

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

RICARDO NICASSO BENITO

**CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA
FORMAÇÃO DE PROFESSORES: O ENSINO DE CÔNICAS**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2019**

RICARDO NICASSO BENITO

**CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA
FORMAÇÃO DE PROFESSORES: O ENSINO DE CÔNICAS**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva.

**São Paulo
2019**

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese de Doutorado por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura _____

Data _____

e-mail _____

Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica para Teses e Dissertações com dados fornecidos pelo autor

Benito, Ricardo Nicasso

Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa
para Formação de Professores: o ensino de Cônicas /
Ricardo Nicasso Benito. -- São Paulo: [s.n.], 2019.
220p ; cm.

Orientador: Maria José Ferreira da Silva.
Tese (Doutorado em Educação:Matemática)-- Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, Programa de
Estudos Pós-Graduados em Educação:Matemática, 2019.

1. . I. Silva, Maria José Ferreira da. II.
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
Programa de Estudos Pós-Graduados em
Educação:Matemática. III. Título.

CDD

Ricardo Nicasso Benito

**CONSTRUÇÃO DE UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA
FORMAÇÃO DE PROFESSORES: O ENSINO DE CÔNICAS**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Aprovado em: ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Dra. Maria José Ferreira da Silva (Orientadora) – PUC-SP

Dra. Marianna Bosch Casabò – Universitat Ramón Llull

Dr. Francisco Javier Ugarte Guerra – PUCP

Dr. Saddo Ag Almouloud – PUC-SP

Dr. Gabriel Loureiro de Lima – PUC-SP

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – **CAPES** pelas bolsas cedidas – Modelo Taxa e Doutorado Sanduíche no Exterior, processo nº 88881.132304/2016-01 –, que foram de extrema importância para a realização desta pesquisa.

A presente tese se adere ao projeto internacional “*Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos Pea-Mat/Dimat*”, aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, processo nº 2013/23228-7, desenvolvido entre os grupos de investigação PEA-MAT da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil e DIMAT da Pontifícia Universidade Católica do Peru.

AGRADECIMENTOS

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foram muitos os obstáculos que surgiram e fizeram parte da minha formação como doutor em Educação Matemática. Porém, não enfrentei esses obstáculos sozinho, muito pelo contrário, na maioria das vezes estive cercado de pessoas que me ajudaram e incentivaram a caminhar sempre para frente. Assim, gostaria de agradecer a todos que de forma direta ou indireta me ajudaram a vencer mais essa luta nesta minha vida. Entre essas pessoas há algumas que merecem o meu destaque neste momento e para elas escrevo logo abaixo.

Agradeço à minha orientadora, professora Dra. Maria José Ferreira da Silva, por ter acreditado e confiado em meu potencial, pelas ricas discussões e pela preocupação em me formar um doutor, sempre tirando de mim o máximo possível.

À professora Dra. Marianna Bosch Casabò por ter me acolhido durante o estágio sanduíche na Universidade Ramón Llull em Barcelona e por todos os conhecimentos compartilhados nesse período.

À minha família, em especial à minha mãe Fátima, ao meu pai Titão e ao meu avô Vicente, por todo carinho, confiança e acolhimento nos momentos mais difíceis deste doutoramento.

Aos professores da Banca por aceitarem avaliar este trabalho e pelas valiosas e impagáveis contribuições.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-SP por todas as discussões e ensinamentos.

À Universidade Federal de Sergipe, em especial ao Departamento de Matemática de Itabaiana, por liberar meu afastamento integral durante toda a minha formação em São Paulo e em Barcelona.

Aos meus queridos amigos que dividiram suas casas comigo em São Paulo e em Barcelona.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

Tenho todos vocês guardados em meu coração.

BENITO, R. N. **Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: o Ensino de Cônicas**. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019. 218 páginas.

RESUMO

Esta pesquisa focou na formação inicial de professores de matemática para o ensino das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) tendo como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático e como sujeitos de pesquisa estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe. O objetivo do trabalho foi investigar de que maneira o dispositivo dos Percursos de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores podem ajudar esse grupo de futuros professores a questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino a respeito de cônicas. Para isso, seguimos a metodologia de pesquisa qualitativa usada pela TAD, baseada em princípios da Engenharia Didática, que possui quatro fases. Na primeira etapa, ocorrem as análises praxeológicas ou análises preliminares, em que fazemos um questionamento epistemológico do objeto matemático e da necessidade de introduzi-lo na escola, além de um estudo das condições e restrições oferecidas pelas instituições de ensino; em seguida, devemos fazer a análise *a priori* e o planejamento matemático e didático da proposta de intervenção. Na terceira fase, estão a experimentação e a análise “in vivo”, e para a última etapa ficam a análise *a posteriori*, a validação das hipóteses de pesquisa e propostas planejadas nas fases anteriores. Neste trabalho foram desenvolvidos um Modelo Epistemológico de Referência – MER, a respeito das geometrias das cônicas, e um Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP, que foi aplicado em turmas dos ensinos médio e superior e forneceram elementos para o desenho da formação inicial. Como resultados temos que o PEP-FP contribuiu positivamente para a formação desse grupo de futuros professores, que, ao final da formação, propuseram aulas em que as cônicas não eram abordadas somente na geometria analítica e com estratégias de ensino que buscavam romper com o paradigma de visita às obras. Além do mais, a metodologia de pesquisa usada neste trabalho forneceu condições para uma dialética entre o MER e o PEP-FP que auxiliou no planejamento das atividades da formação inicial, trouxe contribuições para uma reformulação do Modelo Epistemológico de Referência, e, ao final, a junção desses dois elementos nos proporcionou uma praxeologia para o ensino de cônicas na formação inicial de professores.

Palavras-chave: Formação inicial de professores. Teoria Antropológica do Didático. Modelo Epistemológico de Referência. Cônicas. Paradigma de Questionamento do Mundo. Percurso de Estudo e Pesquisa.

ABSTRACT

This research focused on the initial math teachers education for the teaching of conics (parabola, ellipse, and hyperbole) having as a theoretical framework the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and as research subjects students at Mathematics Degree at the Federal University of Sergipe. The aim was to investigate how the device of the Study and Research Paths for Teacher Education (SRP-TE) can help this group of future teachers to question, analyze, design and experiment conic teaching processes. For this, we follow the methodology of qualitative research used by ATD, based on principles of didactic engineering, which has four steps. At the first one, we have praxeological analysis or preliminary analysis, in which we make an epistemological questioning of the mathematical object and the need to introduce it to the school, in addition to a study of the conditions and restrictions offered by educational institutions, then we must do the analysis a priori and the mathematical and didactic planning of the intervention proposal. On the third step, we have the experimentation and analysis in vivo and for the last one we have the posteriori analysis, validation of the research hypotheses and proposals planned on previous steps. In this work, we developed a Reference Epistemological Model (REM) for conics geometries and a Study and Research Paths (SRP) that were applied in high school and university classes and provided elements for the initial formation design. The results showed that the SRP-TE contributed positively to the formation of this future teachers group that, at the end of the training, presented lesson plans in which the conics were not only approached by analytical geometry and teaching strategies that sought to break with the visiting works paradigm. Moreover, the research methodology used in this work provided the conditions for a dialectic between REM and SRP-TE, which helped on the planning of initial training activities, contributed to a reformulation of the Reference Epistemological Model and, finally, the junction of both elements provided a praxeology for the initial teacher education.

Keywords: Initial Teacher Education. Anthropological Theory of the Didactic. Reference Epistemological Model. Conics. Questioning the world paradigm. Study and Research Paths.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - O PROBLEMA DAS MEIAS PROPORCIONAIS	54
FIGURA 2 - CÔNICAS POR APOLÔNIO	57
FIGURA 3 - ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLE PELA INTERSECÇÃO DE UM CONE POR UM PLANO.....	58
FIGURA 4 - PARÁBOLA, FOCO, EIXO DE SIMETRIA E RETA DIRETRIZ – CONSTRUÇÃO DE DANDELIN	59
FIGURA 5 - ELIPSE E HIPÉRBOLE - CONSTRUÇÃO DE DANDELIN	60
FIGURA 6 - EXCENTRICIDADE DE UMA CÔNICA	61
FIGURA 7 - EXCENTRICIDADES	62
FIGURA 8 - PARÁBOLA CONSTRUÍDA POR DOBRADURAS.....	63
FIGURA 9 - JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA POR DOBRADURA	64
FIGURA 10 - ELIPSE CONSTRUÍDA POR MEIO DE DOBRADURAS	65
FIGURA 11 - JUSTIFICATIVA PARA CONSTRUÇÃO DA ELIPSE COM DOBRADURA	65
FIGURA 12 - HIPÉRBOLE CONSTRUÍDA POR DOBRADURAS	66
FIGURA 13 - JUSTIFICATIVA DA CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE COM DOBRADURAS	67
FIGURA 14 - CONSTRUÇÃO DA PARÁBOLA POR FIO ESTICADO.....	68
FIGURA 15 - CONSTRUÇÃO DA ELIPSE POR FIO ESTICADO	68
FIGURA 16 - CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE POR FIO ESTICADO	69
FIGURA 17 - ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO	70
FIGURA 18 - HIPÉRBOLE COMO LUGAR GEOMÉTRICO	71
FIGURA 19 - PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO	71
FIGURA 20 – CONSTRUÇÃO DE PARÁBOLA VIA TANGENTES	72
FIGURA 21 - CONSTRUÇÃO DE ELIPSE VIA TANGENTES	73
FIGURA 22 - CONSTRUÇÃO DA HIPÉRBOLE VIA TANGENTES.....	74
FIGURA 23 - OUTRA CONSTRUÇÃO DE PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO	76
FIGURA 24 - ELIPSE TANGENTE A UMA CIRCUNFERÊNCIA.....	78
FIGURA 25 - O PROBLEMA DE PAPPUS.....	78
FIGURA 26 - MODELO DA GEOMETRIA SINTÉTICA	80
FIGURA 27 - RELAÇÃO ENTRE O SISTEMA LORAN E UMA HIPÉRBOLE	83
FIGURA 28 - RELAÇÃO ENTRE O SISTEMA LORAN E DUAS HIPÉRBOLES	83
FIGURA 29 - ELIPSE REPRESENTADA EM EIXOS CARTESIANOS	85
FIGURA 30 - ELIPSE USANDO EXCENTRICIDADE	86
FIGURA 31 – PARÁBOLA USANDO EXCENTRICIDADE	87
FIGURA 32 - HIPÉRBOLES REFERENTES ÀS MATRIZES A E D	91
FIGURA 33 - ELIPSE ROTACIONADA E TRANSLADADA	94
FIGURA 34 - MODELO DA GEOMETRIA ANALÍTICA E MODELO DA GEOMETRIA LINEAR.....	95
FIGURA 35 - MER.....	96
FIGURA 36 - TAREFA QUE TRATA DE PARÁBOLA COMO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO	102
FIGURA 37 - CIRCUNFERÊNCIA, HIPÉRBOLE, PARÁBOLA E ELIPSE TRAÇADAS NA SUPERFÍCIE CÔNICA.....	103

FIGURA 38 - ELIPSE COMO CIRCUNFERÊNCIA ACHATADA	104
FIGURA 39 - PARÁBOLA COMO GRÁFICO DE FUNÇÃO PARA O 9º ANO	106
FIGURA 40 - INTRODUÇÃO AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO	107
FIGURA 41 - EXERCÍCIOS SOBRE PARÁBOLA PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO	108
FIGURA 42 - CÔNICAS DETERMINADAS POR CORTES NO CONE	108
FIGURA 43 - TRANSITANDO DA GEOMETRIA ESPACIAL À PLANA	109
FIGURA 44 - EXEMPLO DE TAREFA DO TERCEIRO TIPO	110
FIGURA 45 - TAREFA ASSOCIANDO PARÁBOLA A UMA FUNÇÃO	111
FIGURA 46 - ATRIBUIÇÕES PARA OS PARTICIPANTES DOS GRUPOS	122
FIGURA 47 – PRIMEIRO MAPA DE QUESTÃO-RESPOSTA, <i>A PRIORI</i> , PARA O PEP: COMO CONSTRUIR UM FOGÃO SOLAR	126
FIGURA 48 – SEGUNDO MAPA DE QUESTÃO-RESPOSTA, <i>A PRIORI</i> , PARA O PEP: COMO CONSTRUIR UM FOGÃO SOLAR	127
FIGURA 49 - FOGÃO SOLAR PARABÓLICO	128
FIGURA 50 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS DO 1º PEP: COMO CONSTRUIR UM FOGÃO SOLAR, DO GRUPO D.....	137
FIGURA 51 - ESTUDANTES DO GRUPO A ENUNCIANDO A PROPRIEDADE REFLEXIVA DA PARÁBOLA	141
FIGURA 52 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS DO PEP COM ALUNOS DO EM – GRUPO A.....	142
FIGURA 53 - CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES NO PEP	147
FIGURA 54 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS <i>A PRIORI</i> DO PEP-FP – 1ª PARTE	157
FIGURA 55 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS <i>A PRIORI</i> DO PEP-FP – 2ª PARTE	158
FIGURA 56 - BUSCA NA BNCC PELOS ESTUDANTES DO GRUPO G3	166
FIGURA 57 – ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO FEITA PELOS ESTUDANTES DO GRUPO G2	167
FIGURA 58 - RESPOSTA PARA RAZÃO DE SER NOS LIVROS DIDÁTICOS ESCRITA POR UM GRUPO DE ESTUDANTES.....	168
FIGURA 59 – MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS <i>A PRIORI</i> PARA O PEP NO PEP-FP.....	171
FIGURA 60 – MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS PARA POSIÇÃO DA PAINEL NO FOGÃO SOLAR.....	172
FIGURA 61 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS PARA FORMA DO FOGÃO SOLAR	174
FIGURA 62 - USO DO <i>SOFTWARE</i> PARA VERIFICAR A RESPOSTA ENCONTRADA – GRUPO G6	177
FIGURA 63 - ENCONTRANDO A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA (PARTE 1).....	178
FIGURA 64 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS <i>A POSTERIORI</i> DO PEP VIVIDO NO PEP-FP (PARTE 1)	179
FIGURA 65 - MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS <i>A POSTERIORI</i> DO PEP VIVIDO NO PEP-FP (PARTE 2)	180
FIGURA 66 – ENCONTRANDO A EQUAÇÃO DA PARÁBOLA (PARTE 2)	182
FIGURA 67 - MAPA DE EVOLUÇÃO DO <i>MILIEU</i> DURANTE O PEP NO PEP-FP	183
FIGURA 68 - ALCANCE DO PEP EM RELAÇÃO AO MER	185
FIGURA 69 - PROPOSTA DE ENSINO DE CÔNICAS FEITA PELO GRUPO G2	187
FIGURA 70 - PROPOSTA DE ENSINO DE CÔNICAS FEITA PELO GRUPO G4	188
FIGURA 71 - PROPOSTA DE ENSINO DE CÔNICAS FEITA PELO GRUPO G6	189
FIGURA 72 - PROPOSTA PARA O ENSINO DE CÔNICAS PRODUZIDA PELO GRUPO G3	191
FIGURA 73 - ALTERAÇÕES NA PROPOSTA DE ENSINO FEITAS PELO GRUPO G4	192
FIGURA 74 - ALTERAÇÕES NA PROPOSTA DE ENSINO FEITAS PELO GRUPO G6	193
FIGURA 75 - ALTERAÇÕES NA PROPOSTA DE ENSINO FEITAS PELO GRUPO G3	194

FIGURA 76 - MAPA DE QUESTÕES APRESENTADO PELO GRUPO G3 PARA O ESTUDO DE HIPÉRBOLE	196
FIGURA 77 - DEMONSTRAÇÃO TEOREMA DE PONCELET	215

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 - TRABALHOS ANALISADOS NA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	34
QUADRO 2 - CONTEÚDOS RELACIONADOS A CÔNICAS - UNICAMP	114
QUADRO 3 - CONTEÚDOS RELACIONADOS A CÔNICAS - USP	114
QUADRO 4 - CONTEÚDOS RELACIONADOS A CÔNICAS - UFS	115
QUADRO 5 - CONTEÚDOS RELACIONADOS A CÔNICAS - UNESP	115
QUADRO 6 - QUESTÕES DO 1º PEP REFERENTES À FORMA DO FOGÃO – GRUPO D	132
QUADRO 7 - QUESTÕES DO 1º PEP RELACIONADAS À POSIÇÃO DA PANELA NO FOGÃO – GRUPO D	133
QUADRO 8 - QUESTÕES DO 1º PEP RELACIONADAS À POSIÇÃO DE INSTALAÇÃO DO FOGÃO – GRUPO D	134
QUADRO 9 - QUESTÕES DO 1º PEP RELACIONADAS AOS MATERIAIS PARA CONSTRUÇÃO – GRUPO D	135
QUADRO 10 - QUESTÕES DO 1º PEP RELACIONADAS AO USO DO FOGÃO – GRUPO D	136
QUADRO 11 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS À FORMA DO FOGÃO – GRUPO A	138
QUADRO 12 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS À POSIÇÃO DA PANELA – GRUPO A	139
QUADRO 13 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS AOS MATERIAIS – GRUPO A	139
QUADRO 14 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS AO USO DO FOGÃO – GRUPO A	140
QUADRO 15 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS AO TEMPO DE COZIMENTO – GRUPO A	140
QUADRO 16 - QUESTÕES DO 2º PEP RELACIONADAS À INSTALAÇÃO DO FOGÃO – GRUPO A	141
QUADRO 17 - QUESTÃO DO 3º PEP RELACIONADA À POSIÇÃO DE INSTALAÇÃO DO FOGÃO – GRUPO B	143
QUADRO 18 - QUESTÕES SEM FOCO ELABORADAS PELOS ESTUDANTES DURANTE O PEP	144
QUADRO 19 - QUESTÕES DIRETA, INDIRETA E CHAVE	147
QUADRO 20 - QUESTÕES FORMULADAS PELOS ALUNOS DURANTE O PRIMEIRO ENCONTRO DO PEP-FP	160
QUADRO 21 - QUESTÕES INICIAIS DO PEP SOBRE O FOGÃO SOLAR DURANTE O EXPERIMENTO DO PEP-FP	161
QUADRO 22 – QUESTÕES ENUNCIADAS PELOS ALUNOS DE LICENCIATURA ANTES DO PEP	164
QUADRO 23 – QUESTÕES FORMULADAS PELO FORMADOR E RESPONDIDAS EM CONJUNTO POR TODOS OS ALUNOS	173

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
2 PROBLEMÁTICA	25
2.1 REFERENCIAL TEÓRICO.....	25
2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.3 JUSTIFICATIVA.....	47
2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	49
2.5 METODOLOGIA.....	50
3 UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA	53
3.1 A PROBLEMÁTICA DAS “GEOMETRIAS DAS CÔNICAS”	53
3.2 UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA OS MODELOS DE GEOMETRIAS DAS CÔNICAS	56
3.2.1 <i>O modelo da geometria sintética</i>	56
3.2.2 <i>O modelo da geometria analítica</i>	80
3.2.3 <i>O modelo da geometria linear</i>	88
4 MODELO EPISTEMOLÓGICO DOMINANTE	98
4.1 AS CÔNICAS NO CURRÍCULO E NOS CADERNOS DO ESTADO DE SÃO PAULO	98
4.2 AS CÔNICAS NOS LIVROS DIDÁTICOS ADOTADOS PELA REDE ESTADUAL DE SERGIPE	106
4.3 AS CÔNICAS EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA BRASILEIROS	113
5 UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA.....	117
5.1 O PARADIGMA DE VISITA ÀS OBRAS	117
5.2 O PARADIGMA DE QUESTIONAMENTO DO MUNDO E O ESQUEMA HERBARTIANO.....	118
5.3 O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA E SUAS DIALÉTICAS	120
5.4 PEP: COMO CONSTRUIR UM FOGÃO SOLAR?.....	123
5.4.1 <i>Análise a priori do PEP</i>	124
5.4.2 <i>A escola, a universidade e os alunos</i>	129
5.5 ANÁLISE DOS DADOS	131
5.5.1 <i>Primeiro Percurso de Estudo e Pesquisa</i>	132
5.5.2 <i>Segundo Percurso de Estudo e Pesquisa</i>	138
5.6 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES	145
6 PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES.....	150
6.1 OBJETIVOS DO PEP-FP	150
6.2 INFORMAÇÕES DO LOCAL E DOS SUJEITOS DA PESQUISA	151
6.3 PROPOSTA DE FORMAÇÃO INICIAL BASEADA NO DISPOSITIVO PEP-FP: ANÁLISE <i>A PRIORI</i>	152
6.4 DESENVOLVIMENTO DO EXPERIMENTO	159

6.5 ANÁLISE DO PEP-FP – RESULTADOS OBSERVADOS.....	163
6.5.1 Antes do PEP.....	164
6.5.2 Durante o PEP.....	170
6.5.3 Após o PEP.....	185
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	198
REFERÊNCIAS	206
APÊNDICE A – ESTRATÉGIA DE ENSINO PARA O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA.....	212
APÊNDICE B – A PROPRIEDADE REFLEXIVA DA PARÁBOLA.....	214
ANEXO A – CARTA DE ESCLARECIMENTO SOBRE O PROJETO E A PESQUISA	216
ANEXO B – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	217

1 INTRODUÇÃO

O problema docente que originou esta pesquisa foi uma afirmação feita por um professor da rede pública que participava de uma formação continuada na universidade onde trabalhava o pesquisador responsável por esta investigação naquela época. A afirmação foi: “Toda equação de grau dois em duas incógnitas possui a parábola como sua representação gráfica”. Como sabemos, há várias outras representações gráficas para uma equação nessas condições, como exemplo poderíamos citar qualquer uma das outras cônicas, a depender da equação.

Após esse dia, a pergunta que ficou foi: “O que ‘levou’ esse docente a essa afirmação equivocada?” Considerando o currículo escolar brasileiro, a equação de grau dois em duas variáveis aparece inserida no conteúdo cônicas, em alguns casos, faz parte da definição dessas curvas. Assim, as primeiras investigações ocorreram de forma não pretensiosa, buscando livros didáticos dos Ensinos Superior e Básico para entender como esse tema está proposto nesses materiais. Com esses resultados e algumas leituras de textos introdutórios à Educação Matemática, fizemos alguns estudos, entre eles verificar como o ensino de cônicas está organizado matematicamente e didaticamente nos livros textos e possíveis problemas com o conhecimento do professor baseados na Teoria Antropológica do Didático (TAD). Decidimos então focar nossa investigação na construção e análise de um Percorso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) que inclui um Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) como forma de incidir na relação do conhecimento do professor com as cônicas. O episódio inicialmente citado nesta introdução e uma revisão bibliográfica mais detalhada nos conduzem a entender que a predominância da geometria analítica no tratamento das cônicas reduz a parábola à equação polinomial do segundo grau e, além disso, que a instituição formação de professores não oferece uma formação matemática suficiente para ampliar os conhecimentos que os estudantes trazem do Ensino Básico.

A elaboração dessa formação, de acordo com a TAD, conduz a alguns estudos, como os das três dimensões do problema didático, o que implica a construção de um Modelo Epistemológico de Referência, em um estudo econômico-institucional e um estudo ecológico. O primeiro nos permitiu localizar as cônicas em três geometrias (sintética, analítica e linear), com definições e tarefas distintas para

cada uma delas. Com o segundo estudo, entendemos como os livros (textos e didáticos) apresentam essas curvas e quais geometrias são abordadas em cada instituição de ensino estudada. Já por meio do estudo da dimensão ecológica conseguimos identificar as condições e restrições que favorecem e dificultam pôr em prática esse tipo de formação.

Nessas condições, delimitamos nosso problema de pesquisa com a seguinte questão: qual proposta de praxeologia matemática para o ensino de cônicas se pode utilizar na formação inicial de professores brasileiros? Em que essa praxeologia contribui e em que pode ajudar os futuros professores a desenhar, analisar e implementar novos processos didáticos?

Com essa definição, consideramos duas hipóteses para nossa pesquisa. Na primeira, inferimos que o MER permitirá explicitar praxeologias matemáticas que serão desenvolvidas na construção do PEP. Na segunda, inferimos que a falta da razão de ser das cônicas, principalmente nos livros didáticos, conduzirá os futuros professores a produzirem uma proposta de ensino baseada no monumentalismo, não esboçando assim um PEP próprio, mesmo depois de viverem um como alunos.

A metodologia usada para nos guiar durante a pesquisa foi baseada em princípios da Engenharia Didática associada à TAD e possui quatro fases: na primeira, denominada análise praxeológica ou análises preliminares, são realizados os estudos das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático, que nos levaram à construção do MER e do Modelo Epistemológico Dominante (MED). É também nesta primeira fase que são elaboradas as hipóteses da pesquisa. Na segunda fase, ocorrem a análise *a priori* e o planejamento matemático e didático da proposta de intervenção. Nesta fase, tendo como base os Modelos Epistemológicos de Referência e Dominantes, desenhamos, aplicamos e analisamos o PEP e também construímos o PEP-FP.

A terceira fase é a da experimentação e da análise “in vivo”. Foi neste momento da pesquisa que aplicamos o PEP-FP para 16 estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS) em uma formação que durou 28 horas. Na quarta e última fase, ocorre a análise *a posteriori*. É o momento de comparar os dados recolhidos durante a experimentação do PEP-FP com os estudos feitos na análise *a priori*. Além disso, é nesta fase que se faz a validação das hipóteses de pesquisa elaboradas na primeira fase.

Entre os principais resultados encontrados podemos citar que o PEP-FP proporcionou consideráveis reflexões por parte dos estudantes de licenciatura em Matemática a respeito do ensino de cônicas. De forma breve, por meio das atividades entregues pelos estudantes, foi possível notar que os futuros professores consideraram que as cônicas não devem ser trabalhadas somente na geometria analítica e que a estratégia de ensino baseada no modelo de questões e respostas contribui para o envolvimento dos alunos durante a aula.

Além disso, também identificamos uma dialética entre o Modelo Epistemológico de Referência (MER) e o Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores que colaborou com a evolução do desenho final do MER, ao mesmo tempo que contribuiu para que o PEP-FP tratasse de tarefas existentes nesse modelo de referência, se tornando uma proposta de praxeologia matemática para o ensino de cônicas para professores em formação inicial.

A apresentação deste trabalho, além desta introdução, é composta de sete capítulos. No segundo capítulo, temos nossa revisão bibliográfica, as ferramentas de nosso referencial teórico, as justificativas para esta pesquisa, nosso problema de investigação, além da metodologia de pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos um estudo epistemológico do nosso objeto matemático e construímos um Modelo Epistemológico de Referência (MER) que usaremos tanto para a análise do Modelo Epistemológico Dominante, como também para desenhar a nossa proposta de formação inicial (PEP-FP).

O quarto capítulo contém uma análise de um Modelo Epistemológico Dominante para as cônicas baseada em nosso MER e que traz resultados importantes para a construção de um estudo exploratório na sequência.

O quinto capítulo apresenta um estudo exploratório para o ensino da parábola, de seus elementos básicos e de sua propriedade reflexiva. Esse estudo foi baseado no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) segundo Chevallard (2013a). Nesse capítulo apresentamos o desenho, a análise *a priori*, o experimento, a análise *a posteriori* e os resultados desse PEP, que teve como questão geratriz “ Q_0 : Como construir um fogão solar?” e foi experimentado com estudantes de licenciatura em Matemática e com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de Sergipe.

No sexto capítulo, planejamos toda formação inicial com base nos resultados do estudo exploratório e no Modelo Epistemológico de Referência. Para essa formação, usamos o dispositivo dos Percursos de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores segundo Ruiz-Olarría (2015) e Licera (2017). Também nesse capítulo se encontram a metodologia usada para essa formação, a análise *a priori*, informações a respeito do experimento, a análise *a posteriori* e os resultados dessa formação. O sétimo e último capítulo contém nossas considerações finais e perspectivas para futuros trabalhos.

2 PROBLEMÁTICA

Optamos por iniciar o capítulo com a apresentação de alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático, que guiará este trabalho, para que possamos tratar as seções seguintes – revisão bibliográfica, justificativa, delimitação do problema e metodologia – sob as luzes dessa teoria.

2.1 Referencial teórico

Nesta seção apresentamos, de forma breve, as noções da Teoria Antropológica do Didático que serão fundamentais para o norte de nossa pesquisa, isto é, quais os elementos da TAD que “tocarão” este trabalho e de que forma isso ocorrerá.

Essa teoria, criada pelo investigador francês Yves Chevallard e amplamente divulgada por contribuições dos catalães Josep Gascón e Marianna Bosch, surgiu como um prolongamento da Noção de Transposição Didática (CHEVALLARD, 1985), desenvolvida no quadro da didática francesa, e tem sido usada por investigadores de diversos países, como França, Espanha, Dinamarca, Alemanha, Suécia, Portugal, Brasil, México, Chile e Peru.

De acordo com Chevallard (1998b), há três noções primitivas para sua teoria: o objeto (O), as pessoas (X) e as instituições (I). O autor esclarece que qualquer coisa pode ser um objeto desde que exista uma relação de reconhecimento deste por uma pessoa que representa por $R(X, O)$ ou por uma instituição, $R(I, O)$. Como um exemplo de objeto podemos citar uma faca, pois há uma pessoa, o açougueiro, que se relaciona com esse objeto dentro da instituição chamada açougue, embora outras pessoas também se relacionem com esse objeto. Uma instituição, por sua vez, pode ser uma escola, uma paróquia, uma sala de aula ou até mesmo uma feira, onde encontramos professores, alunos, fiéis, vendedores, feirantes, clientes, que o autor representa por (X), que se relacionam com objetos (O) particulares de cada instituição. Dessa forma, uma instituição (I) possui uma estrutura heterogênea por causa das relações entre as pessoas e os objetos pertencentes a ela, isto é, dentro de uma instituição podemos encontrar diversas relações entre objetos e pessoas.

A TAD é baseada na noção de organização praxeológica ou praxeologia, segundo Chevallard (1998b). Para o autor, uma praxeologia, para um determinado objeto de saber, é formada por uma teoria (θ), que fornece fundamentação para as tecnologias (θ), que, por sua vez, justificam as técnicas (τ), que devem servir para solucionar tarefas (t), que pertencem a determinados tipos de tarefas (T). Assim, uma praxeologia $[T, \tau, \theta, \theta]$ é dividida em dois blocos, o tecnológico-teórico $[\theta, \theta]$, a que chamamos de “bloco do saber”, e o técnico-prático $[\tau, T]$, ou o bloco do “saber-fazer”. Qualquer atividade humana realizada regularmente pode ser interpretada sob uma praxeologia.

Podemos identificar os elementos de uma praxeologia quando a tarefa $t \in T$ é, por exemplo, cursar por completo um doutoramento. Uma técnica τ para resolver essa tarefa pode ser: a aprovação nas disciplinas, nos exames de proficiência, no exame de qualificação e na defesa. Essas técnicas envolvem subtécnicas como buscar pesquisas que tratem do seu tema, falar com especialistas a respeito de seu trabalho ou suas ideias, estudar artigos, escrever a tese, realizar apresentações orais de seu trabalho etc. A tecnologia θ , que justifica essa técnica, pode ser o conjunto de normas e regulamentos determinados pelo programa de pós-graduação a que esse curso pertença, e a teoria θ seria formada pelos documentos curriculares oficiais referentes às pós-graduações do país onde essa instituição se encontra.

Uma noção usada na TAD, muito importante para nosso trabalho, é a de paradigma didático, definido por Chevallard (2013a, p. 163, tradução nossa) como sendo “um conjunto de regras que prescrevem, embora de forma implícita, o que se estuda – que podem ser as apostas didáticas – e quais as formas existentes para estudá-las”. O autor afirma que muitas instituições de ensino vivem o paradigma didático de visita às obras ou monumentalismo, no sentido de que o conteúdo é apresentado como um monumento que possui um valor próprio, pronto e com seu começo, meio e fim já determinados, sem a possibilidade de ocorrer qualquer desvio no desenvolvimento desse conteúdo durante a aula.

Aproveitamos para esclarecer para o leitor uma sutil diferença entre os termos “monumentalismo” e “visita às obras”. No monumentalismo, ocorre uma visita às obras

não motivada¹, ou seja, a obra é visitada somente por ser importante para ser aprendida. Já na visita às obras, como dito anteriormente, há necessidade de aprender um determinado conteúdo para um fim que não é o próprio conhecimento matemático. Por exemplo, no monumentalismo, estudamos como resolver uma equação de grau 3 para somente resolver uma equação de grau 3; por outro lado, na visita às obras, estudamos a resolução da equação de grau 3 que encontramos durante a solução de um problema que estávamos estudando ou para agregar conhecimento necessário para o entendimento de uma questão no âmbito social, financeiro ou qualquer outra possibilidade que possa ser de interesse comum de um certo grupo de estudantes.

Nesse paradigma vigente, os alunos devem admirar e desfrutar desse monumento, diante da presença do professor, como espectadores que, quando visitam uma obra, não se sentem à vontade ou não sentem necessidade de levantar questões do tipo: “Por que isso aparece aqui?” ou “Qual é sua utilidade?” O professor, que muitas vezes assume apenas o papel de guia, e os alunos, provavelmente, não sabem quase nada da razão de ser, atual ou do passado, do objeto de saber em questão.

Como resposta a esse problema, Chevallard (2013a) propõe o paradigma de questionamento do mundo a partir de dois princípios básicos. O primeiro é considerar que “a educação é um processo que se desenvolve durante toda a vida” (CHEVALLARD, 2013a, p. 8, tradução nossa) – mesmo após terminar os estudos universitários e pós-graduados, mesmo se o cidadão possui 70 anos, devemos investigar o que ele sabe, qual seu conhecimento. O segundo é “para que uma pessoa aprenda algo de uma obra O é necessário estudar O , por exemplo, não se aprende a resolver uma equação cúbica casualmente” (CHEVALLARD, 2013a, p. 169, tradução nossa). Tais princípios conduzem o autor a desenvolver a noção de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) como um dispositivo de ensino para alavancar esse novo paradigma. No entanto, o autor define esse Percurso baseando-se no sistema de investigação “questão-resposta”, ou seja, cria-se uma questão geratriz Q_0 , possivelmente uma tarefa que deve ser cumprida com a ajuda de todos os alunos a

¹ Uma obra pode ser um conteúdo já estudado ou que se pretende estudar.

partir da formulação de novas questões Q_1, Q_2, Q_3 , propostas por eles, que deverão ser respondidas para gerar respostas parciais ($R^\diamond$), que, possivelmente, gerarão novas perguntas $Q_{11}, Q_{22}, \dots$ etc., até encontrarem, de forma conjunta, a resposta final procurada $R^\heartsuit$. Nesse percurso, o conteúdo é estudado para solucionar um problema maior para responder uma questão sobre o mundo em que vivemos. Para Chevallard (2009), a partir da apresentação da questão geratriz se constitui um sistema didático em torno dela, representado por $S(X; Y; Q)$, em que

X é um coletivo de estudo (uma classe, uma equipe de alunos, uma equipe de pesquisadores, um jornalista, etc.) e Y uma equipe (em geral reduzida: Y pode até ser um conjunto vazio) de auxiliares do estudo e de diretores de estudo (professor, tutor, diretor de pesquisa, diretor da redação, etc.). O objetivo da constituição desse sistema didático é estudar Q (CHEVALLARD, 2009, p. 19, tradução nossa).

Podemos encontrar vários sistemas didáticos $S(X; Y; O)$, em que O representa um objeto de estudo (ou uma obra), ou $S(X; Y; \mathcal{P})$, em que $\mathcal{P}$ simboliza uma praxeologia. Para Bosch (2018a), a disseminação das praxeologias ocorre via sistemas didáticos e, por meio desses sistemas, se pode estudar problemas de cunho epistemológico (questionamentos a respeito da delimitação, composição e origem da obra ou praxeologia) e questões a respeito das condições e restrições que permitem ou dificultam a evolução dos estudos realizados por X e Y .

Por outro lado, surge a necessidade de formar professores para que tomem conhecimento desses percursos e da noção de questionamento do mundo. Ruiz-Olarría (2015), percebendo essa demanda, desenvolve o Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores – PEP-FP – com o objetivo de

ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista ao paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores necessita de dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, se deve recorrer de alguma forma a dispositivos com estrutura do tipo PEP. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136, tradução nossa).

Segundo a autora, da mesma forma que ocorre no PEP, o PEP-FP também tem início com uma questão geratriz Q_{0FP} , que deve ser formulada para a busca de contextos ligados à formação docente, que deve focar num objeto de ensino $\mathcal{C}$ a ser trabalhado, além de explorar problemas de professores em formação (inicial ou continuada) considerando o nível escolar (fundamental, médio, superior) em que esses professores estão inseridos. A autora desenvolveu, então, um processo de

formação de professores que prevê cinco módulos que são articulados durante o percurso.

No **módulo M_0** , chamado de “como ensinar C ?”, deve ser definida a questão geratriz do PEP-FP e devem ser esboçadas as possíveis primeiras respostas que podem ser conduzidas pelo currículo, por livros textos, revistas para professores, revistas de pesquisa, páginas na web etc. Como essa questão geratriz tem a função de guiar todo o desdobramento do percurso, este módulo é considerado um “módulo transversal” aos demais. Os formadores, nesse processo, com o papel de auxiliares do estudo, não podem fornecer respostas aos professores em formação, mas sim direcioná-los a questões de cunho didático, tais como:

O que é C ? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C ? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 138, tradução nossa).

Segundo a autora, todas essas questões devem se manter vivas durante todo o percurso, sem uma resposta que encerre a discussão.

As questões, que tratam do conteúdo, devem ser discutidas de forma que o professor perceba a necessidade de uma referência distinta do que está sendo avaliado (livros didáticos e livros textos).

Quanto às perguntas a respeito do ensino de C , elas devem discutir a possibilidade de aulas inseridas no paradigma de questionamento do mundo, isto é, que o conteúdo seja apresentado de forma que os estudantes tenham uma razão para esse estudo que não seja só matemática; que os estudantes participem não somente executando tarefas ou buscando soluções, mas também determinando quais tarefas devem ser resolvidas; que o professor não seja a única fonte de conhecimento, tampouco seja o principal responsável por validar as respostas encontradas. É este o momento de início do módulo M_1 .

No **módulo M_1** , denominado “viver um PEP”, o formador deve apresentar um PEP como proposta de estratégia de ensino que cumpra com tudo o que foi elencado a respeito do ensino de C nas discussões realizadas em M_0 . O objetivo principal deste módulo é que os professores em formação se comportem como estudantes e não como professores, que seja possível separar a “atividade matemática de estudo e

pesquisa e sua análise praxeológica (ou epistemológica) do problema com seu ensino” (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 209, tradução nossa). Para a autora,

este módulo será desenhado com o objetivo de que o estudante-professor realize um PEP na posição de matemático ou, de maneira mais geral, de estudante X de um sistema didático $S(X,Y)$ que se situa na instituição de formação de professores. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 139, tradução nossa).

No módulo de “análise do PEP vivido”, M_2 , após viverem a experiência do PEP na posição de estudantes, os professores em formação poderão apresentar uma proposta de ensino baseados nos novos conhecimentos adquiridos com os módulos anteriores. Essa proposta será confrontada com o PEP experimentado a fim de causar reflexões a respeito de possíveis pensamentos e restrições do paradigma monumentalista que dificultam o avanço do questionamento do mundo.

O penúltimo módulo, M_3 , é dedicado ao desenho de um PEP para um conteúdo específico a ser trabalhado pelos professores em formação com seus respectivos estudantes. Para isso, cada grupo deve apresentar um estudo epistemológico do objeto de ensino, uma questão geratriz e seu mapa de questões e respostas, de tal forma que seja possível identificar toda matemática que será trabalhada nesse percurso.

Após desenharem seus respectivos PEP, é chegada a hora de colocá-los em prática. O objetivo deste último **módulo**, M_4 , é oferecer aos professores em formação a possibilidade de coordenarem um PEP, o que deve acontecer sob o acompanhamento do formador/pesquisador.

Para que se desenvolva um PEP para o ensino de cônicas para ser estudado no PEP-FP, são necessários alguns estudos preliminares. Um deles prevê a construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER). A função desse modelo, de acordo com Barquero, Bosch e Gascón (2013), é nos conduzir a conhecer mais profundamente o que é esse objeto de estudo e por qual motivo é estudado; além disso, deve servir como referência para construirmos um Modelo Epistemológico Dominante (MED), ou seja, um texto que nos mostra como o objeto matemático é encontrado em livros (textos ou didáticos) usados nas instituições de ensino e ainda nos permite identificar condições a serem cumpridas e restrições que possam dificultar a inserção do paradigma de questionamento do mundo na(s) instituição(ões) em que se pretende ensinar o objeto matemático.

Por outro lado, o MER também servirá como norte para a construção do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) por fornecer as praxeologias matemáticas que devem ser consideradas durante o desenvolvimento deste experimento. Já para o Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores, esse modelo estará presente tanto nas discussões didáticas que tratam do papel do objeto matemático na instituição escolar quanto como um exemplo de análise epistemológica do objeto matemático, a ser apresentado para uma comparação com a que será desenvolvida pelos professores em formação. Por último, o MER deve ser desenvolvido de tal forma que, após finalizado, possa sempre ser modificado pelo acréscimo de novas informações para que se torne cada vez mais completo.

O PEP desenvolvido foi experimentado em um estudo de campo exploratório com estudantes dos Ensinos Médio e universitário, com o objetivo de explicitar as condições e restrições para o desenho de nossa formação inicial. Como essa formação foi implementada segundo os módulos do dispositivo do PEP-FP, o PEP, considerando os resultados do experimento, foi trabalhado no segundo módulo como resposta a uma questão parcial da formação que, em nosso caso, só foi desenvolvida até o terceiro módulo, já que os futuros professores não possuíam alunos para colocar em prática seus respectivos PEP, como determina o modelo M_4 .

Após esta apresentação de nosso embasamento teórico, para verificar o atual estado das investigações que tratam de cônicas, além do ineditismo de nossa proposta, apresentaremos, a seguir, uma revisão das pesquisas que encontramos que tratam de cônicas no ensino e na formação de professores.

2.2 Revisão bibliográfica

Nesta seção apresentamos as pesquisas que encontramos primeiro utilizando o descritor “cônicas”. Depois fizemos uma segunda busca utilizando os descritores: “ensino de cônicas”, “equação das cônicas”, “equação do segundo grau em duas variáveis”, “equação polinomial do segundo grau”, “equação de grau dois” e “equação do segundo grau”. Finalmente, utilizamos os descritores: “*enseñanza de las cónicas*”, “*learning of conics*” e “*teaching of conics*”.

Realizamos o levantamento buscando, a princípio na Internet, no *site* que apresenta o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes², vinculado ao governo federal do Brasil e ao Ministério da Educação, o principal sítio online para trabalhos de mestrado e doutorado realizados no Brasil. Depois buscamos no Google Acadêmico³, realizando as buscas em português, espanhol e inglês. Procuramos também por trabalhos em material físico, que foram consultados em bibliotecas. As buscas foram realizadas entre os anos de 2016 e início de 2019, e de todos os trabalhos encontrados foram identificados os objetivos da pesquisa, a metodologia, o quadro teórico, o público-alvo, além de alguns resultados.

No Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, encontramos pesquisas nas mais diversas áreas, como engenharia, computação, matemática, arquitetura, odontologia, ensino etc., totalizando 335 trabalhos.

Dentre esses trabalhos, optamos por desconsiderar os trabalhos do PROFMAT e de mestrados profissionais porque suas pesquisas não são fundamentadas em teorias da Educação Matemática, o que nos permitiu ficar com 171 trabalhos entre mestrados acadêmicos ou doutorados. Em seguida, para focar no ensino e na aprendizagem de matemática, usamos o filtro “área de concentração” e selecionamos as seguintes opções: ensino de ciências e matemática, ensino e aprendizagem da matemática e seus fundamentos filosóficos e científicos, ensino e história da matemática e da física e educação matemática, o que conduziu a 11 dissertações e duas teses. Entre esses trabalhos identificamos cinco que não nos interessavam por não possuírem as cônicas como objeto matemático de pesquisa; além disso, encontramos um trabalho a nível de mestrado que não possuía metodologia de pesquisa e outro cujo arquivo não estava disponível para *download*, nos restando cinco dissertações e uma tese.

Novas buscas foram feitas no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes com outros descritores: “equação das cônicas”, “equação do segundo grau em duas variáveis”, “equação polinomial do segundo grau”, “equação de grau dois” e “equação do segundo grau”, e encontramos apenas uma dissertação de mestrado diferente das já encontradas, totalizando assim seis trabalhos nesta busca.

² <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>.

³ <https://scholar.google.com.br>.

Pode-se encontrar diversas pesquisas ao buscar pela expressão em espanhol “*enseñanza de las cónicas*” no *website* Google Acadêmico. Fizemos essa busca e encontramos 67 trabalhos, dos quais grande parte se referia a estudos que fogem ao objetivo de nossa pesquisa, tais como trabalhos que tratavam de uma só cônica ou das quádras; relatos de experiência ou descrições de oficinas ministradas em eventos científicos que traziam pouca fundamentação teórica e metodológica para uma pesquisa científica; pesquisas a respeito da estrutura curricular do Ensino Básico de outros países; e pesquisas inseridas em outras áreas como ensino de física e neurobiologia, além de dissertações que não apresentavam questão de pesquisa e metodologia. Ao final, conseguimos duas dissertações e três artigos científicos.

Também fizemos buscas com as expressões “*learning of conics*” e “*teaching of conics*” no Google Acadêmico e encontramos 11 e 5 trabalhos, respectivamente, sendo que dois trabalhos estavam em ambas as buscas. Entre os 14 trabalhos, dois tratavam do currículo escolar na Holanda, dois eram livros que possuíam cônicas entre seus capítulos, quatro não estavam disponíveis, um era revisão de literatura e outros dois apresentavam pesquisas a respeito da história da matemática e da parábola, portanto nos restaram apenas três trabalhos. Por último, encontramos uma tese em material físico escrita em francês, disponível no acervo dos professores do Departamento de Matemática da PUC-SP. Assim, nossa revisão bibliográfica foi realizada com 15 trabalhos que identificamos no quadro 1, em que ME representa trabalhos de mestrado e DO, os de doutorado.

Com as buscas feitas, dividimos os trabalhos de nossa revisão bibliográfica em três categorias. Na primeira, agrupamos os trabalhos que trataram de alguma reflexão teórica ou análise de material didático. Na segunda, aqueles que focaram no ensino de cônicas e, na terceira, os que implementaram formação de professores tanto inicial quanto continuada.

Para a **primeira categoria**, selecionamos cinco trabalhos: Quaranta Neto (2008), Bordalo (2011), Barbin (2012), Almouloud, Koné e Sangaré (2014) e Siqueira (2016).

Quaranta Neto (2008) apresenta em seu trabalho uma tradução para a língua portuguesa do texto “Novos elementos das seções cônicas” de Philippe de La Hire, uma obra que foca na matemática grega utilizando somente geometria sintética.

Quadro 1 - Trabalhos analisados na Revisão Bibliográfica

TÍTULO	AUTOR	ANO	NÍVEL	INSTITUIÇÃO
<i>Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif.</i>	Bongiovanni, V.	2001	DO	Université Joseph Fourier. Grenoble
Perennial Notions and their teaching	Barbin, E.	2007	Artigo	Proceedings 5° ESU
Tradução comentada da obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire, 1679) e sua relevância para o ensino de Matemática.	Quaranta Neto, F.	2008	ME	UFRJ
O Estudo da Equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ Utilizando o Software Grafeq: Uma Proposta Para o Ensino Médio	Goulart, J. B.	2009	ME	UFRS
As cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro	Bordalo, M.	2011	ME	UFRJ
Seções cônicas: atividades com geometria com base no currículo do estado de São Paulo	Silva, M. B.	2011	ME	PUC-SP
Teaching of conics in 19th and 20th centuries in France: On the conditions of changing (1854 – 1997)	Barbin, E.	2012	Artigo	Proceedings 2° ICHME
<i>Secuencia didáctica para la enseñanza de las cónicas desde lo puntual y lo global integrando un ambiente de geometría dinámica</i>	Mosquera, E. F.; Palomino, M. F. M.	2012	Artigo	Actas 3° CFMCB
<i>Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía</i>	Silva, J. A. M.	2012	ME	Universidad Nacional de Colombia
<i>Reflexiones en torno al diseño e implementación de una propuesta de actividades sobre cónicas usando GeoGebra: intercambio Brasil-Argentina. Péres</i>	Péres Medina, C. R.; Souto, D. L. P.	2012	Artigo	Actas Conferencia Latinoam. de GeoGebra
<i>Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento</i>	Barraza, D. B.; Gozález, M. P.; Chavarro, L. S.	2013	Artigo	Actas VII CIBEM
Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância <i>online</i>	Souto, D. L. P.	2013	DO	UNESP Rio Claro
<i>Influencia del software educativo GeoGebra en el aprendizaje de las cónicas en los estudiantes de 10°. Grado de la institución educativa Simón Araujo</i>	Gómez Mongüa, P. J.; Ruiz Medina, C. A.	2014	ME	Universidad Norbert Wiener - Lima/Peru
<i>Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali</i>	Almouloud, S. A.; Koné, C.; Sangaré, M. S.	2014	Artigo	RIPEM
Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista	Siqueira, C. A. F.	2016	ME	PUC-SP
Curvas cônicas: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica	Sousa, N. S.	2016	ME	UFPE

Fonte: Produzido pelo autor.

A proposta desse trabalho foi apresentar a professores de matemática uma abordagem das cônicas usando a geometria sintética diferente daquela encontrada nos livros didáticos usados no Ensino Básico brasileiro, a qual o autor considera muito

pobre quando comparada a todo o conhecimento acumulado ao longo da história das cônicas na matemática.

Quaranta Neto (2008) faz uma comparação da obra de La Hire com um livro didático usado no Brasil no século XX, que o autor afirma ter sido de maior relevância naquela época. Essa comparação foi concluída por meio de uma lista de semelhanças e uma de diferenças entre as duas obras. Entre as semelhanças, destaca-se que o uso da geometria sintética é predominante e que a analítica é quase inexistente para ambas as obras; ambos os livros trabalham predominantemente no contexto da geometria plana e somente o livro didático apresenta uma proposição na geometria espacial. Para as diferenças, o destaque ficou por conta de que La Hire não apresenta as cônicas de forma unificada, enquanto o livro didático o faz.

O autor conclui que a obra em questão pode servir como apoio para professores que desejam aplicar e dar mais sentido ao ensino de cônicas, acrescentando que a obra é de fácil entendimento, destacando que La Hire utiliza

a definição bifocal, que é de fácil observação e viabiliza diversas construções contínuas já propostas por diversos autores (Kepler, Descartes etc.); não utiliza o cone em momento algum, pois é feita toda no plano. Portanto não exige a habilidade de visualização espacial; estuda separadamente cada cônica; sua argumentação usa a geometria euclidiana que é ensinada no ensino Fundamental. (QUARANTA NETO, 2008, p. 274).

Particularmente, discordamos do fato de que não utilizar o cone facilita o entendimento de uma obra a respeito das cônicas, já que se trata da primeira definição encontrada na história da matemática e pode permitir que o estudante também estude elementos da geometria espacial. Por outro lado, a comparação com um livro didático do século XX não faz sentido, tendo em vista que a geometria analítica não era o foco dos estudos de La Hire.

Bordallo (2011) buscou em sua dissertação informações na história do ensino de cônicas no Brasil, no período de 1892 a 2011, que contribuíssem para o desenvolvimento de uma proposta de ensino para esse objeto de forma unificada, de maneira que os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio pudessem perceber que a parábola, a elipse e a hipérbole pertencem a uma mesma família. Para isso, a autora analisou como as cônicas eram apresentadas nos programas de ensino, na legislação brasileira relativa à educação, além de livros didáticos desse período.

Como resultado, a autora afirma que Apolônio conseguiu unificar as cônicas determinando-as por meio de cortes em um único cone duplo e que isso permaneceu até a obra de La Hire, que apresentou as cônicas separadas a partir da distância focal. A autora acrescenta que no século XIX houve uma nova tentativa de unificar as cônicas por parte de Dandelin, quando esse matemático resgatou o tratamento sintético e enunciou um teorema mostrando que as seções do cone que geram cada cônica coincidem com suas definições focais. No entanto, segundo a autora, esse teorema não ganhou espaço nos livros didáticos que tinham a geometria analítica como contexto predominante. Ao final de seu trabalho, Bordallo (2011) constrói uma proposta de ensino para as cônicas na geometria analítica, propondo a unificação dessas curvas com foco na definição de excentricidade.

Barbin (2007) conduz sua investigação baseando-se no que chama de noções perenes, caracterizadas por estudos da profundidade epistemológica; da possibilidade de mudança conceitual; da integração com outros campos e dos interesses históricos e culturais. A autora entende

Por profundidade epistemológica as noções que estão envolvidas em vários teoremas, integrados com outras noções e são objetos de diferentes tipos de demonstrações. Mudanças conceituais são mudanças entre duas teorias matemáticas diferentes. Por exemplo, tangente definida por uma linha reta que toca uma curva ou definida como a direção de um movimento. (BARBIN, 2007, p. 157, tradução nossa).

Nesse sentido, a autora considera as cônicas como uma noção perene que envolve muitas propriedades, contextos, abordagens algébrica e geométrica e que permite a construção de relações entre as geometrias plana e espacial.

Barbin (2012) estudou o ensino de cônicas na França nos séculos XIX e XX e encontrou variações de abordagens que transitavam entre os contextos geométrico e algébrico. Além disso, encontrou distintas definições como curvas que representam a equação polinomial completa do segundo grau em duas variáveis; por focos, por foco e diretriz (determinadas por Kepler e Descartes) e por excentricidade (determinadas por Pappus e Lebesgue).

A autora afirma que as cônicas praticamente desapareceram dos programas de ensino após a reforma da matemática moderna na França e que seu estudo ficou durante muito tempo restrito às curvas que representam equações de segundo grau do tipo $ax^2 + by^2 + dx + ey + f = 0$. Apõe ainda que o renascimento desse objeto

ocorreu nos anos 2000 e esteve ligado às novas tecnologias, com uma proposta a ser trabalhada somente no contexto da geometria analítica.

Para a autora, houve quatro configurações para o ensino de cônicas nos séculos XIX e XX: o ensino que utiliza poucas definições e poucos problemas; o que utiliza diferentes abordagens e diferentes conceitos matemáticos; o que utiliza muitas abordagens e muitos contextos matemáticos situados na história; e o que utiliza muitas abordagens, muitos contextos matemáticos e históricos e extramatemáticos.

Almouloud, Koné e Sangaré (2014) observaram, por meio de uma análise nos cadernos dos estudantes dos cursos de ciências exatas e ciências biológicas do Ensino Básico da República do Mali, uma discrepância entre o conteúdo a ser ensinado e o conteúdo realmente ensinado a respeito de cônicas e que os aspectos geométricos são praticamente ignorados quando comparados com o que é ensinado no contexto analítico. Assim, os autores decidiram pesquisar por que a geometria analítica é favorecida, em relação à sintética, nas aulas em que são trabalhadas as cônicas.

Para alcançar esse objetivo, os autores usaram a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard para analisar matemática e didaticamente livros didáticos das duas coleções mais adotadas naquele país. A análise das organizações matemáticas identificou os tipos de tarefas, as técnicas e as tecnologias apresentadas em cada coleção com base em uma classificação feita por meio de análises do currículo de matemática para o Ensino Básico, livros didáticos e práticas em sala de aula. Já as escolhas didáticas feitas em cada coleção foram analisadas a partir das recomendações para o ensino de cônicas contidas no currículo de matemática do Ensino Básico da República do Mali.

Almouloud, Koné e Sangaré (2014, p. 26) notaram que uma das coleções introduz o conceito de cônicas a partir de uma atividade de construção dos pontos da curva, enquanto a outra coleção aborda esse tema por suas principais propriedades geométricas, além disso, as tarefas apresentadas por ambas são bastante equivalentes. Para os autores, embora as cônicas sejam introduzidas na geometria sintética por meio da noção de lugar geométrico, essa abordagem é rapidamente substituída pelo estudo algébrico, e o estudo desse objeto fica limitado ao estudo de sua equação. Afirmam ainda que essa substituição pode causar dificuldades epistemológicas na construção do significado de cônicas pelos estudantes,

particularmente para o significado de foco, reta diretriz, excentricidade e elementos de simetria, já que com essa substituição os significados geométricos desses elementos são reduzidos às nomenclaturas atribuídas na geometria analítica.

O trabalho de mestrado de Siqueira (2016), que estudou as cônicas na geometria e na geometria analítica, teve por objetivo articular a noção de Quadros de Règine Douady, a Teoria de Registros de Representação Semiótica e a noção de Pontos de Vista de Rogalski para o ensino de cônicas no ciclo básico por meio de um estudo bibliográfico. Para entender mais sobre as cônicas, situar sua pesquisa e mostrar a relevância na área de Educação Matemática, o autor analisou como esse objeto surgiu na história da matemática, verificou o que há nos documentos curriculares oficiais e fez uma revisão dos trabalhos acadêmicos que tratam desse tema.

Entre alguns resultados, o autor apresenta um estudo do teorema de Dandelin que permite uma abordagem geométrica de elementos como foco, reta diretriz e excentricidade. Como para a demonstração de tal teorema são necessários conhecimentos de outros conceitos da geometria, como semelhança de triângulos e retas tangentes a curvas, o autor sugere a inclusão desse conteúdo no ensino de cônicas para o terceiro ano do Ensino Médio (estudantes com 17 anos). Além disso, propõe algumas ideias para futuras pesquisas, dentre elas a possibilidade de uma formação de professores usando outros formalismos matemáticos como a linguagem da álgebra linear, usando matrizes, autovalor, autovetor e diagonalização.

A contribuição de Barbin (2012) para o nosso trabalho está na constatação das diversas abordagens dadas às cônicas, que coincidem com os momentos em que o professor teve mais liberdade para decidir como ensinar cônicas até chegar aos anos 2000, quando tal ensino foi vinculado ao uso de novas tecnologias, mas sempre inserido na geometria analítica. Esse fato também ocorreu no Brasil, como mostram as pesquisas feitas nesta revisão. Já o trabalho de Almouloud, Koné e Sangaré (2014) contribuiu por destacar as possíveis dificuldades epistemológicas na construção do significado de cônicas causadas pela rápida passagem do contexto sintético para o analítico ocorrida nos livros didáticos de duas coleções usadas na República do Mali. Concordamos com os autores que os significados geométricos de foco, reta diretriz e excentricidade, vistos na geometria sintética, ficam reduzidos às suas respectivas nomenclaturas na geometria analítica.

Na **segunda categoria (ensino de cônicas)**, selecionamos os seguintes trabalhos: Goulart (2009), Silva (2012), Barraza, González e Chavarro (2013) e Gómez Mongüa e Ruiz Medina (2014).

Goulart (2009) utilizou o *software* GRAFEQ para desenvolver uma sequência de atividades e trabalhar com as soluções possíveis para a equação incompleta $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, sem o termo misto Cxy , pois, segundo a autora, os livros do Ensino Básico de matemática não tratam desse caso. O trabalho apoiou-se na Teoria do Desenvolvimento Cognitivo de Piaget e na Engenharia Didática como metodologia de investigação. O objetivo de sua pesquisa foi responder às seguintes questões:

Usando um meio informatizado é possível trabalhar, com alunos que estão cursando o Ensino Médio, a resolução da equação $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, de forma que entendam que retas e círculos, junto com elipses, hipérbolas e parábolas são todas as soluções possíveis desta equação? Em um meio informatizado, momentos de trabalho que contemplam a exploração empírica – no caso a observação de relações entre mudanças de parâmetros nas equações e efeitos gráficos - podem contribuir para a construção de conhecimento em Geometria Analítica? (GOULART, 2009, p. 75).

As atividades foram aplicadas para 12 alunos do terceiro ano do Ensino Médio durante as aulas de geometria analítica em uma instituição de ensino privada na cidade de Novo Hamburgo/RS.

Os resultados da pesquisa apontaram que a exploração empírica ajuda na construção do conhecimento, mas não é suficiente, sendo a intervenção do professor fundamental, principalmente, quando o aluno não percebe aspectos relevantes da exploração que deveriam ser identificados para uma compreensão do conteúdo trabalhado.

Por fim, a autora conclui que é possível trabalhar com alunos do terceiro ano do Ensino Médio usando um meio informatizado (*software* GRAFEQ) para que os estudantes entendam todas as possíveis soluções para a equação $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, além da construção de conhecimentos de geometria analítica, o que possibilitou a exploração de mudança de parâmetros nas equações e seus efeitos nas respectivas representações gráficas.

Embora a autora tenha escolhido trabalhar com a equação incompleta $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ sem incluir o termo misto Cxy , pelo fato de os livros didáticos não a apresentarem, acreditamos ser possível trabalhar com a equação completa

desde que se mobilizem conhecimentos matemáticos presentes na álgebra linear e cabíveis nesse nível de ensino.

O objetivo do trabalho de mestrado de Silva (2011) foi investigar a forma como o professor de matemática utiliza tecnologias e como propõe atividades diferentes das propostas pelo Caderno do Professor usado pela rede estadual de São Paulo a respeito do tema cônicas. Para isso, o autor elaborou uma sequência de atividades usando dobraduras e o *software* GeoGebra, a qual foi aplicada a um grupo de 12 professores da rede pública em forma de oficina durante uma formação continuada realizada na PUC-SP.

As atividades desenvolvidas pelo autor focam, em sua maioria, na construção das cônicas parábola, elipse e hipérbole em um contexto geométrico por meio do conceito de lugar geométrico e usando retas tangentes a essas curvas, mas também há questões que exigem que o professor encontre a equação da cônica para resolver problemas que tratam de distância entre pontos do plano.

Os resultados dessa pesquisa mostram que há lacunas na formação do professor a respeito desse conteúdo, já que a maioria desconhecia noções como foco, eixo de simetria e reta diretriz de uma parábola. Silva (2011) destaca entre suas conclusões que no estudo de parábolas:

houve também uma manifestação importante, onde um professor participante faz uma pergunta sobre a distinção entre parábola e função quadrática. Concluímos que há uma fragmentação da ideia de parábola, vista somente como a forma gráfica de funções quadráticas. Muitos professores demonstram dúvidas em relação a conceitos básicos de parábolas, como a definição de foco, parâmetro, eixo de simetria e reta diretriz. (SILVA, 2011, p. 80).

Ainda segundo o autor, alguns professores mostraram dificuldades com o uso do *software*, o que levou alguns a desistirem do curso, e ainda a impossibilidade de acesso aos laboratórios de informática de suas escolas. Ao final, o autor conclui que há necessidade de formação para que os professores da rede pública tenham capacidade de elaborar atividades complementares àquelas contidas no Caderno do Professor do estado de São Paulo e que a simples recomendação para que sejam desenvolvidas atividades complementares não é suficiente.

A dissertação de Silva (2012) investigou de que forma a astronomia pode contribuir com a aprendizagem das cônicas com alunos colombianos cursando um

nível equivalente ao 2º ano do Ensino Médio brasileiro. Para isso, o autor construiu atividades que integravam conceitos geométricos e astronomia e criou uma estratégia de ensino dividida em cinco momentos: reconhecimento de conceitos prévios; elaboração do material de apoio; experimentação; avaliação e socialização dos resultados obtidos. A avaliação teve 20 perguntas gerais abordando conhecimentos prévios de astronomia e aplicações ligadas às cônicas.

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel foi a base teórica para essa pesquisa, e Silva (2012) usou ambas as metodologias qualitativa e quantitativa para o desenvolvimento e a análise dos dados. As considerações apresentadas pelo autor ao final da pesquisa afirmam que as atividades permitiram enriquecer os conhecimentos teóricos e práticos a respeito do ensino de cônicas e astronomia, mostrando que é possível melhorar os resultados acadêmicos dos estudantes, o que só foi possível após um estudo detalhado que fornecesse um lineamento entre os conteúdos curriculares propostos para a matemática e para a física, além de fazer uma revisão de conteúdos de cônicas e de astronomia.

O quadro teórico da investigação apresentada no artigo de Barraza, González e Chavarro (2013a) é composto pelos Modos de Pensamento de Anna Sierpiska, em que se distinguem três modos de pensar um conceito: sintético-geométrico (SG), analítico-aritmético (AA) e analítico-estrutural (AE), e o objetivo da pesquisa foi “desenhar uma proposta didática que promova o trânsito entre os três modos de pensar as cônicas SG, AA e AE para estudantes de 16 a 18 anos, utilizando como sistema de referência o plano com a geometria do taxista” (Ibid., p. 667, tradução nossa). A metodologia adotada foi um estudo de caso, e os sujeitos da pesquisa foram 10 estudantes de uma escola particular subsidiada que já haviam estudado o conteúdo cônicas em uma disciplina chamada Álgebra e Modelos Analíticos.

Os autores destacam que a geometria escolhida foi essencial para o trânsito de SG a AE e que a utilização dessa métrica ajudou na compreensão das cônicas como um conjunto de pontos que cumprem determinadas condições (lugar geométrico). Quanto aos resultados da pesquisa, os autores observaram que o trânsito entre os modos SG e AE foram realizados com facilidade pelos estudantes para os casos da circunferência e da elipse e, por outro lado, foram identificadas dificuldades na escrita da equação da cônica durante as atividades focadas na interação entre os modos AE e AA.

Já a dissertação de Gómez Mongüa e Ruiz Medina (2014) buscou determinar se o uso do *software* GeoGebra pode influenciar na aprendizagem das seções cônicas quando o contexto é geometria analítica. Como referencial teórico foi usada a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, e os autores tinham como hipóteses que a aplicação do GeoGebra para o ensino de cônicas desenvolve capacidades comunicativas matemáticas, habilidades de raciocínio e criatividade matemática e habilidades em resolver problemas.

Os autores trabalharam durante um trimestre com dois grupos de 23 estudantes cada, que cursavam o décimo grau (equivalente ao segundo ano do Ensino Médio brasileiro) de uma escola da cidade de Sincelejo, na Colômbia. Em somente um dos grupos as aulas foram ministradas com o GeoGebra, enquanto os alunos do outro grupo receberam aulas tradicionais, sem o uso de nenhum *software*. O levantamento dos dados ocorreu por meio de um pré-teste e um pós-teste, que depois foram comparados e analisados quantitativamente com o auxílio do *software* estatístico SPSS versão 20, utilizando a prova de Kolmogorov-Smirnov, a prova “U de Mann-Whitney” e a prova “tau de Kendall”.

Gómez Mongüa e Ruiz Medina (2014) concluíram que o GeoGebra influenciou na aprendizagem das cônicas e que a frequência das competências de comunicação, raciocínio, criatividade, pensamento crítico e solução de problemas variou positivamente para o grupo de alunos que usaram o *software* durante as aulas. Entre essas competências, os autores comprovaram que o *software* teve maior influência na comunicativa e a menor influência na solução de problemas.

De forma geral, os trabalhos que utilizaram alguma tecnologia para desenvolver atividades para o ensino de cônicas apontam para uma influência positiva para a aprendizagem. No entanto, mesmo nesse tipo de trabalho as sequências são apresentadas aos alunos prontas, determinadas pelo professor ou pelo autor do material, não possibilitando qualquer participação do aluno em sua elaboração, apenas em sua execução, ao contrário do que acontece com a estratégia de ensino pelo Percorso de Estudo e Pesquisa apresentada em nosso referencial teórico.

Finalmente, na **terceira categoria (formação de professores)**, elencamos os trabalhos de: Bongiovanni (2001), Mosquera e Palomino (2012), Pérez Medina e Souto (2012), Souto (2013) e Sousa (2016).

Bongiovanni (2001) construiu, em seu doutorado, um hiperdocumento interativo para tratar de diversos saberes a respeito de cônicas. Para essa construção, fez uma formação continuada de professores com o uso do *software Cabri-Géomètre II*, focando na caracterização das cônicas. O objetivo do autor foi investigar quais condições didáticas deveriam ser postas em prática em uma formação continuada de geometria que permitisse reativar e estruturar o conhecimento dos professores participantes. O autor seguiu a metodologia da engenharia didática de Artigue.

Mosquera e Palomino (2012) trabalharam com sujeitos cursando licenciatura em Matemática da Universidade de Nariño, na Colômbia, para aplicar uma sequência didática para o ensino de cônicas. Nessa sequência as cônicas foram trabalhadas como lugares geométricos, e os autores usaram o Cabri Géomètre II Plus como um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) com os objetivos de:

1. Desenvolver e aplicar uma sequência didática que permitisse identificar e estabelecer uma dialética entre os enfoques pontuais e globais quando se estudam cônicas como lugares geométricos em um AGD, em relação com problemas de construção geométrica; 2. Observar, registrar e analisar a produção dos conhecimentos matemáticos em torno das cônicas como lugar geométrico, realizada por estudantes de Geometria Analítica, quando interagem com o meio, por meio de situações desenhadas, desde uma dialética pontual e global, quando trabalham em problemas de construção geométrica. (MOSQUERA; PALOMINO, 2012, p. 155, tradução nossa).

A metodologia usada foi a microengenharia didática de Michèle Artigue (1995), e o quadro teórico foi dividido em três dimensões: histórico-epistemológica, cognitiva e didática, sendo que na última foi usada a TSD de Brousseau.

Mosquera e Palomino (2012) obtiveram como resultado que a compreensão de lugar geométrico por parte dos estudantes ocorreu com mais facilidade quando era apresentado o desenho completo da cônica, em comparação com a compreensão local ou pontual, que não foi bem entendida. Além disso, as situações didáticas elaboradas partindo de construções geométricas pontuais para que os estudantes realizassem construções geométricas globais no AGD conseguiram mais êxito que aquelas planejadas para a realização do caminho inverso, partindo de construções globais. Os autores notaram que, nesse último caso, os estudantes não identificaram a natureza geométrica das curvas como lugares geométricos.

O artigo de Péres Medina e Souto (2012) apresenta uma experiência de planejamento e implementação de uma proposta de atividades a respeito de cônicas usando o GeoGebra na geometria analítica, o que ocorreu em duas etapas. O

planejamento das atividades, primeira etapa, aconteceu durante um curso de extensão oferecido pela UNESP de Rio Claro para professores de matemática do Brasil e de outros países e foi desenvolvido no ambiente virtual Tidia-Ae. Ao final desse curso, foi solicitado aos professores que planejassem três atividades a respeito de cônicas (uma para cada curva) e cada uma das atividades deveria tratar da construção da cônica, do estudo do lugar geométrico, do estudo da equação reduzida e da equação da cônica transladada.

A implementação das atividades (segunda etapa) foi realizada na disciplina Geometria para Estudantes do curso de Desenho de Interiores e Mobiliário da UNRN (General Roca/Argentina). Segundo os autores, esses estudantes não haviam trabalhado com geometria analítica e apresentaram dificuldade em trabalhar com o GeoGebra, principalmente com o uso e a manipulação de objetos na janela de álgebra e com atividades que usavam o plano com eixos coordenados.

Na tese de doutorado de Souto (2013), a pesquisa trata de uma formação continuada de professores para discutir tendências em Educação Matemática em um curso a distância *online* a partir do ensino de cônicas (parábola, elipse e hipérbole) com o *software* GeoGebra. Como referencial teórico a autora usou a Teoria da Atividade, Seres-humanos-com-mídias, as Ecologias Cognitivas de Pierre Lévy, além da Reorganização do Pensamento de Oleg Tikhomirov. Assim, o objetivo de seu doutorado foi investigar como ocorreram as transformações expansivas nas inter-relações entre os diferentes atores que compõem o coletivo de sua investigação. Segundo a autora, o conceito de transformação expansiva pode ser interpretado como

movimentações em um sistema de atividade coletiva em que seres humanos com tecnologias buscam, de forma crítica, um modo que não havia sido, em outras situações, pensado por eles para compreender e/ou reconstruir entendimentos sobre determinado problema ou conteúdo matemático. (SOUTO, 2013, p. 234).

Os encontros ocorreram no ambiente virtual Tidia-Ae, em que as discussões e atividades eram produzidas usando *chats* e fóruns. A autora trabalhou com dois grupos de professores em períodos distintos para que a experiência com o primeiro grupo servisse como estudo preliminar e pudesse contribuir para o planejamento do estudo com o segundo grupo, que ocorreu um ano depois.

Para cada uma das três cônicas foram desenvolvidas seis atividades, todas usando o GeoGebra, em que os professores trabalhavam com as cônicas na

geometria sintética (duas atividades) – deviam construir geometricamente a cônica usando a ferramenta “rastro” e a noção de lugar geométrico – e na geometria analítica, com atividades para analisar o comportamento da curva a partir de alterações em parâmetros que compõem a equação da cônica e, também, discussões a respeito da equação para a curva transladada.

Entre os resultados apresentados, a autora afirma que as transformações expansivas que ocorreram durante o curso não estavam somente relacionadas ao contexto *online* ou às mudanças que ocorreram na forma de expressar o raciocínio matemático por meio da escrita, mas também envolveram dimensões mais amplas a respeito do papel das mídias nas produções matemáticas.

Sousa (2016) também trabalhou em seu mestrado com a teoria dos Registros de Representação Semiótica com o objetivo de investigar as dificuldades dos estudantes do curso de licenciatura em Expressão Gráfica⁴, da Universidade Federal de Pernambuco, no processo de articulação entre as diferentes definições e representações planas e espaciais das cônicas encontradas no ensino.

Em suas primeiras ações, a autora fez um estudo epistemológico das cônicas, identificou as principais dificuldades na articulação das representações planas e espaciais presentes nas definições desse objeto e analisou as implicações do uso de um *software* de Geometria Dinâmica (Cabri Géomètre II Plus). Uma das hipóteses da pesquisadora era que o uso de uma ferramenta computacional, de modo que permita ao estudante visualizar diferentes caracterizações das cônicas (representações gráficas e algébricas), poderia contribuir nesse processo de articulação. Depois, com os dados desses estudos, desenvolveu um questionário para que fosse possível analisar as implicações do uso da ferramenta computacional na compreensão das propriedades por meio de representações gráficas e algébricas. Entre os principais resultados estão lacunas no ensino e na aprendizagem das cônicas, dificuldades de articular alguns conceitos prévios e ausência de sentido no acesso a algumas representações.

⁴ [...] licenciado está qualificado, dentre outras coisas, para o ensino das disciplinas de Geometria Bidimensional, Geometria Tridimensional, Sistemas de Representação, Desenho Representativo/Operacional e Normativo e Desenho Teórico aplicado a diversas áreas. Disponível em: <https://www.ufpe.br/expressao-grafica-licenciatura-cac>.

Dessa categoria podemos concluir que, de acordo com Bongiovanni (2001), as cônicas são pouco conhecidas pelos professores e que os conhecimentos deles estão reduzidos ao contexto da geometria analítica. Afirma ainda que o trabalho com cônicas “torna possível revisar e relacionar vários resultados de geometria elementar plana e espacial em diferentes estruturas matemáticas.” (Ibid., p. 3).

De forma geral, resumimos os resultados da revisão bibliográfica com as seguintes conclusões:

- *Há possíveis problemas de nível epistemológico a respeito do entendimento, por parte dos estudantes, das cônicas e seus elementos básicos (foco, reta diretriz, excentricidade), causados pela rápida mudança de quadro do sintético para o analítico;*
- *As cônicas são reduzidas à parábola/geometria analítica;*
- *A geometria sintética é reduzida à analítica;*
- *Não há participação do estudante no desenvolvimento das questões que serão trabalhadas em aula nas investigações baseadas em sequências didáticas;*
- *O professor de matemática possui má formação a respeito do ensino de cônicas;*

Dos trabalhos analisados, nenhum focou na apresentação das cônicas nas geometrias sintética, analítica e linear⁵, o que acreditamos poder ser realizado no Ensino Médio e, portanto, constar da formação inicial de professores. Além disso, nenhum deles utilizou a Teoria Antropológica do Didático para o ensino de alunos ou na formação inicial de professores, embora Siqueira (2016) tenha considerado essa opção para uma futura pesquisa e Almouloud, Koné e Sangaré (2014) a tenham utilizado em sua análise do material utilizado por alunos do Mali.

Baseados nessas conclusões e considerando que nossa proposta está baseada na Teoria Antropológica do Didático e em suas ferramentas: Modelo Epistemológico de Referência, Percurso de Estudo e Pesquisa e Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores⁶, consideramos sua originalidade até o presente momento e passamos então a justificar nossa investigação.

⁵ Essa abordagem foi proposta por Siqueira (2016).

⁶ Em nosso caso, trataremos de uma formação inicial.

2.3 Justificativa

O acontecimento que deu origem a este trabalho foi o discurso de um professor de matemática, ocorrido durante uma formação de professores na universidade durante a realização de uma atividade que tratava de cônicas. O professor afirmou que “toda equação do segundo grau em duas variáveis reais possui uma parábola como sua representação gráfica no plano cartesiano”. Sabemos, por exemplo, que essa afirmação não é válida para a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e, possivelmente, houve um equívoco por parte desse senhor, mas não podemos negar o fato de que algo se encontra incompleto ou impreciso na formação desses profissionais, o que foi comprovado por nossa revisão bibliográfica.

Em um breve estudo a respeito da formação inicial de professores de matemática, encontramos nas ementas dos cursos de licenciatura das universidades de São Paulo, Federal de Sergipe e Estadual de Campinas – disponíveis em seus respectivos *websites* – que as cônicas são trabalhadas apenas em duas disciplinas: Geometria Analítica e Vetores, e Cálculo I. Portanto, supõe-se que os professores formados por essas universidades estarão capacitados a trabalhar somente com essas abordagens analíticas e que dificilmente trabalharão esse conteúdo em geometria, por exemplo.

Do ponto de vista do Ensino Básico no Brasil, os conteúdos a serem trabalhados mais especificamente no Ensino Médio podem seguir as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002). Para esse documento, a matemática deve ser apresentada com o objetivo de proporcionar uma formação cidadã ao estudante, de modo que ele possa ser capaz de entender, questionar e lidar com o mundo ao seu redor e

[...] a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p. 111).

Ao pensarmos na importância do estudo de cônicas para a vida de um cidadão qualquer, podemos citar diversas situações em que seu conhecimento seria importante. Por exemplo, saber que a órbita da Lua e do planeta Terra são elípticas e que as fases das marés estão ligadas a esses percursos; que o Sol encontra-se posicionado em um dos focos das elipses desenhadas pelas órbitas dos planetas; que

a propriedade de reflexão (propriedade óptica) da parábola é encontrada em antenas parabólicas, nos faróis dos automóveis etc.; que a hipérbole foi importantíssima para o desenvolvimento e uso do receptor *LORAN* (*Long Range Navigation*) de radionavegação, além de diversas aplicações no universo da engenharia.

Os PCN+ sugerem ainda o desenvolvimento de competências em matemática pelo aluno no trabalho em três áreas: representação e comunicação; investigação e compreensão e contextualização das ciências no âmbito sociocultural, a partir de um conjunto de temas distribuídos em álgebra; números e funções; geometria e medidas e análise de dados.

No tema “geometria e medidas”, encontramos quatro unidades: geometria plana, espacial, métrica e analítica, mas não especificamente o ensino de cônicas, embora esse ensino possa ser justificado por itens presentes nas propostas para o ensino de geometria plana e geometria analítica. Nas propostas para o ensino de geometria plana, são apresentadas algumas habilidades a serem desenvolvidas, tais como:

Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema; analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc.; usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real. (BRASIL, 2002, p. 125).

Já na unidade geometria analítica encontramos:

Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (BRASIL, 2002, p. 125).

Por outro lado, Paques e Sebastiani Ferreira (2011, p. 18), analisando livros usados para o ensino de cônicas de 1233 até 2009, concluíram que essas curvas foram apresentadas por diversas abordagens, mas apenas os livros de Thiré (1934) e Stávale (1942) mostram as cônicas como lugar geométrico, como seção de um cone por um plano, como gráfico de funções e na geometria analítica. Os autores também analisam os Cadernos do Estado de São Paulo, atual material usado por professores e alunos da rede pública desse estado:

No primeiro ano do ensino médio, a parábola aparece somente como gráfico de uma função quadrática. No primeiro bimestre do terceiro ano, as cônicas aparecem na geometria analítica. A parábola é apresentada como: dadas duas grandezas x e y que estão inter-relacionadas, se y e x são diretamente proporcionais, temos como gráfico uma parábola. No caso de uma elipse, se

diz que ela é uma circunferência “achatada” e obtém a equação de uma elipse através da equação da circunferência, como no Marmo, página 61. A hipérbole aparece como a curva que modela duas grandezas x e y que são inversamente proporcionais. Da equação $xy = \text{constante}$, é deduzida a equação normal da hipérbole. (PAQUES; SEBASTIANI FERREIRA, 2011, p. 21).

Vale ressaltar que pesquisamos por cônicas (parábola, elipse e hipérbole) na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), mas não foi encontrado nada a respeito do tema.

Essa predominância atual das cônicas na geometria analítica não ocorre somente no Brasil. Barraza, González e Chavarro (2013) ressaltam que o ensino de cônicas no Chile tem um foco puramente analítico e que o Ministério da Educação daquele país espera que os estudantes de 16 a 18 anos (equivalente ao Ensino Médio do Brasil) sejam capazes de reconhecer as cônicas mediante suas equações cartesianas. Os autores consideram que “esse enfoque centrado nas equações cartesianas propicia a perda de suas definições como lugares geométricos” (BARRAZA; GONZÁLEZ; CHAVARRO, 2013, p. 666, tradução nossa).

Para Ruíz-Munzón, Bosch e Gascón (2015), grande parte das pesquisas em Educação Matemática que tratam de álgebra elementar focam no estudo das dificuldades dos estudantes no início de sua aprendizagem e das possíveis atuações do professor durante o ensino para minimizá-las. Mas é muito difícil encontrar trabalhos que estudem o que se ensina com o nome de álgebra elementar e, como consequência, o que se entende por álgebra nas aulas de matemática na escola. Podemos pensar o mesmo para outros conteúdos do ensino, entre eles cônicas.

Por todos esses fatos, além dos resultados encontrados em nossa revisão bibliográfica, consideramos que nossa investigação está justificada e assim enunciaremos, no que segue, nosso problema de pesquisa e nossos objetivos.

2.4 Delimitação do problema

Com os estudos feitos até aqui, nossas indagações iniciais a respeito da formação inicial do professor de matemática no que se refere ao ensino de cônicas surgem das investigações de Ruiz-Olarría (2015) e Licera (2017), adaptadas ao caso de cônicas para o Ensino Médio do Brasil.

Nossa questão de pesquisa fica assim enunciada:

Qual proposta de praxeologia matemática para o ensino de cônicas se pode utilizar na formação inicial de professores brasileiros? Em que essa praxeologia contribui e em que pode ajudar os futuros professores a desenhar, analisar e implementar novos processos didáticos?

Para responder essa pergunta, temos como objetivo geral desenhar, planejar e aplicar um Percurso de Ensino e Pesquisa para Formação de Professores de Matemática (PEP-FP) como uma formação inicial para o ensino de cônicas. Para atingi-lo, temos como objetivos específicos:

- Desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para as cônicas;
- Descrever o Modelo Epistemológico Dominante na formação inicial de professores e no Ensino Médio;
- Desenhar, aplicar e analisar um PEP para o ensino de cônicas para estudantes de licenciatura em Matemática e do Ensino Médio como parte dos estudos exploratórios;
- Usar os resultados dos estudos exploratórios e do MER para desenhar um PEP-FP para estudantes de licenciatura em Matemática.

Assim, diante da questão de pesquisa e dos objetivos, discutiremos, na próxima seção, a metodologia que nos guiou nesta investigação e permitiu alcançar respostas para o problema enunciado.

2.5 Metodologia

A metodologia de pesquisa qualitativa utilizada em nossa investigação foi desenvolvida a partir da Teoria Antropológica do Didático, baseada em princípios da Engenharia Didática. Como esta, ela possui quatro fases, como apresentado por Barquero e Bosch (2015), sendo a primeira denominada análise praxeológica, ou análises preliminares, que inclui

um questionamento epistemológico do conteúdo matemático em jogo e da necessidade de introduzi-lo na escola, além de um estudo das condições e limitações oferecidas pelas instituições onde o processo de ensino e aprendizagem acontece. Trata-se de um primeiro passo essencial, no qual as hipóteses de pesquisa são formuladas e o conteúdo a ser ensinado e aprendido é questionado, geralmente considerando diferentes tipos de hipotéticos fenômenos didáticos envolvidos. É também nesta fase que os

resultados de investigação anterior podem ser reaplicados. (BARQUERO; BOSCH, 2015, p. 257, tradução nossa).

Assim, nesta primeira fase são desenvolvidos os estudos das dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema didático. Como consequência desses estudos, temos o MER e o MED.

Na segunda fase, de acordo com Barquero e Bosch (2015), deve ser feita uma análise *a priori*, além do planejamento matemático e didático da proposta de intervenção. É nesta fase que são desenvolvidos o desenho e as análises *a priori* e *a posteriori* do PEP, que em nosso estudo trata da construção de um fogão solar, que, por sua vez, foi utilizado na construção do PEP-FP. Constituem essa parte também o desenho e a análise *a priori* do próprio PEP-FP. Utilizamos as dialéticas cronogênese, mesogênese e topogênese como ferramentas para analisar tanto o PEP quanto o PEP-FP.

A cronogênese, uma cronologia baseada em investigação, portanto não linear, tem por objetivo exibir as questões e respostas que surgem durante o experimento. Uma forma de descrever essa dialética é por meio do mapa de questões e respostas⁷. A mesogênese, dialética *mídia-milieu*, nos apresenta como ocorre a evolução do *milieu* (ou meio) por meio das respostas que são validadas pelos estudantes durante o experimento, além de analisar as fontes de pesquisa que forneceram ou serviram como base para essas respostas e como (ou por quais critérios) essas fontes são validadas pelos estudantes. A topogênese é a dialética individual-coletivo que controla a evolução das responsabilidades de cada pessoa, nos mostrando o que faz o professor e o que fazem os estudantes durante o processo de estudo e pesquisa, isto é, essa dialética determina quais foram as contribuições de cada indivíduo para o coletivo durante o percurso.

A terceira fase é a da experimentação e da análise “in vivo”. Nesta fase aplicamos o PEP-FP com estudantes de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe que trabalharam divididos em grupos de quatro estudantes.

Previmos um total de 14 encontros (28 horas), e a coleta de dados ocorreu por meio de atividades escritas; gravações em vídeo; gravações em áudio das

⁷ Mapa de questões e respostas é um esquema que mostra como surgiram as questões e suas respectivas respostas durante o PEP ou PEP-FP e como elas se relacionam.

discussões feitas pelos grupos e informes, que cada grupo entregou ao final de cada seção. Esses informes contêm esclarecimentos do que ocorreu durante a seção, tais como: quais foram os deveres de cada integrante do grupo, quais questões foram discutidas, quais respostas foram encontradas e quais as fontes de pesquisa usadas. Fizemos uma análise “in vivo” durante a experimentação a partir dos mapas de questões e respostas que foram construídos pelos estudantes, além de acompanhar a evolução do *milieu*. Como já dito anteriormente, a estratégia de ensino do PEP-FP faz com que surjam novas questões e novas respostas a cada encontro, fazendo com que os mapas sejam atualizados de forma contínua ou pelo menos uma vez a cada encontro, a depender do critério do professor/pesquisador.

Na quarta e última fase, ocorre a análise *a posteriori*. É o momento de comparar os dados recolhidos durante a experimentação do PEP-FP com os estudos das três dialéticas (cronogênese, mesogênese e topogênese) feitos na análise *a priori*. Além disso, é nesta fase que se faz a validação das hipóteses de pesquisa levantadas na primeira fase, o que poderá nos levar a enunciar novos problemas.

Com isso, terminamos o segundo capítulo deste trabalho, e cabe, na sequência, apresentarmos os estudos da primeira fase, as Análises Preliminares, como anunciado em nossa metodologia. No próximo capítulo, trataremos apenas do Modelo Epistemológico de Referência.

3 Um Modelo Epistemológico de Referência

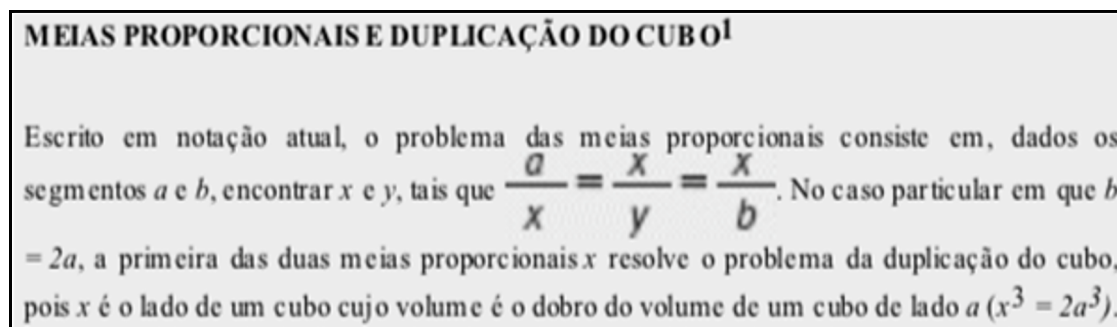
Chevallard (1997) afirma que o conceito de transposição didática permite uma articulação entre as análises epistemológica e didática em que os didáticos herdaram dos epistemológicos o conceito de “problemática” – conjunto de problemas de mesma natureza. Para o autor, no caso da transposição didática, a passagem do “saber sábio” ao “saber a ser ensinado” contém elementos invariantes (como as definições matemáticas do objeto) e elementos propícios a variações (responsáveis pela diferença entre esses saberes) que serão detectadas por meio da análise das respectivas problemáticas. Assim, no âmbito da TAD, devemos ter uma referência epistemológica para nos guiar durante uma investigação em Educação Matemática e nos fornecer condições e princípios que nos permitem entender os fenômenos didáticos por uma perspectiva diferente daquela encontrada na literatura atual, muito mais suscetível a interferências humanas. Essa referência epistemológica é apresentada atualmente na TAD como Modelo Epistemológico de Referência (MER), que, segundo Licera (2017), não se trata de um modelo no sentido normativo do termo, mas sim uma ferramenta de trabalho técnico-experimental capaz de ser usada e ampliada de acordo com a necessidade da investigação.

3.1 A Problemática das “Geometrias das Cônicas”

As cônicas constituem um objeto matemático utilizado historicamente em distintos contextos, como física, astronomia, geometria sintética e geometria analítica. Entre os principais problemas em que as cônicas foram indispensáveis para sua resolução está a Duplicação do Cubo. Segundo Roque (2012), há uma lenda de que esse problema surgiu depois de uma epidemia ocorrida em Atenas por volta do ano 427 a.C. que matou um quarto da população ateniense, inclusive o General Péricles com 66 anos de idade. Para conter a epidemia, foi sugerido que duplicassem o altar de Apolo, que possuía formato de um cubo, mas ao final acabaram dobrando o comprimento de cada aresta, e o volume do cubo foi multiplicado por 8. Esse problema pode ser enunciado da seguinte forma: dado um cubo, quanto deve ser acrescentado ao comprimento de cada uma de suas arestas para que o cubo resultante possua o dobro do volume do cubo inicial? A autora informa que foi o geômetra Hipócrates o primeiro a avançar em sua solução durante o século V a.C. e que Apolônio de Perga

(262 – 190 a.C.) foi quem deu os nomes de parábola, elipse e hipérbole às cônicas, além de unificá-las por meio de cortes feitos em um único cone duplo, variando somente o ângulo do plano, ambos na geometria sintética⁸ espacial. Vejamos na figura 1 que a autora apresenta a ideia de “meias proporcionais”, usada como base nos primeiros avanços na direção da resolução do problema da Duplicação do Cubo, com uma “notação atual”, usando x e y , como encontramos no contexto da geometria analítica.

Figura 1 - O problema das meias proporcionais



Fonte: Roque (2012, p. 124).

Ainda segundo Roque (2012), no início do século XVII, Descartes usa cônicas na geometria analítica para resolver um dos problemas de Pappus (290 – 350 d.C.), que busca encontrar um ponto C a partir do qual possamos construir segmentos de reta CB , CD , CF e CH que formam ângulos dados $C\hat{B}A$, $C\hat{D}A$, $C\hat{F}E$ e $C\hat{H}G$ com as retas dadas (enunciaremos o problema completo e discutiremos sua resolução na próxima seção).

Esse foi o primeiro problema em que Descartes usou um sistema referencial construído por meio de dois eixos (não perpendiculares até aquele momento). Após isso, as cônicas passam a ser vistas como curvas associadas a equações polinomiais de grau dois, e essa abordagem passou a ser usada até para descrever a matemática ocorrida antes mesmo de esse matemático e filósofo francês ter nascido.

No que tange ao ensino de cônicas, também podemos notar uma diversidade nas abordagens desse conteúdo. Segundo Paques e Sebastiani Ferreira (2011), o ensino das cônicas no Brasil é marcado por uma rotatividade entre as abordagens: gráfico de uma função, secção de um cone, lugar geométrico e geometria analítica,

⁸ Entendemos por geometria sintética a que trata de estudar e construir formas e lugares geométricos sem o uso de um sistema referencial.

dependendo da época. Nessa direção, Gascón (2002) afirma que as geometrias sintética e analítica devem ser trabalhadas de uma forma contínua e complementar a partir de problemas da geometria sintética que só serão solucionados com a criação de técnicas analíticas/cartesianas. Esses problemas podem ser produzidos por uma evolução baseada em pequenas mudanças nos enunciados de problemas iniciais, ou seja, aqueles que até então eram solucionados apenas por meio de régua e compasso.

Além dessas duas geometrias, sintética e analítica, encontramos, em livros usados no ensino universitário, as cônicas como formas quadráticas em um contexto que tem como base a geometria analítica, porém utilizando objetos matemáticos de álgebra linear como matrizes, vetores, determinantes, autovalor, autovetor, sistema linear, diagonalização etc. A geometria que trata as cônicas nesse contexto é chamada de geometria linear.

Antes de avançarmos em nosso modelo de referência, pelo fato de trabalharmos com distintos contextos de geometrias, necessitamos esclarecer o que chamamos de “geometria” neste trabalho. Para nós, chamaremos de “protogeometria” um par formado por um conjunto de pontos e um conjunto de retas, em que uma reta é um conjunto de pontos. Quando a esse par são acrescentadas relações entre seus objetos (pontos e retas), ele passa a ser chamado de “geometria”. Por sua vez, as cônicas passam a ser elementos de algumas geometrias quando a elas são acrescentadas métricas (distâncias). Sendo assim, o que apresentamos no MER a seguir são modelos de geometrias em que as cônicas estão presentes.

Dessa forma, vemos que as cônicas estão inseridas, ou melhor, vivem, em, no mínimo, três modelos de geometrias e, portanto, um estudo epistemológico desse objeto deve considerar as problemáticas de cada um deles. Assim, construímos nas próximas seções um Modelo Epistemológico de Referência em torno desses modelos que denominamos “Modelos de Geometrias das Cônicas”, com o objetivo de caracterizá-los por meio de suas praxeologias, mostrando qual papel as cônicas jogam em cada um e ainda a importância da conexão desses três modelos.

3.2 Um Modelo Epistemológico de Referência para os Modelos de Geometrias das Cônicas

Explanamos o estudo desses modelos de geometrias por meio de questões segundo Ruiz-Olarría (2015) e Licera (2017). Tais questões foram divididas em duas categorias: as teóricas e as técnicas. As Questões Teóricas (QT) são aquelas que nos norteiam na construção do MER, e as Questões Técnicas (Q) são as que contemplam as particularidades matemáticas presentes em cada um desses modelos de geometrias e suas respostas ajudam a responder as teóricas.

3.2.1 O modelo da geometria sintética

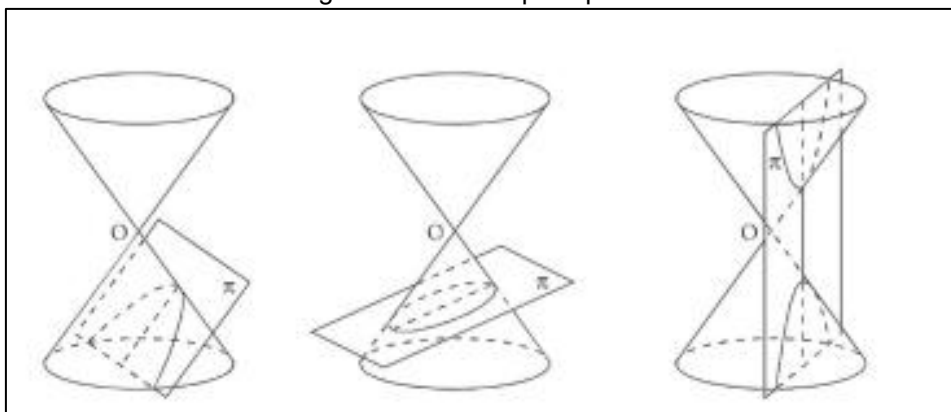
Consideramos o modelo da geometria sintética como um modelo epistemológico para as cônicas por ser possível trabalhar as definições para essas curvas por lugar geométrico e identificar seus elementos, tais como reta diretriz, foco, eixos de simetria, excentricidade etc., tanto no espaço quanto no plano.

Acreditamos que a discussão feita por Gascón (2002) a respeito da continuidade na passagem da geometria sintética para a geometria analítica, já discutida na seção anterior, também pode ser considerada e aplicada aos contextos do plano e do espaço. Assim, devemos considerar a viabilidade de integração desses dois contextos e observar as condições necessárias para cumprir essa demanda em uma praxeologia. Dessa forma, apresentamos nossa questão teórica inicial para a construção do modelo da geometria sintética, que identificamos por QT_{OMS} :

QT_{OMS} : É possível desenvolver uma praxeologia para o estudo das cônicas na geometria sintética que favoreça a passagem do contexto plano para o espacial e vice-versa, mostrando continuidade e complementaridade entre eles? Quais elementos devem ser considerados nessa praxeologia para que isso ocorra?

Para iniciar a discussão em busca de conhecimentos que nos ajudem a responder essa questão QT_{OMS} , vamos considerar os estudos feitos pelo geômetra grego Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.), que, segundo Sato (2004), foi autor de oito livros sobre cônicas e obteve as três curvas seccionando um cone circular reto duplo por um plano (figura 2), variando apenas o ângulo formado entre o plano e uma geratriz do cone.

Figura 2 - Cônicas por Apolônio



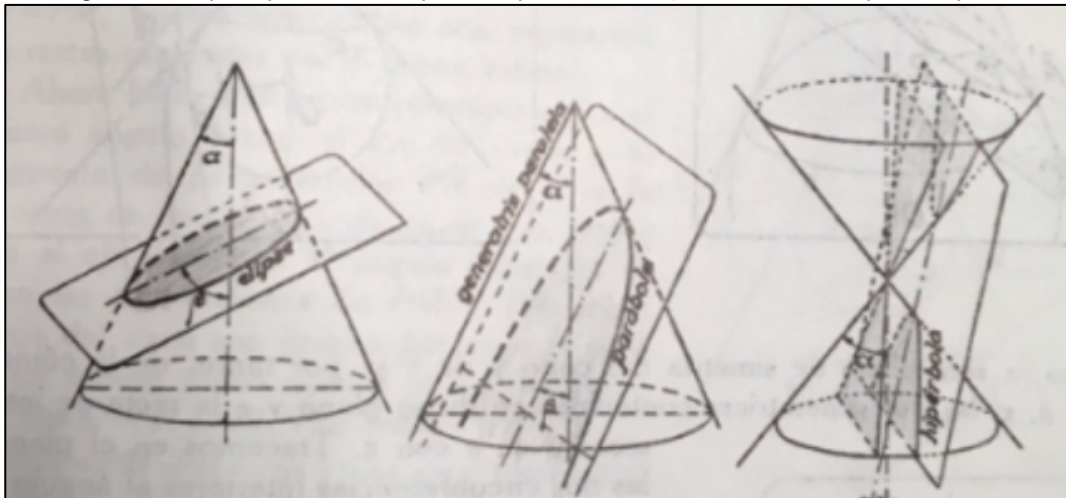
Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAhBCoAL/geometria-analitica-estudo-das-conicas>.
Acesso em: 20 jul. 2018.

Consideramos que nossa primeira questão técnica para iniciar o desenvolvimento da praxeologia pretendida para o estudo das cônicas, como dito na questão teórica QT_{0MS} , deve ser a seguinte:

Q_{1MS} : Trabalhando com a geometria sintética no espaço, como identificar e classificar as cônicas parábola, elipse e hipérbole?

Para responder essa questão (tarefa), nos baseamos em Ádam (1981), matemático espanhol e autor de vários livros de geometria, quando afirma que podemos identificar e classificar as cônicas por um cone interceptado por um plano, pela comparação de dois ângulos, α e β , em que α é o ângulo formado por uma geratriz qualquer do cone e seu eixo central e β é formado pelo eixo central e por uma reta contida no plano que contém a cônica. Dessa forma, teremos a representação de uma elipse quando $\alpha < \beta$; uma parábola quando $\alpha = \beta$ e para o caso $\alpha > \beta$ a curva será uma hipérbole. Em outras palavras, se temos um plano secante que intercepta todas as geratrizes do cone, a cônica será uma elipse (figura 3); se o plano é paralelo a somente uma geratriz, a curva será uma parábola; e, se o plano é paralelo a duas geratrizes, encontraremos uma hipérbole.

Figura 3 - Elipse, parábola e hipérbole pela intersecção de um cone por um plano



Fonte: Ádam (1981, p. 205).

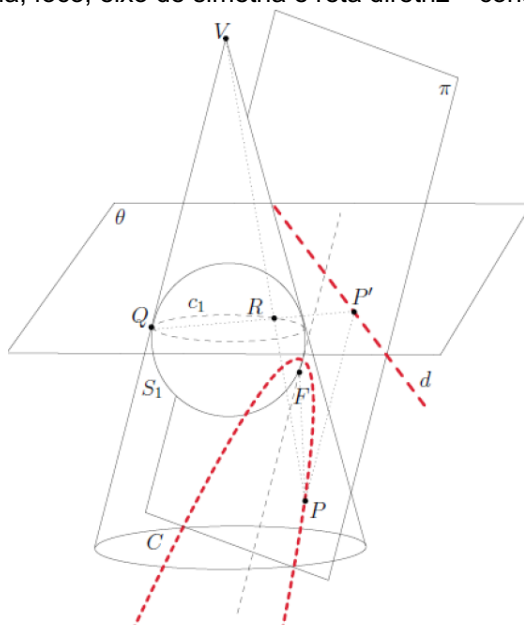
Com essa representação baseada em cortes do cone, Apolônio não exibiu os principais elementos dessas curvas (focos, diretrizes e eixos focais); porém, o francês Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847) e o belga Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796 – 1874), por meio de esferas inscritas no cone que tangenciam, simultaneamente, o cone e o plano que contém a cônica, identificaram esses elementos trabalhando na geometria sintética no espaço. Além disso, conhecendo o foco e a reta diretriz de uma cônica, é possível determinar a razão entre as medidas das distâncias d_1 (distância de um ponto fixo P da cônica até seu foco) e d_2 (distância desse mesmo ponto P até a reta diretriz associada a esse foco). Essa razão é chamada de excentricidade e fornece uma maneira de classificar as cônicas. Parece-nos, então, conveniente que a segunda questão técnica dessa praxeologia trate de como determinar os focos, a(s) reta(s) diretriz(es) e os eixos focais das cônicas.

Q_{2MS} : Como determinar os focos, as retas diretrizes e o eixo focal em uma seção cônica?

Como já foi dito anteriormente, Dandelin e Quételet, de acordo com Ádam (1981), inscreveram esferas em um cone interceptado por um plano para determinarem os elementos das cônicas geradas por essa intersecção. Nesse sentido, a parábola, como podemos ver na figura 4, é formada pela intersecção entre o cone e o plano π , a esfera S_1 , que está inscrita no cone, de modo que ambos possuem como intersecção a circunferência C_1 e, ainda, o plano π é tangenciado por S_1 no ponto F . O ponto F representa o foco da parábola e sua diretriz d é a reta de intersecção entre π e o plano θ , que corta o cone e contém a circunferência C_1 . Nessa

situação, é possível também determinar o eixo de simetria (ou eixo focal) da parábola na intersecção de um terceiro plano, determinado pelo eixo central e o ponto F com o plano π .

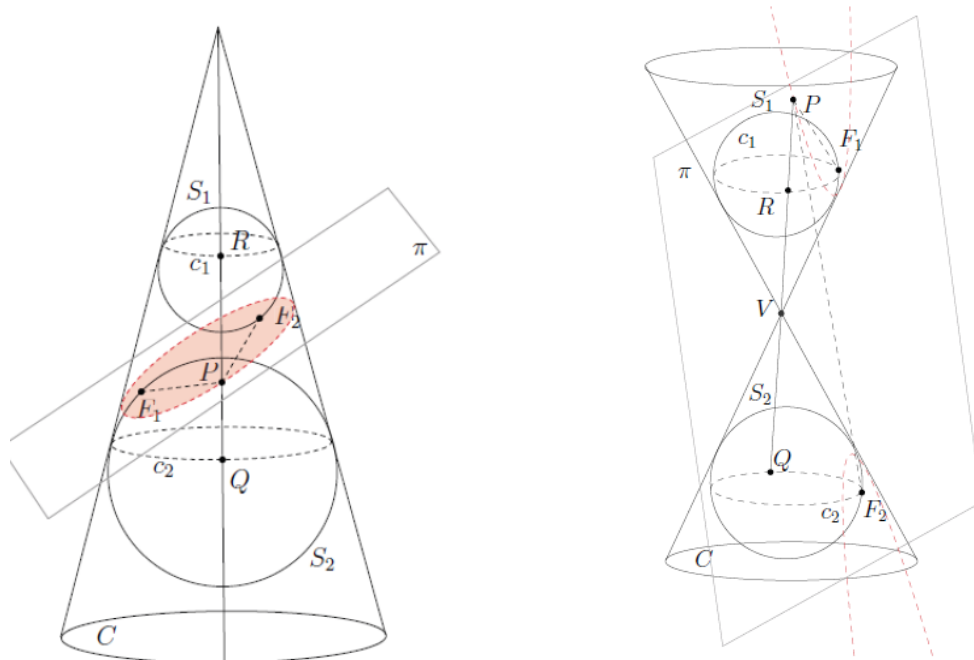
Figura 4 - Parábola, foco, eixo de simetria e reta diretriz – construção de Dandelin



Fonte: Monteiro (2014, p. 14 apud SIQUEIRA, 2016, p. 103).

Uma construção semelhante pode ser considerada para os casos da elipse e da hipérbole a partir de duas esferas inscritas ao cone (figura 5) para a obtenção de dois focos (F_1 e F_2) e duas retas diretrizes (uma para cada foco) para cada uma dessas cônicas.

Figura 5 - Elipse e Hipérbole -construção de Dandelin



Fonte: Monteiro (2014, p. 12-13 apud SIQUEIRA, 2016, p. 104-105).

Com esses elementos identificados, podemos determinar a excentricidade da cônica e enunciar nossa próxima questão técnica para relacionar as duas formas de classificação para as cônicas que encontramos até este momento.

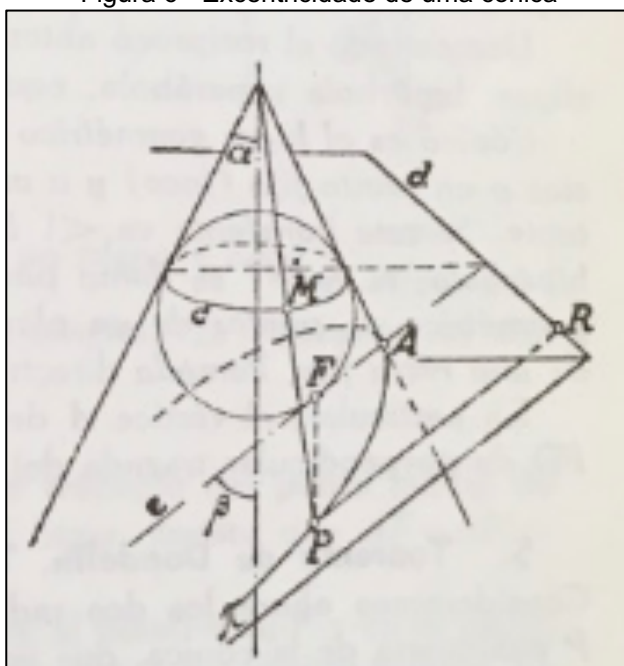
Q_{3MS} : Sejam ε a excentricidade, α o ângulo entre o eixo do cone e uma geratriz qualquer e β o ângulo formado pelo eixo do cone e uma reta qualquer contida no plano que contém a cônica, como podemos ver na figura 6. Demonstre as seguintes implicações:

- i) Se $\alpha < \beta$, então $\varepsilon < 1$;
- ii) Se $\alpha = \beta$, então $\varepsilon = 1$;
- iii) Se $\alpha > \beta$, então $\varepsilon > 1$.

Classifique as três cônicas (parábola, elipse e hipérbole) segundo sua excentricidade.

Vamos resolver essa questão para o caso da parábola, já que os demais casos seguem de forma análoga.

Figura 6 - Excentricidade de uma cônica



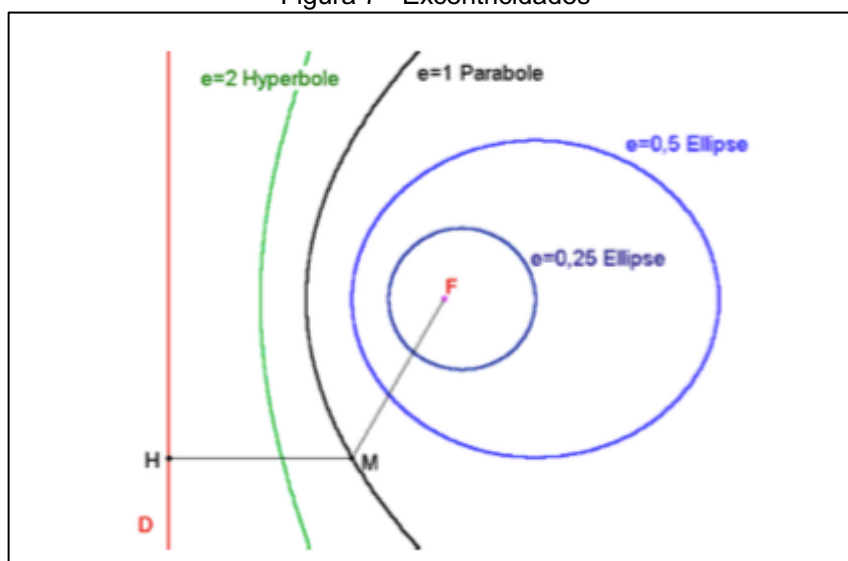
Fonte: Ádam (1981, p. 209).

Notemos que os pontos R e M estão sobre o plano normal ao eixo do cone e por esse motivo as projeções de PM e PR sobre esse eixo são congruentes. Observemos que o ângulo α é formado pelo eixo do cone e que a geratriz que contém o ponto P e o ângulo β é formada pelo eixo do cone e o segmento de reta PR , pois PR é paralelo ao eixo focal da parábola; dessa forma, igualando as projeções, temos $PM \cdot \cos \alpha = PR \cdot \cos \beta$. Por outro lado, como os segmentos PM e PF têm a mesma medida, pois são segmentos tangentes à esfera que partem do mesmo ponto P exterior à esfera, temos que $PF \cdot \cos \alpha = PR \cdot \cos \beta$.

Sabendo que o ângulo α terá a mesma medida para qualquer geratriz, que β também terá a mesma medida para qualquer ponto P tomado na cônica e que ambos não são nulos, segue que a excentricidade será determinada por $\frac{PF}{PR} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \varepsilon$, ou seja, ε será sempre constante.

Dessa forma, considerando os ângulos α e β variando entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, as implicações solicitadas na questão são verificadas e nos propiciam uma nova maneira de classificar as cônicas, isto é, a elipse é uma cônica cuja excentricidade ε é menor que 1 ; a parábola possui excentricidade igual a 1 e para a hipérbole $\varepsilon > 1$. A figura 7 ilustra as três cônicas desenhadas com um mesmo foco e mesma reta diretriz para mostrar as diferenças entre essas excentricidades.

Figura 7 - Excentricidades



Fonte: Barbin (2007, p. 65).

A classificação da cônica por meio da excentricidade é usada também para definir a cônica no plano usando a noção de lugar geométrico, e, dessa forma, podemos definir as três cônicas de modo unificado.

Uma cônica é todo lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é uma constante ε chamada de excentricidade.

No caso da parábola, essa razão é 1, e isso é justificado pela resposta dada à questão Q_{3MS} .

Dando sequência às questões técnicas que permitem um estudo das cônicas na geometria sintética no plano a partir da noção de lugar geométrico, trabalhamos com construções por dobraduras e por fio esticado (barbante). Siqueira (2016) afirma que essas duas construções permitem a percepção visual da forma da cônica e o desenvolvimento de um discurso que justifica a construção. A construção das cônicas por meio de dobraduras é feita a partir de retas tangentes a elas produzidas por vincos feitos em papel vegetal a cada dobra realizada. A quarta questão técnica desse modelo trata dessas construções que muitas vezes são chamadas de “origamis”.

Q_{4MS} : Construa uma parábola, uma elipse e uma hipérbole por meio de dobraduras (origamis) no papel vegetal.

Para o caso da parábola, a técnica é a seguinte:

Em uma folha de papel vegetal, desenhamos uma reta d e um ponto F (foco), $F \notin d$ (figura 8), e escolhemos um ponto qualquer pertencente à reta d fazendo uma dobra de maneira que tal ponto se torne coincidente com o ponto F . Repetimos o passo anterior considerando o máximo de pontos da reta. Com isso, podemos perceber visualmente uma parábola tangenciando todas essas dobras (retas).

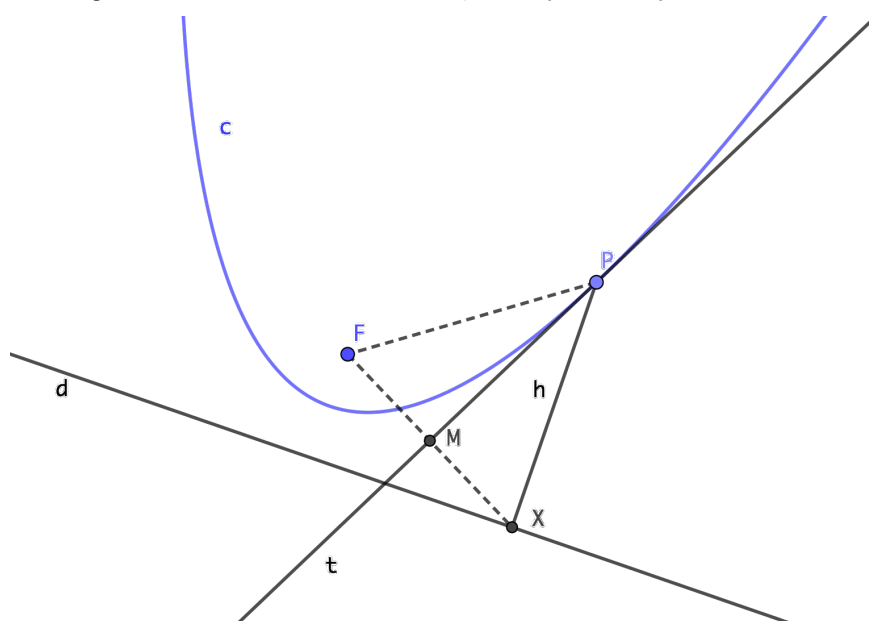
Figura 8 - Parábola construída por dobraduras



Fonte: Produzida pelo autor.

Segundo Melo e Galvão (2008), para justificar essa construção, basta observar que, quando se faz um ponto X da reta d sobrepor F , obtemos na dobra uma reta t , que é a mediatriz do segmento XF passando pelo ponto M , ponto médio de XF (figura 9). O ponto P pertencente à parábola é o ponto de intersecção da reta t com a reta perpendicular à reta d pelo ponto X , e as distâncias de PX e PF são iguais, pois o ponto P é um ponto da mediatriz de XF , o que satisfaz a definição de parábola por lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta diretriz d e um ponto F (foco), $F \notin d$.

Figura 9 - Justificativa da construção da parábola por dobradura



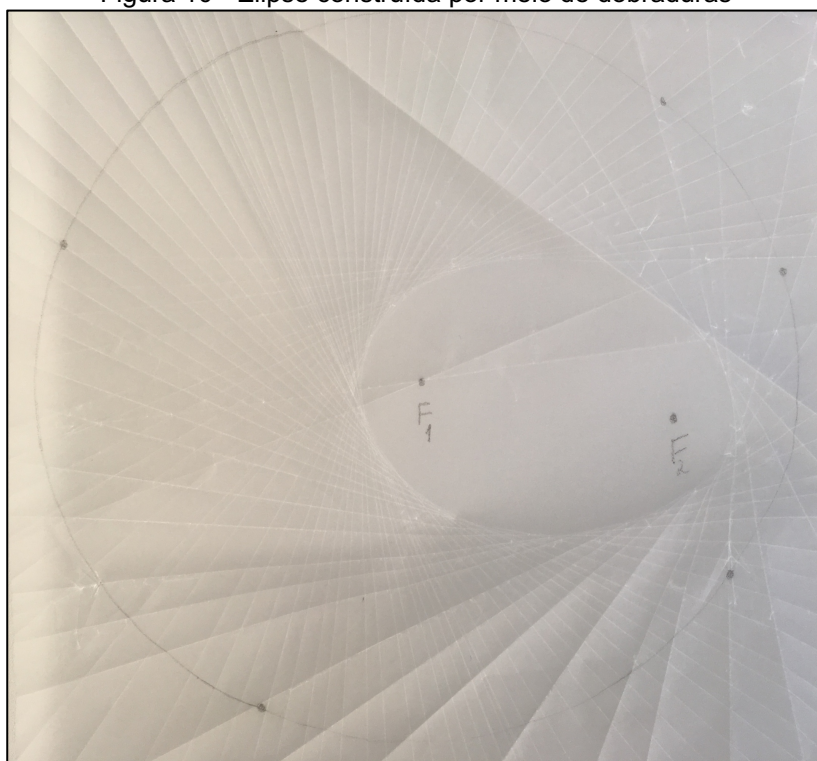
Fonte: Melo e Galvão (2008, p. 31).

No caso da elipse.

No papel vegetal, traçamos uma circunferência com raio R e denominamos F_1 para seu centro (figura 10). Marcamos um ponto fixo qualquer F_2 no interior do círculo com $F_2 \neq F_1$ e teremos assim os dois focos da elipse (F_1 e F_2). Em seguida, escolhemos um “ponto de partida” pertencente à circunferência e fazemos uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto. Repetimos o passo anterior com o máximo de pontos possíveis, percorrendo toda a circunferência, para podermos notar visualmente uma elipse de forma que os vincos representem retas paralelas a essa curva.

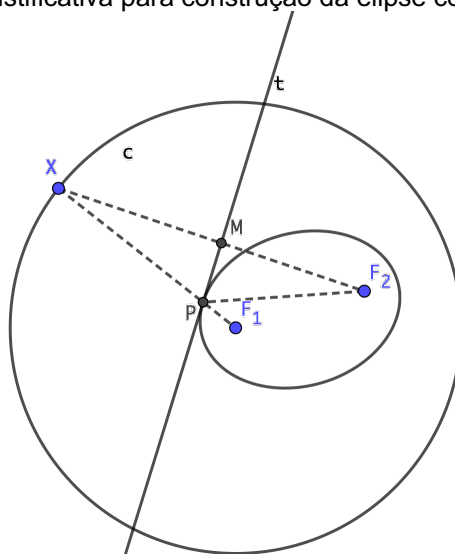
A justificativa para essa construção, segundo Melo e Galvão (2008), é que, ao dobrar o papel fazendo um dos pontos da circunferência, por exemplo X , sobrepor F_2 , determinamos na dobra uma reta t , que é a mediatriz do segmento XF_2 , isto é, a reta que passa pelo ponto M , ponto médio do segmento XF_2 e que é perpendicular ao segmento (figura 11). O ponto P , obtido como ponto de intersecção da reta t com o segmento F_1X , é um ponto da elipse cujos focos são os pontos F_1 e F_2 . Essa última afirmação é verificada observando que a congruência lado/ângulo/lado dos triângulos ΔF_2PM e ΔXPM nos garante que a soma das distâncias $d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, X) = R$, o raio da circunferência inicial. Portanto, temos a definição de elipse por lugar geométrico verificada.

Figura 10 - Elipse construída por meio de dobraduras



Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 11 - Justificativa para construção da elipse com dobradura



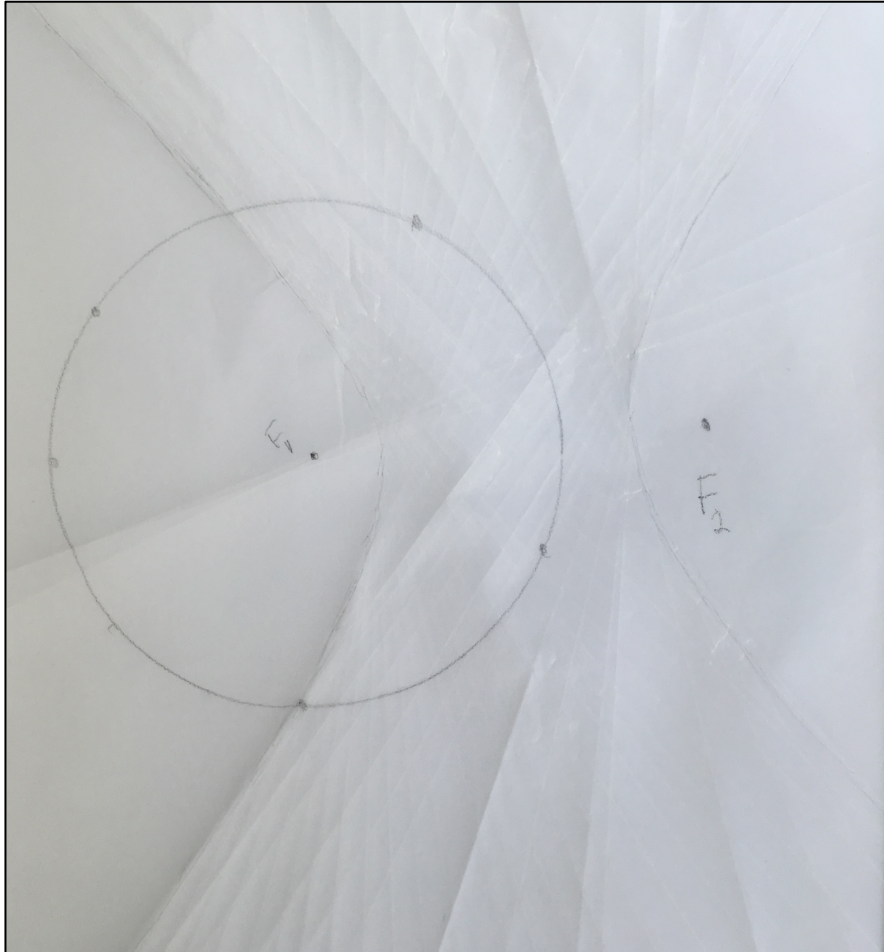
Fonte: Melo e Galvão (2008, p. 30).

No caso da hipérbole.

Assim como feito na construção da elipse, no papel vegetal, traçamos uma circunferência de raio R , denominamos seu centro por F_1 (figura 11) e marcamos um ponto fixo F_2 no exterior do círculo. Dessa forma teremos os dois focos da hipérbole. Em seguida, escolhemos um “ponto de partida” pertencente à circunferência e fazemos uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto. Fazemos esse

mesmo passo para o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda a circunferência até que se possa notar visualmente os dois ramos da hipérbole tangenciando os vincos que foram construídos.

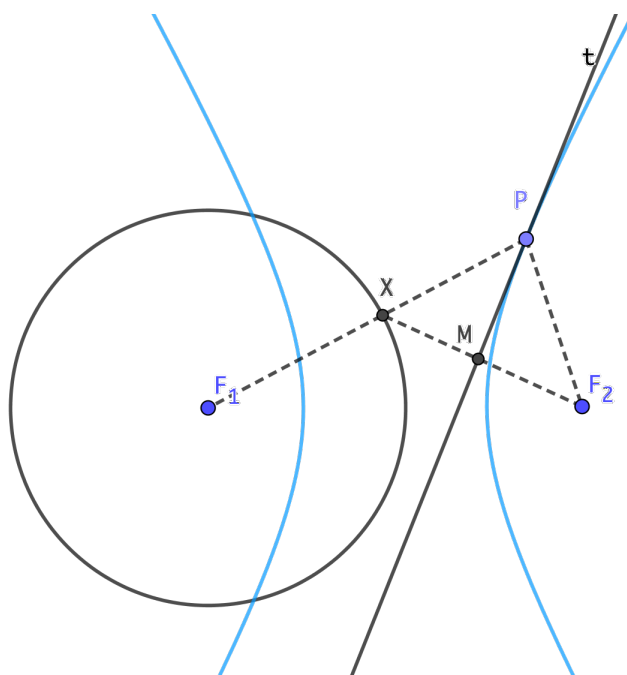
Figura 12 - Hipérbole construída por dobraduras



Fonte: Produzida pelo autor.

Para justificar essa construção, ainda segundo Melo e Galvão (2008), observamos que, ao sobrepor um ponto X da circunferência sobre F_2 , produzimos novamente, na dobra, uma reta t , que é mediatriz do segmento XF_2 por M (ver figura 13). Podemos verificar que a reta t tangencia a curva no ponto P , o ponto de intersecção da reta t com a reta que passa pelos pontos F_1 e X .

Figura 13 - Justificativa da construção da hipérbole com dobraduras



Fonte: Melo e Galvão (2008, p. 31).

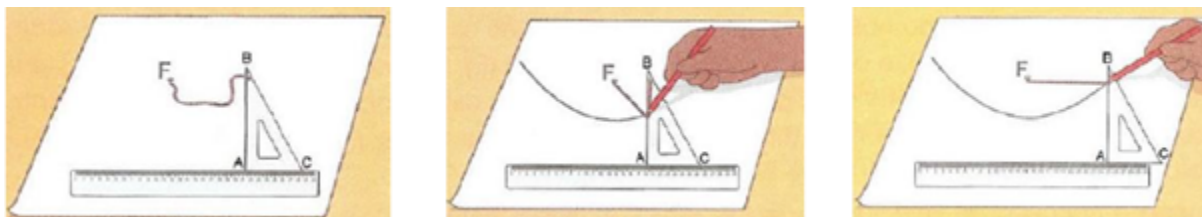
Temos que os triângulos $\triangle PMX$ e $\triangle PMF_2$ são congruentes (caso LAL), logo $PX \equiv PF_2$. Consequentemente, $d(P, F_1) - d(P, F_2) = d(P, F_1) - d(P, X) = d(F_1, X) = R$, que é uma constante, pois é o raio da circunferência inicial. Portanto, P pertence à hipérbole.

A questão técnica Q_{5MS} tratará da construção por fio esticado, que pode ser realizada em sala de aula com o auxílio de tachinhas e uma barra de isopor.

Q_{5MS} : Construa uma parábola, uma elipse e uma hipérbole usando um fio esticado (barbante).

Apresentamos, inicialmente, a técnica para o caso da parábola. Segundo Siqueira (2016, p. 76), nesse caso devemos traçar uma reta r em uma barra de isopor e marcar um ponto F , $F \notin r$ e nele devemos fixar uma tachinha (figura 14). Tomamos um barbante e amarramos uma de suas extremidades nessa tachinha e a outra na extremidade de um esquadro (no ponto B, como mostra a figura 14). Depois basta deslizar o esquadro pela reta r com o apoio de uma régua, mantendo sempre o barbante esticado pela ponta do lápis que descreverá a representação de uma parábola.

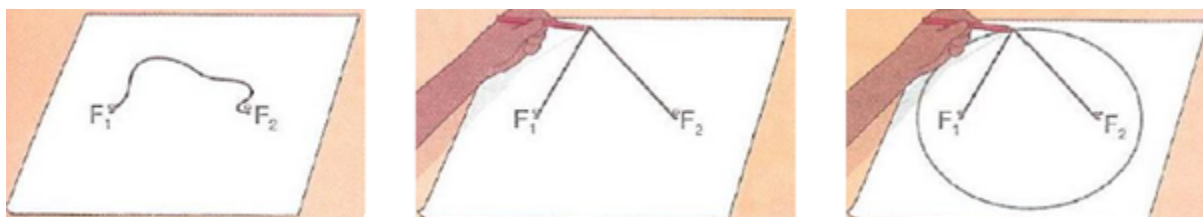
Figura 14 - Construção da parábola por fio esticado



Fonte: Souza (2010, p. 216).

Para a elipse, devemos marcar na barra de isopor os pontos F_1 e F_2 (focos) e tomarmos um barbante de comprimento medindo mais que a distância entre F_1 e F_2 (figura 15). Amarramos as extremidades do barbante em tachinhas que serão fixadas uma em cada foco F_1 e F_2 . Mantendo sempre o barbante esticado com a ponta de um lápis, devemos movê-lo em todos os sentidos para descrever a representação de uma elipse.

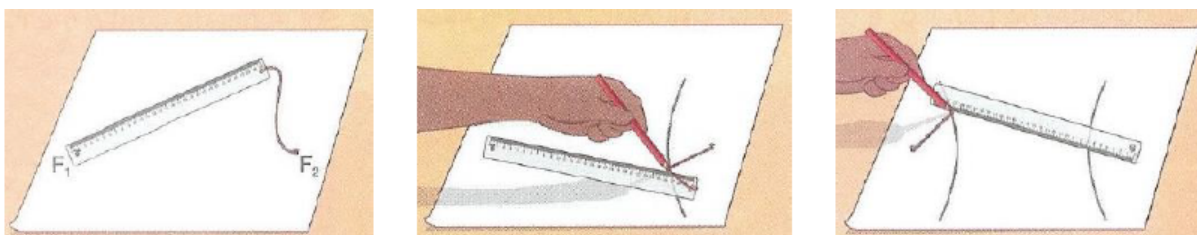
Figura 15 - Construção da elipse por fio esticado



Fonte: Souza (2010, p. 201).

Para o caso da hipérbole, tomamos uma régua e um barbante e medimos seus comprimentos. Marcamos na barra de isopor os pontos F_1 e F_2 (figura 16) para serem os focos da hipérbole, de modo que a medida da distância entre esses pontos seja maior que a diferença, em módulo, entre as medidas dos comprimentos da régua e do barbante. Em uma tachinha amarramos uma extremidade e fixamos em F_2 ; a outra tachinha devemos fixar em F_1 junto com uma extremidade da régua e prendemos as extremidades do barbante e da régua que estavam livres. Com a ponta do lápis devemos esticar o barbante, girando a régua em torno de F_1 , para podermos traçar a representação de um ramo da hipérbole. O outro ramo da hipérbole é feito com o mesmo procedimento utilizando a outra tachinha.

Figura 16 - Construção da hipérbole por fio esticado



Fonte: Souza (2010, p. 208).

Com as construções por dobraduras e por fio esticado feitas, é possível entender a relação entre as medidas envolvidas nas definições das cônicas por lugar geométrico que são utilizadas para as construções com o *software* GeoGebra, principalmente para o caso da elipse e da hipérbole, em que temos a definição bifocal.

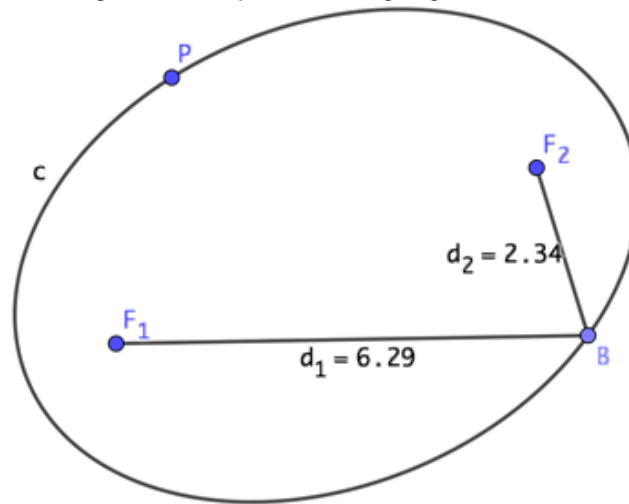
A próxima questão técnica, Q_{6MS} , foi então elaborada com o objetivo de definir a elipse e a hipérbole no plano utilizando a noção de lugar geométrico para explorar as propriedades que tratam da soma e da diferença constantes de distâncias de um ponto da cônica aos seus focos. Para que o estudante possa medir essas distâncias e concluir e descrever essas propriedades, optamos por usar o GeoGebra no sentido de facilitar esse trabalho e por se tratar de um *software* livre. Como já vimos anteriormente, muitos autores também desenvolveram suas pesquisas com o uso desse *software*, como os casos de Souto (2013), Mongüa e Ruiz Medina (2014), Silva (2018) e Londero (2017).

Q_{6MS} : No GeoGebra marque três pontos F_1 , F_2 e P . Construa uma elipse e uma hipérbole com seus focos, sendo F_1 e F_2 e o ponto P pertencente a cada uma dessas curvas. Em seguida, para um ponto B da curva, $B \neq P$, calcule a medida dos segmentos BF_1 e BF_2 . Movimentando B ao longo da curva, historiche o que você observa para o valor de $d(BF_1) + d(BF_2)$ no caso da elipse, e $|d(BF_1) - d(BF_2)|$ para o caso da hipérbole. Apoiando-se nessas observações e usando a noção de lugar geométrico, defina essas duas cônicas.

Trabalhando com o GeoGebra e usando a janela de visualização 2D, escondemos os eixos, a malha e marcamos os pontos F_1 , F_2 e P . Para desenhar uma elipse, basta selecionar a ferramenta com esse nome, escolher F_1 e F_2 como focos e P como um ponto pertencente à curva (figura 17). Em seguida, marcamos um novo ponto B na elipse e traçamos os segmentos de reta d_1 e d_2 , ligando o ponto B aos focos F_1 e F_2 , respectivamente, exibindo o nome e a medida dos segmentos. Ao

movimentarmos o ponto B sobre a elipse, notamos que a soma das medidas dos segmentos d_1 e d_2 é sempre a mesma, isto é, $d(BF_1) + d(BF_2) = k$, $k \in \mathbb{R}$, para qualquer B pertencente à elipse. Assim, a elipse pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das medidas das distâncias desses pontos a dois pontos fixos (focos) desse plano é sempre uma constante k , k maior que a medida da distância entre os focos, pois é necessário garantir a existência do triângulo BF_1F_2 .

Figura 17 - Elipse como lugar geométrico

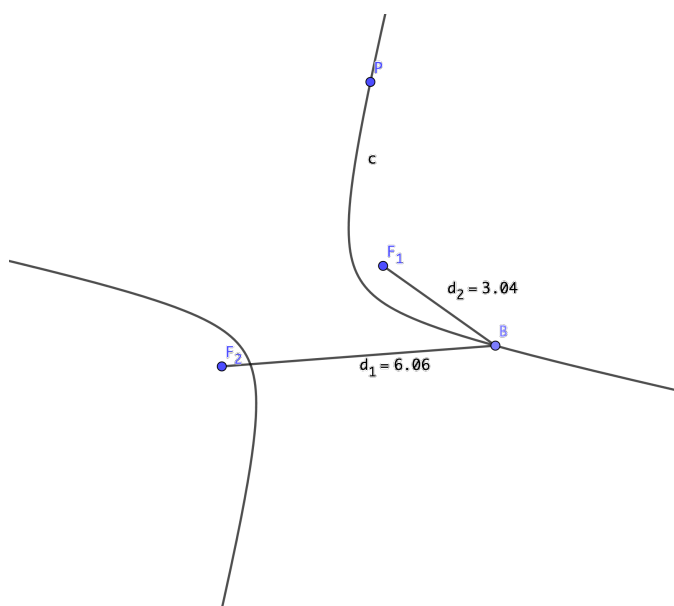


Fonte: Produzida pelo autor.

Para o caso da hipérbole, com o uso do GeoGebra, traçamos uma hipérbole selecionando dois focos (F_1 e F_2) e um ponto P da hipérbole (figura 18). Em seguida, marcamos um novo ponto B dessa hipérbole e traçamos os segmentos de reta ligando esse ponto aos focos, exibindo o nome e a medida dos segmentos.

Movendo o ponto B ao longo da hipérbole, é possível observar que a diferença das medidas das distâncias em módulo será sempre constante, $|d(BF_1) - d(BF_2)| = m$, $m \in \mathbb{R}$, e, dessa forma, podemos definir a hipérbole como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença entre as medidas das distâncias (em módulo) desses pontos a dois pontos fixos (focos) desse plano é sempre uma constante k , k menor que a medida da distância entre os dois focos.

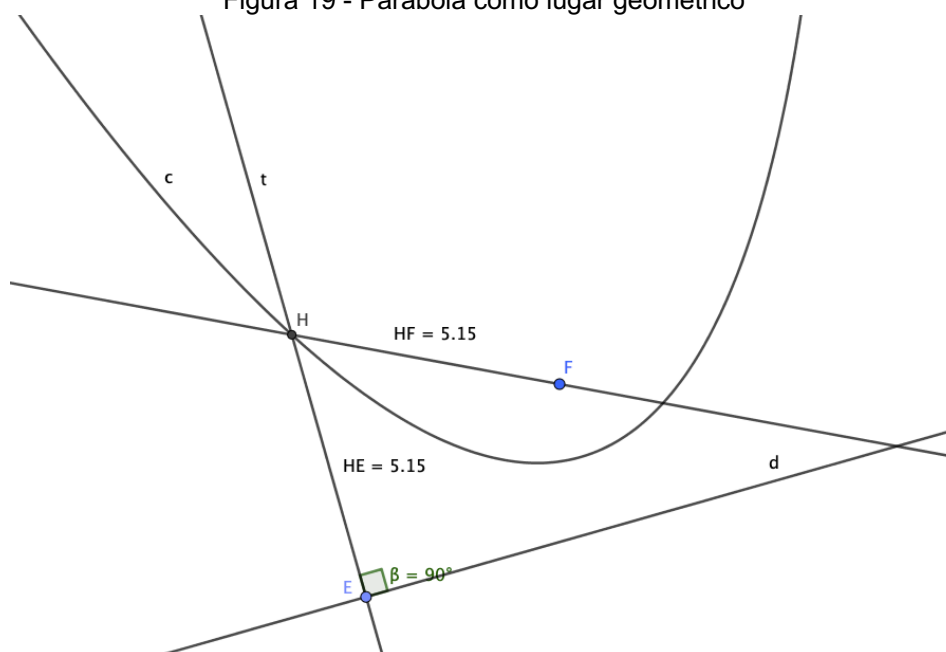
Figura 18 - Hipérbole como lugar geométrico



Fonte: Produzida pelo autor.

Q_{7MS} : Com o auxílio do GeoGebra, desenhe uma reta d e um ponto F no plano. Trace a parábola que tem F como foco e d como reta diretriz (figura 19). Marque um ponto E sobre d e trace uma reta t perpendicular à d em E que intercepta a parábola no ponto H . Trace uma reta passando por F e H e determine as medidas dos segmentos EH e FH . Arraste o ponto E ao longo de d e observe o que ocorre com as medidas dos segmentos. Apoiando-se nessas observações e usando a noção de lugar geométrico, defina essa cônica.

Figura 19 - Parábola como lugar geométrico

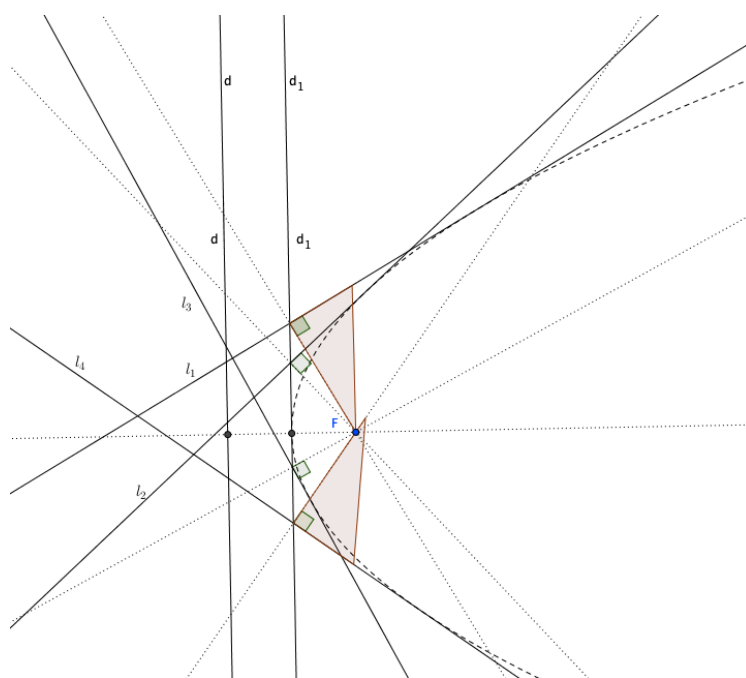


Fonte: Produzida pelo autor.

Movendo o ponto E ao longo de d , nota-se que as medidas dos comprimentos dos segmentos FH e EH são sempre iguais. Logo, a parábola é definida como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta d e um ponto F , com $F \notin d$.

Há outras formas de construir essas curvas sem usar um *software*. Podemos construí-las, por exemplo, utilizando esquadro, papel e lápis. O processo para a construção da parábola (figura 20) é o seguinte: trace uma reta d para representar a diretriz da parábola e um ponto F como seu foco, $F \notin d$. Em seguida, trace uma perpendicular à reta d passando por F e determine o ponto médio entre F e a reta d . Por ele trace uma reta d_1 paralela à reta d , que será a reta tangente à parábola pelo seu vértice. Posicione o esquadro de modo que o vértice do ângulo reto coincida com um ponto da reta d e um de seus lados passe pelo ponto F e então trace a reta l determinada pelo outro lado do ângulo reto do esquadro. Essa reta l representará uma outra tangente à parábola com foco F e diretriz d . Repita o processo para outros pontos da reta d e terá um conjunto de retas, $l_1, l_2, l_3, \dots$, tangentes à parábola.

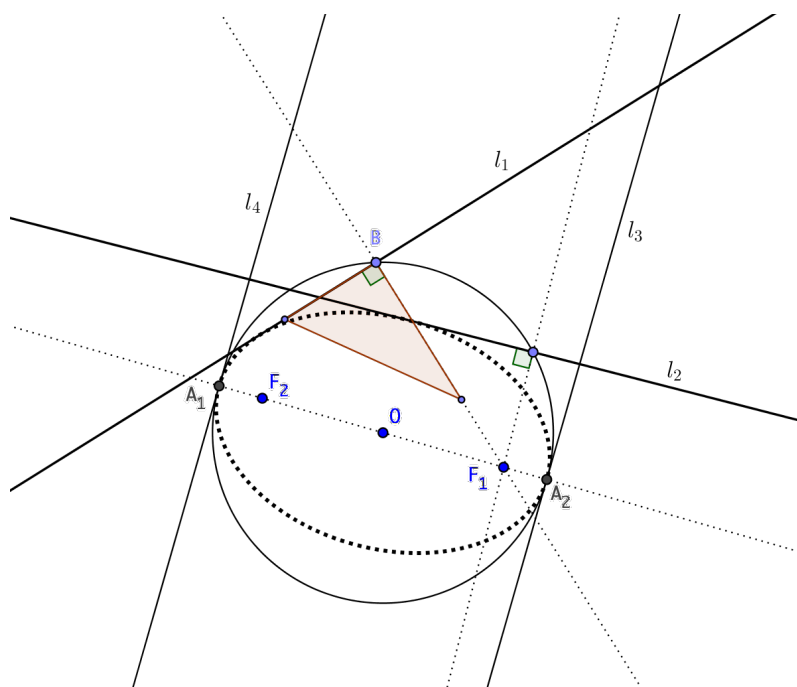
Figura 20 – Construção de parábola via tangentes



Fonte: Produzida pelo autor.

A elipse pode ser construída usando um esquadro, papel, lápis e compasso (figura 21), e, neste caso, as retas tangentes à elipse são traçadas usando uma “circunferência auxiliar”.

Figura 21 - Construção de elipse via tangentes



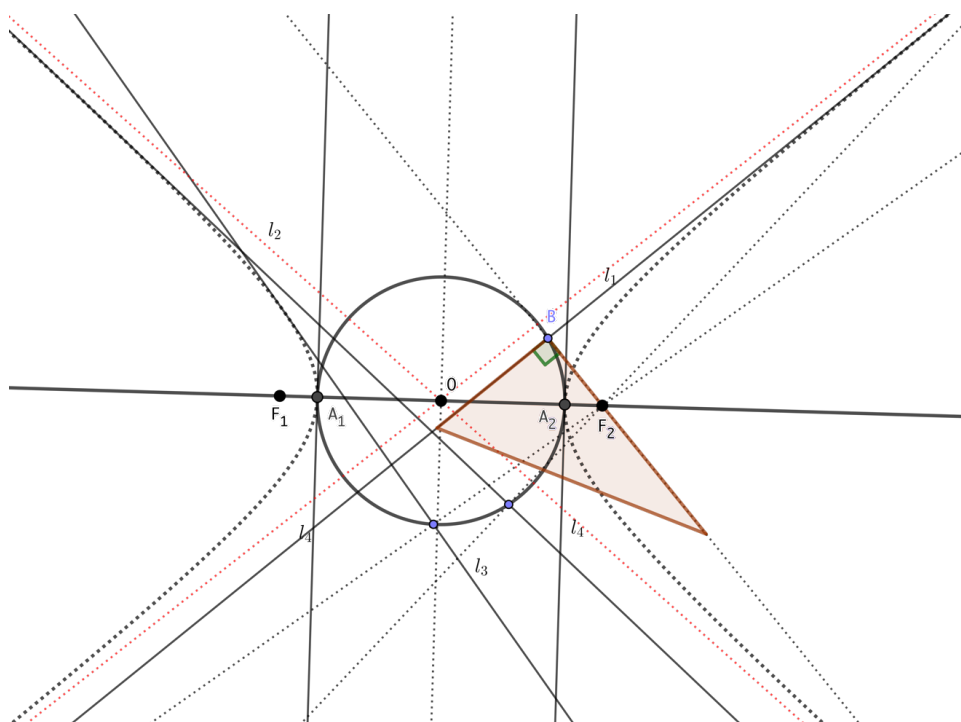
Fonte: Produzida pelo autor.

Os passos para essa construção são os seguintes: trace uma circunferência como auxiliar da construção da elipse e um de seus focos F_1 na região interna à circunferência, não coincidente com seu centro. Posicione o esquadro de forma que o vértice do ângulo reto esteja sobre um ponto B e um de seus lados passe pelo foco. Trace a reta l_1 no outro lado do esquadro. Essa reta será tangente à elipse com foco F_1 no interior dessa circunferência auxiliar. Repetindo esse processo para diferentes pontos da circunferência, teremos uma família de tangentes à elipse: $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$

Podemos observar que, ao passar uma reta por F_1 e pelo centro da circunferência, essa reta interceptará a circunferência em dois pontos pelos quais passam duas tangentes à elipse, e, portanto, esses dois pontos pertencem à elipse. Assim, o outro foco da elipse (F_2) será o ponto simétrico de F_1 em relação ao centro da circunferência.

Já para o caso da hipérbole (figura 22), a construção usa os mesmos instrumentos do caso anterior e a curva também é traçada com base em suas retas tangentes.

Figura 22 - Construção da hipérbole via tangentes



Fonte: Produzida pelo autor.

O processo de construção é o seguinte: trace uma circunferência auxiliar e um ponto F_1 externo a ela para ser um dos focos da hipérbole. Posicione o vértice do ângulo reto do esquadro sobre um ponto da circunferência e um de seus lados passando por F_1 e trace a reta l_1 pelo outro lado do ângulo reto do esquadro. Essa reta é uma tangente da hipérbole com foco F_1 no exterior da circunferência. Repetindo esse processo, obteremos uma família, $l_1, l_2, l_3, \dots$, de tangentes para a hipérbole.

Certamente podemos passar uma reta por F_1 e pelo centro da circunferência que a interceptará em dois pontos por onde passam duas tangentes, logo esses dois pontos pertencem à hipérbole. Podemos afirmar então que o outro foco da hipérbole (F_2) será o simétrico de F_1 em relação ao centro da circunferência.

Com o GeoGebra podemos reproduzir essa construção para uma das tangentes e acionar seu rastro enquanto o ponto percorre a circunferência e observar que essa construção permite visualizar os dois ramos da hipérbole e, ainda, a relação entre a posição do ponto na circunferência e as assíntotas da hipérbole. A construção por rastro no GeoGebra pode ser feita também para as outras cônicas: parábola e elipse.

Com essas construções podemos enunciar nossa próxima questão técnica da seguinte forma:

Q_{8MS} : Construa uma parábola, uma elipse e uma hipérbole com o auxílio de esquadro, papel, lápis e compasso.

A técnica para solucionar essa questão (tarefa) já foi descrita anteriormente.

Baseando-nos em Ruiz-Olarría (2015) e em Licera (2017), sabemos que entre os resultados da construção de um MER está a identificação da razão de ser do objeto estudado. Para Chevallard (2013b), necessitamos de uma renovação do currículo que não apresente somente uma matemática monumentalista e não funcional. Nesse sentido, o autor afirma que

[...] para cada “componente” do currículo que se pretende ensinar, a profissão (e, portanto, não cada professor como se estivesse sozinho no mundo) deve poder propor razões de ser que sejam autênticas no plano epistemológico e social, coerentes em matéria curricular e, de certa forma, suscetíveis de ser conhecidas, recebidas, vividas, integradas pelos alunos de nível de estudo desejado, por meio de *situações didáticas apropriadas*. (CHEVALLARD, 2013b, p.112).

Com isso, podemos declarar que a razão de ser das cônicas é algo que devemos buscar neste capítulo, mesmo que esse MER seja em torno de três de seus modelos de geometrias.

Nessa direção, procuramos na história da matemática onde, quando e como as cônicas foram úteis e descobrimos que essas curvas possuíam diversas aplicações⁹ – inclusive a maioria delas em contextos fora da matemática, como na física, por exemplo – e que a propriedade reflexiva esteve presente entre algumas dessas aplicações. Segundo Roque (2012), o matemático, físico e filósofo René Descartes (1596 – 1650) já tinha conhecimento de que essa propriedade estava presente na construção de lunetas, espelhos e em relojoarias, antes mesmo de se trabalhar com o plano cartesiano e, portanto, eram aplicações de cunho geométrico (sem o uso de coordenadas), ou seja, na geometria sintética. Também podemos encontrar essas propriedades em aplicações nos dias de hoje em faróis de automóveis ou em antenas parabólicas (caso da parábola¹⁰) nos dispositivos de

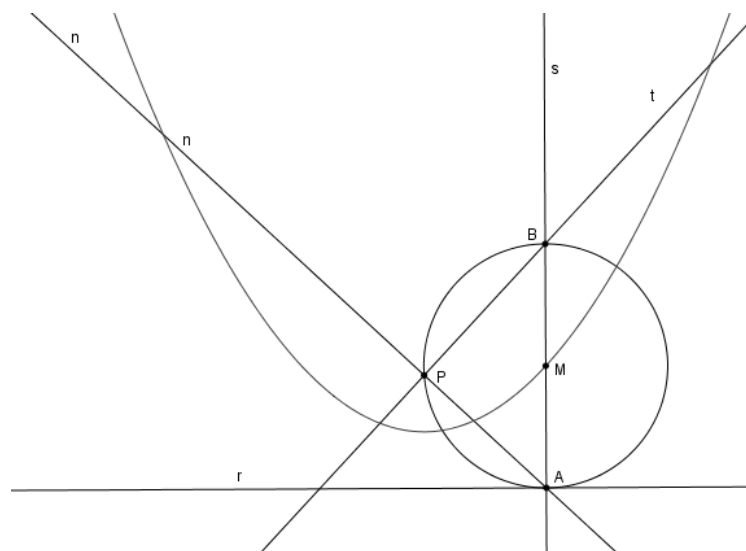
⁹ Ptolomeu (127 – 151 d.C.) introduziu o sistema de latitude e longitude; Galileu (1564 – 1642) observou que, desprezando a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma parábola, e Kepler (1571 – 1630) com a construção de espelhos parabólicos.

¹⁰ Todo raio, partindo de seu foco, ao incidir sobre sua própria parábola, refletirá raios paralelos ao seu eixo de simetria.

iluminação usados pelos dentistas (caso da elipse¹¹) e em telescópios refletores (caso da hipérbole¹²).

Para esse modelo da geometria sintética, se pode notar que a noção de lugar geométrico está presente em quase todas as construções, seja como o local em que passam as retas tangentes, seja para cumprir com determinado valor de excentricidade, ou mesmo como uma possível definição de cônicas a partir de distâncias. No entanto, podemos ter outros tipos de definições para as cônicas via lugar geométrico. Por exemplo, para a parábola podemos afirmar que ela é o lugar geométrico dos centros das circunferências de um plano que são tangentes a uma reta fixa r e que passam por um ponto P não pertencente a essa reta (figura 23).

Figura 23 - Outra construção de parábola como lugar geométrico



Fonte: Produzida pelo autor.

Para construir esse lugar geométrico, podemos usar o GeoGebra para traçar uma reta r e determinar um ponto P não pertencente à reta r e o ponto A , de tangência da circunferência com essa reta. Pelo ponto A , traçar uma reta s perpendicular à reta r e a reta n , que passa por P . Por P traçamos a reta t , perpendicular à reta n , que intercepta a reta s no ponto B . Determinar o ponto M , médio do segmento AB e a

¹¹ Traça-se um segmento de reta qualquer partindo de um dos focos até um ponto qualquer da elipse, formando um ângulo α com essa curva. Se traçarmos outro segmento partindo desse último ponto formando o mesmo ângulo α com a elipse, então esse segmento passará pelo outro foco.

¹² Quando traçamos um segmento de reta partindo de um ponto qualquer da hipérbole na direção de um dos focos, esse segmento encontrará a curva em um ponto P formando um ângulo β . Se traçarmos outro segmento partindo de P , formando o mesmo ângulo β , esse segmento passará pelo outro foco da hipérbole.

circunferência de centro em M que passa por A e B . Movimentando o ponto A sobre a reta r , podemos observar que o ponto M percorre uma parábola, ou seja, a parábola é o lugar geométrico do ponto M em relação ao ponto A .

Por outro lado, podemos notar que a soma ou diferença entre distâncias está presente em quase tudo referente a cônicas, nas determinações dessas curvas por lugar geométrico e em várias propriedades das cônicas, inclusive nas propriedades reflexivas responsáveis por grande parte de suas aplicações. Isso nos leva a afirmar que a razão de ser para as cônicas no modelo da geometria sintética é a construção de lugares geométricos e a resolução de problemas que envolvam soma ou diferença entre distâncias.

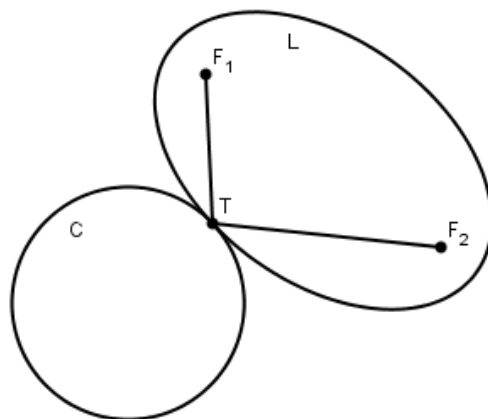
Para reforçar nossa afirmação, buscamos uma questão matemática que é solucionada com uma cônica e usa a soma de distâncias como base de sua solução. Essa foi uma questão que descobrimos por intermédio de discussões feitas com um colega de doutorado que discutia esse problema durante nossa passagem por Barcelona. Naquele momento, um pequeno grupo de pesquisadores tentava solucionar esse problema para a construção de um PEP que deveria compor a tese do colega, até que entendemos que a solução só poderia ser uma cônica, mais particularmente uma elipse, e, assim, esse poderia ser uma nova questão técnica que nos direcionaria à razão de ser das cônicas.

Q_{9MS} : Dados dois pontos F_1 e F_2 e uma circunferência C , qual é o menor percurso de F_1 até F_2 passando por C ?

Como resposta a essa questão, podemos afirmar que o menor percurso entre os pontos F_1 e F_2 passando por um ponto T da circunferência C (figura 24) é formado pelos segmentos de reta F_1T e TF_2 , com T sendo o ponto de tangência entre a circunferência C e a elipse L , que possui os focos dados pelos pontos F_1 e F_2 .

Essa solução é justificada pela definição de elipse por lugar geométrico, já que uma elipse pode ser determinada pelos pontos do plano tal que, ao somar as distâncias de um ponto qualquer da elipse aos seus focos F_1 e F_2 , temos sempre uma constante k como resultado, considerando k um número real não nulo. De fato, se tomamos um ponto qualquer $Y \in C, Y \neq T$, temos que $d(F_1, T) + d(T, F_2) < d(F_1, Y) + d(Y, F_2)$, pois o ponto Y não pertence à elipse e também não está em seu interior.

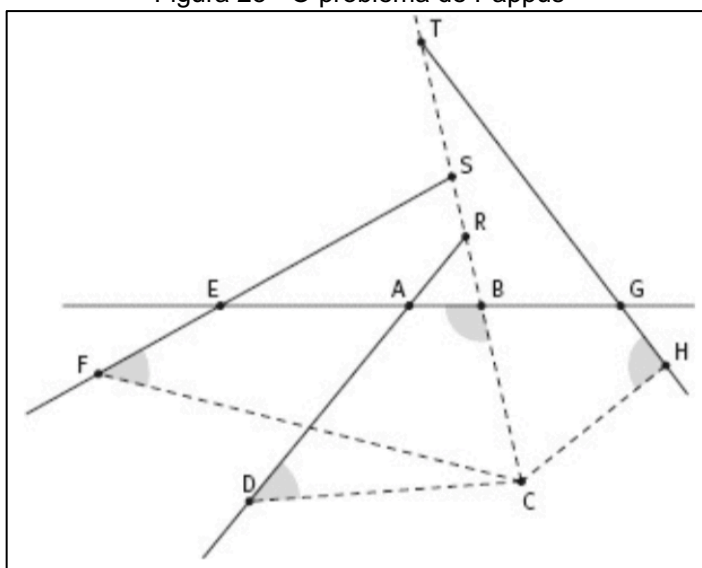
Figura 24 - Elipse tangente a uma circunferência



Fonte: Produzida pelo autor.

Outro caso em que as cônicas são indispensáveis para encontrar o lugar geométrico quando se trabalha com distâncias é o problema de Pappus, que foi enunciado anteriormente e trata de encontrar um ponto C a partir do qual possamos construir segmentos de reta CB, CD, CF e CH , que formam ângulos dados $\widehat{CBA}, \widehat{CDA}, \widehat{CFE}$ e $\widehat{CHG}$ com as retas dadas (ver figura 25). Além disso, um outro dado do problema é que o produto dos comprimentos de dois desses segmentos é proporcional ao produto dos comprimentos dos restantes. Por exemplo, podemos ter que o produto CB por CH é igual a n vezes o produto de CF por CD .

Figura 25 - O problema de Pappus



Fonte: Roque (2012, p. 260).

Roque (2012) afirma que esse problema foi solucionado por Pappus quando demonstrou que a solução para o caso geral deve ser uma cônica. Descartes atacou o problema partindo de quatro retas caminhando na direção de uma resposta para um

número maior de retas, porém resolveu abordar o problema considerando-o já resolvido e utilizando incógnitas para representar as soluções ainda não encontradas. Ainda segundo a autora, Descartes determinou que o segmento AB medisse x e o segmento BC medisse y , o que resultou na criação de um sistema de duas coordenadas conveniente para facilitar a resolução do problema, depois o desafio foi descrever os demais segmentos em função de x e y . Com os cálculos feitos, podemos obter que os valores para x e y , que satisfazem o problema, devem satisfazer também uma equação polinomial do segundo grau na forma $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \theta x + \psi y + \epsilon = 0$, com os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \psi$ e ϵ sendo números reais, isto é, o lugar geométrico para o ponto C é uma cônica.

Esse problema de Pappus nos permite uma reflexão a respeito da passagem do modelo da geometria sintética para o modelo da geometria analítica no estudo de cônicas, como a possibilidade de desenvolver praxeologias em que esses modelos de geometrias se complementem. Para Gascón (2002), a geometria analítica não deve surgir como uma mágica, desconsiderando a geometria sintética, pelo contrário, afirma que pequenas alterações em uma determinada questão podem mostrar a insuficiência das técnicas da geometria sintética e justificar o estudo de novas técnicas vindas da geometria analítica. Acreditamos que uma questão que cumpra essas demandas – considerando as geometrias sintética e analítica – deve ter como principal discussão a necessidade de inserção de um sistema referencial no plano, bem como a percepção da relação entre a equação obtida e a escolha de tal referencial e, para cumprir com essas exigências, vamos tomar o próprio problema de Pappus. Assim, concluímos esse modelo da geometria sintética com a seguinte questão técnica:

Q_{10MS} : Encontrar um ponto C a partir do qual possamos construir segmentos de reta CB, CD, CF e CH que formam ângulos dados $\widehat{CBA}, \widehat{CDA}, \widehat{CFE}$ e $\widehat{CHG}$ com as retas dadas (ver figura 25).

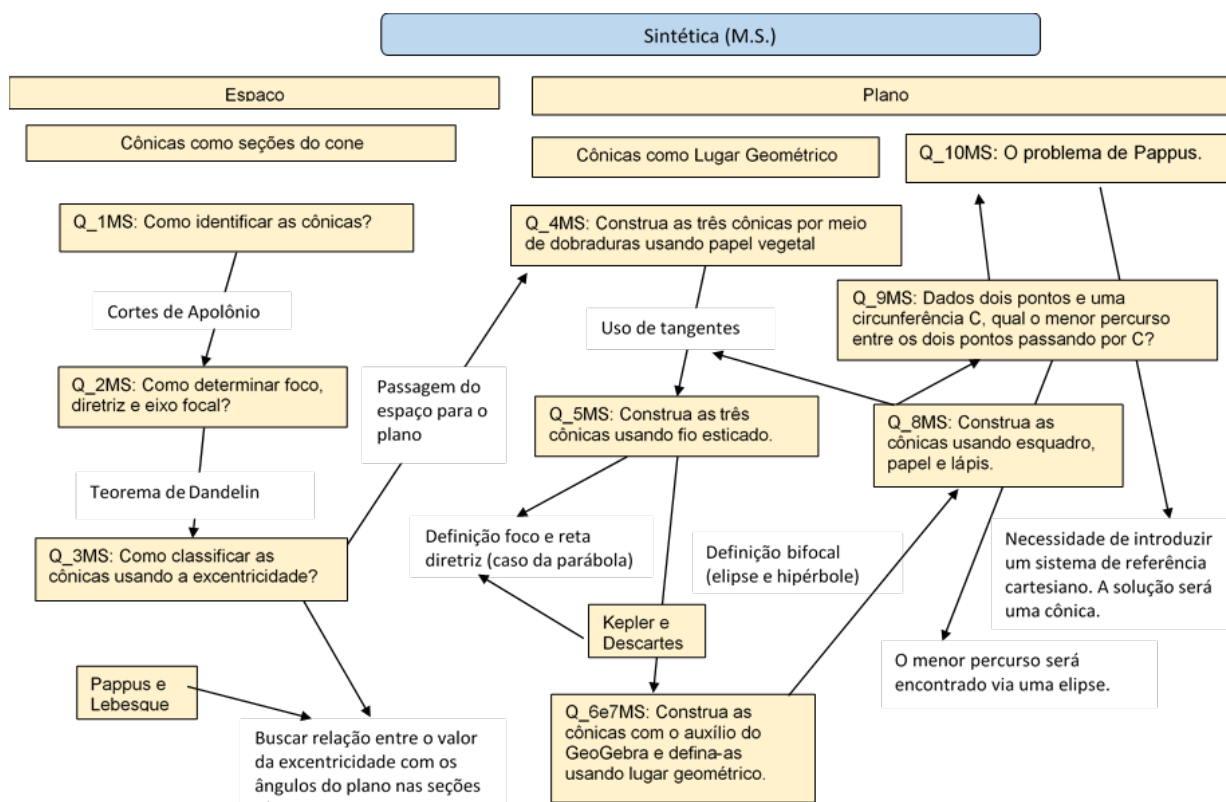
A solução já foi comentada anteriormente e requer a introdução de um sistema referencial.

Ao final desse modelo da geometria sintética, concluímos que a resposta para nossa questão teórica QT_{0MS} é que podemos sim desenvolver uma praxeologia para o estudo de cônicas na GS, favorecendo a passagem do contexto plano para o espacial e vice-versa, mostrando continuidade e complementaridade entre eles. Além

disso, exibimos (figura 26) os elementos (tarefas) dessa praxeologia por meio do mapa desse modelo. A figura 26 apresenta as tarefas destinadas aos contextos do espaço e do plano separadas e escritas em retângulos. Entre as setas apontam/passam pelas soluções e para a tarefa seguinte.

Dessa forma terminamos esse modelo com a necessidade de um novo modelo para dar conta da questão Q_{10MS} , o modelo da geometria analítica para as cônicas, que é o que abordaremos na próxima subseção.

Figura 26 - Modelo da geometria sintética



Fonte: Produzida pelo autor.

3.2.2 O modelo da geometria analítica

Chamaremos esse modelo de M2 e consideramos que pode ser visto como uma primeira algebrização¹³ do modelo M1. Segundo nossos estudos, é o modelo imperante nos livros didáticos para o ensino de cônicas no Ensino Básico dos estados de São Paulo e Sergipe. Em M2 as cônicas são definidas como as curvas em um

¹³ Aqui fazemos uma associação biunívoca entre os pontos do plano munido de um sistema referencial cartesiano com o conjunto $\{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, que denotaremos por $\mathbb{R}^2$, isto é, dado um ponto P qualquer do plano cartesiano, podemos representá-lo algebricamente por um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e a recíproca também é válida.

plano cartesiano que representam graficamente uma equação polinomial do segundo grau em duas variáveis, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com os parâmetros A, B, C, D, E e F pertencentes ao conjunto dos números reais e com a condição de que $A^2 + C^2 \neq 0$ para garantir que a equação terá ao menos um termo de grau dois.

Agora enunciamos duas questões teóricas que nortearão nossos estudos neste momento.

QT_{0MA} : O que são cônicas na geometria analítica? Quais suas razões de ser que permitem dar sentido a seu estudo integrando o modelo da geometria sintética com o modelo da geometria analítica?

Buscando um pouco de história da matemática, encontramos que as cônicas já estavam presentes no surgimento da geometria analítica com as obras dos franceses René Descartes¹⁴ e Pierre de Fermat¹⁵ (1601 – 1665). Como vimos na seção anterior, o problema de Pappus, que exigiu de Descartes usar a ideia de localizar pontos no plano se baseando em dois eixos não perpendiculares, teve como solução a equação de uma cônica. Além disso, segundo Goulart (2009), Fermat também usou álgebra para resolver problemas geométricos em seu tratado “Introdução aos Lugares Planos e Sólidos” e usou equações de cônicas para resolver equações polinomiais de maior que dois. Sabemos também que uma das aplicações para as cônicas ao longo da história da ciência foi auxiliar na descrição do comportamento de corpos celestes¹⁶.

O alemão Joahannes Kepler (1571 – 1630) é conhecido por seus estudos a respeito do movimento dos planetas do sistema solar, e uma de suas famosas leis assegura que os planetas percorrem uma órbita elíptica com o Sol localizado em um dos focos. Isaac Newton (1643 – 1727), por meio de sua teoria da gravitação, explicou as órbitas cônicas dos corpos celestes. Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), usando as leis de Newton, previu a órbita de um cometa e com precisão sua próxima aparição.

¹⁴ Segundo Goulart (2009), no ano de 1637 Descartes publica a obra chamada *La Géométrie* e apresenta equações do segundo grau, interpretadas como representações de seções cônicas.

¹⁵ Ainda segundo Goulart (2009), em 1679 foi publicado o tratado *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge* (Introdução aos Lugares Planos e Sólidos), escrito por Fermat antes de 1637, em que as cônicas aparecem em um sistema de eixos perpendiculares.

¹⁶ Em astronomia, corpo celeste é o nome usado para qualquer entidade física existente no espaço sideral.

Finalmente, quando nos referimos ao motivo do estudo da própria geometria analítica, Gascón (2002, p. 24, tradução nossa) afirma que “são precisamente as limitações das *técnicas sintéticas* que dão sentido (são as razões de ser) às *técnicas analíticas*”, isto é, essa geometria surge para suprir as insuficiências da geometria sintética.

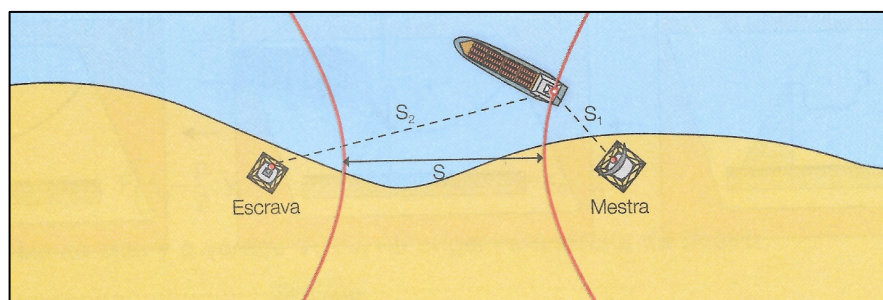
Diante disso, pensamos que uma resposta para a questão QT_{0MA} é usar representações de cônicas para localização de pontos não dados, tais como foco e vértice, entre outros, ou um contexto que trate um corpo que se movimenta em uma trajetória em formato cônico. Notemos que, ao trabalhar com localização em um plano, tratamos de distâncias¹⁷ entre pontos que, por meio de manipulações algébricas, nos remetem a equações polinomiais de grau dois em duas variáveis (equação de uma cônica).

Ponderando as observações anteriores, nossa primeira questão para o modelo M2 foi retirada de Souza e Garcia (2016b, p. 103) e trata do sistema *LORAN* (*Long Range Navigation*), desenvolvido nos EUA em 1940 e utilizado para obter a localização de um navio a partir de duas estações emissoras de ondas de rádio, uma chamada de Mestra (M) e a outra, de Escrava (E_1), localizadas em pontos distintos. Essas estações emitem sinais que são recepcionados por um navio em tempos definidos como t_1 e t_2 , respectivamente, o receptor *LORAN* do navio mede a diferença de tempo em que os sinais foram recebidos e toma uma variação constante $t = |t_2 - t_1|$.

Considerando que toda onda de rádio tem na atmosfera velocidade próxima à da luz (c) e usando a definição de velocidade média ($v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$), temos: $t = |t_2 - t_1| \Rightarrow \frac{S}{c} = \left| \frac{S_2}{c} - \frac{S_1}{c} \right| \Rightarrow S = |S_2 - S_1|$, em que S_1 e S_2 representam as distâncias percorridas pelas ondas até o navio. Dessa forma, a constante S é a diferença entre as medidas de duas distâncias exatamente da mesma forma que utilizamos para definir uma hipérbole no plano a partir da noção de lugar geométrico (veja a ilustração dessa situação na figura 27).

¹⁷ No sentido da métrica euclidiana.

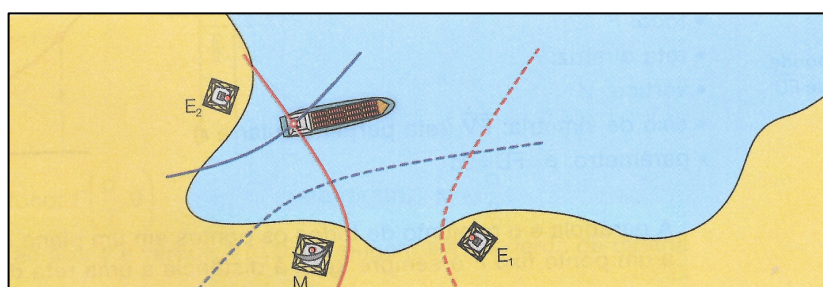
Figura 27 - Relação entre o sistema LORAN e uma hipérbole



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 103).

Pela diferença entre t_1 e t_2 , é possível determinar em qual ramo da hipérbole o navio se encontra, chamado de ramo B, mas não exatamente em qual ponto. Para determinar exatamente a localização, é utilizada uma outra emissora Escrava (E_2), que define assim uma outra hipérbole. Assim, o navio estará na intersecção que ocorrerá, no ramo B, entre as duas parábolas, como podemos ver na representação apresentada na figura 28.

Figura 28 - Relação entre o sistema LORAN e duas hipérboles



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 103).

Essa situação nos permite enunciar nossa primeira questão técnica no modelo da geometria analítica:

Q_{1MA} : Considere três pontos distintos no plano como sendo as emissoras Mestra e Escravas (E_1, M e E_2) do sistema LORAN e uma situação em que a $d(E_1; M) = d(M; E_2) = x \text{ cm}$. O sistema LORAN mostra ao capitão do navio duas diferenças de distâncias S_1 e S_2 para os pares E_1 e M e E_2 e M , respectivamente. Determine as possíveis localizações para esse navio.

A resposta para essa questão é inserir um sistema referencial cartesiano no plano e usar a definição de hipérbole por lugar geométrico ($|d(P; F_2) - d(P; F_1)| = K$), considerando as emissoras M , E_1 e E_2 como focos (como mostra a figura 28), para encontrar a equação de ambas as hipérboles. Em seguida, isolar a mesma variável

em ambas as equações para construir uma igualdade que, por meio de manipulações algébricas, permite determinar os pontos de intersecção dessas cônicas.

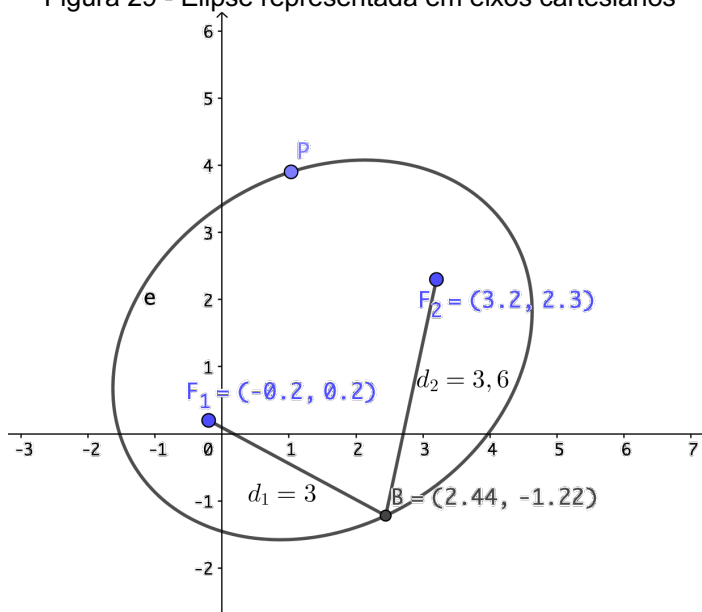
A segunda questão técnica desse modelo propõe o trabalho com o GeoGebra de tal forma que o estudante sinta a necessidade da introdução de um sistema referencial cartesiano no plano em que se encontra desenhada a cônica.

Q_{2MA} : Com o auxílio do GeoGebra, construa a representação gráfica de uma cônica (parábola, elipse ou hipérbole), identifique seus focos e encontre a equação que a represente.

Para responder essa questão, usamos o GeoGebra na janela de visualização 2, inicialmente sem exibir a malha e os eixos, para traçar uma cônica qualquer, por exemplo uma elipse, a partir de dois pontos para representar seus focos (F_1 e F_2) e um ponto P pertencente à elipse. Em seguida, escolhemos outro ponto B distinto de P e pertencente à elipse, que deve satisfazer a expressão $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$, como visto na seção anterior.

Para encontrar a equação da elipse, deve ser representado na mesma construção um sistema referencial cartesiano, e no GeoGebra basta solicitar sua exibição. Quando solicitamos as coordenadas dos pontos representados, elas serão dadas em números decimais, já que a elipse foi construída sem a pretensão de trabalhar com números inteiros. Nesse exemplo, apresentado na figura 29, as coordenadas dos focos são $F_1(-0,2; 0,2)$ e $F_2(3,2; 2,3)$ (aproximação por uma casa decimal). Acionando a distância entre pontos, o *software* exibe as distâncias $d(B, F_1)$ e $d(B, F_2)$, que somadas resultam em 6,6 neste caso. Mobilizando a equação para distância entre dois pontos e substituindo os valores, vem que: $d(B, F_1) + d(B, F_2) = k$, ou seja, $\sqrt{(x + 0,2)^2 + (y - 0,2)^2} + \sqrt{(x - 3,2)^2 + (y - 2,3)^2} = 6,6$, que nos levará à equação $129,3x^2 - 57,3xy + 157y^2 - 318,2x - 309,1y - 782,4 = 0$, que é uma equação do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esses cálculos serão feitos em papel e poderão ser conferidos solicitando ao *software* que exiba a equação da elipse (botão direito do mouse, propriedades, exibir rótulo, nome e valor) ou abrindo a janela de álgebra.

Figura 29 - Elipse representada em eixos cartesianos



Fonte: Produzida pelo autor.

Para permitir uma melhor compreensão das passagens da geometria para a álgebra e vice-versa, a próxima questão técnica terá o objetivo de fazer o caminho inverso ao da questão anterior, isto é, esboçar a representação gráfica da cônica dada sua equação completa.

Q_{3MA} : Dada a equação geral de uma cônica, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esboce uma representação gráfica que contenha todos os pontos do plano que satisfazem essa equação.

Para esboçar a representação solicitada, devemos desenvolver um estudo de identificação da cônica a partir de sua equação geral, observando o que cada parcela da equação determina em sua representação gráfica.

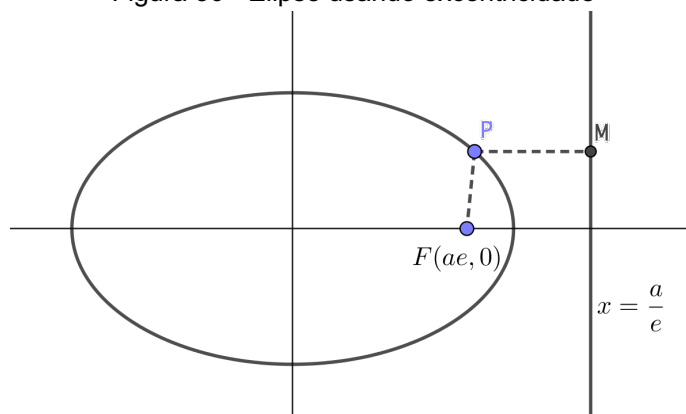
Quando temos uma equação geral com todos os parâmetros diferentes de zero, a curva sofreu uma translação e os eixos sofreram uma rotação, considerando o sistema de referência original Oxy . Nesses casos, usamos elementos pertencentes à álgebra linear, como autovalores, autovetores, matrizes, determinante e equação característica, para determinar um novo sistema referencial para que sua origem coincida com o centro da cônica, nos casos da hipérbole e elipse, ou com o vértice, no caso da parábola. Portanto, para essa questão precisamos de “ferramentas” presentes no modelo da geometria linear, que trataremos na próxima seção.

Antes de passarmos à próxima seção, retomamos a definição de cônica (parábola, elipse e hipérbole) por meio da excentricidade¹⁸, como visto no modelo da geometria sintética, para encontrarmos a equação reduzida da cônica. Isso nos fornece uma questão técnica que relaciona os modelos da geometria sintética e da geometria analítica, contribuindo com a resposta de nossa questão teórica desse modelo.

Q_{4MA} : Dados uma cônica e o valor de sua excentricidade, introduza um sistema de referência cartesiano adequado e determine a equação que o representa.

Para responder essa questão, usamos o resultado obtido no modelo da geometria sintética para a excentricidade $e = \frac{d(P,F)}{d(P,d)}$, isto é, a razão entre as medidas das distâncias $d(P,F)$, de um ponto $P(x,y)$ da curva a um dos seus focos, e $d(P,d)$, desse mesmo ponto à reta diretriz relacionada a esse foco. Diante disso, podemos definir uma cônica (parábola, elipse e hipérbole) como sendo o conjunto dos pontos do plano tal que $d(P,F) = e \cdot d(P,d)$, previamente dados o foco F e uma reta diretriz d . Para o caso da elipse, $0 < e < 1$, segundo Brannan, Esplen e Gray (2012), escolhemos um sistema referencial cartesiano de forma que um dos focos tenha coordenadas $(ae, 0)$, $a > 0$, e a reta diretriz com equação $x = \frac{a}{e}$, perpendicular ao eixo das abscissas passando pelo ponto $(\frac{a}{e}, 0)$, como mostra a figura 30.

Figura 30 - Elipse usando excentricidade



Fonte: Brannan, Esplen e Gray (2012, p. 14).

Sendo M o ponto de intersecção entre a reta diretriz e sua perpendicular que passa por $P(x,y)$, temos que a equação $d(P,F) = e \cdot d(P,d)$ pode ser escrita

¹⁸ Se que se $0 < e < 1$, temos uma elipse; $e = 1$, temos uma parábola e para $e > 1$, a cônica será uma hipérbole.

$d(P, F) = e \cdot d(P, M)$ ou, equivalentemente, $[d(P, F)]^2 = e^2 \cdot [d(P, M)]^2$, que por sua vez pode ser reescrita em termos de coordenadas com a definição usual de distância¹⁹

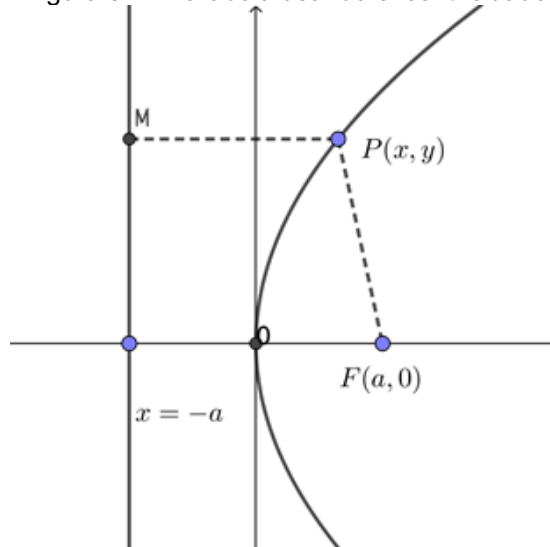
$$(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \Rightarrow (x - ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$$

Desenvolvendo algebricamente, encontramos

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2,$$

que nos permite escrever $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$ ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$, pois a excentricidade é diferente de zero para as cônicas consideradas neste trabalho. Considerando $b = a\sqrt{1 - e^2}$, isto é, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ e substituindo na última equação, teremos a equação (conhecida como equação reduzida) da elipse escrita como: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como observação temos que o outro foco da elipse é simétrico a F em relação à origem do sistema, portanto tem coordenadas $(-ae, 0)$, e a outra diretriz tem equação $x = -\frac{a}{e}$. Para o caso da hipérbole, a solução é análoga, exceto que, pelo fato da excentricidade $e > 1$, tomaremos $b = a\sqrt{e^2 - 1}$. A equação reduzida será $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Já para o caso da parábola, $e = 1$, consideramos um sistema referencial de coordenadas de modo que o foco F fique localizado sobre o ponto $(a, 0)$, $a > 0$ e a reta diretriz possua equação $x = -a$, como mostra a figura 31.

Figura 31 – Parábola usando excentricidade



Fonte: Brannan, Esplen e Gray (2012, p. 12).

¹⁹ $d(P, Q) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, para $P(x, y)$ e $Q(a, b)$ pontos quaisquer.

Segundo Brannan, Esplen e Gray (2012), tomando $P(x, y)$ um ponto arbitrário sobre a parábola e M como sendo o pé da reta perpendicular à diretriz $x = -a$ passando por P , como $e = 1$, segue que $d(F, P) = d(P, M)$, pela definição da parábola. Assim, $[d(F, P)]^2 = [d(P, M)]^2$ e novamente usando a definição usual de distância entre dois pontos, segue que: $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \Rightarrow$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$

que, simplificando, encontramos $y^2 = 4ax$, que chamamos de equação reduzida da parábola. Isso responde nossa quarta questão técnica desse modelo da geometria analítica e, finalmente, por meio das questões técnicas, conseguimos apresentar uma razão de ser para as cônicas dentro do modelo da geometria analítica, que é resolver problemas que envolvem somas e diferenças de distâncias (localização de pontos). Além disso, nossas questões técnicas permitiram uma integração entre tarefas dos dois modelos: geometria sintética e geometria analítica. Apresentamos um quadro com as questões desse modelo junto com as questões do modelo da geometria linear ao final da próxima subseção.

Assim, o próximo modelo a ser discutido será o modelo da geometria linear das cônicas ou M3.

3.2.3 O modelo da geometria linear

Nesta seção apresentamos o terceiro e último modelo desse MER, o modelo da geometria linear para as cônicas ou M3.

Em M3 as cônicas (parábola, elipse e hipérbole) são vistas como formas quadráticas no plano. Segundo Steinbruch e Winterle (1987, p. 323), uma forma quadrática é um polinômio homogêneo do 2º grau em duas variáveis que pode ser escrito como $p(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$, com a, b e c reais, com a e b não nulos e que pode ser associado à matriz dessa forma quadrática, ou seja, $M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, pois $p(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Como exemplo, consideremos a forma quadrática dada pelo polinômio $p(x, y) = 4x^2 + 24xy - 3y^2$, que pode ser escrito na forma $V^t A V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, para a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$, o vetor $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $V^t =$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ o vetor transposto de V . Em tempo, a equação dada por $\det(A - \lambda I) = 0$ é conhecida como equação característica. Essa equação sempre terá raízes reais, já

$$\text{que: } \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - \lambda)(C - \lambda) - \frac{B^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{B^2}{4} + AC = 0,$$

e o discriminante dessa última equação, dado por $\Delta = (A + C)^2 - 4\left(-\frac{B^2}{4} + AC\right) = A^2 + 2AC + C^2 + B^2 - 4AC = (A - C)^2 + B^2$, é sempre maior ou igual a zero para quaisquer números reais A, B e C .

Dada essa introdução, nos parece importante destacar que a proposta de que os modelos das geometrias sintética e analítica sejam complementares, no sentido de Gascón (2002), como foi feito para os dois modelos anteriores, permanece operante para o caso desse modelo da geometria linear. Assim, iniciamos este estudo com a questão teórica tratando dessa condição.

QT_{0ML} : Como poderíamos estender a complementaridade entre os modelos M1 e M2 (geometria sintética e analítica) para o modelo M3 (geometria linear)?

Para responder essa questão teórica, buscamos questões técnicas que possam ser enunciadas no modelo M2, mas que nele não são facilmente resolvidas, o que conduz à utilização da geometria linear. É o caso da questão Q_{1ML} .

Q_{1ML} : Dada a equação do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$, identifique a cônica que ela representa e esboce sua representação gráfica.

Vemos que a equação dada representa uma forma quadrática, pois podemos escrever a equação como um polinômio $p(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, com $p(x, y) = F$,

que pode ser representada matricialmente por $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ como a matriz da forma

quadrática. A técnica para responder a questão é encontrar os autovalores de M por meio da equação característica. A partir dos autovalores, podemos determinar qual a cônica representada pela equação e ainda, ao calcular os respectivos autovetores unitários, ficam determinados os eixos (rotacionados) do novo sistema referencial

$O'x'y'$. Com essas informações usamos os autovalores λ_1 e λ_2 para reescrever a equação da cônica (no novo sistema referencial) na forma $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = F$ (teremos uma hipérbole se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ e uma elipse quando $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$) ou $\lambda_1 x'^2 + qy' = F$ (uma parábola se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$). O cálculo algébrico permite então obter a representação da equação na forma reduzida, isto é, $\frac{x'^2}{\frac{F}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{F}{\lambda_2}} = 1$ ou $\frac{x'^2}{\frac{F}{\lambda_1}} - \frac{y'^2}{\frac{F}{\lambda_2}} = 1$ (para o caso de elipse ou hipérbole) e $x'^2 = \frac{F - qy'}{\lambda}$ ou $y'^2 = \frac{F - qx'}{\lambda}$ (para uma parábola). Assim, é possível identificar os focos, a distância focal, a excentricidade e esboçar sua representação gráfica.

Por outro lado, como a matriz $M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é simétrica, temos que também

será diagonalizável (pelo teorema Espectral²⁰), o que assegura que M é semelhante a uma matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, o que, por sua vez, significa que existe uma matriz invertível S , tal que $M = S^{-1}DS \Rightarrow SM = DS$. Se usarmos a propriedade de que o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes para a equação matricial $SM = DS$, temos que $\det(SM) = \det(DS) \Rightarrow \det(S) \cdot \det(M) = \det(D) \cdot \det(S)$. Entretanto, como $\det(S) \neq 0$ (pois S é invertível), ao dividirmos a última equação por $\det(S)$, encontramos que $\det(M) = \det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, o que nos atesta que podemos determinar qual cônica representa graficamente uma equação do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F$ apenas pelo sinal do determinante da matriz

$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, isto é:

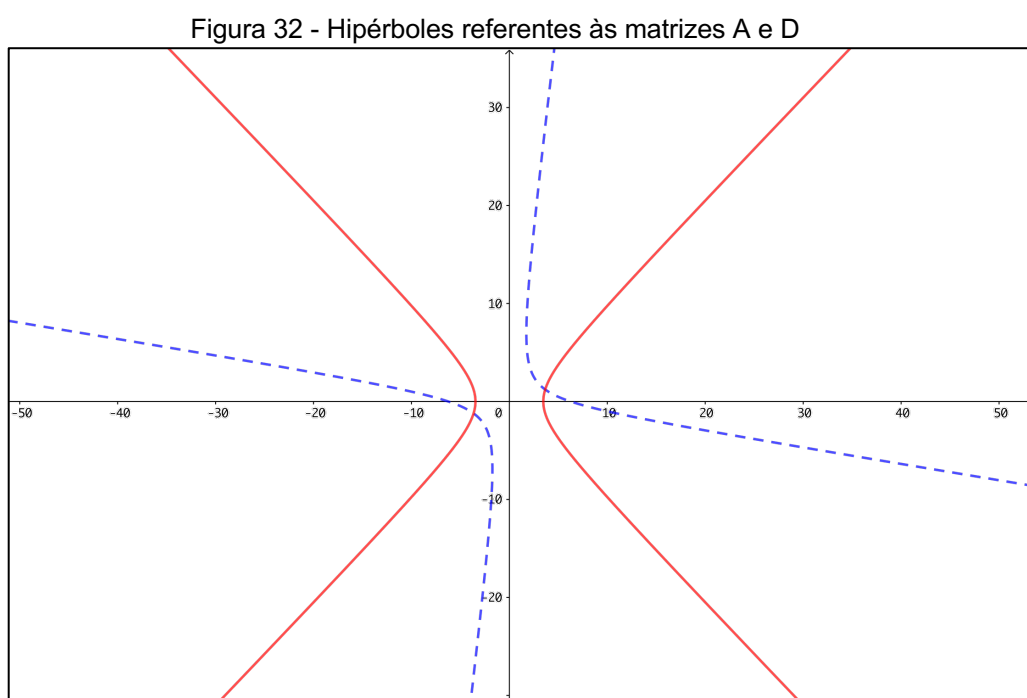
- (i) Se $\det M < 0$, a cônica será uma hipérbole;
- (ii) Se $\det M = 0$, a cônica será uma parábola;
- (iii) Se $\det M > 0$, a cônica será uma elipse.

Como um exemplo concreto, tomamos $4x^2 + 24xy - 3y^2 = 156$ ou, equivalentemente, $4x^2 + 24xy - 3y^2 - 156 = 0$ e vamos determinar qual sua

²⁰ Teorema Espectral: para todo operador simétrico $T: V \rightarrow V$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ formada por autovetores de T .

representação gráfica. Para isso, reescrevemos essa equação na forma matricial $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-156] = [1]$ e, como toda matriz simétrica, $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, ou seja, podemos escrever a matriz A como uma matriz diagonal do tipo $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ em um novo sistema referencial $Ox'y'$. Geometricamente, isso significa que a cônica representada por V^tAV será a mesma representada por W^tDW para $W = [x' \ y']$. No caso particular desse exemplo, temos que $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = -12$, e a equação será $13x'^2 - 12y'^2 - 156 = 0$, que é equivalente a $\frac{x'^2}{12} - \frac{y'^2}{13} = 1$ (hipérbole).

Na figura 32, vemos as representações gráficas de ambas as hipérboles, plotadas no GeoGebra, ambas no mesmo sistema referencial Oxy . Em azul temos a curva que representa os pontos que satisfazem a cônica associada à matriz da forma quadrática $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$ e em vermelho a curva para a matriz diagonalizada $D = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$, que é a mesma hipérbole, porém rotacionada.



Fonte: Produzida pelo autor.

Poderíamos também descobrir qual o tipo da cônica por meio de uma análise no sinal do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$, que é negativo (-156), o que confirma a hipérbole como sua representação gráfica.

Evidenciando ainda a passagem do modelo da geometria analítica para o modelo da geometria linear, retomamos a última questão deixada no modelo M2 para obter um caminho de resposta.

Q_{3MA}/Q_{2ML} : Dada a equação geral de uma cônica, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esboce uma representação gráfica que contenha todos os pontos do plano que satisfazem essa equação.

Para esboçar a representação gráfica solicitada, temos, primeiro, de reconhecer qual cônica está representada por essa equação. Para isso, notamos que os três primeiros membros, $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, formam uma forma quadrática no plano

e, portanto, pode ser representada matricialmente por: $[x \ y] \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Assim, como visto anteriormente, por meio do sinal do determinante da matriz

$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$, podemos identificar a cônica representada pela equação.

Além disso, os autovalores de M , λ_1 e λ_2 e seus respectivos autovetores unitários $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ possibilitam escrever a equação matricial $[x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [D \ E] \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [F] = 0$, que nos fornece a equação $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + p x' + q y' + F = 0$, escrita no sistema referencial $O'x'y'$, sem o termo misto xy , o que permite reduzir a equação geral.

Em seguida, por meio de uma nova mudança de variáveis, determinamos a equação na forma reduzida do tipo $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = T$ (no caso de elipse ou hipérbole) ou $\lambda_1 X^2 + qY = 0$ (no caso de uma parábola) e com isso podemos esboçar a representação gráfica solicitada na questão.

Como exemplo concreto para essa tarefa, buscaremos determinar a representação gráfica dos pontos que satisfazem a equação $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$.

Neste caso, o termo misto $2xy$ é responsável por uma rotação da curva (considerando o sistema referencial Oxy). Veremos que os termos $7\sqrt{2}x$ e $5\sqrt{2}y$

deslocam a cônica paralelamente aos eixos x e y (movimento de translação). Assim, temos de considerar para o estudo dessa equação os movimentos de rotação e translação, o que nos trará duas mudanças de variáveis, ou seja, duas trocas de sistema referencial.

Como já vimos, podemos escrever a equação $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$ na forma matricial $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [10] = [0]$. A matriz da forma quadrática é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e sua equação característica é dada por $\det(A - \lambda I) = 0$, que equivale a $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ou $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$, o que nos dá 3 e 1 como raízes da equação (característica) e, assim, a matriz A diagonalizada é dada por $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Seus respectivos autovetores, representantes dos eixos de rotação, são encontrados resolvendo o sistema $[A - \lambda I] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, para os autovalores $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$ e são $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Com isso somos capazes de reescrever a equação, que inicialmente estava no sistema referencial Oxy , para o sistema referencial $Ox'y'$, por meio do seguinte processo: $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [10] = [0] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [10] = [0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

Para chegarmos até a equação reduzida, faremos uma nova mudança de variável com o objetivo de eliminar os termos $12x'$ e $-2y'$. Para isso, agrupamos os termos na variável x' e y' e completamos quadrado.

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

$$(3x'^2 + 12x') + (y'^2 - 2y') = -10$$

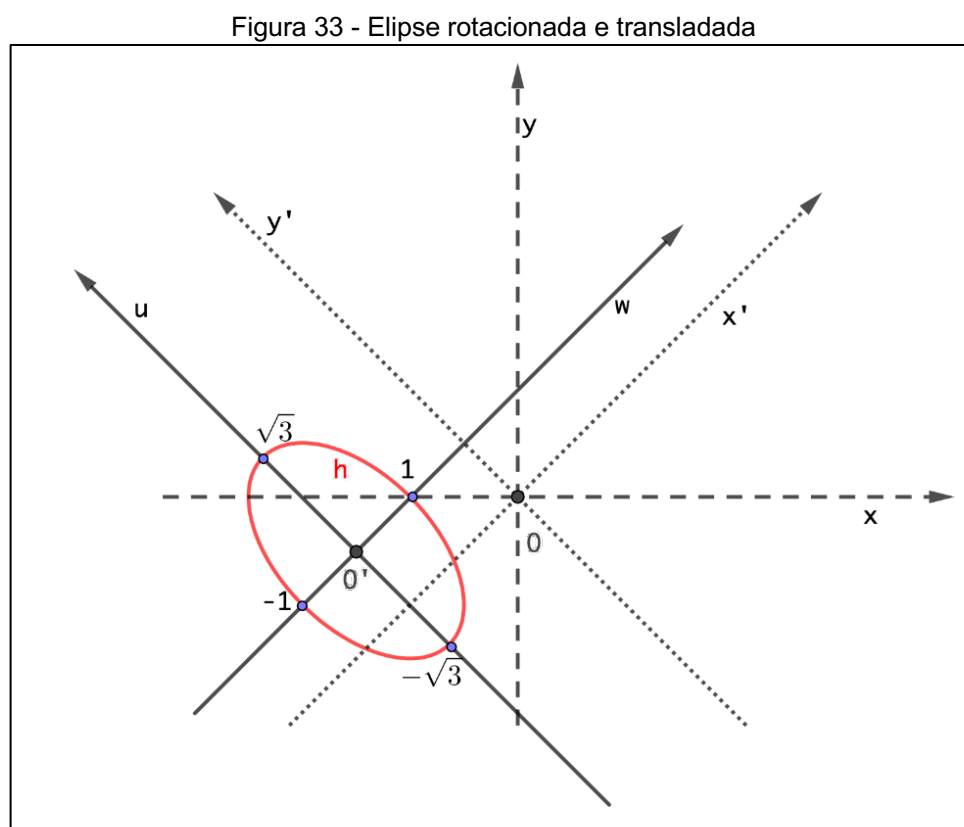
$$3(x'^2 + 4x') + (y'^2 - 2y') = -10$$

$$3(x'^2 + 4x' + 4) + (y'^2 - 2y' + 1) = 3$$

$$3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3$$

Fazendo a mudança de variável $w = x' + 2$ e $u = y' - 1$, isto é, mudando do sistema $Ox'y'$ para $O'wu$, temos a equação $3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3$, dada por $3w^2 + u^2 = 3 \Rightarrow \frac{w^2}{1} + \frac{u^2}{3} = 1$.

Essa última equação representa a elipse no sistema $O'wu$ com sua origem na posição $(-2,1)$ no sistema $Ox'y'$ (figura 33), seus eixos medem 2 e $2\sqrt{3}$ e os focos estão sobre o eixo u .

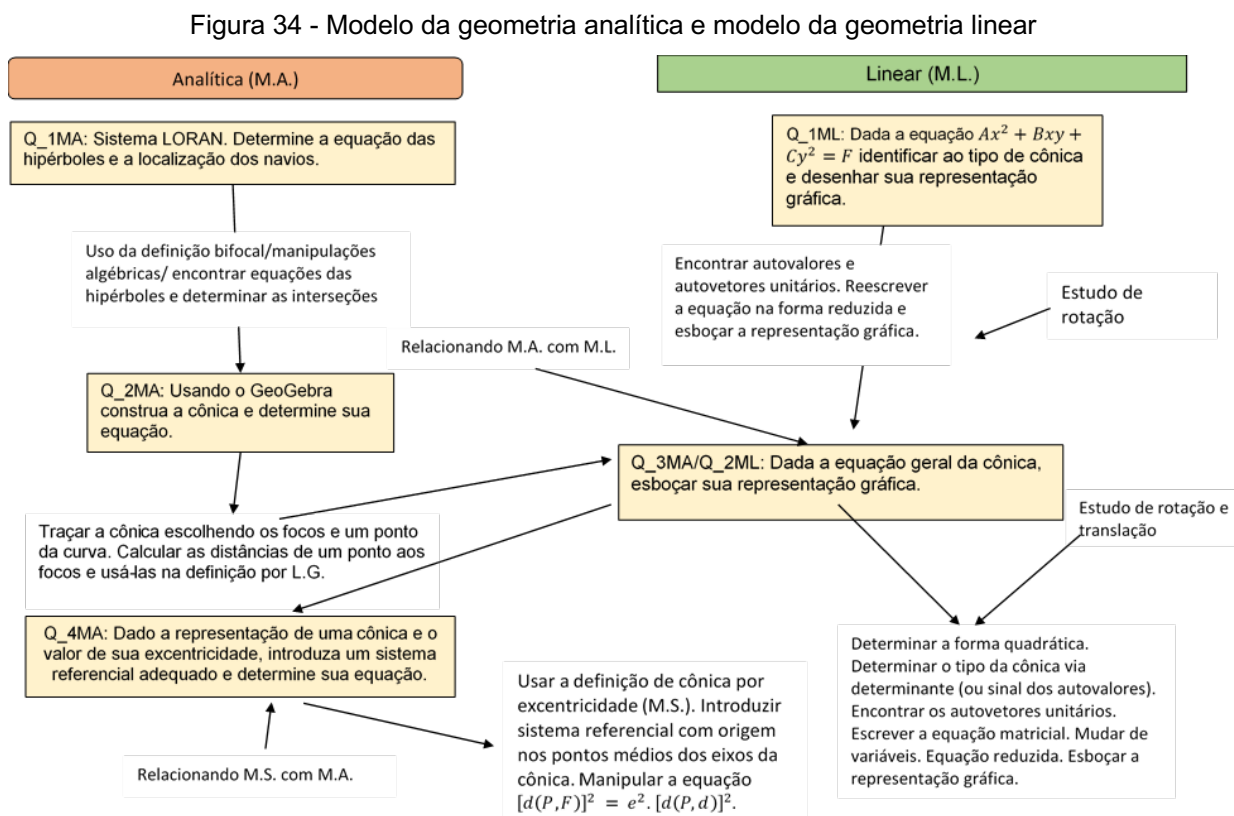


Fonte: Produzida pelo autor.

Ao final desse modelo da geometria linear, vimos que as duas questões técnicas aqui elaboradas permitiram explorar todos os elementos desse modelo M3: operação com matrizes, determinantes, autovalores, autovetores, equação característica, resolução de um sistema linear 2×2 e diagonalização de uma matriz 2×2 . Além disso, foi possível estender e complementar o modelo da geometria analítica por meio de um estudo completo da equação polinomial de grau dois em duas variáveis explorando casos de translação e rotação do gráfico de uma cônica, o que não foi possível ser feito em M2.

As questões apresentadas em cada modelo podem ser consideradas como praxeologias matemáticas pontuais que podem ser ampliadas com outras questões

para constituir praxeologias locais e que as três locais poderiam constituir uma praxeologia matemática regional para o ensino de cônicas no Ensino Básico. A figura 34 mostra um mapa com as questões técnicas (retângulos em amarelo) dos modelos da geometria analítica e da geometria linear.



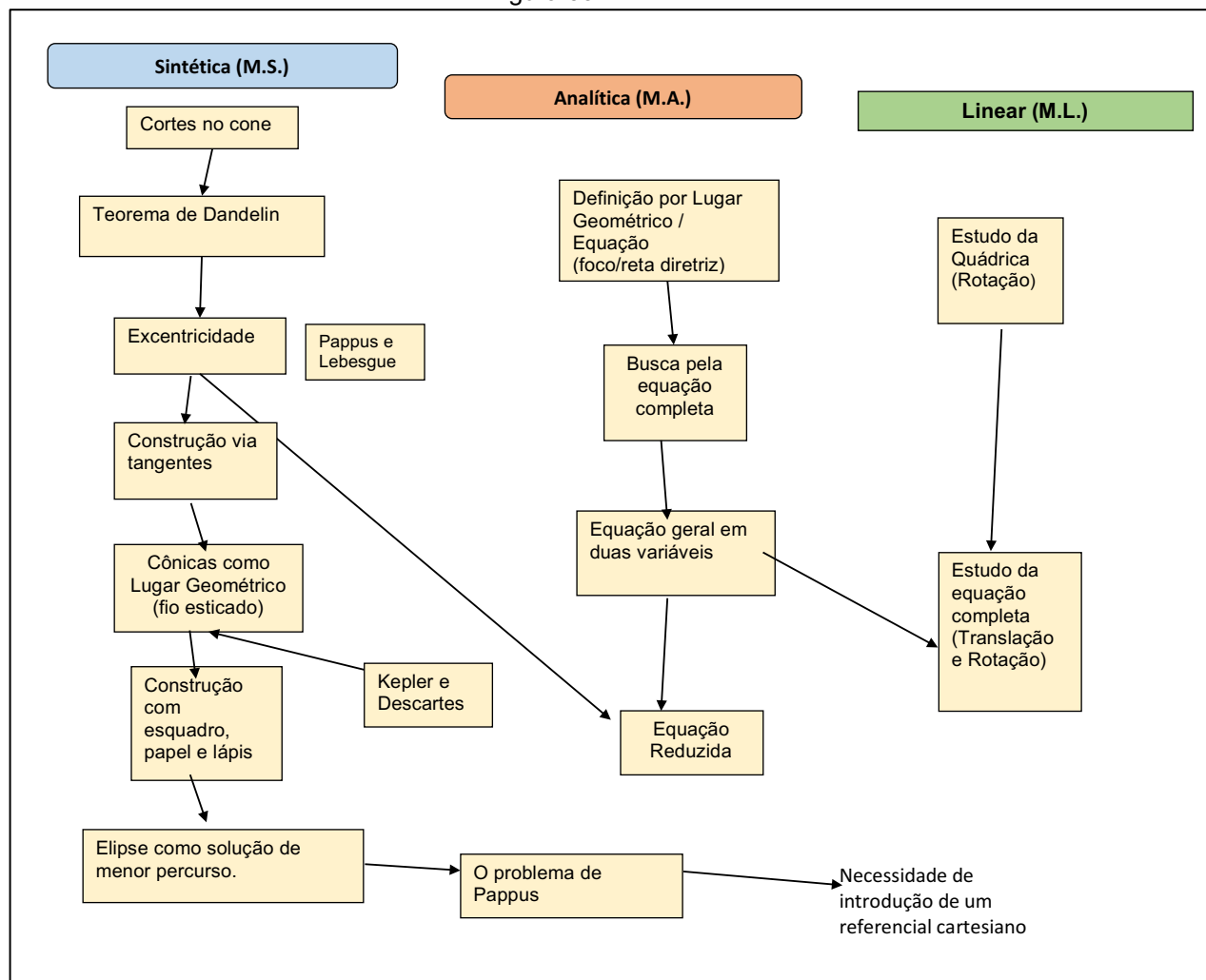
Fonte: Produzida pelo autor.

Nessa figura 34, vemos que a terceira questão do modelo da geometria analítica também será a trabalhada no modelo da geometria linear como segunda questão (Q_{3MA}/Q_{2ML}), pois se trata de uma tarefa para permitir a passagem entre esses modelos. O mesmo ocorre com a questão Q_{4MA} em relação aos modelos da geometria sintética e da geometria analítica.

Como já foi dito, esse Modelo Epistemológico de Referência serviu de parâmetro para a análise do Modelo Epistemológico Dominante, que, por sua vez, nos forneceu informações importantes para a construção do estudo exploratório (PEP). Analisamos quais modelos de geometria das cônicas aparecem em livros didáticos do Ensino Básico e como eles estão propostos nas ementas de cursos de licenciatura em Matemática, bem como se esses modelos estão ou não conectados. Esse MER também foi utilizado no desenho e durante o experimento da nossa formação inicial de professores (PEP-FP).

Em seguida, apresentamos, na figura 35, um esboço de como estão relacionados os três modelos do MER construído neste capítulo. Para uma melhor visualização da organização matemática encontrada nesse MER, optamos por descrever somente a matemática que foi trabalhada em cada questão técnica. Isso nos parece razoável, uma vez que tais questões (e suas respectivas respostas) já foram exibidas neste capítulo e se encontram nas figuras 26 e 34.

Figura 35 - MER



Fonte: Produção do autor.

Os modelos das geometrias (sintética, analítica e linear), organizados nessa figura 35, estão separados em colunas, com setas informando como esses conteúdos surgiram cronologicamente durante suas construções. Além disso, há setas que apontam quais conteúdos forneceram questões/tarefas que não foram resolvidas nos mesmos modelos em que foram enunciadas, como é o caso da “equação geral em duas variáveis” (modelo da geometria analítica), que só pode ser discutida de forma completa com ferramentas contidas no modelo da geometria linear; também temos o

“problema de Pappus”, que, embora enunciado no modelo da geometria sintética, necessitou da introdução de um sistema referencial para sua resolução. Há ainda setas que mostram como se relacionam esses modelos os tornando complementares, como é o caso da seta entre os conteúdos de “excentricidade” (modelo da geometria sintética) e “equação reduzida” (modelo da geometria analítica); neste caso, usamos a definição de excentricidade apresentada em M1 para determinarmos a equação reduzida para as cônicas em M2.

No próximo capítulo, apresentamos e analisamos o Modelo Epistemológico Dominante para as cônicas dos estados de São Paulo e Sergipe.

4 Modelo Epistemológico Dominante

Neste capítulo, apresentamos os estudos que permitiram construir o Modelo Dominante para o ensino de cônicas nos estados de São Paulo e Sergipe tendo como referência o MER já construído. Assim, apresentamos, na primeira seção, as cônicas no currículo e nos cadernos do estado de São Paulo; na segunda, as cônicas nos livros didáticos adotados pela rede estadual de Sergipe e, na terceira, as cônicas em cursos de licenciatura em Matemática brasileiros.

Segundo Paques e Sebastiani Ferreira (2011), que analisaram como as cônicas estão presentes nos livros textos mais adotados nas principais escolas oficiais brasileiras desde o século XVIII até o século XXI, esse conteúdo aparece e desaparece na história da educação brasileira, e isso “depende do momento político e também pelo belo prazer das editoras” (PAQUES; SEBASTIANI FERREIRA, 2011, p. 18). Os autores identificaram que, durante o período analisado – que contempla toda a história da educação no Brasil –, as abordagens para as cônicas ficam variando entre: cônica como lugar geométrico, como seção de um cone, como gráfico de funções e na geometria analítica. Os estudos realizados neste capítulo baseiam-se nos resultados apresentados por esses autores quando vimos que cônicas é um objeto matemático que está presente em vários contextos/geometrias. Agora queremos saber se esses contextos são os mesmos quando comparamos o que está posto no Ensino Básico e na formação inicial de professores. Por parte do Ensino Básico, analisamos livros didáticos dos Ensinos Fundamental II e Médio usados nesses estados. Para o ensino universitário, foram consultadas as ementas das disciplinas oferecidas por cursos de licenciatura em Matemática das universidades UNICAMP, USP, UNESP e UFS.

4.1 As cônicas no Currículo e nos Cadernos do Estado de São Paulo

Nesta seção, analisamos o material utilizado por professores e alunos da rede estadual de São Paulo para contribuir na construção do Modelo Epistemológico Dominante (MED). Escolhemos esse estado por ser onde se encontra a PUC-SP. Esse material, chamado de cadernos, tem versão para alunos e professores com todos os conteúdos que devem ser trabalhados a cada bimestre. Como, de certa

forma, ele substitui o livro didático, não analisamos os possíveis livros utilizados por essa rede.

O Caderno do Professor que analisamos foi usado, entre os anos de 2014 a 2017, em todas as escolas da rede estadual e foi criado pelo programa “São Paulo Faz Escola” para servir de apoio ao professor durante suas aulas de matemática, com a sugestão de que o docente complemente o conteúdo de acordo com a realidade e as necessidades de sua escola e de seus alunos. Com quatro volumes para cada ano/série – um volume para cada bimestre²¹ –, esse material foi desenvolvido para todos os quatro anos do Ensino Fundamental II (alunos entre 11 e 14 anos) e as três séries do Ensino Médio (alunos entre 15 e 17 anos). Os 28 volumes tiveram como base para sua construção o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias do ano de 2011, que descreve as funções do professor como aquele que:

apresenta e explica conteúdos, organiza situações para a aprendizagem de conceitos, de métodos, de formas de agir e pensar, em suma, promove conhecimentos que possam ser mobilizados em competências e habilidades que, por sua vez, instrumentalizam os alunos para enfrentar os problemas do mundo. (SÃO PAULO, 2011, p. 18).

O documento valoriza uma “educação para a vida”, que considera tanto as diretrizes e orientações nacionais como também o mundo contemporâneo, de tal forma que a escola deve preparar o aluno para viver em uma sociedade em que a informação é constantemente atualizada e esclarece que “essa preparação não exige maior quantidade de ensino (ou de conteúdos), mas sim melhor qualidade de aprendizagem” (SÃO PAULO, 2011, p. 18).

Quando pesquisamos no material destinado ao Ensino Fundamental II, a parábola e a hipérbole são tratadas no caderno da 8ª série (ou atual 9º ano, estudantes de 14 anos) na “Situação de Aprendizagem 4. Representação Gráfica de Grandezas Proporcionais e de Algumas Não Proporcionais”. As instruções a respeito de conteúdo, competências, habilidades e estratégias para essa situação são assim descritas:

Conteúdos e temas: representação gráfica de grandezas direta e inversamente proporcionais e de grandezas que não são proporcionais; representação gráfica de diversos tipos de relações de interdependência lineares e não lineares; problemas de máximo e mínimo que envolvem funções quadráticas.

²¹ No Brasil, o ano letivo no ensino básico é dividido em quatro bimestres.

Competências e habilidades: compreender situações que envolvam proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade; expressar graficamente situações de interdependência entre grandezas.

Estratégias: exploração de diversos tipos de interdependência entre grandezas; enfrentamento de situações-problema envolvendo construção e análise de gráficos. (SÃO PAULO, 2014b, p. 49).

Nesse material a hipérbole é definida como os pontos do plano que satisfazem uma equação do tipo $xy = k$, $x, y, k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, partindo de uma tarefa que apresenta duas grandezas inversamente proporcionais e solicita a representação gráfica que mostra a relação entre essas grandezas.

A parábola aparece como o gráfico de uma função polinomial do segundo grau em uma variável real com tarefas que solicitam o esboço do gráfico ou a determinação do ponto de máximo ou de mínimo.

Não há outra menção às cônicas nos cadernos desse nível de ensino, e o apresentado no Caderno do Professor restringe o estudo da parábola e da hipérbole à geometria analítica, associadas a equações ou funções, isto é, essas cônicas não vivem como objetos matemáticos e tampouco são chamadas de cônicas.

Já nos cadernos trabalhados no Ensino Médio, as cônicas estão presentes no 1º e 3º anos. No 1º ano, encontramos a hipérbole no caderno destinado ao segundo bimestre, na “Situação de Aprendizagem 1. Funções como Relações de Interdependência: Múltiplos Exemplos”, com as seguintes orientações:

Conteúdos e temas: interdependência entre grandezas; proporcionalidade direta e inversas; funções: variável dependente e variável independente; exemplos diversos.

Competências e habilidades: compreender a ideia de proporcionalidade direta e inversa como relações de interdependência; expressar a interdependência entre grandezas por meio de funções; contextualizar a ideia de função e enfrentar situações-problema relativas ao tema.

Estratégias: utilização de diversas linguagens para traduzir a ideia de função (gráficos, tabelas, expressões algébricas, etc.); exercícios referentes a situações-problema em diferentes contextos, envolvendo a ideia de função. (SÃO PAULO, 2014c, p. 11).

Nessa situação a hipérbole é apresentada como o gráfico de uma função que relaciona grandezas inversamente proporcionais em apenas duas tarefas que solicitam o gráfico de tal tipo de função.

Já a parábola pode ser vista em dezenas de gráficos de funções polinomiais do segundo grau nas Situações de Aprendizagem 3 e 4, respectivamente denominadas “Funções de 2º grau: Significado, Gráficos, Intersecções com os Eixos, Vértices, Sinais” e “Problemas Envolvendo Funções de 2º grau em Múltiplos

Contextos: Problemas de Máximos e Mínimos”. Acompanham a primeira situação as seguintes orientações:

Conteúdos e temas: proporcionalidade direta com o quadrado da variável independente: função de 2º grau – Vértice, raízes, sinais.

Competências e habilidades: compreender a função do 2º grau como expressão de uma proporcionalidade direta com o quadrado da variável independente: expressar por meio de gráficos tal proporcionalidade.

Estratégias: apresentação construtiva do significado e das propriedades da função do 2º grau; exploração de exemplos ilustrativos e de exercícios exemplares envolvendo funções do 2º grau para serem explorados pelo professor. (SÃO PAULO, 2014c, p. 28).

Para a Situação de Aprendizagem 4, as orientações são:

Conteúdos e temas: problemas envolvendo equações, inequações e funções de 2º grau em diferentes contextos; problemas envolvendo máximos ou mínimos de funções do 2º grau.

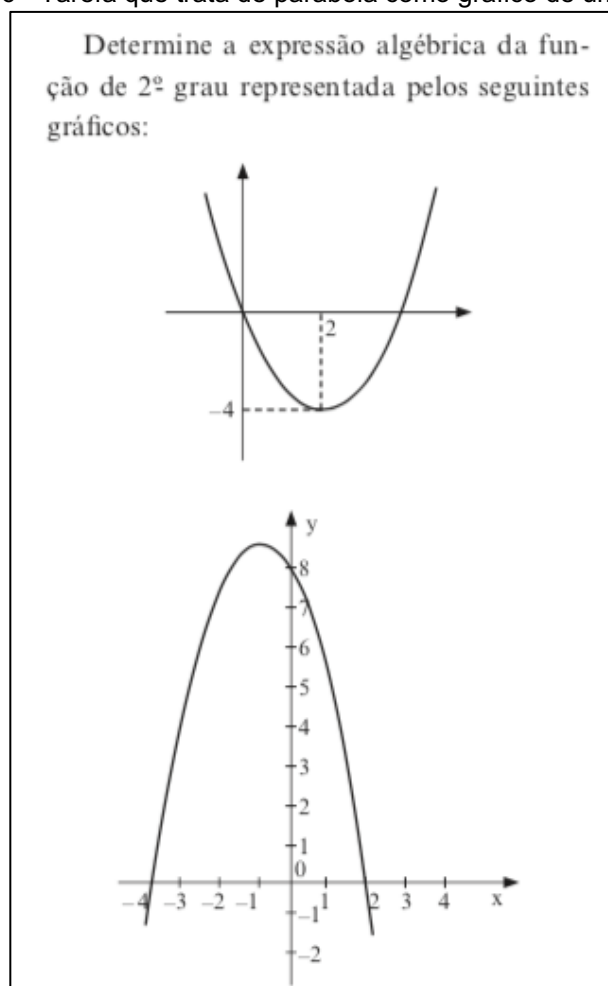
Competências e habilidades: compreender fenômenos que envolvem a proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra, traduzindo tal relação na linguagem matemática das funções; equacionar e resolver problemas que envolvem funções de 2º grau, particularmente os que envolvem otimizações (máximos ou mínimos).

Estratégias: apresentação de exemplos ilustrativos e de exercícios exemplares envolvendo grande parte dos conteúdos estudados na Situação de Aprendizagem 3, sobre equações, inequações e funções do 2º grau, para serem explorados pelo professor. (SÃO PAULO, 2014c, p. 51).

Nas tarefas da Situação de Aprendizagem 3, são trabalhadas relações entre a representação gráfica da parábola e a representação algébrica da função dada, mais especificamente, se mostram gráficos transladados, eixo de simetria, abertura da parábola, concavidade, zeros da função e localização do vértice, isto é, o estudo do gráfico de uma função polinomial do segundo grau. As tarefas estão divididas em dois tipos: dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, esboce o gráfico, ou o caso inverso, em que se dá o gráfico e se pede a expressão algébrica da função, como apresentamos na figura 36.

O enunciado desse exercício refere-se à “função de 2º grau representada pelos gráficos” e apresenta duas parábolas. Como já dito anteriormente, o Caderno possui dezenas de exercícios como esse, sempre associando a função polinomial de segundo grau com a parábola. A hipérbole também aparece entre as tarefas, mas como relacionada a alguma expressão matemática de grau dois. Já a elipse nem sequer é citada. Essa observação reforça nossa hipótese de que as cônicas são reduzidas à parábola.

Figura 36 - Tarefa que trata de parábola como gráfico de uma função



Fonte: São Paulo (2014c, p. 43).

As tarefas da Situação de Aprendizagem 4, última desse volume, seguem um único modelo: dada uma atividade inserida em um contexto extramatemático em que se relacionam duas grandezas, encontrar a expressão da função que determina essa relação, esboçar seu gráfico e determinar o ponto de máximo (ou de mínimo).

Por fim, concluímos que o conteúdo de cônicas proposto pelo Caderno do Professor da 1ª série do Ensino Médio trata somente de situações no modelo da geometria analítica, nada apresenta a respeito de elipse e trata da hipérbole em poucas tarefas. A parábola é predominante nas duas últimas Situações de Aprendizagem.

A palavra “cônica” só foi encontrada no Caderno do Professor do volume 1 da 3ª série do Ensino Médio, na situação de aprendizagem 4, nomeada de “Circunferências e Cônicas: Significados, Equações, Aplicações”. No início há, como nas situações anteriores, orientações e estratégias:

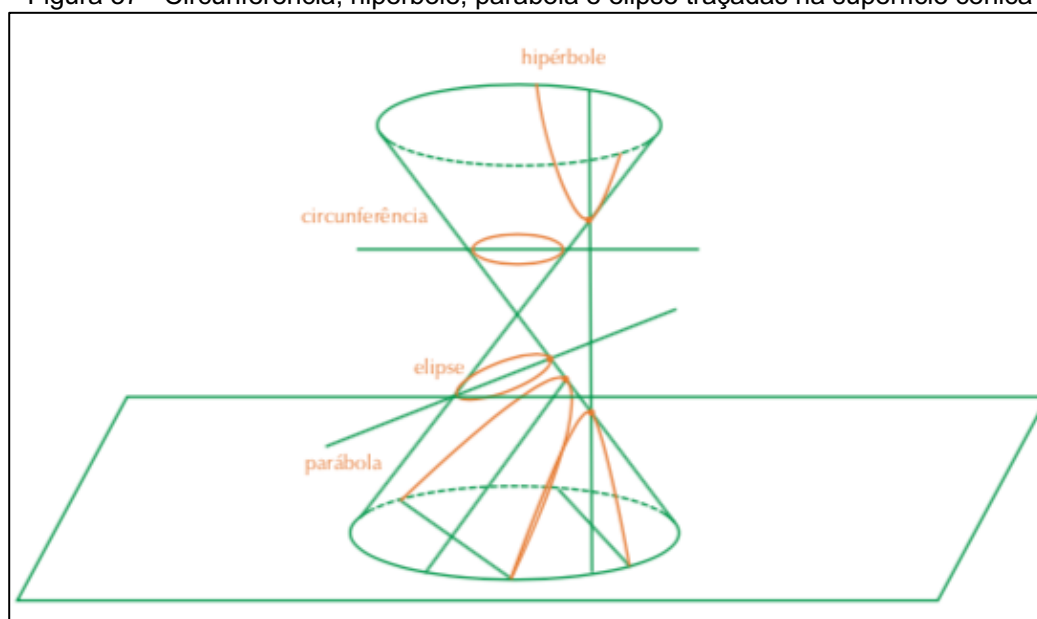
Conteúdos e temas: caracterização da circunferência e das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) por meio de propriedades; equações da circunferência e das cônicas em situações simples, com centro na origem; utilização das equações das circunferências e das cônicas em diferentes contextos.

Competências e habilidades: capacidade de expressar por meio de linguagem algébrica as propriedades características de curvas muito frequentes na natureza, como as circunferências e as cônicas; capacidade de reconhecer em diferentes contextos, a presença das circunferências e das cônicas, expressas por meio de suas equações; capacidade de lidar com as equações das circunferências e das cônicas para resolver problemas simples em diferentes contextos.

Sugestão de estratégias: apresentação de um conjunto de situações em que as circunferências e as cônicas estão presentes, explorando suas propriedades tendo em vista a representação de tais curvas por meio de equações; apresentação de alguns exercícios exemplares, para sinalizar aos professores os principais centros de interesses dos temas estudados. (SÃO PAULO, 2014a, p. 43).

A circunferência e as três cônicas (elipse, hipérbole e parábola) são apresentadas como curvas geradas por seções de uma superfície cônica, como se mostra na figura 37, para em seguida ser iniciado um estudo analítico da circunferência com o objetivo de encontrar sua equação. No entanto, não mostra como essas curvas representadas no contexto da geometria espacial são levadas ao plano cartesiano, tampouco os processos para localizar, na superfície cônica, os elementos das cônicas (focos, reta diretriz, eixo focal, excentricidade), como é proposto no MER desenvolvido no capítulo anterior.

Figura 37 - Circunferência, hipérbole, parábola e elipse traçadas na superfície cônica



Fonte: São Paulo (2014a, p. 43).

Assim como a circunferência, a elipse, a hipérbole e a parábola são imediatamente inseridas, não simultaneamente, em um plano com eixos cartesianos

para encontrar suas respectivas equações reduzidas. No caso da elipse, o Caderno apresenta sua propriedade bifocal “ $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ igual a uma constante”, que não é utilizada para determinar sua equação, pois esta é determinada a partir da ideia de que uma elipse é uma “circunferência achatada”, como podemos ver na figura 38.

Figura 38 - Elipse como circunferência achatada

Usando o fato de que a elipse é uma circunferência “achatada”, ou seja, é a curva obtida quando reduzimos (ou ampliamos) na mesma proporção todas as cordas perpendiculares a um diâmetro dado, mostrar que a equação da elipse de centro na origem e com os semieixos a e b é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fonte: São Paulo (2014a, p. 47).

Dessa forma, a elipse passa a ser classificada como um “tipo de circunferência”, perdendo-se assim qualquer possibilidade de complementaridade entre as geometrias sintética e analítica (modelos M1 e M2 do MER). A equação da hipérbole também não é determinada a partir de sua propriedade bifocal, sendo construída a partir de relações entre grandezas inversamente proporcionais, ou seja, de forma puramente analítica. A parábola é a única que tem a equação determinada com base nas distâncias de um ponto ao foco e à reta diretriz.

As tarefas apresentadas para essa Situação de Aprendizagem, para as três cônicas, podem ser classificadas em dois tipos, já trabalhados em uma quantidade razoável nos volumes analisados anteriormente. No primeiro tipo, é dada a representação gráfica e se pede a equação da cônica e algum de seus elementos. No segundo tipo, são dados alguns elementos da cônica e é solicitada sua representação gráfica.

Por último, as cônicas também são estudadas no caderno dedicado ao terceiro bimestre da terceira série do Ensino Médio, em que é apresentado um panorama das funções já trabalhadas, sendo a parábola e a hipérbole as únicas cônicas citadas. A parábola é encontrada nos exercícios em que se solicitam o gráfico e o valor máximo ou mínimo de uma função polinomial do segundo grau, enquanto a

palavra “hipérbole” só é citada uma vez como o nome da curva que representa o gráfico da função “ $y = \frac{k}{x}$, com k constante, $k \neq 0$ ” (SÃO PAULO, 2014d, p. 13).

Como conclusão da análise do material usado no Ensino Básico do estado de São Paulo, temos que as cônicas são abordadas somente pelo modelo M2 (geometria analítica) do nosso MER. Há, pontualmente, expressões ou figuras que remetem ao modelo M1 (geometria sintética) sem profundidade e sem qualquer discussão. Além disso, a parábola é a cônica mais citada, pois é trabalhada no Ensino Fundamental e também na 1ª série do Ensino Médio, sempre como gráfico de uma função polinomial de segundo grau ou como os pontos do plano cartesiano que satisfazem determinada equação polinomial do segundo grau; no entanto, a parábola e a hipérbole não são tratadas como cônicas quando surgem nos volumes do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, somente aparecem como nomes das curvas, sem nenhuma explicação. Nada foi encontrado referente ao modelo M3 (geometria linear).

Em São Paulo (2014a), no volume usado no primeiro bimestre da 3ª série do Ensino Médio, em que a proposta é o estudo das cônicas e da circunferência, a elipse é chamada de “circunferência achatada” e tem sua equação determinada com base nessa ideia. A hipérbole continua sendo tratada como a curva que representa os pontos da função relacionando grandezas inversamente proporcionais e tem sua equação determinada por meio de manipulações matemáticas que partem dessa concepção. Já a equação da parábola é apresentada por “ $y = kx^2, k \neq 0, k$ constante” ao lado de seu gráfico no plano cartesiano, e, segundo esse Caderno, seu gráfico é a representação dos “pares (x, y) de grandezas tais que y é diretamente proporcional ao quadrado de x ” (SÃO PAULO, 2014a, p. 54).

As cônicas também são pouco discutidas em contextos não matemáticos. O que encontramos em São Paulo (2014a) são somente indicações de onde podem ser encontradas algumas de suas aplicações, mas não se faz nenhuma discussão mais avançada a respeito das propriedades ou dos elementos usados nessas aplicações, ou seja, o estudante não encontra nenhuma razão para estudar esse conteúdo além da construção de conhecimento matemático.

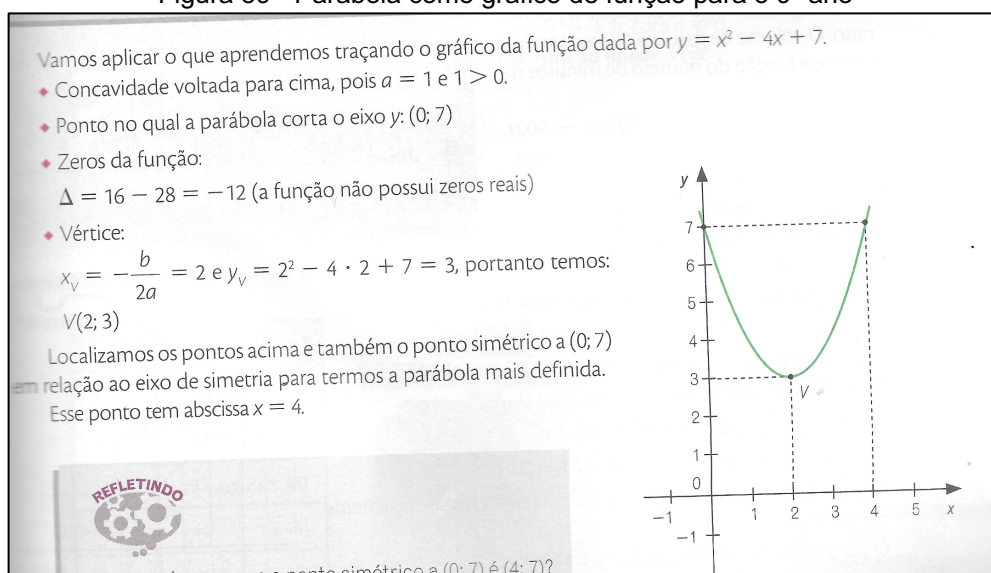
A seguir, analisamos livros adotados pela rede estadual de Sergipe/Brasil, local em que foram aplicados tanto o estudo exploratório (PEP) quanto a formação inicial com alunos de licenciatura em Matemática baseada no PEP-FP.

4.2 As cônicas nos livros didáticos adotados pela rede estadual de Sergipe

Nesta seção, apresentaremos o que há a respeito de cônicas em duas coleções de livros didáticos de matemática adotados pela rede estadual de Sergipe. Os livros foram emprestados pela Escola Estadual Professor Nestor Carvalho de Lima, que fica no município de Itabaiana/SE, e todos eram “o livro do professor”. Tivemos acesso às coleções usadas pelos professores e alunos dos Ensinos Fundamental II e Médio dessa escola. Escolhemos essa escola por termos um contato direto com um professor de matemática com cargo efetivo nessa instituição de ensino.

A coleção “Praticando Matemática”, trabalhada nos quatro anos do Ensino Fundamental II, só apresenta cônicas por meio da parábola no livro dedicado ao 9º ano desse nível. A cônica é vista na unidade 4, chamada “funções”, como o gráfico de uma função polinomial do segundo grau de uma variável com domínio real. A figura 39 apresenta um resumo do que é trabalhado a respeito da parábola: pontos de intersecção com os eixos x e y ; como encontrar as coordenadas do vértice; concavidade e eixo de simetria. Não encontramos nenhuma cônica trabalhada em nenhum contexto diferente do analítico.

Figura 39 - Parábola como gráfico de função para o 9º ano

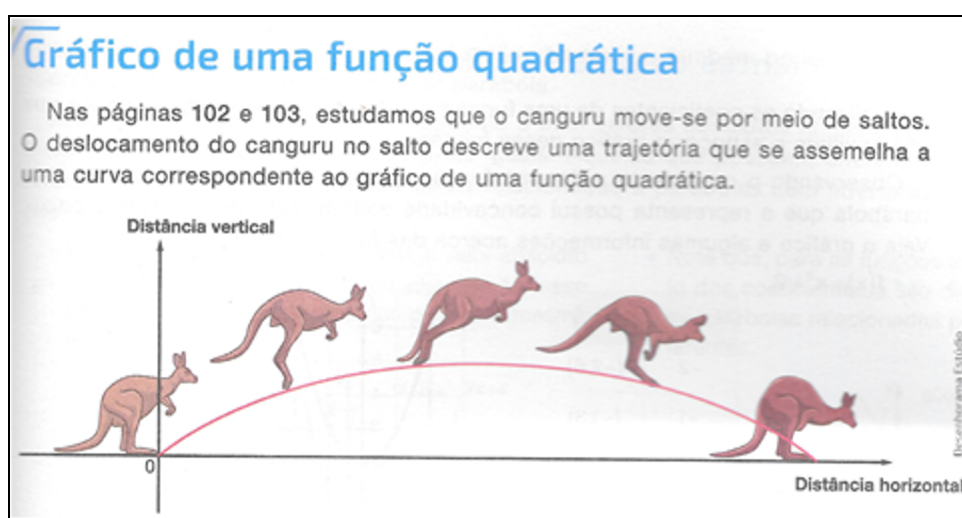


Fonte: Andrini e Vasconcellos (2015, p. 121).

Quanto aos livros dedicados ao Ensino Médio, a coleção “#Contato Matemática” – aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) para os anos de 2018, 2019 e 2020 – apresenta a parábola em seu exemplar destinado ao 1º ano. Souza e Garcia (2016a) tratam essa cônica como o gráfico de

uma função polinomial de grau dois e como ferramenta para a resolução de inequações do 2º grau, sem explicar como surgiu a parábola e tampouco apresentam algum exemplo em que a cônica esteja desvinculada do sistema referencial cartesiano. A figura 40 é um exemplo disso e mostra como os autores usam a trajetória da curva realizada pelo salto de um canguru como sendo semelhante ao gráfico de uma função quadrática.

Figura 40 - Introdução ao gráfico de uma função quadrática para o 1º ano do Ensino Médio



Fonte: Souza e Garcia (2016a, p. 107).

Em todo o capítulo, a abordagem é analítica, e a diferença para o que está proposto no livro do 9º ano do Ensino Fundamental é a quantidade de exemplos e exercícios deixados para o estudante. Nesse exemplar para o 1º ano do Ensino Médio, os autores apresentam muito mais exercícios e problemas envolvendo máximos e mínimos de uma função polinomial do segundo grau. Os tipos de questões encontrados são: 1. Determinar a lei da função quadrática correspondente ao gráfico dado; 2. Dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e seu gráfico, discuta os valores (ou sinais) dos parâmetros a, b e c ; 3. Determine os zeros (raízes) da função quando existirem; 4. Dados os zeros de uma função quadrática e um de seus parâmetros, escreva sua lei; 5. Determine o vértice e, conseqüentemente, o valor máximo (ou mínimo) da função quadrática dada; 6. Estude o sinal da função quadrática em todo seu domínio e esboce seu gráfico; 7. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação do 2º grau.

É importante destacar como os autores identificam a parábola à expressão algébrica de uma equação ou função polinomial de grau dois. Vejamos o exercício 36, exibido na figura 41, que os autores escrevem “o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ ”. Já no exercício seguinte, 37, a parábola é “de uma função quadrática f ”.

Figura 41 - Exercícios sobre parábola para o 1º ano do Ensino Médio

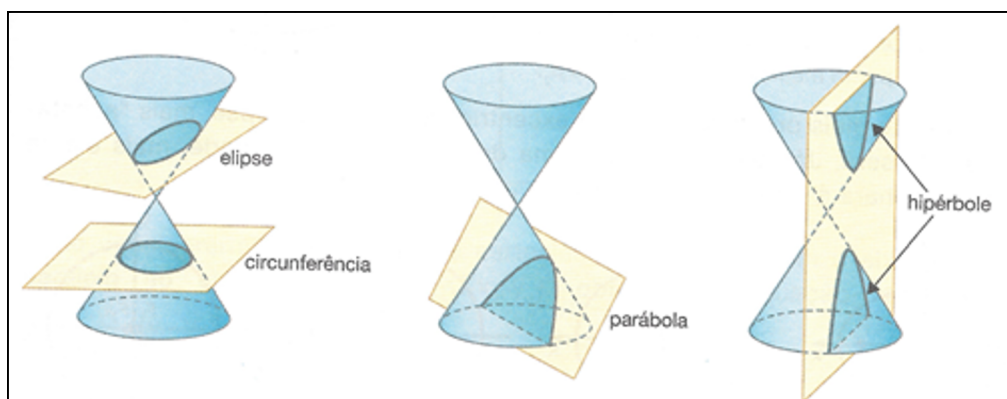
- 36.** (UFPA-PA) O vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto de coordenadas $(-2, 3)$. Sabendo que 5 é a ordenada onde a curva corta o eixo vertical, podemos afirmar que: **d**
- a)** $a > 1$, $b < 1$ e $c < 4$ **d)** $a < 1$, $b > 1$ e $c > 4$
b) $a > 2$, $b > 3$ e $c > 4$ **e)** $a < 1$, $b < 1$ e $c < 4$
c) $a < 1$, $b < 1$ e $c > 4$
- 37.** Sabendo que a reta da equação $y = 8$ tangencia o vértice da parábola de uma função quadrática f e que os zeros dessa função são -1 e 3 , determine a lei de formação da função f .

Fonte: Souza e Garcia (2016a, p. 123).

Essa forma de tratar a parábola, sempre associada à equação ou função polinomial de grau dois, junto ao fato de que os livros didáticos não apresentam outra cônica durante todo o Ensino Fundamental e também no primeiro ano do Ensino Médio, reforça nossa hipótese de que as cônicas são reduzidas à parábola e de que a geometria é reduzida à geometria analítica.

A palavra “cônicas” só pode ser encontrada nessa coleção se olharmos no exemplar dedicado ao 3º ano do Ensino Médio. Nesse livro esse objeto faz parte do capítulo 3, chamado “A circunferência e as cônicas”, e os autores apresentam as três cônicas por meio de um breve parágrafo citando contribuições de Apolônio em sua obra *Seções Cônicas*, seguido da figura 42, que mostra três cones duplos interceptados por planos formando a circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

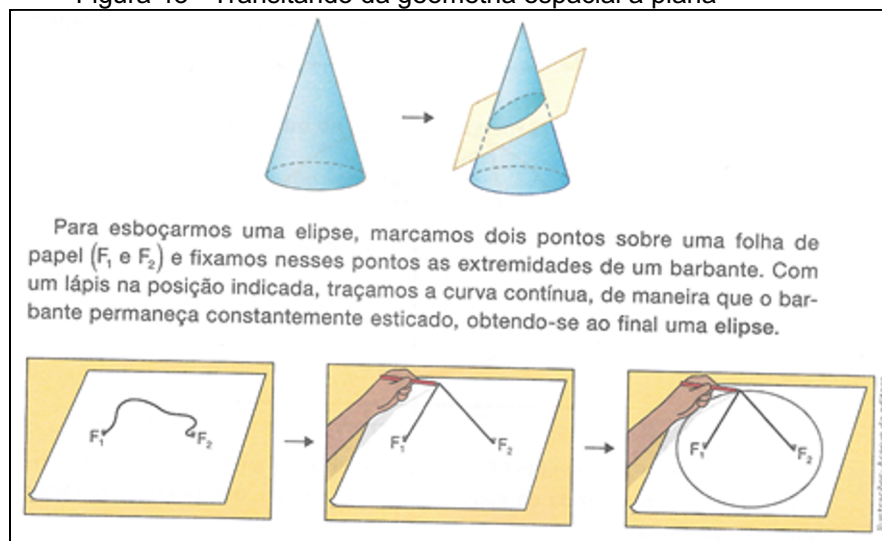
Figura 42 - Cônicas determinadas por cortes no cone



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 89).

Logo em seguida, os autores definem elipse como a seção cônica obtida pela intersecção entre um plano e a superfície de um cone, desde que o plano seja concorrente a todas as geratrizes do cone e não paralelo à sua base. Após isso, se encontra a construção dessa cônica em uma cartolina usando barbante e dois pregos, usando a noção de lugar geométrico e a soma constante das distâncias entre dois focos, como vemos na figura 43.

Figura 43 - Transitando da geometria espacial à plana



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 89).

Notamos que, após apresentarem as cônicas no contexto da geometria espacial por meio de cortes em um cone, os autores passam a trabalhar com esse objeto no plano e os cones de Apolônio não são mais usados, nem sequer para mostrar a origem do nome “cônicas”. Souza e Garcia (2016b) trabalham individualmente cada uma das três cônicas, elipse, hipérbole e parábola, nessa ordem, seguindo o mesmo roteiro para todas: cortes no cone, construção em uma cartolina usando barbante e pregos, apresentação de seus elementos (focos, centro, eixos, excentricidade) e de suas equações reduzidas, tanto para a cônica desenhada com seu centro (ou vértice, no caso da parábola) sobre a origem do sistema, como também para casos em que seu centro (ou vértice) está deslocado (transladado).

Essa transição repentina da geometria para a geometria analítica ocorre da mesma forma que da geometria espacial para a plana, sem qualquer discussão por parte dos autores, sem apontar alguma necessidade ou algum motivo.

As tarefas propostas para serem resolvidas como atividades em classe podem ser classificadas em três tipos. O primeiro tipo é construir a representação gráfica da cônica sabendo sua equação reduzida ou conhecendo alguns elementos, como os

focos, o comprimento de seus eixos, seu centro etc. A técnica usada é manipular os dados fornecidos pelo enunciado para encontrar os pontos que faltam entre focos, extremidades dos eixos maior e menor e o centro para depois traçar a curva. Caso a equação não seja fornecida já na forma reduzida, o aluno deverá completar o quadrado como passo inicial.

O segundo tipo pode ser visto como o processo oposto ao primeiro, ou seja, encontrar a equação da cônica uma vez conhecidas sua representação gráfica e as coordenadas dos focos, ou o centro e o comprimento de um dos eixos etc. A técnica apresentada é usar os elementos fornecidos pela curva e manipulá-los algebricamente até encontrar os comprimentos dos eixos maior e menor e então escrever a equação reduzida da cônica. Já no terceiro tipo os autores apresentam uma equação do tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F$, sem o termo misto Bxy – responsável por uma rotação da cônica no sistema Oxy –, e solicitam que os estudantes identifiquem qual o gênero dessa curva, as coordenadas dos focos e do centro (ou vértice, no caso da parábola). A técnica usada se inicia com uma manipulação algébrica da equação dada até determinar a equação na forma reduzida, quando são identificados o gênero da cônica, as coordenadas do centro (vértice para a parábola) e a medida da distância do centro (ou vértice) ao foco da cônica. Com isso, se encontram as coordenadas dos focos e do centro (vértice). A figura 44 nos mostra um exemplo desse terceiro tipo de tarefa. Não encontramos qualquer discurso tecnológico/teórico no texto.

Figura 44 - Exemplo de tarefa do terceiro tipo

R17. Verifique se a equação $8x^2 - 2y^2 - 16x - 8y = 32$ representa uma hipérbole. Em caso afirmativo, determine as coordenadas do centro e dos focos dessa hipérbole.

Resolução
Desenvolvendo a equação e utilizando o método do completamento de quadrados, temos que:

$$8x^2 - 2y^2 - 16x - 8y = 32 \Rightarrow 8(x^2 - 2x) - 2(y^2 + 4y) = 32 \Rightarrow 8(x^2 - 2x + 1 - 1) - 2(y^2 + 4y + 4 - 4) = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x-1)^2 - 8 - 2(y+2)^2 + 8 = 32 \Rightarrow \frac{8(x-1)^2}{32} - \frac{2(y+2)^2}{32} = \frac{32}{32} \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

De acordo com a equação obtida, temos que ela representa uma hipérbole de centro $C(1, -2)$, cujo eixo real é paralelo ao eixo x . Determinando as coordenadas dos focos, temos:

- $a^2 = 4$
- $b^2 = 16$
- $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 16 \Rightarrow c^2 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$
- $F_1(x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1(1 - 2\sqrt{5}, -2)$
- $F_2(x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2(1 + 2\sqrt{5}, -2)$

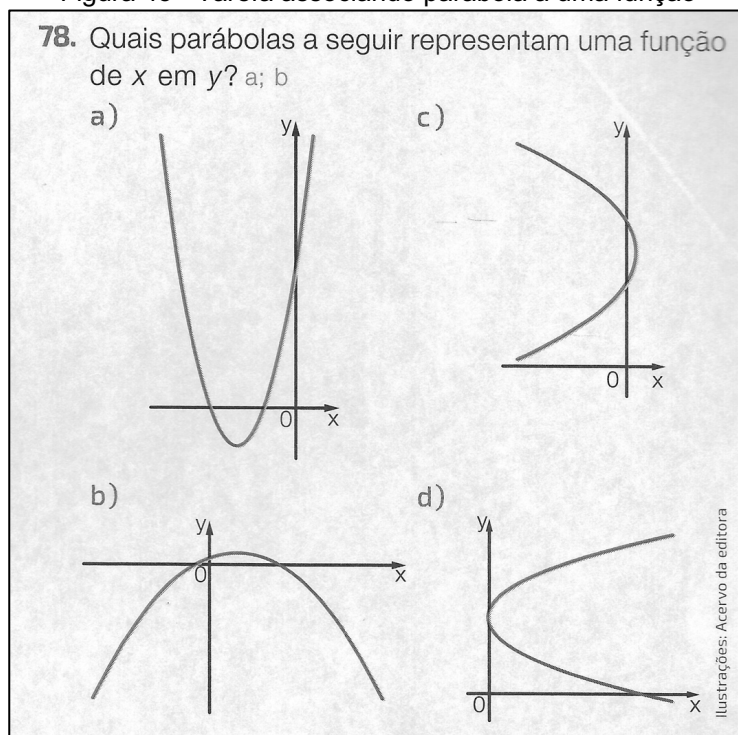
Portanto, o centro da hipérbole é $C(1, -2)$ e os focos são $F_1(1 - 2\sqrt{5}, -2)$ e $F_2(1 + 2\sqrt{5}, -2)$.

Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 101).

Particularmente no caso da hipérbole, Souza e Garcia (2016b) apresentam, entre as atividades para casa, um exercício a respeito do sistema LORAN. Usamos a ideia desse exercício para elaborar uma das tarefas do MER desenvolvido neste trabalho.

Ainda tratando de tipos de tarefas, quando olhamos as atividades para casa a respeito da parábola, encontramos uma tarefa em que os autores apresentam representações gráficas de parábolas e solicitam que os estudantes identifiquem quais representam uma função (ver figura 45). Esse exercício também não está resolvido, portanto não sabemos a técnica usada.

Figura 45 - Tarefa associando parábola a uma função



Fonte: Souza e Garcia (2016b, p. 109).

Em todos esses livros usados pelo estado de Sergipe e analisados nesta pesquisa, a parábola é a única entre as três cônicas que possui uma associação direta com o conceito de função; mesmo a hipérbole, que pode ser vista como uma função relacionando grandezas inversamente proporcionais – como encontramos em São Paulo (2014a) – não é trabalhada como gráfico de uma função.

Os autores usam o modelo M1 do nosso MER para uma breve introdução das cônicas por meio de ilustrações para fazer um traçado da parábola, elipse ou hipérbole, levando em conta suas respectivas definições por lugar geométrico. Também há poucos exercícios propostos, no final de cada seção, que são enunciados

dentro do modelo de geometria sintética e que poderiam ser trabalhados explorando outros objetos matemáticos, como reta tangente, perpendiculares e ângulos, mas todo o restante do conteúdo – tarefas e técnicas – está dentro do nosso modelo M2 – geometria analítica.

Também não encontramos nada que pudesse ser trabalhado como lugar geométrico tendo suas construções exploradas com auxílio de algum *software* ou por meio de dobraduras, o que permitiria um trabalho com outros objetos matemáticos, como reta tangente a uma curva, perpendiculares e ângulos. Infelizmente, esses estudos não são explorados, e é oferecido ao estudante um conteúdo raso, muito aquém de todo seu potencial no âmbito da matemática, além de não apresentar uma conexão entre essas duas geometrias e não destacar quais particularidades as fazem distintas.

Em termos de justificativa ou razão de ser para as cônicas, os livros didáticos usados no Ensino Básico não trazem nenhum significado para o objeto a não ser o matemático. O autor não informa para que serve a cônica estudada e quais tipos de problemas podemos resolver com esse estudo; trata-se de uma forma muito monumentalista (CHEVALLARD, 2013a) de se trabalhar o conteúdo, com uma razão de ser debilitada e fraca.

Vimos que os livros pesquisados nos estados de Sergipe e São Paulo reforçam nossa hipótese de que a geometria é reduzida à geometria analítica, uma vez que em ambos os estados notamos que as cônicas são trabalhadas majoritariamente na analítica. Além disso, não há qualquer discussão a respeito das distintas geometrias em que vivem essas curvas, e tanto na passagem da geometria espacial para a plana, como também ao apresentarem as cônicas analiticamente, os autores não atestam o motivo/as necessidades dessas transições.

Podemos ratificar que o ensino de cônicas no nível básico está reduzido ao ensino de parábola. Esclarecendo um pouco mais, a parábola é apresentada no Ensino Fundamental como a representação de função polinomial do segundo grau no plano cartesiano, além disso, também é encontrada como ferramenta para a resolução de equação polinomial do grau dois. A hipérbole, quando estudada antes do terceiro ano do Ensino Médio, surge como gráfico da função real com variável real, $f(x) = \frac{1}{x}$. A elipse é encontrada no currículo do terceiro ano do Ensino Médio em geometria

analítica, porém o professor não avança com o conteúdo, contendo-se em discutir casos abordados por meio da equação reduzida, com a representação gráfica da cônica restrita às situações em que os eixos da curva estão sobre os eixos do sistema referencial cartesiano.

Por último, mesmo trabalhando com geometria analítica, não encontramos nenhuma tarefa tratando de cônicas rotacionadas, o que implicaria um estudo da equação polinomial de grau dois completa, incluindo o termo misto xy .

Essas análises deverão ser consideradas no próximo capítulo para a criação do nosso estudo exploratório, que será baseado no PEP.

4.3 As cônicas em cursos de licenciatura em Matemática brasileiros

Nesta seção, vamos apresentar como as cônicas estão presentes em alguns cursos de licenciatura do estado de São Paulo e Sergipe; para isso, consultamos as ementas das disciplinas disponíveis nos *websites* dessas universidades e verificamos em quais contextos esse objeto é encontrado.

Entre as universidades paulistas, escolhemos as três estaduais: UNICAMP, UNESP e USP por estarem entre as principais universidades do país. A escolhida no estado de Sergipe foi a UFS, também pública, porém federal. Esta foi a universidade escolhida tanto para a realização do estudo exploratório (PEP), que será tratado no capítulo seguinte, como também para a formação inicial de professores (PEP-FP), portanto consideramos importante incluí-la nessas análises.

Iniciamos pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), onde o curso de licenciatura em Matemática está sob a responsabilidade do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC). Apresentaremos as disciplinas em que encontramos as cônicas como conteúdo a ser ensinado (quadro 2) e de que forma esse conteúdo está citado no programa de cada uma dessas ementas.

Pelas ementas das disciplinas oferecidas no curso da UNICAMP, podemos ver que as cônicas aparecem inseridas nos modelos M2 (por meio das disciplinas Geometria Analítica e Vetores e Matemática para o Ensino Médio para Professores I) e M3 (por meio das disciplinas Geometria Analítica e Vetores e Álgebra Linear) do

MER desenvolvido neste trabalho. Além disso, também encontramos cônicas na ementa de História da Matemática, que acreditamos ter uma discussão no contexto da geometria sintética (modelo M1).

Quadro 2 - Conteúdos relacionados a cônicas - UNICAMP

Geometria Analítica e Vetores: Seções cônicas. Equação geral de segunda ordem em duas variáveis. Autovalores e autovetores de matrizes. Diagonalização de matrizes simétricas. Classificação das cônicas. Introdução às superfícies quádricas;

Álgebra Linear: Matrizes reais especiais. Simétricas, ortogonais. Diagonalização. Aplicação à classificação de cônicas e quádricas;

Matemática do Ensino Médio para Professores I: Funções quadráticas e funções polinomiais.

História da Matemática: Apolônio e as seções cônicas.

Fonte: UNICAMP/IMECC (2019).

Em seguida, consultamos o *website* do curso de licenciatura em Matemática (diurno) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP). O curso é semestral, tem duração de quatro anos e no quadro 3 se encontram as disciplinas em que foi encontrado o conteúdo cônicas.

Quadro 3 - Conteúdos relacionados a cônicas - USP

Geometria Analítica: Seções cônicas: equações na forma reduzida em coordenadas cartesianas e polares; mudança de coordenadas no plano; classificação das cônicas. Classificação de quádricas;

Geometria e Desenho Geométrico II: Seções cônicas. Estudo da solubilidade de construções com régua e compasso (problemas clássicos da Antiguidade, ciclotomia);

História da Matemática: Apolônio e as seções cônicas. Geometria Analítica. Geometrias Não-Euclidianas.

Fonte: USP/IME (2019).

Entendemos que, para que se trabalhe com as classificações das cônicas e das quádricas, é minimamente necessário um estudo inserido no contexto da geometria linear. Portanto, baseados nesses dados, as ementas das disciplinas do curso de licenciatura em Matemática da USP nos mostram as cônicas presentes nos três modelos de geometrias das cônicas: sintética, analítica e linear.

Também consultamos o projeto pedagógico do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe do Campus Prof. Alberto Carvalho, que fica na cidade de Itabaiana/SE. O curso é diurno e tem duração de quatro anos.

Nesse documento é possível consultar todas as disciplinas obrigatórias e optativas. Entre essas disciplinas, listamos abaixo (quadro 4) aquelas em que cônicas aparecem em seu programa.

Quadro 4 - Conteúdos relacionados a cônicas - UFS

Matemática para o Ensino Médio I: Funções quadráticas, funções polinomiais reais: definição e caracterização.

Vetores e Geometria Analítica: Curvas cônicas e superfícies quádricas: estudo da equação geral do segundo grau.

Fonte: UFS/DMAI (2018).

Pelas ementas das disciplinas do curso de licenciatura em Matemática da UFS, notamos que o conteúdo cônicas está proposto para ser trabalhado no contexto analítico (modelo M2 do MER), por trabalhar com funções quadráticas, e linear (modelo M3), pelo estudo da equação geral do segundo grau.

O último curso consultado foi de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) do campus de Rio Claro. O curso é semestral e tem duração de quatro anos. Acessamos as ementas das disciplinas que foram atualizadas no ano de 2015 e estão disponíveis no *website* do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da UNESP de Rio Claro. As cônicas estão presentes nas ementas das disciplinas apresentadas no quadro 5.

Quadro 5 - Conteúdos relacionados a cônicas - UNESP

Geometria Analítica Plana: Estudo da elipse, parábola e hipérbole. Mudança de coordenadas: translação e rotação. Estudo da equação geral do segundo grau em duas variáveis para classificação de cônicas.

Geometria Analítica Espacial: Superfícies: Esféricas, Cilíndricas, Cônicas, Quádricas.

Desenho Geométrico e Geometria Descritiva: Lugares Geométricos.

Fonte: UNESP (2019).

As ementas do curso oferecido pela UNESP da cidade de Rio Claro nos mostram as cônicas presentes nos modelos M1 e M2, com destaque para a divisão da geometria analítica entre plana e espacial. No MER apresentado neste trabalho, temos proposto essa mesma divisão, porém para o modelo da geometria sintética (M1). Também entendemos que as cônicas são trabalhadas na geometria linear (modelo M3), já que encontramos o “estudo da equação geral do segundo grau em duas variáveis para classificação de cônicas”.

De forma geral, as ementas dessas quatro universidades nos mostram que as cônicas são propostas, predominantemente, nos modelos da geometria analítica (M2) e da geometria linear (M3), com M3 vinculado à M2. Por um lado, essa junção pode privilegiar a complementaridade entre esses modelos de geometrias, mostrando a necessidade do desenvolvimento de M3 com base nas limitações do modelo M2; por outro lado, consideramos importante que o estudante de licenciatura tenha claro que se trata de dois modelos de geometrias distintas para as cônicas para poder explorar isso junto aos seus futuros alunos.

Já no que se refere ao modelo da geometria sintética (M1), vimos que nem todas as universidades têm a proposta de trabalhar com ele, além de que aquelas que o propõem o apresentam de forma independente (em disciplinas distintas) dos modelos M2 e M3. Do nosso ponto de vista, quando trabalhados juntos, o professor pode notar a insuficiência de cada um e a complementaridade existente entre os três.

Em resumo, os modelos geométricos se encontram misturados tanto no Ensino Superior quanto no Básico. Nesse último, em particular, vimos uma predominância absoluta das tarefas e técnicas para a geometria analítica, não permitindo assim diferenciar as particularidades das cônicas dentro de cada modelo de geometria. Isso favorece uma associação do objeto ao modelo M2. No caso do ensino universitário, essa predominância pode contribuir para que o estudante e futuro professor de matemática não consiga visualizar as cônicas como um lugar geométrico no plano ou como o resultado da intersecção de um plano e um cone, isto é, pode fazer com que esse futuro professor não seja capaz de trabalhar o objeto separado de sua equação, da mesma forma que é feito nos livros didáticos usados no Ensino Fundamental II e no primeiro ano do Ensino Médio.

Dando continuidade ao proposto para a construção de nossa formação inicial, apresentamos, no próximo capítulo, um Percurso de Estudo e Pesquisa desenvolvido como um estudo exploratório para determinar condições e restrições para a implementação do PEP-FP.

5 Um Percurso de Estudo e Pesquisa

Neste capítulo, apresentamos os estudos realizados para o desenvolvimento do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP): o paradigma de visita às obras; o paradigma de questionamento do mundo e o esquema herbartiano; o Percurso de Estudo e Pesquisa e suas dialéticas; PEP: como construir um fogão solar?; análise dos dados e resultados e considerações.

5.1 O paradigma de visita às obras

Para contextualizar o surgimento do PEP na TAD, é necessário entender o que Chevallard (2013a) considera como paradigma de visita às obras. Para o autor, atualmente, vivemos um momento de mudança de paradigmas didáticos em que o velho e ainda atual paradigma chamado de “visita às obras”, em que o aluno é levado a “visitar” o conteúdo que lhe apresenta o professor, está com seus dias contados. Nesse paradigma, o conteúdo matemático tem valor por si próprio e é apresentado com a ausência de sua possível utilidade no mundo real. Não são apresentados aos alunos obras ou problemas que só poderiam ser construídos, entendidos ou resolvidos com o conteúdo a ser estudado. Além disso, para o autor, a matemática é fracionada em pequenas partes desarticuladas e exemplifica afirmando que:

a fórmula de Herón para o cálculo da área de um triângulo – se apresenta como um monumento com valor em si mesmo, que os estudantes devem admirar e aproveitar, embora não saibam quase nada de suas *razões de ser*, nem atuais nem do passado. (CHEVALLARD, 2013a, p. 164, tradução nossa).

Enquanto prepara suas atividades em sua casa ou na escola, o professor, na maioria das vezes, não questiona por que deve ensinar o conteúdo que está à sua frente no livro didático, tampouco indaga por que esse conteúdo faz parte do currículo desse nível de ensino ou do curso em que está trabalhando. Também não aceita, facilmente, o estudante que faz questão de saber por que deve aprender esse conteúdo ou qual é a sua utilidade.

A matemática nesse contexto é dada como pronta e acabada, e o professor entra na sala de aula para ensinar algo que já se sabe o começo, o meio e o fim, como um monumento em que a única coisa a se fazer é observar, e os alunos não têm a possibilidade de descobrir ou construir nada além do que já está posto. Por certo,

quando visitamos um monumento, por exemplo, a estátua do Cristo Redentor no Rio de Janeiro, não perguntamos “para que serve isso?” ou “o que faremos com isso?” Por conseguinte, a matemática, que historicamente é considerada como a chave para muitos problemas, tanto individuais como coletivos, passa a não ter sentido, torna-se um conhecimento que pode ser esquecido logo após o exame, pois não servirá mais para nada.

De fato, de acordo com Chevallard (2013a), o paradigma de visita às obras vem de uma pedagogia autoritária que impõe a alunos e professores o que devem estudar, sem justificar por que deve ser estudado. Dessa forma, também acreditamos que adquirir um novo conhecimento com a proposta de entender uma obra ou esclarecer um problema que está em seu entorno – e que seria incompreensível sem esse conhecimento – pode oferecer mais sentido ao objeto de estudo e com isso manter o estudante motivado. É nesse sentido que o autor apresenta o paradigma chamado de “questionamento do mundo” como uma alternativa ao paradigma de visita às obras.

5.2 O paradigma de questionamento do mundo e o esquema herbartiano

Consideremos neste momento o que Chevallard (2013a) chama de sistema didático, $S(X, Y, O)$, sendo X um conjunto de pessoas interessadas em aprender uma determinada obra O que, frequentemente, serão auxiliados por pessoas pertencentes ao conjunto Y , isto é, “com a finalidade de aprender algo sobre uma obra O , $x \in X$ tem de estudar O ” (CHEVALLARD, 2013a, p. 168, tradução nossa). Para o autor, a palavra “estudar” aqui tem o sentido de investigar, questionar e enfrentar quaisquer obstáculos ou incertezas que possam surgir durante esse processo. Trata-se de uma postura não encontrada nos dias de hoje, pois “na cultura geral atual, muitas pessoas, aparentemente, têm a tendência de evitar qualquer pergunta que, para eles, não tenha uma resposta evidente” (CHEVALLARD, 2013a, p. 168, tradução nossa).

Uma das consequências do paradigma de visita às obras, além da falta de utilidade do conteúdo estudado após o exame, é que nos acostumamos a olhar o saber como algo pronto e acabado, que já foi estudado, nos cabendo apenas apreciar, conhecer e visitar. Inseridos nesse paradigma, não estamos acostumados a investigar uma obra, a elaborar questões que nos levem a respostas incertas, desconhecidas,

que temos de validar para então seguirmos perguntando, buscando respostas e validando até encontrar a resposta final. De fato, esse é o trabalho de um pesquisador e, segundo Chevallard (2013a), deve ser a postura de qualquer cidadão nesse novo paradigma de questionamento do mundo, não se esquivar face a uma questão que pode provocar novas questões e, conseqüentemente, novas respostas. O autor chama esse sistema de questões e respostas de herbartiano, inspirado no filósofo, psicólogo e fundador da pedagogia como uma disciplina acadêmica, o alemão Johann Friedrich Herbart (1776 – 1841), quando afirma que:

o professor da universidade não é um ser que ensina (Lehrender), o estudante não é um ensinado (Lehrender); senão que esse último realiza investigações pessoais, enquanto a tarefa do professor é guiá-lo e aconselhá-lo nessas investigações. (HERBART, s/d apud CAUVIN, 1970, p. 38 apud CHEVALLARD, 1998a, p. 10, tradução nossa).

Esse sistema surge então de substituir no sistema didático $S(X; Y; O)$ a obra (ou conteúdo) O por uma questão de investigação Q , passando a ter uma nova configuração, $S(X; Y; Q)$, chamada pelo autor de sistema herbartiano. Bosch (2018a) amplia esse sistema apresentando outros elementos para um processo de investigação que busca uma resposta para uma questão Q e passa a representá-lo por $[S(X; Y; Q) \leadsto M] \hookrightarrow R^\heartsuit$ para evidenciar a interação entre o sistema herbartiano com o *milieu*, M , na busca da resposta desejada para a questão Q , representada por $R^\heartsuit$. O *milieu*, neste caso, é um conjunto formado por questões Q_k , derivadas da questão geratriz Q e por um conjunto de respostas $R_k^\diamond$, que, para determinado número natural k , é apresentada como a resposta oficial para a questão Q_k . As obras O_i , que já foram elaboradas, estudadas e justificam $R_k^\diamond$, podem ser analisadas e desconstruídas para encontrar $R^\heartsuit$. Além disso, para Bosch (2018a), também compõem M dados gerais D_p considerados necessários para a investigação, que podem surgir tanto de informações iniciais da pesquisa quanto obtidas em seu decorrer. Como consequência, o esquema herbartiano passa a ser representado por $[S(X; Y; Q) \leadsto M] \hookrightarrow R^\heartsuit$, com

$$M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_m^\diamond, O_{m+1}, O_{m+2}, \dots, O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \dots, D_q\}.$$

Esse é o esquema que utilizamos para desenvolver nosso Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), considerado por Chevallard (2013a) como a principal ferramenta para a inserção da atitude herbartiana nas escolas e, de modo conseqüente, na

sociedade em geral e que pode ser utilizado tanto para o ensino quanto para pesquisa no âmbito da TAD. Na sequência, descrevemos em detalhes esse Percurso.

5.3 O Percurso de Estudo e Pesquisa e suas Dialéticas

Um professor y que deseja utilizar o PEP como instrumento para ensinar determinado conteúdo O deverá ter como base o paradigma de questionamento do mundo, isto é, proporcionar ao seu grupo de alunos, X , condições para que desenvolvam a atitude herbartiana. Ou seja, que descubram a possibilidade de estudar O por meio de uma investigação, buscando responder uma questão inicial Q_0 (a questão geratriz), que poderá tratar de uma obra importante para a sociedade, para suas vidas ou para entenderem algo que ocorre em seu entorno.

O PEP tem início com a apresentação de uma questão geratriz Q_0 e de dados iniciais D_p , necessários para seu entendimento. Em seguida, os estudantes, distribuídos em grupos, desenvolverão novas questões Q_k que surgem tanto pela necessidade de um entendimento mais profundo do problema, como para discussões/reconstruções de obras O_i que são acessadas na busca de determinada resposta $R_k^\diamond$.

Para o professor, que procura gerenciar tudo o que acontece durante o experimento do PEP, é natural que lhe ocorram algumas questões referentes a essa gestão: como controlar o avanço das questões? Como acompanhar a construção de conhecimentos pelos alunos? As fontes utilizadas na busca de informações são confiáveis? Quais são os critérios usados para validar uma informação disponível na internet? Como são divididas as responsabilidades no grupo? As respostas para essas questões são encontradas por meio das dialéticas cronogênese (avanço do estudo), mesogênese (evolução do *milieu*) e topogênese (evolução das responsabilidades entre as posições de professor e aluno), que já foram apresentadas neste trabalho quando apresentamos nossa metodologia de investigação.

A cronogênese, em particular, de acordo com Bosch (2018a), deve ser considerada no planejamento do PEP, embora não ocorra de fato apenas nesse momento, o professor/pesquisador deve desenhar um mapa de questões e respostas, *a priori*, que possam surgir como desdobramento da Q_0 escolhida. O processo de criação desse mapa permite o melhoramento da questão geratriz no sentido de

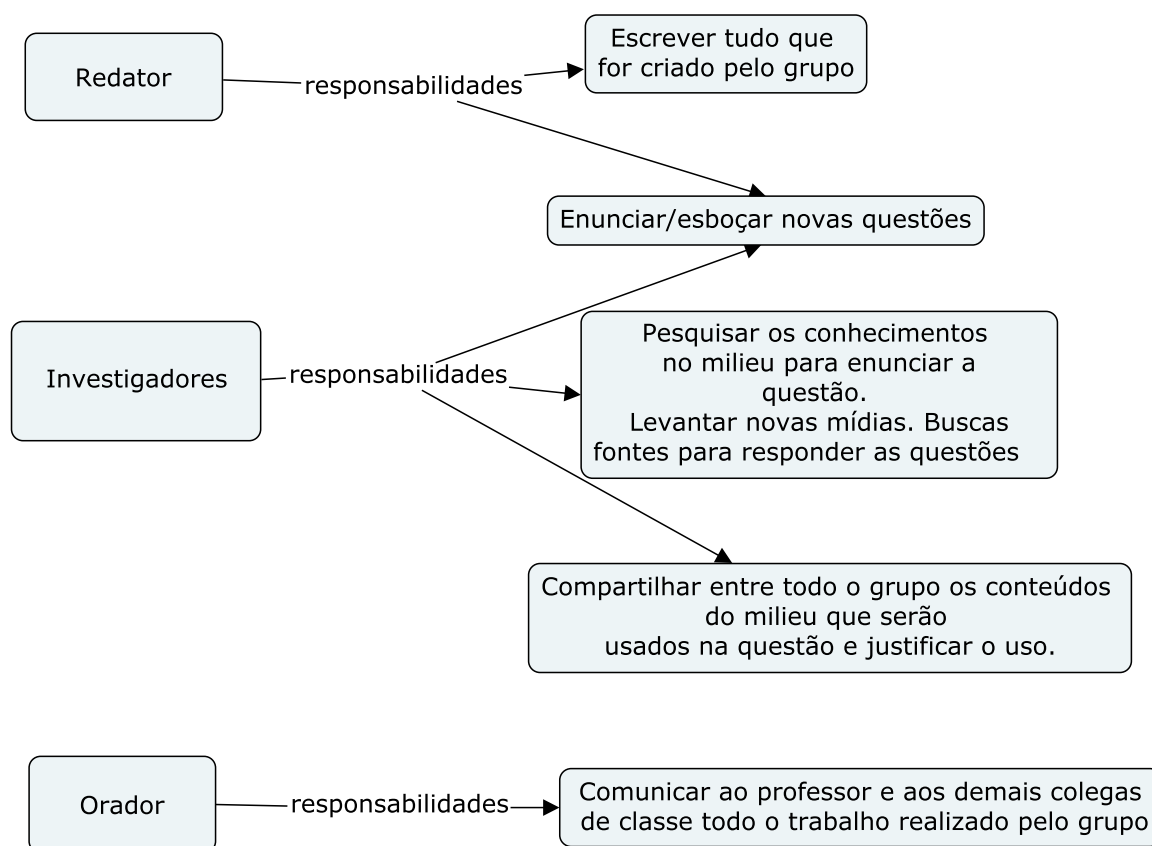
formular uma questão suficientemente clara e objetiva que será usada na validação das diversas questões que poderão surgir. Por outro lado, a questão Q_0 deve ser razoavelmente difícil para o nível escolar dos alunos, de modo a provocar um estudo mais profundo, que demande a construção de novos conhecimentos e não seja respondida após uma simples consulta na internet.

Segundo Bosch (2018a, p. 7), “a evolução do *milieu* pela incorporação de novos objetos e respostas parciais constitui a mesogênese da investigação” e cada novo conhecimento, ao ser incorporado ao *milieu*, é confrontado com o conhecimento aí existente para que seja validado como uma informação confiável. Esse processo pode gerar novas questões a respeito de obras já estudadas, que permitem ao professor/investigador identificar falhas na construção de conhecimentos anteriores. Outro ponto importante, no processo, é orientar os estudantes para que tenham cuidado com as fontes de informação, um trabalho que, segundo a autora, é raramente desenvolvido em sala de aula.

A topogênese, segundo a autora, é a dialética do individual-coletivo e viabiliza ao professor/investigador acompanhar o desenvolvimento da criação de uma questão Q_j , ou seja, observar de que maneira e por quais critérios ela é validada ou descartada pelo integrante do grupo responsável por relatar as discussões. Na função de relator, uma das responsabilidades dos estudantes do grupo (figura 46), o aluno deve escrever tudo o que foi produzido pelo restante do grupo, como questões produzidas, soluções prévias e finais, anotações gerais do que apareceu nas discussões etc., e, para isso, esse participante deve estar atento aos acontecimentos dentro do seu grupo.

A função de investigador determina uma carga maior de atribuições, como levantar os conteúdos já estudados que possam ajudar tanto na escrita da nova questão quanto em sua solução; pesquisar nas diversas mídias disponíveis novas informações que auxiliem na resolução da questão e compartilhar essas informações para os demais integrantes do grupo para que estes possam trabalhar conjuntamente na construção de novos conhecimentos. Há ainda a função de orador, que prevê a comunicação do trabalho do grupo para o professor.

Figura 46 - Atribuições para os participantes dos grupos



Fonte: Produzida pelo autor.

Essas responsabilidades são administradas pelo docente para que haja um rodízio de funções e para que o grupo tenha um bom rendimento em todo o PEP. Pode ser que no grupo haja um aluno bom em cálculos, enquanto seu colega é ótimo para redigir ou para apresentar os resultados. Provavelmente, para que o grupo tenha um bom rendimento no trabalho, essas posições deverão ser mantidas durante o maior tempo possível.

O redator será o responsável por escrever tudo o que foi produzido pelo restante do grupo, como questões produzidas, soluções prévias e finais, anotações gerais que possam aparecer em discussões etc., e, para isso, esse membro deverá estar continuamente inteirado dos acontecimentos dentro do seu grupo.

Em nossa investigação, trabalhamos com professores em formação inicial desenvolvendo um Percorso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), que, segundo Ruiz-Olarría (2015), necessita de um PEP já experimentado. Diante dessas condições, pensamos em aplicar um PEP que trata da construção de um fogão solar como um estudo exploratório e, para isso, buscamos uma questão

geratriz Q_0 que propiciasse, em seu desdobramento, o trabalho com as cônicas. A experimentação desse PEP nos forneceu elementos para desenhar o PEP-FP e fazer sua análise *a priori*. As próximas seções deste capítulo se dedicam a esse PEP.

5.4 PEP: como construir um fogão solar?

Durante o planejamento do nosso Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), foram desenvolvidos estudos tanto para a escolha da questão geratriz como também para prever o que poderia ocorrer em sala de aula durante o percurso. Assim, os principais objetivos desse momento foram encontrar uma Q_0 que proporcionasse um estudo que culminasse na definição e algumas propriedades das cônicas e, principalmente, que fomentasse uma discussão de interesse para o grupo de alunos da licenciatura em Matemática e do 3º ano do Ensino Médio.

Encontramos dois trabalhos que nos inspiraram na determinação de nossa questão geratriz: Ramos Filho (2011) e Otero, Llanos e Parra (2018). O trabalho de Otero, Llanos e Parra (2018) foi fundamental para a formulação de nossa Q_0 . Em sua investigação, os autores tiveram como Q_0 a questão “como funciona uma antena parabólica?” para trabalhar o problema da construção de tangentes a uma curva a partir da geometria analítica com professores argentinos em formação continuada. E Ramos Filho (2011) trata da construção de um fogão solar com duas bocas, para isso usou os dois focos de uma antena em formato elíptico. Diante da necessidade de encontrar um tema original e de interesse geral para jovens universitários brasileiros, pesquisamos as antenas parabólicas no Brasil e descobrimos que essas antenas são comercializadas desde a década de 80 e até o final do ano de 2017 estavam instaladas em 38% dos municípios, segundo o Portal Brasil²² (2018).

Ainda segundo esse Portal, essas antenas estavam concentradas na zona rural (78,5%), com predominância entre os municípios de menor rendimento *per capita*. Com a TV digital alcançando quase 40% dos usuários de televisão no Brasil, essas antenas parabólicas vêm perdendo sua utilidade em todo o território nacional e, provavelmente, serão objetos de sucata.

²² <http://www.portalbrasil.net/>.

Por outro lado, sabemos que no Brasil há muita energia solar ainda pouco aproveitada, e esse fato nos inspirou a aproveitar antenas parabólicas para construir um fogão solar. Tal escolha permitiria a exploração da definição de parábola e algumas de suas propriedades a partir da questão geratriz " Q_0 : Como construir um fogão solar?"

Claramente não seria possível chegar à construção efetiva do fogão tanto por falta de material quanto por termos somente seis horas divididas em três encontros para experimentar esse PEP, mas pudemos desenvolver um estudo que comprovasse a viabilidade desse projeto ou fornecesse uma espécie de manual para sua construção que permite a continuidade do projeto em outras áreas.

Encontrada a questão geratriz, avançamos com o desenho do PEP e, na próxima subseção, apresentamos sua análise *a priori*.

5.4.1 Análise *a priori* do PEP

Nesta subseção, apresentamos uma análise *a priori* para o PEP desenhado a partir da questão geratriz Q_0 : Como construir um fogão solar? Nossa análise foi baseada no esquema herbartiano $[S(X; Y; Q_0) \leadsto M] \hookrightarrow R^\bullet$ e suas dialéticas, considerando $M = \{R_1^\circ, R_2^\circ, \dots, R_m^\circ, O_{m+1}, O_{m+2}, \dots, O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \dots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \dots, D_q\}$.

Como aplicamos o PEP tanto para alunos universitários quanto para estudantes do Ensino Básico, tivemos dois grupos distintos X_u : estudantes universitários cursando licenciatura em Matemática e X_{em} : estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, que nos levam a dois sistemas herbartianos, $S(X_u; y; Q_0)$ e $S(X_{em}; y; Q_0)$ em que o professor y foi o responsável por esta pesquisa.

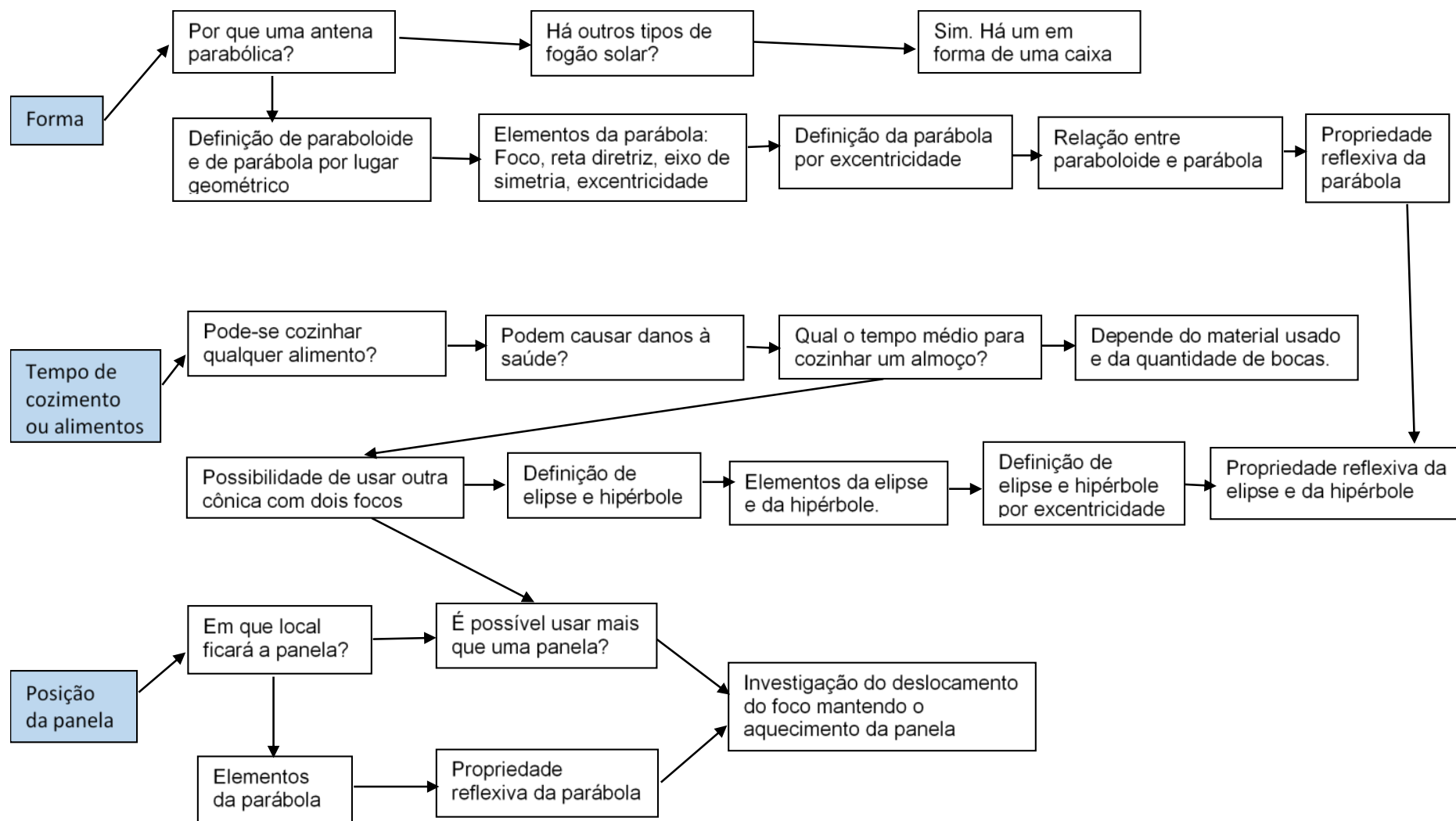
O *milieu* ou meio M seria formado por questões Q_k relacionadas a possíveis temas que poderão surgir durante a discussão. Previmos os seguintes temas: forma do fogão, tempo de cozimento ou alimento, posição da panela, materiais para construção, uso e posição de instalação do fogão. Esboçamos dois mapas elaborados *a priori* para mostrar a dialética questão-resposta que envolve esses possíveis temas (lembrando que os mapas, por serem produto de uma análise *a priori*, foram construídos antes do experimento). Nesses mapas as setas indicam nossa previsão para o surgimento das questões e respostas, mostrando uma certa ordem cronológica e possíveis relações entre os temas. Cabe salientar que os mapas aqui apresentados

foram elaborados para os dois sistemas herbartianos (estudantes universitários e do Ensino Médio), embora saibamos que para cada percurso experimentado as questões e a ordem em que aparecem podem ser distintas.

Na figura 47, esboçamos o primeiro mapa elaborado a partir dos possíveis temas: forma do fogão, tempo de cozimento do alimento e posição da panela com os respectivos conteúdos matemáticos. Nessa figura, podemos ver que esses três temas se relacionam pela propriedade reflexiva da parábola, da elipse e da hipérbole e, ainda, pela possibilidade de utilizar uma outra cônica, com dois focos, para que seja possível cozinhar com duas panelas ao mesmo tempo. Além disso, com o tema forma surgem questões a respeito da antena parabólica e outros tipos de fogão solar que possibilitam introduzir a definição de paraboloide e de parábola por lugar geométrico e a definição de elipse e hipérbole por excentricidade e, ainda, de seus elementos principais como: focos, retas diretrizes, eixos de simetria, eixos focais e excentricidade.

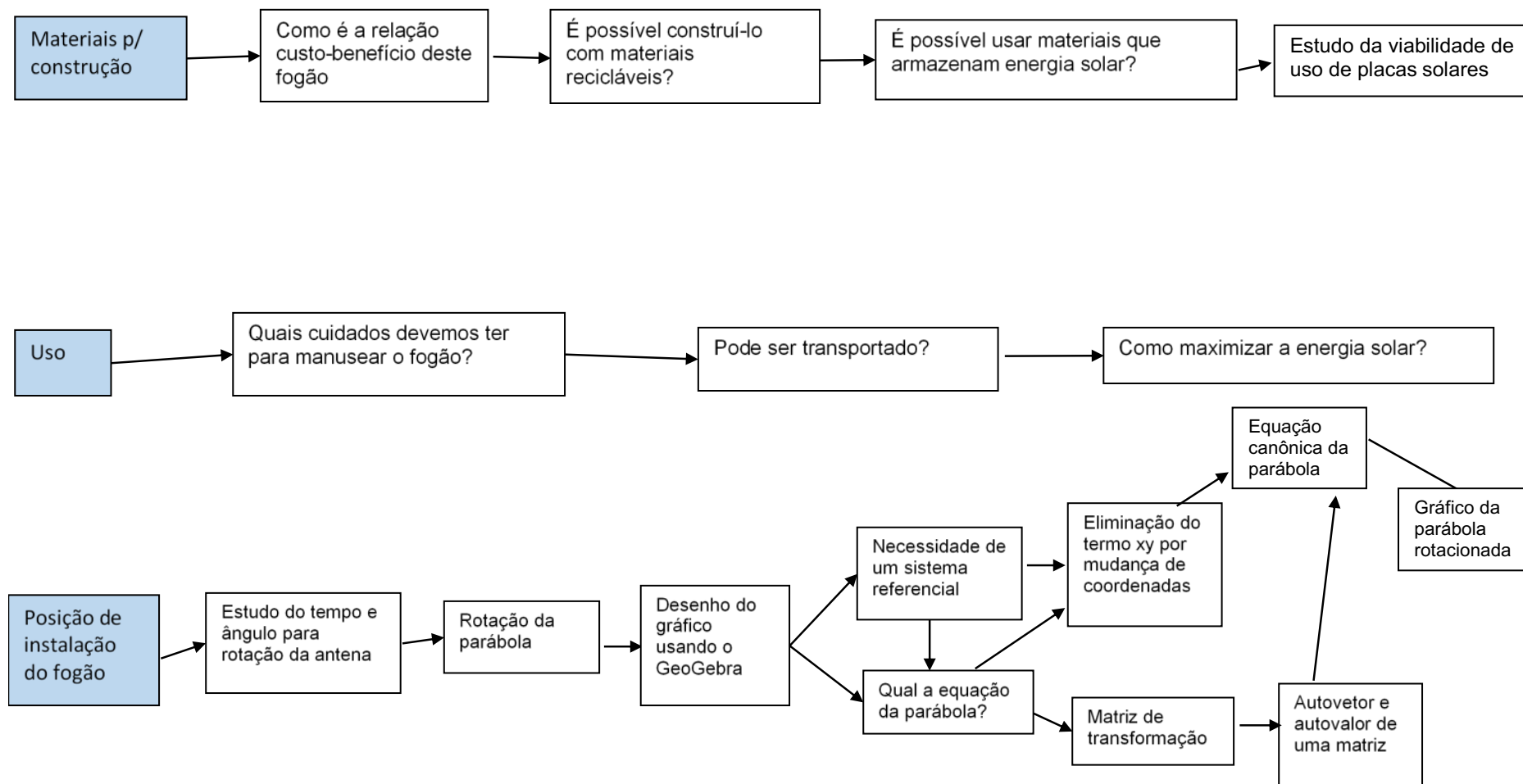
Na figura 48, a seguir, esboçamos o segundo mapa para relacionar os outros três temas: materiais para construção, uso e posição de instalação do fogão. Entre esses temas acreditamos que a posição de instalação do fogão contribuirá com o surgimento de questões abordando a necessidade de rotacionar a antena parabólica para aproveitar a energia solar durante o maior tempo possível e, com isso, será possível trabalhar com elementos do modelo da geometria linear. Não foram previstas questões que relacionem esses três temas, tampouco que algum conteúdo matemático, a respeito de cônicas, possa ser desenvolvido a partir dos temas materiais para construção e uso.

Figura 47 – Primeiro Mapa de questão-resposta, *a priori*, para o PEP: como construir um fogão solar



Fonte: Produzida pelo autor.

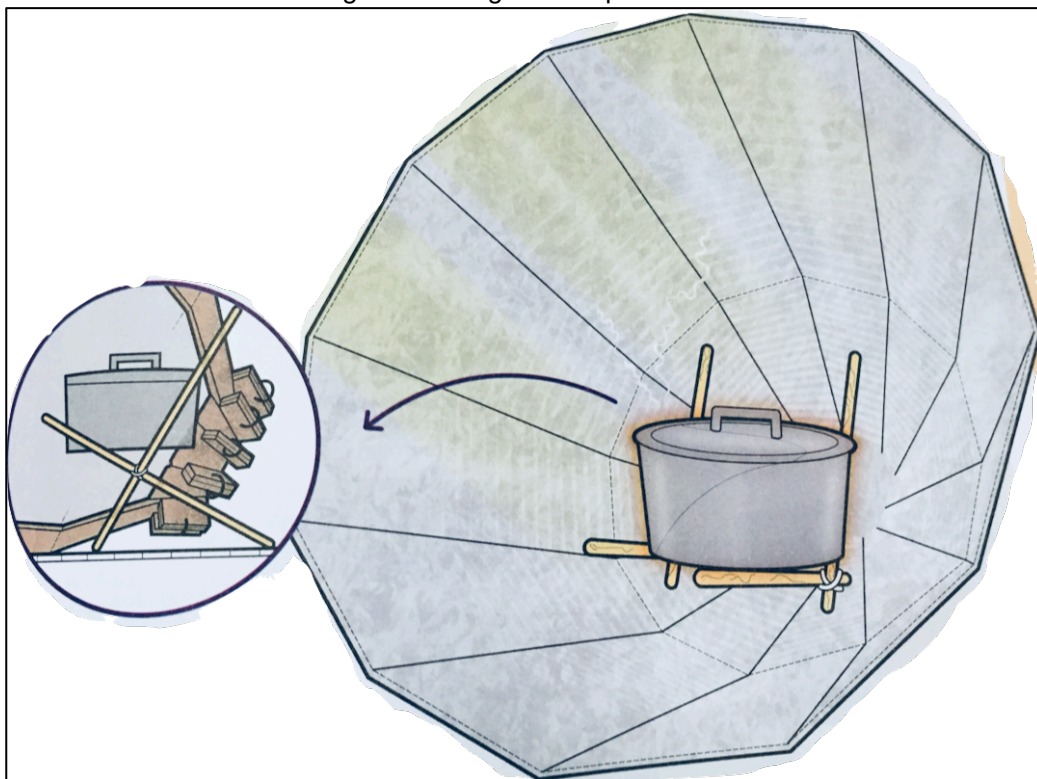
Figura 48 – Segundo Mapa de questão-resposta, *a priori*, para o PEP: como construir um fogão solar



Fonte: Produzida pelo autor.

O único dado D_p para esse PEP é que o fogão solar deve ser construído usando uma antena parabólica (como na figura 49).

Figura 49 - Fogão solar parabólico



Fonte: Paiva (1998, p. 80).

A diferença entre os dois sistemas se manifestará no *milieu* inicial – teoricamente mais desenvolvido no caso dos estudantes universitários – e das obras Q_j consultadas, que ajudarão na validação das respostas $R_i^\diamond$ e na elaboração de novas questões Q_j , que podem ser encontradas entre os conteúdos de geometria euclidiana (plana ou espacial), geometria analítica com duas coordenadas, condução térmica, meio ambiente, resistência de materiais etc. Esses são temas supostamente já vistos por estudantes do Ensino Superior, mas nem todos são trabalhados no Ensino Básico público brasileiro. Em particular, o paraboloide pode ser visto como uma superfície formada pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo de simetria, portanto possui propriedades herdadas da parábola. Assim, podemos nos restringir ao estudo da cônica na garantia de que os resultados obtidos também são válidos para a quádrlica. Acreditamos que os estudantes usarão como fontes de pesquisa a internet, livros didáticos disponíveis na universidade/escola e anotações de aulas.

Outro ponto importante da análise *a priori* é o potencial de alcance desse PEP a partir do MER desenvolvido. Como consta nos mapas apresentados nas figuras 47 e 48, os temas “forma” devem favorecer o estudo da parábola no modelo da geometria sintética, tanto espacial, por meio da definição de cônica por secções cônicas, quanto plana, usando a definição por lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo (foco) e uma reta (diretriz). A elipse e a hipérbole, seus elementos e suas propriedades reflexivas podem ser abordados com o estudo da viabilidade para que o fogão tenha mais de uma “boca”, podendo assim cozinhar mais alimentos em um período menor. Esses estudos estão associados aos temas “tempo de cozimento” e “posição da panela”.

Já os modelos da geometria analítica e da geometria linear do MER podem ser trabalhados via os temas “posição de instalação do fogão” e “uso”, uma vez que é necessário movimentar a antena para que a panela continue a ser aquecida, com o passar do dia, por causa do deslocamento do planeta Terra em relação ao Sol. Como o movimento de rotação do fogão ocorre em torno do vértice da parábola, nos parece oportuno um estudo das condições necessárias para encontrar a equação de uma parábola rotacionada que, até este momento, não terá motivos para ter sido desenhada em um plano que contenha algum sistema referencial. Com isso, consideramos este PEP com potencial para explorar os três modelos de geometria das cônicas existentes no MER por nós desenvolvido. Com o planejamento e a análise *a priori* do PEP realizados, traçamos o perfil dos sujeitos, bem como das instituições em que ocorreu o experimento. É o que apresentamos na sequência.

5.4.2 A escola, a universidade e os alunos

Esta subseção tem o objetivo de apresentar as instituições e os estudantes que foram sujeitos²³ na aplicação do PEP.

Escolhemos o município de Itabaiana, no estado de Sergipe, que pertence à região Nordeste do Brasil, para a aplicação do PEP porque o autor deste trabalho é professor na Universidade Federal de Sergipe (UFS) no campus localizado nessa

²³ Todos os alunos foram avisados de que se tratava de uma pesquisa de doutorado e assinaram o termo de consentimento apresentado pelo pesquisador, que se encontra em anexo.

cidade, para facilitar assim o acesso tanto aos estudantes dessa universidade quanto aos diretores ou coordenadores das escolas estaduais de Ensino Básico.

O Colégio Estadual Murilo Braga é um dos mais antigos da cidade de Itabaiana, está localizado próximo à UFS, já fez parte do projeto PIBID do Departamento de Matemática dessa universidade e seu diretor nos permitiu trabalhar com seus alunos. O professor de matemática da turma sugeriu o contraturno como melhor opção para esses encontros, pois os estudantes passavam pelo período de recuperação²⁴ e estavam se preparando para as provas finais. Diante desse cenário, após uma breve conversa com os estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, agendamos três encontros de duas horas, entre os dias 5 e 15 de março do ano de 2018, com início às 8h no próprio colégio.

O primeiro encontro teve início em uma sala de aula que possuía somente cadeiras, carteiras, lousa e giz, mas, com a elaboração das questões iniciais do Percurso, surgiu a necessidade de consultar a internet, por isso decidimos trabalhar no laboratório de informática do colégio, equipado com mesas, cadeiras, computadores, impressora, lousa com pincel e ar-condicionado. Foi nesse laboratório que ocorreram todos os encontros.

No primeiro dia, compareceram nove estudantes, dos quais três alegaram necessitarem do tempo para seus estudos e, assim, seis seguiram o Percurso do começo ao fim. Esses alunos tinham idade variando entre 17 e 18 anos e afirmaram ter estudado cônicas enquanto cursavam o último ano do Ensino Médio. Esse grupo será identificado como grupo A.

Já o grupo de universitários, interessados em participar do PEP, eram alunos do curso de licenciatura em Matemática da UFS, matriculados entre o segundo e o oitavo períodos que cursavam disciplinas nos períodos matutino e vespertino, fato que impossibilitou encontrar horários comuns para reunir todos. Nessas condições, optamos por oferecer três propostas distintas de dias e horários e dividimos os estudantes em três grupos com 5, 3 e 14 alunos, de tal forma que todos os interessados pudessem participar de todas as sessões. Esses grupos foram

²⁴ Período em que os estudantes não aprovados em alguma disciplina revisam os conteúdos estudados durante o semestre/ano para serem novamente avaliados, buscando assim recuperarem aquelas notas que foram insuficientes para sua aprovação.

identificados como grupo B, grupo C e grupo D, respectivamente. Cada uma das três propostas era composta por três encontros com duração de duas horas cada um, como no caso dos estudantes do Ensino Médio. Assim, ao final, realizamos três PEP na universidade e um PEP no colégio.

Para as sessões na universidade, nos foram disponibilizados uma sala de aula e o laboratório de informática do Departamento de Matemática, ambos equipados com carteiras, lousa e projetor. Os alunos dos três grupos estavam divididos em grupos de 3, 4 ou 5 integrantes.

A seguir, apresentamos a organização dos dados recolhidos nesses experimentos por meio de mapas de questões e respostas, bem como suas análises por comparação com o desenhado *a priori*.

5.5 Análise dos dados

Iniciamos nossa análise pela dialética da cronogênese, para isso, foi feita uma organização dos dados usando os mapas de questões e respostas, o que nos permitiu a comparação com os mapas já desenhados na análise *a priori* neste mesmo capítulo. Lembramos o leitor que o objetivo destas análises e deste capítulo, de acordo com nossa metodologia, é fornecer elementos que nos orientem na construção de uma formação inicial de professores para o ensino de cônicas, a ser desenvolvida no capítulo seguinte, baseada no Percorso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), segundo Ruiz-Olarría (2015) e Licera (2017), como nos orienta a Teoria Antropológica do Didático.

O primeiro PEP a ser apresentado é o do grupo D, composto por 14 alunos do curso de licenciatura em Matemática, por ter o maior mapa de questões e respostas, fazendo com que os demais mapas se tornassem recortes desse primeiro.

O pesquisador apresentou o problema a ser trabalhado informando que se tratava de investigar a possibilidade de construir um fogão solar em formato parabólico e disponibilizando a figura 49. Informou ainda que pretendia apresentar este trabalho, em forma de pôster, a estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de determinada escola da cidade e, por isso, as informações deveriam ser verdadeiras e detalhadas para que um estudante qualquer desse nível entendesse como construir um fogão solar. No que segue, apresentamos nossas análises.

5.5.1 Primeiro Percurso de Estudo e Pesquisa

Os alunos, divididos em dois grupos com 5 e um grupo com 4, iniciaram o percurso elaborando quatro perguntas cada grupo. Essas perguntas foram validadas entre eles e expostas na lousa para que todos tivessem acesso ao conteúdo produzido, embora tenham surgido questões que não foram validadas pelo grupo. As questões e respostas a respeito do tema forma do fogão, apresentadas pelo grupo D depois da discussão coletiva, constam do quadro 6.

Quadro 6 - Questões do 1º PEP referentes à forma do fogão – Grupo D

Q_{1F} : Qual o melhor formato do captador de energia solar?
R_{1F} : Existem muitos tipos, mas em boas condições o parabólico pode ser até mais eficiente que o fogão convencional.
Q_{2F} : Quais seriam as proporções adequadas?
R_{2F} : (Não encontraram resposta)
Q_{3F} : A abertura do fogão interfere no aquecimento da panela?
R_{3F} : Se a abertura não for pequena demais, não irá interferir.

Fonte: Produção do grupo D.

Cada questão apresentada no quadro 6 está representada pela letra Q acompanhada de sua respectiva numeração e da letra “F” para indicar que pertence ao tema “forma”. Seguimos a mesma ideia para a identificação dos demais temas.

As três questões contidas no quadro 6 não estavam previstas em nossa análise *a priori* (ver figura 47), embora a questão Q_{1F} possa ser comparada com “Por que uma antena parabólica?” No entanto, essa questão não proporcionou um estudo das definições de paraboloide e parábola, como prevíamos.

Acreditamos que a resposta para a questão Q_{2F} não foi encontrada por se tratar de uma questão um pouco vaga e com poucas informações técnicas a respeito das variáveis envolvidas nessas proporções. A resposta dada à Q_{3F} também não favoreceu o desenvolvimento do conteúdo em sala.

Para o tema “posição da panela no fogão”, as questões e respostas apresentadas pelo grupo D estão transcritas no quadro 7, acrescida da questão Q_{1TC} , que, embora fosse esperada pela análise *a priori*, não trouxe contribuição para o desenvolvimento do conteúdo matemático, pois era esperado que a partir dela

surgissem novas questões a respeito do tempo de cozimento e a possibilidade de um fogão com duas bocas, ou seja, uma cônica com dois focos.

Quadro 7 - Questões do 1º PEP relacionadas à posição da panela no fogão – Grupo D

Q_{1TC} : O consumo do alimento pode ser prejudicial à saúde?
R_{1TC} : Não. Quanto à posição da panela Q_{1PP} : Onde deve ficar a panela no captador de energia? R_{1PP} : No foco do paraboloide. Q_{2PP} : Como situar o foco? R_{2PP} : (Os estudantes buscaram a definição de parábola como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta e um ponto (fora da reta) e desenharam essa curva no quadro como ilustração do que haviam entendido). Q_{3PP} : Construindo primeiro o paraboloide, podemos encontrar a posição onde estará o foco? R_{3PP} : Não, pois, construindo primeiro o paraboloide, sem nenhuma medida pré-definida, será praticamente impossível encontrar a posição onde estarão o foco e o plano diretriz, ou seja, primeiramente fixamos um ponto onde será o foco e depois determinamos onde está o plano diretriz e, a partir dessas medidas, construímos o paraboloide.

Fonte: Produção do grupo D.

As três questões apresentadas a respeito da posição da panela (no quadro 7) – Q_{1PP} , Q_{2PP} e Q_{3PP} – favoreceram discussões a respeito do foco, da reta diretriz e da propriedade reflexiva da parábola, além de estudos para a construção da cônica, necessários para responder a última questão desse tema. Portanto, com essa sequência de questões foram trabalhados a definição de parábola, sua construção, foco, reta diretriz, eixo de simetria e a propriedade reflexiva da parábola, que teve sua demonstração apresentada e discutida pelos alunos.

Destacamos que as questões Q_{2PP} e Q_{3PP} , não previstas em nossas análises, trouxeram discussões e contribuições esperadas por outras vias do mapa *a priori*.

Esse grupo não apresentou nenhuma questão que tratasse da possibilidade de cozinhar com duas panelas (dois focos), o que nos levaria a discussões a respeito da construção do fogão usando outras cônicas.

O grupo D apresentou quatro questões relativas à posição de instalação do fogão, apresentadas no quadro 8.

Quadro 8 - Questões do 1º PEP relacionadas à posição de instalação do fogão – Grupo D

Q_{1PF}: Qual a posição que proporciona um melhor funcionamento para o fogão? R_{1PF}: Sempre deve-se procurar a maior radiação solar possível. Q_{2PF}: Como o usuário do fogão o redirecionará de forma que os raios solares incidam paralelamente ao eixo de simetria (do paraboloide)? R_{2PF}: A partir de uma divisão, sabendo que durante um dia o movimento solar é de 180 graus, onde a divisão a ser feita é sobre o tempo em que o indivíduo pretende movimentar o fogão. Assim, terá o aproveitamento de 100% do fogão. Considerando o espaço de tempo das 6h às 18h, tendo a incidência solar, teremos o seguinte cálculo para mover o fogão a cada 30 minutos. $180 \div 24$ (24 é o número de movimentos do fogão). Então, conclui-se que a cada 30 minutos deve-se mover o fogão 7,5 graus no sentido leste/oeste. Q_{3PF}: Há a necessidade de ferramentas de medida para efetuar o redirecionamento do fogão? Quais? R_{3PF}: (Não respondida). Q_{4PF}: O redirecionamento deve ser feito em que frequência de tempo? R_{4PF}: Entre 15 e 20 minutos.
--

Fonte: Produção do grupo D.

As questões Q_{1PF} , Q_{2PF} e Q_{4PF} , previstas pela análise *a priori*, assim como os estudos feitos para suas respectivas respostas, permitiram aos alunos, de forma geral, um estudo das condições necessárias para rotacionar a antena acompanhando o movimento do Sol. A questão Q_{2PF} exigiu apenas um estudo do período em que o Sol está presente na maior parte do ano e uma divisão envolvendo o maior intervalo angular formado pela antena e o solo com o intervalo de tempo desejado para movimentá-la. Assim, não foi possível avançar na direção que permitiria uma abordagem no modelo da geometria analítica e no modelo da geometria linear. A questão Q_{3PF} não foi respondida porque os alunos não sabiam como nem onde encontrar as informações necessárias para respondê-la. O professor sugeriu que buscassem informações com algum profissional específico como marceneiro ou carpinteiro, porém isso ocorreu no último dia do Percuro.

O tema materiais para construção surgiu nas discussões do grupo D, como previmos, e suscitaram cinco questões e respostas apresentadas no quadro 9.

Quadro 9 - Questões do 1º PEP relacionadas aos materiais para construção – Grupo D

Q_{1M} : Qual o melhor material para a construção desse fogão?
R_{1M} : Uma antena parabólica desativada; papel alumínio; cola de madeira; palha de aço e água corrente; corrente ou arame; gancho ou parafusos grandes e panela com duas alças.
Q_{2M} : Será que poderíamos utilizar materiais recicláveis?
R_{2M} : (Não respondida)
Q_{3M} : Quais os materiais necessários para converter raios solares em calor?
R_{3M} : O papel alumínio é o mais indicado para cobrir o fogão e converter energia solar em calor para a panela. Como o fogão solar tem um formato parabólico, o alumínio concentra a luz solar em um ponto, fazendo com que esquente bastante. Por conta da propriedade de reflexão da panela.
Q_{4M} : Qual a contribuição da matemática para a sua construção?
R_{4M} : A matemática será fundamental para garantir uma construção perfeita e que a panela esquentará. (Respondida no terceiro encontro).
Q_{5M} : Quais os procedimentos necessários para a construção de um fogão solar?
R_{5M} : (Não respondida)

Fonte: Produção do grupo D.

Das questões apresentadas no quadro 9, somente a segunda estava prevista *a priori* e não foi respondida pelos estudantes também por falta de informações especializadas. A questão Q_{5M} também não foi respondida, mas, neste caso, os estudantes alegaram que a resposta só seria encontrada ao término de toda investigação e com todas as questões respondidas. Nenhuma das questões Q_{1M} , Q_{3M} e Q_{4M} eram esperadas por nossa análise *a priori* e não trouxeram novas contribuições para o estudo da cônica, mas reforçaram a importância da propriedade reflexiva da parábola para o funcionamento do fogão solar. Por outro lado, nossa análise *a priori* previa duas outras questões que não foram criadas pelos estudantes, uma delas tratava do uso de energia solar e a outra procurava determinar a relação custo-benefício do fogão solar. Acreditamos que essas questões poderiam surgir se tivéssemos mais tempo disponível para o experimento.

Nenhuma das três questões que tratam da utilização do fogão construídas pelo grupo D, explicitadas no quadro 10, foram consideradas *a priori* e, como podemos ver nas respostas, não contribuíram para desenvolver conhecimentos a respeito de parábola.

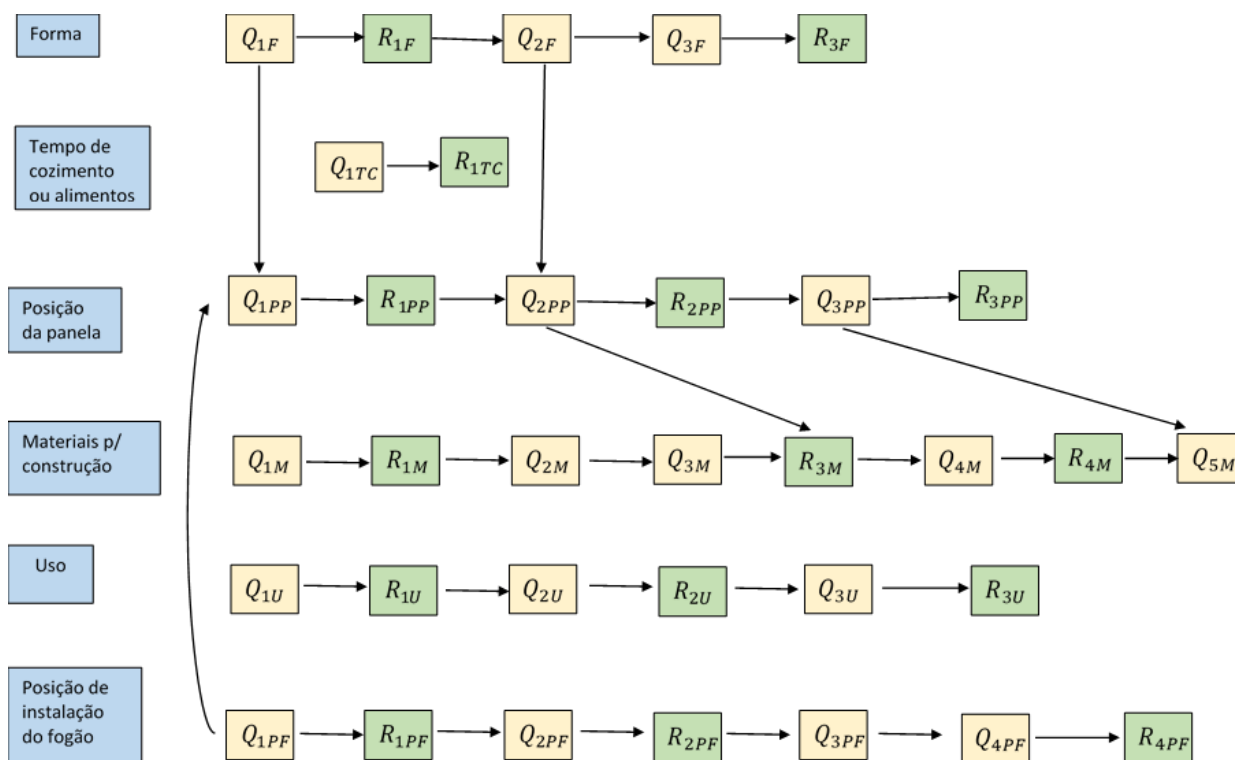
Quadro 10 - Questões do 1º PEP relacionadas ao uso do fogão – Grupo D

Q_{1U} : Qual o objetivo de construir um fogão solar?
R_{1U} : Economia de dinheiro, aproveitamento da antena parabólica velha e menos dano ao meio ambiente.
Q_{2U} : O que é um fogão solar?
R_{2U} : Um objeto para cozinhar alimentos usando os raios do sol.
Q_{3U} : Há alguma restrição para seu uso?
R_{3U} : A maior restrição é que a sua utilização só pode ser feita durante os períodos de radiação solar, o que exige um local de instalação isento de sombras durante o dia e, principalmente, outro tipo de fogão para atender as necessidades de cozimentos em horários sem radiação solar e nos dias de chuva ou céu nublado.

Fonte: Produção do grupo D.

Assim, encerramos a análise do primeiro PEP vivenciado pelo grupo D, de estudantes universitários, e, a partir dela, construímos o mapa de questões e respostas apresentado na figura 50, baseado nos quadros 6 a 10. Nele as questões e respostas estão identificadas por ordem cronológica e tema e relacionadas por meio de setas para evidenciar que houve questões que serviram de incentivo para a elaboração de outras novas questões. Por exemplo, tanto a “ Q_{1F} : por que uma antena parabólica?” quanto a questão “ Q_{1PF} : qual a posição que proporciona um melhor funcionamento para o fogão?” contribuíram para a elaboração da questão “ Q_{1PP} : onde deve ficar a panela no captador de energia?” O mesmo acontece com as questões “ Q_{2F} : quais seriam as proporções adequadas?” e “ Q_{4M} : qual a contribuição da matemática para a sua construção?”, que impulsionaram a questão “ Q_{2PP} : como situar o foco?”

Figura 50 - Mapa de questões e respostas do 1º PEP: como construir um fogão solar, do grupo D



Fonte: Produzida pelo autor.

Outro ponto a ser observado é que nos mapas da análise *a priori* os temas forma, tempo de cozimento e posição da panela relacionam-se entre si, mas não se relacionam com os outros temas, que por sua vez também se relacionam entre si. No mapa do primeiro PEP, vivenciado pelo grupo D, surge a relação entre o tema posição da panela tanto com o tema posição de instalação do fogão quanto com o tema materiais para construção e outras previstas não ocorrem, como, por exemplo, o tempo de cozimento/alimentos com a posição da panela. Na realidade, o tema tempo de cozimento/alimento fica isolado, sem relação com qualquer outro.

Quanto aos modelos, podemos concluir que este primeiro PEP permitiu apenas conhecimentos do modelo da geometria sintética, restringindo-se à parábola. Acreditamos que este Percorso tem potencial de avançar pelos demais modelos existentes no MER, previstos na análise *a priori*, porém seria necessário um tempo maior para a realização do experimento. Por último, o pôster anunciado no primeiro encontro não foi construído devido ao curto tempo de experimento.

5.5.2 Segundo Percurso de Estudo e Pesquisa

Passamos agora ao 2º PEP, que foi realizado com 6 alunos do terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Murilo Braga, identificado como grupo A. Para este grupo o pesquisador iniciou o primeiro encontro informando que a tarefa seria elaborar um pôster para apresentar aos alunos do Ensino Fundamental com instruções de como construir um fogão solar e que deveriam pensar em perguntas que os ajudassem a esclarecer o máximo possível os passos dessa construção. Em seguida, foram divididos em dois grupos compostos por 3 integrantes cada.

Da mesma forma que fizemos no PEP anterior, apresentaremos as questões e respostas apresentadas pelo grupo A por temas em quadros seguidos de suas respectivas análises. Para evitar repetições desnecessárias, apresentaremos apenas os resultados que diferem do apresentado pelo grupo anterior.

Quadro 11 - Questões do 2º PEP relacionadas à forma do fogão – Grupo A

Q_{1F} : Qual o tamanho do fogão solar?

R_{1F} : Caso ele tenha a estrutura de uma antena parabólica, os tamanhos podem variar de 1,6 metros até 2,2 metros.

Q_{2F} : O tamanho da estrutura do fogão influencia no tempo de aquecimento?

R_{2F} : (Não respondida)

Fonte: Produção do grupo A.

No quadro 11, vemos duas questões que não foram previstas em nossa análise *a priori*, embora a questão Q_{2F} seja semelhante à terceira questão elaborada pelo grupo D, exibida no quadro 6 da análise do 1º PEP. Assim, como o grupo D (estudantes de licenciatura), o grupo A (estudantes do Ensino Médio) não apresentou resposta para uma das questões elaboradas para esse tema.

O grupo A para o tema posição da panela apresentou três questões com suas respectivas respostas, que foram transcritas no quadro 12. As duas primeiras questões também foram elaboradas no 1º PEP pelo grupo D, no entanto destacamos a preocupação dos estudantes para que a definição de parábola por lugar geométrico aparecesse na resposta R_{2PP} .

O grupo A, diferentemente do grupo D, apresentou a questão Q_{3PP} , mostrando explicitamente a predominância da geometria analítica na formação desses estudantes do Ensino Médio. Essa questão foi enunciada ao final do terceiro e último

dia do experimento e, por isso, não foi possível explorar a parábola na geometria analítica ou mesmo a necessidade de um referencial cartesiano para determinar a equação da cônica.

Quadro 12 – Questões do 2º PEP relacionadas à posição da panela – Grupo A

Q_{1PP}: Como poderíamos encontrar a posição ideal para colocar a panela? R_{1PP}: No foco da parábola. Q_{2PP}: Como encontrar o foco? R_{2PP}: Caso a pessoa utilize uma antena parabólica, não precisará se preocupar com a posição do foco, pois este já está calculado. Dessa forma, basta colocar a panela no lugar do receptor. No entanto, se a pessoa optar por outro material, deverá definir uma reta (diretriz), a qual deverá possuir uma distância até o vértice e definir outro ponto que deverá ter essa mesma distância. Dessa forma, irá encontrar o foco que irá concentrar todos os raios refletidos. A pessoa deverá fixar a panela em um ponto e começar a construir o fogão de modo que a distância entre um ponto até a panela seja igual à distância desse mesmo ponto até a reta diretriz. Q_{3PP}: Por que não usamos a equação da parábola para obter esses dados? R_{3PP}: (Mostramos aos alunos que para termos uma equação de uma parábola ou de uma representação gráfica qualquer é necessário definirmos um sistema referencial, portanto, neste caso, não seria possível encontrarmos a equação da cônica).
--

Fonte: Produção do grupo A.

Como podemos ver no quadro 13, com relação ao tema que trata dos materiais, os estudantes do grupo A apresentam as mesmas questões que as do grupo D, salvo por alguma mudança no próprio material.

Quadro 13 - Questões do 2º PEP relacionadas aos materiais – Grupo A

Q_{1M}: Quais materiais a se utilizar? R_{1M}: Sucata de antena parabólica grande com área de reflexão de $1m^2$, suporte de chapa de aço de 4mm com estrutura de ferro de 6mm e usar uma panela metálica, cola branca para madeira. Os espelhos côncavos possuem 2mm de espessura. São necessários também parafusos. Q_{2M}: Quais ferramentas utilizar para construção? R_{2M}: Lâmina de diamante posicionada (encontrada em vidraçarias), alicate, máquina de solda e furadeira. Q_{3M}: Quais as formas de potencializar o rendimento energético? R_{3M}: Quanto mais grosso o papel alumínio, mais eficiente será o fogão. Utilizar painéis de cerâmica escura pode potencializar o rendimento, uma vez que irá absorver mais energia e esquentar mais rápido, além de manter o fogão sempre direcionando ao sol.
--

Fonte: Produção do grupo A.

Para o tema uso do fogão, o grupo A elaborou três questões e respostas para duas perguntas (quadro 14) que, no entanto, não foram contempladas em nossa análise *a priori* e, tampouco, enunciadas pelo grupo D.

Quadro 14 - Questões do 2º PEP relacionadas ao uso do fogão – Grupo A

Q_{1U}: Qual local e horário adequados para utilizar o fogão? R_{1U}: Desde que seja um local aberto das 10h às 16h. Q_{2U}: Dicas úteis para utilizar o fogão solar? R_{2U}: Evite deixar impressões digitais e manchas no fogão, mantenha a superfície interna clara, limpando ocasionalmente com uma toalha. Para aplicações por longos períodos, um buraco no chão irá manter o fogão de funil seguro. Q_{3U}: Qual a vida útil do fogão? R_{3U}: (Não respondida).

Fonte: Produção do grupo A.

No entanto, os estudantes enunciaram e não encontraram resposta para a questão Q_{3U} pelo fato de o fogão solar não ser tão explorado comercialmente ou em pesquisas acadêmicas.

Para o tema tempo de cozimento, o grupo A apresentou apenas uma questão (quadro 15) que estava prevista em nossa análise *a priori* e não havia surgido no 1º PEP do grupo D. A resposta não contribuiu para o desenvolvimento de qualquer conhecimento matemático.

Quadro 15 - Questões do 2º PEP relacionadas ao tempo de cozimento – Grupo A

Quanto ao tempo de cozimento e aos alimentos Q_{1TC}: O processo de cozimento demora? R_{1TC}: O tempo de cozimento diminuirá se o forno for tampado com um material transparente, pois assim a luz entra e o calor não consegue sair.

Fonte: Produção do grupo A.

Das três questões e respostas que tratam do tema posição de instalação do fogão apresentadas pelo grupo A (quadro 16), duas (Q_{2PF} e Q_{3PF}) não surgiram nem durante o 1º PEP e nem em nossa análise *a priori*, mas contribuíram para o desenvolvimento da propriedade reflexiva da parábola.

As questões do quadro 16 nos mostram a curiosidade dos estudantes do Ensino Médio pela veracidade da propriedade reflexiva da parábola, fato que não ocorreu com os alunos do Ensino Superior (grupo D).

Quadro 16 - Questões do 2º PEP relacionadas à instalação do fogão – Grupo A

Q_{1PF} : De quanto em quanto tempo é necessário mudar a posição do fogão? Como?

R_{1PF} : (Não respondida)

Q_{2PF} : Por que o raio que passa paralelo ao eixo de simetria tem de obrigatoriamente passar pelo foco?

R_{2PF} : (Foi demonstrada a propriedade reflexiva da parábola com o uso do Teorema de Poncelet, conforme o Anexo C deste trabalho).

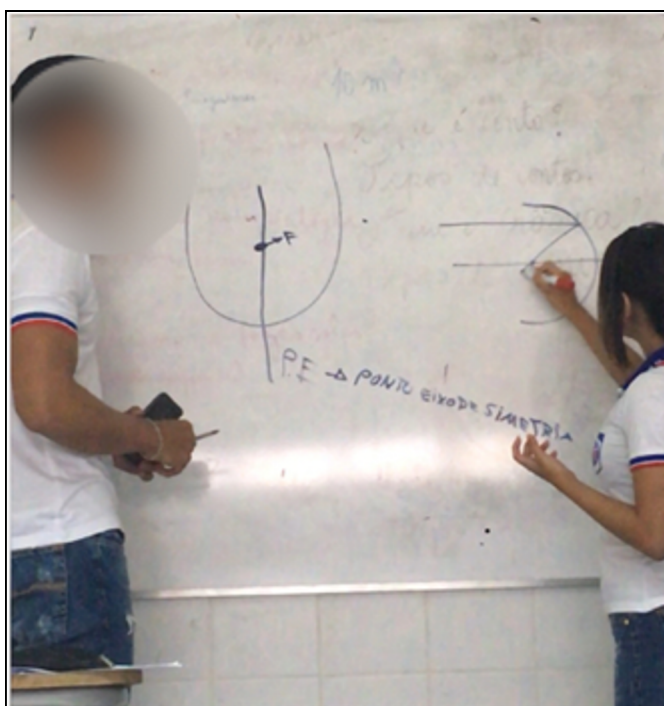
Q_{3PF} : O que é o eixo de simetria? – É como se fosse um eixo que surge da raiz (- Qual raiz?) – Do plano cartesiano! Não é?

R_{3PF} : É uma linha que divide uma figura em duas partes iguais (simétricas).

Fonte: Produção do grupo A.

Na figura 51, podemos ver dois estudantes do grupo que, com a ajuda do professor, ilustraram e explicaram essa propriedade, responsável por garantir o aquecimento da panela no fogão solar.

Figura 51 - Estudantes do grupo A enunciando a propriedade reflexiva da parábola

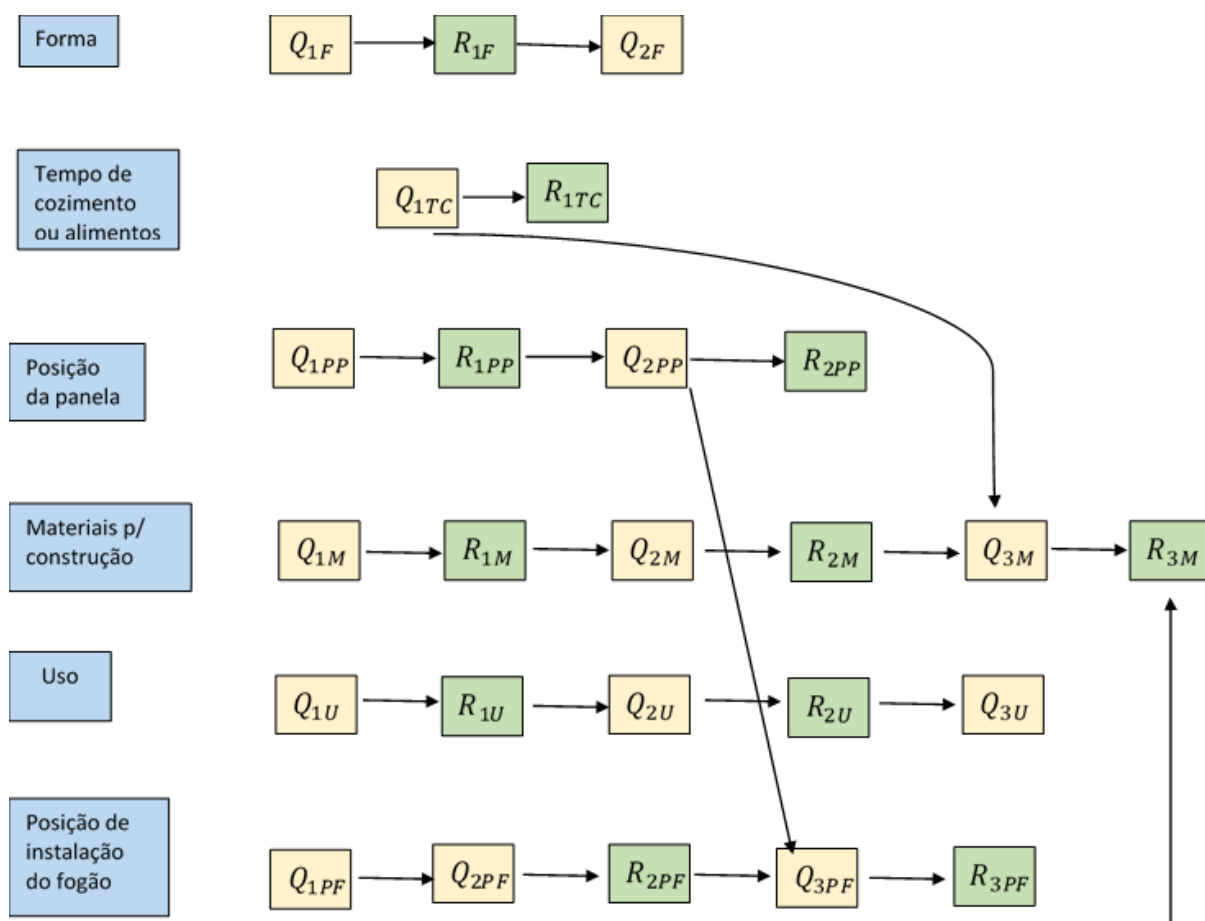


Fonte: Produzida pelo autor.

Ainda a respeito desse tema, cabe salientar que o enunciado da questão Q_{3PF} mostra uma certa confusão entre plano e plano cartesiano, já que naquele momento não trabalhávamos com nenhum sistema referencial. Além disso, é usada a palavra “raiz”, um termo associado ao estudo de função, o que mostra a predominância do

uso da parábola apenas como representação gráfica de funções quadráticas, o que já foi comprovado por Silva (2011), como está em nossa revisão bibliográfica. Na figura 52, apresentamos o mapa de questões e respostas deste 2º PEP vivido pelo grupo A, de estudantes do Ensino Médio. Comparando os dois mapas, este com o apresentado na figura 50 experimentado pelo grupo D, há semelhanças e diferenças, por exemplo, algumas questões que aparecem no primeiro, mas não neste 2º PEP. No entanto, matematicamente, ficaram bem próximos, isto é, foi possível definir a parábola por lugar geométrico e seus elementos, além da propriedade reflexiva que foi questionada pelos estudantes do grupo A, o que consideramos ser uma consequência dessa metodologia de ensino.

Figura 52 - Mapa de questões e respostas do PEP com alunos do EM – Grupo A



Fonte: Produzida pelo autor.

Como destaque, podemos observar a questão Q_{3PP} com potencial para explorar as diferenças entre o modelo da geometria sintética e o modelo da geometria analítica, além de trabalhar a construção da equação da parábola.

Como já mencionamos anteriormente, foram realizados quatro experimentos com quatro turmas distintas de estudantes. Para as duas turmas restantes, grupos B e C, percebemos que somente o grupo B apresentou uma questão com uma resposta distinta das já apresentadas nos dois primeiros PEP e, portanto, decidimos apresentar apenas essa questão. Dessa forma, a última questão a ser analisada (quadro 17) foi elaborada durante o 3º PEP, de que participaram somente três estudantes do segundo período do curso de licenciatura em Matemática, que denominamos grupo B.

Quadro 17 - Questão do 3º PEP relacionada à posição de instalação do fogão – Grupo B

Q_{1PF} : Quantos graus são necessários para girar a parábola para que os raios solares sejam paralelos ao eixo de simetria dela?

Fonte: Produção do grupo B.

Para responder essa questão o grupo buscou construir uma função que, para cada hora de Sol passada após às 6h, forneça como imagem o ângulo em que o usuário deve girar o fogão (no sentido Leste-Oeste). Esse ângulo é formado pelo eixo central do fogão e uma reta traçada no solo.

A busca pela resposta R_{1PF} gerou várias discussões. Primeiro um estudante que se dispôs a respondê-la nos dizia querer usar “função” na resolução, mas em suas sugestões de resposta cometeu muitos erros matemáticos tanto em notações como na própria definição de função. Tal fato conduziu o formador a fazer algumas mediações para explicar o que é uma função, seu domínio, o conjunto imagem e o contradomínio, além de orientar para a importância do uso de uma notação correta para entendimento do texto matemático a partir de exemplos e contraexemplos. Essa foi uma visita à obra (CHEVALLARD, 2013a) em que o pesquisador apresentou elementos de função de uma forma tradicional, expositiva, tendo a posse de todo o conhecimento, porém essa visita teve uma razão de ser, que foi “aprender função para resolver a questão R_{1PF} ”.

Por outro lado, destacamos o comprometimento dos alunos com o problema a ser resolvido, pois a cada tentativa apresentada pelo referido estudante os colegas tentavam ajudar na busca pela resposta, pois consideravam essa resposta importante para responder a questão geratriz, mostrando assim que tomaram o problema como seus. Atribuímos esse comportamento à metodologia do PEP, que tem como “pano de fundo” o paradigma de questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2013a).

Com isso, terminamos as análises da dialética da cronogênese para os PEP experimentados (grupos A, B, C e D). Reiteramos que essa análise foi feita confrontando os mapas de questão e resposta desenhados *a priori* e *a posteriori*. Para completar as análises, segundo nossa metodologia, nos restam as dialéticas da topogênese e cronogênese, que é o que faremos a seguir.

Com respeito à dialética da topogênese (coletivo-individual), isto é, as responsabilidades atribuídas aos estudantes e ao professor, temos por objetivo identificar elementos oriundos do monumentalismo que dificultam a implementação e o andamento do PEP como estratégia de ensino para cônicas. Para os Percursos experimentados nesta investigação, ficou destacada a má elaboração de determinadas questões ou a falta de critério para validá-las após serem enunciadas por um integrante do grupo. Acreditamos que esse problema surge porque no paradigma monumentalista essas são responsabilidades do professor geralmente implícitas no contrato didático de qualquer aula inserida nesse paradigma. Por outro lado, com o dispositivo do PEP, essas tarefas são atribuídas aos estudantes, que, em alguns momentos, não as cumprem de maneira satisfatória, pois, além de elaborarem questões sem objetividade, não percebem que elas não contribuem para a busca da resposta final do Percurso, o que se transforma em uma restrição à implementação do PEP. No quadro 18, apresentamos algumas questões desse tipo.

Quadro 18 - Questões sem foco elaboradas pelos estudantes durante o PEP

Qual local e horário adequados para utilizar o fogão?
Como fazer para cozinhar quando não tiver energia solar?
Existe alguma maneira para mantermos a eficiência em dias com muitas nuvens?

Fonte: Produção dos estudantes.

Notemos que são questões desnecessárias para responder a questão inicial “Como construir um fogão solar?” e que poderiam ser descartadas ou talvez marcadas como não importantes, o que possibilitaria realocar os esforços e o tempo para outras questões mais pertinentes ao objetivo do estudo em questão.

Tratando da mesogênese, vimos que a internet foi a principal fonte de busca de informação para os estudantes, como já previsto na análise *a priori*, com algumas exceções em que o professor era consultado. Também notamos a falta de preocupação dos estudantes com a confiabilidade das fontes, já que consideravam

verdadeira qualquer informação que aparecia na tela de seus computadores. Arriscamo-nos a afirmar que essa atitude pode ser uma consequência de esses alunos, inseridos no paradigma do monumentalismo, não estarem acostumados a trabalhar com uma metodologia baseada em uma investigação (por meio de questões e respostas).

Apesar das diferenças entre a metodologia do PEP e a forma tradicional de “aprender” com que esses estudantes estão acostumados, todos se mostraram encantados após experimentarem esse novo modelo e queriam continuar com as investigações, com os encontros, mas, infelizmente, não foi possível da nossa parte.

Para finalizar, apresentamos, no que segue, algumas considerações a respeito do PEP vivido, no sentido de explicitar as restrições, além de sugestões para superá-las que nos propiciaram elementos a serem considerados no desenvolvimento da formação inicial, que foi realizada com alunos de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe.

5.6 Resultados e considerações

Iniciamos pelas restrições que identificamos na seção anterior, como o caso da falta de costume e de critérios para elaborar e avaliar uma questão durante uma aula quando se usa o PEP. Como sabemos, nesta metodologia baseada no questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2013a), os estudantes se encontram livres para discutirem quaisquer assuntos relacionados à questão geratriz. Vimos que, em alguns momentos, os alunos perdem o foco do problema, o que provoca contratempos no desenvolvimento do percurso. Isso foi notado por meio de questões que, logo após elaboradas, foram descartadas pelos próprios alunos, como o caso da questão “há necessidade de ferramentas de medidas para efetuar o redirecionamento do fogão? Quais?”, que os estudantes alegaram não terem conhecimentos específicos necessários para respondê-la e não foram procurar qualquer resposta. Tivemos também outras questões rejeitadas por serem consideradas muito difíceis, como a questão “quais os procedimentos necessários para a construção de um fogão solar?”, que a classe considerou equivalente à questão geratriz e, portanto, para respondê-la, necessitavam responder todas as outras já enunciadas e, talvez, outras tantas mais, que possivelmente surgiriam com o passar dos estudos. Acreditamos

também que muitas questões foram desconsideradas antes mesmo de serem escritas ou comunicadas, ficando apenas no pensamento de algum aluno e, neste caso, se forem necessárias para o andamento do trabalho o professor poderá propor. Classificamos essas questões como explícitas ou implícitas.

Na tentativa de superar essas restrições, procuramos entender mais sobre as questões que surgiram em nossos quatro experimentos com o PEP, a fim de classificá-las quanto à sua importância para a solução do problema e para o ensino de cônicas. Observamos que, após ser apresentada a questão geratriz Q_0 , surgiram questões que classificamos de diretas ou indiretas, considerando diretas aquelas que deviam ser respondidas para o avanço do trabalho e para construir a resposta final, por exemplo, “onde deve ficar a panela no fogão solar?” ou “quais materiais são necessários para a construção deste fogão?”. Já as indiretas não são estritamente necessárias para a solução do problema inicial, porém poderiam ser estudadas no final do Percurso, como informações adicionais ao fogão solar, ou até mesmo descartadas, a depender do tempo disponível para o trabalho.

Além das questões diretas e indiretas, identificamos algumas como questões-chave por estarem diretamente ligadas ao objeto matemático de estudo e que implicam o estudo da matemática envolvida no contexto para a elaboração de suas respostas. Essas, por sua vez, podem pertencer ao grupo das diretas ou indiretas e, se não elaboradas pelos alunos, devem ser sugeridas pelo professor. Portanto, recomendamos que o professor identifique no mapa de questões e respostas, realizado *a priori*, quais questões possuem real potencial tanto para responder a questão geratriz quanto para o estudo do objeto matemático que está em jogo, buscando as razões (possivelmente não matemáticas) para aprender o conteúdo pretendido. Tais ações devem reduzir prováveis contratempos e maximizar o alcance do PEP em relação ao MER, além de reduzir os momentos de monumentalismo²⁵ durante o Percurso, ou seja, aqueles em que o professor introduz algum conteúdo sem que tenha surgido nenhuma questão para isso. Tal fato pode ocorrer, por exemplo (quadro 19), no desdobramento de uma questão direta quando a questão indireta (e chave) permitiu o estudo da propriedade reflexiva da parábola. Nessas

²⁵ Monumentalismo é quando o conteúdo é apresentado sem nenhuma razão para ser estudado. Já uma visita à obra ocorre quando surge uma questão (uma razão) e o professor apresenta o conteúdo de maneira tradicional.

circunstâncias, o professor deve identificar as questões-chave entre as questões diretas ou indiretas para que o conteúdo matemático seja explorado o máximo possível.

Quadro 19 - Questões direta, indireta e chave

Q_1 : Onde deve ficar a panela? (*Questão direta, imprescindível para a solução do problema*).

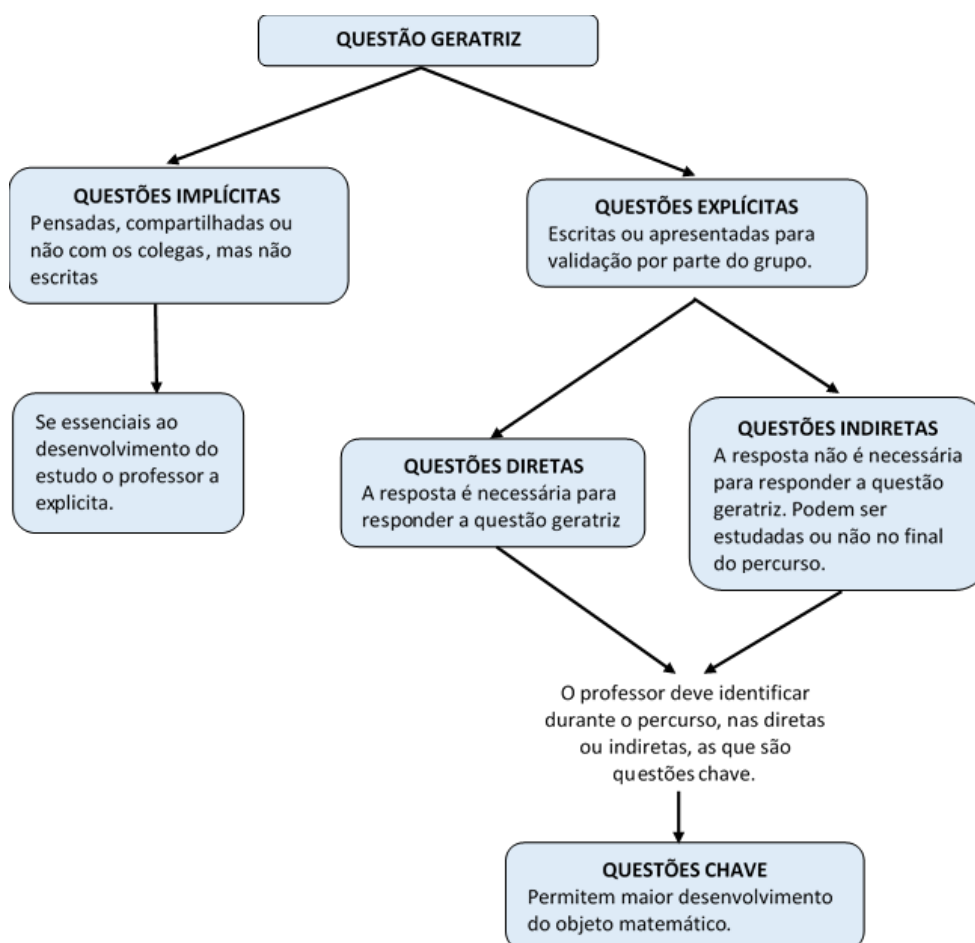
R_1 : No foco de uma das parábolas que formam o parabolóide.

Q_2 : Por que a panela deve ficar na posição do foco? (*Questão indireta e chave*)

Q_3 : Qual propriedade matemática garante isso? (*Questão indireta e chave*)

Para melhor identificação da classificação aqui apresentada, construímos o esquema exibido na figura 53.

Figura 53 - Classificação das questões no PEP



Fonte: Produzida pelo autor.

Nessa classificação vemos que a questão geratriz é a base para todas as demais questões e que, uma vez bem planejada, auxilia os estudantes e o professor

na validação da questão após ser formulada e, portanto, evita contratempos no Percurso quando surgirem questões indiretas sem potencial para o estudo do objeto matemático, cumprindo assim o objetivo de acrescentar conhecimentos úteis para a construção de $R^\heartsuit$.

Também vimos que os alunos se empenharam bastante em resolver as questões parciais $Q^\diamond$ (diretas ou indiretas) por se identificarem com o problema de investigação, o que nos permite concluir que a questão geratriz, sempre que possível, deve pertencer a ou tratar de uma situação social (ou real) que faça parte de um contexto acessível ou próximo aos estudantes. O professor deve estimular os alunos a escreverem aquelas questões que seriam consideradas implícitas, pois por meio destas se pode identificar alguma falha nos conhecimentos matemáticos mobilizados.

Quanto às reflexões voltadas à topogênese, consideramos importante que aconteça um rodízio entre os integrantes para que todos possam trabalhar em todas as funções (redator, investigador e orador), porém é pertinente que cada integrante encontre a função que possa desempenhar melhor após esse rodízio, ou seja, devem perceber quais integrantes são mais apropriados para determinadas tarefas ou deveres e, assim, proporcionarem maior rendimento para o grupo.

Pela quantidade de tarefas envolvidas no Percurso, observamos em um grupo formado por quatro estudantes a necessidade de dois investigadores em cada grupo e que para a função do orador o professor deverá orientá-lo para que apresente os resultados produzidos pelo grupo para os demais colegas da classe.

Diante do exposto e considerando que nossa investigação continuará por meio de uma formação inicial para estudantes de licenciatura, que será desenvolvida com base no dispositivo do PEP-FP, elencamos os resultados essenciais obtidos com o experimento do PEP para essa formação.

O ponto primordial é a elaboração de uma questão geratriz clara e direta (Q_0) que sirva como norte para todo o Percurso, principalmente para validar as questões que surgem como consequência. Além disso, essa Q_0 deve estar alinhada com o MER, isto é, a análise de seu mapa de questões e respostas realizado *a priori* deve permitir maximizar as praxeologias matemáticas contidas no MER que devem ser estudadas durante o PEP.

Tanto a classificação das questões (figura 53) quanto as responsabilidades de cada elemento do grupo (figura 46) devem ser passadas aos futuros professores em formação inicial enquanto participam do PEP-FP para que possam utilizá-las com seus alunos em sua prática docente quando formados.

O PEP vivido nos permitiu identificar uma certa confusão ou falta de percepção, pelos alunos do Ensino Médio, das diferenças entre a geometria sintética e a geometria analítica que não ocorreu com os estudantes universitários. Esse fato reforça a importância de o MER tratar os diferentes modelos de geometrias das cônicas e encaminha o formador a criar meios para abordá-las durante o trabalho com o PEP na formação inicial, que é do que trataremos no próximo capítulo.

6 Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores

Neste capítulo, apresentamos os objetivos de nosso Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores PEP-FP, as informações a respeito do local e dos sujeitos de pesquisa, seguidas da análise *a priori* do PEP-FP, do seu desenvolvimento e de suas análises considerando os acontecimentos antes, durante e após a realização do PEP.

6.1 Objetivos do PEP-FP

Dividimos os objetivos do PEP-FP orientados pelas duas posições que o autor desta tese ocupa neste trabalho: formador de professores e investigador em Educação Matemática.

Como formador de professores, elencamos os seguintes objetivos:

- Oferecer recursos aos futuros professores para que percebam que existe um paradigma monumentalista e para que possam elaborar propostas didáticas mais baseadas no paradigma de questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2013a).
- Propor aos futuros professores atividades para o estudo dos modelos de geometrias das cônicas com foco na razão de ser dessas cônicas no Ensino Básico, isto é, considerar os modelos de geometrias das cônicas como respostas a problemas formulados por eles, mas que poderiam ser formulados por seus alunos.

Os objetivos como investigador em Educação Matemática, trabalhando com a Teoria Antropológica do Didático, foram determinados pelos seguintes problemas:

- O problema epistemológico, que possibilita investigar de que maneira o MER para os modelos de geometrias das cônicas é útil tanto para o PEP como para o PEP-FP (segundo Ruiz-Olarría (2015) e Licera (2017)), isto é, o MER como ferramenta para desenhar o PEP e o PEP-FP, trabalhar o problema econômico na gestão do PEP (por parte do formador) e para analisar o PEP com os futuros professores, que é a ideia das praxeologias para a formação de professores dessas duas autoras citadas neste parágrafo.
- O problema ecológico, que permite investigar de que maneira se manifesta o paradigma monumentalista durante a experimentação do PEP-FP e quais dispositivos

foram desenhados e utilizados para controlá-lo, além de investigar a ocorrência ou não de questionamento do mundo e por meio de quais dispositivos ou ferramentas conseguiram “superar” o monumentalismo.

6.2 Informações do local e dos sujeitos da pesquisa

Nossa formação ocorreu no Laboratório de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática (LEPEM) da Universidade Federal de Sergipe (UFS), no município de Itabaiana, onde encontramos uma sala climatizada, com mesas para trabalho em grupo, lousa, internet, projetor, livros didáticos dos Ensinos Fundamental e Médio, além de materiais didáticos como modelos de sólidos geométricos, jogos etc.

Todos os sujeitos foram estudantes do curso de licenciatura em Matemática dessa universidade e bolsistas do programa Residência Pedagógica²⁶ orientados pelo professor Dr. Rafael Almeida, que concordou com nossa pesquisa e considerou nossa proposta de formação coerente com o planejado para o semestre em vigência. Os sujeitos assinaram também o termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo B), que permitiu registrar a formação por meio de filmagem, gravação de voz e registros fotográficos para serem usadas pelo investigador para fins de pesquisa.

A formação teve início com 24 estudantes, que foram divididos igualmente em 6 grupos, porém somente 16 estiveram presentes em toda a formação, o que reduziu a quantidade de grupos para 4, identificados por G2, G3, G4 e G6 nas análises deste trabalho. A princípio, havíamos programado 14 encontros de 2h/aula, que seriam realizados em três semanas, do dia 24/09 ao dia 11/10/2018, de segunda à sexta-feira, durante o recesso acadêmico da UFS, entretanto, após o segundo encontro, as sessões passaram a ter 3 horas de duração com um intervalo de 20 minutos, a pedido dos estudantes, que não alterou o total de 28 horas programadas. Esses alunos frequentavam do 5º ao 8º semestre do curso de licenciatura em Matemática e, para a maioria, o único contato com cônicas foi na disciplina Geometria Analítica e Vetores. Somente um terço da turma afirmou ter estudado cônicas no Ensino Médio apenas em Geometria Analítica.

²⁶ Criado pelo governo federal, “que objetiva induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade do seu curso” (BRASIL, 2018. Acesso em 12 fev. 2018. <https://www.capes.gov.br/pt/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica>).

Dando sequência ao capítulo, apresentaremos, a seguir, a análise *a priori* de nossa proposta de formação baseada em um PEP-FP.

6.3 Proposta de Formação Inicial baseada no dispositivo PEP-FP: análise *a priori*

O caminho para chegar até a elaboração do PEP-FP teve início com construção de nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER), que nos mostrou o que são as cônicas, o local em que elas “vivem” e quais são as razões para sua existência na matemática. Baseando-nos em nosso MER, nas orientações da TAD e no trabalho de Otero, Llanos e Parra (2018), construímos o Percorso de Estudo e Pesquisa com a questão inicial “como construir um fogão solar?”, que foi experimentado tanto com alunos do terceiro ano do Ensino Médio, como também com estudantes de licenciatura em Matemática, como já descrito. A integração de todos esses trabalhos considerando as características dos estudantes e de alguns cursos de licenciatura em Matemática brasileiros formou os elementos básicos para o desenho do nosso PEP-FP.

Planejado para ter 14 encontros com duração de 2h/aula cada um, o PEP-FP teve uma questão que apresenta um problema docente como questão geratriz:

Q_{0FP} : Como ensinar cônicas? Por que ensiná-las?

A resposta $R^\heartsuit$ para essa questão Q_{0FP} foi construída gradativamente pelos futuros professores durante os encontros. Assim como no PEP, acreditamos que, para responder a questão geratriz, os professores em formação inicial elaborarão questões parciais $Q_i^\spadesuit$ e suas respostas serão discutidas e compartilhadas entre todos os participantes. Após a discussão, essas respostas $R_i^\spadesuit$ podem ser devolvidas aos seus respectivos grupos para possíveis alterações, de forma que o conhecimento gerado na discussão seja inserido no *milieu M* do sistema didático.

Nesta análise *a priori*, acreditamos que poderão surgir as seguintes questões:

Q_{01} : O que dizem os documentos oficiais?
 Q_{02} : O que há nos livros didáticos?
 Q_{03} : O que o professor faz em classe? (O que eles aprenderam enquanto alunos?)
 Q_{04} : O que poderia ser feito? (Inovação)

Q_{05} : Qual a razão de ser das cônicas? (Por que as cônicas eram tão importantes para matemáticos/cientistas antigos?)

Q_{06} : O que precisa saber um professor que possui a tarefa de ensinar cônicas?

Esperamos que, ao final de cada sessão, um representante de cada grupo será responsável por entregar uma ata descrevendo o que foi produzido por seus colegas, quais as respostas encontradas, quais fontes foram usadas na busca das respostas e o que foi feito por cada integrante. Da mesma forma, no início de cada sessão, um representante de cada grupo irá compartilhar com os demais grupos as respostas encontradas na sessão anterior. Cuidaremos para que ocorra um rodízio dessas tarefas para que todos os integrantes tenham uma participação a mais igualitária possível.

Na segunda sessão, pretendemos fazer uma breve introdução à transposição didática, segundo Chevallard (1985), destacando que um saber matemático pode ter sofrido transformações desde seu surgimento até chegar aos livros didáticos dos dias de hoje, quando é conhecido por “saber a ensinar”, e aproveitaremos o momento para apresentar duas novas questões, uma teórica e voltada para o livro didático:

Q_0^θ : Como analisar o saber a ensinar?

e outra relacionada à prática do professor em sala de aula:

Q_{01}^* : Há razão de ser para as cônicas nos livros didáticos?

Como ensinar cônicas apresentando alguma razão de ser?

Para responder a questão teórica Q_0^θ , precisamos nos distanciar do currículo proposto e ter um “olhar de fora”, isto é, analisar o que está posto nos documentos oficiais, no currículo e nos livros didáticos por meio de uma visão epistemológica. Daí a necessidade de desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência para as cônicas, e acreditamos que os estudantes percebam essa demanda.

Quanto à questão Q_{01}^* , pelos resultados encontrados em nossa revisão bibliográfica e pelo Modelo Epistemológico Dominante desenvolvido nesta pesquisa, supomos que a resposta à primeira pergunta será negativa. Para a segunda pergunta, apresentaremos como proposta de resposta o PEP já desenvolvido e experimentado durante nossas pesquisas com a questão geratriz “ Q_0 : Como construir um fogão

solar?” Programamos quatro sessões para esse percurso, ocasião em que os futuros professores viverão a experiência na posição de alunos do Ensino Básico.

O PEP é uma resposta muito distinta das que imperam nos ensinos básico e universitário, tanto no âmbito da matemática como no da didática, considerada por Ruiz-Olarría (2015, p. 209, tradução nossa) como imprescindível para “proporcionar aos futuros professores um ponto de vista próprio, isto é, uma tentativa de resposta, provisória e reformulável, pela qual se pode observar, analisar e avaliar as possíveis respostas à Q_{0FP} ”. Acreditamos ainda que os futuros professores também estarão mais capacitados a desenhar um MER e, conseqüentemente, a responderem à questão Q_0^g após vivenciarem esse PEP.

Estamos prevendo para a sétima sessão que cada grupo pode discutir e elaborar uma proposta de plano de aula por meio da questão Q_{02}^* , que será enunciada pelo formador.

Q_{02}^* : Como você acredita que deveria ser o ensino de cônicas?

Para ajudar na elaboração dessa resposta, será sugerida a leitura do artigo “Uma história do ensino das cônicas na matemática escolar no Brasil”, dos autores Paques e Sebastiani Ferreira (2011). Após a discussão desse artigo e já experimentado o PEP, os futuros professores serão incentivados a desenharem um MER que valha como base para o entendimento do que são as cônicas no contexto matemático; que seja uma orientação a mais para a elaboração da resposta à questão Q_{02}^* e que sirva também como referência – não baseada em livros didáticos ou nas orientações presentes nos documentos oficiais – que possa auxiliar na avaliação de outras propostas de ensino. A socialização dos MER desenvolvidos por cada grupo será feita na oitava sessão, quando tentaremos integrá-los em um único MER e, se for o caso, complementaremos esse modelo com base no desenvolvido no capítulo 3 deste trabalho.

Na seguinte sessão, a nona, discutiremos as respostas de Q_{02}^* . Acreditamos que, mesmo após viverem o PEP e construírem um MER, as respostas apresentadas serão baseadas no paradigma monumentalista, semelhantes ao que encontramos nos livros didáticos, ou seja, o conteúdo abordado sem razão de ser; sem especificar

meios para o professor gerenciar o desenvolvimento do conteúdo; o aluno não tendo participação, o professor e o livro sendo as únicas fontes de validação.

Nosso foco, nessa sessão, será promover uma discussão para capacitá-los a questionar, avaliar e desenvolver caminhos para a construção de uma proposta de ensino. Estamos prevendo as seguintes perguntas para guiar essa discussão:

Na proposta escrita por seu grupo, quem faz as perguntas?
 Qual a tarefa do aluno?
 Quem avalia?
 Há elementos para validar?
 Quais as fontes de informação usadas?
 Quais as diferenças entre sua proposta e o PEP vivido nesta formação?

Essas discussões adentrarão a próxima sessão, quando pretendemos trabalhar as dialéticas cronogênese, mesogênese e topogênese para que o futuro professor possa descrever e gerenciar o desenvolvimento de uma atividade de ensino. Na sequência, faremos a devolutiva da resposta R_{02}^* à questão Q_{02}^* para que realizem possíveis alterações e as mencionem durante a atividade ou na ata desse dia.

As sessões décima primeira e décima segunda serão para o desenho e a discussão de dois percursos de estudo e pesquisa, e os estudantes deverão responder as seguintes questões:

Q_{03}^* : Qual seria um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de Elipse?
 Q_{04}^* : Qual seria um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de Hipérbole?

Para responder as questões Q_{03}^* e Q_{04}^* , os estudantes devem entregar a questão geratriz Q_0 , a análise *a priori*, contendo o mapa de questão-resposta, as possíveis fontes usadas para as respostas, como serão validadas as questões, como serão divididas as tarefas entre os participantes de cada grupo e como será feito o controle da dialética *mídia-milieu* (mesogênese), trabalhada na décima sessão.

Como subsídio para o desenho do PEP para elipse, caso os estudantes solicitem ajuda, forneceremos o trabalho de Ramos Filho (2011), mais especificamente o capítulo terceiro, em que o pesquisador avalia a construção de um fogão solar com duas antenas em forma elíptica, e, para o desenho do PEP para hipérbole, forneceremos leituras a respeito do sistema de radionavegação, chamado

LORAN (*Long Range Navigation*), para que possam se inspirar na realização de suas tarefas.

Para a penúltima sessão, décima terceira, planejamos retomar a nossa questão geratriz “ Q_{0FP} : Como ensinar cônicas? Por que ensiná-las?”

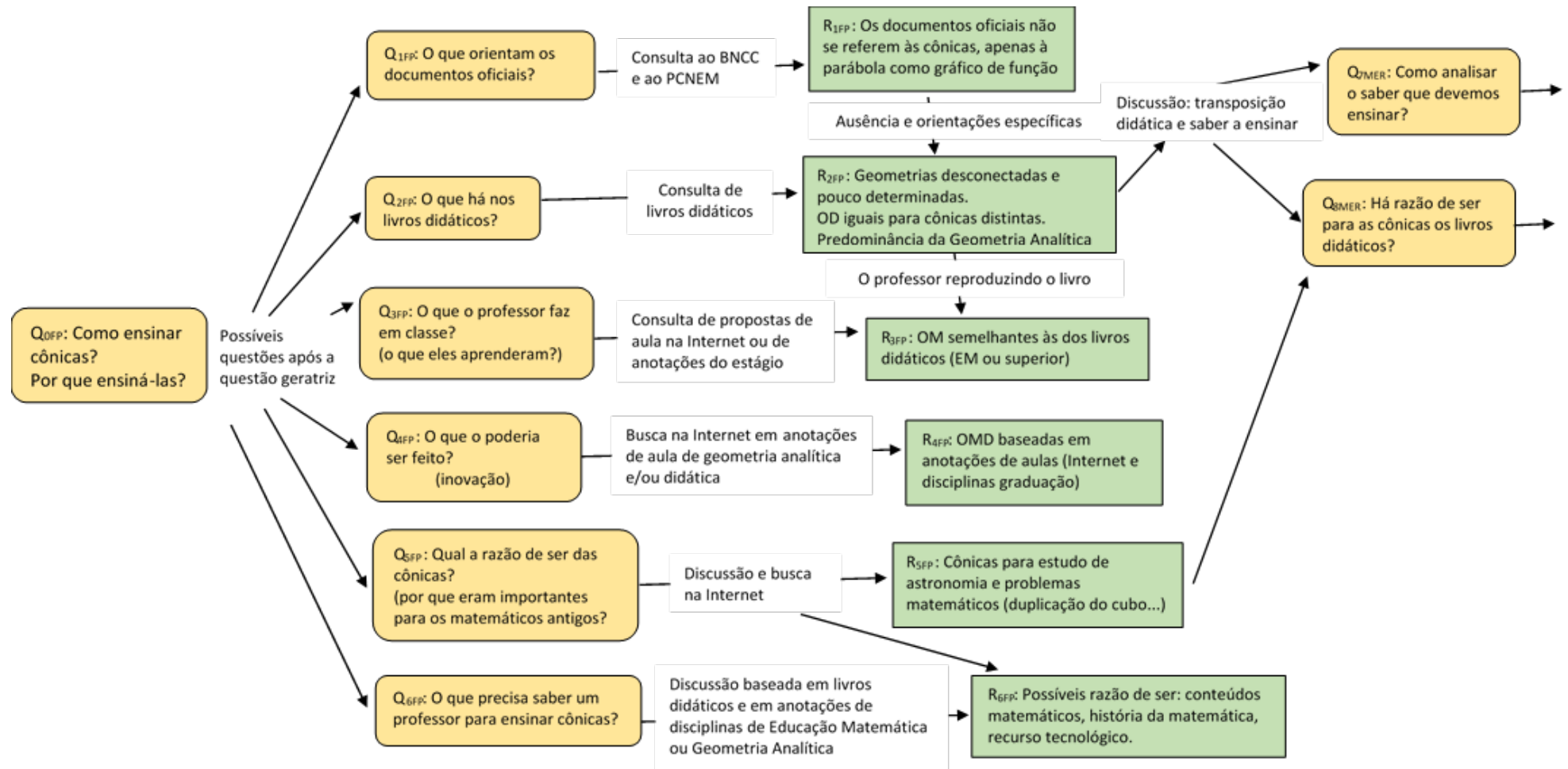
Assim, para finalizar, apresentaremos o mapa de questões e respostas resultante da análise *a priori* deste PEP-FP, nas figuras 54 e 55. As questões encontram-se na cor amarela e na forma oval, enquanto as respostas esperadas estão em verde e na forma retangular.

Observando o mapa desenhado na figura 54, vemos que todas as três primeiras questões (Q_{1FP} , Q_{2FP} e Q_{3FP}), que supostamente serão enunciadas logo após a questão geratriz, estão relacionadas entre si por meio de suas respectivas respostas e direcionam o Percurso a uma apresentação/discussão da noção de transposição didática, que favorecerá a introdução de duas questões teóricas²⁷ (Q_{7MER} e Q_{8MER}) tratadas na continuação do mapa. As questões Q_{5FP} e Q_{6FP} , por tratarem de temas como “razão de ser” das cônicas e “o que precisa saber um professor para ensiná-las”, também possuem suas respostas relacionadas e direcionam o Percurso para a questão teórica Q_{8MER} .

Já na figura 55, encontramos as questões Q_{7MER} e Q_{8MER} , que em seus desdobramentos demandarão um estudo matemático das cônicas e canalizarão a formação inicial ao experimento do PEP, quando os futuros professores viverão o Percurso na posição de alunos do Ensino Médio.

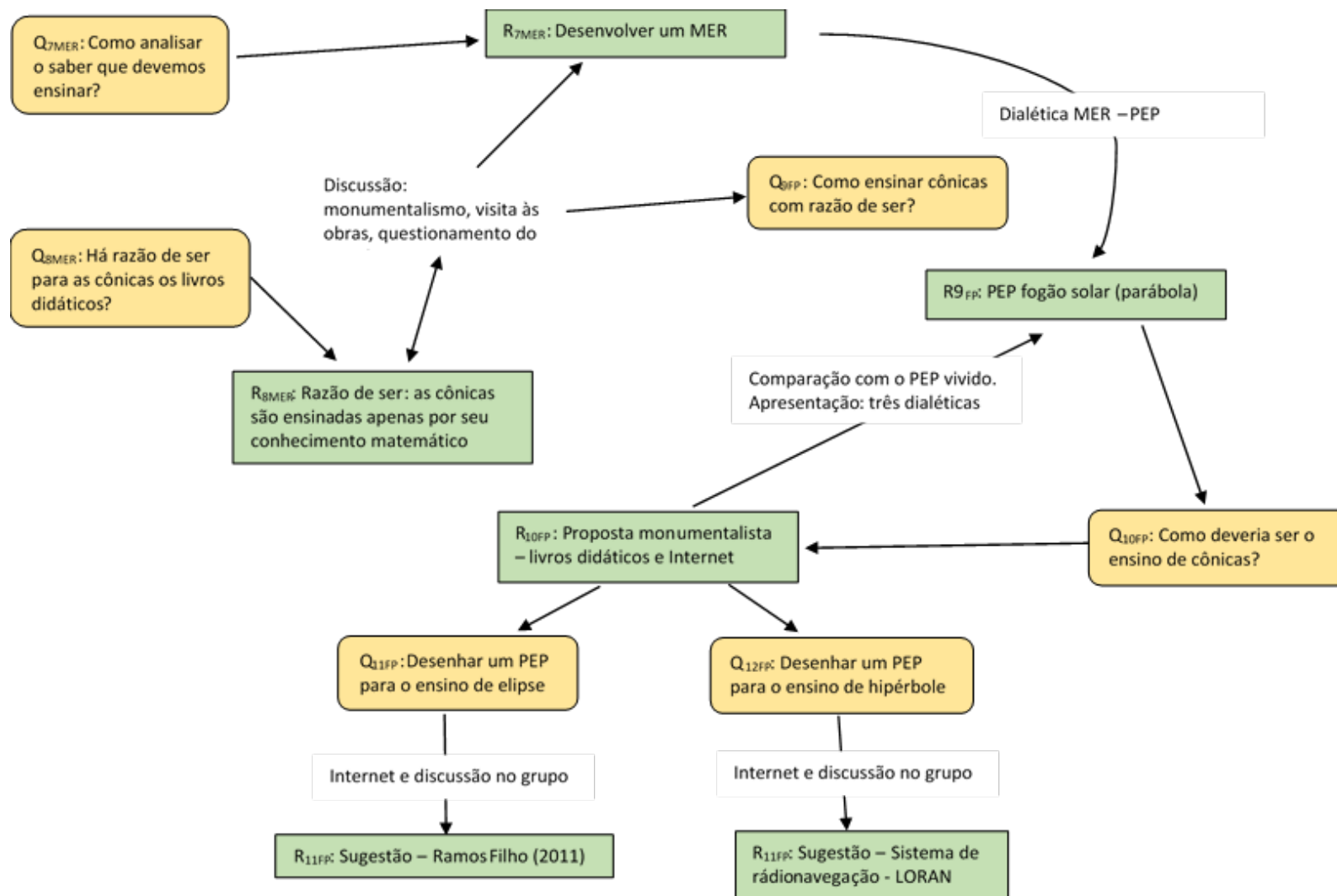
Ainda na figura 55, observamos que a questão Q_{10FP} , formulada após o experimento do PEP, volta a indagar os alunos em formação inicial para que descrevam como deveria ser o ensino das cônicas. As respostas a essa questão permitirão uma reflexão a respeito de como o monumentalismo está inserido na instituição de ensino e na formação desses estudantes e, por fim, culminará nas duas últimas questões com o desenho dos dois PEP para elipse e hipérbole.

²⁷ São consideradas questões teóricas por tratarem diretamente de problemas epistemológicos do objeto a ser ensinado.

Figura 54 - Mapa de Questões e Respostas *a priori* do PEP-FP – 1ª parte

Fonte: Produção do autor.

Figura 55 - Mapa de Questões e Respostas a priori do PEP-FP – 2ª parte



Fonte: Produção do autor.

Para a última seção, reservamos um fechamento da formação com a apresentação da resposta final encontrada por cada grupo para a nossa questão inicial Q_{0FP} , de forma que todos os futuros professores participantes possam opinar, questionar e contribuir para a construção de conhecimentos de todo o grupo.

Segundo Bosch (2018a, p. 6, tradução nossa), “o esquema Herbartiano indica os principais elementos do processo de investigação. Sua dinâmica é capturada em termos de algumas dialéticas que descrevem a produção, validação e disseminação de $R^{\forall}$ ”. Dessa forma, usaremos as dialéticas cronogênese, mesogênese e topogênese como principais ferramentas para a avaliação de nossa formação. Como já dito anteriormente, a cada sessão serão recolhidas as perguntas e respostas produzidas e um informe por cada grupo contendo as mídias usadas para as pesquisas e qual foi a responsabilidade de cada membro durante esse encontro. Com isso, conseguiremos administrar o avanço do mapa de questão e respostas do PEP-FP, de que maneira o conhecimento é incorporado ao *milieu* e qual a participação de cada integrante do grupo.

Assim terminamos a análise *a priori* de nossa proposta para uma formação inicial de professores de matemática para o ensino de cônicas baseada nos dispositivos Percurso de Estudo e Pesquisa Formação de Professores. Em seguida, apresentamos como essa formação foi desenvolvida.

6.4 Desenvolvimento do experimento

O Percurso teve início às 13h30 do dia 24/09/2018 com uma breve apresentação do professor – autor deste trabalho – e de nosso projeto de pesquisa, seguida da leitura do termo de consentimento e de alguns esclarecimentos a esse respeito, além de informar a respeito das funções que os integrantes do grupo deveriam assumir e da rotatividade que deveria ocorrer para que todos pudessem vivenciar cada uma das funções.

Q_{0FP} : Como ensinar cônicas? Por que devemos ensiná-las?

Nesse primeiro encontro, iniciamos o Percurso com a questão geratriz Q_{0FP} , e os grupos formularam as questões apresentadas no quadro 20.

Quadro 20 - Questões formuladas pelos alunos durante o primeiro encontro do PEP-FP

G2	<i>Q_{21FP}</i>: Quais ferramentas o professor precisa saber para ensinar cônicas? <i>Q_{22FP}</i>: Através do conhecimento da história das cônicas, facilitaria a aprendizagem do aluno? <i>Q_{23FP}</i>: Qual a utilização de material didático facilitaria o ensino das cônicas? E realmente seria necessário utilizá-los? <i>Q_{24FP}</i>: É importante o professor conhecer a aplicabilidade das cônicas no cotidiano ou na prática?
G3	<i>Q_{31FP}</i>: Quais conhecimentos o professor precisa ter para ensinar cônicas? <i>Q_{32FP}</i>: Quais metodologias e recursos poderiam ser utilizados? <i>Q_{33FP}</i>: Quais as possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar durante o desenvolvimento e explicação do conteúdo? <i>Q_{34FP}</i>: Como enquanto professores podemos sanar estas dificuldades? Quais as dificuldades do conteúdo em si?
G4	<i>Q_{41FP}</i>: O que um professor precisa saber para ensinar cônicas? <i>Q_{42FP}</i>: Como o professor deve lidar diante das perguntas em relação ao conteúdo de cônicas?
G6	<i>Q_{61FP}</i>: Qual a capacidade de o professor usar a interdisciplinaridade? (Relacionado à preparação que o professor obteve na graduação) <i>Q_{62FP}</i>: Que cônicas deve ser trabalhada trazendo para o dia-a-dia dos alunos? <i>Q_{63FP}</i>: De onde vêm as cônicas? <i>Q_{64FP}</i>: Por que levar um material manipulável para ensinar cônicas?

Fonte: Produzido pelo autor.

Observando o quadro 20, é possível notar que os estudantes enunciam questões baseadas no paradigma do monumentalismo, em que suas preocupações giram em torno de temas como “o professor deve saber o que os alunos devem fazer; quais perguntas farão os alunos?; devemos usar o GeoGebra ou falar da história das cônicas?; qual material didático e por que devemos utilizá-lo?” O encontro terminou com cada um dos grupos socializando suas questões para os demais participantes da formação.

Como os estudantes, no primeiro encontro, não formularam questões como “o que há nos livros didáticos? O que apresentam os documentos curriculares oficiais? Qual a razão de ser das cônicas?”, iniciamos o segundo encontro as apresentando. Para respondê-las, os estudantes receberam livros didáticos para o Ensino Básico e puderam acessar a internet para buscar os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Referencial Curricular do Estado de Sergipe.

Tendo em vista que os futuros professores concluíram que os livros didáticos consultados não apresentavam as cônicas com uma razão de ser distinta de seu próprio aprendizado como um conteúdo matemático, o formador apresentou o Percorso de Estudo e Pesquisa para um fogão solar como um experimento que foi realizado com alunos do terceiro ano do Ensino Médio para estudar a parábola como uma alternativa ao modelo de ensino imperante. Iniciamos, então, esse PEP.

A vivência do PEP teve duração total de 15 horas (5 encontros) com a questão geratriz “ Q_0 : como construir um fogão solar usando uma antena parabólica²⁸?”, cujas questões iniciais estão transcritas no quadro 21 e identificadas pelo número do grupo acompanhado do número que representa a ordem cronológica dessa questão, além das letras FS (Fogão Solar) para diferenciarmos das questões FP (Formação de Professores). Como exemplo, sabemos que Q_{23FS} foi a terceira (3) questão elaborada pelo grupo G2 (2) durante o experimento do PEP para a construção de um Fogão Solar (FS).

Quadro 21 - Questões iniciais do PEP sobre o fogão solar durante o experimento do PEP-FP

G2	Q_{21FS} : Quais materiais e ferramentas utilizados para construir um fogão solar parabólico? Q_{22FS} : Onde ficará a panela? Q_{23FS} : Teria outra forma de construir o fogão utilizando outra cônica? Q_{24FS} : Qual o processo de construção?
G3	Q_{31FS} : Qual o melhor lugar para fazer este fogão? Q_{32FS} : Qual material maximizará a potência desse fogão? Q_{33FS} : Onde deveria ficar a panela? Qual o ângulo necessário? Q_{34FS} : Qual a posição que o fogão deve estar em relação ao sol?
G4	Q_{41FS} : Além da antena parabólica, quais outros materiais são necessários para a construção do fogão solar? Q_{42FS} : É possível utilizar uma placa solar que reserve energia solar para utilizar o fogão durante momentos oportunos? Q_{43FS} : Qual o tamanho da panela/antena para que consigamos cozinhar todos os alimentos? Q_{44FS} : É possível utilizar mais de uma panela?

²⁸ Apesar de a antena parabólica possuir o formato de um paraboloide, o professor mostrou que este pode ser visto como uma união de infinitas parábolas de mesmo vértice e mesmo foco ou ainda como uma parábola rotacionada em torno de seu eixo de simetria, dessa forma todas as propriedades dessa quádrlica são “herdadas” da cônica, assim poderíamos nos restringir ao estudo de uma parábola e suas propriedades para o estudo do fogão solar proposto.

G6	Q_{61FS} : Por que utilizar algo que tem formato de um parabolóide? Q_{62FS} : Quais os materiais necessários para a construção deste equipamento e realmente seria viável seu uso? Q_{63FS} : Há possibilidade de armazenar energia para usar o fogão quando não houver sol?
----	---

Fonte: Produzido pelo autor.

Durante o processo de busca e compartilhamento das respostas às questões que surgiam no PEP, o formador elaborou novas questões que levaram os estudantes ao estudo mais aprofundado de elementos da parábola. Podemos citar, por exemplo, o fato de que as questões Q_{22} , Q_{33} e Q_{44} são todas referentes ao foco do parabolóide/parábola e, diante das respostas apresentadas pelos grupos – todas citando o foco como o local do fogão solar onde deve ficar a panela –, o formador lhes perguntou: “Sabem o que é o foco de uma parábola? Como podemos encontrá-lo na seção que intercepta a superfície de rotação cônica?” Essas questões, classificadas como “questões indiretas²⁹”, permitiram o estudo da determinação do foco da parábola e da reta diretriz usando esfera inscrita à superfície cônica. É importante destacarmos que neste momento ocorreu uma “visita às obras”, ou seja, o conteúdo foi ministrado pelo formador de maneira tradicional porque o formador considerou que dessa forma seria mais rápido e por já existir uma razão para esses estudos, porém ainda assim havia a necessidade de agregar respostas a essas três questões enunciadas pelos estudantes e que abordaram o foco.

Em alguns momentos do PEP sobre o fogão solar, o formador recorreu tanto à visita às obras, como no caso do estudo do foco da parábola, quanto a situações monumentalistas, quando o grupo estava trabalhando com o *software* GeoGebra, construindo uma parábola e uma elipse por meio da reta auxiliar e da circunferência focal³⁰. Neste momento, o formador perguntou: “Vocês sabem como construir uma hipérbole usando a circunferência focal?”, e, diante da resposta negativa, mostrou como essa construção pode ser feita no GeoGebra de uma forma tradicional e monumentalista.

²⁹ São questões que não necessariamente devem ser respondidas para responder Q_0 ou para o avanço das investigações na busca do entendimento de certa obra, entretanto são importantíssimas para o ensino do conteúdo proposto.

³⁰ A circunferência focal é o nome dado à circunferência usada na construção da elipse e da hipérbole e que possui seu centro como um dos focos da cônica. A construção da hipérbole exige duas circunferências focais, uma para cada ramo.

O fato de a maioria dos estudantes estar inserida em um ensino monumentalista desde o início de suas vidas escolares nos mostra o quão difícil é o desenvolvimento de um PEP e um PEP-FP sem que surjam situações monumentalistas ou de visitas às obras, tanto por parte dos futuros professores, por meio das questões apresentadas e das obras consultadas, que estão escritas em um contexto monumentalista, como também por parte do formador ao notar a necessidade de explicar determinado conteúdo para dar continuidade ao percurso ou para ganhar tempo, considerando que os professores em formação levariam muito tempo estudando esse tema sozinhos.

Após o término do PEP sobre o fogão solar, continuamos com o PEP-FP discutindo as questões que foram enunciadas pelos futuros professores nos dois primeiros encontros, além das novas questões que surgiram. Destacamos que, exercendo o papel de formador, entre os desafios para esse último momento estavam: mostrar aos estudantes de licenciatura a importância de desenvolver um MER tanto para analisar uma proposta de ensino, em nosso caso o PEP vivido, quanto para orientar na construção de outras possíveis quando forem docentes. É a respeito dessa continuidade que trataremos na sequência.

6.5 Análise do PEP-FP – Resultados observados

Como qualquer processo de investigação, o PEP-FP, que permite aos futuros professores viverem a função de investigadores ao buscarem respostas para um problema docente por meio da questão geratriz, é guiado por questões parciais criadas por esses estudantes com o objetivo de estudarem mais profundamente a questão geratriz para então construírem uma resposta final $R_{FP}^{\heartsuit}$.

Pelo fato de termos um PEP (fogão solar) desenvolvido internamente ao PEP-FP, decidimos dividir esta análise considerando três blocos de questões que identificamos como questões Q^{FP} , surgidas antes do PEP; questões Q^{FS} , desenvolvidas durante o PEP discutindo a construção do fogão solar; e questões Q'_{FP} , que são as questões do terceiro e último bloco do PEP-FP após encerradas as pesquisas sobre o fogão solar. Vamos às análises.

6.5.1 Antes do PEP

Iniciaremos a análise deste bloco pela dialética da cronogênese comparando os mapas de questão e respostas *a priori* e *a posteriori* para identificar quais perguntas surgiram, quais não surgiram e o porquê.

Pelas perguntas anotadas pelos estudantes (quadro 22), nota-se uma grande preocupação com o conhecimento do conteúdo cônicas tanto matemático quanto aplicado. Eles discutem a respeito das dúvidas que seus futuros alunos podem apresentar e de que maneira podem ser respondidas. Além disso, os estudantes questionam o uso do GeoGebra, a interdisciplinaridade, o uso de materiais manipulativos e se devem, nessa situação, falar acerca de história das cônicas.

Quadro 22 – Questões enunciadas pelos alunos de licenciatura antes do PEP

Q_{21}^{FP} : Quais ferramentas o professor precisa saber para ensinar cônicas?
Q_{22}^{FP} : O uso do conhecimento da história das cônicas facilitaria a aprendizagem do aluno para este conteúdo?
Q_{31}^{FP} : Quais conhecimentos o professor precisa ter para ensinar cônicas?
Q_{33}^{FP} : Quais as possíveis dificuldades que os alunos podem apresentar durante o desenvolvimento e explicação do conteúdo? Como enquanto professores podemos sanar essas dificuldades?
Q_{42}^{FP} : Como o professor deve agir diante das perguntas que tratem do conteúdo de cônicas?
Q_{43}^{FP} : Que tipo de recurso pode ser utilizado durante o ensino de cônicas?
Q_{44}^{FP} : A construção de figuras geométricas é um bom recurso?
Q_{61}^{FP} : Qual a capacidade do professor para usar a interdisciplinaridade?
Q_{62}^{FP} : Quais cônicas devem ser trabalhadas considerando um contexto do dia a dia do aluno?

Fonte: Produzido pelo autor.

Podemos observar essas inquietações considerando uma análise da dimensão econômica do estudo (gestão didática) quando procuram saber a melhor forma de organizar o conteúdo (dúvidas a respeito de construção de figuras geométricas; de quais cônicas devem ser trabalhadas com aplicações; de abordar ou não a história), destacando características do monumentalismo quando consideram o

professor a única fonte de conhecimento e com a obrigação de ter total controle das dúvidas que possam surgir referentes ao conteúdo.

Por outro lado, não mostram preocupação com outros conhecimentos que cercam as cônicas, tampouco com a real importância de aprender esse assunto. Isso é reforçado pela resposta R_{33}^{FP} dada à questão Q_{33}^{FP} .

R_{33}^{FP} : O professor tem que saber as dificuldades do conteúdo para quando for explicar já pensar nas dificuldades que os alunos terão para aprendê-lo. O professor deve prever essas dificuldades.

Com respeito à dimensão epistemológica, um dos grupos enunciou a questão “de onde vêm as cônicas?”, mas não apresentaram resposta, e outro grupo propôs uma discussão por meio da questão “qual a utilidade do uso de cônicas na vida acadêmica do discente, bem como na sua vida prática?”, que não foi escrita, mas com a ajuda dos gravadores de voz conseguimos transcrevê-la juntamente com os seguintes comentários:

“Sei lá [...] basicamente eu acho que tem muitas propriedades que você vê no dia a dia e não sabe [...] basicamente é isso. O caso da parábola é um clássico, você vê um monte de coisas na forma parabólica, mas você não sabe nem por que tem forma parabólica.”

“Eu me pergunto isto muitas vezes, mas a resposta que me vem é que alguns conteúdos devemos ensinar porque sim e pronto. Tem coisas que a gente aprende aqui (universidade) que eu acho que não tem necessidade de aprender.”

Por esses comentários podemos perceber outra característica do monumentalismo, que é a ausência de razão de ser do objeto de ensino. O conteúdo é ensinado “porque sim e pronto”, somente por seu conhecimento matemático ou para que o aluno consiga uma boa nota na avaliação, e isso parece ser suficiente e incontestável para esse grupo.

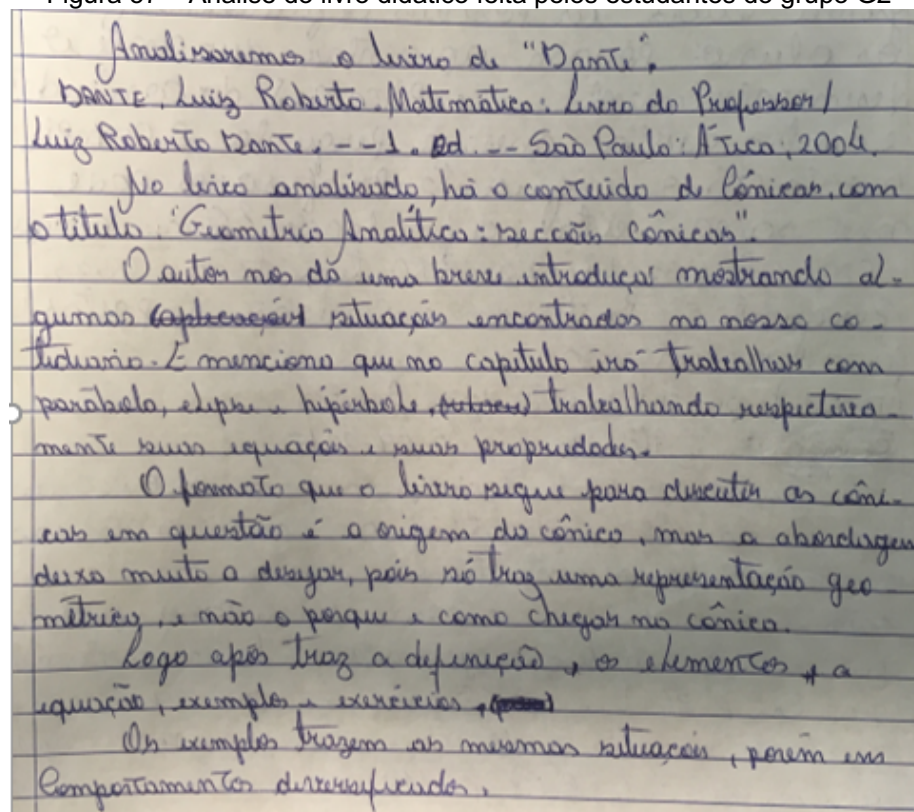
Por outro lado, essas primeiras questões também apontam para restrições impostas pelo sistema de ensino (dimensão ecológica) que limitam o trabalho com um dispositivo criado para fortalecer o paradigma do questionamento do mundo. Essas restrições se manifestam em questões que ditam a direção que o Percurso deve seguir, em particular aquelas que buscam o conhecimento matemático estrito ao conteúdo a ser ensinado, de forma pontual e monumentalista, sem questionar ou

meio de problemas que favoreçam suas aplicações no 3º ano do Ensino Médio. Os PCNEM sugerem que o ensino de cônicas seja um “tema complementar” ao ensino de geometria analítica, além da parábola como gráfico de uma função quadrática. Os PCN+ sugerem apenas o ensino da parábola.

Para investigar de que forma as cônicas estão presentes nos livros didáticos, cada grupo recebeu um livro diferente entre os que estavam disponíveis no laboratório de Educação Matemática da UFS e foram os seguintes: *Aprender Matemática: matemática para o Ensino Médio* (JORGE; COUTO FILHO; TEIXEIRA, 2011) pelo grupo G2; *Matemática* (DANTE, 2004) pelo grupo G3; *Matemática Volume Único* (IEZZI et al., 1997) pelo grupo G4 e *Matemática* (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005) pelo grupo G6.

Recordamos que esta questão Q_{*2}^{FP} tinha como objetivo explicitar a necessidade de um contraponto para servir de base à análise dos livros, sendo o ideal um modelo epistemológico de referência. Alguns grupos criticaram a forma como o conteúdo é apresentado no livro didático, como podemos ver na figura 57, em que o relator do grupo G2 escreve: “[...] a abordagem deixa muito a desejar, pois só traz representação geométrica e não o porquê e como chegar na cônica”.

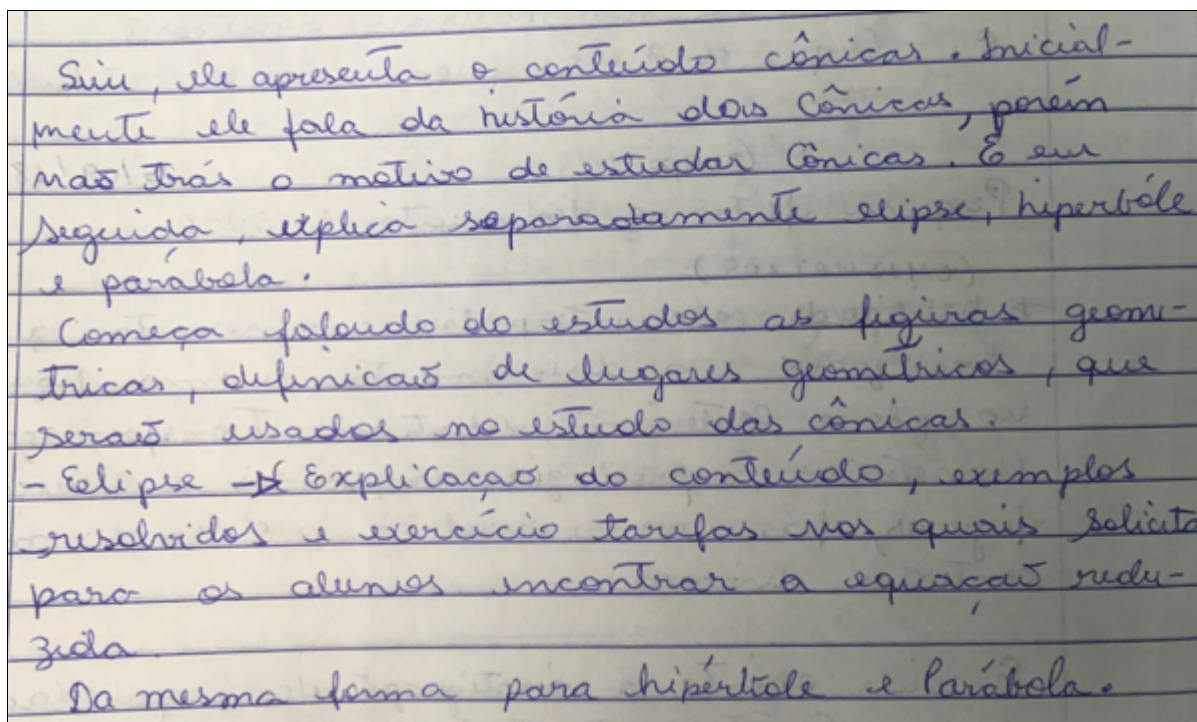
Figura 57 – Análise do livro didático feita pelos estudantes do grupo G2



Fonte: Produzida pelo grupo G2.

Porém, quando questionados se sabiam como deveriam ser apresentadas as cônicas, eles não souberam responder. Eles também não encontraram nos livros didáticos algo que poderia ser considerado uma razão para o ensino desse objeto matemático, como podemos ver na figura 58, apresentada pelo relator do grupo G4.

Figura 58 - Resposta para razão de ser nos livros didáticos escrita por um grupo de estudantes



Fonte: Produzida pelo grupo G4.

Para finalizar a análise por meio da cronogênese, destacamos que somente duas questões, das que prevíamos *a priori* e que tratam dos documentos curriculares e dos livros didáticos, não foram elaboradas pelos futuros professores. Até este momento, antes da aplicação do PEP, notamos o monumentalismo manifestado tanto pelas questões elaboradas, nas dúvidas de como apresentar e administrar o estudo do conteúdo (dimensão econômica), quanto nas questões que não surgiram, como foi o caso do estudo dos livros didáticos, e que serviu para mostrar a necessidade de um estudo epistemológico das cônicas como um contraponto para uma análise mais criteriosa do livro. Houve também, por parte dos futuros professores, questionamentos do mundo explicitados quando discutiram acerca da razão para o ensino de cônicas e como elas surgiram; por parte do formador, por meio de questionamentos que propiciaram reflexões a respeito da análise de livros didáticos.

Na análise da mesogênese, quanto aos dados iniciais, informamos que o experimento fazia parte de uma pesquisa de doutoramento do formador e que tratava

de uma investigação baseada em questões e respostas, desenvolvida tanto na PUC de São Paulo como na Universitat Ramon Llull de Barcelona, usando a Teoria Antropológica do Didático.

Após a apresentação da questão geratriz Q_{0FP} do PEP-FP, os estudantes formularam novas questões Q_i° e respostas R_i° por meio de anotações e das discussões dos grupos. As mídias usadas como fontes para as pesquisas, neste primeiro momento, foram livros didáticos de Ensino Básico, *websites* de instituições públicas brasileiras para consultar os documentos curriculares oficiais e o próprio formador, que era consultado para validar algumas respostas produzidas pelos grupos.

Neste primeiro bloco do PEP-FP (Antes do PEP), notamos a falta de domínio por parte dos licenciandos em relação aos documentos oficiais curriculares e pouco conhecimento de como as cônicas eram tratadas nos livros didáticos do Ensino Básico. Acreditamos que, para alguns estudantes, foi o primeiro contato com esses materiais, isso baseado nos seguintes depoimentos:

“Sentimos falta de trabalhar com os PCN e documentos oficiais. Aqui na universidade é visto muito pouco a respeito disso.”

“Nossas disciplinas em educação matemática trabalham sempre as mesmas coisas.” (Sobre a falta de contato com documentos curriculares oficiais).

“Penso que estes livros já seguem os PCN. É um padrão.” (Quando questionados sobre o que há nos livros didáticos a respeito de cônicas).

“Sempre pensei que as cônicas estavam dentro de Geometria Analítica.” (Fala do estudante ao ser perguntado por que não buscou por cônicas em Geometria enquanto olhava os PCN+).

Quanto ao ensino das cônicas, as respostas R_i° apresentadas, durante as duas primeiras sessões, mostram certa preocupação com a capacidade de desenvolverem uma “performance” de professor que deve possuir todo o conhecimento, o que nos permitiu inferir que, em se tratando de discussões didáticas, o *milieu* estava constituído apenas por conhecimentos vindos de uma escola monumentalista.

Acerca do saber matemático referente às cônicas, foi possível explorar pouco até este momento, pois ocorreram somente discussões a respeito da razão de ser que, pelas respostas exibidas na análise da cronogênese, nos direcionam a observar

que esses estudantes não construíram uma epistemologia a respeito de cônicas mais aprofundada.

Dessa forma, podemos concluir que as respostas apresentadas neste primeiro bloco do PEP-FP nos ajudaram a entender como se encontrava o *milieu* desses estudantes ao iniciarem a formação.

A terceira e última dialética que usaremos para a análise do PEP-FP (e do PEP) é a topogênese e trata do que os estudantes fizeram. Em grupos os futuros professores elaboraram as primeiras questões a respeito do ensino de cônicas que provocaram discussões e buscas de informações na busca de respostas. Durante esse processo, se revezaram nas funções que cada integrante do grupo deveria ter, inclusive e principalmente na redação dos informes que foram entregues ao final de cada uma das duas sessões. O formador incentivou as discussões lançando outras questões diante das respostas apresentadas pelos grupos, além de novas questões consideradas por nós importantes, mas que não foram formuladas tanto para contestar o “monumentalismo” implícito e fazer aparecer o “questionamento do mundo” quanto para atingir os objetivos traçados no MER e na análise *a priori*.

Seguimos agora com as análises do PEP-FP durante o experimento do PEP sobre o fogão solar.

6.5.2 Durante o PEP

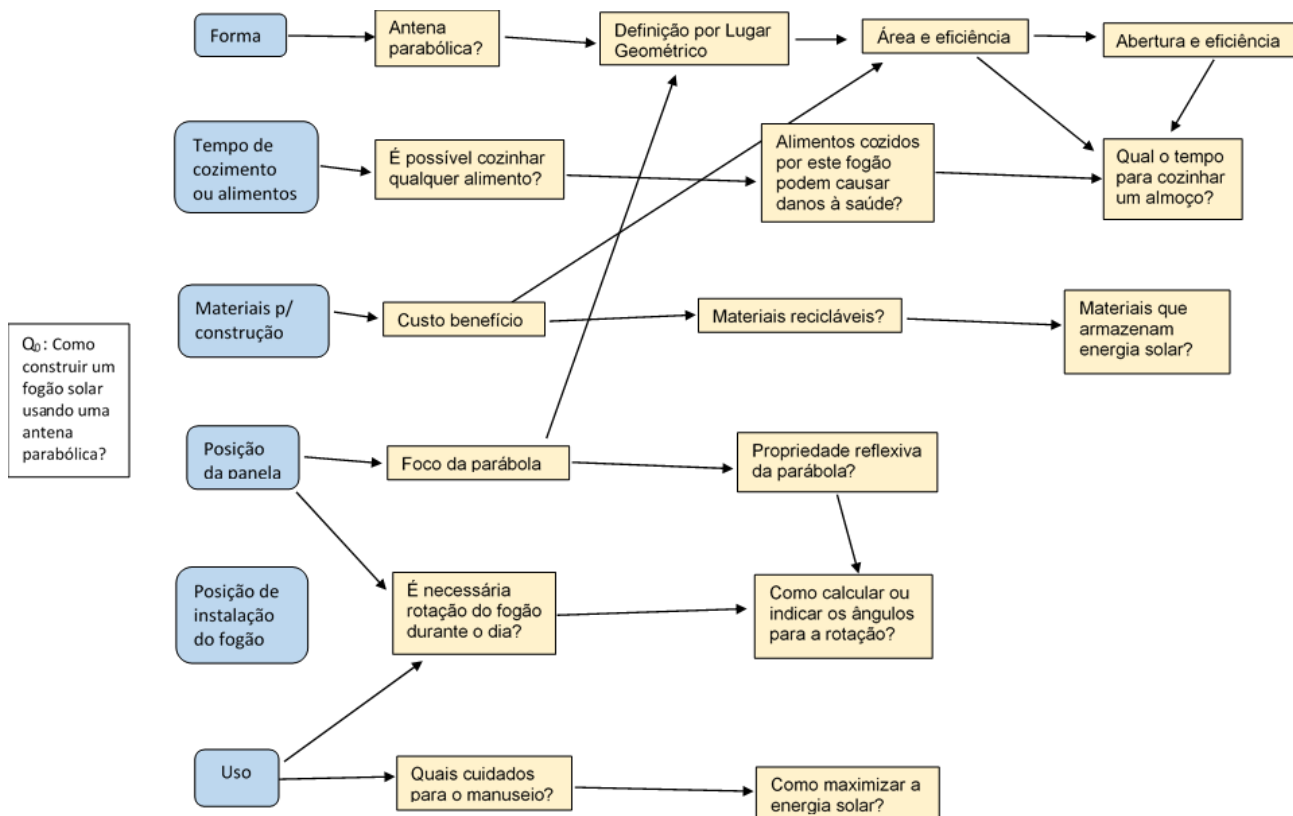
O PEP sobre o fogão solar é uma resposta $R_{*3}^{\diamond}$ para a questão “ Q_{*3}^{FP} : Podemos ensinar cônicas com razão de ser?”, do PEP-FP, ou seja, para o caso da parábola; porém, com as questões que surgiram, foi possível trabalhar a elipse e alguns elementos da hipérbole.

Iniciamos o experimento no final do segundo encontro com a questão geratriz “ Q_0^{FS} : Como construir um fogão solar utilizando uma antena parabólica?” Os grupos foram informados de que manteríamos um processo baseado em questões e respostas. O percurso durou aproximadamente 17 horas.

Como já foi feito, a análise por meio da dialética de questões e respostas (cronogênese) objetiva confrontar os mapas *a priori* e *a posteriori* para investigar os motivos que propiciaram a elaboração das questões que surgiram ou não, além de

identificar as praxeologias para o ensino. Assim, apresentamos na figura 59 o mapa de questões e respostas *a priori* para o PEP.

Figura 59 – Mapa de questões e respostas *a priori* para o PEP no PEP-FP



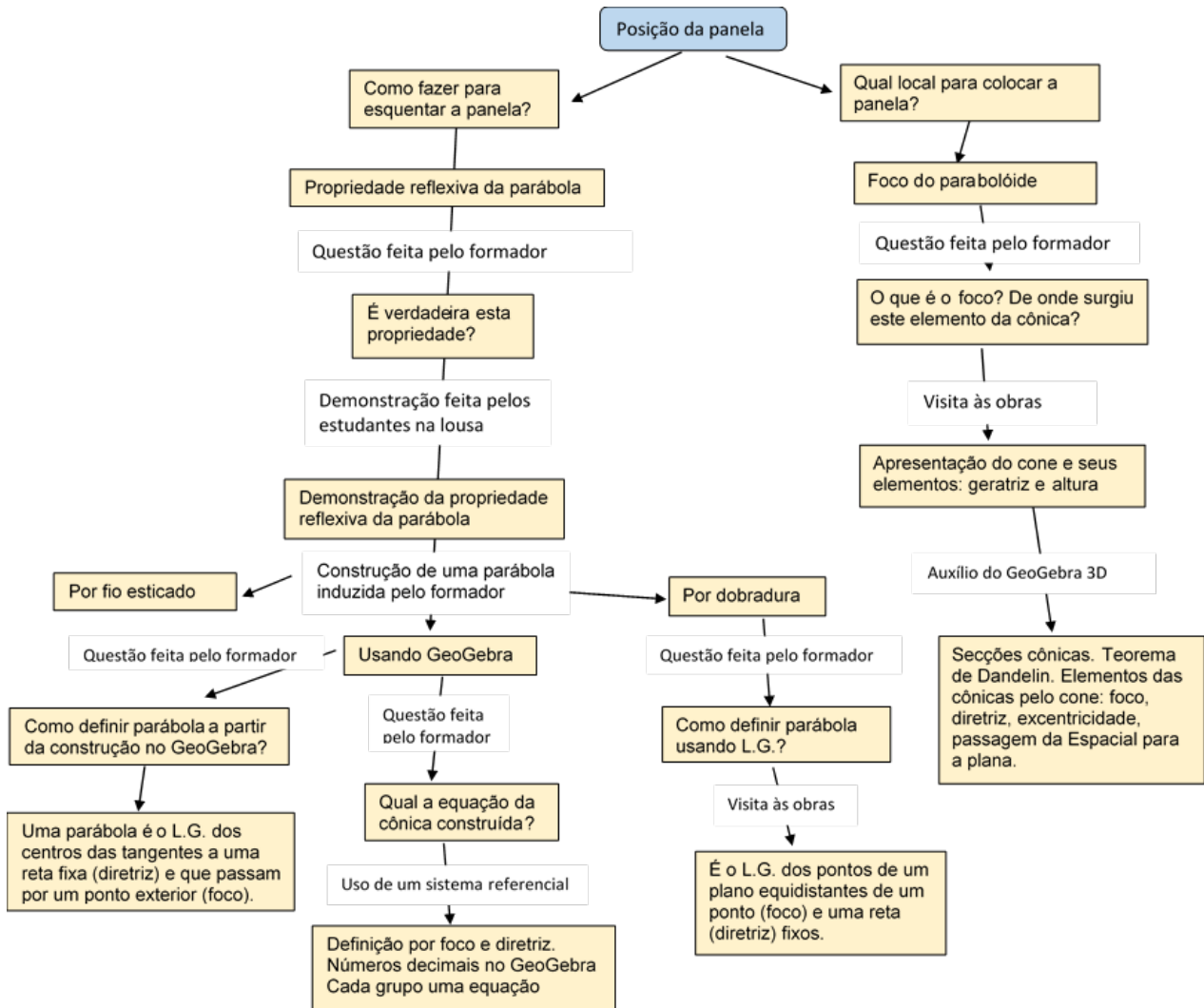
Fonte: Produzida pelo autor.

Esse mapa *a priori* foi construído baseado nos PEPs experimentados nos ensinos médio e superior. Nele procuramos separar as questões por temas intrínsecos à construção do fogão solar e assim localizar quais elementos do ensino de parábola seriam trabalhados durante o percurso. O mapa *a posteriori* construído durante o percurso está apresentado de forma parcial para focar as análises nas questões que contribuíram para o desenvolvimento de conteúdo matemático, a saber, as que tratam do tema posição da panela (figura 60) e do tema forma do fogão (figura 61).

Entre as primeiras questões elaboradas pelos estudantes, relacionadas à posição da panela, está “qual o local para colocar a panela?”, que permitiu ao formador, durante as discussões, questionar os estudantes a respeito do que é o foco e como podemos encontrá-lo em uma cônica. Para que pudessem responder tais questões, o formador sugeriu um intervalo para que, por meio de uma “visita às obras”, pudesse apresentar o estudo das cônicas desde o modelo da geometria sintética, partindo do contexto espacial para chegar ao plano, até o modelo da geometria

analítica, sempre guiado pelo modelo epistemológico de referência e utilizando o *software* GeoGebra.

Figura 60 – Mapa de questões e respostas para posição da panela no fogão solar



Fonte: Produzida pelo autor.

Ainda relacionado à posição da panela no fogão solar, a questão “como fazer para esquentar a panela?” propiciou aos futuros professores encontrar a propriedade reflexiva da parábola cuja demonstração foi estudada e discutida por todos como consequência da pergunta do formador “é verdadeira esta propriedade?”, uma questão direta por se relacionar com o problema proposto na questão geratriz e por aprofundar os estudos de parábola que, neste caso, avançaram no modelo da geometria sintética. Outra “visita às obras” ocorreu quando o formador construiu a parábola utilizando o GeoGebra e, a seguir, apresentou um vídeo com instruções para desenharem essa cônica em uma cartolina (usando o método do fio esticado) e em uma folha vegetal por meio de dobraduras. Esse trabalho conduziu a novas questões

que foram enunciadas pelo formador e transcritas no quadro 23 com suas respectivas respostas. Os alunos discutiram as respostas entre seus companheiros de grupo e depois as compartilharam. Como todos os grupos tiveram respostas bastante semelhantes, optamos por escrevê-las em um único quadro.

Quadro 23 – Questões formuladas pelo formador e respondidas em conjunto por todos os alunos

Q₁: Como podemos definir a parábola usando lugar geométrico com base na construção feita por dobraduras?

R₁: É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de um ponto (foco) e uma reta (diretriz) fixos.

Q₂: Considerando a parábola construída no *software* GeoGebra, desenhe uma circunferência com centro no ponto P de intersecção entre a curva e a reta r tangente e que passe pelo foco. Agora desloque o ponto Q pertencente à reta diretriz. Qual outra forma de definir a parábola baseando-nos nessa construção?

R₂: Parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma reta fixa (diretriz) e que passam por um mesmo ponto (foco).

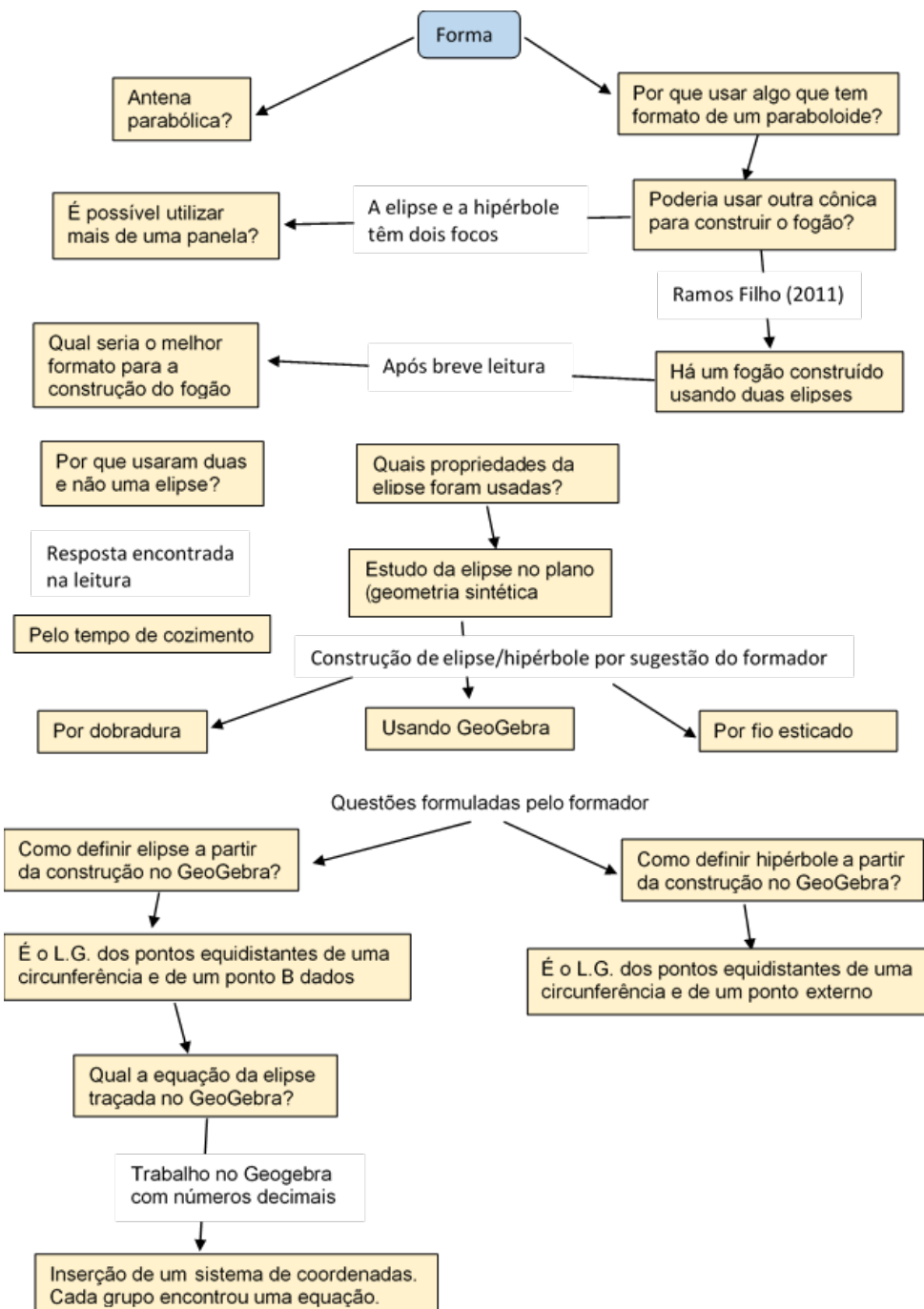
Fonte: Produzido pelo autor.

A discussão a respeito da forma do fogão solar propiciou a elaboração de uma nova sequência de questões (figura 61). A questão “teria outra forma de construir o fogão solar utilizando outra cônica?”, motivada pela possibilidade de construir um fogão solar com duas bocas a partir de uma elipse e uma hipérbole porque ambas possuem dois focos, impulsionou o estudo dessas cônicas de forma mais consistente.

Os estudantes encontraram, na dissertação de Ramos Filho (2011), como construir um fogão solar com duas placas em formato de elipse que, no entanto, não contém informações suficientes das propriedades matemáticas que justificam a escolha particular dessa cônica pelo autor.

Essa constatação foi oportuna para o formador propor, por meio de “visita às obras”, o estudo da propriedade reflexiva da elipse, bem como sua construção por dobraduras em papel vegetal pelo GeoGebra e pelo método do fio esticado, da mesma forma como realizado para a parábola. Diante desses estudos, o formador aproveitou o momento para apresentar as mesmas construções para a hipérbole.

Figura 61 - Mapa de questões e respostas para forma do fogão solar



Fonte: Produzida pelo autor.

As construções da elipse e da hipérbole são bastante semelhantes e podem ser traçadas por meio de retas tangentes a partir de uma circunferência auxiliar, chamada circunferência focal. Tais construções motivaram uma questão, enunciada para a elipse e para a hipérbole: “como definir essa cônica com base na construção feita com o GeoGebra?” Os futuros professores de maneira conjunta elaboraram as seguintes definições:

Elipse é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma circunferência (focal) e de um ponto fixo (o outro foco) em seu interior (diferente do centro).

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma circunferência (focal) e de um ponto fixo (o outro foco) em seu exterior.

Em seguida, o formador usou a construção feita no GeoGebra para apresentar outra definição por lugar geométrico para cada uma dessas cônicas a partir de circunferências tangentes, ou seja:

Elipse é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma circunferência fixa (focal) e que passam por um ponto fixo interior (foco).

Hipérbole é o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a uma circunferência fixa (focal) e que passam por um ponto fixo exterior (foco).

O estudo dessas diferentes definições para elipse e para hipérbole, por lugar geométrico, além de outros elementos da geometria sintética, estava previsto em nosso Modelo Epistemológico de Referência. Para continuar seguindo-o e melhor direcionar os estudos para o modelo da geometria analítica (modelo M2), o formador aproveitou a elipse e a parábola construídas no GeoGebra e solicitou aos futuros professores que encontrassem uma equação para essas cônicas. Neste momento, o formador provocou os estudantes, questionando-os a respeito da passagem da geometria sintética à analítica, o que resultou no seguinte diálogo:

Formador: O que precisamos fazer para encontrar a equação desta elipse?

Aluno 1: Calcular a distância de um ponto qualquer da elipse até os dois focos e somá-las. É isso?

Formador: Alguém discorda ou tem outra ideia?

Aluno 2: Encontraria o centro da elipse e formaria um triângulo retângulo utilizando um dos focos. Daí encontraria a média de a que é a distância do foco a um ponto ... acho que b . Então eu pego a distância de um dos focos ao centro e do outro foco ao centro da elipse e isto seria igual a ... (não soube terminar a frase).

Formador: Você está me dizendo que encontraria números e depois os somaria, certo? E onde está a equação?

Aluno 2: Ficou faltando o x e o y , não é? Então eu usaria o centro da elipse como x e y ?

Formador: Mas onde está o “ x ” e o “ y ”?

Aluno 2: É verdade... não o temos... (e faz o gesto de uma cruz com as mãos simbolizando os eixos de um referencial cartesiano.)

Formador: E o que a gente faz? O que precisamos e está faltando nesta tela do GeoGebra?

Aluno 3: Os eixos! Pois a gente precisa usar um x e um y , mas como vamos usar se não temos os eixos?

Aluno 1: Neste caso a gente poderia escolher um ponto qualquer e daí usá-lo como origem para determinar assim os eixos x e y ?

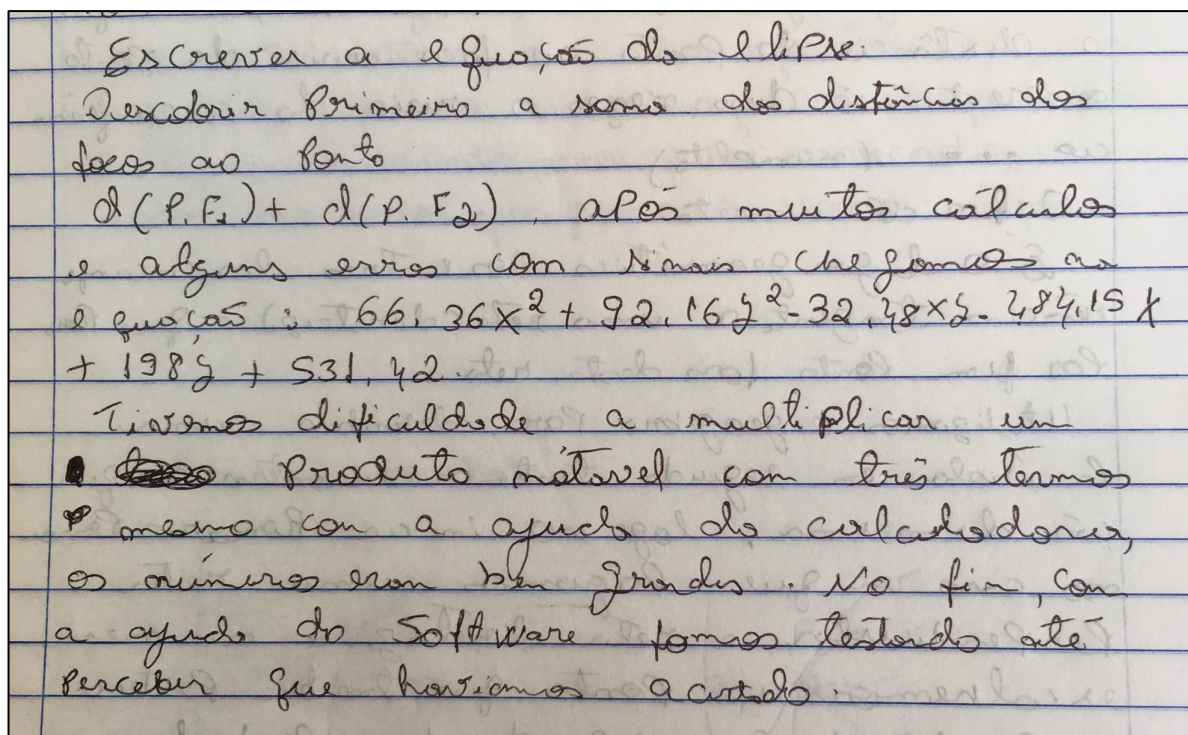
Formador: Sim, poderíamos fazer isso, mas trabalhando com o GeoGebra basta clicar na opção “exibir ou esconder os eixos”.

Observamos por esse diálogo que os estudantes não perceberam a passagem da geometria sintética à geometria analítica e tentavam confirmar, com o professor, se tomavam os elementos corretos para a construção da equação, o que nos permitiu pensar que para eles a inclusão dos eixos cartesianos não era uma ação necessária e prioritária para encontrar a equação da cônica. O mesmo ocorre nos livros didáticos no estudo das cônicas na geometria analítica, após serem introduzidas via cortes no cone (secções cônicas), sem nenhum esclarecimento ao leitor dessa mudança de geometria ou a respeito da inserção de um sistema referencial cartesiano.

O fato de usarmos o GeoGebra, por outro lado, permitiu aos estudantes trabalhar com números decimais, que, geralmente, não são encontrados nos livros didáticos, pois priorizam apresentar tarefas enunciadas com números inteiros que raramente são encontrados na vida real. É provável que essa falta de familiaridade com os decimais tenha feito com que o grupo G2 reconstruísse a elipse para que o centro da cônica coincidisse com a origem do sistema cartesiano, na esperança de encontrar uma equação com coeficientes inteiros. Não obtiveram sucesso.

O *software* também permitiu verificar se a equação encontrada correspondia realmente à cônica construída, como descrito por um estudante do grupo G6 (figura 62) em que se destaca “...mesmo com a ajuda da calculadora, os números eram bem grandes. No fim, com ajuda do software, fomos tentando até perceber que havíamos acertado”. À medida que uma equação era encontrada, os estudantes a digitavam no GeoGebra, que produzia a representação gráfica correspondente e que era comparada à construída anteriormente.

Figura 62 - Uso do software para verificar a resposta encontrada – Grupo G6



Fonte: Produção dos estudantes do grupo G6.

O mesmo estudo foi feito para a parábola diante da questão formulada pelo formador: “Qual seria a equação da parábola construída usando o GeoGebra?” Os estudantes não sabiam o ponto de partida para encontrar a equação, mesmo já aprovados no curso de Geometria Analítica e Vetores, além de ser familiar por fazer parte do estudo de função polinomial do segundo grau e na resolução de equações e inequações polinomiais de grau dois.

Como podemos notar na figura 63, os estudantes do grupo G3 usaram a definição de parábola como o lugar geométrico dos pontos equidistantes do foco e da reta diretriz como ponto de partida para encontrarem a equação da cônica. Observando os pontos apresentados pelo grupo para o cálculo dessas distâncias, $P = (x, y)$, $C = (x, 3)$ e $F = (4, 14; -1, 38)$, entendemos que P é um ponto da parábola, C pertence à reta diretriz e o foco é o ponto F . O fato de as abscissas de P e C serem iguais nos esclarece que a reta diretriz é paralela ao eixo das abscissas e que o grupo reconstruiu a curva para que isso ocorresse, provavelmente pensando em evitar os números decimais.

Figura 63 - Encontrando a equação da parábola (parte 1)

Em seguida procuramos ~~na~~ a equação da cônica construída no geometra. Para a resolução tivemos que pesquisar a fórmula da distância de ponto a reta (encontramos no site: <https://brasilexcola.uol.com.br/matematica/distancia-entre-ponto-reta.htm>).

A primeira tentativa não deu certo utilizamos $d(F, P) = d(P, R)^2$ mas não saiu, na segunda tentativa deu certo, dados os pontos $P = (x, y)$, $F = (4, 4)$, $R = (x, 3)$.

$$d(F, P) = d(P, R) \Rightarrow (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (x - x)^2 + (y - 3)^2$$

$$x^2 - 8,28x + 17,1396 + y^2 + 2,76y + 19,044 = x^2 - 9y + 9$$

$$x^2 - 8,28x + 11,76y = -10,044$$

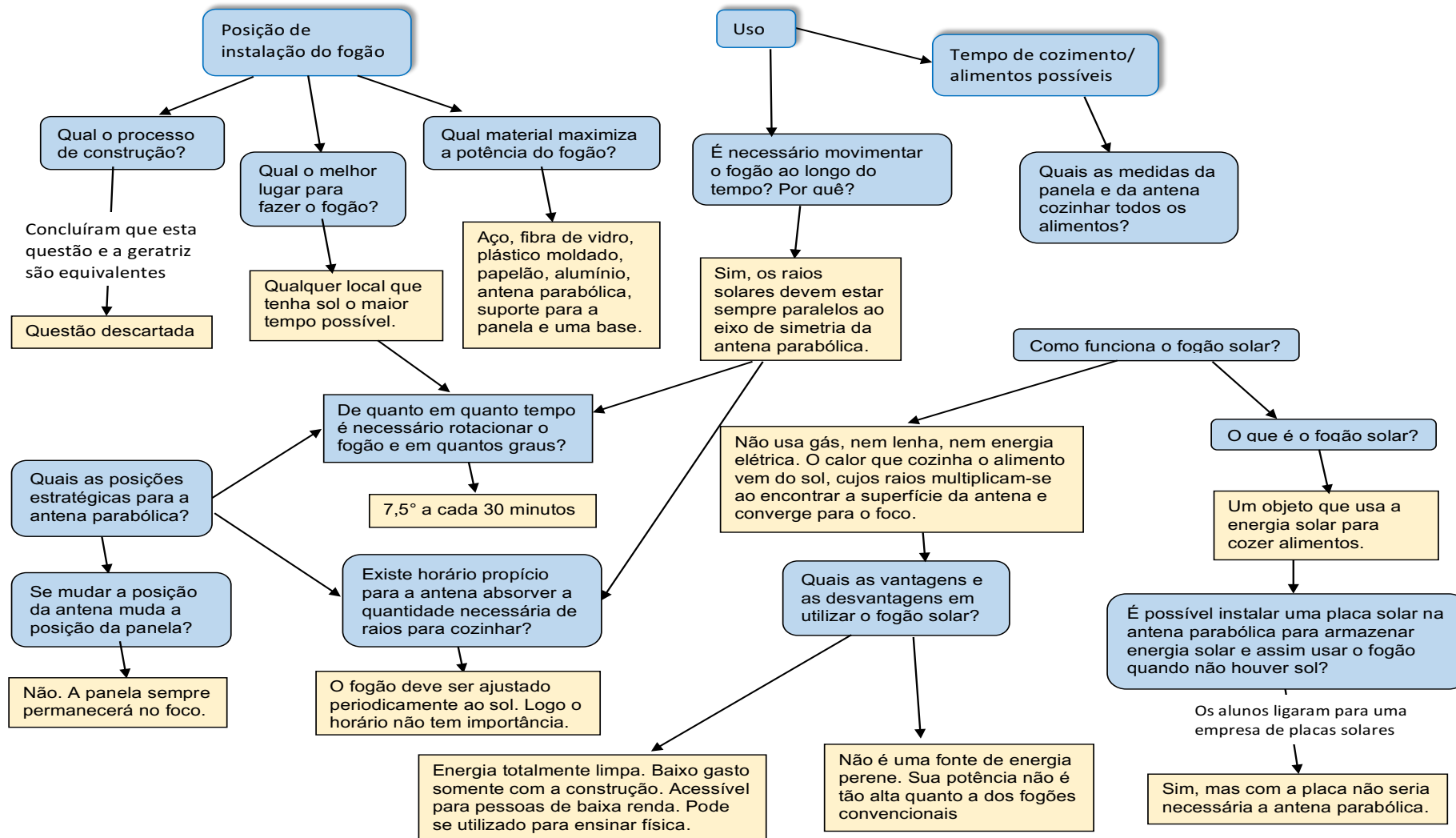
$$\begin{array}{r} -x^2 + 8,28x - 10,044 = y \end{array}$$

11,76 11,76 11,76

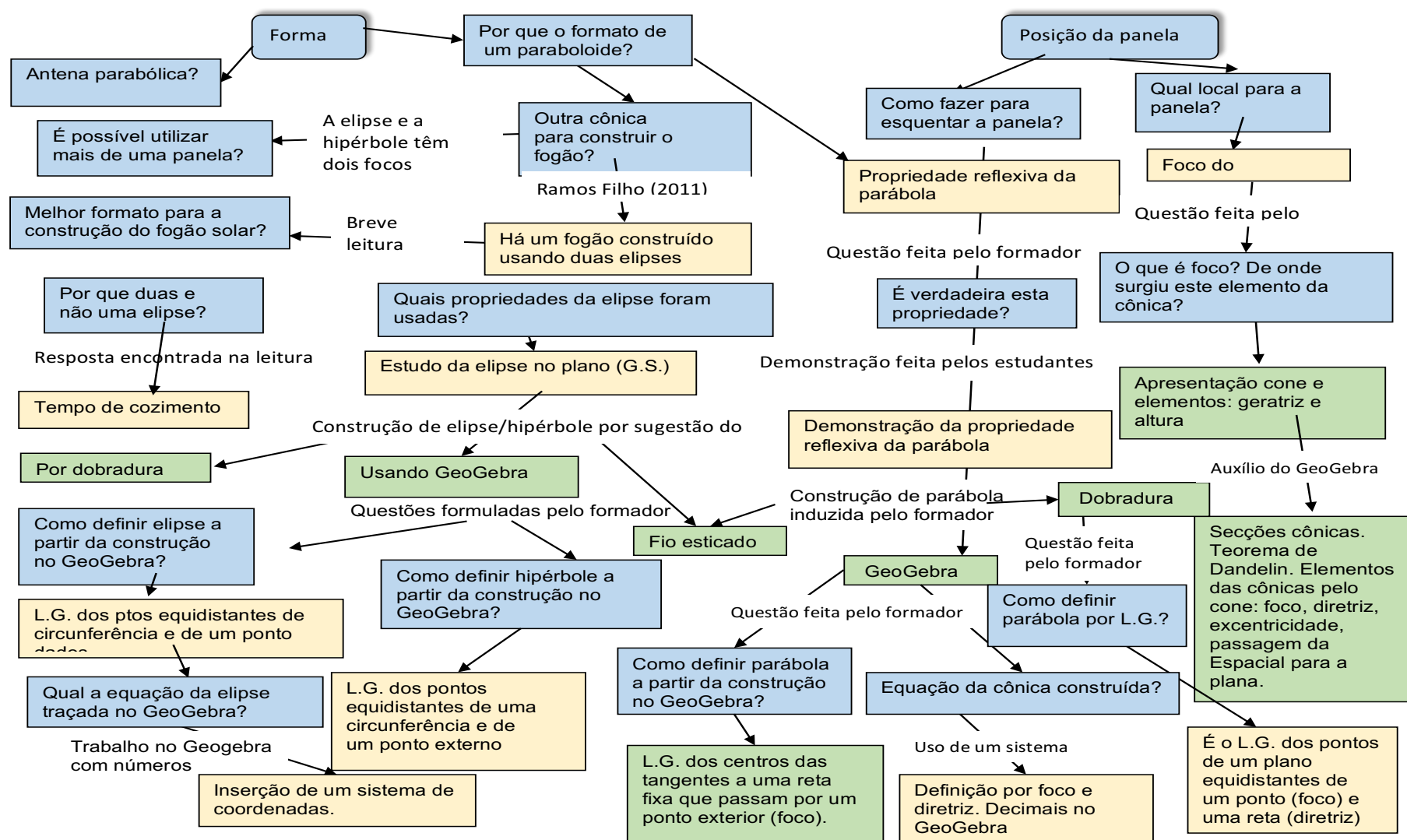
Quando fomos verificar se a cônica via bater com a que tínhamos construído, fizemos o seguinte

Fonte: Produção do grupo G3.

Embora tendo apresentado e analisado as questões e respostas elaboradas para os temas “forma” e “posição da panela”, para melhor representar a evolução das questões em cada um dos cinco temas, elaboramos, nas figuras 64 e 65, o mapa de questões e respostas *a posteriori* completo deste PEP vivido como uma resposta a uma questão do PEP-FP. O que representa as respostas está na cor laranja. Na cor verde estão as participações do formador consideradas no paradigma de visita às obras ou monumentalista, isto é, momentos em que ele aproveitou para ensinar determinados conteúdos que não tratavam exatamente de respostas a alguma questão produzida pelos estudantes.

Figura 64 - Mapa de questões e respostas *a posteriori* do PEP vivido no PEP-FP (parte 1)

Fonte: Produzida pelo autor.

Figura 65 - Mapa de questões e respostas *a posteriori* do PEP vivido no PEP-FP (parte 2)

Fonte: Produzida pelo autor.

Quando comparamos os dois mapas, *a priori* e *a posteriori*, notamos que algumas questões que surgiram quando experimentamos esse mesmo PEP, ainda em forma de um estudo exploratório, não ocorreram neste último experimento, como é o caso das questões que tratam do uso de materiais recicláveis e da qualidade dos alimentos cozidos pelo fogão solar. Em contrapartida, surgiram questões não esperadas por nossa análise *a priori* que alavancaram um estudo para a elipse e para apresentar alguns elementos da hipérbole.

Para a dialética da mesogênese, responsável por acompanhar a evolução do *milieu*, investigar quais mídias foram usadas pelos estudantes e de que forma eram validadas, foi fornecida a informação inicial de que o fogão solar deveria ser construído utilizando uma antena parabólica, e vimos que a mídia mais usada como fonte de informações foi a internet, com acessos por meio de microcomputadores ou *smartphones*. Inicialmente, os estudantes não mostraram preocupação quanto à confiabilidade da fonte consultada na *web* e acreditavam em qualquer informação encontrada até que o formador interferisse e estabelecesse critérios para que as pesquisas fossem mais confiáveis. Ficou decidido que documentos encontrados em *websites* de instituições públicas, universidades e bibliotecas eletrônicas seriam aceitos como confiáveis, enquanto informações vindas de outros locais deveriam ser validadas por meio de outra mídia ou verificando se havia outros endereços eletrônicos contendo o mesmo conteúdo.

Além da internet, outras mídias foram usadas, como o próprio formador quando consultado para validar alguma resposta produzida por algum dos grupos, além de livros didáticos dos Ensinos Básico e Superior, vídeos disponíveis no *YouTube* – ensinando a fazer dobraduras no papel vegetal –, o *Symbolab*³¹ e o *software* GeoGebra, que, apesar de não explícito na descrição feita pelo estudante na figura 63, foi usado por todos os grupos.

Na figura 66, o estudante afirma ter digitado a equação polinomial de grau dois (no GeoGebra) e encontrado “uma cônica aproximada” que o conduziu a refazer os cálculos, mas o grupo percebeu o erro e encontrou “a equação da cônica construída no início”.

³¹ É um serviço *online* que calcula soluções passo-a-passo para problemas matemáticos em vários conteúdos.

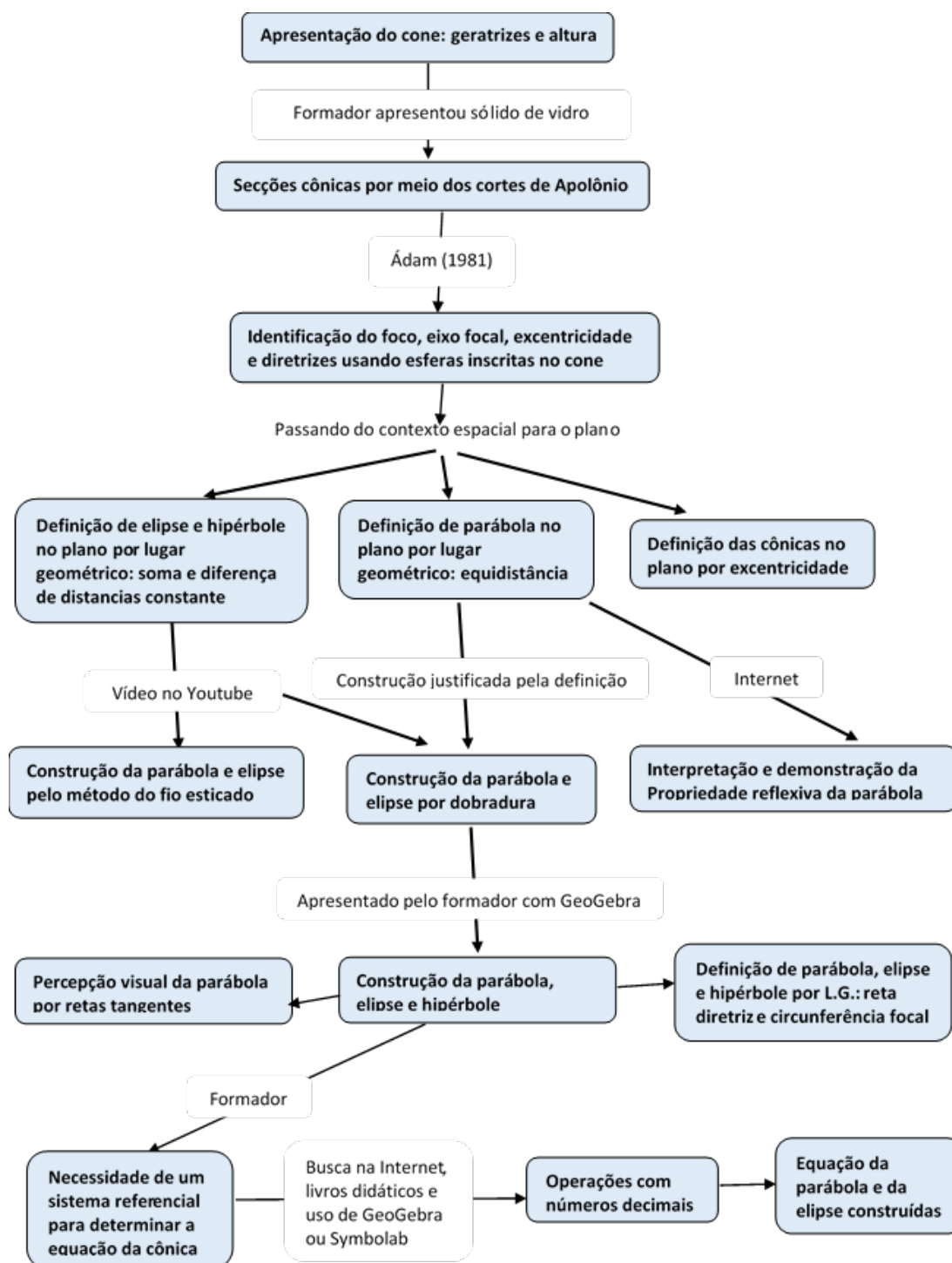
Figura 66 – Encontrando a equação da parábola (parte 2)

procedimento colocamos a seguinte equação
 $x^2 - 8,28x + 11,76y = -10,044$ e deu errado foi
quando percebemos que tínhamos que usar
o f. Depois, feita a correção, ficou uma cônica
aproximada. Mas refazendo os cálculos percebemos
que houve um erro e refazendo os cálculos
 $P: (x, y)$
 $C: (4,14, -1,38)$
 $d(P, P) = d(P, C)$
 $(x - 4,14)^2 + (y + 1,38)^2 = (x - x)^2 + (y - 3)^2$
 $-x^2 + 8,28x - 10,44 = y$
 $8,76 \quad 8,76 \quad 8,76$
encontramos a equação da cônica construída no
meio

Fonte: Produção dos estudantes.

Por fim, para melhor apresentar a evolução do *milieu* durante o experimento do PEP, o formador e os estudantes construíram um mapa desse desdobramento (figura 67) em que as mídias usadas para cada estudo estão descritas entre as setas que ligam os conteúdos trabalhados.

Os objetivos desse mapa eram apresentar aos estudantes de licenciatura a dialética mídia-*milieu*, como gerenciá-la durante o desenvolvimento de um PEP enquanto professores e identificar novos possíveis roteiros didáticos para o ensino de cônicas tanto na formação inicial de professores quanto no Ensino Básico. Em particular, o desdobramento do conteúdo nesse mapa é distinto dos encontrados nos livros didáticos, no sentido de que apresenta as cônicas na geometria sintética de uma forma mais robusta, além de continuidade e complementaridade entre os modelos de geometrias das cônicas (sintética nos contextos espacial e plano, e analítica).

Figura 67 - Mapa de evolução do *milieu* durante o PEP no PEP-FP

Fonte: Produzida pelo autor.

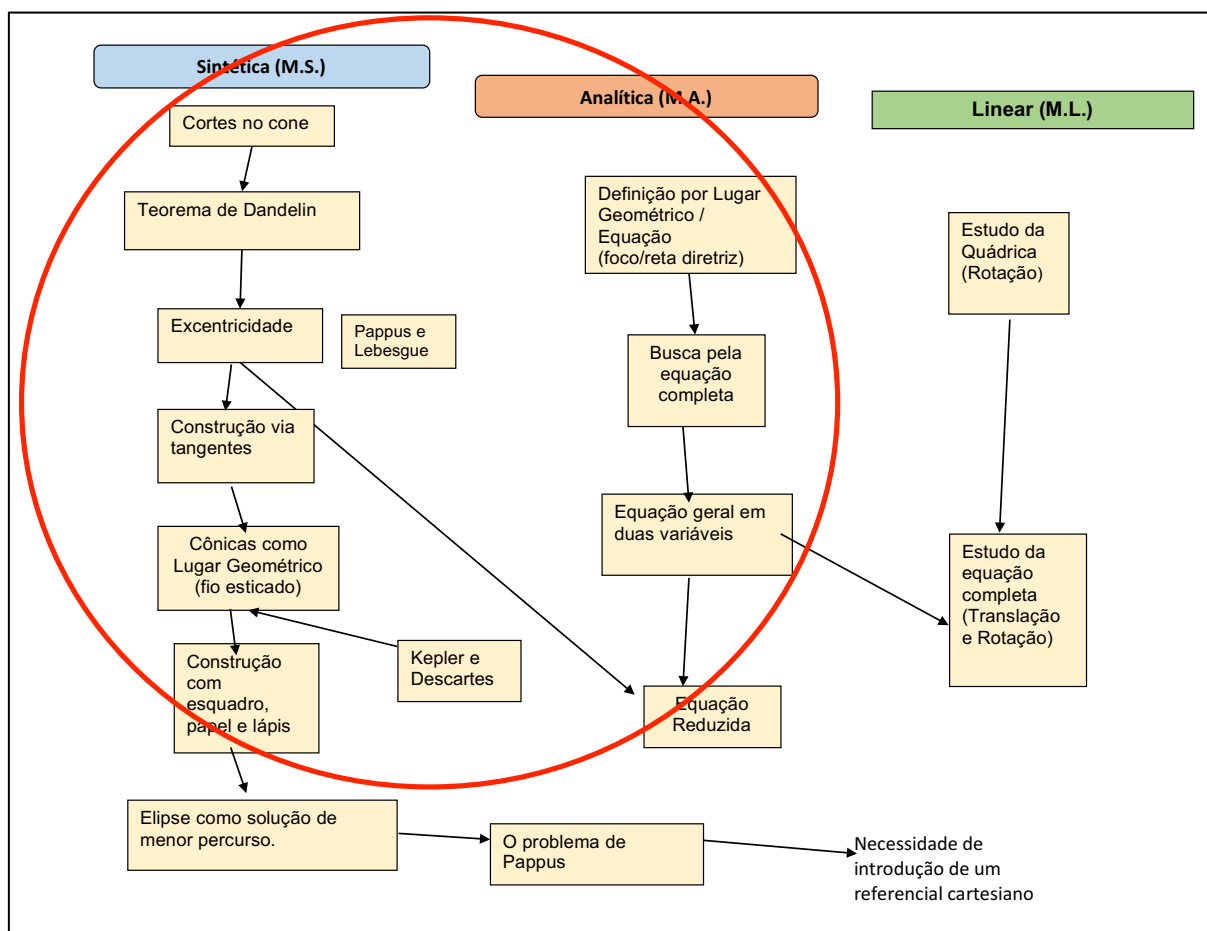
Para a topogênese, a dialética que trata das responsabilidades coletivas e individuais, notamos que os estudantes pesquisaram, discutiram, tomaram nota e compartilharam parte das respostas e das questões, já que algumas foram apresentadas pelo próprio formador. Consideramos, então, que o formador não esteve inserido no questionamento do mundo durante todo o experimento, mas

mediou as discussões às vezes via visita às obras, ou monumentalismo. Como exemplo, tivemos o conteúdo elipse, apresentado pelo formador para o estudo das condições que favoreceram o uso dessa cônica no desenvolvimento do fogão solar, que foi ministrado de maneira tradicional com a apresentação da obra de Ramos Filho (2011). O formador optou por essa conduta por conta do tempo disponível para a formação que não permitiu outra estratégia. Em outro momento, enquanto os estudantes trabalhavam com as diversas construções da parábola e da elipse, o formador teve uma conduta monumentalista quando lhes apresentou uma construção para a hipérbole usando o GeoGebra, pois a hipérbole não apareceu em nenhuma das construções de fogões solares, isto é, foi um conteúdo apresentado sem nenhuma demanda por parte das questões ou respostas criadas no percurso, sem razão de ser, somente porque o formador considerou importante.

Podemos, enfim, afirmar que este PEP proporcionou condições para o trabalho com grande parte do conteúdo cônicas proposto em nosso modelo epistemológico de referência. Os temas “forma” e “posição da panela” reuniram grande parte das questões que possibilitaram o formador trabalhar com a parábola e a elipse no modelo da geometria sintética e no modelo da geometria analítica. Não houve tempo para estudar as cônicas no modelo da geometria linear; no entanto, se considerarmos que havíamos encontrado equações polinomiais completas de grau dois em duas variáveis após a construção da elipse usando o GeoGebra e, portanto, já estávamos trabalhando com rotação e translação, seria possível transitar do modelo da geometria analítica para o modelo da geometria linear por meio de uma tarefa invertida, isto é, dando aos estudantes uma equação completa e pedindo para que encontrassem sua representação gráfica sem utilizar, inicialmente, algum *software*.

A seguir, apresentamos na figura 68 o alcance do nosso PEP em relação ao MER.

Figura 68 - Alcance do PEP em relação ao MER



Fonte: Produzida pelo autor.

6.5.3 Após o PEP

Neste terceiro e último bloco, o formador retomou a questão geratriz " Q_{0FP} : como ensinar cônicas?" e propôs aos estudantes que descrevessem como deveria ser o ensino de cônicas no Ensino Básico na opinião de cada grupo. Como resposta desta atividade, cada um dos quatro grupos entregou um texto de, aproximadamente, uma página, que discutiremos nesta seção. Na figura 69, apresentamos a resposta do grupo G2, que propôs iniciar a aula com exemplos de aplicação da parábola e da elipse para serem justificados ao final dos estudos. O grupo sugere o uso do GeoGebra para mostrar que todas as cônicas pertencem a uma mesma família e são obtidas por meio de cortes feitos por um plano no cone, alterando somente a inclinação desse plano. Os elementos de cada cônica (foco, reta diretriz, excentricidade, eixo focal) e a propriedade reflexiva da parábola serão apresentados após a construção das três curvas via dobraduras.

Em um segundo momento, o grupo propôs entregar um “plano cartesiano” para que seus alunos esboquem cada uma das cônicas e, em seguida, determinem suas equações. Entendemos que esses estudantes usaram a expressão “plano cartesiano” para uma folha de papel qualquer que poderia ser entregue sem o sistema referencial e, assim, a inserção dos eixos após o desenho da cônica agregaria uma discussão a respeito da passagem entre as geometrias sintética e analítica. Acreditamos que isso é “fruto” da predominância da geometria analítica nos sistemas de ensino básico e universitário, que parece ser uma restrição ao ensino da geometria sintética não tão simples de ser rompida, já que o formador fez essa discussão em classe durante a formação.

A proposta de ensino de cônicas apresentada pelo grupo G4, que pode ser vista na figura 70, sugere o início da aula questionando os alunos a respeito de aplicações dessas curvas em suas casas, no dia a dia, para que ao final da aula possa ser respondida a questão “o que é cônicas?” Na sequência, preveem uma apresentação de cônicas na história da matemática e outra com o GeoGebra: “redescobrimos conceitos básicos da geometria como pontos, retas, planos, perpendicularismo, entre outros”.

Os estudantes destacam a importância de o professor comentar a respeito da mudança entre as geometrias sintética e analítica usando o GeoGebra e que solicite que seus alunos determinem as equações das cônicas desenhadas no *software*.

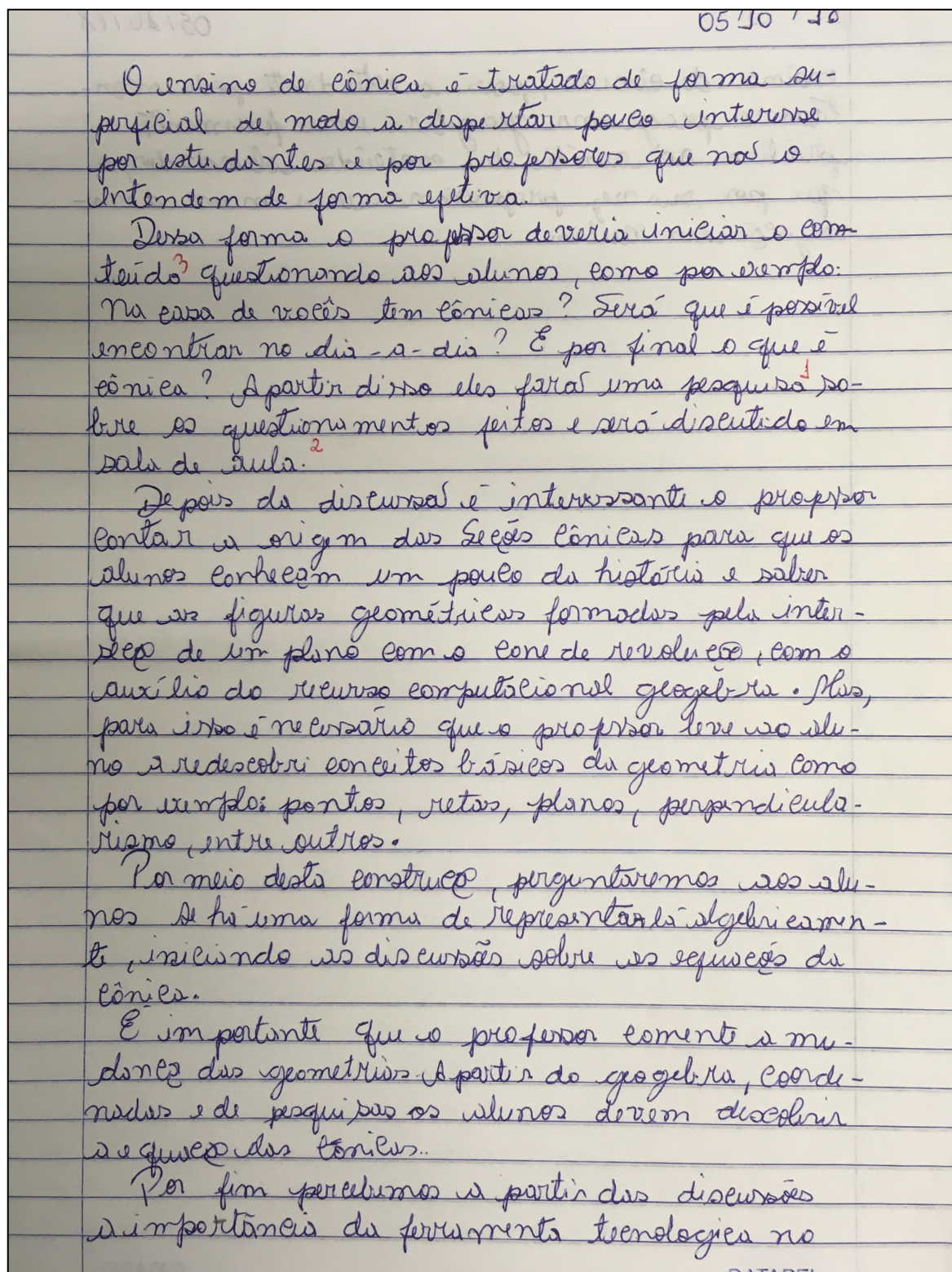
Já o grupo G6 propôs iniciar o ensino de cônicas apresentando-as por meio de seções do cone com auxílio de algum *software* (figura 71) para, em seguida, discutir aplicações dessas curvas e apresentar seus elementos e propriedades por meio da construção por dobraduras. Para o final da aula, sugerem os “cálculos” a fim de determinar as equações de cada cônica.

Figura 69 - Proposta de ensino de cônicas feita pelo grupo G2

<u>Grupo 2</u> (Ailton, Raphaela, Jussiele e Voltmer) Como introdução, serão feitos questionamentos sobre as Cônicas, tais como a funcionalidade da antena parabólica e a sala de sussurros que tem sua forma elíptica. Sendo que seriam dadas em último as justificativas de porque essas figuras ocorrem, para serem respondidas após ser desenvolvido o conteúdo. Assim, poderá despertar o interesse do aluno a respeito das Cônicas. Num segundo momento, através do uso do geogebra 3D seria mostrada passo a passo, "Cortes" de planos com o Cone. Diante disso, os alunos perceberão que as interseções de planos no Cone formam figuras geométricas planas, e que variam de formato de acordo com a inclinação do plano. (Não será especificado o nome de cada figura geométrica). Com auxílio do professor, será construído por desenhos as Cônicas. A partir daí, definiremos os elementos e as propriedades de cada Cônica (diretriz, foco, reta focal, propriedade refletora da parábola), sendo que a excentricidade de será diferenciada para cada figura. Em seguida será especificado e definido utilizando seus elementos cada Cônica. Dando continuidade aos trabalhos será entregue um plano cartesiano a cada aluno e pediremos para eles esboçarem cada uma das Cônicas neste plano. Dai induziremos a construção das equações relacionadas a cada Cônica. Então será retomada as perguntas feitas a priori para que eles respondam.
--

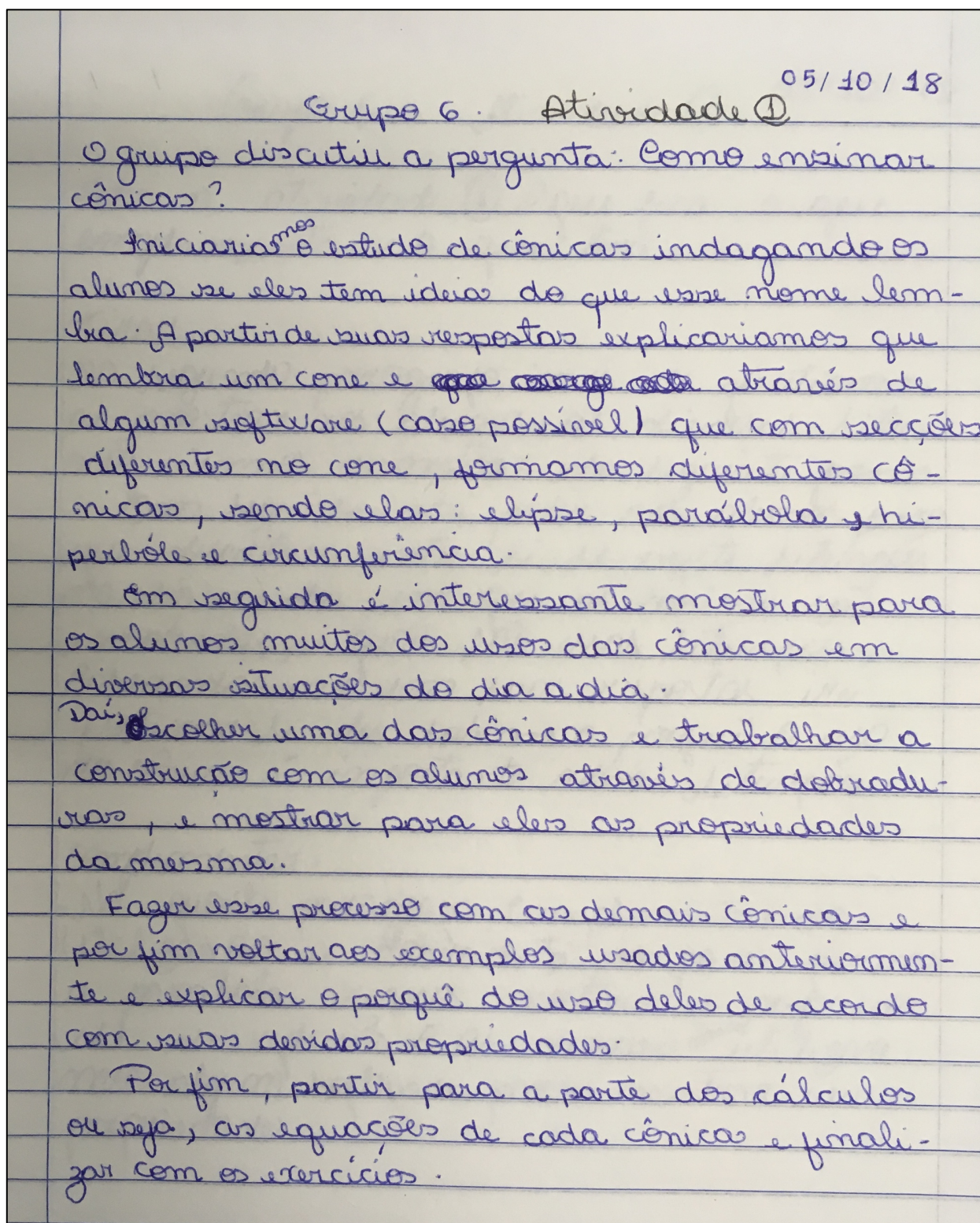
Fonte: Produção do grupo G2.

Figura 70 - Proposta de ensino de cônicas feita pelo grupo G4



Fonte: Produção do grupo G4.

Figura 71 - Proposta de ensino de cônicas feita pelo grupo G6



Fonte: Produção do grupo G6.

Comparando as respostas dos três grupos (G2, G4 e G6), é possível notar um modelo estruturante predominante: iniciar o ensino de cônicas com questionamentos para identificar que tipo de conhecimento possuem seus alunos a respeito desse

objeto matemático por meio de questões que tratam de aplicações, curiosidades, história da matemática e uso no dia a dia, porém não vemos em nenhum desses casos um problema que proporcione uma discussão ou que favoreça a criação de questões por parte dos alunos e não somente do professor. Em seguida, propõem a construção das cônicas com o auxílio do GeoGebra e de dobraduras para apresentarem seus principais elementos como focos, eixos, centro, excentricidade e propriedades. Por último, a passagem da geometria sintética para a analítica, além de exercícios propostos para que os alunos tracem as curvas e encontrem suas equações.

Podemos notar que em todos os casos é o professor quem dita as tarefas durante toda(s) a(s) aula(s) e aos alunos só cabem as responsabilidades de responder as questões, assistir às exposições do conteúdo e pesquisar a respeito de temas que não tiveram participação na escolha. Além disso, não são apresentadas as possíveis mídias que servirão como fonte de pesquisa para a construção e validação das respostas, o que nos leva a concluir que também caberá ao professor essa responsabilidade. Assim, ao agruparmos todas essas observações, conseguimos perceber uma conduta bastante inserida no monumentalismo, que, para Chevallard (2013a), é o paradigma dominante no sistema de ensino atual. Notamos que esse paradigma se mostra fortemente fincado nas produções e discussões desses estudantes de licenciatura, mesmo após participarem de um curso em que esse fenômeno foi discutido e o objeto matemático foi trabalhado tendo como base condutas diferentes das que apresentam.

Por outro lado, há a proposta de usar o GeoGebra e dobraduras na construção das curvas, recursos não tradicionais e pouco utilizados em sala de aula e que foram explorados pelo formador no experimento do PEP, além da preocupação com a distinção entre os modelos de geometrias das cônicas.

Entre essas propostas de ensino houve uma, a do grupo G3, que apresentou uma estrutura de estudo rompendo com o monumentalismo ao buscar criar “problemáticas” para justificar o estudo das cônicas e da busca por suas equações (ver figura 72). O grupo se preocupou em sugerir discussões entre os alunos para que surjam questões que possam direcionar os estudos, mantendo sempre viva a questão inicial.

Figura 72 - Proposta para o ensino de cônicas produzida pelo grupo G3

05/10 / 18

Proposta feita pelo grupo 3:

Iniciariamos com uma problemática, na qual os alunos entenderiam a necessidade do estudo de novos objetos (Cônicas).

Dixariamos os alunos discutindo o problema, provavelmente iriam surgir novas perguntas. Dessas perguntas iriamos direcioná-los para os nossos objetivos. Diante disso iriamos ~~de~~ fazer a construção da cônica em questão trabalhada no problema. (supondo que nesse momento eles já encontraram a cônica que será trabalhada).

Em seguida iriamos definir a cônica, depois pediríamos que a partir das definições os alunos construíssem um esboço do cônico.

Voltariamos para o problema e tentariamos resolvê-lo.

Em um segundo momento, apresentariamos uma ~~parte~~ outra parte do problema, que precisaria das equações das cônicas, daí a partir do uso do geometria iriamos introduzir o eixo cartesiano no estudo. Com conhecimento adquirido sobre cônicas construiríamos equações canônicas (antes disso seria questionado se tem a possibilidade de encontrar a equação para a figura desenhada).

Então voltariamos para a segunda parte do problema e resolveríamos.

Fonte: Produção do grupo G3.

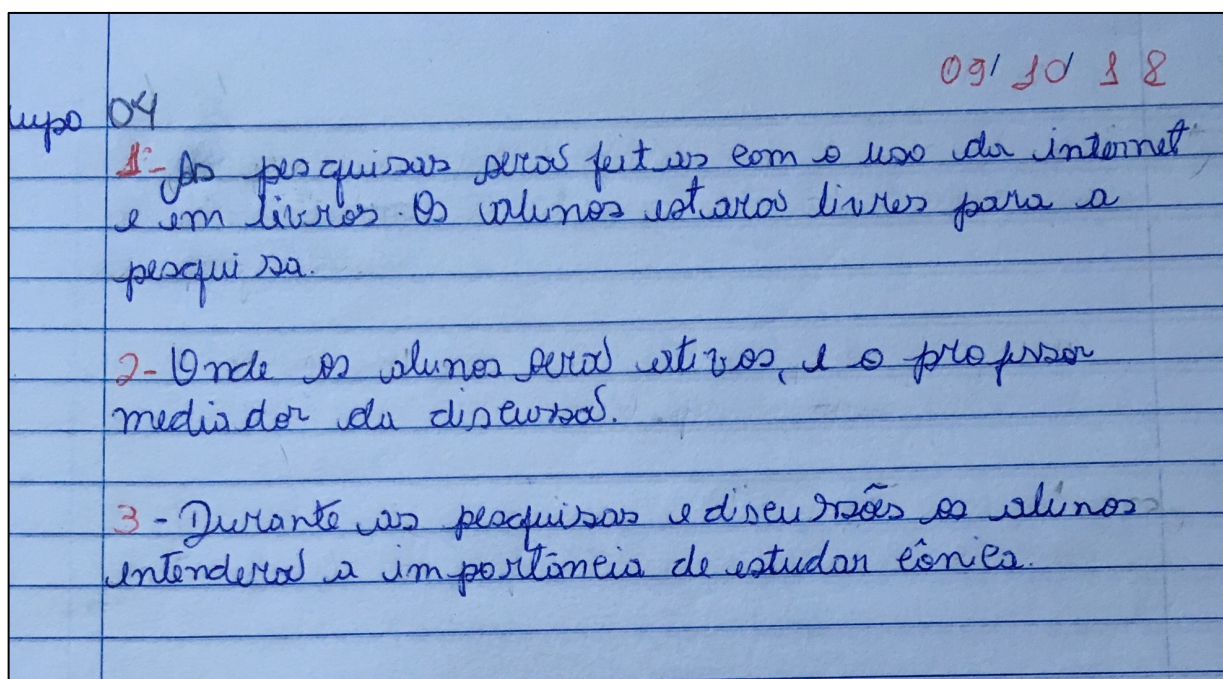
Diante das observações feitas para essas propostas para o ensino das cônicas e pensando em provocar reflexões por parte dos estudantes a respeito de suas respostas, foi solicitado aos grupos que identificassem em suas propostas quais eram as responsabilidades do professor e dos alunos; quem elaborava as questões e como seriam validadas as respostas; quais seriam as fontes de informação usadas

durante as aulas e como administrariam a construção de conhecimento durante essas aulas.

O formador também recomendou aos estudantes que lessem e discutissem o artigo de Paques e Sebastiani Ferreira (2011) por trazer um panorama de diversas abordagens para as cônicas encontradas em livros didáticos usados no Ensino Básico brasileiro nos últimos séculos. O objetivo de tal leitura seria provocar uma discussão que destacasse a importância de um estudo epistemológico do objeto tanto para que o professor saiba de toda sua amplitude matemática, como também identifique sua razão de ser na instituição em que pretende trabalhar.

Nessas condições e depois de terem compartilhado todas as interpretações acerca do artigo, lhes foi apresentado o MER elaborado para este trabalho e, na sequência, foi solicitado que escrevessem o que mudariam e o que acrescentariam nas propostas de ensino após essas discussões e leituras. O grupo G2 não sugeriu qualquer alteração em sua proposta inicial.

Figura 73 - Alterações na proposta de ensino feitas pelo grupo G4

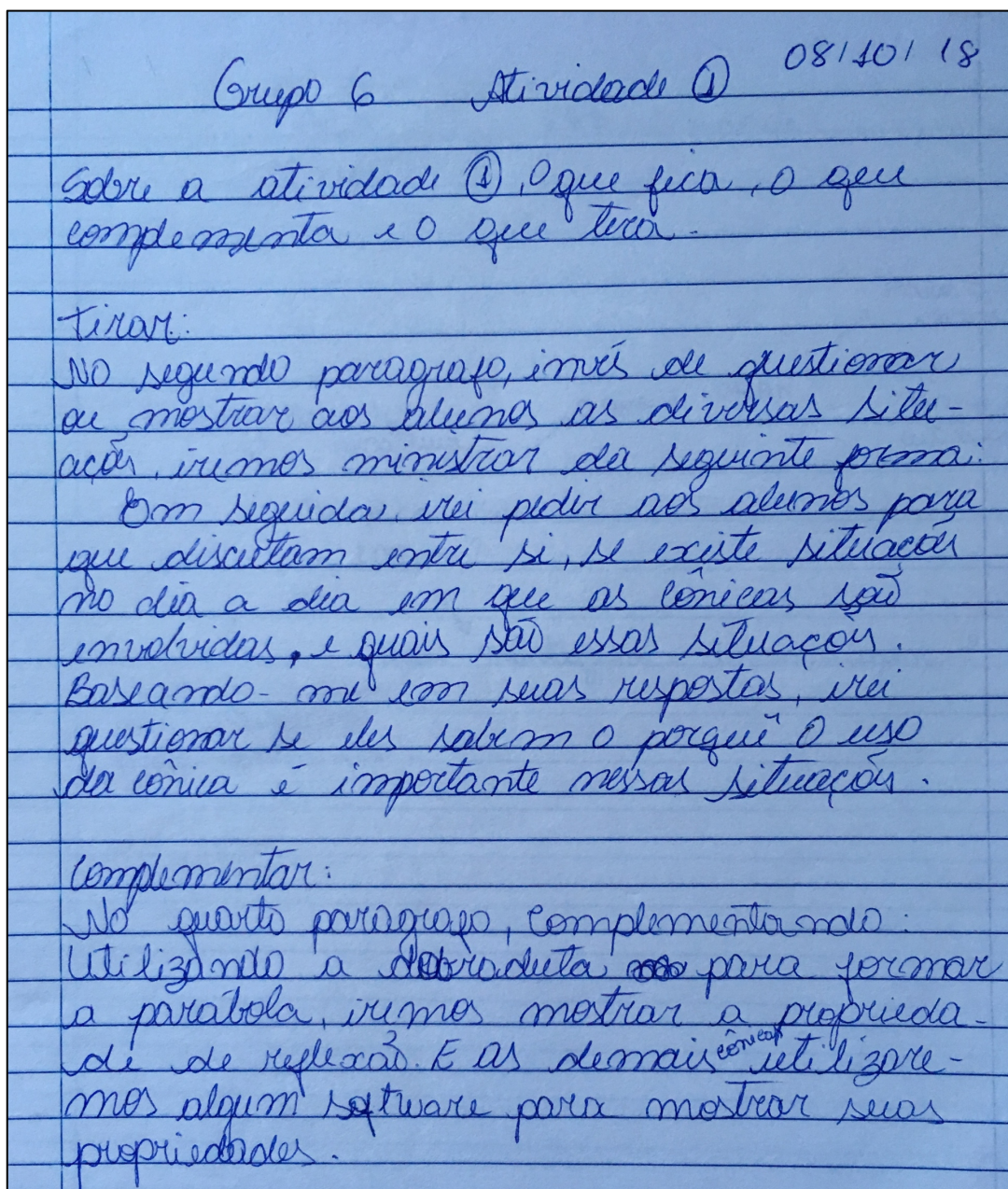


Fonte: Produção do grupo G4.

Como vemos pela figura 73, o grupo G4 acrescentou apenas três frases para complementar sua proposta. Notamos que, por um lado, o grupo sugere que “os alunos serão ativos e o professor mediador da discussão”, mas, por outro lado, há frases como “o professor deve contar a origem das seções cônicas...” e “é importante

que o professor comente a mudança das geometrias..." na proposta inicial. Isso reforça o quão confuso e difícil é para esses futuros professores pensar em novas metodologias estando fortemente inseridos no monumentalismo.

Figura 74 - Alterações na proposta de ensino feitas pelo grupo G6



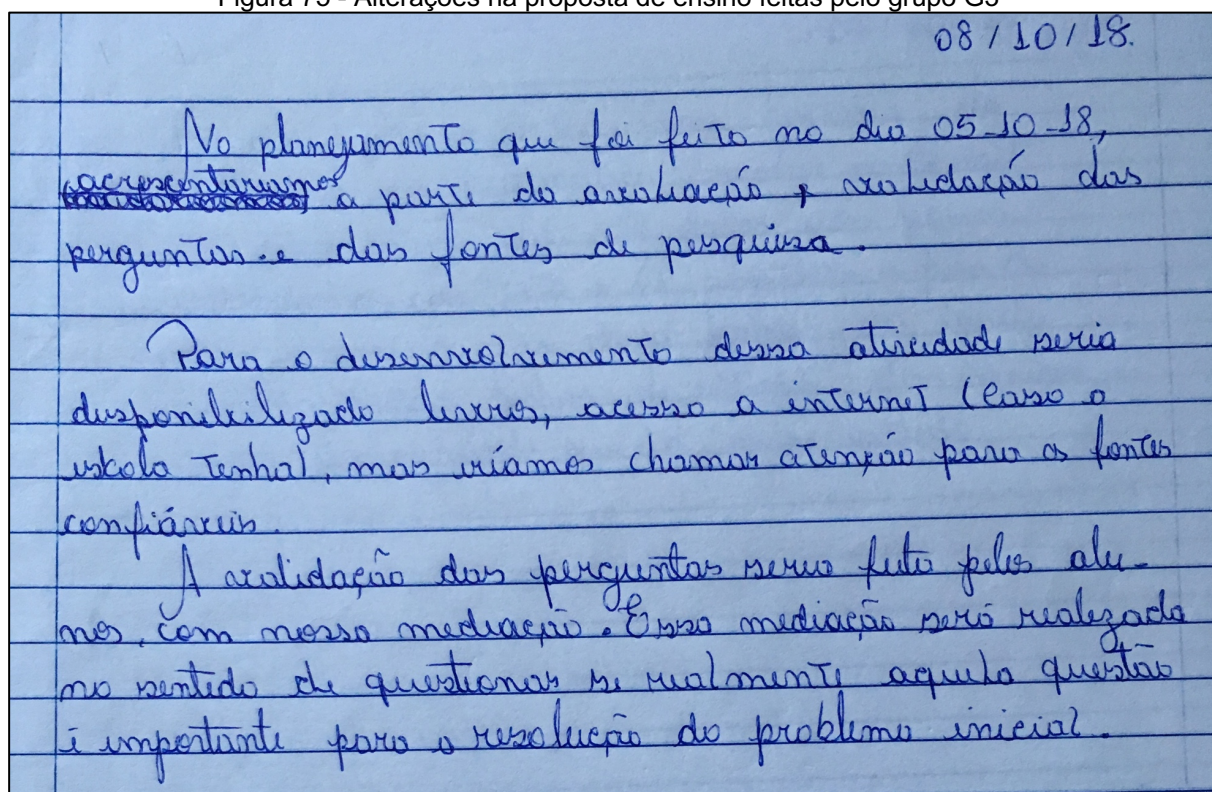
Fonte: Produção do grupo G6.

Já o grupo G6, como mostra a figura 74, propõe aos alunos uma maior participação nas aulas, pesquisando e discutindo possíveis aplicações do objeto matemático a ser estudado, porém as questões seguem elaboradas pelo professor.

O grupo G3, que apresentou uma proposta mais inserida dentro do questionamento do mundo, complementou sua resposta com ênfase na avaliação e

na validação das questões que direcionarão os estudos. Como podemos notar na figura 75, a questão geratriz é usada como “norte” na validação das questões: “[...] questionar se realmente aquela questão é importante para a resolução do problema inicial”. Além disso, o grupo se mostra preocupado que seus alunos usem “fontes confiáveis” durante suas pesquisas.

Figura 75 - Alterações na proposta de ensino feitas pelo grupo G3



Fonte: Produção do grupo G3.

De certa forma, podemos observar que as alterações feitas pelos grupos estão fortemente relacionadas ao que o formador discutiu em sala logo após a entrega das primeiras propostas. Em resumo, o grupo G3 apresentou a proposta mais direcionada a uma mudança de paradigma, com ideias alinhadas com o que foi trabalhado durante o PEP, e mostrou alguma preocupação com as três dialéticas (cronogênese, mesogênese e topogênese) usadas na gestão do experimento e explicitadas pelo formador durante e após o percurso.

Outra atividade que ocorreu neste terceiro bloco do PEP-FP foi um desenho inicial de um PEP para o estudo da hipérbole, embora estivesse prevista a construção de um PEP para a elipse; porém, como essa cônica foi trabalhada no PEP do fogão solar, decidimos não a explorar neste momento.

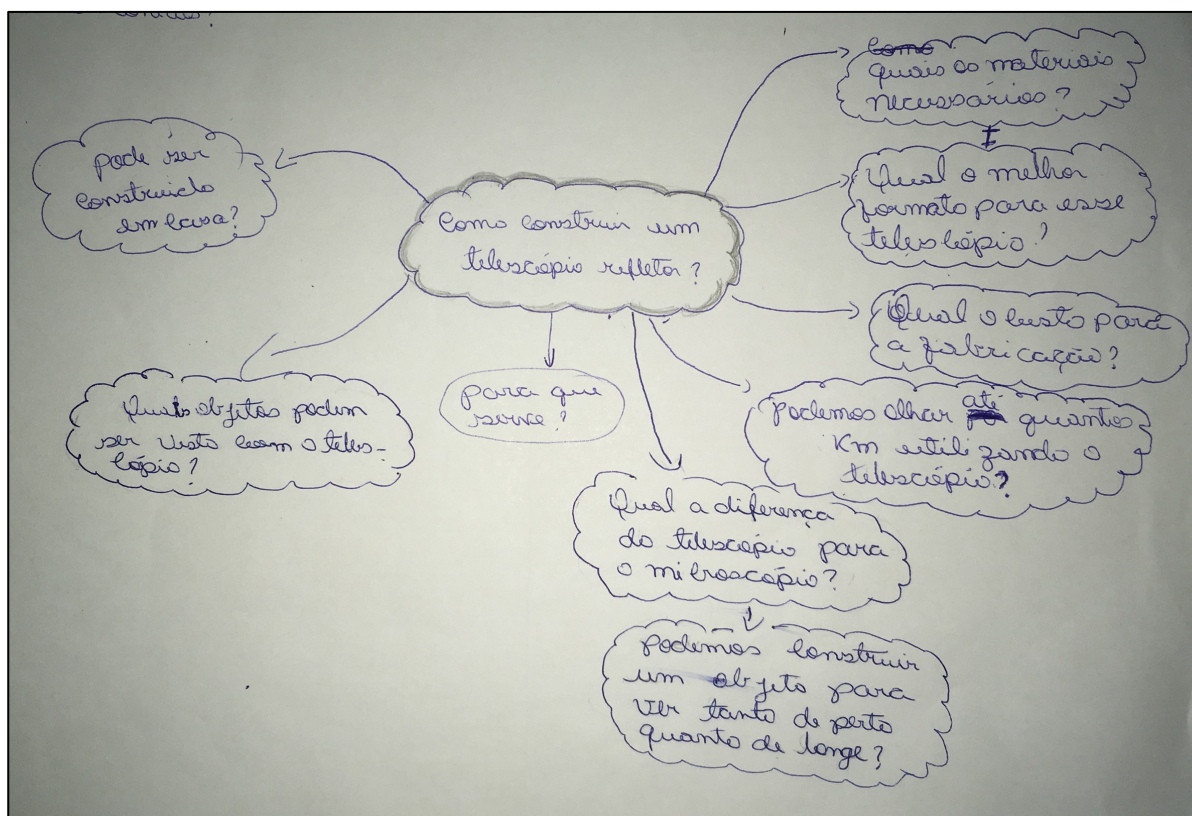
Por meio da questão “qual seria um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino de hipérbole?”, o formador permitiu que os estudantes tivessem um primeiro contato com a complexidade que envolve o planejamento desse tipo de trabalho e para que pudéssemos acrescentar, na avaliação dessa formação, possíveis obstáculos ou restrições para a introdução desse dispositivo no Ensino Superior.

Os estudantes receberam orientações do formador com relação aos primeiros passos para a construção de um PEP. Entre as ações iniciais está a escolha de uma questão geratriz, que deve conter em seu desdobramento um estudo do objeto matemático a ser trabalhado, além de ser clara e possível de ser respondida dentro do nível escolar em que será apresentada. Outro elemento importante para esse primeiro momento de planejamento, destacado pelo formador, é o desenho do mapa de questões e respostas que permita ao formador identificar os potenciais percursos.

Essa foi uma tarefa em que os estudantes mostraram dificuldade, talvez pelo tempo que foi reservado a ela (2 horas) junto às próprias dificuldades do tema, visto que não há tantas aplicações ou problemas que estejam diretamente ligados à hipérbole. Os grupos G2 e G3 escolheram a construção de um telescópio como questão geratriz, enquanto o grupo G6 preferiu trabalhar com o sistema de radionavegação LORAN, o mesmo usado pelo formador para desenhar seu PEP para o ensino de hipérbole e que não foi aplicado nesta pesquisa. O grupo G4 não apresentou nenhuma sugestão.

O mapa de questões construído pelo grupo G3, que serve como um representante dos demais mapas, tendo em vista que nenhum dos grupos conseguiu avançar nesta atividade, é apresentado na figura 76. O desenvolvimento e o desdobramento das questões não se distanciaram da questão geratriz e tampouco se encontra alguma particularidade matemática da hipérbole relacionada ao problema, que obrigatoriamente deveria ser tratado com o avanço das questões apresentadas.

Figura 76 - Mapa de questões apresentado pelo grupo G3 para o estudo de hipérbole



Fonte: Produção do grupo G3.

Enquanto os estudantes trabalhavam nesta atividade, um dos estudantes procurou o formador para perguntar se era possível trabalhar com o PEP para qualquer conteúdo de matemática do Ensino Básico, pois ele acreditava ser uma metodologia de ensino que demanda muito tempo para cada assunto. Em nossa análise, se trata de uma pergunta bem natural que surge do fato de esses estudantes nunca terem trabalhado com uma estratégia de ensino baseada em questões e respostas; além disso, há o engessamento dos conteúdos contidos nos livros didáticos, principalmente quanto à ordem em que devem ser apresentados. No caso das cônicas, por exemplo, vimos que a maioria dos livros didáticos trabalha as três curvas em seções independentes, o que não ocorreu em nosso PEP, pois mostramos que a parábola e a elipse podem ser trabalhadas paralelamente por meio de uma única questão geratriz.

Entre os conhecimentos construídos como resultado desta atividade, realçamos que, devido às restrições apresentadas nesta seção, se faz necessário um tempo maior para que os estudantes possam desenhar um PEP que contenha um estudo de uma questão geratriz e seus possíveis desdobramentos (cronogênese),

assim como a explicitação dos elementos matemáticos relacionados ao conteúdo que serão potencialmente alcançados ou não (considerando o que é encontrado nos livros didáticos e solicitado nos documentos curriculares oficiais) e, assim, teremos dados suficientes para uma análise ecológica e econômica mais realista das restrições a esse tipo de trabalho em cursos de licenciatura em Matemática.

7 Considerações finais

Neste trabalho, desenvolvemos uma formação para um grupo de estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS) baseada nos dispositivos de Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) da Teoria Antropológica do Didático para o ensino de cônicas: elipses, parábolas e hipérboles. A proposta desta investigação foi responder a seguinte questão:

Qual proposta de praxeologia matemática para o ensino de cônicas se pode utilizar na formação inicial de professores brasileiros? Em que essa praxeologia contribui e em que pode ajudar os futuros professores a desenhar, analisar e implementar novos processos didáticos?

Por meio de um estudo epistemológico para as cônicas, encontramos esse objeto matemático inserido em três modelos de geometria: a sintética, em que a parábola, a elipse e a hipérbole são definidas como seções de um cone duplo no espaço ou como lugar geométrico no plano; a analítica, que nos permite ver as cônicas como representações gráficas dos pontos que satisfazem a equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$; e a linear, em que essas curvas são definidas como formas quadráticas no plano.

Nesses modelos procuramos mostrar a insuficiência de cada geometria (praxeologia) em produzir técnicas para a resolução de questões que tratem de cônicas em toda a sua abrangência. Em contrapartida, esses estudos nos permitiram identificar tarefas que mostram uma complementaridade entre esses três modelos de geometria. Isso tudo contribuiu para o desenvolvimento de uma formação inicial que buscou apresentar uma proposta de ensino para cônicas de uma maneira mais completa no sentido epistemológico, ao menos diante do que é encontrado nos livros didáticos usados no Ensino Básico nos estados de São Paulo e Sergipe.

Para o desenho da formação inicial, contamos também com os resultados obtidos de um estudo exploratório que foi desenvolvido com base nos dispositivos do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) e aplicado para alunos do terceiro ano do Ensino Médio e para estudantes de licenciatura em Matemática da UFS. Foram identificadas restrições para a implementação do PEP no modelo de ensino atual

brasileiro e, conseqüentemente, foram criadas sugestões para minimizar o impacto dessas restrições.

As restrições encontradas se referem, principalmente, à dinâmica da estratégia de ensino do PEP, que é baseada no modelo de questões e respostas e que exige uma participação ativa por parte do estudante tanto na busca pelas respostas, como também na formulação e validação das questões a serem trabalhadas durante as aulas. Como propostas para conter essas restrições, foram determinadas atribuições individuais aos estudantes inseridos em um grupo de trabalho que objetivavam a criação de novas questões, além de um processo desenvolvido para gestão, classificação e validação das questões elaboradas durante a aula.

O estudo exploratório também comprovou uma defasagem no conhecimento das cônicas do contexto sintético para o analítico, resultado que atribuímos à predominância desse último contexto no Ensino Básico brasileiro, como mostram os trabalhos analisados em nossa revisão bibliográfica.

A formação inicial teve duração de 28 horas e contou com a participação de 16 estudantes do curso de licenciatura em Matemática da UFS. Como já foi dito, se utilizou o dispositivo do PEP-FP e se trabalhou tanto com questões relacionadas à prática docente, como também com a formação matemática dos futuros professores para o ensino de parábolas, elipses e hipérboles.

Os objetivos para a formação inicial foram divididos pelas duas posições ocupadas pelo autor deste trabalho. Como formador de professores, pretendíamos oferecer recursos para que os futuros professores percebessem as características do monumentalismo presentes no ensino da matemática e lhes dar elementos para que possam elaborar propostas didáticas baseadas no paradigma de questionamento do mundo, além de propor uma atividade para que estudem esses três modelos de geometrias para as cônicas. Já na posição de pesquisador em Educação Matemática, tínhamos a proposta de investigar de que maneira o MER pode contribuir para o desenvolvimento geral do PEP e do PEP-FP (problema econômico e epistemológico), além de identificar como se manifesta o monumentalismo durante o PEP-FP e quais dispositivos foram desenhados para contê-lo.

Ao final da pesquisa, adquirimos informações que nos permitem considerar alguns resultados para este trabalho e, conseqüentemente, responder as nossas questões de pesquisa.

Diante dos dados levantados no último capítulo desta tese, por meio das análises desenvolvidas após a formação inicial usando o dispositivo do PEP-FP, consideramos que os estudantes de licenciatura que participaram desta investigação desenvolveram um olhar crítico para o conteúdo cônico, principalmente quanto às escolhas feitas por um professor no momento de planejar suas aulas.

Pode-se notar que o monumentalismo esteve sempre muito presente nesta formação, tanto pelos professores em formação, por meio das dificuldades em elaborar questões e também pela falta de prática em realizar pesquisas sobre assuntos até então desconhecidos – por exemplo ao trabalharem com equações usando números decimais em geometria analítica –, como também por parte do formador, que em determinados momentos fugiu do questionamento do mundo e das questões levantadas pelos estudantes para ensinar conteúdos que lhe pareciam importantes, como ocorreu para o ensino de hipérbole descrito no capítulo 6.

Uma restrição destacada por um grupo de estudantes, durante a formação inicial, trata de como administrar o tempo quando usamos o dispositivo do PEP como estratégia de ensino em alguma escola que exija que os conteúdos sejam ministrados dentro de períodos predeterminados pela coordenação. Sabemos que essa é, de fato, uma das restrições para a implementação do PEP e, conseqüentemente, para o desenvolvimento do paradigma de questionamento do mundo no ensino brasileiro (quiçá mundial), porém acreditamos que as instituições devem também passar por uma mudança na maneira de planejar suas atividades, isto é, o paradigma de questionamento do mundo deve ser disseminado de forma ampla não somente para professores ou coordenadores, mas também para toda a escala de codeterminação determinada pela Teoria Antropológica do Didático.

Nesse momento, teremos outra escola e preocupações desse tipo não existirão mais; além disso, todo o corpo docente estaria engajado nessa metodologia porque os professores teriam de controlar os conteúdos já ministrados nos PEP realizados e buscar outros para dar conta do que a sociedade estipula como conhecimentos matemáticos a serem desenvolvidos na escola.

Entre os conteúdos que foram trabalhados com o PEP a respeito do fogão solar estão: cone (geratriz e altura); seções cônicas por meio de cortes no cone duplo; identificação do foco, eixo focal, diretriz e excentricidade da cônica pelas esferas de Dandelin; definição de cônicas por excentricidade; definição de cônicas no plano por lugar geométrico (bifocal e reta/diretriz); propriedade reflexiva; construção das cônicas por meio de retas tangentes e determinação da equação completa das cônicas usando a definição por lugar geométrico.

Na formação inicial, não foi possível trabalhar o modelo da geometria linear, que somente foi apresentado aos professores em formação como parte do estudo epistemológico realizado para as cônicas. Acreditamos que os motivos que causaram essa impossibilidade estão atrelados à falta de experiência, por parte dos futuros professores e do formador, em trabalhar com a dinâmica do PEP, que é baseada no ensino por investigação por meio de questões e respostas.

Com base nas discussões apresentadas no final do capítulo 6, consideramos que o dispositivo dos PEP-FP pode ajudar os professores em formação inicial inserindo-os no paradigma de questionamento do mundo e rompendo com determinadas restrições vindas do paradigma de visita às obras, principalmente pelo fato de trabalhar com o modelo de questões e respostas como estratégia de ensino.

De uma forma mais técnica, a estratégia de ensino usada pelo PEP-FP permite que o professor em formação questione o conteúdo proposto nos livros didáticos e, assim, perceba a necessidade de desenvolver um Modelo Epistemológico de Referência para guiá-lo tanto nas análises dos livros, como também em suas escolhas didáticas, além de determinar, de forma explícita, novas praxeologias para um conteúdo já estudado.

Os estudantes que participaram da nossa pesquisa comprovaram esses fatos ao apresentarem, em suas propostas de ensino para cônicas, abordagens distintas das encontradas nos livros didáticos e/ou livros textos usados nas universidades. As propostas pretendiam apresentar as cônicas, seus elementos e as propriedades reflexivas no contexto sintético por meio de dobraduras ou usando o GeoGebra; além disso, todos os grupos se preocuparam com a passagem entre as geometrias sintética e analítica. Em particular, o grupo G3 nos entregou ideias para o ensino de cônicas que consideramos fortemente inseridas no paradigma do questionamento do mundo, com preocupações em apresentar uma razão para a aprendizagem desse conteúdo

e permitindo que seus alunos direcionem o estudo por meio de questões elaboradas no início da aula.

Consideramos que o Modelo Epistemológico de Referência em torno dos modelos de geometrias das cônicas construído neste trabalho, junto com as atividades do PEP-FP, pode ser uma proposta de praxeologia matemática a ser utilizada para estudantes brasileiros de cursos de licenciatura em Matemática, já que o processo de suas construções foi baseado em determinar questões que favorecessem o desenvolvimento das cônicas, prevalecendo as características de cada modelo de geometria, com tarefas que mostrassem a insuficiência individual de cada um e a complementaridade existente entre eles, além de abordar também problemas da profissão docente.

Outro resultado desta pesquisa se trata do processo de construção do MER. O desenvolvimento deste modelo teve início com pesquisas em livros de ensino universitário de diversos temas, artigos de matemática pura e de Educação Matemática e livros didáticos usados no Ensino Básico em diferentes épocas no Brasil e na Europa. Tudo isso nos levou a uma primeira versão de um MER que possuía três modelos de praxeologias para as cônicas (sintética, analítica e linear) e que eram apresentadas por problemas que buscavam determinar as tarefas, técnicas e tecnologias pertencentes a cada um dos três modelos. Após isso, tentávamos mostrar que as praxeologias desses três modelos eram incompatíveis ou que não se relacionavam, no sentido de que, em alguns casos, era praticamente impossível resolver tarefas de determinado modelo usando técnicas de outro.

As evoluções foram surgindo em uma dialética entre o MER e o PEP-FP que ocorreu durante os processos de desenvolvimento das atividades e do próprio experimento com os professores em formação inicial. Entre as primeiras alterações, tivemos que o MER passou a ser desenvolvido em torno dos modelos de geometrias das cônicas e não mais em torno das cônicas, como apresentado no capítulo 3 deste trabalho. Além disso, baseados nos trabalhos de Ruiz-Olarría (2015), Licera (2017) e Gascón (2002), decidimos reconstruir os modelos alterando a forma de apresentá-los – buscamos traçar uma sequência de questões que contemplassem as cônicas em sua dimensão epistemológica – e acrescentando algumas questões que surgiam conforme caminhávamos com as atividades do PEP-FP. Essas questões eram construídas com o propósito de mostrar as insuficiências de um modelo e,

consequentemente, a necessidade de se criar um outro capaz de solucionar a questão inicial.

Por outro lado, o próprio MER também serviu de guia para determinarmos quais assuntos deveriam ser abordados no PEP-FP e em particular no PEP a respeito do fogão solar (experimentado como uma das atividades do PEP-FP), em que o formador procurou trabalhar questões com o objetivo de contemplar o máximo do conteúdo contido no MER, algumas delas introduzidas de uma maneira monumentalista.

Assim, ao final do PEP-FP, tínhamos um novo MER com três modelos de geometrias para as cônicas (sintética, analítica e linear) insuficientes quando estudados de forma individual, mas complementares e capazes de apresentar uma visão para as cônicas mais completa – no sentido epistemológico – do que é apresentado nos livros didáticos e nos livros textos usados na formação do professor de matemática de algumas universidades brasileiras.

Particularmente, a Teoria Antropológica do Didático foi muito importante para o desenvolvimento desta investigação e para o alcance desses resultados, principalmente no que diz respeito à metodologia de investigação que integrou ferramentas como MER, MED, PEP e PEP-FP, permitindo estudar e apresentar as cônicas em um nível epistemológico bastante singular e explicitar as condições e restrições da instituição de ensino para o implemento de nossa formação inicial (PEP-FP), desenvolvendo assim um percurso de investigação favorável para responder a questão enunciada no início deste trabalho. Além disso, os estudos das três dimensões (epistemológica, econômica e ecológica) de um problema didático junto com as três dialéticas (cronogênese, mesogênese e topogênese), todas desenvolvidas no marco da TAD, foram fundamentais para as análises dos experimentos realizados nesta pesquisa.

Dessa forma, pensamos que a metodologia de investigação usada neste trabalho pode servir para novas pesquisas, em particular para problemas a respeito da formação (inicial ou continuada) de professores, inclusive para áreas diferentes da matemática. Além do mais, a estratégia de construir um MER em torno de modelos de geometrias pode ser empregada em outros trabalhos para diferentes objetos matemáticos, possivelmente para modelos de geometrias distintos daqueles estudados neste texto.

Finalmente, como perspectivas para futuras investigações, surgem como consequência deste trabalho os estudos de condições e restrições para dar vida às cônicas tanto na geometria sintética quanto na geometria linear no Ensino Básico, já que a única em que essas curvas vivem é a geometria analítica.

Referências

- ÀDAM, P. P. **Curso de Geometria Métrica**. 12. ed. Madrid: TOMO II, 1981.
- ALMOULOUD, S. A.; KONÉ, C.; SANGARÉ, M. S. Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali. **RIPEM**, v. 4, n. 3, 2014.
- ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, v. 15, n. 1, p. 1-28, 2013.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M. Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. *In*: WASTSON, A.; OHTANI, M. (Eds.). **Task design in mathematics education** – ICMI Study 22. Springer I, 2015. p. 249-272.
- BARRAZA, D. B.; GONZÁLEZ, M. P.; CHAVARRO, L. S. Las cónicas en la geometría del taxista: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. **Actas del VII CIBEM**, p. 666-673. Montevideo, Uruguay. 16 al 20 de setiembre de 2013.
- BARBIN, E. Perennial notions and their teaching. **Proceedings 5o ESU**, 2007.
- BARBIN, E. Teaching of conics in 19th and 20th centuries in France: On the conditions of changing (1854 – 1997). **Proceedings of the second “International conference on the history of mathematics education”**, New University of Lisbon, Portugal, p. 61-76, 2012.
- BONGIOVANNI, V. **Les characterizations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d’enseignants**: étude d’une sequence d’activités et conception d’un hyperdocument interactif. 453 f. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble, 2001.
- BORDALLO, M. **As Cônicas na matemática escolar brasileira**: história, presente e futuro. 2011. 71 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- BOSCH, M. Study and research paths: a model for inquiry. *In*: **International Congress of Mathematics**. Rio de Janeiro, Brazil, 2018a.
- _____. Study and research paths in university education: linking inquiry with content-based teaching. **International Workshop: Mathematical Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy**. Tokyo, Japan, 2018b,

BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. **Geometry**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Parte III: Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 5 maio 2017.

BRASIL. Fundação Capes. Ministério da Educação. **Programa de Residência Pedagógica**. Brasília: CAPES, 2018. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica>. Acesso em: 16 out. 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Fundamental e Ensino Médio, BNCC. Brasília, MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_sit_e.pdf. Acesso em: 14 maio 2018.

BRASIL. **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 9 out. 2017.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985. [Tradução em espanhol de Claudia Gilman. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1997].

_____. Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. **Conférence prononcée le 19 mai 2009 aux Journées Ampère tenues à l'INRP**. Lyon, UMR P3 ADEF, 2009.

_____. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a favor de un Contraparadigma Emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013a.

_____. **La matemática en la escuela**: Por una revolución epistemológica y didáctica. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013b.

_____. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique. **Actes de l'Université d'été La Rochelle**, p. 91-118, 1998a.

_____. À propos des TICE: transmission et appropriation du savoir, nouveaux rôles de l'enseignant, organisation de l'établissement. *In*: Conférence donnée à l'université d'été Les TICE: vers une transformation des pratiques pédagogiques et de l'organisation de l'établissement. 1998, Toulouse. **Anais...** Toulouse-Fr: 1998b. p. 26-28.

CHUNG, K. **A Parábola, sua propriedade Refletora e aplicações**. 32 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática**: volume único. Livro do professor. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.

FLORENSA, I. **Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education**. Doctoral Thesis. Universitat Ramon Llull, Barcelona/Espanha, 2018.

GASCÓN, J. Geometría sintética em la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **SUMA**, v. 39, p. 13-25, 2002.

GOULART, J. B. **O Estudo da Equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ Utilizando o Software Grafeq: Uma Proposta Para o Ensino Médio**. 2009. 159 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/18805>. Acesso em: 12 jul. 2016.

GÓMEZ MONGÜA, P, J.; RUIZ MEDINA, C. A. **Influencia del software educativo GeoGebra en el aprendizaje de las cónicas en los estudiantes de 10º. Grado de la institución educativa Simón Araujo**. Maestría en informática educativa. 140 f. Universidad Privada Norbert Wiener, Lima/Perú, 2014.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PÉRIGO, R. **Matemática**: volume único. Manual do professor. São Paulo: Atual, 1997.

JORGE, M.; COUTO FILHO, T.; TEIXEIRA, R. C. **Aprender matemática: matemática para o Ensino Médio**. Vol. 3. 1. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2011.

LICERA, R. M. **Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado**. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso/Chile, 2017.

LONDERO, N. **Explorando recursos do Geogebra no estudo de quádras a partir de diferentes representações**. 158 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

MELO, F. S.; GALVÃO, M. E. E. L. Obtendo as cónicas com dobraduras. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 66, p. 29-32, 2008.

MOSQUERA, E. F.; PALOMINO, M. F. M. Secuencia didáctica para la enseñanza de las cónicas desde lo puntual y lo global integrando un ambiente de geometría dinámica. **Actas del 3º Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas**. 3. ed. Medellín, 2012. p. 155-157.

QUARANTA NETO, F. **Tradução comentada da obra “Novos elementos das seções Cônicas” (PHILIPPE de LA HIRE – 1679) e sua relevância para o ensino**

médio de matemática. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

OTERO, M. R.; LLANOS, V. C.; PARRA, V. Training in-service teachers: study of questions and the organization of teaching. *In: Conference: 6e congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique*, Autrans, Grenoble. 2018.

PAIVA, M., **Matemática.** Volume Único. Livro do Professor. 1. ed. São Paulo: Moderna, 1998.

PAQUES, O.; SEBASTIANI FERREIRA, E. Uma história do ensino das cônicas na matemática escolar no Brasil. *In: 1º Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. História da Educação Matemática escolar indígena no Brasil.* 2011. Disponível em: http://www.apm.pt/files/177852_C34_4dd7a00dcc1b5.pdf. Acesso em: 13 jul. 2016.

PÉRES MEDINA, C. R.; SOUTO, D. L. P. Reflexiones en torno al diseño e implementación de una propuesta de actividades sobre cônicas usando GeoGebra: intercambio Brasil-Argentina. **Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra**, Uruguay, p. 456-467, 2012

RAMOS FILHO, R. E. B. **Análise de desempenho de um fogão solar construído a partir de sucatas de antena de tv.** 2011. 96 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia de Materiais; Projetos Mecânicos; Termociências) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

ROQUE, T. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

RUIZ-OLARRÍA, A. **La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundaria.** De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid/ES, 2015.

RUÍZ-MUNZÓN, N.; BOSCH, M; GASCÓN, J. El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. **REDIMAT**, v. 4, n. 2, p. 106-131, 2015.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática e suas tecnologias. 1. ed. atualizada. São Paulo, 2011.

_____. **Material de apoio ao currículo de São Paulo:** caderno do professor: matemática, Ensino Médio, 3ª. série, vol. 1. São Paulo, 2014a.

_____. **Material de apoio ao currículo de São Paulo:** caderno do professor: matemática, Ensino Fundamental, 8ª. série, vol. 2. São Paulo, 2014b.

_____. **Material de apoio ao currículo de São Paulo:** caderno do professor: matemática, Ensino Médio, 1ª. série, vol. 2. São Paulo, 2014c.

_____. **Material de apoio ao currículo de São Paulo**: caderno do professor: matemática, Ensino Médio, 3ª. série, vol. 3. São Paulo, 2014d.

SATO, J. **As Cônicas e suas Aplicações**. 2004. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>. Acesso em: 2 fev. 2018.

SERGIPE (Estado). Rede Estadual de Ensino. **Referencial Curricular**. Aracaju, 2011.

SILVA, S. F. **Baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do GeoGebra**. 2018. 555 f. Doutorado em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

SILVA, M. B. **Secções cônicas**: atividades com geometria dinâmica com base no currículo do Estado de São Paulo. 2011. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

SILVA, J. A. M. **Contribución a la enseñanza de las cónicas mediante el uso de la astronomía**. 263 f. Maestría en Ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2012.

SIQUEIRA, C. A. F. **Um Estudo Didático das Cônicas**: Quadros, Registros e Pontos de Vista. 2016. 167 f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SOUTO, D. L. P. **Transformações expansivas em um curso de Educação Matemática a distância online**. Tese de Doutorado. UNESP, Rio Claro/SP, 2013.

SOUSA, N. S. **Curvas Cônicas**: do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica. 2016. 127 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SOUZA, J. **Coleção Novo Olhar**. Matemática: 1. ed. v. 3. São Paulo: FTD, 2010. p. 201, 208, 216.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. Vol. 1. FTD. 2016a.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato Matemática**. Vol 3. FTD. 2016b.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1987.

UNICAMP-IMECC. **Catálogo dos cursos de graduação**. 2019. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/graduacao/licenciatura-matematica/curriculo#_Toc406578219. Acesso em: 6 fev. 2019.

USP-IME. **Grade Curricular**. 2019. Disponível em: <https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=45&codcur=45024&codhab=1&tipo=N>. Acesso em: 8 fev. 2019.

UFS-DMAI. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Prof. Alberto Carvalho**. Universidade Federal de Sergipe. Itabaiana, 2018.

UNESP. **Programa Matemática**. 2019. Disponível em:
<http://igce.rc.unesp.br/index.php#!/instituicao/diretoria-tecnica-academica/graduacao/cursos/programa-matematica---estrutura-2015/>. Acesso em: 13 fev.2019.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. P. **Matemática**: Ensino Médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005.

Apêndice A – Estratégia de ensino para o Percurso de Estudo e Pesquisa

Neste apêndice, trataremos especificamente da estratégia de ensino usada nas aulas quando se trabalha com o dispositivo do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que também pode ser usado como uma ferramenta de pesquisa e está inserido na Teoria Antropológica do Didático (TAD).

Em uma aula em que se planeja usar o PEP, um dispositivo para colocar em prática o paradigma de questionamento do mundo (CHEVALLARD, 2013a), o professor deverá ter como base a metodologia usada em uma investigação, em que temos um problema inicial Q_0 , dados preliminares, algumas hipóteses, e com isso elaboramos questões parciais Q_j , que nos trarão respostas parciais R_i , e seguiremos assim, avançando a pesquisa por meio de questões e respostas, até encontrarmos uma resposta $R^\heartsuit$ para o problema inicial, quando teremos o final da investigação.

Segundo Bosch (2018b), em várias experiências com o PEP realizadas pelo grupo de pesquisadores da TAD, os estudantes eram convidados a atuar como consultores. Reunidos em grupos, recebiam um problema (questão inicial Q_0) e deveriam dar uma resposta a determinado cliente. O professor (ou o grupo de professores), que não sabia(m) nada sobre como seria a resposta final, fazia(m) o papel de líder(es) desses consultores.

O professor deve sempre ter o controle de como está o andamento da investigação; para isso, ele necessita saber quais questões estão sendo trabalhadas em cada grupo e quais respostas já foram encontradas. Esses dados podem ser registrados por meio de anotações, vídeos ou gravações de áudio. Aconselha-se também que cada grupo entregue um informe ao final de cada aula com tudo o que foi trabalhado pelos integrantes neste dia.

O professor deve solicitar que cada grupo compartilhe com os demais como está o andamento de suas respectivas investigações, apresentando suas questões e respostas parciais encontradas e as mídias usadas como fontes de informação para buscar conhecimentos. As questões e respostas devem ser registradas em um mapa (de questões e respostas), e este exibido aos alunos, de modo que todos tenham

conhecimento dos avanços e, assim, por meio da construção de novas informações, são formuladas novas questões.

O estudo do objeto matemático se dará por meio das respostas às questões parciais, fornecendo assim uma razão para se estudar aquele conteúdo que não seja somente aprender a matemática. A qualquer momento, o professor pode pausar as investigações para explicar um conteúdo matemático importante para se responder determinada questão. Essa parte da aula pode ser ministrada de maneira tradicional, como uma visita de uma obra, porém, neste momento, essa visita terá uma razão de ser, que será adquirir conhecimentos para responder determinada questão e avançar no percurso.

Apêndice B – A Propriedade Reflexiva da Parábola

Neste apêndice apresentaremos a propriedade reflexiva da parábola e sua demonstração, como foi trabalhado com os alunos do Ensino Médio e da licenciatura durante os PEP experimentados nesta pesquisa. Para tanto, precisamos enunciar e demonstrar o Teorema de Poncelet. Esses dois resultados foram encontrados em Chung (2013).

Teorema de Poncelet: dada uma parábola c com foco F e um ponto T pertencente a ela, as bissetrizes dos ângulos formados pela semirreta FT e pela reta perpendicular à diretriz d que passa por T são as retas tangente e normal à parábola em T .

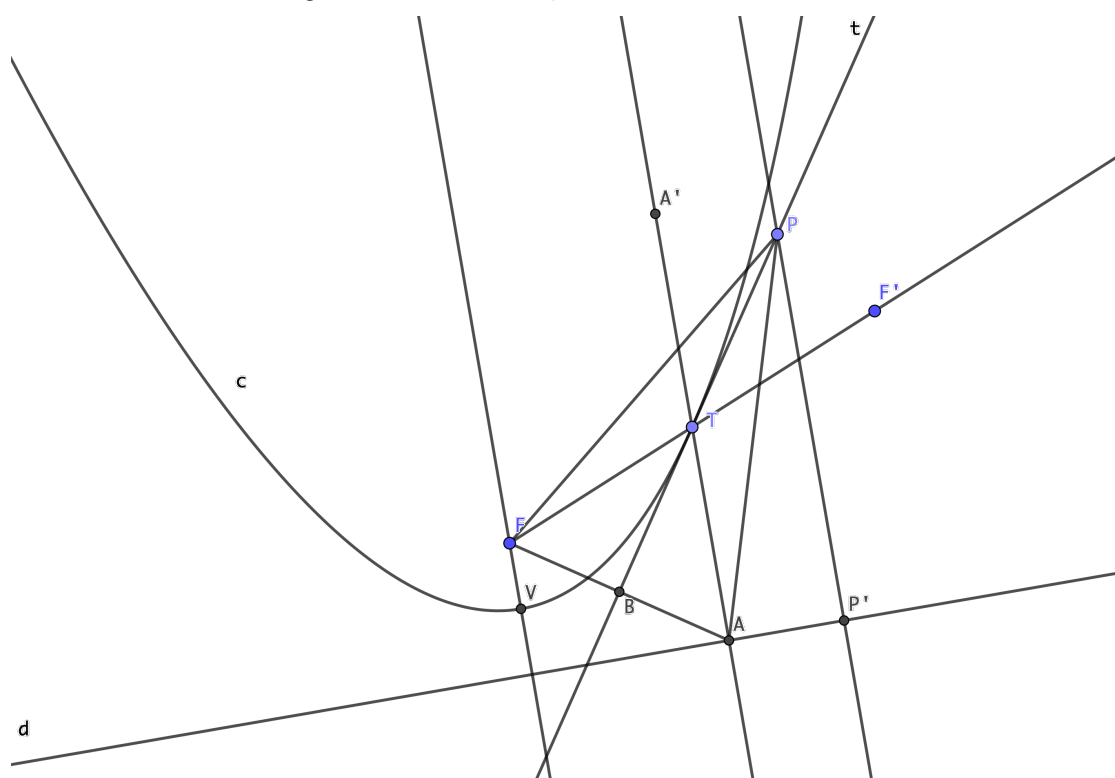
Demonstração: sejam o ponto A a projeção ortogonal do ponto T em d , A' e F' os respectivos pontos simétricos de A e F em relação a T . Temos que o triângulo TFA é isósceles, pois T pertence à parábola; com isso, as medidas do segmento TF e TA são congruentes pela definição da parábola (ver figura 77).

Consideramos agora t a bissetriz do ângulo ATF , em que o ponto B é a intersecção de t com o segmento AF . Logo, t é a mediatriz do segmento AF , em que os triângulos TFB e TAB são congruentes pelo caso ângulo/lado/ângulo, e o ponto B é o ponto médio do segmento AF .

Sejam $P \neq T$ um ponto de t e o ponto P' a projeção ortogonal de P em d e como t é mediatriz do segmento AF , temos que as medidas de PF e PA são congruentes (por definição) e ainda temos que $PF = PA > PP'$, pois o triângulo PAP' é retângulo em P' com PA e PP' , sendo, respectivamente, a hipotenusa e o cateto do triângulo. Logo, a distância de P a F é maior que a distância de $PP' = d(P, d)$.

Portanto, todo ponto $P \in t$, $P \neq T$ é exterior. Assim, a reta t é uma tangente. Já a reta normal será a bissetriz do ângulo suplementar de FTA .

Figura 77 - Demonstração Teorema de Poncelet



Fonte: Chung (2013, p. 15).

A propriedade reflexiva da parábola pode ser vista como um corolário desse teorema.

Corolário: uma fonte luminosa situada no foco de uma parábola ao emitir um raio em um espelho com formato de um parabolóide, o raio é refletido paralelamente ao eixo de simetria dele.

Demonstração: sejam F o foco da parábola; P o ponto onde o raio incide na curva (ponto de incidência); t a reta tangente à parábola em P ; A a projeção ortogonal de P em d ; B o ponto de intersecção de t com o segmento de reta AF ; A' é um ponto da trajetória do raio após ser refletido em P ; F' e B' os respectivos simétricos de F e B em relação a P .

Pelo teorema de Poncelet, temos que a reta t é bissetriz do ângulo APF , mediatriz do segmento AF , e, pela lei da reflexão, os ângulos FPB e $A'PB'$ são congruentes e, como os ângulos FPB e $F'PB'$ são opostos pelo vértice, também são congruentes. Assim, os ângulos FPB , APB , $B'PA'$ e $F'PB'$ são congruentes e, como o ângulo $A'PF$ é o suplemento dos ângulos $F'PA'$, logo será também de APF , segue que A' , P e A são colineares. Logo, o raio é refletido paralelamente ao eixo de simetria e , já que o segmento PA é perpendicular a d como o eixo e .

Anexo A – Carta de esclarecimento sobre o Projeto e a Pesquisa

PROJETO: PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA EM AMBIENTES TECNOLÓGICOS.

Coordenador: Saddo Ag Almouloud

Informações sobre o projeto e sobre a pesquisa:

A pesquisa a ser realizada faz parte de projeto em desenvolvimento no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

A pesquisa tem como objetivos:

- Dar subsídios teóricos ao trabalho de professores e pesquisadores interessados na integração de pesquisas em Educação Matemática e de tecnologias em aulas de Matemática.
- Produzir conhecimento na área de formação de professores de matemática, utilizando tecnologias como recurso de apoio (como instrumento, no sentido que explicitaremos mais adiante neste texto).
- Elaborar em conjunto uma sequência utilizando o GeoGebra e/ou Cabri 3D para ensinar conteúdos matemáticos para ser aplicada com grupo de professores de Ensino Básico e Superior.
- Contribuir para os debates a respeito do papel das tecnologias na formação de professores.

Para esse fim, serão levantados dados a partir de observações, questionários, documentos produzidos pelos participantes da pesquisa.

A pesquisa intitulada “Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: o ensino de cônicas” é subprojeto de Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos, conjugando assim os objetivos e procedimentos metodológicos aqui apresentados.

Destacamos que, a qualquer momento, os participantes são livres para deixar de participar da pesquisa, sem qualquer ônus ou penalização de qualquer parte. Caracteriza-se firmemente a participação voluntária. Os dados coletados serão tratados de forma a manter o sigilo dos participantes, sem possibilidade de identificação deles.

Anexo B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), de uma pesquisa. Após ser esclarecido(a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua e a outra é do pesquisador responsável. Em caso de recusa, você não sofrerá nenhum tipo de penalidade. Se você tiver alguma consideração ou dúvida sobre a ética da pesquisa, entre em contato com a Comissão de Ética – Edifício Reitor Bandeira de Mello, sala 63–C, na Rua Ministro Godoi, 969 – Perdizes – São Paulo – SP – CEP: 05015-001 – Tel./FAX (11) 3670-8466 – e –mail: cometica@pucsp.br

1. Título do Projeto: “Um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: O Ensino de Cônicas”.

2. O objetivo desta pesquisa é investigar de que maneira a formação inicial universitária, em particular o dispositivo dos PEP, pode ajudar os professores a questionar, analisar, desenhar e experimentar processos de ensino sobre as cônicas: parábolas, hipérboles e elipses.

3. Durante a pesquisa, você será solicitado a participar de alguns encontros para realizarmos um conjunto de atividades. As identidades dos participantes serão preservadas. Cada atividade poderá envolver uma parte prática, uma resolução e/ou uma discussão de questões sobre cônicas.

4. As discussões surgidas, gerenciadas pelo investigador principal, professor Ricardo Nicasso Benito, serão observadas, fotografadas e filmadas. Os protocolos serão recolhidos e deles serão tirados os dados qualitativos.

5. Os dados analisados serão utilizados de forma sigilosa. As imagens e os sons obtidos por meio da filmagem das atividades só serão utilizados pelo principal investigador para esclarecer dúvidas que possam surgir durante a análise dos protocolos e das observações.

6. Somente no final do estudo poderemos concluir a presença ou não de algum benefício, na forma de propostas de abordagens de ensino diferentes da atual, para a Matemática em geral e para o caso das cônicas.

7. Garantia de acesso: em qualquer etapa do estudo, você terá acesso aos profissionais responsáveis pela pesquisa para esclarecimento de eventuais dúvidas. O principal investigador é o doutorando Ricardo Nicasso Benito, e-mail: ricardo.nicasso@gmail.com, tel. (11) 96034-5236; e a orientadora é a professora Dra. Maria José Ferreira da Silva, e-mail: zeze@pucsp.br. Ambos podem ser encontrados na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Campus da Rua Marquês de Paranaguá, 111 – Consolação – 01303-050 – São Paulo SP – Brasil – tel. (11) 3214-7210 – Ramal 7210.

8. É garantida a liberdade de retirar o consentimento a qualquer momento e deixar de participar do estudo, sem qualquer prejuízo à continuidade do seu vínculo com a Instituição.

9. Direito de confidencialidade – As informações obtidas, assim como as imagens e os sons obtidos pela filmagem serão analisados no conjunto de participantes, não sendo divulgada a identificação de nenhum deles.

10. Direito de ser mantido atualizado – Os resultados parciais das análises serão compartilhados à medida que foram obtidos.

11. Despesas e compensações: não há despesas pessoais para o participante em qualquer fase do estudo. Também não há compensação financeira relacionada à sua participação.

12. Os dados analisados serão utilizados somente para esta pesquisa.

Acredito ter sido suficientemente informado a respeito das informações que li ou que foram lidas para mim, descrevendo o estudo “Um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores: O Ensino de Cônicas”. Eu discuti com o doutorando Ricardo Nicasso Benito a minha decisão em participar deste estudo. Ficaram claros para mim quais são os propósitos do estudo, os procedimentos a serem realizados, seus desconfortos e riscos, as garantias de confidencialidade e de esclarecimentos permanentes. Ficou claro também que minha participação é isenta de despesas. Concordo voluntariamente em participar deste estudo e poderei retirar o meu consentimento a qualquer momento, antes ou durante o estudo, sem penalidade ou prejuízos ou perda de qualquer benefício que eu possa ter adquirido, ou no meu atendimento nesta unidade de ensino.

Itabaiana, ____/____/____

Assinatura do aluno / representante legal

(Somente para o responsável do projeto)

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária o Consentimento Livre e Esclarecido deste paciente ou representante legal para a participação neste estudo.

Assinatura do responsável pelo estudo