo, começaram a analisar a figura fornecida e as relações matemáticas que possivelmente poderiam ser deduzidas, discutiram e desenvolveram possíveis técnicas para fornecer as relações solicitadas.

Foi o *momento de trabalho da técnica*, *momento exploratório* e o *momento de primeiro* encontro com a organização matemática de GA, em torno do sistema óptico, conforme havíamos previsto. Os estudantes se imbuíram da tarefa, refletindo a todo tempo acerca das relações matemáticas deduzidas do fenômeno físico. A escuta dos áudios transcritos foi fundamental para identificarmos como se processo uma do estudo, do debate, das reflexões do levantamento de dúvidas etc., no decorrer desta fase do trabalho.

O grupo A, inicialmente, deu continuidade ao estudo do documento de apoio passou a discutir as possíveis relações de congruência entre os triângulos (casos de congruência) identificados na figura proposta no problema. Mas, apresentaram uma certa insegurança em afirmar que os triângulos eram congruentes.

Em seguida, os estudantes desse mesmo grupo, analisam os ângulos, verificando se eram ou não ângulos retos e várias tentativas, mas não conseguiram chegar a uma conclusão relevante sobre a questão tratada. Solicitaram a presença da professora pesquisadora, disseram que já estavam cansados, e o fim da sessão já se aproxima.

Os outros dois grupos, também, desenvolveram o trabalho sobre a atividade proposta, e identificaram a semelhança de triângulos, sem, no entanto,

finalizar o processo de resolução da tarefa ante do tempo previsto para esse episódio.

6.6 Episódio seis: descrição e análise a posteriori

A pesquisadora deu início aos trabalhos desse episódio, explanando sobre o ambiente virtual de aprendizagem moodle institucional da PUC-SP. Os estudantes informaram no primeiro episódio de estudo que nunca haviam trabalhado com o ambiente virtual. Nesse sentido, a utilização desta plataforma requeria uma mínima orientação ainda que básica, para a utilização das ferramentas disponíveis. O primeiro passo foi o acesso ao ambiente e a apresentação da página do projeto, foi dado um tempo para que os estudantes navegassem na página do projeto, e na sequência, a primeira tarefa no ambiente seria a postagem da atividade que estava sendo desenvolvida no estudo da óptica. Esta ação só seria executada ao final da sessão de estudo em curso.

A professora pesquisadora esclarece sobre as principais funções do moodle que seriam utilizadas ao longo do projeto: *fórum de avisos, fórum de discussão, ferramenta lição, tarefa, ferramenta diário*, *biblioteca*. Outras funções e ferramentas não foram discutidas com o coletivo. A pesquisadora também orienta como baixar um material de estudo e adicionar uma tarefa avaliativa ou não avaliativa.

Os estudantes, depois de entrarem no sistema e baixar o material, que no caso era a página do Geogebra e o download do programa, também entraram na página da atividade e testaram como fazer o envio. A partir deste episódio todas as atividades deveriam ser enviadas pelo AVA. Os estudantes deveriam, assim, ao longo do processo, desenvolver algumas habilidades para manipular a interface do moodle, dentro do escopo de tarefas e ferramentas disponibilizadas em cada episódio de estudo e definidas *a priori* pela professora pesquisadora. O AVA se caracterizou como ambiente seguro e institucional para acolher as produções escritas dos sujeitos de acordo como os dados da pesquisa.

Após as orientações sobre o uso do moodle, retoma-se os trabalhos iniciados no episódio anterior, e a pesquisadora socializa novamente a tarefa proposta, a partir das dificuldades observadas entre os grupos. Além disso, discutidos as unidades figurais da figura, o que permitiu identificar os triângulos semelhantes, a noção do que é uma relação matemática e a equação que lhe

representa, a existência de relações, traduzidas em equações quando temos uma propriedade geométrica, algo inerente à geometria analítica.

O processo de *institucionalização* foi participativo, pois a professora questionava todo o tempo os estudantes e validava suas respostas. As questões eram a respeito da tarefa, dos triângulos que aparecem na figura.

Após a explanação da pesquisadora, os estudantes retomam o trabalho no grupo para conclusão da primeira parte da tarefa.

O grupo A que, no episódio anterior fez várias tentativas de estabelecer as relações por meio da congruência (momento exploratório e de constituição do ambiente tecnológico teórico), retomou o trabalho da técnica agora com a informação da semelhança dos triângulos envolvidos na figura 89. E assim, o Grupo A foi identificando as medidas dos segmentos que formavam a proporção, e construíram a resposta, conforme pode ser observado a figura 92, (cópia de tela da tarefa do grupo A para a tarefa A e B sobre lentes esféricas). Esta construção sofreria ainda modificações após o momento de partilha com o coletivo e a institucionalização.

Figura 92 – Cópia de tela da tarefa A e B, Grupo A, AEP de lentes esféricas

A- Como definimos a partir da apresentação geométrica, P, P´, f, f´?

Os valores de f e f' representam as distâncias focais do objeto e da imagem respectivamente. Os pontos P e P', são definidos como pontos próximos, do objeto e da imagem respectivamente.o ponto foco e o raio de interseção entre o eixo x

B- Analisando os triângulos VAB e VA`B`; ABC e VDC estabeleça relações matemáticas entre i, o,p e p p` e f ?

Dizemos que o triangulo VAB é semelhante ao triangulo VA'B' pois: Ambos possuem um ângulo reto, que mede 90° além de o ângulo B'VA' ser igual ao ângulo BVA, pois são opostos pelo vértice, logo, pelo 1º caso de congruência de triangulo-o caso ângulo ângulo – temos que VAB é congruente ao triangulo VA'B'. Expressando de maneira simbólica:

B'Â'V=VÂB=90° e BVA= B'VA'=> VAB=VA'B'

Se os triângulos são congruentes, logo seus lados são iguais:

AB=B'A', AV=VA' E BV=B'V

P=|xi-v|

P'= |xo-v|

Pela relação de Gauss Relação i, o e p

$$\frac{BA}{A'B'} = \frac{AV}{A'V}$$

$$\frac{-i}{O} = \frac{P'}{P}$$

Relação p, p´ e f

$$\frac{BA}{VD} = \frac{AC}{CV}$$

$$\frac{BA}{VD} = \frac{AC}{F}$$

$$\frac{O}{-i} = \frac{p-f}{f}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{f}{p-F}$$

Fonte: dados da pesquisa

Analisando a resposta dada pelos estudantes, nota-se que a justificativa apresentada por eles, não se apoia na semelhança de triângulos, mas em congruência de triângulos de forma equivocada, pois do ponto de vista da óptica,

a imagem formada na retina é menor que o objeto, logo o triângulo formado no eixo das imagens não pode ser congruente àquele do eixo dos objetos. Na sequência da construção do grupo, aparece a *relação de Gauss*, como um resultado já conhecido, quando na verdade a relação de semelhança é o que vai permitir chegar à relação de Gauss.

Na sequência da resolução, o Grupo A estabelece a relação a partir da proporção, porém não explica como ela surge. O grupo não reproduziu a figura na resposta, nem apresentar qualquer indicação quanto aos lados proporcionais dos triângulos semelhantes.

A equação matemática do referencial de Gauss apresentada é correta, como pode ser observado na figura 92. Como os grupos dialogavam entre si, percebemos que houve troca de informações, o que auxiliou na compreensão final da construção. Mas foi possível detectar, nesta construção, uma potencial dificuldade na identificação dos segmentos proporcionais. Neste caso, a professora pesquisadora notou de imediato esta dificuldade específica ao observar os trabalhos dos grupos. Mais tarde, seria o caso de promover uma *institucionalização* de conceitos/propriedades oriundos do processo de resolução da tarefa.

O Grupo B apresentou uma construção semelhante à do Grupo A, com a diferença que partiu de imediato da relação de semelhança. Os áudios revelam que os estudantes do grupo B identificaram a semelhança dos segmentos, embora, não tenham justificado o fato. De todo modo, não mostraram segurança neste aspecto.

Na discussão do trabalho do Grupo C, *o momento exploratório* e o *momento do trabalho da técnica* foram apoiados na noção de semelhança de triângulos. Verbalizaram ter compreendido a semelhança de triângulos durante a resolução da tarefa, mas, não fizeram a devida justificativa na produção escrita.

Após a conclusão da primeira parte da atividade, o coletivo se reuniu para compartilhar as respostas e discutir sobre a viabilidade das técnicas construídas. Cada grupo apresentou as suas construções, mas, não articulam bem as justificativas teórica (discurso tecnológico- teórico). A pesquisadora, após olhar as construções de cada grupo e perceber uma certa fragilidade na compreensão do discurso tecnológico teórico, propõe ao grupo institucionalizar a primeira parte da tarefa.

O *momento de institucionalização* se mostra importante a fim de esclarecer o discurso tecnológico-teórico em torno de triângulos semelhantes, pois a técnica desenvolvida pelos estudantes estava coerente, a dúvida pairava na justificativa da técnica. A pesquisadora institucionaliza conforme realizado *a priori* na seção 5.33, capítulo 5. Os estudantes participaram da reconstrução da tarefa junto coma a pesquisadora e mostram ter compreendido a técnica para dedução das equações $-\frac{i}{o}=\frac{p'}{p}$ e $\frac{f}{p-f}=\frac{-i}{o}$, objetivo da primeira parte da tarefa.

No momento de socialização e partilha, cada grupo expôs suas construções e, ao mesmo tempo discutiu com o coletivo e a pesquisadora, que pontuava em sua fala observações do pondo de vista da abordagem didática.

Após a partilha dos grupos, a pesquisadora em conjunto com o coletivo institucionaliza e vai questionando a resolução, quanto ao detalhamento da tarefa. Os estudantes entendem a necessidade de fazer o “passo a passo” da tarefa para que seus supostos alunos aprendam a técnica. Além disso, a pesquisadora esclarece sobre o que é congruência e quando dois triângulos são congruentes.

Os estudantes argumentaram que a resolução que eles construíram estava correta, semelhante à construção institucionalizada pela pesquisadora. A pesquisadora contra argumentou que eles não justificaram a técnica, o “passo a passo” (e o discurso tecnológico- teórico).

Os estudantes argumentam que a justificativa teórica estava implícita. A pesquisadora novamente contra-argumenta que o professor, quando se propõe a ensinar algo, deve explicar detalhadamente para os alunos, não se pode imaginar que o aluno aprenda aquilo que está implícito, portanto é importante o discurso justificativo da técnica de uma tarefa, o bloco tecnológico- teórico deve ser explicito para os alunos. Finalmente, os estudantes concordam sobre a importância de detalhar as técnicas fornecendo as justificativas teóricas adequadas, no caso da tarefa, as relações de proporção entre os lados dos triângulos identificados na figura.

A pesquisadora explica a importância de explorar as tarefas, antes mesmo de propô-las em classe para os alunos, para evidenciar suas potencialidades no processo de aprendizagem de determinado conteúdo e/ou técnica de resolução de problemas.

Na sequência, a pesquisadora apresenta a técnica mais viável, dita mais econômica, no sentido da TAD, para resolução da primeira parte da tarefa

(encontrar as relações i, o, p e p' e $p, p' e\ f$), discute com os estudantes a importância do processo exploratório da técnica, antes de propor aos alunos “o passo a passo”. Em seguida, a pesquisadora retoma o debate com o coletivo acerca do processo da técnica para se deduzir a equação de Gauss, os artifícios matemáticos, conforme descrito *a priori* no capítulo 5.

Os estudantes não chegaram a deduzir exatamente a equação de Gauss, no âmbito da física, embora tenham desenvolvido até as equações (I) e (II). Argumentaram que não havia sido solicitado tal equação na tarefa e que por esta razão, eles não desenvolveram a técnica até encontrá-la. A pesquisadora argumenta que o processo de estudo e pesquisa no grupo, levaria a este resultado, algo que não se efetivou. Como observado no trabalho dos grupos, eles não aprofundaram a pesquisa, focalizaram-se na resolução das tarefas em seus próprios conhecimentos que não dariam para resolver a tarefa.

Tendo em conta esse fato, a pesquisadora ressaltou a importância da pesquisa no processo de estudo, como estratégia fundamental do “ateliê”. Além disso, a fase adidática visava que os estudantes descobrissem tal equação muito utilizada na física.

A atividade matemática (deduzir a equação de Gauss, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'}}$) é novamente desenvolvida com o coletivo, mostrando cada etapa da técnica para encontrar a equação de Gauss, como descrito *a priori*, agora com a participação direta do coletivo que foi contribuindo na construção da técnica.

A professora pesquisadora finaliza a primeira parta de atividade justificando a importância da geometria analítica no plano como teoria fundamentadora de todo referencial de Gauss, que organiza o estudo da física das lentes esféricas e dos espelhos esféricos, apoiado nas relações geométrica no plano cartesiano, como por exemplo a semelhança de triângulos.

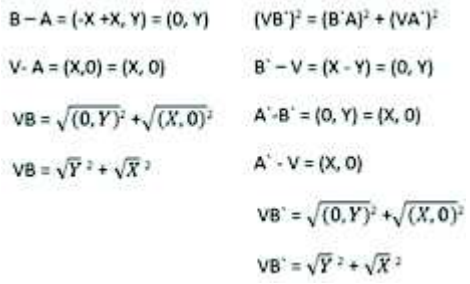
Os grupos se reúnem novamente para a finalização e a discussão da segunda parte da atividade, a tarefa: *Determinar o comprimento do segmento VB e V’B’ e justifique o porquê, argumente e prove, que sua construção está correta*.

Após o debate em cada grupo, acontece o momento de partilha para conclusão da tarefa, os grupos interagiram entre si na discussão, apresentando as justificativas a respeito de como construiriam suas respostas.

O **Grupo A** discute o valor de cada segmento envolvido na figura fornecida na tarefa (Figura 93), aplicando assim o conceito de distância (linear)

em uma dimensão e a distância em duas dimensões, ou seja, no plano, considerando as coordenadas dos pontos.

Figura 93 - Cópia de tela grupo A distância VB e VB'



Fonte: dados da pesquisa

Apesar das representações realizadas na produção escrita pelo grupo divergirem da construção *a priori* (descrita no capítulo 5), esta produção em conjunto com os áudios, evidencia que o grupo identificou geometricamente o teorema de Pitágoras como fundamento tecnológico, definindo nas relações entre os lados do triângulo retângulo da figura fornecida. Entretanto, no desenvolvimento da *técnica*, o grupo A não conseguiu determinar algebricamente a distância entre dois pontos do plano cartesiano. Conforme a figura 93, percebe-se que identificaram as coordenadas das extremidades de cada segmento, sem efetuar as devidas operações.

O **Grupo B** não postou a atividade escrita no moodle, mas os áudios do trabalho do grupo revelaram que ele realizou a tarefa, inclusive na interação no momento de partilha. Começaram explicando as relações geométricas identificada na figura da atividade, expuseram[50] oralmente.

> *F_1:- Quando nós olhamos para figura, observamos o que a gente tinha... aquele seguimento correspondia a hipotenusa de um triângulo-retângulo...por que eu vi que era um triângulo-retângulo? Porque eu determinei que tinha um ângulo reto[...]*
> *-É diagonal dele. Então eu fiz um triângulo... triângulo-retângulo. Aí prontamente nós aplicamos Pitágoras*
> *P: Aplicaram Pitágoras aonde? Escreve aí pra eu ver.*
> *F1: Nós colocamos que BV... BV. O seguimento BV que correspondia à hipotenusa, nós sabíamos que o quadrado da hipotenusa era igual à soma dos quadrados dos catetos. E quem eram os catetos? Os catetos era o seguimento AB.*

Este diálogo mostra um dos membros do grupo descrevendo como construíram a atividade. A professora pesquisadora, a medida que a estudante explica, vai questionando a cerca dessa construção, assim, foi se desenvolvendo o momento de socialização e partilha.

[50] Denotamos por F, fala feminina, por P afala da Professora pesquisadora e H, fala masculina.

O **grupo C** justificou, na produção escrita, as relações geométricas observadas, mas efetivamente não realizou a prova solicitada, como pode ser observado no relato a seguir.

> *Como temos um triângulo retângulo VAB, podemos usar o Teorema de Pitágoras onde a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado ($a^2 + b^2 = c^2$). Logo, o lado VB é a hipotenusa do triângulo. Temos que as coordenadas dos vértices são: A= (x_o, y_o), B= (x_o, y_1) e V= (0,0). (GRUPO C)*

Apesar de afirmar ter usado o teorema de Pitágoras, o grupo não aplicou esse teorema no triângulo descrito na figura, mesmo tendo identificado adequadamente as coordenadas dos pontos que delimitam os segmentos envolvidos, não identificaram a relação algébrica de distância dos segmentos delimitados por dois pontos, lados do referido triângulo. O grupo também não organizou a *tecnologia*, justificativa da técnica, pois não estruturou a prova solicita. Apresentou, portanto, a *tecnologia* que fundamentaria a técnica. Aparentemente esse grupo tem a mesma dificuldade apresentada pelo grupo A, com relação ao uso da fórmula que permite calcular a distância de dois pontos do plano cartesiano.

Diante do observável, ponderamos a necessidade de um momento de *institucionalização*, mas não desejávamos apresentar a construção *a priori* simplesmente. Nesse sentido, buscamos no momento de partilha fazer uma discussão oral acerca da resolução *da tarefa*, indagando os sujeitos sobre a técnica e o discurso tecnológico-teórico, durante o processo do cumprimento da tarefa. A professora pesquisadora também institucionalizou a construção descrita a priori (no capítulo 5), evidenciando os detalhes da técnica, não abordados pelos grupos, questionou os estudantes a cada etapa da *técnica*, verificando a coerência de suas respostas e validando-as. Desta forma, a institucionalização se caracteriza como um momento de partilha de conhecimento, tendo o selo institucional do professor (pesquisador).

A noção de segmento de reta, distância entre dois pontos, módulo, foram discutidas na fase de institucionalização e interação com o coletivo. A substituição dos valores identificados no triângulo, apoiando-se no teorema de Pitágoras, foi realizada “passo a passo” com os estudantes, que contribuíram durante toda a construção, identificando as alterações “institucionalizadas” frente a técnicas por eles realizadas, reconstruindo junto coma professora pesquisadora.

O coletivo finaliza o trabalho do dia com a postagem das atividades no moodle, a continuação da partilha e socialização da segunda parte da tarefa fica

para o encontro seguinte. Salientamos que o material postado no moodle representa a versão das tarefas realizadas antes do momento da partilha e institucionalização, após isso os estudantes ajustaram as técnicas com as respectivas justificativas teóricas, discutidas no coletivo e institucionalizadas pela professora pesquisadora.

6.7 Episódio sete: descrição e análise a posteriori

Neste episódio, o objetivo foi trabalhar com o alinhamento de três pontos no plano cartesiano. Antes, porém, foi necessário retomar o encontro anterior para finalização daquela etapa de estudo.

A professora pesquisadora propõe que os grupos façam uma discussão das questões:$Q_3^{DM\,(C)}$: o que devo ensinar a partir da localização de um ponto? $Q_{31}^{DM\,(C)}$: quais são coordenadas de um ponto? De dois pontos? Etc. $Q_{32}^{DM\,(C)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos do plano cartesiano. Os grupos se reúnem parar discutir as questões levantadas.

No **Grupo B**, a discussão inicial sobre a questão $Q_3^{DM\,(C)}$ se constituiu em torno do sistema de coordenadas, da notação positiva e negativa de cada eixo (X e Y). O grupo afirma que deve ensinar o que é um ponto, onde ele está localizado (quadrante), suas coordenadas. Além disso, o grupo explica qual a técnica para localizar um ponto do plano e levantou o questionamento sobre como calcular a distância de dois pontos do espaço (R^3), e se a mesma técnica poderia ser empregada?

> *H_2:- Com duas coordenadas...ficou uma interrogação. Porque a gente ficou de representar duas coordenadas, é... o... o teorema de... Pitágoras. Mas se fosse com três coordenadas, será que tinha como tirar essa relação? Porque se a gente for generalizar a distância entre os dois pontos vai dar para a gente fazer...*
> *P: -Se fosse três coordenadas o quê?*
> *H_2: - Isso, se fosse três coordenadas, será que teria como a gente fazer essa alusão com o teorema de Pitágoras? Ou seria outra que envolvesse? Não sei. Porque a fórmula seria a primeira coordenada correspondente à raiz da primeira coordenada ao quadrado, depois a segunda coordenada, a terceira. Independente do caso da dimensão daquele espaço.*
> *P: -Que tal pesquisar um pouco mais sobre isso? (Áudio, Grupo B)*

O grupo passa a discutir a segunda questão $Q_{31}^{DM\,(C)}$: quais são as coordenadas de um ponto? De dois pontos? No debate, o grupo chegou à conclusão de que, para cada ponto do plano cartesiana, só existe um único par de coordenadas que o representa. Sobre a terceira questão, $Q_{32}^{DM\,(C)}$: como ensinar a determinar a distância entre dois pontos do plano cartesiano? Para

responder a esta questão, o grupo discutiu acerca do conceito de distância na reta e no plano com base no trabalho anterior com o coletivo, conforme mostra parte do extrato do áudio do trabalho do grupo.

> *H1:- Então, como ensinar determinar a distância entre dois pontos? Se eu tenho dois pontos.*
> *F1:- Sim.*
> *H1:- O que é que eu vou pegar entre esses dois pontos? Vou pegar as coordenadas desse primeiro ponto e as coordenadas do segundo ponto. Tipo assim, como seria uma distância. Vou botar um ponto aqui e um ponto aqui, aí eu quero saber quem é essa distância daqui pra aqui. Certo?*
> *F1: - Certo.*
> *H1: Como é que eu ia fazer isso? Pegar primeiro a... é... pegar a distância, as primeiras coordenadas.*
> *F1: -A última menos a primeira.*
> *H1: -Isso.*
> *F1: - É.*
> *H1:- A subtração do par mais a subtração desse par aqui, tudo elevado ao quadrado. Aí eu ia achar a distância entre esses dois pontos.*
> *H1: - Hein?*
> *H2: -O que é ...*
> *H1: -É a definição de distância, gente, que é o módulo. (Áudio do Grupo B)*

Os estudantes discutiram a respeito da técnica para representar um ponto por meio das coordenadas e da fórmula para calcular a distância entre dois pontos. Na fase de debate coletivo, não houve registro escrito a ser analisado. Este momento, basicamente, foi de fechamento do trabalho da organização matemática do estudo do ponto, não foi solicitado registro escrito da produção dos sujeitos, como previsto *a priori*, tendo em vista que o tempo previsto não foi suficiente para a produção escrita, assim foi acertado com os estudantes apenas a discussão e reflexões no grupo.

Finalizando o estudo do sistema óptico, demos continuidade ao percurso, tendo em conta as questões norteadoras cujas respostas visaram contribuir na construção da resposta à questão geratriz do estudo. Nesta parte do estudo, retomamos as questões geradas *a priori*: $Q_{33}^{DM\,(D)}$: como ensinar o que são pontos alinhados?$Q_{34}^{DM\,(D)}$: o que é o lugar geométrico de pontos alinhados?

A partir das questões de estudo, a pesquisadora propôs a atividade prevista *a priori* para os grupos:

> *P: - A partir das questões norteadoras, elabore com o seu grupo uma proposta de ensino para alinhamento de três pontos. (a proposta deve incluir, atividades, avaliação, organização do ambiente didático de trabalho) (Áudio da Pesquisadora)*

Os estudantes reuniram-se nos grupos e começaram a discutir a construção da atividade. Após momento presencial de debate dos grupos, ficou acordado com os grupos que esta parte da produção seria desenvolvida por eles em momento externo ao ateliê e deveriam postar no moodle o produto. Esta

escolha deu-se por duas razões: a primeira foi que o tempo panejado para desenvolver não foi suficiente para a realizar a tarefa. A segunda razão foi a opção de usar moodle para o deposito dos trabalhos dos grupos e verificar como os estudantes iriam mobilizar os saberes necessários para organizar um trabalho didático, sem a vigilância epistemológica da professora pesquisadora. Por esta escolha, desejávamos avaliar se o dispositivo montado poderia contribuir no equipamento praxeológico docente dos professores-estagiários.

Apesar dessas escolhas, ao longo das sessões subsequentes em alguns momentos, os estudantes trouxeram algumas questões que foram abordadas com o coletivo, acerca da construção da proposta. Além disso, a organização matemática, em torno do alinhamento de três pontos, foi desenvolvida em um momento de estudo posterior, o qual, como será visto na sequência do texto, contribuiu para a formação matemática e didática em torno desse conceito.

A partir do trabalho realizado pelo grupo, analisamos as produções escritas postadas no AVA. **Grupo A** montou o trabalho com o título “proposta de atividades” uma estrutura de atividade, conforme a cópia de tela da produção descrita na figura 94.

Figura 94 - Cópia tela primeira parte plano de aula Grupo A

PROPOSTA DE ATIVIDADE
Dados de Identificação
Professores: xxxxxxxxxxxxxxxxxxx **Série:** 3° da série do Ensino Médio **Disciplina:** Geometria Analítica **Carga Horária:** 2 Aulas – 50 minutos **Objetivos** • Introduzir o conceito de alinhamento de três pontos, lugar geométrico; • Conhecer o software matemático winmat como meio tecnológico de conhecimento; • Aplicar o software winmat para resolver problemas de alinhamentos de três pontos.
Conteúdos • Pontos e retas • Matrizes e Determinantes
Tema: Alinhamento de Três Pontos
Áreas Relacionadas
• Matemática • Geometria Analítica
Desenvolvimento

Fonte: Dados da pesquisa

A produção escrita do grupo revelou que os estudantes mobilizaram os conhecimentos pedagógicos necessários para o planejamento de uma aula, em termos de uma organização pedagógica e didática, os quais compõem os

elementos essenciais desse planejamento: os objetivos de ensino, o tema, os conteúdos que seriam trabalhados para esse tema, a carga horária de aula e o ciclo de ensino (3ºano do ensino médio). Além disso, associam a GA como sendo da área de matemática.

De acordo com essa construção, os estudantes revelam ter mobilizado os conhecimentos a respeito do currículo do ensino médio trabalhado por eles nas duas primeiras sessões de estudo; mobilizaram também os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento do ensino da temática escolhida. Um outro aspecto da proposta desse grupo é a incorporação do uso do software na proposta de ensino, como ferramenta para resolução de tarefas sobre alinhamento.

A segunda parte da proposta visa apresentar as estratégias de ensino e o desenvolvimento da aula propriamente dita, conforme cópia de tela da produção textual do grupo, segundo representado na figura 95. Com relação aos recursos que iriam utilizar, o grupo relaciona os seguintes: “computadores ou celulares, lousa, pincel, apagador e slide”. Indicaram como referências a consulta a internet, este grupo não utilizou o livro didático como fonte de pesquisa, também não indicou a intenção de utilizá-lo numa suposta publicação da proposta.

Figura 95 - Cópia de tela segunda parte plano de aula

Desenvolvimento
1º Momento: Iniciaremos a aula interagindo com a classe de forma dinâmica, a respeito dos conteúdos básicos envolvendo a geometria analítica. Dentre esses conteúdos, a definição de ponto e retas, coordenadas, matrizes e determinantes. **2º Momento**: Em seguida abordaremos o conceito de alinhamentos de três pontos que é O alinhamento de três pontos pode ser determinado aplicando o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3x3. Ao calcular o determinante da matriz construída utilizando as coordenadas dos pontos em questão e encontrando valor igual a zero, podemos afirmar que existe colinearidade dos três pontos e tem que possuir coordenadas A, B e C. Além disso, Através dessas coordenadas iremos montar a matriz 3x3, as abscissas dos pontos constituirão a 1ª coluna, as ordenadas, a 2ª coluna e a terceira coluna será complementada com o número um. **3º Momento**: Aplicação de duas questões a respeito do conteúdo. O que é alinhamento de pontos? O que é lugar geométrico? Onde se encontram os pontos alinhados? Espera-se que essas duas questões possam ajudar os estudantes a compreenderem melhor o conteúdo. E também, com o auxílio do software matemático winmat para aprimorar melhor o conhecimento dos alunos a respeito do conteúdo. **4º Momento**: Apresentação do software matemático winmat abordando a sua definição, objetivos, como utilizar. Desenvolvendo passo a passo para que os alunos possam adquirir todo conhecimento preciso a respeito das funções do software matemático. **5º Momento**: E por fim, aplicação de atividades com o auxílio do software.

Fonte: dados da pesquisa

O desenvolvimento da proposta descrita pelos estudantes corresponde à sequência das ações que seriam desenvolvidas por eles, na posição de

professores. O primeiro e segundo momentos têm uma característica de organização didática, trazendo elementos de uma possível organização matemática.

Particularmente, o terceiro momento indica que pode ter havido uma apropriação de elementos da metodologia desenvolvida no dispositivo (PEP-FP/TAD) da pesquisa, que tem a base no paradigma de questionamento do mundo, segundo TAD.

O grupo afirma que os questionamentos poderiam levar os alunos a compreenderem melhor o conteúdo. O que parece, de fato, que o grupo está afirmando que a utilização dos questionamentos na abordagem poderia "ajudar os alunos a compreender melhor o conteúdo". Sinaliza, também, que o uso do software é uma forma de "aprimorar melhor o conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo" (Grupo A). Esta afirmação indica que os estudantes têm a crença de que o uso do software influencia positivamente o processo de aprendizagem.

O grupo também previu um momento para orientar seus alunos quanto à manipulação da interface do *software winmat*, no entanto, afirmam que desenvolveriam o passo para que possibilitasse os alunos adquirir os conhecimentos necessário para o uso das funções do software.

Nesta última observação, não está claro se pretendiam explorar todas as funcionalidades do software ou se apenas aquelas suficientes para o desenvolvimento das tarefas de alinhamento de três pontos. Também, não está claramente evidenciado como o simples processo de perguntas, durante a explanação, pode possibilitar maior aprendizagem. Neste último caso, o que supomos é que os estudantes estão repetindo uma prática inerente ao desenvolvimento do dispositivo da pesquisa.

Na sequência do documento, é apresentado um resumo do que seria cada aula (figura 96). A primeira para as questões, a segunda, a apresentação do software e a terceira, para a resolução da atividade. Na construção do grupo somente três aulas aparecem. Supomos que seriam cinco a partir do desenvolvimento apresentado. É possível que o grupo achou desnecessário detalhar novamente.

Com relação à tarefa que aparece como atividade de avaliação, nada foi proposto como tarefa a cumprir para esse fim. Sobre a organização didática anunciada na proposta do grupo, ela não foi explorada de forma detalhada, nem

tão pouco estabeleceu-se as relações sobre a constituição da organização matemática sobre alinhamento de três pontos.

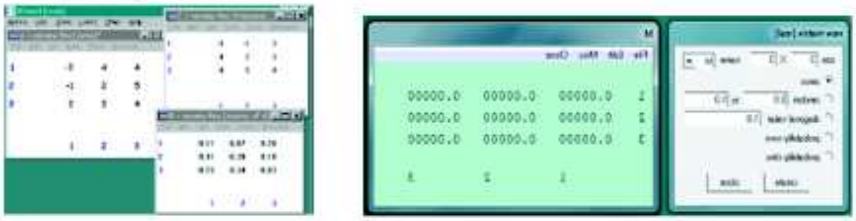
Figura 96 - Cópia de tela da parte 3 da produção do Grupo A

Questões Norteadoras

Sessão 1: Responder as questões propostas

1) O que é alinhamento de pontos?
2) O que é lugar geométrico? Onde se encontram os pontos alinhados?

Sessão 2: Apresentação do Software Winmat



Sessão 3: Avaliação

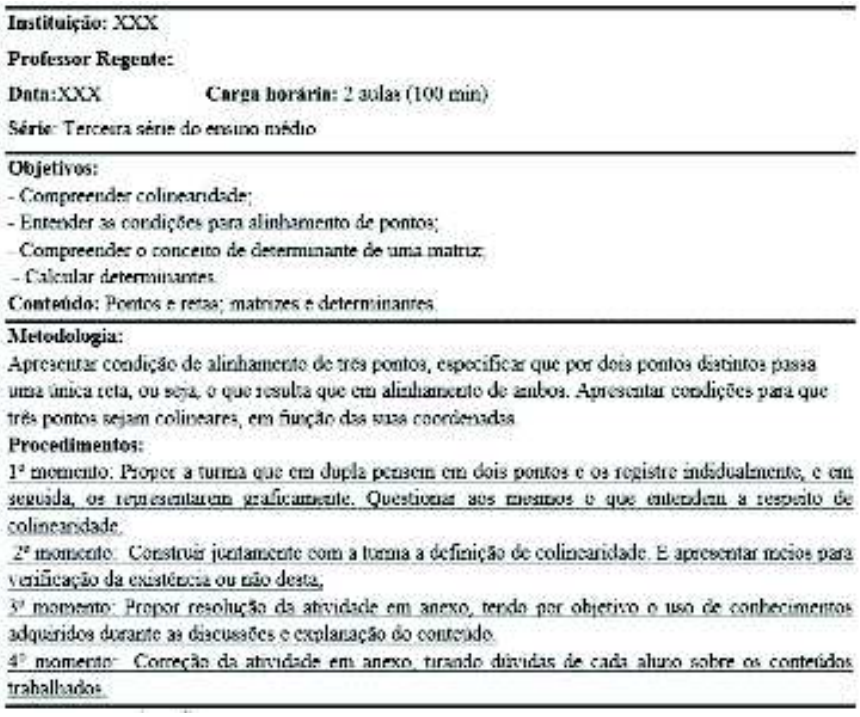
1) Utilizando o winmat responda as seguintes questões:
   a) Considerando os pontos A (2, 2), B (–3, –1) e C (–3, 1), verifique se eles estão alinhados.
   b) Verifique se os pontos A (0, 4), B (–6, 2) e C (8, 10) estão alinhados.
   c) Determine o valor de y de maneira que os pontos P (1, 3), Q (3, 4) e R (y, 2) sejam os vértices de um triângulo qualquer.
   d) Determine o valor de ***m*** para que os pontos A (2m+1, 2), B (–6, –5) e C (0, 1) sejam colineares.

Fonte: Dados da pesquisa

O **Grupo B**, na sua produção escrita (Figura 97), definiu os objetivos com relação ao estudo da colinearidade, propõe um momento de construção de pontos e de discussão com alunos a respeito definição de colinearidade de pontos. O grupo escreveu:

> *Construir juntamente com a turma a definição de colinearidade. E apresentar meios para verificação da existência ou não desta; propor resolução da atividade em anexo, tendo por objetivo o uso de conhecimentos adquiridos durante as discussões e explanação do conteúdo. (GRUPO B)*

Figura 97 - Cópia de tela da produção do grupo B



Instituição: XXX

Professor Regente:

Data:XXX **Carga horária:** 2 aulas (100 min)

Série: Terceira série do ensino médio

Objetivos:
- Compreender colinearidade;
- Entender as condições para alinhamento de pontos;
- Compreender o conceito de determinante de uma matriz;
- Calcular determinantes.

Conteúdo: Pontos e retas; matrizes e determinantes.

Metodologia:
Apresentar condição de alinhamento de três pontos, especificar que por dois pontos distintos passa uma única reta, ou seja, o que resulta que em alinhamento de ambos. Apresentar condições para que três pontos sejam colineares, em função das suas coordenadas

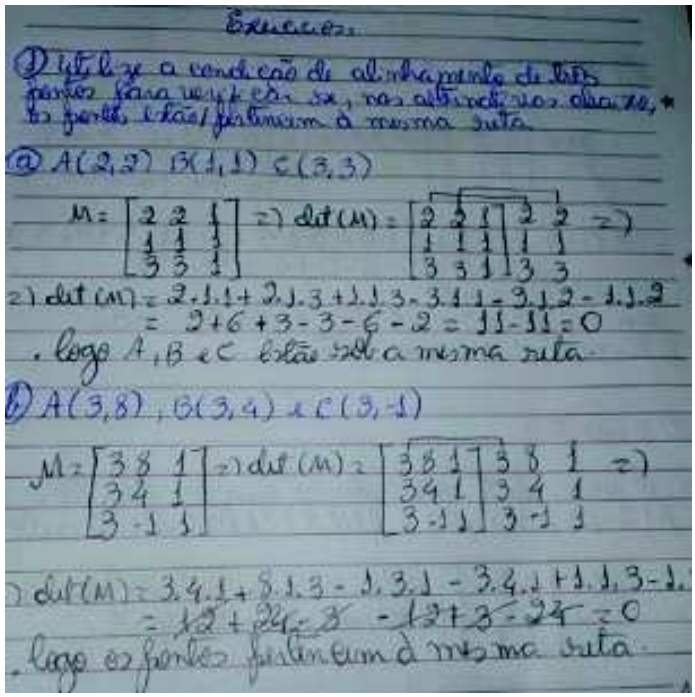
Procedimentos:
1º momento: Propor a turma que em dupla pensem em dois pontos e os registre individualmente, e em seguida, os representarem graficamente. Questionar aos mesmos o que entendem a respeito de colinearidade.
2º momento: Construir juntamente com a turma a definição de colinearidade. E apresentar meios para verificação da existência ou não desta.
3º momento: Propor resolução da atividade em anexo, tendo por objetivo o uso de conhecimentos adquiridos durante as discussões e explanação do conteúdo.
4º momento: Correção da atividade em anexo, tirando dúvidas de cada aluno sobre os conteúdos trabalhados.

Fonte: dados da pesquisa

Não se percebe com muita clareza as estratégias de ensino, na parte identificada como metodologia. Entretanto, diferentemente dos demais grupos, apresentou por meio de foto uma proposta de atividades que seriam desenvolvidas como seus alunos, com a resolução de cada tarefa proposta, exibindo assim uma organização matemática em torno do alinhamento de três pontos (Figura 98).

Ao analisar o tipo de tarefa proposta, identificamos o mesmo tipo de tarefa desenvolvida nos livros didáticos. Identificamos $T_B 7(1)$: como tarefa do tipo1, do grupo B, sessão 7. A primeira tarefa foi $t_{B1}7(1)$: determinar se três pontos $A(2{,}2), B(1{,}1)$e $C(3{,}3)$ estão alinhados, dadas as coordenadas dos pontos A, B, C no plano cartesiano. O discurso tecnológico-teórico se apoio na resolução do determinante, enquanto técnica e na condição de alinhamento de três pontos, justificada pela regra de Sarrus, para resolução do determinante 3X3.

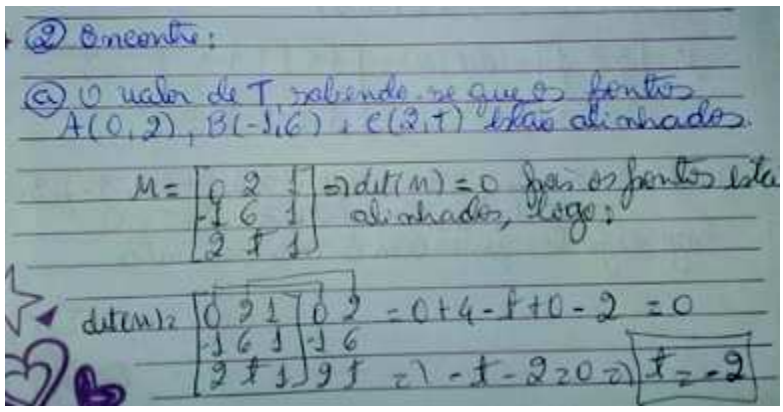
Figura 98 - Proposta de atividade grupo B. parte I



Fonte: dados da pesquisa

Na segunda parte da atividade (Figura 99), o grupo B propus a seguinte tarefa: $t_{B2}7(1)$: determinar uma das coordenadas de um dos pontos $A(0,2), B(-1,6)$ e $C(2,t)$. Do ponto de vista da técnica, o desenvolvimento é o mesmo, apenas acrescenta-se a procura do valor de t, pela resolução da equação obtida com o determinante. Portanto, a tarefa $B2$ é do mesmo tipo que $B1$.

Figura 99 - Atividade parte 2, grupo B



Fonte: dados da pesquisa

O grupo C apresentou uma proposta de plano de aula resumida em relação aos dois grupos anteriores. Diante do trabalho realizado nos momentos de estudo e didáticos, avaliamos que o grupo não avançou nesta produção. Observamos vestígios de uma organização didática, não encontramos nenhuma proposta de atividades relacionadas com a organização matemática em torno de

alinhamento de dois pontos. A proposta não apresenta detalhes do que será feito, ficando evidente apenas a exposição, não apresentando exatamente o que deveria ser desenvolvido enquanto organização matemática e organização didática.

Neste episódio de estudo, o momento de partilha não aconteceu, como os anteriores, pois os estudantes deveriam se reunir, posteriormente em outro momento sem o acompanhamento da professora pesquisadora para discutir um pouco mais, além da sessão de trabalho desenvolvida no episódio seis. Ressaltamos, também, que houve interações coma professora pesquisadora e com o coletivo. Nesse sentido, foi dado um tempo ao grupo para amadurecer como organizar a tarefa, antes de postar no moodle sua produção.

A sessão seguinte, vai explorar o estudo do alinhamento de três pontos visando retomar os aspectos da organização matemática, não evidenciadas pelos sujeitos na proposta de organização didática e plano de aula da sessão sete.

6.8 Episódio oito: descrição e análise a posteriori

Este episódio corresponde ao episódio cinco, descrito *a priori* no item 5.3.5 (capítulo 5), cujas questões norteadoras são : $Q_{4,1}^{DM\,(E)}$: o que é o lugar geométrico reta no plano? e $Q_{4,2}^{DM\,(E)}$: qual(ais) a(s) relação (ões) matemática(s) envolvem uma reta no plano?

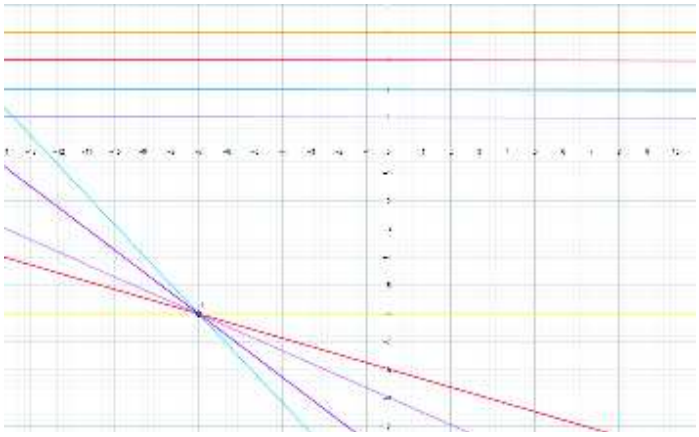
As questões engendraram duas atividades que visavam iniciar o estudo sobre reta, a partir das construções desenvolvidas na interface do Geogebra, apoiadas nas etapas anteriores do estudo. Neste episódio, alguns arquivos de áudio do trabalho de cada grupo foram corrompidos e não foi possível acessá-los. Diante disso, as observações registradas pela professora pesquisadora e as produções escritas de cada grupo foram os únicos dados que levamos em consideração neste episódio. O mesmo também aconteceu no episódio 9, que será descrito na próxima seção.

No primeiro momento, os estudantes se reuniram em torno da primeira tarefa, que foi a primeira atividade proposta com o uso da interface digital. Organizaram-se em pequenos grupos de três para poder trabalhar com um computador para cada grupo.

Selecionamos para descrever as atividades três dos cinco grupos (duplas) que participaram da pesquisa, ressaltando os aspectos das tarefas que julgamos significativos para os objetivos da sessão de trabalho.

O Grupo A construiu a primeira parte da tarefa conforme previsto, desenhou várias retas, explorando a interface. Na sequência, os integrantes do grupo responderam as questões propostas. Com relação às questões demandadas (quais entes geométricos podem ser associados os raios luminosos? e se prolongarmos esses raios indefinidamente em um plano? o que acontece? simule outras situações), os estudantes produziram a seguinte representação na interface (Figura 100).

Figura 100 - Cópia de tela da produção do grupo A



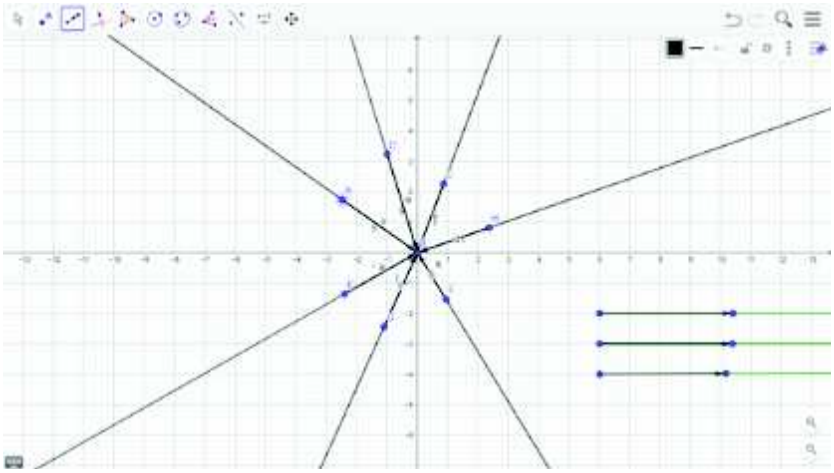
Fonte: dados da pesquisa

Na produção escrita, identificamos as seguintes respostas dadas pelos alunos: (*A) pontos, retas, semirretas, segmentos de retas. (B). Uma reta vai para o infinito mantendo a orientação, sentido e direção.* Nos áudios do trabalho do grupo, identifica-se, também, objetos matemáticos, como, retas paralelas, retas concorrentes, segmentos orientados, a noção de módulo e vetor.

O **grupo B** reproduziu, na figura 101, a representação no plano, como sendo a representação geométrica de raios de luz, e associou os raios às retas infinitas, como pode ser observado na seguinte transcrição:

> *Linhas orientadas que representam direção e sentido. Feixe divergente: os raios de luz se afastam um dos outros ao longo da trajetória. Exemplo: um feixe de luz que atravessa uma lente divergente (lente que afasta os raios de luz). Feixe convergente: os raios de luz se aproximam um dos outros ao longo da trajetória. (Grupo B)*

Figura 101 - Cópia de tela da produção do grupo B

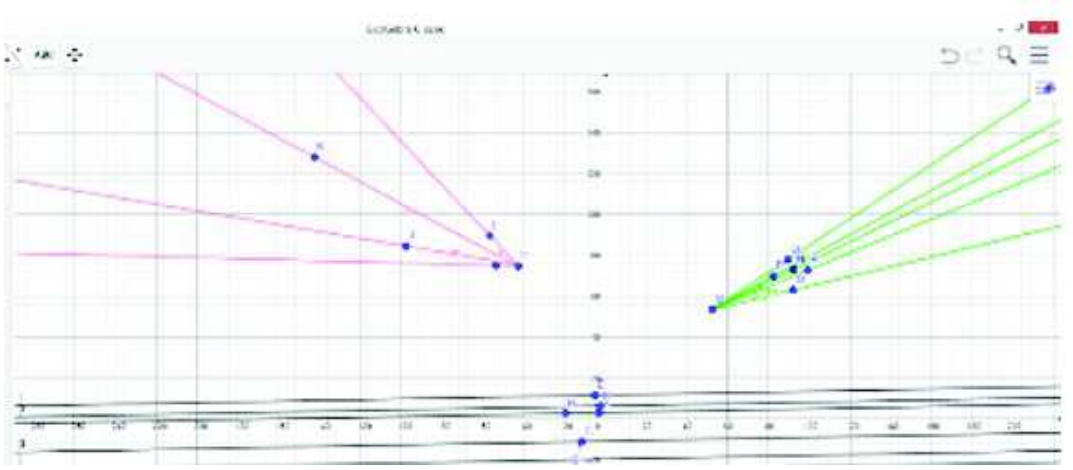


Fonte: dados da pesquisa

O **Grupo C** produziu construções no Geogebra (Figura 102) semelhantes aos demais grupos e fez o registro escrito na própria interface, transcrita a seguir.

> *Para a representação geométrica dos raios luminosos, podemos utilizar retas paralelas para mostrar quando o ponto P está no infinito, sendo estas em qualquer direção. Para representar a situação onde os raios se encontram em determinado ponto, podemos utilizar semirretas orientadas pois possuem direção e sentido, que também associamos a vetores. Além disso, como por um ponto passam infinitos retas, podemos chamar de retas que se encontram no ponto dado. (Grupo C)*

Figura 102- Cópia de tela da produção do grupo C



Fonte: dados da pesquisa

A resposta do Grupo foi a resposta mais completa apurada nos dados coletados da produção escrita.

Globalmente, as respostas dos grupos revelaram que os estudantes incorporaram alguns aspectos do conhecimento do software, associando-os às noções e conceitos geométricos: pontos, reta, segmento de reta e segmento de reta orientada, conforme previsto em nossa análise *a priori.*

O **Grupo D** realizou produções semelhantes aos demais, assim optamos por não trazer sua produção no corpo deste texto, para não repetitivo.

Analisando as produções dos alunos, inferimos que são alguns aspectos do *conhecimento tecnológico* do *conteúdo,* que foram mais mobilizados e ressignificados pelos sujeitos. As noções geométricas desenvolvidas por meio do software tiveram mais ênfase em razão do dinamismo do ambiente tecnológico, algo quase impossível em situação papel-lápis. Mas, a exploração desse dinamismo limitou-se apenas ao acesso da barra de ferramentas e identificar o tipo de comando que pode ser utilizado em função da tarefa de construção solicitada.

Tendo em vista a situação supracitada, a professora pesquisadora propôs, durante a fase de socialização, *a institucionalização dos entes geométricos importantes envolvidos na tarefa cujo cumprimento foi solicitado*. Na tarefa A, por exemplo, os estudantes foram questionados pela professora pesquisadora, como segue:

> *P: Sim, vamos lá. Então, a gente precisa entender duas coisas. A gente tem uma figura, queremos, a partir dessa figura, representar quais entes geométricos essa figura nos remete. Quais entes geométricos essa figura nos remete?*
> *H2: No caso da figura A?*
> *P: Figura A, em si, ela traz quais entes geométricos? Ela remete a alguns entes geométricos que vocês representaram no Geogebra. Quais foram esses entes?*
> *H2: Ela representa o ponto.*
> *H2: A reta.*
> *P: Reta.*
> *H2: É a semirreta.*
> *H2: Vetor.*
> *F3: Segmento de reta.*

Após as respostas dos alunos, a pesquisadora mediou e institucionalizou as noções a partir das respostas apresentadas pelos alunos.

Figura 103- - cópia de tela do grupo B, parte B tarefa

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ Temos assim:}$$

$XY_1+X_1Y_2+YX_2-XY_2-X_2Y1-X_1Y=0$¶

$X(Y_1-Y_2)+Y(X_2-X_1)+(X_1Y_2-Y_1X_2)=0$→Vamos chamar:

$a=Y_1-Y_2$; $b=X_2-X_1$; $c=X_1Y_2-Y_1X_2$ logo a equação da reta é dada por:

$aX+bY+c=0$

O coeficiente angular da reta pode ser determinado por: $m=tg\,\vartheta$¶

$m=\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{Y_2-Y_2}{X2-X1}$ ... então $Y_1-Y_2=m(X_2-X_1)$

Fonte: dados da pesquisa

Com relação à segunda atividade, todos os grupos associaram a situação-problema ao caso do alinhamento de três pontos. O grupo, por exemplo, do grupo B apresentou a produção representada pela figura 103.

No caso do grupo D, ilustramos sua pelo extrato da figura 104. Que permite observar que chegaram à equação geral da reta $ax + by + c = 0$, como realizado pelo grupo B.

Figura 104 - cópia de tela do grupo D, parte B tarefa

Podemos determinar a equação da reta que comporta os pontos alem de terminar as coordenadas dos pontos

Podemos provar que os pontos são colineares. isto é, estão na mesma direção e logo esses pontos então alinhados o que vamos provar abaixo

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 * y_2 * 1) + (x_3 * y_1 * 1) + (x_2 * y_3 * 1) - (x_2 * y_1 * 1) - (x_3 * y_2 * 1) - (x_1 * y_3 * 1))$$

B) Qual a equação da reta determinada pelos pontos $M1$, $M2$, sabendo que $P(x, y)$ é um ponto que percorre a reta? $M1$,

$$Y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} * X + \left(y_2 - \frac{(y_1 - y_2) * x_2}{x_1 - x_2}\right) \text{ em que}$$

$M_1=(x_1,y_1)$

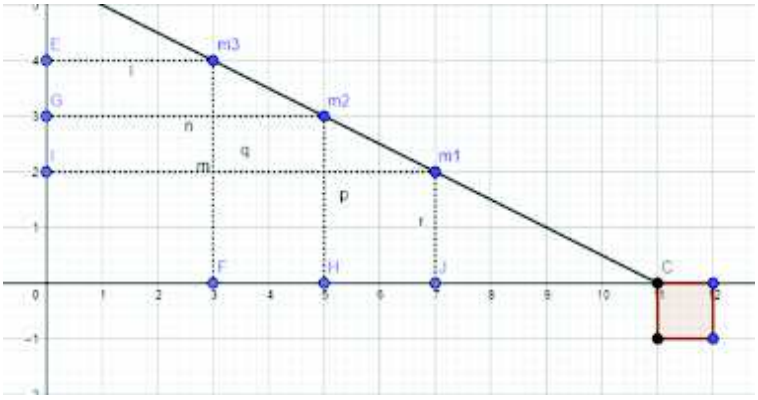
$M_2=(x_2,y_2)$

$M_3=(x_3,y_3)$

Fonte: dados da pesquisa

O grupo apoiou-se na figura 105, construída no Geogebra.

Figura 105 – Cópia de tela tarefa grupo D, parte B



Fonte: dados da pesquisa

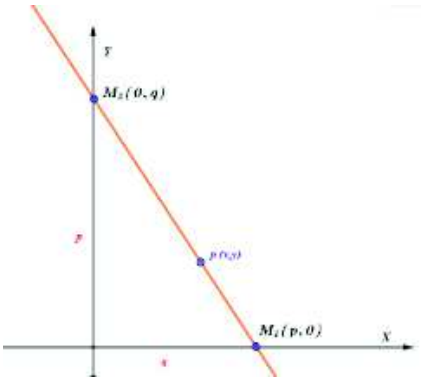
O **Grupo C** apresentou a condição de alinhamento entre três pontos pelo determinante, desenvolve o cálculo o determinante e iguala-o zero. Mas, não associa o resultado à elementos da equação da reta. Particularmente, este grupo apresentou a cópia da resolução do livro didático consultado. Mas, não explorou suficientemente a proposta do livro para chegar à equação da reta desejada.

Concluímos a tarefa com a partilha dos grupos e a pesquisadora institucionaliza o alinhamento de três pontos no plano, conforme a construção prevista *a priori*, e explicou os termos constantes e os termos variáveis. Destacamos que, na etapa de partilha, construímos no Geogebra, juntamente com os alunos, a figura solicitada. O ponto $P(x, y)$ foi construído de modo que pudesse ser movimentado na reta, permitindo assim que os estudantes percebessem a variação de suas coordenadas em função de sua posição. Inferimos que o objetivo da tarefa foi alcançado, restando à última parte, solicitando a equação geral da reta, que foi estudada na sessão seguinte.

6.9 Episódio nove: descrição e análise a posteriori

Na primeira parte desse episódio, retomamos a construção da figura (Figura 106) que envolve os pontos alinhados, e propomos a seguinte construção: o que acontece com a equação da reta se os pontos M_1 e M_2 forem pontos de intersecção entre a reta e os eixos X e Y respectivamente? Simule e represente geometricamente, utilizando o Geogebra e determine a equação resultante.

Figura 106 – Construção a priori (fig. 88) capítulo 5



Fonte: Elaborado pela autora

O objetivo foi aprimorar a mesma técnica de forma a chegar a uma equação do tipo $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (equação geral da reta) ou ainda $qx + py = pq$

Os grupos se reuniram para discutir as novas condições propostas para o problema. Destacamos os áudios do **Grupo A**, que discutiu as condições postas no problema, passo a passo, construindo a figura e o desenvolvimento da técnica conforme descrito *a priori,* somente, o grupo não realizou a simplificação final.

O **grupo B**, na produção escrita, revelou-se ter compreendido o problema, geometricamente, porém algebricamente não conseguiu determinar a equação

geral da reta como o grupo A. Os grupos C e D fizeram uma construção semelhante ao do grupo A.

A segunda parte desse episódio corresponde ao que descrevemos no episódio seis, seção 5.3.6 do capítulo 5, que se refere ao estudo do coeficiente angular da reta. As questões norteadoras do estudo foram: $Q_{4,3}^{DM\,(F)}$: qual a direção de uma reta no plano? E $Q_{4,4}^{DM\,(F)}$: Como ensinar a equação geral de uma reta dada?

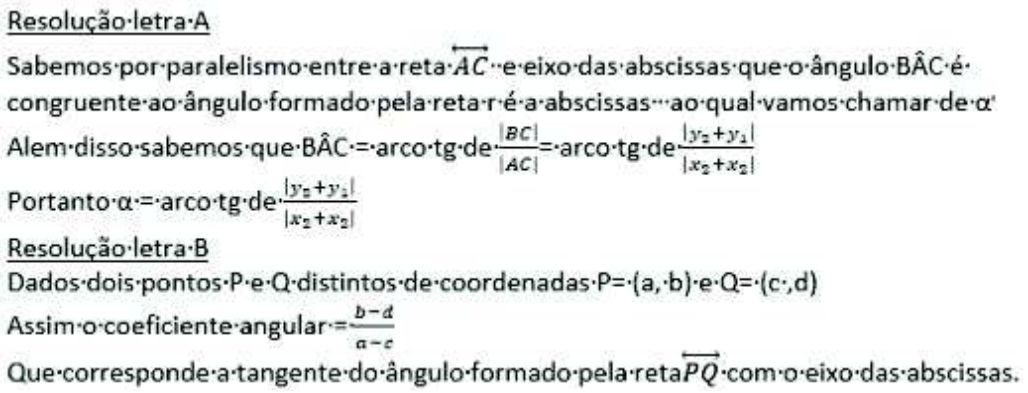
Os alunos tinham por metas resolver a seguinte atividade exploratória:

> *Seja uma reta **r** no plano cartesiano. Vamos pesquisar e estudar a inclinação de uma reta no plano, a partir da figura da figura dada, tendo por base as seguintes questões norteadoras do estudo: A) Qual ângulo é formado entre a reta e o eixo X das abscissas? O que é o coeficiente angular de uma reta? B) Qual equação da reta pode ser deduzida, tendo um ponto e o coeficiente angular? C) Em cada caso, identifique o bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas empreendidas. (Atividade seção 5.3.6)*

Os grupos se reuniram para discutir a proposta da atividade. A análise dos áudios, gravados no decorrer da resolução da atividade, revela que os estudantes, a partir da figura fornecida, deduziram as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

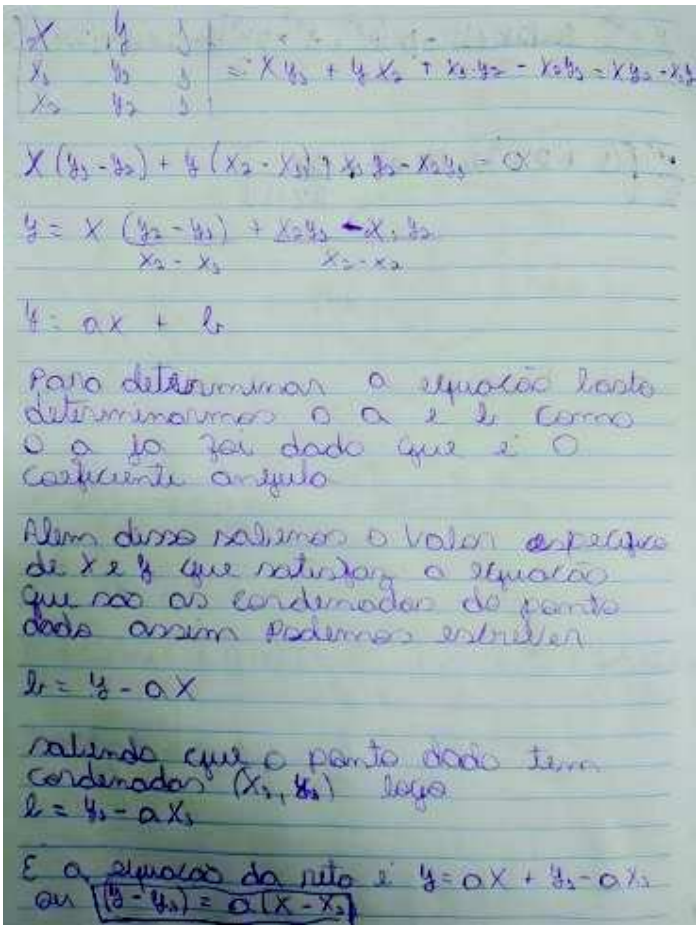
O **grupo A** apresentou como resolução que apresentamos na figura 107. Os integrantes desse grupo fizeram uma construção correta, mas, não identificaram a técnica e o discurso tecnológico-teórico, embora esses elementos estejam presentes na construção. Verifica-se um esforço do grupo em fazer as justificativas e escrever as etapas do processo de resolução da tarefa. Na resolução da tarefa, eles partem do fato de que as retas paralelas possuem a mesma direção.

Figura107 - Produção escrita, grupo A



Fonte: dados da pesquisa

Figura 108 - Produção escrita grupo A



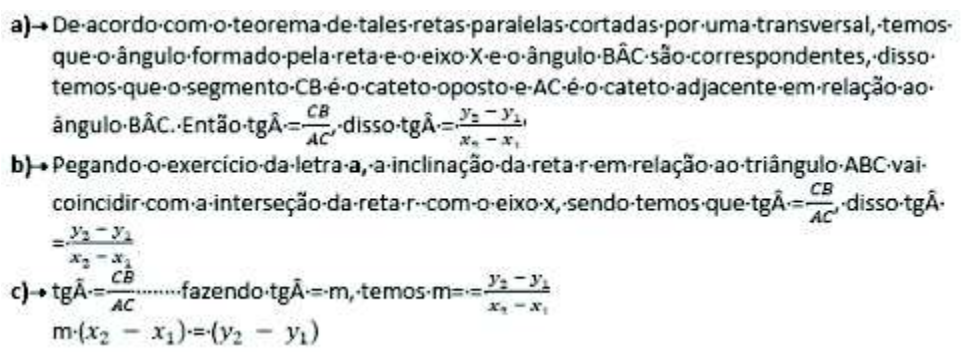
Fonte: dados da pesquisa

O Grupo A completou a construção com a produção apresentada na figura 108, para identificar a equação reduzida da reta e a equação que passa por um ponto dado da reta.

Os grupos B e **D** não apresentaram o processo de construção e suas devidas justificativas. Eles, apenas, escreveram as respostas solicitadas nas tarefas, não evidenciando o processo de construção, nem o discurso tecnológico-teórico para justificar a técnica.

O grupo C deduziu adequadamente, conforme pode ser observado na figura 109, de forma semelhante ao modelo previsto *a priori,* justificando o processo de construção. No entanto, apesar de os áudios terem revelado que que os integrantes do grupo verbalizaram o discurso tecnológico-teórico, eles não especificaram o que seria na produção na escrita, nem a técnica, o que ocorreu com todo os grupos.

Figura 109 – Produção escrita do Grupo C, parte 2 da tarefa



Fonte: dados da pesquisa

Um fenômeno que observamos a partir do trabalho dos grupos selecionados, é que no momento do debate, eles verbalizaram todas as construções, mas não articularam esse discurso com o tecnológico-teórico para justificar suas construções. A pesquisadora enfatizou a necessidade de fazer uma justificativa detalhada das técnicas, isto é, para que suas estratégias sejam levadas para sala de aula, é necessário que eles se apropriam das praxeologias matemáticas e didáticas em jogo no cumprimento das tarefas propostas. A transcrição a seguir apresenta o diálogo entre a professora pesquisadora (indicada por P) e os alunos em formação (indicados por F_1, F_2, ...)

> *P- É a mesma coisa como acontece com os nossos alunos. É esse cuidado que precisa ter, de explicar. Eu entendi o que vocês fizeram, vocês calcularam... a linha tangente do alfa...*
> *F1- Isso.*
> *P- Alfa é o ângulo do triângulo, ali é o cateto oposto, o cateto adjacente. Eu entendi....*
> *F2- E a gente sinalizou quem é o cateto oposto...*
> *P: E eu sei, também, que vocês sabem. Mas, na hora que a gente vai olhar para os nossos alunos, a gente quer que eles façam tudo bonitinho, bem explicadinho, detalhado, e eu estou tentando formar vocês a também se organizar assim...*
> *F2- É porque segue o que está disposto acima. Portanto, o cálculo do coeficiente angular de uma reta, ela pode ser feita pela razão da diferença entre dois pontos pertencentes a ela. Aí a gente foi e colocou: A tangente de alfa é igual a delta "X" sobre delta "Y".*
> *P - Quem é delta X e quem é delta Y? ((sobreposição de vozes))*
> *F2 - Delta Y sobre delta X, (foi na hora de digitar ..., que aí vai determinar o "coeficientizinho", que é o nosso... ((sobreposição de vozes)).*
> *P- Sabe qual é a questão de vocês? Vocês sabem direitinho. A questão de vocês só é organizar o pensamento no papel. E isso, gente, é importante. Porque, se vocês conseguem ... com isso, vocês também conseguem ter a percepção de fazer a leitura do que o aluno escreve. Quantas vezes a gente pega uma avaliação, o aluno teve o raciocínio correto O aluno teve o raciocínio correto, mas ele não sabe escrever ou ele não... não teve o cuidado de escrever aquele raciocínio. E a gente diz que o aluno fez errado, porque ele não consegue colocar o raciocínio no papel. Então a observação que eu faço da tarefa de vocês, eu sei que vocês entenderam, que vocês sabem o que estão fazendo, mas aqui no papel não aparece para a gente. (Dados da pesquisa. Áudio transcrito do grupo A)*

Nesta dinâmica, cada grupo foi apresentando suas construções e a discussão com os demais colegas e as intervenções pontuais da pesquisadora,

para chegar a uma resposta satisfatória para todos. Uma das dúvidas levantadas por uma aluna, foi sobre a diferença entre a tangente e o arco tangente. O debate gerado em torno dessa dúvida permitiu apresentar elementos tecnológico-teóricos que teriam sanda a referida dúvida.

Observamos que, após a ênfase dada pela pesquisadora á importância de detalhar as técnicas, os estudantes, de maneira geral, passaram a descrever mais detalhadamente os procedimentos e preocupar-se a explicar com mais clareza seus processos de resolução das tarefas, isto ficou evidente nos três grupos que apresentaram seus achados. Destacamos, como exemplo, o grupo A.

> *H1: Assim, podemos escrever "B" igual a "Y" menos "AX". No caso, como a gente já sabia quem é o "A", bastava achar só o "B", então a gente colocou o "B" em evidência ali, não é? Sabemos que o ponto dado tem coordenadas "X1" e "Y1", logo "B" vai ser igual a "Y1" menos "A", "X1". A equação da reta é "Y" igual a "X" mais "Y1" menos "AX". Ou "Y" menos "Y1" igual a...*
> *P: Na verdade, qual foi o caminho que ele fez? Ele pegou a equação reduzida e substituiu na equação reduzida as coordenadas dos pontos. Aí ele tem "Y" menos "Y1". Então, na verdade, aí teria que ser o "Y"... no caso, esse "Y1" poderia ser um "Y" zero. Se vocês forem no livro didático, é a mesma equação, o que muda é somente que eles utilizam "Y" ...e "Y" zero. Só denominando.*
> *H1: Foi. Quando a gente chegou à equação da reta, "Y" é igual a "X" mais o "B" ali que está um pouco (diferente) [00:01:05], que a gente vê, aí a gente lembrou da outra, que a gente utiliza geralmente quando... quando se sabe um ponto e o coeficiente angular. Se tem um ponto que essa reta passa e o coeficiente angular, que é a equação "Y" menos "Y1", que vai ser igual a "A" vezes o "X" menos "X1".*
> *P: Beleza, muito bem. Perguntas? O que é que os grupos acharam? da... (Dados da pesquisa.* (Áudio transcrito do grupo A)

Ao que parece, os professores estagiários começam a articular o conhecimento matemático com o conhecimento didático.

A partir desses dados, inferimos que temos duas instâncias do conhecimento didático em desenvolvimento: o conhecimento da praxeologia (TAD) das tarefas e o saber fazer, que vão se incorporando ao equipamento praxeológico desses sujeitos envolvidos o processo de estudo. Mas, não podemos afirmar que houve uma certa homogeneidade nessas “aquisições”, pois os dados analisados revelam que nossos sujeitos, participantes da pesquisa, encarraram as tarefas propostas de forma diferente, de acordo com seus equipamentos praxeológicos.

Ressaltamos que à segunda instância que definimos, como parte do conhecimento didático mobilizado nas atividades, pode ser caracterizada como a habilidade do professor de explicar um conteúdo matemático, se fazer entender por seus alunos. Sobre essa habilidade, o trabalho desta sessão sinalizou que

ela pode ser potencializada pela praxeologia de uma tarefa durante os momentos de partilha e socialização realizados nas diferentes etapas do dispositivo.

6.10 Episódio dez descrição e análise a posteriori

Neste episódio, propomos atividades que pudessem potencializar o uso de demonstração e prova, tendo em conta que uma das *condições* identificadas no estudo piloto, foi a dificuldade de desenvolver atividades com demonstração e prova. Para encarrar esse problema, propomos um conjunto de dez tarefas que visavam dar continuidade a construção de OM_R, promovendo os *momentos* de trabalho da *técnica* e *de avaliação,* e pôr em evidência as propriedades/relações matemáticas envolvidas nas construções geométricas em torno da reta e do ponto.

As questões geradoras que propomos para nortear a sessão de estudo foram: $\mathrm{Q}_{4,5}^{\mathrm{DM\,(G)}}$: quais relações matemáticas podem ser estabelecidas entre pontos e retas no plano cartesiano? $\mathrm{Q}_{4,6}^{\mathrm{DM\,(G)}}$: quais são as posições relativas de duas retas no plano? São questões cujas respostas são as organizações matemáticas que aparecerão na resolução das seguintes tarefas:

> T_1: Determine a medida da área de um triângulo cujos vértices são três pontos dados pelas suas coordenadas no plano cartesiano
> T_2: Determine a distância entre uma reta (não paralela aos eixos x e y) e um ponto dado
> T_3: Encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado
> T_4: Determinar a condições de paralelismo de uma reta a uma reta que passa por um ponto dado no plano cartesiano
> T_5: Determinar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados em plano cartesiano
> T_6: Determine as coordenadas do ponto de intersecção duas retas dadas em um plano cartesiano
> T_7: Achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas em um plano cartesiano
> T_8: Provar que duas retas, dadas no plano cartesiano, são perpendiculares
> T_9: Provar que duas retas, dadas no plano cartesiano, são paralelas
> T_{10}: Demonstrar que as três medianas de um triângulo, dado no plano cartesiano, se interceptam num mesmo ponto (Atividade apresentada na seção 5.3.7)

Para cada uma das tarefas, os estudantes deveriam identificar: a técnica empreendida; o discurso tecnológico-teórico que fundamenta a tecnologia da técnica empregada. Cada grupo ficou com um conjunto de duas ou três tarefas, a tarefa T_{10}, não foi contemplada por nenhum grupo. Cada grupo deveria reunir-se, discutir e desenvolver as tarefas, e no final, postar seu trabalho no AVA.

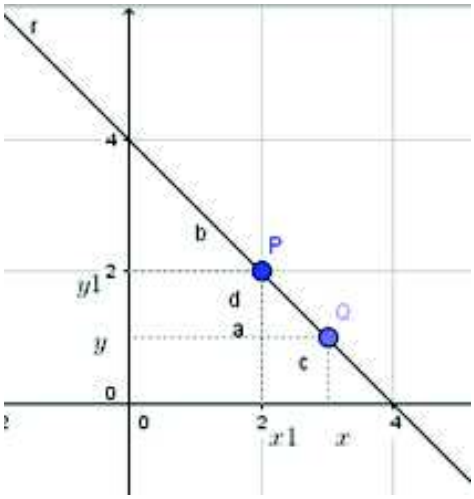
O principal objetivo do *momento de avaliação* foi verificar a organização matemática desenvolvida até a sessão dez, evidenciando se auxilia nas

resoluções das tarefas, ou quais outras organizações são mobilizadas pelos sujeitos.

Destacamos que nem todas as tarefas foram desenvolvidas, pois alguns grupos tiveram problemas de frequência e não conseguiram finalizaras atividades propostas. Desta forma, selecionamos, a resolução das tarefas mais significativas, ou seja, aquelas que o grupo conseguiu concluir, ainda que tenham construções inadequadas.

Destacamos a construção do **Grupo A** com a tarefa $\boldsymbol{T_3}$. Inicialmente construíram no Geogebra a figura 110. Os estudantes partem do princípio que conhecem o coeficiente angular da reta r, tomando a equação com coeficiente angular m.

Figura 110 – Representação da tarefa T_3



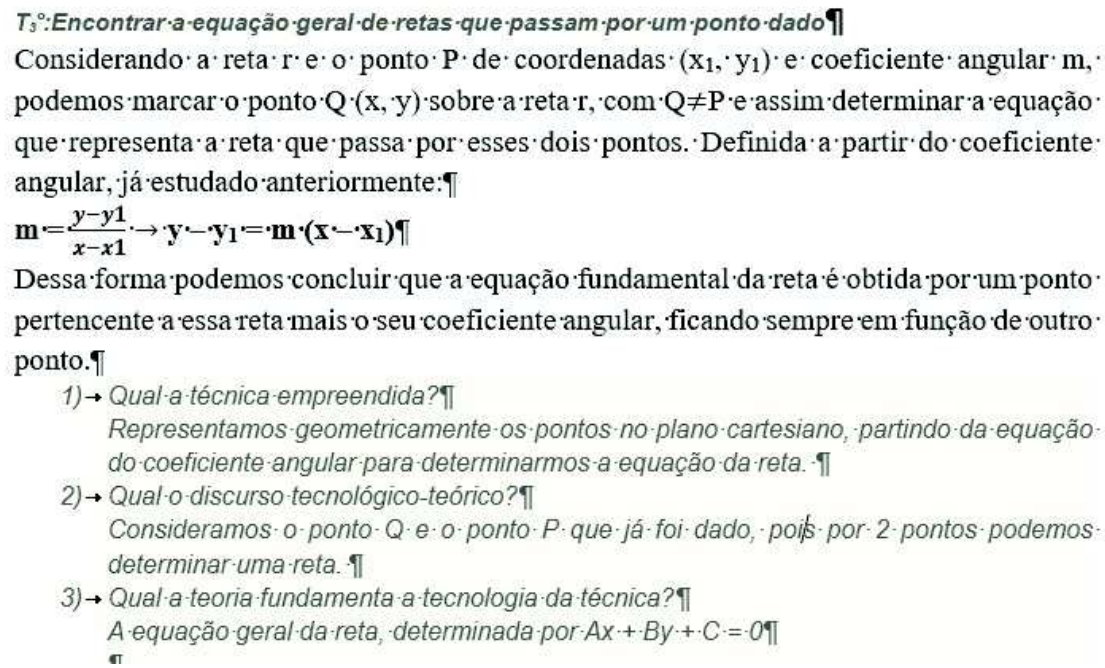
Fonte: dados da pesquisa

Eles não consideraram duas retas, como descrito no enunciado, o que mostraram foi a equação de uma reta no plano, dados dois pontos, mas, não articulam a tarefa com as atividades anteriores desenvolvidas nas sessões de estudo. Parece que não consultaram numa das fontes do estudo

Ressaltamos que esta última conduta, de não pesquisar em fontes disponíveis, tais como a internet, livros didáticos, foi uma conduta recorrente durante as sessões do estudo de maneira geral, a pesquisadora chamou atenção diversas vezes da disponibilidade desses recursos de pesquisa. Poderiam ter recorrido à tarefa que deduz a equação geral da reta por meio do determinante e deste tipo de tarefa, desenvolver uma outra técnica, para a tarefa solicitada. No entanto ao que indica, os estudantes recorreram somente ao seu repertório cognitivo.

Na segunda parte da tarefa apresentam a resolução propriamente dita, segundo figura 111, cópia de tela da produção do grupo.

Figura 111 – produção do grupo tarefa T_3



T_3°:Encontrar a equação geral de retas que passam por um ponto dado¶

Considerando a reta r e o ponto P de coordenadas (x_1, y_1) e coeficiente angular m, podemos marcar o ponto Q (x, y) sobre a reta r, com Q≠P e assim determinar a equação que representa a reta que passa por esses dois pontos. Definida a partir do coeficiente angular, já estudado anteriormente:¶

$m = \frac{y-y1}{x-x1} \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$¶

Dessa forma podemos concluir que a equação fundamental da reta é obtida por um ponto pertencente a essa reta mais o seu coeficiente angular, ficando sempre em função de outro ponto.¶

1)→ Qual a técnica empreendida?¶
Representamos geometricamente os pontos no plano cartesiano, partindo da equação do coeficiente angular para determinarmos a equação da reta. ¶

2)→ Qual o discurso tecnológico-teórico?¶
Consideramos o ponto Q e o ponto P que já foi dado, pois por 2 pontos podemos determinar uma reta. ¶

3)→ Qual a teoria fundamenta a tecnologia da técnica?¶
A equação geral da reta, determinada por Ax + By + C = 0¶

Fonte: dados da pesquisa

Outro aspecto que nos chamou atenção é que os estudantes mobilizaram na tarefa exatamente a noção de coeficiente angular, tema que havíamos acabado de trabalhar no experimento. E mesmo não tendo nenhuma informação a respeito disso no enunciado da tarefa, os estudantes desprezaram a informação do enunciado e mobilizaram a noção de coeficiente angular.

Uma das explicações possíveis para esta conduta, que ignora todos os recursos disponíveis para resolução adequada da tarefa, é o efeito de contrato didático, ou seja, existiria no modelo dominante nos livros didáticos e mesmo na prática dos professores, que replicam esta estratégia de transposição, um modelo: conteúdo – exercícios, quer dizer que sempre após abordagem de um tema vem uma sequência de exercícios sobre este tema. É algo tão comum em sala de aula que alunos e professores incorporam isso como um contrato didático.

Ressaltamos que a finalização dessas tarefas não ocorreu no trabalho conjunto com o coletivo, cada grupo se organizou postar seus achados no moodle. De todo modo, ainda que somente um estudante tenha feito a tarefa, em nome do grupo, mantemos nossas observações.

O segundo grupo desenvolveu a tarefa T_5, mobilizando o conceito de pontos colineares e montando a matriz com as coordenadas dos pontos, e assim aplicaram a condição de alinhamento de três pontos, conforme extrato apresentado na figura 112.

Figura 112 – Produção ecrita tarefa T_5

Sejam· A· e· B· pontos· quaisquer· no· plano· cartesiano,· tal· que· A· =· (x1,· y1)· e· B· =· (x2,· y2),· não· coincidentes,·pertencem·a·reta·r.
Se·A·e·B·estão·sobre·a·mesma·reta·dizemos·que·eles·são·colineares.·Logo,·se·calcularmos·o· determinante·da·matriz·que·envolve·esses·pontos·e·um·ponto·C·(x,·y)·qualquer·chegaremos·a· zero:¶

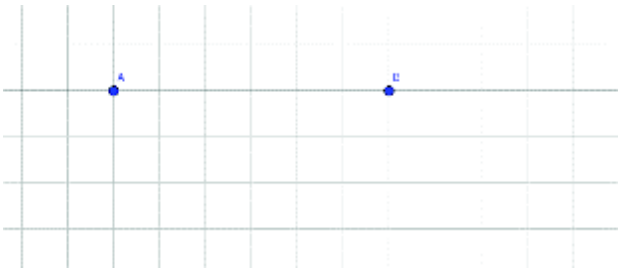
$$\text{Det}\cdot\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{bmatrix}\cdot=\cdot 0$$

Dessa·forma,·desenvolvendo·o·determinante·encontramos·a·seguinte·equação:·¶
X·(y1—·y2)·+·y(x1-x2)·+·x1y2—·x2—·y1·=·0.·Chamaremos:·a·=·y1-y2,·b·=·x1—x2·e¶
·c·=·x1y2—·x2-y1,·então,·a·equação·geral·da·reta·r·é·definida·como:·**ax·+·by·+·c·=·0**,·com· a,·b·e·c·constantes.¶

Fonte: dados da pesquisa

Nesta construção, os estudantes mobilizaram exatamente os elementos da organização matemática desenvolvida durante o estudo, a condição de alinhamento entre três pontos. Destacamos, entretanto, que a representação geométrica realizada pelo grupo (Figura 113), não é uma reta no plano cartesiano, pois faltou construir a reta em um plano cartesiano.

Figura 113 – Representação geométrica de T_5



Fonte: dados da pesquisa

Esta construção indica que os estudantes se apropriaram da parte algébrica independentemente da representação geométrica o plano cartesiano, fixaram-se no processo algébrico.

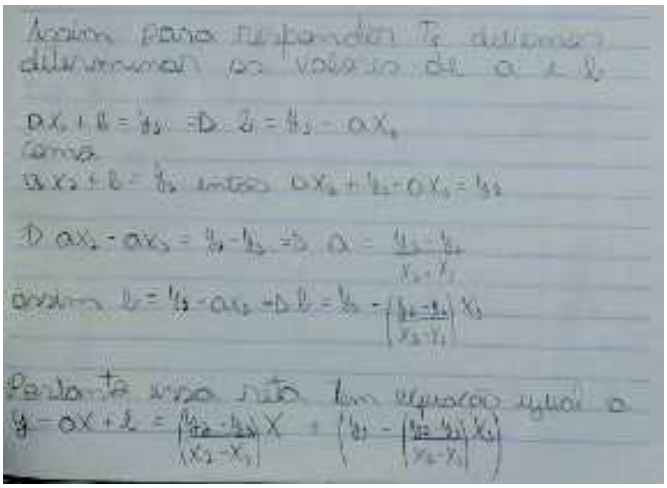
O grupo B apresentou, também, uma segunda construção algébrica como possibilidade de solução da tarefa, de acordo com a transcrição[51] a seguir e segundo a figura 114.

> T_5: *determinar uma reta que passa por dois pontos dados. Para determinar esta reta relembramos o seguinte postulado: dados dois pontos, existe uma única reta que*

[51] Em algumas produções escritas as imagens não estavam legíveis, nestes casos fizemos as transcrições.

os contém. Tal postulado pode ser escrito como: dados dois pontos $P = (x_1, y_1)$ *e* $Q = (x_2, y_2)$,*existem valores únicos de a e b que satisfazem as seguintes equações:* $ax_1 + b = y_1$, $ax_2 + b = y_2$.(Produção escrita Grupo B, tarefa T_5)

Figura 114 – Produção escrita do grupo B da tarefa T_5



Fonte: dados da pesquisa

Avaliamos que, apesar da incoerência com a representação geométrica evidenciada pelo grupo no início da construção, eles propuseram uma técnica alternativa ao uso da condição de alinhamento de três pontos e ao cálculo de determinante.

O mesmo grupo B resolveu a tarefa T_5 e apresentam o seguinte procedimento.

> T_6*: Determinar o ponto de intersecção de duas retas. Para responder o que se pede acima, analisamos as possíveis posições entre duas retas que são: Retas paralelas, retas concorrentes, retas coincidentes. Ela definição sabemos que duas retas são paralelas se pertencerem no mesmo plano (coplanares) e não possuírem pontos de intersecção ou pontos em comum, isto é, a própria definição garante que não há pontos em comum.*
> *Duas retas são concorrentes se possuírem apenas um ponto em comum. Não é necessário que pertençam ao mesmo plano. Logo dado duas retas* $r: y = ax + b$ *e* $a: y = cx + d$ *ditas concorrentes exite um único ponto ao qual chamaremos de P de coordenadas (x1, y1) que satisfaz as equações cima. Isto é:*
> $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_1 = cx_1 + d \end{cases} \Rightarrow ax_1 + b = cx_1 + d \Rightarrow ax_1 - cx_1 = d - b \Rightarrow x_1(a - c) = d - b \Rightarrow$
> $x_1 = \frac{d-b}{a-c}$. *Substituindo em uma das primeiras equações temos*: $y_1 = ax_1 + b \Rightarrow y_1 = a\left(\frac{d-b}{a-c}\right) + b \Rightarrow y_1 = \frac{ad-ab}{a-c} + \frac{b(a-c)}{a-c} = \frac{ad-ab+ab-bc}{a-c} \Rightarrow y_1 = \frac{ad-bc}{a-c}$. *Assim, o ponto tem coordenadas:*
> $P = (\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c})$. *É valido ressaltar que* $a - c \neq 0$ *pois caso contrário as retas r e s serão paralelas. Retas coincidentes são retas que pertencem ao mesmo plano e possuem todos os pontos em comum, sendo assim os pontos e intersecção são todos os pontos que compõem as retas e possuem coordenadas igual aos pares ordenados que satisfazem uma das equações da reta.* (Produção escrita, Grupo B, T_5)

Para a tarefa T_7: achar a equação geral das retas que passam pelo ponto de intersecção de duas retas dadas, os estagiários retomaram os resultados da tarefa anterior.

> *Como já encontramos o ponto de intersecção de duas retas e isto é dado por* $r: y = ax + b$ *e* $a: y = cx + d$*, sabemos que P o ponto d eintersecção entre as retas tem coordenadas* $P = (\frac{d-b}{a-c}, \frac{ad-bc}{a-c})$*, assim para que uma terceira reta qualquer* $w: y = ex + f$*, passe pelo ponto P, as coordenadas desse ponto deve satisfazer a equação de* w*, logo:* $\frac{ad-bc}{a-c} = e\left(\frac{d-b}{a-c}\right) + f$ *"não foi possível continuar"* $\Rightarrow f = \frac{ad-bc}{a-c} + e(\frac{d-b}{a-c})$*. Portanto:*$w: y = ex + \frac{ad-bc}{a-c} + e(\frac{d-b}{a-c}) \Rightarrow$ *sistema de equação com duas variáveis e uma equação estabelecemos uma dependência entre as variáveis (Produção escrita, grupo B,* T_7*)*

Avaliamos que a construção matemática, feita pelos estudantes, reforça o empenho das técnicas sem o uso da condição de alinhamento, ou seja, a partir da estratégia desenvolvida na tarefa 5, o grupo usou a mesma da praxeologia para as tarefas 6 e 7. O discurso tecnológico-teórico se apoia nos postulados da geometria sintética e na equação geral da reta, em seguida, os alunos articulam tais conceitos no plano cartesiano para resolver a tarefa. As tarefas desenvolvidas de forma alternativa pelos estudantes se aproximam daquelas desenvolvidas no MER, no estudo da reta (capítulo 3).

Apesar de não indicarem diretamente as respostas da segunda parte da atividade, a respeito da técnica, tecnologia e teoria, os estudantes evidenciam tais elementos. Nesse sentido, esta construção indica que houve avanços no processo de desenvolvimento das praxeologia matemáticas, desde o início das atividades do projeto. As condutas dos sujeitos parecem que vão pouco a pouco evoluindo, ainda que isto não ocorra de forma homogênea, tendo em conta que o tempo de aprendizagem de cada sujeito é diferente.

Avaliamos que somente após o episódio final do processo de estudo que será possível avaliar, se na aquisição dos conhecimentos matemáticos, em torno da OM desenvolvida, os estudantes (re) significaram tais conhecimentos com aqueles didáticos e eventualmente os pedagógicos e tecnológicos, associados à GAP.

Essa reflexão é central, pois dialoga com nossos objetivos de pesquisa, que serão retomados posteriormente nas análises finais.

6.11 Episódio onze: descrição e análise a posteriori

Neste episódio, os estudantes deveriam sintetizar o trabalho realizado ao longo do estudo, de forma a terem uma visão global do trabalho realizado e de

tudo que foi abordado e discutido, em seguida propor uma nova organização didática para responder à questão inicial Q_0.

Antes de começar de propor as atividades, a pesquisadora faz uma sinopse do que foi o projeto de modelização didática e dos pontos mais significativos do estudo e das dificuldades encontradas por alguns alunos, até o momento, ressaltando a importância do processo de formação e a contribuição da Didática da Matemática, enquanto área de pesquisa nessa formação.

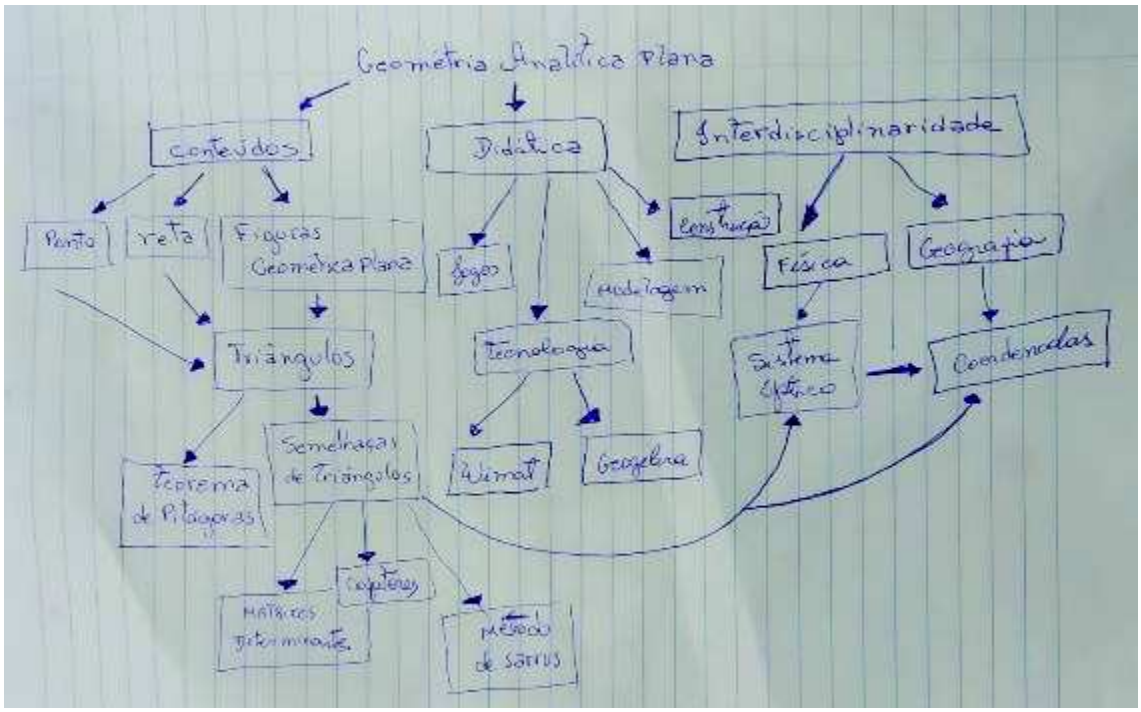
Na primeira parte da atividade, os estudantes deveriam fazer uma síntese do que foi estudado até então, por meio de um mapa conceitual, e estabelecendo as relações entre os objetos de estudo. O coletivo foi dividido em dois grupos de trabalho. Cada grupo fez a discussão a respeito do que foi solicitado e construiu um mapa retratando os objetos que estudou. Observou-se que ambos os grupos não consultaram apenas o material já construído nos episódios anteriores, mas também, o livro didático.

A pesquisadora propõe dois momentos: no primeiro momento, os grupos deveriam construir um esquema ou mapa conceitual, representando globalmente a evolução do estudo realizado, em termos dos objetos matemáticos estudados. No segundo momento, propus, a *partir das reflexões realizadas no processo de formação do ateliê de modelização didática, desenvolver uma organização didática de estudo para os seus alunos do 3º ano do ensino médio, com base na seguinte questão: como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?*

Como previsto, no primeiro momento, o coletivo se dividiu em dois grupos, se reuniram e discutiram a respeito das tarefas realizadas por eles, identificando os temas estudados. Analisando os áudios do trabalho dos grupos, percebemos que os estudantes identificaram as três organizações didáticas, o estudo dos sistemas de coordenadas, ponto e reta, em seguida desenharam manualmente mapas conceituais.

Após o momento de trabalho em grupo (Figura 115), tivemos o momento de partilha, em que cada grupo apresentou seu mapa as justificativas, para as escolhas e o que discutiram. Ressaltamos que, conforme orientação da pesquisadora, o fundamental era o momento de debate e partilha, a produção de um rascunho, síntese ou mapa, foi livre, a critério do grupo.

Figura 115 – Mapa conceitual do grupo A



Fonte: dados da pesquisa

O grupo A trouxe o mapa da figura 115, e justificou sua construção da seguinte forma:

> *H1: Sim, a gente construiu um mapa conceitual com o seguinte título: "Geometria analítica plana". Aí colocamos três... três tópicos relacionados à geometria plana. Um deles foram os conteúdos, didática e interdisciplinaridade. Aí, na parte de conteúdo, a gente colocou o ponto, reta, figuras geométricas. Na de didática, jogos, tecnologia, modelagem e construção. Na parte de interdisciplinaridade, colocamos os assuntos que são relacionados, que é a relação física e geografia. Na física a gente colocou o que foi estudado aqui no ateliê, o sistema óptico, na geografia a parte de coordenadas. Já embaixo, o que... eh... colocamos triângulos, o que está ligado a triângulo, o ponto, a reta e a figura geométricas. Triângulos está relacionado com teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos. O que é que está ligado a semelhança de triângulos? Matrizes determinantes, cofatores e o método de Sarrus. Na de tecnologia, o IMAT.*
> *P: O que é o IMAT?*
> *H1: O IMAT é um...*
> *F1: Um aplicativo.*
> *H1: Esse aplicativo quando a gente foi fazer o plano de aula, tanto por sistema de coordenadas a gente estudou isso, então a gente achou que talvez possa ser usado.*

Na sequência, os estudantes explicam sua construção no momento da socialização e colocaram no mapa tudo que poderia ser relacionado ao estudo de GAP com seus alunos. Destacamos que, no diz respeito aos aspectos didáticos, os estudantes relacionaram as possíveis estratégias e recursos de ensino, o campo da didática e o uso de tecnologias.

O segundo grupo apresentou um mapa apenas com os temas sobre GAP dos episódios de estudo, ligado por setas em uma direção. Com relação aos

aspectos didáticos e pedagógicos, compartilhou das ideias do primeiro grupo, não trazendo nenhum elemento a mais do que já havia sido apresentado.

Em nosso ponto de vista, os estudantes avançaram além do que foi solicitado, tendo em conta que incluíram no mapa tudo que poderia ser envolvido para o ensino de GA. São elementos que iriam compor a proposta deveriam organizar na segunda etapa: a interdisciplinaridade com outras áreas como a física, a geografia.

Ressaltamos um aspecto importante identificado na construção dos estudantes, que a pesquisadora sinalizou em suas intervenções ao longo do estudo. Trata-se da necessidade de os sujeitos (estagiários) se colocarem na posição, ora de professores, ora na posição de seus alunos, com o objetivo de pensar o ensino e a aprendizagem desses alunos. A explanação oral e a construção escrita do mapa indicam que os estagiários identificaram os elementos matemáticos desenvolvido ao longo do estudo, e os articularam com aqueles didáticos e pedagógicos essenciais para se pensar o ensino e a aprendizagem dos objetos de GAP escolhidos.

Esta conduta foi marcante ao longo de todas as sessões de ensino, mediadas pela pesquisadora. A cada sessão de estudo, nos momentos de partilha e de institucionalização, a pesquisadora incentivava e promovia o debate a respeito da aprendizagem e do ensino, das tarefas, técnicas e estratégias para abordagem didática dos temas em estudo. Ao que parece, isso foi incorporado pelos estagiários.

No trabalho dos grupos, ficou evidenciado a importância das tecnologias que justificam asas técnicas, pois essas tecnologias aparecem nos mapas, como parte integrante do estudo, por exemplo: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales e Semelhança de triângulos. Além disso, identificaram as técnicas mobilizadas para as tarefas, regra de Sarrus, matrizes e determinantes.

Um outro aspecto evidenciado na construção dos sujeitos, foi a incorporação das tecnologias digitais como parte do processo de pensar o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos, por exemplo, o uso do Geogebra, winplot e outros softwares no ensino de matemática.

Após o momento de partilha da primeira parte do trabalho, os grupos se reuniram novamente para retomar o estudo e construir a segunda parte da proposta. Os grupos começaram por discutir os objetivos gerais de ensino, os conteúdos a serem abordados, o tempo estimado para o trabalho.

Tendo em vista que o tempo se esgotou, as atividades foram encerradas e foram retomadas no episódio de estudo seguinte.

6.12 Episódio doze: descrição e análise a posteriori

Neste episódio, o trabalho de planejamento iniciado na sessão anterior recomeça com o debate nos grupos. Os estudantes discutem nos grupos o que deve compor uma organização didática par ensinar os objetos de GAP, propõem estruturar um plano de aula e inicialmente elencam os temas, os objetivos de ensino e de aprendizagem em torno dos temas matemáticos, já identificados nos mapas.

Identificamos por meio dos diálogos, que os estudantes se mostraram, mais empenhados em desenvolver o conteúdo matemático, que no primeiro momento de planejamento, no início do estudo sobre alinhamento de três pontos. Observamos esse fato no seguinte extrato:

> *H1 - A gente elaborou a atividade do alinhamento de três pontos, cinco questões para eles identificarem se eles entenderam como esse... se é alinhado e essa questão aqui que é mais... que envolve também função exponencial do primeiro grau. Aí agora falta para terminar? A atividade dos outros... dos outros dias. Porque aqui, olha, no primeiro dia a gente só escolheu uma questão, que é essa daqui, além dos exemplos que a gente vai dando, que vai ser mais de construção. A segunda também é construção. E depois, na terceira, vem essa daqui, e depois, para entender quando a gente pega... como a gente pegou aqui, a equação geral da reta. Com... com a equação geral da reta tem aqueles casos, quando "B" é zero e quando é paralelo ao "X". Aí agora o que foi que a gente pensou? Em colocar isso em no Geogebra, para a gente desenhar uma reta. E aí, a partir do... quociente, eles veem a... acontecer no Geogebra. Não no quadro, como a gente está vendo.*
> *H2 - Ah, sim, sim.*
> *H1 - Porque até tem vezes que até o desenho do... do quadro fica um pouco complicado para eles visualizarem. Pode não ser o melhor... ((sobreposição de vozes))*
> *H2 - Visualiza, não é?*
> *H1 - Agora... agora aqui eu estou na dúvida. Se for para continuar... porque, se for para continuar o conteúdo, vê equação reduzida, vê ângulo, no caso na inclinação da reta, e o ângulo. Aí depois vem a reta reduzida e a reta paramétrica, só que como a gente não... no mapa conceitual a gente só foi até a equação geral, a gente vai também no plano só até equação geral.*
> *H2- (Quem que escreve) [00:01:44] Geogebra?*
> *H1 - O Geogebra, toda vez que a gente escreve fica assim.*
> *(Transcrição de áudio, produção do Grupo A),*

O áudio mostra os estudantes planejando tarefas para proporem no âmbito da organização didática e o plano de aula, ao que eles classificam como exercícios, tarefas de construção e tarefas de visualização com o uso do Geogebra. Questionam-se até onde iriam no conteúdo. Eles decidiram que cumpririam a proposta do mapa construído na sessão anterior.

Consideramos este breve momento de planejamento dos estudantes, muito significativo, apesar de não ser possível identificar nos áudios as possíveis praxeologias pensadas para o ensino de GAP. O trabalho dos estagiários, apesar das dificuldades de expressão em língua português formal, revela a atividade da prática de ser professor, planejador, organizador do ponto de vista didático e matemático, levando em conta, entre outras coisas, os aspectos pedagógicos.

Ressaltamos ainda, que apesar da atividade do estudo de ter sido proposta para futuros alunos, os professores estagiários absorveram a atividade para seus próprios alunos do estágio, em nenhum momento expuseram que a proposta não seria real, ao contrário, alguns revelaram que iriam pôr em prática na primeira oportunidade que tiverem, em uma classe de terceiro ano de ensino médio.

A sessão finalizou após o desenvolvimento das atividades dos grupos, ficando a etapa socialização para o episódio seguinte, momento em que poderíamos acessar as produções escritas dos alunos.

6.13 Episódio treze (final): descrição e análise a posteriori

Neste último episódio, o objetivo foi finalizar o estudo com o momento de socialização e debate da construção coletiva, visando a elaboração da resposta à questão geratriz do estudo, Q_0. Além disso, propomos avaliar coletivamente o dispositivo enquanto proposta de formação de (futuros) professores.

No início da socialização e apresentação dos grupos, o primeiro grupo começou trazendo uma justificativa a respeito da proposta. De acordo com os integrantes desse grupo, eles haviam pensado em organizar a proposta, em relação ao conteúdo, até onde fizeram com mapa conceitual, porém, perceberam que a atividade do mapa, embora estivesse relacionada com ensino de GA, era a síntese do estudo. Eles, então, reavaliaram que havia a necessidade de explorar (destrinchar) um pouco mais os objetos e as atividades de estudo.

No documento escrito, percebe-se que eles organizaram um plano de ensino que continha os seguintes itens: a instituição de ensino; a carga horária: de 10 horas/aula de estudo; a turma: de terceiro ano de ensino médio; os conteúdos: sistema de coordenadas, ponto e reta, os objetivos, a metodologia, os recursos e a avaliação. Sobre os objetivos, apresentaram os seguintes:

> *-Compreender os procedimentos utilizados para identificar as coordenadas do ponto;*

> *-Representar geometricamente pontos dados no plano cartesiano;*
> *-Compreender colinearidade;*
> *-Relembrar conceitos básicos sobre ponto e reta;*
> *-Explorar algumas ferramentas do software Geogebra;*
> *-Reconhecer uma reta, uma semirreta, um segmento de reta e as diferentes posições relativas à reta;*
> *-Definir a distância entre dois pontos no plano cartesiano. (produção excitam Grupo A).*

Sobre a organização didática do trabalho, o extrato abaixo revela como essa organização foi pensada pelos alunos.

> *Introduzir o conteúdo apresentando o sistema cartesiano ortogonal e seus respectivos eixos, em seguida especificar a generalização do par ordenado.*
> *Posteriormente, solicitaremos da turma a representação geométrica de alguns pontos. Após a compreensão do que representa cada uma das coordenadas do par ordenado, solicitar a turma que represente graficamente dois pontos utilizando o software Geogebra, e que procurem estratégias para calcular a distância entre dois pontos dados.*
> *Em seguida, ainda com o auxílio do Geogebra, iremos construir um triângulo retângulo de vértices A, B e C relembrando o Teorema de Pitágoras, especificando que o cálculo pode se dá através deste.*
> *Utilizaremos o exemplo 1, em anexo, solicitaremos a turma a resolução do seguinte exercício, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos até o momento.*
> *(UFU-MG) São dados os pontos A (2, y), B (1,-4) e C (3, -1). Qual deve ser o valor de y para que o triângulo ABC seja retângulo em B?*
> *Iniciando o estudo da reta com o alinhamento de três pontos: propor a turma que em dupla, pensem em dois pontos e façam registro individual. Em seguida, os representem graficamente. Questionar aos alunos o que entendem a respeito de colinearidade, para construir juntamente com a turma a definição formal, e apresentação de meios para verificação da existência ou não desta. Através do cálculo do determinante da matriz. Propor resolução da atividade em anexo, tendo por objetivo o uso de conhecimentos adquiridos durante as discussões e explanação do conteúdo.*
> *A partir do conhecimento de alinhamento de três pontos, com auxílio do triângulo construído em uma das aulas anterior, deduziremos a equação geral da reta.*
> *Será realizado o estudo dos casos particulares da reta, utilizando o software Geogebra para mostrar geometricamente o que ocorre em cada caso, abordando aspectos referentes a inclinação da reta.*
> *Obs: Os procedimentos podem sofrer alterações e acréscimos.*
> *Recursos: quadro, computador, apagador, pincel, livro didático, lista de exercício; avaliação será contínua, durante todo o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.*
> *Analisando a participação e resolução dos exercícios propostos.*
> *(Produção escrita Grupo A)*

Eles indicaram os elementos que deveriam ser readequados na proposta pensada, e durante a exposição foram detalhando as estratégias de ensino que seriam utilizadas na proposta de ensino. A transcrição dos áudios desse momento ficou extensa, assim, sintetizamos em tópicos nos pontos mais significativos da apresentação oral do grupo.

- Desenvolver atividades exploratórias, com a interface do Geogebra, para representação de pontos no plano cartesiano;

- Identificar os objetos matemáticos de estudo do currículo, que a priori, os alunos deveriam estudar em anos anteriores e a necessidade de articulá-los para ensinar GA, por exemplo matrizes e determinantes;
- Utilizar a interface do Geogebra para possibilitar a visualização e exploração do conteúdo e propor “exercícios” (tarefas) com demonstração;
- Incorporar nas aulas uma proposta questionadora e participativa dos alunos no processo de construção do conhecimento, levar o aluno a pensar a discutir o conteúdo até chegar a uma generalização;
- Discutiram sobre o temo didático e o tempo cognitivo, ou seja, cada turma tem um tempo diferente para avançar no conteúdo de estudo. Os estudantes também afirmam que deverão saber o “nível da turma”, para a abordagem de conteúdo anteriores, importantes para continuidade do trabalho;
- Nas atividades com o uso da interface do software, os estudantes elencaram as coordenadas ortogonais, representação de pontos, estudo da distância entre dois pontos,
- Deram ênfase à importância de acompanhar a construção das atividades com o uso do software, com a perspectiva dos objetivos de ensino para cada atividade proposta;
- No caso do estudo da distância, trouxeram a possibilidade de replicar a demonstração com o triângulo retângulo, realizada durante o estudo;
- Propuseram trabalho em duplas, para o estudo de alinhamento de três pontos;
- Propuseram trabalhar a dedução da equação geral da reta e em seguida a partir dos casos particulares a inclinação e o coeficiente angular;
- Identificaram que a proposta, ainda estava incompleta, pois poderia ser ampliada e melhorada.
- Propor progressivamente o estudo das equações segmentárias e reduzida, ao mesmo tempo avaliação contínua, sempre com a participação do aluno na construção dos conhecimentos;

Sobre a produção escrita, ressaltamos que não foram evidenciados todos os elementos que foram destacados na apresentação oral. Os estudantes se esforçaram para expor de forma detalhada as estratégias de ensino, mas

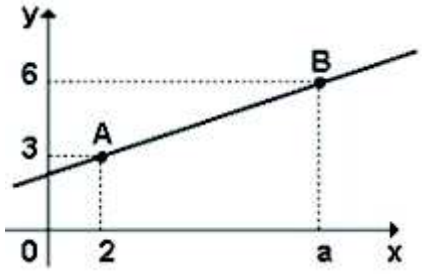
observamos uma dificuldade na parte escrita. Tendo em vista o desempenho dos alunos, consideramos que os alunos que participaram de todos os episódios, teriam entendido a necessidade de um planejamento detalhado, bem pensado e apoiado em reflexões didáticas e nas praxeologias matemáticas que estão sendo estudadas.

Com relação à organização matemática, propuseram, conforme anunciaram no planejamento, um conjunto de tarefas.

As tarefas propostas sobre alinhamento três pontos e distância entre dois pontos, foram classificadas como atividade de exploração com o uso do software e as demais como exercícios de fixação. Organizamos as tarefas como um conjunto de tipos de tarefas (, para diferenciar as tarefas, utilizamos T_{Ai} para as tarefas do grupo A e T_{Bi}, para as tarefas do grupo B (figura 116).

> *T_{A1}: determinar a distância entre dois pontos $(-1,1)$ e $(3,2)$;*
> *T_{A2}: verifique se os pontos A (0, 4), B (–6, 2) e C (8, 10) estão alinhados, algebricamente.*
> *T_{A3}: Determine o valor de y de maneira que os pontos P (1, 3), Q (3, 4) e R (y, 2) sejam os vértices de um triângulo qualquer.*
> *T_{A4}: os pontos A (-1, 2), B (3, 1) e C (a, b) são colineares. Para que C esteja sobre o eixo das abscissas quais devem ser os valores de a e b?*
> *T_{A5} (UFSM) a figura representa o gráfico de uma função do 1º grau que passa pelos pontos A e B, onde a≠2. O ponto de interseção da reta AB com eixo x tem abscissa igual a: (a) 1-a; (b) a-2;(c) $\frac{3a-12}{a-2}$;(d) 4-a; (e) 12 – 3a.(Figura 116)*

Figura 116 - Figura da tarefa T_{A5}



Fonte: dados da pesquisa

> *T_{A6}: determinar valor de k para que a equação kx – y – 3k + 6 = 0 represente a reta que passa pelo ponto (5,0).*
>
> *T_{A8}: EBSERH – AOCP 2016). Seja a reta cuja equação é dada por y – 2x -10 = 0, é correto afirmar que essa reta passa por quais dos dois pontos citados a seguir? (a) A (5, 0) e B (-20, 35) ;(b) C (12, 21) e D (0, 20) ;(c) E (14, -15) e F (-7, 7): (d) G (5, 30) e H (0,5, 4); (e) A (0, 10) e B (-13, 16*). (Produção escrita do grupo A)

Todos os tipos de tarefas propostas pelos estudantes se encontram descritas no modelo dominante dos livros didáticos analisados. Com relação às técnicas, ressaltamos que os estudantes incorporam parte do modelo alternativo proposto na formação, quando introduzem, para resolução da tarefa, o uso da interface digital, algo não previsto nos livros didáticos. Porém, para os

estudantes, a interface visava facilitar a visualização e exploração da tarefa, pois a visualização facilitaria o entendimento da tarefa. Sobre o discurso tecnológico-teórico, apoiaram-se no que foi desenvolvido durante a formação, como, por exemplo, o triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras.

Sobre o alinhamento de três pontos, os estudantes sugerem como discurso tecnológico-teórico, a condição de colinearidade de pontos para deduzir a condição de alinhamento e a equação geral da reta.

As produções dos professores estagiários revelaram que o conhecimento tecnológico se mostrou como algo “natural”, ou naturalizado no processo de ensino, ainda que, não tenham uma clareza mais profunda disso. Além da visualização, outras potencialidades do ambiente dinâmico não foram exploradas.

Após a finalização da apresentação do grupo A, as sugestões propostas pelo coletivo e especialmente pela professora pesquisadora, foram essencialmente que o grupo devesse focar sua análise, também, na identificação das técnicas que permitem cumprir as tarefas proposta, consequentemente, o discursos tecnológico-teóricos que validam essas técnicas. Averiguar, também, como o software poderia ajudar nesse processo.

O segundo grupo (Grupo B) apesentou oralmente sua proposta, focando seu plano de ensino com os mesmos itens do grupo anterior: instituição, carga horária, objetivos, conteúdos, metodologia e procedimentos. Os conteúdos foram ponto e reta e identificaram como objetivos:

> *- Introduzir a geometria analítica de forma de que os alunos compreendam o conteúdo e possa aplicar e identificá-los no cotidiano;*
> *- Identificar as relações existentes entre as figuras geométricas planas e o plano cartesiano;*
> *- Compreender como os estudos do sistema óptico podem auxiliar nos estudos do ponto e da reta (Produção escrita. Grupo B)*

No texto abaixo, o grupo descreve as etapas prováveis de sua sequência didática, com os procedimentos didáticos e pedagógicos de cada aula:

> ***1ª Aula:*** *Iniciaremos a aula de forma interativa para saber os conhecimentos prévios dos alunos a respeito do conteúdo sobre o estudo de pontos. Assim faremos indagações como: o que é um ponto? O planeta terra pode ser considerado um ponto em relação ao universo?*
> *Para só assim definirmos o que é ponto para a matemática. Em seguida iremos trabalhar com uma cartolina que contém a imagem de um bairro comum aos alunos (exemplo o bairro do colégio) iremos pedir para identificar edifícios que estão entre o cruzamento de duas ruas. Sendo que o objetivo principal é relembrar o plano cartesiano.*
> ***2° Aula:*** *Será iniciada com auxílio de régua e uma Xerox ou papel milimetrado. Solicitaremos aos alunos para medir a distância entre certos pontos que estão no plano cartesiano, de início com a distância entre pontos que estão em retas*

horizontais e verticais o que dará margem para associarmos ao módulo de um número após isso, pediremos aos alunos para medir a distância entre pontos ou medidas de segmentos que estão em retas não horizontais e verticais, assim mostramos a utilização do Teorema de Pitágoras para resolução desse problema, além disso, faremos perguntas para os alunos sobre o ponto médio e equidistância entre pontos.

***3° Aula:** Socializaremos exercícios da aula anterior e abordaremos de maneira previa a respeito da interdisciplinaridade da matemática em diversas áreas no que tange ao sistema cartesiano. Utilizaremos exemplos a respeito da geografia envolvendo o conteúdo longitude latitude, como se localiza um navio no meio do oceano, um avião no céu. Em seguida, iremos propor uma atividade de pesquisa a respeito do que foi discutido pelo professor. A turma será dividida em grupos de 5 alunos e o professor direcionará temas ao mesmo. É esperado que o colégio tenha uma sala de informática caso não tenha ficará acertado na aula anterior que realizem pesquisa para que os alunos tragam. A aula será para manutenção dessas apresentações.*

***4° Aula:** Acontecerá as apresentações dos grupos*

***5° Aula:** A aula será expositiva falaremos sobre o alinhamento de 3 pontos e terá uma atividade antes da exposição e outra depois para fixação do método de determinação se os três pontos estão alinhados.*

***6° Aula:** Continuaremos com os exercícios da aula anterior aplicando os seguintes métodos: matrizes por Sarrus, cofatores, Regra de Chió.*

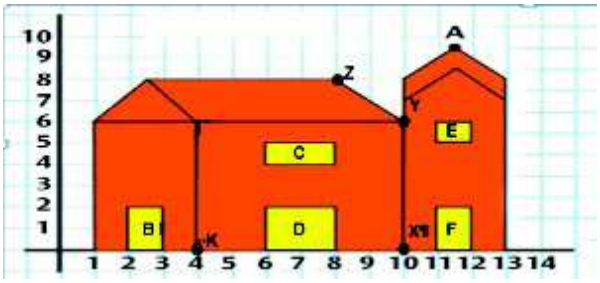
***7° Aula:** avaliação (Produção escrita, Grupo B)*

Identificamos nessa proposta, os seguintes aspectos que julgamos mais significativo:

- Incorporar na abordagem uma proposta investigativa, por meio de questionamentos com os alunos, para levá-los a descobrir o conteúdo visado;
- Propuseram, como atividade, a localização de pontos por meio do mapa do bairro, simulando o plano cartesiano;
- Associar a noção de distância ao conceito de módulo de um número;
- Introduzir na abordagem didática, diferentes contextos, como a geografia e a física, a noção de pontos cardeais, como proposta de interdisciplinaridade;
- Avaliação participativa.

Com relação à organização matemática, o grupo apresentou um conjunto de tarefa, apoiando-se na figura 117.

Figura 117 – Ilustração das tarefas grupo B



Fonte: dados da pesquisa

> *T_{B1}: sabendo que a largura da porta A pode ser representada pela distância entre os pontos (2, 0) e (3, 0). Qual é a largura da porta?*
> *T_{B2}: como podemos observar no plano cartesiano, a altura da porta D é definida pelos seguintes pontos, (6,2) e (8,2). Qual é a altura da porta?*
> *T_{B3}: encontre o ponto médio da largura da porta D, sabendo que o ponto inicial é (6,0) e o ponto final é (8,0).*
> *T_{B4}: determine os pontos X e Y e em seguida calcula a distância entre os pontos X e Y e em encontre o ponto médio dos pontos X e Y.*
> *T_{B5} Encontre o ponto Z, e utilizando o ponto Y encontrado na questão anterior calcule a distância entre o ponto Y e Z e encontre seu ponto médio.*
> *T_{B6}: Ache o ponto K e calcula a distância entre K e Y e em seguida calcule o ponto médio dos pontos K e Y. (Produção escrita, Grupo B)*

Destacamos que T_{B4} , T_{B5} T_{B6} são tarefas do mesmo tipo: identificar as coordenadas dos pontos e calcular distância.

Os dois grupos perceberam que suas propostas ainda não estão prontas, tendo em conta os vários aspectos que foram apontados e que não foram contemplados pelos dois grupos. Essas reflexões em conjunto auxiliaram os estudantes a perceber que deveriam replanejar a proposta.

Outros aspectos que merecem maior atenção, também, foram apontados na fase de socialização. Entre outros, destacamos a questão da avaliação proposta pelos dois grupos e segundo foi o aspecto da articulação dos sistemas de representação. No primeiro caso, as propostas apresentadas pelos grupos não dizem, de fato, como seria realizada a avaliação dos alunos. Quais instrumentos seriam utilizados? Que tarefas seriam propostas? Pois, as tarefas apresentadas na organização matemática, dizem respeito às atividades de aula, ou exercícios para avaliar, mas de forma muito geral. Esses questionamentos foram apresentados no momento de socialização, reforçando a necessidade de replanejamento.

O segundo ponto abordado anteriormente nas sessões de estudo, foi a articulação dos sistemas de representação semiótica, no sentido de Duval (2005). Os estudantes poderiam incluir de forma mais significativa tarefas que propusessem aos alunos transitar em diferentes registros, ao menos geométrico e algébrico e vice-versa.

A “finalização” da proposta de intervenção para os alunos do ensino médio e a emergente necessidade de (re)planejá-la, destacam-se no contexto da pesquisa como *momento didático de avaliação,* do dispositivo PEP-FP/TAD, com a apresentação da resposta da questão inicial Q_0 (*como ensinar a geometria analítica do ponto e da reta?)* do dispositivo.

Ao mesmo tempo, se não nos déssemos por satisfeitos com as respostas construídas, poderíamos dar continuidade ao estudo. Desta forma, os

questionamentos que surgiram e todas as observações que apareceram como possibilidades de melhoria da proposta, seriam incorporados à uma nova produção didática dos sujeitos dando curso às alterações e aprimoramento de uma resposta mais completa, precisa e capazes de promover novas (re)ressignificações dos *objetos de estudo* e dos conhecimentos e saberes dos sujeitos.

A finalização do estudo deixa em aberto o desejo de aprimorar os saberes adquirido pelos sujeitos e de vê-los postos em prática, ou ainda de aprimorar e experimentar o plano de ensino organizado pelos estagiários. No entanto, as limitações da pesquisa inviabilizam de imediato esta segunda fase de experimentos, que deixamos para estudos futuros.

Apresentamos, a seguir em duas subseções, a análise dos resultados identificados, mais precisamente, na experimentação, tendo em conta as categorias de conhecimento docente elencadas, e, por fim, a avaliação do dispositivo de pesquisa como proposta de formação inicial. Esses dois tópicos conjuntos visam trazer, em diferentes aspectos, os resultados mais relevantes da investigação, os quais se caracterizam como resultados globais da pesquisa, tendo em vista que os micros resultados foram apresentados na análise a posteriori e descrição do experimento.

6.14 Principais resultados segundo as categorias de conhecimento docente

Nesta subseção, temos por objetivo fazer uma análise mais específica a respeito dos conhecimentos docentes que foram mobilizados e (re)construídos ao longo do desenvolvimento do experimento. Ressaltamos que a forma como o dispositivo de pesquisa visava ampliar os equipamentos praxeológicos dos professores estagiários.

É nesse sentido que as praxeologias adotadas por esses sujeitos, ao longo do experimento, indicam que houve alterações desses equipamentos. As praxeologias dos professores estagiários revelaram vários conhecimentos colocados em ação, para o desenvolvimento dos diferentes tipos de atividades e tarefas matemáticas, atividades inerentes à profissão do professor. É nesse sentido que adotamos a expressão formação profissional (FP), em nossa investigação, porque mobiliza conhecimentos profissionais.

Para identificar tais elementos da formação docente, retomamos as categorias de conhecimento docente anunciadas no capítulo 5, e que foram escolhidas apoiando-se em dois aspectos: O primeiro aspecto foi o quadro de conhecimentos docentes nos trabalhos teóricos de Shulman (1986, 1987), Ball, Thames e Phelps (2008), Mishra e Koehler (2006) e sintetizados no artigo de Silva e Lima (2015), em quatro categorias de conhecimentos: CC, CP, CT e CD.

Neste último trabalho, os autores aprofundaram a ideia de conhecimento de intersecção, conforme o diagrama já apresentado anteriormente, na seção 5.1. Pelas justificativas já apresentadas, tomamos o segundo aspecto para definição das categorias de análises, a articulação entre o matemático e o didático, enquanto conhecimento docente.

Essa perspectiva nos ajudou para definir quatro categorias essenciais para articular o matemático e o didático na proposta de formação com os estagiários: o conhecimento (matemático) do conteúdo (CC), o conhecimento didático do conteúdo (CDC), o conhecimento didático pedagógico do conteúdo (CDPC) e o conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo (CDPTC), e ainda incluímos possibilidade de identificarmos outras categorias que surgiram nos achados.

Apesar de nossa base de categorias ter um referencial adotado, compreendemos, desde o início, que nossa pesquisa não daria conta de abarcar todos os domínios de conhecimentos docentes defendidas pelos autores. Nesse sentido, as categorias de análise foram explicadas no âmbito de nossa investigação, com o objetivo de clarificar a amplitude da pesquisa frente ao que é defendido por diferentes autores a respeito de saberes e de conhecimentos docentes.

Assim, têm-se pontos de convergência com os autores e outros mais limitados ao estudo desenvolvido. No caso de CC, o conhecimento matemático em estudo foi a geometria analítica plana do ponto e da reta. Definimos CDC como aquele inerente aos aspectos da Didática da Matemática, relacionados ao o ensino e a aprendizagem dos objetos matemáticos. Estão incluídos nesses conhecimentos, os elementos das teorias didáticas, a organização do conhecimento matemático para o ensino, o conhecimento das possíveis dificuldades de aprendizagem em GA dos alunos e a noção de organização didática para o ensino de GA.

A terceira categoria CDPC envolve o que está incluído no CDC, e incluem-se, de forma articulada, o conhecimento pedagógico, o qual se refere às questões genéricas da educação escolar, que essencialmente não dependem do desenvolvimento do conteúdo matemático, relacionam-se também com aspectos teóricos das ciências da educação, por exemplo, questões sobre a gestão da sala de aula, o conhecimento das normas legais de funcionamento do ambiente escolar, o conhecimento de diferentes correntes de pensamento teóricos da educação.

Sobre CDPTC, no âmbito do nosso estudo, parece ser a mais completa categoria, pois ela articula os CDPC com a incorporação das tecnologias, interfaces digitais para o ensino de matemática (CC). A nossa perspectiva de conhecimento tecnológico, no âmbito desta pesquisa, foi discutida especialmente na análise do episódio treze. O ideal seria um conhecimento tecnológico especializado para o ensino de matemática, algo que é raro na formação geral dos professores, nesse sentido o que propomos é um alcance mínimo para os sujeitos da pesquisa.

Nos quadros 19 e 20, identificamos os conhecimentos docentes mobilizados em cada sessão do experimento, destacados conforme os dados apresentados. Vale ressaltar que, nas etapas do estudo, os conhecimentos foram sendo construídos e aprimorados de forma não linear. Por exemplo, em alguns casos, uma noção só vai ser de fato compreendida pelos sujeitos após toda a etapa de estudo, duas ou mais sessões. Assim, nos quadros 19 e 20, fizemos um agrupamento de sessões para identificar determinados conhecimentos, outros são identificados em uma única sessão.

Ressaltamos que alguns conhecimentos que apareceram durante o experimento, mas não foram destacados ou discutido aparecem descritos na terceira coluna dos quadros 19 e 20, pode ser também uma habilidade inerente a um tipo de conhecimento, como por exemplo a capacidade e mostrar demonstrar o deduzir, propriedades dos conhecimentos matemáticos. As técnicas desenvolvidas foram categorizadas no âmbito do conhecimento matemático (CC).

O discurso tecnológico-teórico ganha o status de conhecimento didático do conteúdo matemático em jogo, tanto como elemento da TAD, como do ponto de vista de equipar o professor para explanação e exploração das técnicas.

O trabalho de grupo visa potencializar o desenvolvimento do conhecimento que se deseja estudar, por meio do compartilhamento de conhecimento, tendo em vista, que a linguagem utilizada pelos sujeitos e seus pares pode ser mais acessível, que a linguagem do professor (ou do pesquisador). Nesse sentido, é um conhecimento de cunho pedagógico que pode ser validado em qualquer área específica de ensino, matemática, biologia, física etc.

Com relação ao conhecimento tecnológico, destacamos que o AVA/Moodle e o aplicativo de celular Whatzapp, foram utilizados em quase todas as sessões, no auxílio à produção, armazenamento e compartilhamento dos dados: atividades, áudios do trabalho do grupo e do coletivo. Isso só foi possível graças ao conhecimento dos sujeitos a respeito destas interfaces. Esses conhecimentos foram mobilizados na prática diária dos sujeitos, no caso do Whatzapp e (re) significados durante a experimentação, no caso das outras interfaces.

Quadro 19 – Quadro de conhecimentos docentes da pesquisa

EISÓDIOS	CATEGORIA DE CONHECIMENTO	DESCRIÇÃO	OUTROS CONHECIMENTOS
UM	CC	*CC*: Noções sobre a razão de ser de GA;	_____
DOIS	CC, CP, CDC	*CC*: identificação dos objetos de estudo, sistemas de coordenadas, ponto e reta; conhecimento histórico dos sistemas de coordenadas; *CD*: noção de tarefa e técnica (TAD); CDC: apreensão do discurso tecnológico teórico dos sistemas de coordenadas	CP (conhecimento pedagógico): conhecimento do currículo de GA; conhecimento do horizonte do conteúdo CP: conhecimento dos documentos oficiais
TRÊS			
QUATRO	CC, CDC, CDPC	CC: localização de pontos em um sistema de coordenadas; distância entre dois pontos na reta e no plano cartesiano; semelhança e congruência de triângulos no plano cartesiano; Teorema de Pitágoras; razão e proporção; noções de homogeneidade na manipulação das equações; noção de reta como lugar geométrico reta; CDC: apreensão do discurso tecnológico-teórico sobre distância entre dois pontos; apreensão do conceito de tarefa; técnica; teoria e tecnologia em relação aos objetos matemáticos em estudo (CC);	CPT: conhecimento pedagógico tecnológico mobilizado nas tarefas de manipulação da interface do ambiente virtual de aprendizagem, voltado para tarefas de ensino;
CINCO			
SEIS			
SETE	CC, CDC, CDPC, CDPTC	CC: condição de alinhamento de três pontos; colinearidade de pontos no plano cartesiano; cálculo de determinantes e regra de Sarrus; noção de matriz 3x3 CDPC: noção de organização didática; CDM: noção de organização matemática; CDPTC: articulação entre os conhecimentos didáticos e pedagógicos sobre alinhamento de três pontos, incorporados ao uso de interface digital;	CP: noção geral de plano de aula, objetivos de ensino, recursos pedagógicos, avaliação da aprendizagem; organização do trabalho de grupo CT: conhecimento da interface do software winmat;
		CC: reta como lugar geométrico; noção de retas paralelas no plano; ângulo de	

OITO	CC, CD, CDC, CDTC,	inclinação de uma reta; coeficiente angular de uma reta; relação métrica do triângulo retângulo, a tangente; Teorema de Tales; noção geométrica de reta, ponto, vetor e semirreta; representação geométrica e algébrica de uma reta; equação geral de uma reta; equação segmentaria de uma reta CDC: noção entre objeto matemático e sua representação; noção de registro de representação semiótica; CDTC: articulação entre o conhecimento das representações semióticas dos objetos (ponto, reta, vetor, semirreta e ângulo) e a manipulação na interface digital, dessas representações.	CTC: manipulação da interface digital do Geogebra; representação geométrica dinâmica de objetos ponto, reta, vetor, semirreta
NOVE			

Fonte: elaborado pela autora

Quadro 20 - Quadro de conhecimentos docentes da pesquisa

EISÓDIOS	CATEGORIA DE CONHECIMENTO	DESCRIÇÃO	OUTROS CONHECIMENTOS/
DEZ	CC, CDC	CC: retas paralelas no plano cartesiano; equação geral da reta; representação geométrica da reta no plano cartesiano; retas concorrentes no plano artesiano; CDC: tarefa, técnica, tecnologia e teoria; discurso tecnológico -teórico	Habilidade de prova, demonstração e dedução
ONZE	CDPC, CDPTC	CDPTC: mapas conceituais com a articulação entre o conhecimento do currículo, e das estratégias didáticas de ensino, incluído interfaces digitais e abordagens interdisciplinares para o ensino de ponto e reta no plano cartesiano. CDPC: articulação entre organizações matemáticas e didáticas, no âmbito de um plano de ensino CD: incorporação da noção intuitiva de PER	CP: conhecimento do horizonte do conteúdo; planejamento de ensino; elementos de um plano de aula; currículo do ensino médio; reconhecimento do livro didático como recurso pedagógico para o ensino; CT: diferentes interfaces digitais
DOZE			
TREZE			

Fonte: Elaborado pela autora

Os resultados obtidos, tendo como base a análise em torno dos conhecimentos docentes, revelam que diversos desses conhecimentos foram mobilizados durante a experimentação. Alguns foram construídos, quando os estudantes não tinham nenhum domínio, outros foram reconstruídos a partir da visão didática incorporada ao estudo.

A proposta de formação, apoiando-se em nosso modelo alternativo de referência para o ensino de GAP, por meio de um dispositivo- teórico-metodológico (PEP-F/TAD), parece ter tido potencial para fazer os sujeitos, participantes da formação, se apropriarem de certos conhecimentos profissionais docentes, relacionados com o ensino e aprendizagem de GA do ensino médio.

No episódio 13, momento da avaliação, os sujeitos identificam as fragilidades superadas frente aos conhecimentos estudados. Revelam que a formação realizada, tanto no âmbito do conteúdo matemático apreendido, quanto no aspecto da abordagem didática, voltada para o ensino médio, foi algo completamente novo e que deu um significado prático para os conhecimentos que já possuíam. A dialética teoria-prática promovida nas diferentes etapas da formação, parece não ter sido vivenciada por eles na licenciatura até então.

Um outro aspecto que sinalizamos sobre os dados categorizados é o "volume de cada saber" que seria necessário para a prática docente, ou em outras palavras, quais níveis de conhecimento seriam necessários à prática docente ou ainda identificar em quais níveis dos conhecimentos docentes se encontram os professores estagiários. Para estes questionamentos a pesquisa não se empenhou em responder ou apontar tais resultados, pois o essencial foi buscar um caminho cuja formação inicial do professor de matemática pudesse ser ressignificada no marco teórico da pesquisa, tendo em conta que toda a subjetividade envolvida no processo de aprender e ensinar por parte de futuros professores é difícil de ser medida de forma precisa, pois desconsideraria tal subjetividade.

6. 15 Avaliação do PEP-FP/TAD enquanto dispositivo de pesquisa e formação profissional e resultados globais

Antes mesmo de avaliarmos o funcionamento do dispositivo, propomos aos professores estagiários que realizassem a avaliação do processo de formação e a sua autoavaliação de seu próprio desempenho no projeto. Nesse sentido, propomos esta atividade no moodle, onde os professores estagiários poderiam escrever livremente e de forma individual. Além dessa atividade, houve também, uma avaliação oral, depois do momento de partilha do episódio final do projeto.

Após a escuta da produção oral e a leitura das produções escritas, foi possível entender diversos aspectos do processo de formação, ainda não verbalizados pelos estudantes. Nas produções escritas, foi possível identificar aspectos centrais do trabalho realizado, que marcaram de forma significativa a formação desses sujeitos. Do ponto de vista dos objetivos da pesquisa, a fala dos sujeitos, quanto ao aprender e saber fazer para o ensino médio, sinaliza que diversos conhecimentos foram incorporados aos seus repertórios.

O uso da proposta de modelização didática no contexto da física, foi um ponto forte sinalizado por todo os sujeitos, como algo que de início parecia difícil, mas depois se revelou muito gratificante e significativo. Globalmente, os sujeitos pontuaram vários aspectos positivos durante o processo de formação e sinalizaram a dificuldade inicial da proposta que precisaram se adaptar, mas com a continuação do projeto, se integraram e superaram a maioria das dificuldades.

Retomando o contexto da experimentação, demos por início a experimentação propriamente dita, início do processo de estudo. A partir da primeira sessão identificamos a necessidade de replanejar *a priori* todo o processo experimental. Assim, as primeiras duas sessões foram cruciais para a reorganização do estudo, tendo em conta os objetivos a atingir, essencialmente responder a nossa questão de pesquisa.

Repensando cada sessão de estudo realizadas em torno de questões geradoras e dos objetos matemáticos e didáticos, concluímos que cada questão intermediária de estudo pode ser identificada como questão geradora da organização matemática pontual ou local, podendo ser classificada como percurso de estudo e pesquisa (PEP) pontual ou local.

Nesta perspectiva, podemos planejar e desenvolver vários pequenos PEP de formação profissional, tendo em conta várias organizações pontuais, e paulatinamente ir reconstruindo, alternativamente e progressivamente o processo de ensino e de aprendizagem que se deseja promover, para a constituição de um PEP Regional ou até mesmo global. Desta forma, o controle das variáveis de pesquisa, o tempo disponível para pesquisa, o volume de dados coletados, as restrições institucionais e de formação podem ser facilmente controlados.

Quando planejamos o dispositivo, não tínhamos como objetivo replicá-lo em cada episódio de estudo, ou tema intermediário de estudo, dada a necessidade de promover os momentos didáticos da TAD. No entanto, a análise global dos achados nos indica que podemos ter todos os momentos didáticos em um único episódio de estudo, ou em dois, três... etc., dependendo do potencial exploratório do tema desejado.

As condições de realização da experimentação revelam que as sessões do PEP-FP poderiam ter tido maior desdobramentos para o estudo, tanto do ponto de vista matemático, como didático. Nesta perspectiva, achamos que os

episódios de estudo poderiam ser ainda mais ampliados, se quiséssemos abarcar temas, como circunferência ou cônicas etc.

A estrutura de engendramento das organizações didáticas desenvolvidas no estudo $OM_{sc} \Rightarrow OM_P \Rightarrow OM_R \Rightarrow GAP_{PR}$, parece ter fortalecido a possibilidade de constituir um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores voltado especificamente para tal organização.

Os resultados da análise dos achado de nossa investigação, indicam que nosso percurso investigativo permitiu o funcionamento da seguinte estrutura: $PER\ (OM_{sc}) \Rightarrow PER(OM_P) \Rightarrow PER(OM_R) \Rightarrow PER(GAP_{PR})$, ressaltando que GAP_{PR} representa a organização matemática e didática da Geometria Analítica do Ponto e da Reta.

Os observáveis e achados da pesquisa apresentam indícios de que o dispositivo teórico-metodológico, PEP-FP/TAD teria contribuído para os estudantes estagiários, a construção e reconstrução de conhecimentos docentes voltados para ponto e reta na GAP.

No entanto, é inegável que o PEP-FP poderia ter sido ampliado, tanto do ponto de vista exploratório das sessões de estudo, quanto no que diz respeito à abrangência do campo de GA que poderia ter sido estudado.

Os resultados de nossa pesquisa trazem possibilidades para a formação docente inicial e em serviço. Uma delas é o uso racional do tempo disponível para o planejamento das atividades docentes que podem ser desenvolvidas com professores de matemática envolvido numa comunidade escolar. Outra possibilidade é a incorporação desse tipo de projeto no âmbito dos estágios de regência, na Licenciatura em Matemática.

CAPÍTULO 7 REFLEXÕES FINAIS

Este capítulo tem por objetivo retomar os principais aspectos da pesquisa desenvolvendo um conjunto de reflexões finais, que vão percorrer os elementos centrais da investigação: o problema e questão de pesquisa, os objetivos e hipóteses tecidas e o referencial teórico adotado.

Inicialmente, destacamos neste capítulo três aspectos fundamentais da pesquisa, o primeiro se refere à metodologia e os procedimentos metodológico adotados, o segundo é a relevância e o papel do referencial teórico adotado e o terceiro aspecto é o papel da revisão de literatura.

Nesse sentido, vários elementos precisam ser retomados de forma a embasar nossas conclusões: o diálogo com as pesquisas realizadas anteriormente; os aspectos dos modelos de referência, dominante e alternativo que aparecem como influência nos dados coletados; o processo de experimentação entre outros elementos que impactam as conclusões que serão evidenciados nesse capítulo.

Inicialmente, destacaremos a importância da metodologia e procedimentos metodológicos adotados, a relevância e o papel do referencial teórico.

Com relação aos aspectos metodológicos, destacaremos o diferencial da fase experimental, no caso, a formação de professores estagiários, propriamente dita.

Além disso nesta disso nesta conclusão é relevante destacar a validação da pesquisa do ponto de vista científico, as variáveis de difícil contorno, as implicações e limitações da pesquisa, as perspectivas de pesquisas futuras e a contribuição desta pesquisa para área da Educação Matemática. Ressaltamos que apesar da subdivisão em alguns tópicos principais, globalmente os aspectos relevantes estão interconectados ao longo desse capítulo final.

7.1 Implicações da pesquisa: elementos teóricos e metodológicos

A primeira observação que trazemos a respeito do referencial teórico e metodológico, é a articulação que se efetivou entre os dois referenciais, ao ponto de definirmos, a partir de tal articulação, a constituição de um dispositivo de pesquisa e formação de professores.

Se por um lado, do ponto de vista metodológico, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa exploratória, cuja metodologia foi a Engenharia Didática de

PEP, por outro lado, o estudo desenvolvido nos modelos epistemológicos caracteriza a pesquisa com caráter teórico. Significa dizer que em nosso estudo ao falarmos da metodologia e as implicações para a pesquisa, a TAD, enquanto referencial teórico, é inseparável dessa discussão.

Nesse sentido, destacamos que o MER que construímos, possibilitou a reconstrução dos principais aspectos que contribuíram para a constituição do que conhecemos hoje como Geometria Analítica, especialmente a Geometria Analítica Plana. Além disso, é importante ressaltar que nosso MER é um dos modelos possíveis, outros podem ser construídos ou reconstruídos, tomando-o por base ou não.

Para efeito de nossa investigação, o MER cumpre o papel de natureza epistemológico, no âmbito da GA, no sentido da TAD.

Com relação à constituição e análise do MED, ter a referência de um MER para evidenciar as transformações ecológicas dos objetos de estudo, permitiu, primeiramente, iluminar a pesquisadora com relação aos problemas didáticos oriundos da forma como esse MED está posto, no sistema educativo. Em segundo lugar, as conclusões que se impuseram frente ao MED, trouxeram elementos importantes para a construção e experimentação do PEP-FP.

O MERA, ou simplesmente o nosso M_A, constituiu-se, na medida do possível, como um misto contrabalanceado dos aspectos relevantes do MER, não contemplados no MED e vice e versa. Nesse sentido, cumpriu o seu papel de ser “alternativo” para a proposta de pesquisa e formação de professores sobre GAP, buscando superar o paradigma de visita às obras e a abordagem vetorial de GA.

O fenômeno que nos parece ter ocorrido durante todo o estudo e o processo de pesquisa e formação, é que o PEP-FP, enquanto referência metodológica de pesquisa e formação de professores, articulado à TAD, configurou-se como um dispositivo teórico-metodológico, que permitiu o questionamento do mundo, mais especificamente, o mundo de uma parte da GAP.

Não podemos afirmar que este fenômeno teria ocorrido se a teoria adota fosse outra. O PEP surgiu no âmbito das pesquisas que envolveram a própria TAD. Nesse sentido, conjecturamos que existe uma estreita relação entre esses referenciais. Nessa relação, enquanto um questiona (PEP), o outo aprofunda (TAD) por meio dos elementos que compõem a essência dos objetos

matemáticos, as organizações matemáticas e consequentemente as organizações didáticas.

O caráter agregador do dispositivo começa a ser desenhado, inicialmente, de forma tímida, na construção e análise dos modelos epistemológicos e em seguida, mais fortemente, na descrição *a priori* das sessões de estudo. Apesar de não ser possível prever certos comportamentos dos sujeitos frente às atividades que seriam propostas, ter uma base para o trabalho de experimentação foi fundamental com a descrição *a priori* do experimento. Isto porque, revisitamos essas *análises a priori*, muitas vezes, para replanejar as situações que foram propostas no experimento. Ainda assim, a quantidade de sessões de trabalho ultrapassou aquelas prevista*,* algo que consideramos normal na engenharia didática de PEP.

Sob outra perspectiva, os episódios de estudo, em blocos de dois ou três episódios, se configuraram, do ponto vista micro, como PEP-FP que permitiu desenvolver vários PEP pontuais ou locais ao longo do estudo.

Esse resultado nos permite afirmar que, no âmbito de nossa investigação, o dispositivo permitiu o funcionamento da seguinte estrutura, que já havíamos destacado: $PEP\ (OM_{sc}) \Rightarrow PEP(OM_P) \Rightarrow PEP(OM_R) \Rightarrow PEP(GAP_{PR})$, ressaltando que GAP_{PR} representa o conjunto de organizações matemáticas e didáticas da Geometria Analítica de Ponto e Reta.

A cada sessão de trabalho, certos conhecimentos docentes, específicos, referentes à própria situações didáticas, eram mobilizados ou (re)significados pelos sujeitos. Pouco a pouco, foram evoluindo-se no funcionamento de cada PEP e gerando novos episódios de estudo. Neste movimento típico do trabalho com o PEP, composto por questões geradoras de cada seção do experimento, gerou também um quadro de conhecimentos docentes, matemáticos e didáticos tendo o aporte da TAD. Ressaltamos que muitos desses conhecimentos foram estruturados (desenvolvidos) pelos sujeitos durante mais de uma sessão.

Numa perspectiva macro, a respeito do desenvolvimento do experimento, o dispositivo viabilizou aos sujeitos, condições de (re)significar certos conhecimentos docentes. Esse resultado nos leva a retomada dos elementos essenciais da investigação frente aos achados, coadunando para respostas à questão de pesquisa.

7.2 Implicações da revisão de literatura para pesquisa

Tendo como referência a revisão de literatura realizada no capítulo 2, destacamos como alguns aspectos ou resultados apontados pelos autores dialogam ou se distanciam do nosso estudo e as eventuais implicações que esses trabalhos trouxeram para nossa pesquisa.

O primeiro ponto é que nenhuma das pesquisas visitadas, utilizou o mesmo referencial teórico-metodológico adotado nesta pesquisa (o PEP-FP). Alguns estudos, embora tenham utilizado referencial teórico da TAD, não associaram o referencial de conhecimentos docentes com a TAD. Também não encontramos trabalhos sobre formação inicial, com estagiários do curso de licenciatura em Matemática, que buscassem, como em nossa pesquisa, associar o estudo dos objetos matemático de GA, aos aspetos da formação didática e pedagógica do futuro professor de matemática, por meio de um PEP-FP. Nesse sentido, nossa pesquisa se diferencia das pesquisas já realizadas, além de ao mesmo tempo, ter uma natureza teórica e experimental.

Com relação ao uso de tecnologias, foco principal de muitas das pesquisas visitadas, nosso estudo incorporou a tecnologia digital nas atividades de experimentação, mas delimitou seu uso às necessidades previstas nas situações didáticas, além de ser um elemento potencializador para o desenvolvimento do conhecimento tecnológico do conteúdo. Nesse sentido, o uso da tecnologia foi específico para cada atividade, cada situação didática, não sendo ela tomada como foco principal da pesquisa, diferentemente dos resultados apresentado por Santos (2016) sobre as pesquisas com o foco em TIC.

Além desse aspecto, concordamos com o papel potencializador do software defendido nas pesquisas com TIC, especialmente o Geogebra. No caso da nossa pesquisa, ajudou nas visualizações de representação de objeto de GA, que não acessíveis com lápis e papel.

As pesquisas bibliográficas ou históricas identificadas na revisão de literatura, contribuíram em nosso estudo, por evidenciar as lacunas existentes nas pesquisas sobre GA no Brasil, no período analisado.

Partindo dessas lacunas, fizemos um esforço para fazer reviver alguns elementos de GA não desenvolvidos nesses trabalhos, como por exemplo, o estudo do modelo epistemológico de referência para GAP, a partir de uma construção histórica baseada em textos históricos originais.

O trabalho realizado com os professores estagiários, bem como a análise preliminar do currículo da licenciatura, corroboram com o resultado já apontado por Soares (2013), que é o desaparecimento de GAP ou sua redução à apenas um tópico de estudo durante a graduação da Licenciatura em Matemática e a emergência cada vez mais forte do estudo de vetores em detrimento de GAP.

Além disso, as dificuldades apresentadas por alunos do ensino superior na visualização e interpretação de problemas em 3D, citado por Santos (2016), consequência da falta de aprofundamento no estudo de GAP, podem ser minimizadas com o trabalho realizado em duas dimensões, durante a formação desses futuros professores.

Esta afirmação se apoia no que os dados coletados indicaram, que não há, de fato, aprofundamento do estudo de GAP, na Licenciatura em Matemática analisada. Todo o trabalho de GA é calcado em torno do estudo de vetores, principalmente, vetores no espaço, ou seja, na álgebra vetorial. Este resultado se assemelha ao que acontece na Bélgica, apontado por Lebeau (2009), e reforça a importância do desenvolvimento de estudos sobre GAP independentes da abordagem vetorial, especialmente na Licenciatura em Matemática, como o que desenvolvemos em nossa pesquisa.

Diante disso, o trabalho realizado com os estagiários recoloca os tópicos de GAP como objetos de estudo importantes para a formação do futuro professor que atuará no ensino médio.

Com relação à constituição do dispositivo PEP-FP/TAD, concebido como possibilidade de pesquisa e formação inicial de professores, o estudo desenvolvido por Andrade (2012) contribuiu para a concepção de nosso dispositivo, tendo em vista o trabalho realizado pelo autor com professores em serviço, ter se mostrado como dispositivo metodológico positivamente diferenciado para formação continuada de professores no efetivo exercício da docência, resguardando as diferentes especificidades entre a pesquisa de Andrade (2012) e a nossa.

Com relação aos diferentes aspectos da aprendizagem de GA, um ponto que foi unanime nas pesquisas revisitadas, especialmente as pesquisas de campo, foi a dificuldade de os sujeitos pesquisados fazer a conversão de representações do registro algébrico para representações do registro gráfico, ou vice-versa.

Em nossa pesquisa, o foco foi explorar com os estudantes a ideia de conhecimento didático relacionado com o ensino e aprendizagem de um objeto matemático. Em nossa pesquisa, a passagem do registro geométrico para o algébrico (e vice e versa) foi fundamental, na visualização de propriedades como: proporcionalidade de segmentos, paralelismo de retas ou de segmentos, semelhança de triângulos retângulos etc.

Do ponto de vista do conhecimento docente, os estudantes evidenciaram ter usado diferentes tipos de registros de representação semiótica, especialmente, o algébrico e geométrico. Ficou evidenciado, também, a necessidade de propor tarefas que permitiriam aos alunos do ensino médio transitar por diferentes registros de representação semiótica.

Do ponto de vista cognitivo, não analisamos as produções dos sujeitos sobre a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. Não podemos, entretanto, afirmar com precisão que as dificuldades dos sujeitos no cumprimento das diferentes tarefas, estejam relacionadas à passagem do registro algébrico para o geométrico, e vice-versa. Pressupomos pelos resultados positivos obtidos, que as dificuldades enfrentadas tenham sido superadas com o experimento.

Com relação às pesquisas que trataram da formação inicial de professores e do estágio supervisionado, Teixeira (2013), Leal (2016) e Zimmer (2016) trouxeram como implicações para nossa investigação, a necessidade de promover, em uma proposta de formação com estagiários, as articulações entre teoria e prática, e entre os diferentes conhecimentos docentes, especialmente, entre o conhecimento matemático, didáticos e pedagógicos.

No que se refere aos conhecimentos matemáticos, as propostas de estágios vigentes praticamente não incluem no trabalho discussões a respeito da matemática a ser ensinada nas escolas. O matemático é desprezado em detrimento dos conhecimentos pedagógicos. Essa problemática se configura, em nosso ponto de vista, como elemento limitador da formação do futuro professor.

Destacamos como muito relevante, para a nossa pesquisa, o trabalho de Nguyen (2017), pois muitos aspectos matemáticos foram agregados à nossa pesquisa, a partir de seu estudo epistemológico. Essa autora trouxe uma visão ampla do desenvolvimento da Geometria e permitiu o acesso a obras selecionadas (obras de difícil acesso) por ela, a partir do estudo do seu texto,

possibilitando, assim, agregar em nossa pesquisa vários aspectos do saber que se constituiu como GA, identificando as fragilidades na consolidação dessa área.

Por fim, a revisão de literatura foi fundamental no desenho geral da pesquisa, incorporando na proposta de formação, alguns aspectos apontados julgados relevantes para a formação do futuro professor.

7.3 Resultados importantes de nossa pesquisa

Lembramos nossa questão de pesquisa: *Quais conhecimentos novos (ou não) podem ser adquiridos por professores estagiários em Geometria Analítica Plana, com a ajuda de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), e quais benefícios poderão obter para projetar (conservá-los) esses conhecimentos no ensino médio?*

Com relação à primeira parte da pergunta*, c*oncluímos que, os conhecimentos docentes apresentados no capítulo 6, foram sintetizados nas categorias principais que estabelecemos: conhecimento matemático, conhecimento didático e secundários, conhecimento pedagógico e conhecimento do horizonte.

Com relação à segunda parte da questão de pesquisa, nossa análise mostra que há indícios de que houve alteração nos conhecimentos que faziam parte do equipamento praxeológico dos sujeitos da pesquisa. Eles parecem ter incorporado praxeologias oriundas do trabalho realizados do PEP-FP, as quais definimos como *praxeologias dos professores estagiários*. Essas praxeologias foram projetadas para possíveis atividades com classes de ensino médio, reincorporando ao seu equipamento praxeológico novos saberes da docência, descrito como um conjunto de conhecimentos voltado para o ensino de GAP.

Essa última consideração é o principal elemento de resposta para a segunda parte da pergunta de pesquisa, pois revela que o objetivo geral da pesquisa foi alcançado. assim como a validação de nossa hipótese pesquisa.

Diante dos achados, podemos afirmar que nossos objetivos foram alcançados globalmente, tendo como exceção o fato de não ter conseguido proporcionar aos sujeitos realizarem uma análise de suas organizações matemáticas e didáticas, pelo menos, do ponto de vista da TAD. As análises realizadas foram no âmbito geral do trabalho coletivo do grupo. Além disso, as organizações matemáticas e didáticas propostas pelos professores estagiários se referiram a potenciais alunos, não sendo efetivamente aplicadas com os

alunos (reais) do ensino médio. Nesse sentido, os próprios estagiários sugeriram desenvolver uma segunda etapa do projeto, que seria a aplicação das sequências de ensino, elaboradas por eles, nas escolas conveniadas ao estágio supervisionado.

7.4 Variáveis de difícil contorno, contribuições para a área e pesquisas futuras

Sabendo que a pesquisa teve como etapa principal a fase experimental, é nela que residiu a maior parte restrições e dificuldades que identificamos como variáveis de difícil contorno. A fase experimental reforça e reafirma as conjecturas ou hipóteses levantadas ao longo do estudo teórico e bibliográfico, trazendo possibilidade de pesquisas futuras e contribuições para a área de Educação matemática.

Sabendo que o projeto teve duas fases experimentais, a primeira um estudo piloto com um grupo de estudantes de estágio e a segunda o *ateliê de modelização didática* com um novo grupo de estudantes. Para a realização do ateliê, a universidade, onde a pesquisa foi realizada, impôs uma dificuldade que quase inviabilizou a etapa experimental. A organização do cronograma com os sujeitos, para a realização da segunda fase experimental, foi difícil pela falta de disponibilidade do grupo e pelas constantes paralisações que ocorreram nas datas previstas para os encontros.

Na sequência, aconteceu uma greve de professores que nos levou a reorganizar esse cronograma, a partir da autorização do comitê de ética e pesquisa do comando de greve docente. Muitos estudantes desistiram de participar da pesquisa, e o número de participantes foi reduzido de vinte e oito para dezesseis. Diante desses fatos, fizemos um cronograma semanal de trabalho, e de forma intensiva, realizamos a fase experimental em três meses. O uso do AVA viabilizou a conclusão de algumas atividades, bem como a sistematização dos dados coletados e das atividades produzidas pelos sujeitos. Porém, algumas atividades, como por exemplo, as atividades sobre demonstração, não tiveram os momentos de partilha e socialização coletiva. O ambiente virtual minimizou a dificuldade relacionada ao tempo dedicado ao trabalho presencial. Asseveramos que, no caso do PEP-FP, as atividades não coletivas à distância só são viáveis se os sujeitos fizerem reflexões para reforçar o trabalho presencial.

Um aspecto que teve impacto em toda a fase experimental foi a escolha dos objetos de estudo, a limitação do tempo, que foi reservado à fase experimental, gerou tensões, pois a cada novo episódio de estudo, surgia a legítima necessidade de aprofundamento de cada tema, o que foi implicou em um número maior de episódios. Por fim, os temas abordados foram bem aprofundados, no entanto, não alcançaram toda o setor de GAP estudada no ensino médio. Ao final, ponderemos que seria necessário um trabalho permanente de formação, na perspectiva do desenho do *dispositivo- PEP-FP/TAD* para tentar dar conta do volume de conteúdos demandados pelos sujeitos.

Nessa perspectiva é possível dar continuidade ao modelo de estudo com as temáticas não abordadas, utilizando o mesmo MER ou reconstruindo outros modelos de referência.

Ainda com relação ao conhecimento matemático, nossa pesquisa revela a necessidade de um estudo aprofundado sobre vetores no plano e no espaço, a partir da consolidação dos conhecimentos da geometria sintética e GAP, de forma a constituir-se como um bloco tecnológico-teórico fundamental na construção dos conhecimentos da Álgebra Linear. O objetivo seria equipar os sujeitos (futuros professores) matematicamente com condições de continuidade para estudo mais complexos.

No âmbito das escolhas teóricas realizadas, emergiu em diferentes momentos e aspectos da pesquisa, a questão dos registros de representação semiótica. Tanto do ponto de vista epistemológico, quanto didático. Identificamos mudanças, do ponto de vista ecologia de alguns objetos, principalmente no que diz respeito à forma de representá-los, conservando seu significado ao longo da história.

No âmbito das pesquisas sobe a formação do professor de Matemática, nosso estudo retoma a discussão entre teoria e prática, a partir de um viés que incorpora os diferentes conhecimentos docentes necessários à prática do professor, tendo a matemática e a didática como conhecimentos centrais a ser desenvolvidos no estágio supervisionado. Nesse sentido, a pesquisa traz uma abordagem para o estágio supervisionado que, em nosso ponto de vista, potencializa os momentos de estudo e pesquisa como prática cotidiana do trabalho profissional do futuro professor. Na fase experimental, destaca-se, em

diferentes episódios de estudo, a importância do conhecimento tecnológico e pedagógico do futuro professor, articulado com a matemática e a didática.

Por fim, sobre o aspecto da formação inicial de professores, ressignificamos a noção de conhecimentos docentes para além de categorias pré-determinadas, ainda que estás sejam fundamentais e balizadoras dos processos de formação.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **Revemat**. Florianópolis, v.11, n. 2, 2016, p.115-141.

ALMOULOUD, Saddo. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F da**.** Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012, p. 22-52.

ANDRADE, R. C. D. **Geometria Analítica Plana:** Praxeologias Matemática no Ensino Médio. 2007. 121f. Dissertação (Mestrado) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo para um percurso de formação de professores o caso da geometria analítica**. 2012. 172f. Tese (Doutorado) – Instituto de ***Educação Matemática*** e Científica, Programa de Pós-Graduação em ***Educação*** em ***Ciências*** e ***Matemáticas,*** Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

ANDRADE, R. C. D.; GUERRA, R. B. Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.4, 2014, p.1201-1226.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. Recherches e Didactique des Mathématiques. **La Pensée Souvage-Éditions.** Grenoble**,** v.9, n.3, 1988 p. 281-308.

BALL, D. L.; D. L.; THAMES, M. H. Phelps. G. Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** v.59, n.5, 2008, p.389-407.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edição 70, 2011.

BECHARA, E. **Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de janeiro: Editora Nova Fronteira, 2011.

BLOCH, M. **Apologia da História ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

BORDALLO, M. **As cônicas na Matemática escolar brasileira: História, presente e futuro**. 2011. 61f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <<http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/39%20Mirella%20Bordallo.pdf>> Acesso: 23 jul 2017.

BOSCH.M; GARCIA, F. J.; GASCÓN, J. HIGUERAS, L.R. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una

propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Educación Matemática**, v. 18, n. 2, 2006, p. 37-74.

BOSCH, M.C. Percursos de estudo e pesquisa no ensino e na formação de professores: novas perspectivas. **Palestra.** Pontifício Universidade Católica de São Paulo (PUC- SP), São Paulo, 2018.
BOSCH, M. GARCIA, J.; GASCÓN, J. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, México, v. 18, n. 2, 2006, p.37-74.

BRIOT, C. ; BOUQUET, J.C**. Leçons de Géométrie Analytique**. Dezobry, E. Magdeleine et C., Libraires-Éditeurs. Paris, 1860.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble. **La Pesée Sauvage-Éditions**, v 7, n.2, 1986, p. 33-115.

BROUSSEAU, G**. La Théorie des Situations Didactiques** – Le Cours De Montreal, 1997. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>. Acesso em : 17 abr 2015.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias,** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000. Disponível em : <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso: 17 jan 2019.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **PCN + Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza Matemática e Suas Tecnologias.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias v.2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular Educação é a Base**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf> Acesso: 17 jan. 2019.

BRASIL. Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Disponível em : <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/L13415.htm> Acesso em: 17 jan. 2019.

BUHLER, M. *et al*. **Mathématiques approche par des textes historiques M.A.T.H**. Paris : Université - Paris VII, 1990. Disponível em :<http://numerisation.univ-irem.fr/PS/IPS90001/IPS90001> Acesso: 30 nov. 2017.

CALÇADA, C.S.; SAMPAIO, J.L.**Física Clássica.** São Paulo: Atual, 1985. Disponível em:<http://www.mediafire.com/file/4o5mslvgutotgkd/fisica_classica_vol4.pdf> . Acesso em: 15 fev. 2019.

CARNEIRO. P. S. **Geometria vetorial na escola:** uma leitura geométrica para sistemas de equações**.** 2007. 213f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

CARVALHO, R. A. **O Desenvolvimento e uso da biblioteca de funções em *Visual Basic for applications* do Excel aplicada ao ensino de Geometria Analítica**. 2007. 116f. Dissertação (Mestrado) – CEFET RJ, Rio de Janeiro, 2007.

CASTRO, S. C. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.** 2001. 111f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

CAVALCA, A. V. P. **Espaço e Representação Gráfica:** Visualização e Interpretação**.** 1997**.** 169f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CHAACHOUA, H. **L'analyse di role dêsmanuels dans l'approche anthropologique**. Grenoble : Grenoble Université Alpes, 2014.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. **La Pensée Sauvage**. Grenoble, v.17, n.3, 1997. p.223-267.

CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, **La Pensée Sauvage**, v.9, n.2. 1991. p.56-89.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n 1, 1992, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. Les analyses de pratiques enseignantes en théorie anthropologique de la didactique**.** Recherches en Didactique de Mathématiques. **La Pensée Sauvage-Éditions.** Grenoble, v. 19, n 2, 1999 p.221-266.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder.Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. **15e École d'Été de Didactique des Mathématiques.** Clermont-Ferrand, 2009 Disponível em: <http://www.ardm.eu/book/export/html/676>. Acesso em : 15 abr 2015.

CHEVALLARD, Y. La notion de PER : problèmes et avancées**. UMR ADE**F. Toulouse, le 28 avril 2009. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf>. Acesso em : 17 abr 2015.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. **UMR ADEF**, França, 2007a. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf>. Acesso em: 03 jul 19.

CHEVALLARD, Y. **Um concept en émergence : la dialectique es médias et des milieux**. UMR ADEF, Université de Provence, França, 2007b.

CALLIOLI, C. A. *et al*. **Álgebra Linear e aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 1991.

CORREIA, W. M. **Aprendizagem significativa, explorando alguns conceitos de Geometria Analítica**: Pontos e Retas. 2011**.** 169f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

COSTA, A. C. **Geometria Analítica no Espaço: análise das organizações matemática em Materiais Didáticos**. 2015. 114f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. PUC-SP, São Paulo, 2015.

DESCARTES. **Histoire des mathématiques** : la Géométrie de René Descartes. Disponível em: <http://debart.pagesperso-orange.fr/geometrie/geom_descartes.html>. Acesso: 29 mai 2018.

DUVAL, R.**L'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée et de l'activité mathématique:cours sur apprentissages intellectuels donné à la PUC-SP**. São Paulo: Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, 1999.

DUVAL, R. A cognitive analisis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**.n. 61, 2006. p.89-99.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**: **registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus, 2003. p.123-190.

DESCARTES, René **La Géométrie de René Descartes - Livre Premier** Texte en français modernisé d'après l'édition de 1637 publiée dans The geometry of Rene Descartes de David Eugene Smith et Marcia L. Latham,avec rédaction de quelques notes d'après l'édition latine de 1683, Rabuel et l'édition anglaise.

DI PINTO. M. A. **Ensino e aprendizagem de geometria analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90**. 2000. 114f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2000.

DIAS, M. S. da S. **Um estudo da demonstração no contexto da Licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**. 2009. 213f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2009.

DANTE, L. R. **Matemática Contextos e Aplicações**. São Paulo :Ática 2013

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda, 1991. p.15-65.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Coginitivo Da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registro de representação semiótica**. São Paulo: Papiros, 2003. p.77-87.

EULER, L. Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes curbes. In: BERLIN, D. A. **Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin:** avec les mémoires pour la même année, tirez des registres de cette Académie v. 4. Germany, Berlin: Editora Chez Ambroise Haude, 1750, p. 219-233.

EDWARDS, C. H. Jr. **Introdução à Álgebra Linear.** São Paulo: Prentice Hall do Brasil, 1998.

SILVA, E. R. da. **Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.** 2017. 253f. Tese (Doutorado). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2017.

FEITOSA, M. O. Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. São Paulo: Atual, 1981.

FARIA, R. R. **Uma abordagem didática em relação à aprendizagem das equações de reta no estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio**. 2011. 178f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

FERNANDES, D.; FONSECA; L. **Argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores**. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/03Domingos.pdf.> Acesso em: 19 abr 2015.

FIALHO, E. C. S. **Uma proposta de utilização do *software* e GeoGebra para o ensino de Geometria Analítica**. 2010. 167f. Dissertação (Mestrado) – CEFET, Rio de Janeiro, 2010.

FIORENTINI, D. *et al*. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**. Belo Horizonte, n. 36, 2002, p.137-160.

FRAZON.C.R.O. **Análise do livro I da Geometria de Descartes: Apontando caminhos para o ensino a Geometria Analítica seguindo uma abordagem histórica.** 2004. 205f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2004.

FREITAS, R. L. **A influência de organizações didáticas no trabalho matemático dos estagiários da licenciatura:** um estudo da função exponencial. 2015. 172f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2015.172f.

FREITAS, R. L. F. ALMOULOUD, A. S. Contribuições para a construção de saberes docentes sobre geometria analítica plana: um estudo durante o estágio supervisionado **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v.6, n.1, 2017, p.25-45.

FREITAS, R. L. F. ALMOULOUD, A. S, condições e restrições para o desenvolvimento de um percurso de estudo e pesquisa de formação profissional: um estudo piloto. II Simpósio Latino Americano de Didática da Matemática, de 03 a 08 dezembro 2018. **Anais**. Jarinu- São Paulo- Brasil, 2018

FREITAS, R. L. ; ALMOLOUD, S. A. ; MATHERON, Y. La construction de savoirs pour un enseignement de la géométrie analytique plane :conception d'un PER – Formation Professionnelle (pôster) In : Citad 6 -6eme Congrés Internationale de la Théorie Anthoopologique du Ditactique, **Anais**, Grenoble, França,2018.

FUSCO, C. S. A. **Ensino de uma disciplina básica de matemática (Geometria Analítica e Cálculo Vetorial) num curso de Engenharia**. 2002. 356f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

GAVANSKI, D. **Uma experiência de Estágio Supervisionado norteado pela Modelagem Matemática**: indícios para uma ação inovadora. Dissertação (Mestrado em Educação). 1995. 174f. Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná, Guarapuava. 1995.

GASCÓN, J. Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. **Recherches en didactique des mathématiques**, v.13, n.3, 1993, p.295-332.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de um problema didáctico. el caso del álgebra elementar. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matémática Educativa**, v.203 n.23, 2011. p.230-245.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas **Educación Matemática**, n.4, 2014. p. 99-123.

GAITA, Rosa Cecilia. **El paso de la geometría sintética a la geometría analítica.** 2014**.** 178f. Tese (Doutorado) - Facultad De Educación Y Trabajo Social., Universidad Valladolid, Peru, 2014.

GATTI, B. A. A formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Est. Aval. Educ.,** São Paulo, v.25, n57, 2014.p.24-54.

GATTI, B. A. **Professores do Brasil:** impasses e desafios. Brasília: Unesco,2009.

GATTI, B. A. Formação de Professores no Brasil: características e problemas. **Educ. Soc. Campinas**, Campinas-SP, v. 31, n. 113, 2010, p.1355-1370.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 223f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GIARDINETTO, J.R.B. **A relação entre o abstrato e o concreto no ensino de Geometria Analítica a nível de 1° e 2° graus**. 1991. 145f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos, 1991.

GUERATO, E. T. **Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana**. Dissertação (Mestrado). 2010. 129f. – Universidade Bandeirantes, 2010.

GOULART, J. S. S. **Desenhos e Gráficos:** Produção de Significados pelos participantes de um curso de Geometria Analítica. Dissertação (Mestrado). 2008. 190f. Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2008.

HAJNAL, F. O **Estudo do Paralelismo no Ensino de Geometria Plana:** do Empírico ao Dedutivo. 2007. 201f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Pontifícia Universidade Católica de SP. São Paulo, 2007

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**. São Paulo: Atual, 1974.

IEZZI, G. *et al***. Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

IREM, Le Groupe Inter-I.R.E.M. **Épistémologie Et Histoire Des Mathématiques :** Le rigueur et lecalcul. França, Paris: CEDIC, 1982

JAMMAL, E.F. **Os ostensivos e não ostensivos utilizados no estudo das noções de ponto e reta no plano no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado). 2011. 179f. – Universidade Bandeirantes. São Paulo, 2011.

JÚNIOR, J. L. V. **A Geometria Analítica como conteúdo do Ensino Secundário:** Análise de livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM. 2013. 203f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, 2013.

LAGDEM, V.G. CÔNICAS: **Uma proposta através de planilhas do *Excel***. Dissertação (Mestrado). 2011. 190f. CEFET, Rio de Janeiro, 2011.

LEAL, M.de F. C. **Teoria e prática no processo de formação profissional: o caso de um curso de Licenciatura em Matemática**. 2016. 326f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC-SP. São Paulo, 2016.

LEBEAU, C. **Etude d'une genèse d'un modèle algébrique du systèma formé par les points, droites et plans de l'space usuel**. 2009. 543f. Tese (Doutorado) – Université de Liège, Liége-Belgique, 2009.

LEBEAU, C ;SCHNEIDER, M. Equations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique**. Recherches en Didactique des Mathématiques** v.30, n.1, 2010. p.38-56.

LEMKE, M. F. S.M. **Retas e Planos na Geometria Analítica Espacial:** Uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de *software* de Geometria Dinâmica. Dissertação (Mestrado). 2011. 302f. Universidade Bandeirante, São Paulo, 2011.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, Ano III, n. 4, 1995. p.78-89.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano com soluções de exercícios. Geometria analítica, vetores e transformações geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

LUCAS, R. D. **GeoGebra e moodle no Ensino de Geometria Analítica.** Dissertação (Mestrado Profissional). 2009. 201f. –Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

MAIRE,I.**La Géométrie, in Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et trouver la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Météores et La Géométrie.** Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594/f4.double.r=> Acesso em: 28 mai 2018.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Teachers College. **Record,** v.108, n.6, 2006, p. 1017–1054.

MATOS, F. C. de**. Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais: o caso da álgebra linear**. 2007. 318f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, 2007.

MATTOS, S. G. **Licenciatura em Matemática a distância: compreensão a partir de um estudo sobre o ensino de vetores**. 2012. 245f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino/aprendizagem da Geometria Analítica**. 1999, 202f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

NGUYEN, N. G.**Ecologie du formalisme "bipoint" dans l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire.** 2017. 345f. Tese (Doutorado). Faculdade de Ciências, Departamento de Educação. Bélgica, 2017.

OLIVEIRA, G. P. Tecnologias digitais na formação docente: estratégias didáticas com uso do superlogo e do Geogebra. In: **Congreso Iberoamericano de Educación Matemátic**a 7, 2013, Montevideo: programa y resúmenes del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2013. v. 1, 359f.

PAULA, P. A. **Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de álgebra em estudo da Geometria Analítica**. 2011. 179f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

PAIVA, M. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2009.

PARANHOS, M. de M. **Parametrização e movimentação de Curvas e Superfícies para uso em modelação matemática**. 2015. 345f. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC-SP. São Paulo, 2015.

PASSOS, A. Q. **Geometria Analítica –pontos e retas:** uma engenharia didática com software de Geometria Dinâmica. 2008. 234f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

PEAMAT. **Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática**. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/educacao-matematica#grupos-de-pesquisa-certificados-pelo-cnpq>. Acesso em: 13 abr 15.

PEREIRA, D. G. **Um estudo da reta no Ensino Médio utilizando trajetórias hipotéticas de aprendizagem.** 2011. 211f. Dissertação (Mestrado Profissional) –Pontifícia Universidade Católica SP –São Paulo, 2011.

PERALI, L. C. **Operações com vetores e suas aplicações no Estudo da Física: umaabordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de umambiente de Geometria Dinâmica.** 2011. 98f. Dissertação (Mestrado). — Universidade Bandeirantes, São Paulo, 2011.

PEROTTI, A. R. **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino**. 1999. 233f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. 388f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2005.

PIMENTA, S. G.; LIMA, M.S.L. **Estágio e Docência**. São Paulo: Cortez, 2012

PIRES, M. A. L.M. Estágio Curricular Supervisionado: uma análise dos cursos de Licenciatura em Matemática. In: SANTA'ANA, Claudinei de Camargo; SANTANA, P. I.; EUGÊNIO, B. G. (Org.). **Estágio supervisionado, formação e desenvolvimento profissional docente**. São Carlos: Pedro & João Editores, 2012. p.67-87

PIRES, C. M.C.; SILVA, M. A.; SANTOS, R. C. dos. Reflexões sobre a formação Inicial de professores de Matemática, a partir de depoimentos de coordenadores de curso de licenciatura. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora. **A formação do professor que ensina matemática**. Belo Horizonte. Autêntica, 2006. p.34-45.

POHLENZ, Vilson. **O estágio no curso de licenciatura em matemática da Universidade do Contestado-Campus Caçador: um estudo de caso**. 1999. 144f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação e Universidade Estadual do Centro Oeste do Paraná, Guarapuava,1999.

RIBEIRO, M. V. A. ELIPSE –**Uma abordagem para o Ensino da Elipse no Curso de Licenciatura em Matemática**. 1998. 98f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

RIVENC, F..**Logique et fondement des mathématiques**. Paris: Payot,1992.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando *software* de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática**. 2005. 345f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Rio Claro, São Paulo, 2005.

RIZZON, K. **Análise da Linguagem Matemática relacionada à Geometria Analítica no Ensino**. 2008. 234f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

ROQUE, T**. História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar. Rio de janeiro, 2012.

ROSSINI, Renata. **Saberes Docentes sobre o Tema Função:** uma investigação das praxeologias. 2006. 382f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. PUC/SP. São Paulo, Brasil, 2006. 382f.

SANTOS, R. S. **Tecnologias Digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: Manipulações no *software GrafEq***.2008. 254f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

SANTOS, I. N. **Explorando os conceitos de Geometria Analítica plana utilizando tecnologias da Informação e comunicação:** uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de Professores de

Matemática. 2011. 369f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

SANTOS, A. T. C. dos. **O estado da arte das pesquisas brasileiras sobre geometria analítica no período de 1991 a 2014**. 2016. 277f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC-SP, 2016.

SERRALHEIRO, T. Dias. **Formação de Professores:** conhecimentos, discursos e mudanças na prática de demonstrações. 2007. 147f. Dissertação (Mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, Brasil, 2007.

SHULMAN, L. S. Those Who understand: Knowledge growth in teaching. **Education Researcher**, v. 15, n. 2, 1986. p.4-14.

SHULMAN, L. Conhecimento e Ensino: Fundamentos da Nova Reforma. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, 1987. p.1-23.

SIERRA, T. Á. D. **Lo matemático en el diseño y analisis de Organizaciones didácticas:** los sistemas de Numeración y la medida de magnitudes. 2006. 546f. Tese (Doutorado) Universidad Complutense de Madrid, Madri, 2006.

SILVA, C. V da**. A prática docente e sua influência na construção de conceitos geométricos: um estudo sobre o ensino e a aprendizagem da Simetria Ortogonal**. 2015. 312f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2015.

SILVA, D. C. M. da. **Equação dos pontos conjugados:** Brasil-Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/equacao-dos-pontos-conjugados.htm>. Acesso em: 24 fev 2019.

SILVA, M. J. F. da. LIMA, G. L. de. Conhecimentos desenvolvidos em um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância. **Anais** do XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

SILVA, C. E. **A ação mediadora da Geometria Analítica no ensino e aprendizagem da álgebra linear**. 1998. 248f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

SILVA, C. R. **Explorando Equações Cartesianas e Paramétricas em um ambiente informático**. 2006. 158f. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SILVA, R. S. **Estudo da Reta em Geometria Analítica: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversão de registros de representação semiótica com o uso do *software* GeoGebra**. 2014. 245f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Pontifícia Universidade Católica SP, São Paulo, 2014.

SILVA, E. R. **Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.** 2017. 459f. Tese. (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. Ignez. **Matemática Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2010

SOARES, R. S. **Um histórico do ensino de Geometria Analítica no curso Matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. 2013. 267f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica, v.1**. São Paulo: McGrawHill, 1987.

SOUZA, L. C. **VetorRa - *software* para cálculo vetoriais com realidade aumentada.** 2014. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional) **-** Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2014.

SOUZA, J. R. de. **Novo Olhar:** Matemática. São Paulo: FTD, 2010

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

TEIXEIRA, B. R. **O Estágio Supervisionado e o desenvolvimento profissional de futuros professores de Matemática:** uma análise a respeito da identidade profissional docente. 2013. 184f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina: 2013.

TEIXEIRA, B.R., CYRINO, M. C.de C. T.O estágio supervisionado em cursos de Licenciatura em Matemática: um panorama de pesquisas brasileiras**. Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.15, n.1, 2013, p.29-49.

VARELLA, M. **Prova e Demonstração da Geometria Analítica:** uma análise das organizações didáticas e matemáticas em materiais didáticos. 2010. 357f. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

WENGER, Etienne. **Comunidades de práctica**: aprendizaje, significado e identidad. Barcelona: Paiadós, 2001

VOELKE, Jean-Danie; PICCARD, Gymnase Auguste ; LAUSANNE. Les origines de notreenseignement de la géométrie analytique. **Bulletin,** n.126. Suiça, 2014. Disponível em : <http://www.vsmp.ch/bulletin/Artikel/126/126_Voelke.pdf>. Acesso em: 24 jul 2018.

ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do ensino médio**: por uma aprendizagem de significados. 1999. 507f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Didática em Ensino de Ciências

e Matemática, Faculdade de Educação da USP, São Paulo, 1999.

ZUFFI, E. M. Uma sequência didática sobre funções" para a formação de professores do ensino médio. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2004, Recife. Anais. Recife, 2004. CD-ROM.

ZIMMER, I. **Estágio Curricular Supervisionado na Licenciatura em Matemática:** Um componente curricular em discussão. 2017. 218f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2017.

ANEXO A PLATAFOMA BRASIL

ANEXO B TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE) ESTUDANTE

O presente termo de consentimento livre e *esclarecido (TCLE) tem por objetivo esclarecer aos participantes da pesquisa intitulada: A construção do conhecimento para o ensino de geometria analítica plana: concepção de um PER- Formação profissional*, sob responsabilidade da doutoranda **Rita Lobo Freitas**, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), a respeito dos procedimentos de pesquisa, conforme a resolução nº 196/1996 do Conselho Nacional de Saúde (CNS) que regulamenta as pesquisas envolvendo seres humanos.

Objetivos da pesquisa: realizar um estudo a respeito de tópicos de geometria analítica plana, com objetivo de desenvolver saberes docentes adequados à formação inicial de professores de matemática, inseridos no estágio supervisionado. O trabalho será desenvolvido por meio de um ateliê de modelização didática, que consiste globalmente em sessões de estudo.

Participação: ao concordar em participar da pesquisa, me disponho para responder aos questionários referente à minha trajetória profissional e acadêmica, e também a respeitos dos meus conhecimentos que envolvem a temática da pesquisa.

Confidencialidade do Estudo: os registros da sua participação são mantidos em sigilo, e somente os pesquisadores responsáveis terão acesso às informações. Nas publicações resultantes deste estudo, a identificação dos participantes não será revelada e os resultados serão relatados de forma sumariada preservando o anonimato da pessoa.

Benefícios: os benefícios para os participantes é de ter uma significativa contribuição para sua formação acadêmica, além da contribuição para melhorar o processo de ensino e aprendizagem de geometria analítica durante o estágio supervisionado.

Participação voluntária: toda participação é voluntaria**,** não havendo penalidades para aqueles que decidam não participar desse estudo. Ninguém será penalizado se decidir não participar do estudo em qualquer época, podendo retirar-se da participação da pesquisa, sem correr riscos e sem prejuízo pessoal.

Certificação: todos que aceitarem e participarem do estudo, tendo frequência mínima de 75% nas sessões de formação inclusive nas atividades à distância, receberão o atestado dessa participação emitido pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação matemática da PUC-SP, para os devidos fins e comprovação de sua participação no projeto.

Após conhecer e entender os objetivos da pesquisa, bem como estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências), **AUTORIZO**, por meio do presente termo a pesquisadora **Rita Lobo Freitas** realizar fotos, gravação de áudio e vídeo, coleta de produção escrita das sessões de ensino e das atividades realizadas, que se façam necessárias para colher o meu depoimento sem quaisquer ônus financeiros a nenhuma das partes.

Ao mesmo tempo libero a utilização das imagens (fotos), áudios, vídeos e/ ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, slides e transparências) em favor dos pesquisadores da pesquisa , acima especificados, obedecendo ao que está previsto na legislação que resguardam os direitos das crianças e dos adolescentes (estatuto da criança e do adolescente- ECA, lei nº 8.069/1990), dos direitos dos idosos (estatuto do idoso, lei nº 3298/1999, alterado pelo decreto nº 5.296/2004)

Feira de Santana, ____de _____ de 2019

_____

Assinatura
Nome:
Nº RG:

APÊNDICE A: SITUAÇÕES MODELIZÁVEIS COM GAP: ESTUDO DO SISTEMA ÓPTICO DO OLHO

Este texto complementar da tese surgiu a partir da necessidade de se implementar na etapa experimental de nossa pesquisa, um problema modalizável, tendo a Geometria Analítica como parte desse percurso. Nesse sentido identificamos nos estudos da óptica geométrica um campo fértil para o desenvolvimento de tais situações.

A princípio levantamos a hipótese de desenvolver uma situação fundamental, no sentido de Brousseau (1986), que envolvesse a noção de distância, sua equação, pontos alinhados num plano e projeção de um segmento de reta. No entanto, recaiamos em um modelo epistemológico dominante cuja base é o livro didático. Por esta razão, propusemos uma situação-problema que pudesse ser modelizada matematicamente, tendo na GA o único percurso possível para a solução do problema, ou seja, impossível de ser resolvido pela geometria euclidiana.

Nesse sentido, a óptica geométrica no campo do estudo do olho humano e dos problemas de visão, se configura como um contexto rico, propicio e atual para os estudantes e a sociedade em geral, tendo em conta que todo o estudo da parte de imagens se organiza a partir de um sistema de coordenadas cartesianas no plano, ou seja em duas dimensões.

A partir dessas premissas, realizamos pesquisas na internet, uma entrevista com uma oftalmologista, membro da sociedade brasileira de oftalmologia, além disso, colhemos depoimentos de outros médicos na internet. O objetivo foi identificar as causas de um dos problemas mais atuais no campo da oftalmologia, *a miopia,* que por hipótese, supõe-se tem sido causada em grande número, pelo uso inadequado de aparelhos eletrônicos.

Quando falamos de miopia, em um texto de Educação Matemática, se faz necessário alguns esclarecimentos a respeito desse problema. Antes disso, o que nos chamou a atenção na pesquisa online, é a respeito do que tem causado o aumento cada vez mais cedo deste problema de visão, em crianças, e o aumento do grau de acuidade visual em adultos. A causa desse problema vem sendo atribuída ao uso excessivo de equipamentos eletrônicos como, smartfone, tablets e até mesmo tvs com telas grandes.

A exposição do olho a tais telas, por grandes períodos ao longo do dia, todos os dias, além disso, o uso dos smartfones cada vez mais próximos do olho, ao que parece, têm diminuído a capacidade do olho de ver os objetos, de forma nítida, a longas distâncias. Significa dizer como explicaremos mais detalhadamente adiante que há uma necessidade de colocar os aparelhos cada vez mais próximos do olho (globo ocular). Isto se explica pelo funcionamento do próprio olho.

Em nosso inquérito, interessa-nos as organizações matemáticas que podem ser construídas em torno do problema, ou seja a modelização matemática que pode ser realizada, tendo o aporte teórico da geometria analítica. Especialmente certos aspectos e objetos que podem ser desenvolvidos por meio da interpretação do ponto de vista da óptica.

Nesse sentido, é necessário analisar o fenômeno biológico (miopia) no âmbito da medicina oftalmológica, do ponto de vista da física, nesse caso o estudo das imagens e das lentes simples, em seguida reorganizá-lo do ponto de vista da matemática, especificamente de GAP.

As perguntas que, a *priori,* evidenciadas são: o que é miopia? O que causa esse problema? Em que a matemática ou a GAP entra nesse estudo? E a física participa em que?

A parir deste estudo complementar à tese, que realizamos a respeito de situações modelizáveis no âmbito da GAP, responder essas perguntas requerem um aprofundamento que talvez não seja o foco específico do trabalho desta pesquisa, no entanto, neste ensaio (apêndice A) trataremos de respostas intermediárias que nos forneçam um entendimento mínimo a respeito do tema e suas relações com objetos matemáticos em estudo.

A princípio buscamos entender, ainda que de forma elementar, o funcionamento do olho para estabelecer possíveis relações do funcionamento deste órgão com a óptica e a matemática presente em seu funcionamento. Nesse sentido nós apoiamos em Bicas (1997)[52]. De acordo com o autor, uma das funções fundamentais do olho humano é propiciar a formação das imagens sobre a retina. Existe, portanto, um sistema que permite que essa função se

[52] Docente do Departamento de Oftalmologia e Otorrinolaringologia da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo (USP)

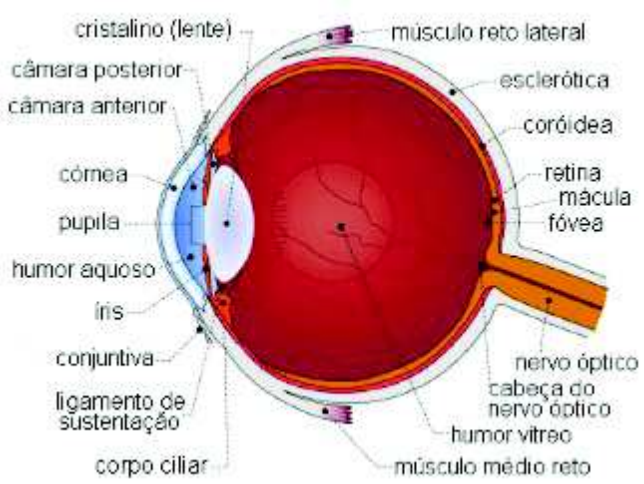
efetive, esse sistema é o sistema óptico conjugado, que segundo o autor explica, não é muito complexo e é altamente eficiente.

Este sistema óptico, vem da óptica, que é estudada pelos alunos do ensino médio, no âmbito na física, por meios das leis físicas que explicam os fenômenos da luz e da visão humana. De acordo com Bicas (1997) podemos sintetizar esse sistema óptico por duas lentes básicas: a córnea (K) e o cristalino (C), também possui um diafragma que controla a entrada da luz (a íris, com o orifício pipilar em seu centro),

a córnea é uma *lente convexo-côncava*, menos curva em sua face anterior.

Pode fazer-se uma analogia entre o funcionamento do olho e uma câmera fotográfica comum. Atualmente dado o avanço tecnológico, podemos afirmar que as câmeras estão cada vez mais próximas desse sistema natural representado para efeito de visualização pela figura 118.

Figura 118 - Estrutura do olho



Fonte: Carvalho (2006, p. 27)

De acordo com Bicas (1997),

> [...] a esclera, a camada envoltória do olho, forma a câmara propriamente dita; a retina é o filme sobre o qual deve ser focalizada a imagem do objeto a ser fotografado (visto); a íris (para o olho) é o diafragma com o qual se controla a abertura (na câmara fotográfica).No caso do sistema óptico, o do olho é composto por duas lentes: uma de poder dióptrico fixo (K) e a outra de valor reajustável (R), enquanto na câmara fotográfica há apenas uma lente, de poder dióptrico constante (equivalendo, pois, à córnea, K), mas um mecanismo com o qual se pode fazer variar a distância focal do sistema (equivalendo à função desempenhada, no olho, pelo cristalino R). (BICAS, 1997, p. 20)

O autor explica que, no caso da câmera fotográfica a distância focal (distância entre o objeto e o filme) é mudada pela variação real da posição entre a lente e o filme; enquanto, para o olho, a distância entre a córnea e a retina é constante, variando o poder dióptrico do sistema pela variação do poder focal do

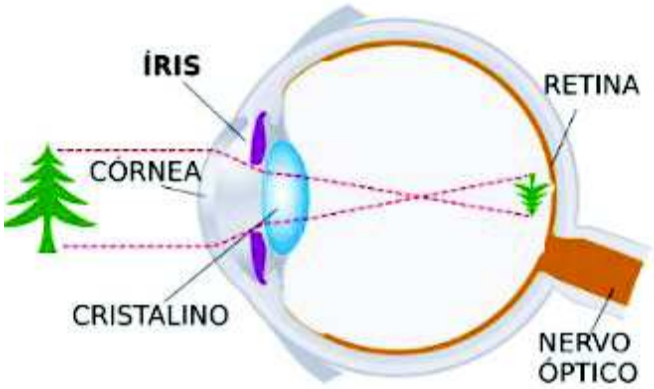
cristalino. Significa dizer que poder dióptrico (potência de uma lente) é a capacidade do em olho pode focalizar objetos que estão eu seu campo de visão, ou seja, enxergar). A dioptria (D) é unidade de medida da *vergência*, conhecida como o grau do olho definida por $V = \frac{1}{f}$,sendo f a distância focal, ou seja, a distância entre o objeto e a pupila.

De acordo com Bicas (1997), o olho tem um comprimento axial que é constante, mas variados poderes focais, ou seja, capacidade de foco em objetos, em função do ajustado pelo valor dióptrico do cristalino. Há casos em que esse ajustamento não é possível, em outros sim. Podem ocorrer nas duas situações sintomas ou não.

Ressaltamos que aqui apresentamos ideias básicas a respeito do olho humano, fazendo um recorte para o fenômeno óptico que nos interessa. Sintetizamos, parafraseando Carvalho (2006), que o olho humano é um complexo sistema óptico que funciona como um receptor de luz, e vai converter os sinais luminosos em pulsos elétricos. Essas informações são transmitidas ao cérebro que vai finalizar o processo de imagem.

De acordo com Carvalho (2006) o processo de formação de uma imagem pelo olho pode ser simplificado da seguinte maneira: primeiro a luz incide na córnea, local onde ocorre a refração, passa pela íris, a qual tem a função de controlar o tamanho da pupila, local onde a luz passa para a parte interna do olho. Depois que atravessa a pupila a luz incide no cristalino, este funciona como uma lente que focaliza os raios incidentes sobre a retina, formando a imagem, está última é invertida, de acordo com a figura 119.

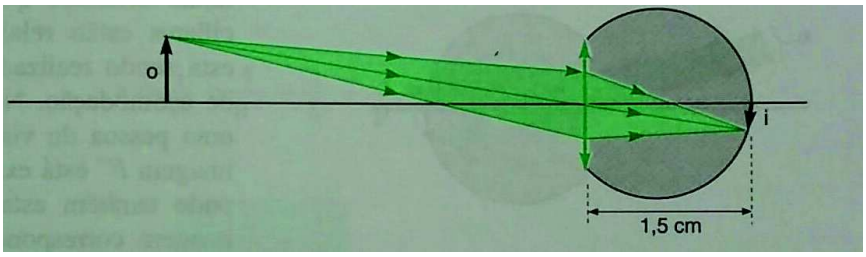
Figura 119- Ilustração da formação da imagem



Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/olho-humano-um-instrumento-optico.htm

Do ponto de vista da física, utiliza-se o modelo de olho esquemático, que é uma especificação óptica teórica de um olho idealizado, contendo a maior parte das dimensões mais simples, omitindo as mais complicadas. Do ponto de vista matemático, o olho esquemático apresenta dois sistemas de coordenadas cartesianas no plano, superpostos, um sistema para os objetos e outo para as imagens que se formam no interior do olho. Não nos debruçaremos sobre o olho esquemático, sob pena de fugirmos muito do objetivo aqui proposto. Nesse sentido, para análise matemática do fenômeno de formação da imagem no olho, apoiamo-nos no modelo óptico do olho reduzido, de acordo com a figura 120.

Figura 120 - Formação da imagem modelo do olho reduzido

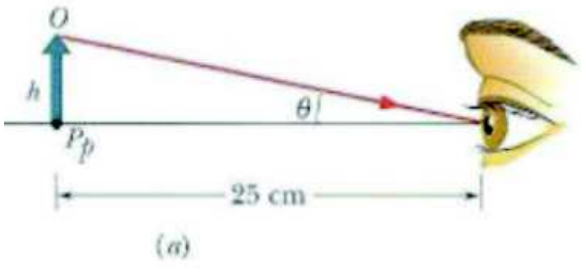


Fonte: Sampaio e Caçada (1998, p. 223)

Esse esquema extremamente simplificado chamado de olho reduzido, visa facilitar a representação das imagens formdas no globo ocular, os meios transparentes são substituídos por um a única lente delgada convergente cujo centro óptico está a 1,5 cm da retina, omitindo-se desa forma todas as outras partes do olho, as quais não serão ncessárias na construção geométrica da imagem. (SAMPAIO e CALÇADA).

De acordo com Halliday et al (2009).O olho humano, dito normal, só é capaz de focalizar uma imagem de um objeto na retina (situada no fundo do olho) se a distância entre o objeto e o olho for maior ou igual que a de um ponto conhecido como *ponto próximo* representado pelo símbolo P_p, conforme ilustrado pela figura 121, ou seja é o ponto mais próximo do olho até onde se conseguem focar os objetos.

Figura 121 - Ilustração do ponto próximo



Fonte: Halliday et al (2009, p. 56)[53]

Se ao contrário, a distância entre o objeto e o olho for menor que do ponto próximo o objeto não poderá mais ser visto com nitidez, pois não estará em foco. Segundo Pereira (2008),

> Se a imagem nítida é formada antes da retina, o erro resultante da refracção é chamado de miopia. O olho miópico pode ser observado como um sistema óptico com excesso de potência para o seu comprimento axial. Num olho míope os raios só serão focados na retina se entrarem divergentes no olho. Assim, o objecto tem de estar a uma distância finita do olho e quanto maior for o erro refractivo mais perto o olho estará o objeto. (PEREIRA. 2008, p. 105)[54]

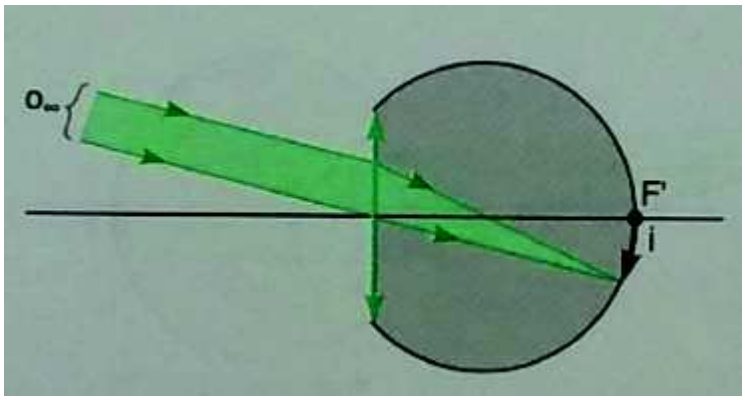
Significa dizer que as pessoas com miopia têm dificuldade de enxergar de longe, ou seja tendem a colocar os objetos cada vez mais próximos do globo ocular. É o que supomos que pode acontecer com o uso abusivo das telas de smartfones, por exemplo, estão cada vez mais sendo usadas muito próximas do olho. O tratamento para correção são uso de lentes de contato ou óculos. O autor explica, de acordo com a figura 41. Há ainda o ponto distante, chamado de ponto remoto P_R, por um esforço acomodativo, um míope pode focar objetos a distâncias inferiores ao P_R. mas não a distâncias superiores ao mesmo.

> O ponto remoto é a posição do objeto que corresponde à situação em que o olho não realiza esforço de acomodação, e sua distância constitui-se a distância máxima de visão distinta. O globo ocular normal ou emetrope, tem distância máxima de visão distinta infinitamente grande ($D \rightarrow \infty$). É importante salientar que para a óptica da visão, distância superiores a 10 m já são consideradas infinitamente grandes. (SAMPAIO e CALÇADA e SAMPAIO, 1998, p. 224)

Os autores ilustram o ponto remoto no olho reduzido por meio da figura 122.

[53] Disponível em:< https://edoc.pub/ensaios-de-jearl-walker-pdf-free.html> . Acesso: 19/02/2018
[54] Dispensamos tradução do português de Portugal.

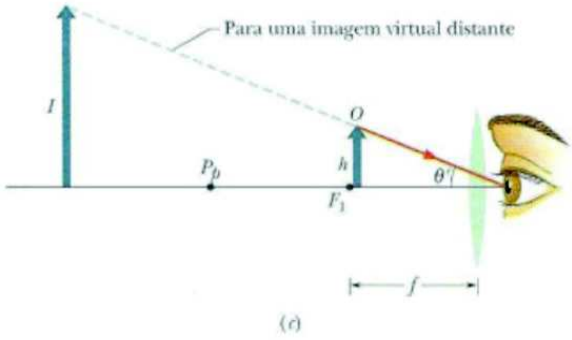
Figura 122 - Objeto infinitamente afastado



Fonte: Sampaio e Calçada (1998, p. 224)

Quando um objeto está infinitamente afastado, para uma pessoa de visão normal o foco da imagem F' está exatamente na retina, onde também estará seja formando a imagem correspondentes a um objeto infinitamente afastado, ou seja, no ponto remoto (P_R).À medida que o objeto se aproxima a imagem continua nítida sobre a retina, porque vai haver uma diminuição focal. Dizemos que a menor distância focal, na qual o olho realiza o esforço máximo de acomodação, a posição do objeto neste ponto constitui o ponto próximo P_P. A distância do ponto próximo, ou seja, a distância mínima de visão distinta varia de pessoa para pessoa e normalmente é convencionada 25 cm ou 0,25 m. (CALÇADA e SAMPAIO, 1998).

Figura 123 - Ilustração da imagem com o uso de lente corretiva



Fonte: Halliday et al (2009, p. 56)

Outros autores, Halliday et al (2009), ilustram a situação em que será necessário o uso de lente corretiva, figura 123, para permitir a formação de uma imagem nítida. Ou seja, na situação em que o objeto foi aproximado para o aumento do ângulo, mas nesse momento o observador não consegue focalizá-lo. Colocando-se uma lente convergente entre o objeto e o olho, sendo que o objeto deve estar um pouco mais próximo do olho que o ponto focal F_1 da lente.

A imagem produzida pela lente, será suficientemente distante para ser localizada pelo olho, assim, ocupará no campo d e visão um ângulo θ' maior que o ângulo θ. (HALLIDAY et al, 2009)

É possível, portanto, tornar uma imagem nítida, observando o objeto por meio de uma lente convergente posicionar a lente de forma que o objeto esteja ligeiramente mais próximo do olho que o ponto focal f_1 da lente que está a uma distância focal f.

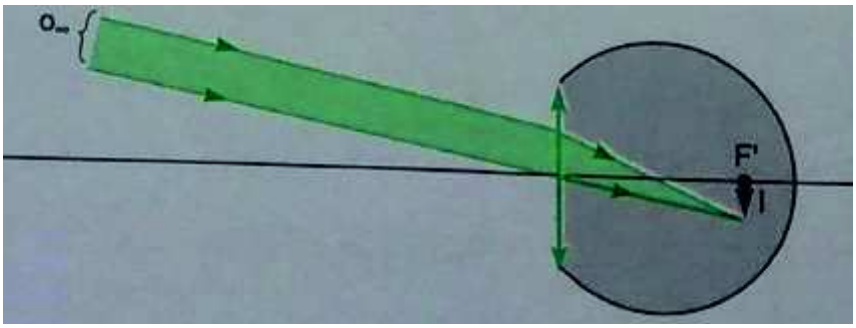
> Além disso, o ângulo θ′ ocupado pela imagem virtual é maior que o maior ângulo de θ que o objeto sozinho pode ocupar e ser visto com nitidez. A ampliação angular m_θ (que não deve ser confundida com a ampliação lateral m) do objeto é dada por: $\mathrm{m}_\theta = \frac{\theta'}{\theta}$. Em palavras, a ampliação angular de uma lente de aumento simples é definida como a razão entre o ângulo ocupado pela imagem produzida pela lente e o ângulo ocupado pelo objeto quando o objeto se encontra no ponto próximo do observador. Supondo que o objeto O se encontra no ponto focal da lente e supondo que os ângulos são suficientemente pequenos para que $\tan\theta \approx \theta$ e $\tan\theta' \approx \theta'$, temos: $\theta \approx \frac{\mathrm{h}}{25}$ e $\theta' \approx \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{f}}$. Nesse caso, $\mathrm{m}_\theta = \frac{25\ \mathrm{cm}}{\mathrm{f}}$ (lente de aumento simples). (HALLIDAY et al, 2009, p. 56).

O que a lente faz então é uma ampliação do ângulo de visão, os autores deduzem a equação desta ampliação sendo dado que que $\tan\theta \approx \theta$ e $\tan\theta' \approx \theta'$, $\theta \approx \frac{\mathrm{h}}{25}$ (i) e $\theta' \approx \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{f}}$ (ii) ou seja substituindo (i) e (ii) em $\mathrm{m}_\theta = \frac{\theta'}{\theta}$, teremos $\mathrm{m}_\theta = \frac{25\ \mathrm{cm}}{\mathrm{f}}$. Há de se chamar a atenção que estamos manipulando ângulos muito pequenos, fato que possibilita tais aproximações.

Segundo Calçada e Sampaio (1998), a miopia tem com causa um alongamento do olho na direção do eixo anteposterior ou por vergência exagerada do cristalino. Há uma aproximação do ponto próximo, isto é, diminui a distância mínima de visão distinta ($d < 0{,}25m$). Quando o míope tem acomodação visual normal, pode-se explicar a ocorrência de realização de esforço de acomodação para uma distância finita, por esta razão consegue a acomodação visual até a distância mais próxima do globo ocular.

De acordo com os autores a miopia não permite que se tenha uma visão nítida de um objeto ao longe, isto porque o foco F' do olho está antes da retina, segundo à figura 124. Em consequência a imagem de um objeto infinitamente afastado não se formará sobre a retina, impossibilitando a visão distinta.

Figura 124- olho reduzido do míope



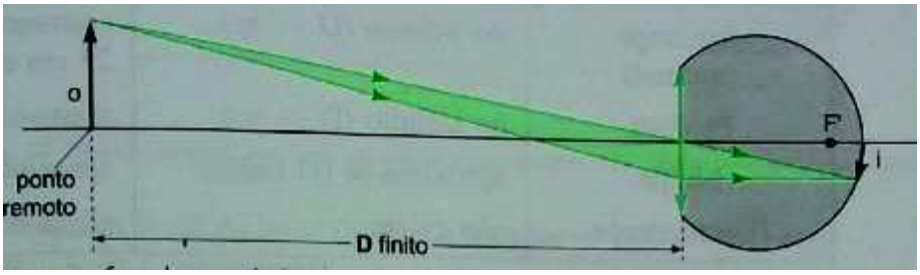
Fonte: Sampaio e Calçada (19981, p. 228).

Estando os músculos ciliares do olho relaxados, a distância focal é máxima, mesmo assim, a imagem não atinge retina. Seria desnecessário a tentativa de esforço de acomodação, porque a distância focal diminuiria, agravando ainda mais o problema. (CALÇADA e SAMPAIO, 2009)

De acordo com os autores o míope não necessita usar lentes para perto, no caso que não possua um defeito muito acentuado, pois ele consegue ler por exemplo, um livro à 25 cm, realizando um esforço menor que uma pessoa normal, em contrapartida necessita de uso de lente para enxergar de longe.

No caso do olho míope o ponto remoto é aquele cuja posição do objeto se encontra a uma distância finita, sem haver esforço de acomodação, em que é nítida a visão, ou seja, na qual a imagem, está exatamente na retina, de acordo com a figura 125. Consequentemente a distância máxima de visão distinta míope é *finita* e não infinita, como em um olho normal.

Figura 125- Olho míope sem esforço de acomodação, objeto no ponto remoto

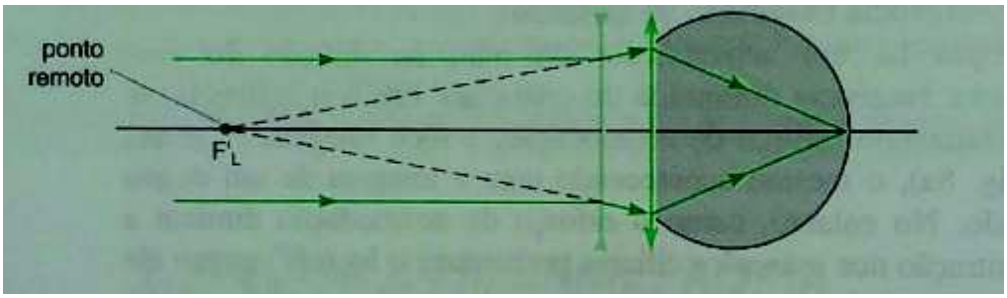


Fonte: Calçada e Sampaio (1998, p. 229)

Na miopia existe uma aproximação do ponto próximo, ou seja, a diminuição da distância mínima de visão distinta $(d < 0{,}25m)$. Quando a acomodação visual é normal no míope, pode se explicar que ele só começa a realizar esforço de acomodação para uma distância finita, consegue, portanto, acomodação visual até uma “certa distância” mais próxima do globo ocular. (CALÇADA e SAMPAIO, 1998)

De acordo com esses mesmos autores, segundo a figura 126, a lente corretora da miopia deve ser divergente, o objetivo é diminuir vergência do globo ocular, ou seja, o grau. A distância focal da lente deve ser tal que, de um objeto do infinito a lente forneça uma imagem do ponto remoto no olho que poderá então ser vista sem esforço, significa dizer que o foco imagem da lente F'_L deve coincidir como ponto remoto do olho, ou seja a distância focal deve coincidir com o ponto remoto do olho, ou seja a distância focal da lente deve coincidir com o ponto remoto do olho.

Figura 126 – Olho míope coma lente sem esforço, o objeto no infinito tem imagem na retina



Fonte: Fonte: Calçada Sampaio (1998, p. 230)

Matematicamente dizemos, que a distância focal da lente deve ter módulo igual à distância máxima de visão distinta do globo ocular, ou seja: $|f_L| = D$. A distância focal (f_L) a lente e sua vergência ($V_L = \frac{1}{f_L}$) serão negativas, por conta da lente ser divergente.

A. partir do modelo de olho reduzido podemos traçar uma representação geométrica do sistema óptico fornecido pela situação de uso de uma lente de aumento simples, por exemplo, uma lente divergente que vai fazer com que os raios luminosos se afastem do eixo central. Esta representação tem como base o traçado dos raios luminosos, que se apoiam nas leis físicas de propagação da luz.

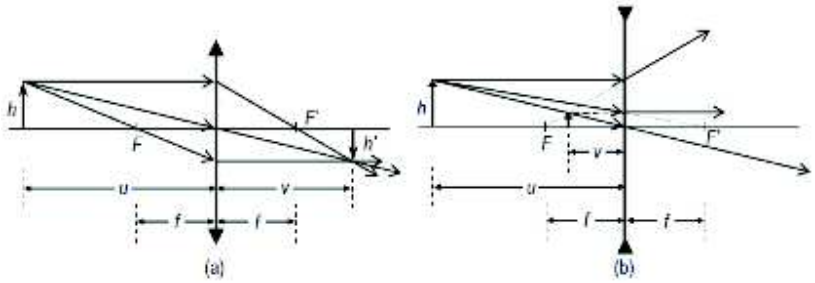
De acordo com Calçada e Sampaio (1998) os olhos recebem a luz que o objeto emite, por exemplo uma lâmpada, a luz propaga-se e atinge os olhos do observador, como forma de representar graficamente o fenômeno de propagação da luz, utiliza-se linha orientadas que fornecem o sentido e a direção desta propagação. Estas linhas são denominadas raios de luz, o que na prática é impossível, pois não se pode isolar raios de luz. Trata-se, portanto, de uma forma para representar graficamente os raios luminosos.

Segundo Pereira (2008),

> [...] na lentes finas o traçado dos raios para determinar a posição da imagem é feito com base em três raios: um raio paralelo ao eixo óptico que depois de atravessar a lente passa pelo ponto focal imagem, um raio que passa pelo ponto focal objecto e que depois da lente sai paralelo ao eixo óptico e um raio dirigido ao centro da lente que não sofre alteração de direcção.(PEREIRA, 2008, p. 44).

A representação geométrica feita pelo autor já traz os dois sistemas de coordenadas superpostos, conforme anunciamos no estudo, notamos que a direção da luz incidente é que vai definir os eixos de abscissas positivos ou negativos, no caso da figura 127, as imagens reais, objeto está do lado esquerdo e imagem projetada no do lado direito. Ou seja, esta representação é a mesma do olho reduzido, porém agora situamos os objetos como entes geométrico, no plano.

Figura 127 - Traçado dos raios de lentes finas convergentes e divergentes



Fonte: Pereira (2008, p. 44)

Vamos reescrever esse sistema de forma analítica, considerando que o olho humano é uma lente *convexo-côncava* logo o funcionamento de produção da imagem está submetido as leis físicas de propagação da luz em lentes esféricas, como por exemplo as lentes convergentes e divergentes, ou seja, as posições e as alturas de objetos colocados diante de uma lente esférica são determinadas através das mesmas equações estudadas nos espelhos esféricos.

Teremos um sistema de eixo ortogonais, cuja origem é no centro óptico, funciona como se fossem dois sistemas de coordenadas superpostos, sendo um para as imagens e outro para os objetos. Esta parte do estudo analítico faz parte do referencial de Gauss para o estudo das lentes esféricas, o qual apoiamo-nos em Calçada e Sampaio (1985), além desses autores fizemos uma pesquisa de fontes na internet (br) e quase todas sintetizam as mesmas ideias.

Neste caso são dois meios diferentes, um meio que corresponde aos objetos reais cujo foco é F, e um outro que corresponde às imagens desses objetos, cujo foco é F'. Ou seja, o eixo das abscissas coincide com o eixo principal e tem sentido contrário ao da luz incidente para os objetos e a favor da

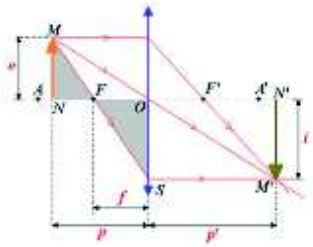
luz incidente para as imagens. As imagens reais, estão à direita da lente e objetos reais, à esquerda da lente, têm abscissas positivas.

Na figura 128, representa um esquema sobre uma lente esférica convergente, a representação da imagem de um objeto MN, a incidência dos raios de luz vai gerar as distâncias relativas aos objetos e ao foco da imagem

Observa-se que f é a distância focal do centro óptico, p é a distância da origem ao objeto. Respectivamente temos f' e p', representando a distância focal da imagem ao centro óptico, e a distância da imagem do objeto até o centro óptico. A figura 128, ilustra esse sistema, cujo eixo central horizontal é atribuído a x, como abscissa e o vertical a y como ordenada, sendo que, o eixo das ordenadas é orientado para cima.

Assim, a imagem do objeto MN tem mesmo sinal se a imagem for direita em relação ao objeto e sinais opostos se a imagem for invertida em relação ao objeto. Ainda com relação ao sinal, a distância focal f é positiva para lentes convergentes e negativa para lentes divergentes.

Figura 128 – Formação da imagem de um objeto por uma lente convergente



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/equacao-dos-pontos-conjugados.htm

Observa-se que f é a distância focal do centro óptico, p é a distância da origem ao objeto. Respectivamente temos f' e p', representando a distância focal da imagem ao centro óptico, e a distância da imagem do objeto até o centro óptico. É possível determinar esses elementos por meio da equação de Gauss, a qual se apoia na semelhança dos triângulos retângulos formados MNF e SOF (figura 128). O e *i* representam as alturas do objeto e de sua imagem respectivamente.

Partindo da semelhança entre os dois triângulos implica escrever $\frac{MN}{NF} = \frac{SO}{OF}$. De cálculos bem simples chega-se à equação de Gauss, também chamada *de equação dos pontos conjugados.*

Essa equação é bem útil*:* $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'}}$, facilmente encontrada nas mídias digitais, livros de física etc., pois permite encontrar a vergência da lente (ou o

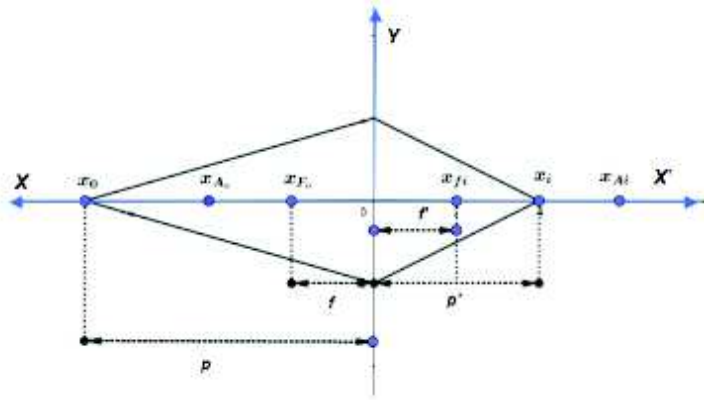
grau). Sabendo-se que a vergência foi definida como: $V = \frac{1}{f'}$, podemos substituir esta equação na anterior (dos pontos conjugados) e obter o grau da lente de correção por meio das distâncias relativas p e p', ou seja, $V = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

As equações obtidas das análises realizadas, podem possibilitar conhecer os valores envolvidos nos fenômenos, bem como o cálculo de lentes corretoras simples. A questão que levantamos é que os f, p e p', chamados de pontos conjugados estão sempre alinhados, ou seja, estão sempre na mesma reta.

No entanto, o foco de visão do olho pode percorrer qualquer “espaço” do plano dos objetos, movimentando este eixo horizontal das abscissas do objeto, consequentemente haverá modificações na localização dos pontos conjugados das imagens. Há de lembrarmos que o ponto A e A'' chamado de ante- principal que corresponde ao dobro da distância focal ao centro óptico, muda de posição no eixo das imagens, é também considerado o centro de curvatura da face de incidência (ponto ante- principal do objeto, A) e centro de curvatura da face de emergência (ponto ante- principal da imagem, A’)

Se analisarmos a equação de Gauss, do ponto de vista do sistemas ortogonais veremos que a equação dita de pontos conjugados apresenta na verdade distâncias conjugadas, f, p e p, nesse sentido, os pontos A, N, F, F', A' e N' são os pontos conjugados e estão sobre o eixo das abscissas, o que significa dizer que as coordenadas destes pontos no eixo das ordenadas são nulas. Reescrevendo esse sistema a partir do modelo do olho reduzido teremos a figura 129, na qual expressamos os pontos conjugados no eixo X e X' das abscissas, sendo X para os objetos e X' para as imagens.

Figura 129 – Pontos conjugados no sistema de eixos ortogonais para o modelo de olho reduzido



Fonte: Elaborado pela autora

Teremos, portanto, um referencial para o espaço objeto (XOY) e um outro para o espaço das imagens (X'OY). Nesse sentido o sistema óptico conjuga um ponto objeto cujas coordenadas são (x, y) um ponto imagem cuja as coordenadas são (x', y') no espaço imagem, um sistema óptico pode então ser visto como implementando uma transformação entre pontos desses dois espaços:$(x, y) \rightarrow (x', y')$.

Vale ressaltar que um dos eixos têm orientações opostas, este eixo é um eixo comum que passa pelos vértices e que passa também pelo centro do eixo óptico, eixo principal. No o referencial de Gauss, consideramos os eixos das abscissas (o eixo x) com uma orientação contrária àquela da incidência da luz. O eixo x' tem a mesma orientação da direção da luz.

Nesse sistema reduzido que apresentamos $x_0 =$ abscissa do objeto; $x_i =$ abscissa da imagem; $x_{F_0} =$ abscissa do foco do objeto; $x_{f_i} =$ abscissa do foco da imagem; $x_{A_0} =$ abscissa do ponto anteprincipal do objeto; $x_{A_i} =$ abscissa do ponto anteprincipal da imagem. Reescrevendo a equação de de Gaus: $\boldsymbol{\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}$, teremos que:$\frac{1}{x_{F_0}} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{x_{F_0}} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i}}$, é a equação dos pontos conjugados, implica que a vergência, ou seja, o grau da lente dada por $\boldsymbol{V = \frac{1}{f}}$, ficará $V = \frac{1}{x_{F_0}}$, ou em termos de x_0 e x_i, logo $\boldsymbol{V = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_i}}$. Esses valores são válidos tanto para o estudo das lentes convergentes como das lentes divergentes.

Ressaltamos, que neste modelo reduzido consideramos o objeto como um ponto no eixo horizontal, ao mesmo tempo os demais pontos envolvidos. No entanto, podemos imaginar um objeto que esteja fora do eixo x, em um ponto qualquer do plano, cuja ordenada seja diferente de zero, mas ainda no campo de visão, visto que olho pode ver qualquer objeto que esteja num plano, neste caso na frente do campo visual. Assim, supomos que os pontos terão que ser transportados para um novo sistema ortogonal no qual os pontos conjugados não terão mais as ordenadas nulas, significa dizer que se mantém o eixo do sistema óptico fixo e propõe-se ver a imagem do novo objeto, tendo outro sistema referencial.

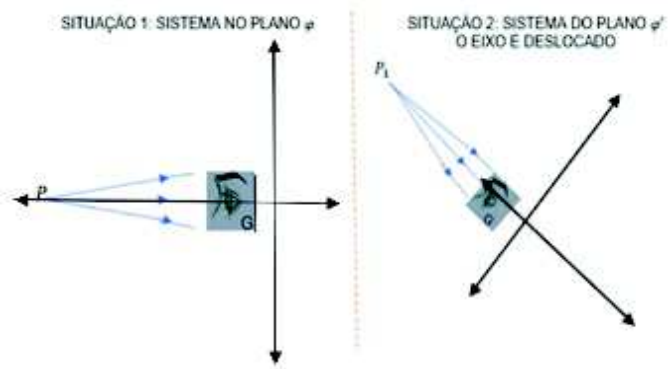
Evidentemente que estamos propondo as transformações que podem ser realizadas matematicamente, as variáveis físicas estão sendo relativizadas.

Nesse sentido, apoiamo-nos em Lima (2002), em seu estudo sobre transformações geométricas, quando trata das transformações no plano:

> Uma transformação no plano π é uma função $T: \pi \to \pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano, outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano chamado de sua imagem por T. Nas próximas sessões estudaremos as transformações no plano com propriedades geométricas importante e examinaremos essas propriedades. (LIMA, 2002, p. 138)

Significa dizer que para cada ponto P do plano óptico (chamaremos de φ), existe um outro ponto $P_1 = T(P)$ que pertence a um outro sistema ortogonal (idêntico a φ), φ'. Logo, para cada ponto conjugado no eixo óptico existe um ponto correlacionado a ele em um plano idêntico. Vamos ilustrar duas situações de acordo com a figura 130.

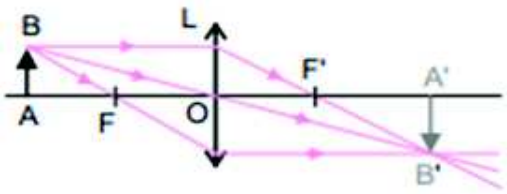
Figura 130 - Diferentes posições do eixo óptico



Fonte: elaborado pela autora

A ilustração mostra a visualização de um ponto em duas situações: a primeira o ponto encontra-se no eixo dos x, cujo foco está no centro óptico, na segunda situação, o ponto encontra-se em uma localização diferente, e o centro óptico também muda de foco. Neste caso, do ponto de vista matemático, haverá implicações quanto a determinação das distâncias focais e dos pontos conjugados, quando se focaliza um objeto numa localização fora do eixo horizontal (x). No entanto, fisicamente isto não é explicado como transformações de coordenadas nas fontes que buscamos, necessitaríamos de um estudo mais extenso e aprofundado para verificar. Para a representação geométrica que faremos apoiamo-nos na figura 131, com o modelo simplificado de incidência dos raios luminosos sobre uma lente de convergente, destacados na figura 132 e de cor rosa.

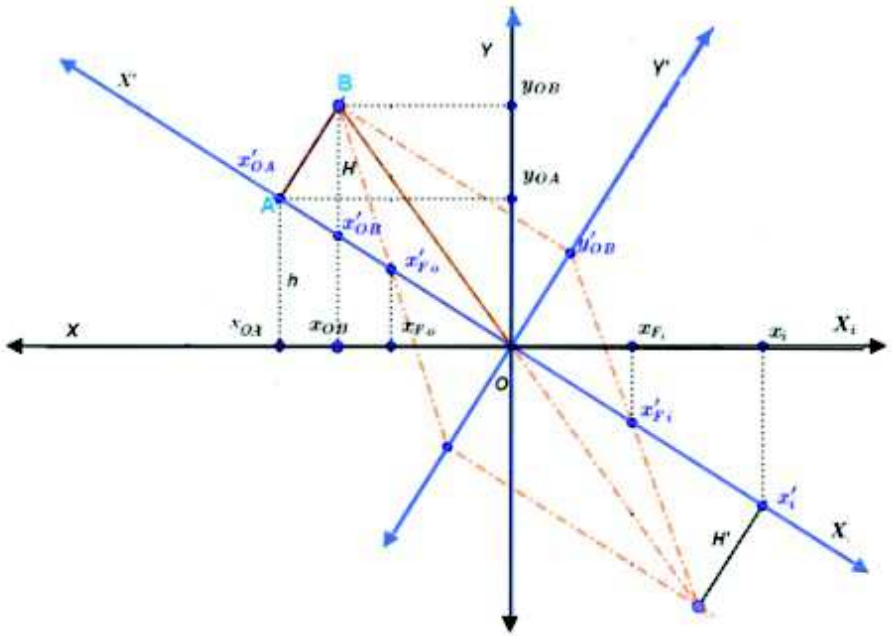
Figura 131 - Síntese do modelo para lente convergente



Fonte: Adaptado de Pereira (1988, p. 44)

Nesse sistema a incidência dos raios é que determinam os pontos focais F e F', pois têm-se três raios: um passa pelo cento óptico, O e prolonga-se no plano ($\overrightarrow{BOB'}$), um outro passa por F e emerge paralelo ao centro óptico ($\overrightarrow{BFB'}$),e um terceiro passa por F', prologando-se paralelo ao eixo x, plano ($\overrightarrow{B'F'B}$).Neste sentido retomamos a situação 2, para ilustrar os sistemas ópticos sobrepostos e desenvolver as relações possíveis, segundo a figura 132.

Figura 132- Sistemas ópticos sobrepostos



Fonte: elaborado pela autora

Apresentamos os eixos coordenados sobrepostos, correlacionando cada ponto dos eixos XOY e X_iOY com os pontos dos eixos $X'OY'$ e X'_iOY' respectivamente. Tomamos uma barra metálica de altura H, delimitada pelos pontos $A(x'_{OA}, 0)$ e B (x'_{OB}, y'_{OB}) em relação do eixo óptico $X'OY'$ (eixo em azul), neste caso incide sobre o sistema os raios luminosos representados pelas linhas tracejadas em vermelho, segundo a figura 133, os pontos de intersecção desses raios com o eixo $X'X'_i$, determinam os pontos focais do objeto (x'_{F_O}) e da imagem (x'_{F_i}). Ao mesmo tempo, partindo desses pontos é possível correlacionar por

projeções ortogonais aos eixo XOYe X_iOY, os pontos x_{F_o} e x_{F_i},por visualização percebe-se que as distância focais são conservadas.

Para aplicarmos a equação de Gauss nos sistemas $X'OY'$ e X'_iOY' precisamos determinar: $f' = d(x'_{F0}, O)$, distância focal da origem do centro óptico até o foco do objeto, a distância p' do objeto, ou do limite do objeto até o centro óptico e por fim p'_i, que corresponde à distância da imagem do objeto até o centro óptico. Nesse caso teremos: $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{f'}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p'_i}} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}(x'_{F0},O)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}(x'_{OA},O)} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}(x'_{Fi},O)}$,considerando que os pontos, ou ainda as distância conjugadas, encontram-se no mesmo eixo $X'OY'$ e X'_iOY', logo temos: $\frac{\mathbf{1}}{x'_{F0}} = \frac{\mathbf{1}}{x'_{OA}} + \frac{\mathbf{1}}{x'_{Fi}}$, ou seja $f' = d(x'_{F0}, O) = d_1 = x'_{F0} - 0 = x'_{F0}$; $p' = d(x'_{OA}, O) = x'_{OA} - 0 = x'_{OA}$ e $p'_i = d(x'_{Fi}, O) = x'_{Fi} - 0 = x'_{Fi}$.

Por outro lado, se determinarmos as distâncias conjugadas, por meio de uma transformação geométrica, ou seja, determinar esses valores tendo como referência os eixos XOY e X_iOY. Significa dizer que f', p' e p'_i em função dos valores reais (pontos conjugados de XOY e X_iOY).

Primeiramente vamos determinar a distância $f' = d(x'_{F0}, O)$ em reação a XOY, neste caso nessa distância que chamaremos de d_1 corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo $x'_{Fo}Ox_{Fo}$,logo aplicando o teorema de Pitágoras temos que:

$(x'_{Fo} - 0)^2 = (y'_{Fo} - 0)^2 + (x_{Fo} - 0)^2 \Rightarrow {x'_{Fo}}^2 = {y'_{Fo}}^2 + {x_{Fo}}^2 \Rightarrow x'_{Fo} = \sqrt{{y'_{Fo}}^2 + {x_{Fo}}^2}$

Podemos ainda escrever que $p' = \sqrt{{y'_{Fo}}^2 + {x_{Fo}}^2}$,analogamente encontramos $p'_i = \sqrt{{y'_{Fi}}^2 + {x_{Fi}}^2}$. A determinação de cada um desses valores ou de dois deles possibilita o cálculo de terceiro elemento da equação de Gauss. Esses valores calculados por meio de uma transformação geométrica são validos para a situação de uso de uma lente convergente. No caso das lentes para miopia as distâncias focais se modificam, mas as relações matemáticas (definidas por propriedades geométricas) do referencial de Gauss se mantém.

A conclusão que podemos chegar é que na situação mais simples, na qual os pontos conjugados, estão todos sobre o eixo das abscissas, as ordenadas são nulas, o que facilita os cálculos, no entanto do ponto de vista matemático

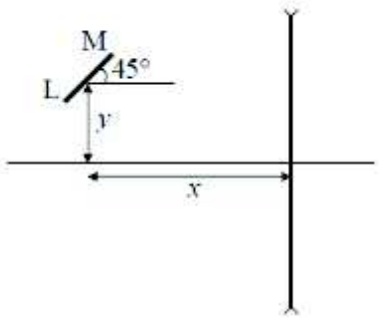
isso nem sempre ocorre, por exemplo, quando realizamos transformação geométrica ou mudança de sistema ortogonal.

Para os estudos da física, com relação às lentes esféricas, não identificamos o uso de transformações geométricas no plano, pelo menos não explicitamente, no entanto encontramos um modelo de situação problema que determina os elementos do sistema óptico com base na equação de Gauss e no cálculo da distância entre pontos no mesmo plano cartesiano, sem o uso de transformação geométrica como é o caso do exemplo de problema a seguir, aplicado no vestibular do ITA (2010), que utiliza o cálculo de uma lente divergente, e objeto situa-se a um determinado ângulo, com a horizontal tendo o centro óptico situado no eixo x.

> A figura mostra uma barra LM de 10 $\sqrt{2}$ cm de comprimento, formando um angulo de 45° com a horizontal, tendo seu centro, centro situado a x = 30,0 cm de uma lente divergente, com distância focal igual a 20,0 cm, e a y =10,0 cm acima do eixo ótico da mesma. Determine o comprimento da x imagem da barra e faça um desenho esquemático para mostrar a orientação da imagem (ITA, 2010, p.7)[55]

Neste caso o cálculo das dimensões da imagem do objeto se apoia na propagação dos raios em uma lente divergente para determinar as posições da imagem e do foco da imagem e na distância entre dois pontos, de acordo coma figura 133 fornecida no problema.

Figura 133 - Situação problema, lente divergente



Fonte: ITA (2010,p.7)

Conclusão

Este estudo, do ponto de vista da modelização, nos permite explorar geométrica e algebricamente a noção de distância, além disso, a noção de pontos alinhados. No entanto para uma modelização mais eficaz, necessitaria

[55]ITA, Vestibular 2010. Prova de Física. Disponível em: <<http://www.vestibular.ita.br/provas/fisica_2010.pdf>> Acesso: 10/03/2019.

de maior aprofundamento do estudo das lentes esféricas divergentes aplicadas no tratamento de miopias simples, das relações com a produção da imagem pelo olho humano. Tais elementos extrapolam os limites de nossa pesquisa, ou seja, somente este estudo abarcaria todo a etapa experimental da pesquisa, com situações do campo da física nas quais as relações geométricas e algébricas poderiam ser trabalhadas, ainda assim adaptamos de forma mais simples uma situação problema, a qual não seja necessário um aprofundamento maior por parte dos estudantes sobre o estudo das lentes.

Desta forma, este estudo complementar está inconcluso, pois a proposta abarca um tipo de projeto de PEP interdisciplinar entre física e matemática, que pode ser desenvolvido no ensino médio, o qual não se caracterizou como foco principal desta tese, no entanto, é uma possibilidade para trabalhos futuros.