

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

NATÁLIA COELHO SOARES

**O ENSINO DE TEORIA DE GRUPOS NOS CURSOS DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2019**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

NATÁLIA COELHO SOARES

**O ENSINO DE TEORIA DE GRUPOS NOS CURSOS DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em **Educação Matemática**, sob a orientação da Prof.^a D.^{ra} **Barbara Lutaif Bianchini**.

**São Paulo
2019**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processo de fotocopiadoras ou eletrônicos, desde que citada a fonte.

Assinatura:

Local e data:

AGRADECIMENTO

Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil (código de financiamento 001).

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brazil (finance code 001).

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre iluminando meu caminho rumo a meus objetivos, mostrando-me as oportunidades surgidas e dando-me a capacidade de conquistá-las.

À Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado, pela orientação, paciência, dedicação, apoio e por estar sempre pronta a me ajudar.

À Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini, pela orientação e por abraçar esta tese em andamento com muita disposição.

Aos professores Silvia Dias Alcântara Machado, Francisco Cesar Polcino Milies, Benedito Antonio da Silva e Gabriel Loureiro de Lima, por aceitarem o convite para participar da banca deste trabalho e contribuírem com valiosas observações.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida, que possibilitou maior dedicação ao trabalho.

Aos meus pais, por todo o apoio e incentivo a meus estudos.

Ao Felipe, por estar a meu lado neste momento, trazendo muita alegria.

A todos os professores da Universidade, que contribuíram de alguma forma para que eu pudesse construir meu conhecimento.

Aos colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) que de alguma forma contribuíram com suas críticas e sugestões.

Este estudo, que se insere na problemática que questiona qual álgebra deve ser ensinada nos cursos de licenciatura em Matemática, foi orientado pela questão: *Quais conteúdos da teoria de grupos tratados na licenciatura permitem ao futuro professor uma melhor compreensão dos assuntos relacionados a esses tópicos na educação básica?* O objetivo foi investigar quais conteúdos da teoria de grupos devem ser tratados em cursos de licenciatura em Matemática. As ideias teóricas foram buscadas em trabalhos que abordam a formação de professores de Matemática, e especificamente em Shulman, para discutir os conhecimentos dos professores. Em abordagem de pesquisa qualitativa, procedeu-se a um sobrevoo histórico sobre a origem e desenvolvimento do conceito de grupo, analisaram-se as propostas curriculares das disciplinas que tratam da teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática de sete universidades brasileiras e realizam-se cinco entrevistas semiestruturadas com professores e pesquisadores que lecionam teoria de grupos e/ou pesquisam nessa área. Para tratamento dos dados, utilizou-se os pressupostos da análise de conteúdo, como descrita por Bardin. Concluiu-se que todos os entrevistados mostram-se preocupados com a formação do professor e que os tópicos essenciais a serem abordados em um curso de teoria de grupos para a licenciatura em Matemática são: definição e exemplos de grupo; subgrupos; subgrupos normais; grupos cíclicos; homomorfismo e isomorfismo de grupos; grupo de permutações; grupo de transformações no plano e no espaço; grupos de simetria; grupos quociente; e demonstração de teoremas (de Cayley, de Lagrange e/ou de Sylow).

Palavras-chave: Educação Matemática; Formação de Professores; Ensino de Teoria de Grupos.

ABSTRACT

This study explored which type of algebra should be taught on mathematics teaching certification programs and was centered on the question: *What group theory content in teaching certification provides future teachers with the best grasp of the subjects related to these topics in elementary education?* The study objective was to investigate which group theory content should be included in mathematics teaching certification programs. The theoretical ideas were drawn from studies on training mathematics teachers, particularly by Shulman, and supported discussion on the knowledge held by teachers. A qualitative study was conducted providing an overview of the origins and development of the group concept. The curricula of disciplines involving group theory on Mathematics teaching certification programs of seven Brazilian higher education institutions were analyzed. Five semistructured interviews were held with teachers and researchers who taught group theory or carried out research in this area. The data were treated using content analysis presupposes, as described by Bardin. Results showed that all interviewees were concerned about teacher training. Core topics that should be covered include: definition and examples of group; subgroups; normal subgroups; cyclic groups; group homomorphism and isomorphism; permutation groups; transformations of plane and space groups; symmetry groups; quotient groups; and demonstration of theorems (of Cayley, Lagrange, and/or Sylow).

Key words: Mathematics Education; Teacher Training; Teaching of Group Theory.

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1. Teses localizadas no banco da CAPES	23
Quadro 2.2. Conteúdos de teoria de grupos presentes em planos de ensino dos cursos de licenciatura em Matemática pesquisados.	27
Quadro 3.1. Matemáticos que contribuíram para a definição abstrata de grupo.	42
Quadro 6.1. Disciplina ‘Tópicos de grupos e aplicações’	59
Quadro 6.2. Disciplina ‘Álgebra I’	60
Quadro 6.3. Disciplina ‘Estruturas algébricas II’	62
Quadro 6.4. Disciplina ‘Grupos e corpos’	63
Quadro 6.5. Disciplina ‘Elementos de álgebra’	64
Quadro 6.6. Disciplina ‘Estruturas algébricas’	65
Quadro 6.7. Distribuição da carga horária da disciplina ‘Estruturas algébricas’	65
Quadro 6.8. Plano de ensino da disciplina ‘Álgebra’	67
Quadro 6.9. Disciplinas da teoria de grupos nas licenciaturas pesquisadas.	68
Quadro 6.10. Obras incluídas nas bibliografias descritas nos planos de ensino.	69
Quadro 6.11. Conteúdos de teoria de grupos mencionados nos planos de ensino.	71

SUMÁRIO

Apresentação.....	13
1. Introdução.....	15
1.1. Trajetória acadêmica	15
1.2. Problemática e objetivo.....	17
2. Metodologia e procedimentos metodológicos.....	23
3. Origem e desenvolvimento da teoria de grupos.....	29
3.1. A teoria dos números e o conceito de grupo	30
3.2. As equações algébricas e a teoria de grupos.....	32
3.3. A geometria e a teoria de grupos	37
3.4. A formalização do conceito de grupo	39
4. Teses sobre a teoria de grupos	43
5. Ideias teóricas	49
5.1. Formação de professores de matemática	49
5.2. Categorias do conhecimento do professor segundo Shulman	53
6. Conteúdos de teoria de grupos presentes no currículo de instituições da região Sudeste	57
6.1. Universidade de São Paulo, <i>campus</i> São Paulo	57
6.2. Universidade de São Paulo, <i>campus</i> São Carlos	59
6.3. Universidade Estadual Paulista, <i>campus</i> Bauru	61
6.4. Universidade Federal de Minas Gerais	62
6.5. Universidade Estadual de Campinas.....	63
6.6. Universidade Federal do Rio de Janeiro	64
6.7. Instituto Federal de São Paulo, <i>campus</i> São Paulo	66
6.8. Considerações sobre os planos de ensino apresentados	68
7. A importância da teoria de grupos na licenciatura em matemática sob o ponto de vista dos professores especialistas e/ou educadores matemáticos entrevistados	73
7.1. A professora Ana	73
7.2. O professor Bruno.....	75
7.3. O professor Caio.....	78
7.4. O professor Davi	80
7.5. A professora Eva	82
7.6. Algumas considerações sobre o capítulo	84
Considerações finais	89
Referências	93
Bibliografia consultada.....	95
Anexo A.....	96

APRESENTAÇÃO

Esta pesquisa de doutorado buscou identificar quais conteúdos da teoria de grupos devem ser trabalhados em um curso de licenciatura em Matemática que visa formar professores de Matemática que atuarão principalmente no ensino fundamental II e no ensino médio.

A pesquisa é apresentada em sete capítulos, seguidos de uma seção trazendo nossas considerações finais.

No **primeiro capítulo**, procuramos situar o interesse pelo tema em nossa trajetória acadêmica e também no campo da educação algébrica, explicitando a problemática do estudo e a justificativa para delimitação do objetivo da investigação.

No **segundo capítulo**, apresentamos a metodologia e os procedimentos metodológicos aplicados para a obtenção de dados.

Nosso interesse na teoria de grupos como um saber a ensinar levou-nos a dedicar o **terceiro capítulo** a uma explanação epistemológica sobre a origem e o desenvolvimento dessa teoria, de modo a propiciar melhor compreensão sobre o tema. Assim, são apresentados tópicos sobre a teoria dos números, equações algébricas e geometria, tópicos esses dos quais a teoria de grupos implicitamente emergiu, e finalizamos o capítulo descrevendo como o conceito foi formalizado.

No **quarto capítulo**, apresentamos as teses encontradas no catálogo de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que versaram sobre a teoria de grupos em cursos de licenciatura em Matemática, e as analisamos sob a ótica de nosso objetivo.

Nossas análises se orientaram principalmente nas ideias teóricas desenvolvidas em trabalhos que abordam a formação de professores de Matemática, especificamente nas categorias do conhecimento do professor, segundo Shulman. Tais ideias e análises são expostas no **quinto capítulo**.

No **sexto capítulo**, apresentamos os resultados de uma busca realizada nos planos de ensino de disciplinas que tratam da teoria de grupos em cursos de licenciatura em Matemática de universidades da região Sudeste do Brasil, buscando evidenciar pontos convergentes e divergentes observados nesses cursos.

No **sétimo capítulo** caracterizamos os professores especialistas e educadores matemáticos entrevistados para esta pesquisa e apresentamos a importância da teoria de grupos na licenciatura em Matemática sob o ponto de vista de cada um deles.

Nas **considerações finais**, sintetizamos a análise das entrevistas, de modo a evidenciar a articulação deste estudo com o nosso objetivo da pesquisa.

1. INTRODUÇÃO

1.1. TRAJETÓRIA ACADÊMICA

Durante a licenciatura em Matemática que cursei na Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Guaratinguetá, tive a oportunidade de participar como bolsista de iniciação científica do projeto *Montagem e manutenção de um laboratório de materiais didático-pedagógicos para o ensino-aprendizagem da Matemática*. Tal iniciação científica abrangeu três dos quatro anos de duração do curso.

O projeto, coordenado por uma professora de licenciatura em Matemática, exigiu primeiramente que eu e outra bolsista organizássemos a montagem dos materiais didáticos, tanto os já existentes na sala destinada ao laboratório quanto aqueles recém-adquiridos.

Após essa tarefa, passamos, as duas bolsistas e a professora coordenadora, a elaborar sequências didáticas que incorporassem os materiais didáticos disponíveis no laboratório, que assim se tornaram materiais didático-pedagógicos passíveis de utilização na Educação Básica.

Uma vez organizado o acervo do Laboratório de Materiais Didático-Pedagógicos para o Ensino-Aprendizagem da Matemática (LEM), passamos à fase de divulgar esse laboratório nas escolas da rede pública de Guaratinguetá, SP, e de solicitar-lhes permissão para usar tais materiais em sala de aula, a fim de testar a adequação destes. Munidas de carta de apresentação da faculdade, nós bolsistas procurávamos escolas da rede estadual e da municipal que aceitassem que aplicássemos as sequências didáticas elaboradas.¹

Assim desde o final do primeiro ano até o término da licenciatura tive a oportunidade de vivenciar a iniciação à pesquisa ao mesmo tempo em que cursava disciplinas. Pude perceber então o quão distante estavam essas duas vivências: as disciplinas de Matemática “pura” da licenciatura em Matemática eram tratadas de

¹ Tais sequências didáticas estão encontradas descritas em: SOARES, N.C. *As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8.º ano do ensino fundamental*. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <<https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10951/>>.

forma desconexa com a realidade da sala de aula que passei a conhecer como bolsista.

A participação no projeto de iniciação científica e a vivência por ela propiciada nas escolas públicas da educação básica certamente influíram em minha vontade de continuar pesquisando, e inscrevi-me para a seleção de mestrado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), no qual ingressei no 2º semestre de 2010, ano seguinte à finalização do curso de licenciatura.

Ao ser entrevistada durante a seleção, comentei haver escolhido a PUC-SP por sugestão da coordenadora de iniciação científica da UNESP de Guaratinguetá, a qual já havia contatado sua amiga, líder do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA): a professora Silvia Dias Alcântara Machado. Dessa forma, fui naturalmente encaminhada pela coordenação do programa a participar desse grupo.

Durante o mestrado, iniciei um trabalho na organização não governamental (ONG) chamada Grupo de Apoio a Escolarização Trapézio, que:

[...] desenvolve ações sociais dirigidas à comunidade escolar, alunos, pais e educadores, e tem por objetivo principal melhorar a qualidade do ensino e do desempenho escolar, para isto, conta com um centro de estudos que organiza, promove, sistematiza e registra o conhecimento gerado a partir de sua experiência, visando o aprimoramento do trabalho, a disseminação do conhecimento, e a inspiração de boas práticas educativas com o consequente benefício de crianças e adolescentes. (TRAPÉZIO GRUPO DE APOIO A ESCOLARIZAÇÃO, 2011)

A partir de observações colhidas na iniciação científica e nas atividades na ONG, pude elaborar meu projeto de pesquisa de mestrado. Essa pesquisa teve o objetivo de investigar se, e como, alunos do 8º ano do ensino fundamental que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com números naturais aprofundam seus conhecimentos quando lhes é dada a oportunidade de usar tecnologias não usuais em sala de aula.

Durante as reuniões do GPEA, por diversas vezes questionava-se e discutia-se qual álgebra deve ser ensinada nos cursos de licenciatura em Matemática.

O projeto *Educação algébrica e o uso de tecnologias*, do GPEA, incorporou minha pesquisa de mestrado em razão do objetivo desta e do uso previsto de calculadora. No entanto, tive a oportunidade de conviver, nas reuniões, com doutorandos desse mesmo grupo, embora participantes de outro projeto, intitulado O

que se entende por álgebra do ponto de vista epistemológico e didático?, cujas discussões despertaram meu interesse. Tal projeto abarca pesquisas que investigam a articulação entre o que as disciplinas de álgebra desenvolvem na licenciatura em Matemática e o que o futuro professor deverá desenvolver na educação básica. O interesse por tal projeto resultava de questões que me intrigavam desde quando aluna da licenciatura – entre elas: “Mas por que tenho de aprender isso?”.

Dentre as pesquisas do projeto *O que se entende por álgebra do ponto de vista epistemológico e didático?*, a de Resende (2007), que resultou em uma tese de doutorado, teve por objetivo “compreender a Teoria dos Números, como saber a ensinar, no intuito de buscar elementos para a ressignificar na Licenciatura em Matemática” (RESENDE, 2007, p. 35). Tal tese, por ser considerada referência sobre o tema, estava sendo discutida por outros membros do projeto, como o fizeram Prado (2016) em relação à álgebra linear e Rodrigues e Machado (2010) a respeito da teoria de grupos. Aparentemente, porém, Rodrigues não deu continuidade a estudos sobre essa teoria, pois até o momento não encontramos indícios de que tenha prosseguido em pesquisas nesse âmbito.

Após o mestrado, continuei participando das discussões do GPEA e refletindo sobre as leituras ali realizadas. Após dois anos, ingressei no doutorado.

Serão a seguir apresentadas as leituras que conduziram à formulação do objetivo da presente pesquisa.

1.2. PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Desde o final do século XX e início do XXI tem-se voltado atenção aos cursos de licenciatura no Brasil. A incorporação de concepções de aprendizagem de cunho construtivista às políticas educacionais exigiu que se repensasse a formação de professores. Assim, em novembro de 1999, o Ministério da Educação determinou a constituição de um grupo de representantes das secretarias estaduais de educação do ensino fundamental, médio e superior, incumbindo-o de propor diretrizes gerais para a formação de professores da educação básica.

Esse grupo, após várias discussões em audiências públicas e reuniões técnicas envolvendo diferentes associações e instituições, elaborou em 2001, o

parecer intitulado *Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica*, para cursos de licenciatura.

A licenciatura ganhou, como determina a nova legislação, finalidade própria em relação ao bacharelado, constituindo-se em um projeto específico e exigindo a definição de currículos próprios que explicitassem sua distinção do bacharelado e da antiga formação de professores que ficou conhecida como ‘modelo 3+1’.

Embora as diretrizes tratem da formação do professor da educação básica nas diferentes áreas de conhecimento, as questões destacadas em seu documento são pertinentes à formação do professor de Matemática, uma vez que sinalizam a importância de repensar o tratamento dispensado ao conteúdo específico na licenciatura. Dentre essas questões destacamos o tratamento inadequado dos conteúdos – nem sempre há clareza quanto aos conteúdos que o professor em formação deve aprender, já que deverá conhecer os assuntos em grau mais abrangente e mais aprofundado do que aquele em que os ensinará. Nos cursos atuais de formação de professores, separados por área de conhecimento, é comum dar atenção quase que exclusivamente aos conhecimentos específicos de cada área, sem considerar sua relação com os demais conteúdos com que o futuro professor irá trabalhar no ensino fundamental e no médio (BRASIL, 2001a).

Essas diretrizes estabelecem a necessidade da articulação entre as disciplinas “puras” e as didáticas ao dar relevo à docência como base da formação, relacionando teoria e prática (BRASIL, 2001a).

Em uma análise dos 25 anos da pesquisa brasileira sobre a formação de professores de Matemática, Fiorentini *et al.* (2002) concluem que problemas apontados em pesquisas das décadas de 1970 e 1980 ainda persistiam. Destacamos que as diretrizes do Ministério da Educação e essa pesquisa de Fiorentini *et al.* foram elaboradas no mesmo período, o que pode explicar que ambos frisem a persistência de problemas já apontados em pesquisas anteriores.

Dentre os problemas listados por Fiorentini *et al.* (2002), destacamos a predominância de disciplinas de Matemática nos cursos de licenciatura em Matemática. Além disso, esses pesquisadores ressaltam que estudos sobre o papel das disciplinas ‘Cálculo’, ‘Análise’ e ‘Álgebra’, entre outras, para a formação do professor de Matemática, são ainda escassos no Brasil, o que sugere ser esse um campo fértil para a pesquisa em Educação Matemática.

Paralelamente, nesse cenário nacional, criou-se em 2003 na PUC-SP o GPEA, tendo por projeto inicial – que desencadearia todos os demais projetos do grupo – o intitulado *Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de licenciatura em Matemática?*

O projeto *O que se entende por álgebra do ponto de vista epistemológico e didático?*, que vinha ao encontro de minhas questões sobre Educação Matemática, foi concluído em 2010. No entanto, embora rendendo várias pesquisas conduzidas por membros do grupo, dada a proficuidade dessa área, gerou-se também, em 2011, um novo projeto, intitulado *Álgebra do ponto de vista epistemológico e didático*. Em 2015, ao iniciar meu doutorado, passei a integrar a equipe de pesquisadores deste projeto.

Em artigo apresentado no Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM), Elias, Barbosa e Savioli (2011) destacam a ruptura encontrada entre o tratamento dado em livros didáticos à Matemática da educação básica e à da Matemática do ensino superior, indicando a necessidade de discussão sobre esse descompasso. Tal conclusão foi reforçada pela pesquisadora Bernadete Gatti em texto de 2013-2014. Gatti (2013-2014, p. 39) constata que na época da pesquisa, “teorias e práticas não se mostram integradas”, reiterando o que já comentara sobre o grande desequilíbrio, observado nessa formação, entre “teorias e práticas, em favor apenas das teorizações mais abstratas” (GATTI, 2010, p. 1370).

Buscando mais dados sobre o assunto, podemos constatar um cenário semelhante na formação de professores em outros lugares do mundo. Por exemplo, em Quebec, no Canadá, Hodgson (2001, p. 509)² observou que:

[...] professores de Matemática do ensino secundário em formação não têm oportunidade explícita de fazer conexões com os tópicos matemáticos pelos quais serão responsáveis na escola, nem de olhar esses temas a partir de um ponto de vista avançado.³

Coelho, Machado e Maranhão (2003) afirmam que havia na época da pesquisa uma escassez de trabalhos que buscassem estabelecer inter-relações entre as disciplinas teóricas e práticas na licenciatura em Matemática, como também de estudos que relacionassem a matemática ensinada na licenciatura e a praticada

² Todas as traduções de originais consultados em idioma estrangeiro são nossas.

³ No original: “[...] pre-service secondary mathematics teachers have no explicit occasion for making connections with the mathematical topics for which they will be responsible in school, nor of looking at those topics from an advanced point of view”.

nas escolas de educação básica. Esse estudo foi uma das iniciativas do GPEA que visaram contribuir para o esclarecimento de possíveis articulações entre o estudo das estruturas algébricas desenvolvidas na licenciatura e os tópicos matemáticos abordados na escola básica.

No livro *A formação do professor: licenciatura e prática docente escolar*, Moreira e David (2007) destacam que até aquele momento se empreenderam vários estudos versando sobre os cursos de licenciatura em Matemática, mas que raramente tiveram foco específico nas relações entre os conhecimentos propriamente matemáticos veiculados no processo de formação e os conhecimentos matemáticos associados à prática docente.

As diretrizes para cursos de licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001b) não explicitam a teoria de grupos, embora façam referência à necessidade de uma disciplina versando sobre fundamentos de álgebra. Consideramos, em princípio, que a teoria de grupos faz parte dessa disciplina.

Assim, observamos que investigar uma disciplina que compõe o currículo dos cursos de licenciatura, tendo em vista a formação do professor para a escola básica, faz-se não só necessário quanto fundamental.

Embasada em pesquisas do GPEA que visaram “compreender a Teoria dos Números, como saber a ensinar, no intuito de buscar elementos para a ressignificar na Licenciatura em Matemática” (RESENDE, 2007, p. 35) e “compreender a Álgebra Linear para a Licenciatura em Matemática como um saber voltado para a formação do professor de Matemática que atuará na Educação Básica” (PRADO, 2016, p. 32), julgamos importante discutir a presença da teoria de grupos na licenciatura em Matemática. Pesquisamos desde então, no catálogo de teses e dissertações da CAPES, estudos que versam sobre o assunto, mas até este momento nada pudemos encontrar.

As reflexões propiciadas pelas situações vivenciadas por membros do GPEA, bem como as leituras e pesquisas relativas ao projeto de que participávamos, provocaram a seguinte questão: Quais tópicos da teoria de grupos tratados na licenciatura em Matemática permitem ao futuro professor uma melhor compreensão dos assuntos relacionados a esses tópicos na educação básica?

Isso nos levou a estabelecer como objetivo desta pesquisa: **Investigar quais conteúdos da teoria de grupos devem ser tratados em cursos de licenciatura em Matemática.**

No próximo capítulo apresentamos a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados ao longo da realização de nossa investigação, que nos auxiliaram a atender nosso objetivo de pesquisa.

2. METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Adotamos abordagem qualitativa para este estudo, pois tem o pesquisador como seu principal instrumento, os dados são predominantemente descritivos e a ênfase está nos significados explícitos e implícitos atribuídos pelas pessoas ao objeto em estudo (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Iniciamos o trabalho com uma breve incursão na história da Matemática, com base principalmente em Wussing (1984) e em O'Connor e Robertson (2001), buscando elementos que permitissem contextualizar a teoria de grupos em suas origens, para melhor compreensão do assunto aqui tratado.

A coleta de dados abrangeu estudo documental e pesquisa de campo. Para delimitar o objeto de estudo, realizamos no *site* da CAPES, desde o início do doutorado em 2015 até dezembro de 2018, buscas constantes por teses que versassem sobre teoria de grupos na licenciatura em Matemática, sem filtrar o período de publicação. Utilizamos as palavras-chave ‘estrutura algébrica grupo’, ‘conceito de grupo’ e ‘teoria de grupos’, obtendo os trabalhos listados no Quadro 2.1.

Quadro 2.1. Teses localizadas no banco da CAPES

Autor	Título	Ano	Área	Instituição
OLIVEIRA, Ana Paula Teles de	Um estudo sobre estrutura algébrica grupo: potencialidades e limitações para generalização e formalização	2017	Educação Matemática	PUC/SP
QUARESMA, João Cláudio Brandemberg	Uma análise histórica epistemológica do conceito de grupo	2009	Educação	UFRN
ALBUQUERQUE, Izabel Maria Barbosa de	O conceito de grupo: sua formação por alunos do curso de matemática	2005	Educação	UFCG

Fonte: Dados da pesquisa.

Optamos por descrever, no próximo capítulo, apenas as teses de doutorado, pois acreditamos que os resultados sejam mais relevantes para a nossa pesquisa.

Para o enfoque teórico, recorreremos a trabalhos que tratam da formação de professores em geral e também especificamente de matemática, e adotamos as categorias de conhecimento do professor definidas por Shulman (1986).

Também procedemos a um levantamento das propostas curriculares de disciplinas em que são tratados conteúdos da teoria de grupos presentes nos currículos de universidades da região Sudeste.

A escolha de uma das cinco regiões geográficas decorreu do fato de ser o Brasil um país extenso e heterogêneo, o que dificultaria comparações abrangendo sua totalidade territorial. Escolhemos a região Sudeste pelo número de instituições de ensino superior e pela importância destas nas pesquisas em Educação Matemática e em Matemática, relevância esta exemplificada pelo fato de se constituírem em referências para as demais instituições do país. Visto que no cenário atual os Institutos Federais são os principais formadores de professores de Matemática, optamos por voltar nosso olhar também para um destes institutos.

Considerando a facilidade de acesso e a respeitabilidade na área de pesquisa em Educação Matemática e em Matemática, escolhemos as instituições e acessamos o material pelo *site* das mesmas. O objetivo da busca por currículos foi verificar quais conteúdos da teoria de grupos estão sendo ensinados nos cursos de licenciatura em Matemática.

Primeiramente verificamos se na proposta curricular de cada curso constava uma disciplina intitulada 'Teoria de grupos'. Em caso negativo, buscamos os planos de ensino de disciplinas que poderiam conter tópicos dessa teoria.

Das sete instituições pesquisadas, três trazem a teoria de grupos como disciplinas optativas, sob as denominações 'Tópicos de grupos e aplicações', 'Grupos e corpos' e 'Estruturas algébricas', enquanto as outras quatro a têm como disciplinas obrigatórias, denominadas 'Álgebra I', 'Estruturas algébricas II', 'Elementos de álgebra' e 'Álgebra'.

No entanto, é preciso ponderar que analisar a proposta de cada curso a partir das propostas curriculares tem seus limites, pois na maioria os currículos impressos ou disponíveis em catálogos eletrônicos são resumidos, não apresentando todos os elementos necessários para uma completa compreensão.

A partir de alguns resultados da investigação exploratória inicial, decidimos realizar entrevistas com pesquisadores de Matemática da área de álgebra, pois em geral são eles que lecionam as disciplinas de álgebra nas licenciaturas em Matemática, e com pesquisadores em Educação Matemática envolvidos com

educação algébrica, por disporem de conhecimentos “práticos” ou teóricos e haverem refletido sobre o assunto.

A decisão em entrevistar professores especialistas também se deveu à influência que estes exercem direta ou indiretamente na execução de projetos curriculares e nas atividades de ensino que se desenvolvem nos cursos de licenciatura em Matemática das grandes universidades do país.

Para a seleção dos entrevistados, procedemos a buscas na plataforma Lattes da CAPES, para localizar nomes de pesquisadores e professores com produção científica na área de teoria de grupos.

Decidimos fazer entrevistas semiestruturadas, por consistirem em uma série de perguntas abertas feitas verbalmente em ordem prevista, às quais o entrevistador pode acrescentar questões para esclarecimento (LAVILLE; DIONNE, 1999).

Prepararmos então um roteiro de entrevista, com base nos elementos coletados na pesquisa documental e no referencial teórico.

ROTEIRO DE ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

- Após os cumprimentos, reitero o objetivo da pesquisa, agradeço pela disponibilidade e entrego ao entrevistado o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE)⁴ para que o leia e exponha qualquer dúvida. Após os esclarecimentos, peço que o entrevistado assine o termo se estiver de acordo, recolho a via assinada e lhe entrego uma cópia do termo.
- Explico que, para fidelidade ao depoimento, gostaria de poder gravar em áudio a entrevista e eventualmente tomar nota de algumas das falas. Se o entrevistado preferir que a entrevista não seja gravada, faço somente as notas. Em todo caso, esclareço que se o entrevistado quiser envio-lhe a transcrição da entrevista para que, se desejar, faça acréscimos e correções a falas que não tenham ficado claras.
- Para situar o entrevistado e deixá-lo à vontade, solicito que comente sua trajetória acadêmico-profissional.

⁴ Anexo A.

- Entrego-lhe então o seguinte texto impresso, que contém citação extraída das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (BRASIL, 2001a, p. 38), e peço que o comente:

O texto das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica afirma que “além dos conteúdos definidos para as diferentes etapas da escolaridade nas quais o futuro professor atuará, sua formação deve ir além desses conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente a eles articulados, que compõem um campo de ampliação e aprofundamento da área”.

Nosso interesse foi identificar nos comentários do entrevistado seu posicionamento geral com relação aos conteúdos que devem ser tratados em um curso de licenciatura em Matemática. Para tanto, fez-se ao entrevistado a seguinte pergunta:

- Considerando que conhecimentos de álgebra devem ser tratados em qualquer curso de licenciatura em Matemática, quais conteúdos da teoria de grupos são importantes para o embasamento dos conhecimentos matemáticos do licenciando em Matemática?
- Para auxiliar o entrevistado a pesar a importância dos tópicos da teoria de grupos comumente abordados em disciplinas da licenciatura em Matemática, entrego-lhe uma lista de assuntos constantes nos planos de ensino das disciplinas que tratam da teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática pesquisados (Quadro 2.2).

Quadro 2.2. Conteúdos de teoria de grupos presentes em planos de ensino dos cursos de licenciatura em Matemática pesquisados.

Grupos: definição e exemplos
Homomorfismo e isomorfismo de grupos
Grupos cíclicos
Classes laterais
Grupos de permutações
Subgrupos
Subgrupos normais
Grupo alternado
Grupos de ponto de segunda espécie
Grupos simétricos
Grupos abelianos finitos
Grupos de transformações no plano e no espaço
Produtos diretos
Grupo linear geral
Grupos ortogonais
Teorema de Representação de Grupos Finitos
Teoremas de Sylow
Grupos quociente
Grupos de pontos cristalográficos
Grupos reticulados

Fonte: Dados da pesquisa.

- Pergunto como posso entrar em contato com o entrevistado caso necessite de mais esclarecimentos ou para lhe entregar a transcrição editada da entrevista para possível correção.

A fim de verificar a eficiência do instrumento elaborado, optamos por realizar uma entrevista-piloto, para a qual selecionamos uma professora a quem tínhamos fácil acesso. A entrevistada cursara licenciatura e bacharelado em Matemática, tinha mestrado e doutorado na área da Educação, era pesquisadora em um grupo de álgebra e por muitos anos lecionara álgebra na licenciatura em Matemática⁵.

Os participantes foram identificados por nomes fictícios iniciados com as primeiras letras do alfabeto.

Após o exame de qualificação, buscamos na plataforma Lattes professores doutores (matemáticos e educadores matemáticos) que trabalhavam ou já haviam

⁵ Na etapa de qualificação desta tese, apresentamos, além da entrevista-piloto, uma segunda entrevista, realizada com um matemático especialista e professor de álgebra na licenciatura.

trabalhado em cursos de licenciatura em Matemática e que pesquisavam sobre teoria de grupos. Contatamos esses pesquisadores por *e-mail*.

Dos 23 professores assim contatados, três prontamente responderam estar dispostos a participar da pesquisa. Três outros pediram o roteiro para se prepararem, mas não responderam a nossas subsequentes tentativas de contato. Dois disseram estar disponíveis apenas no semestre seguinte. Um agendou a entrevista mas não compareceu. Um respondeu não ter disponibilidade.

Obtiveram-se cinco entrevistas (duas quais foram apresentadas no exame de qualificação, sendo uma destas a entrevista-piloto).

Para tratamento das entrevistas, utilizamos os pressupostos da análise de conteúdo, caracterizada por Bardin (2009) como:

[...] conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens. (BARDIN, 2009, p. 42)

Uma vez transcritas as entrevistas, iniciamos a análise de conteúdo com o que Bardin denomina 'codificação':

A codificação corresponde a uma transformação dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão. (BARDIN, 2009, p. 133)

Desta forma, embora a transcrição tenha sido integral, apresentaremos apenas trechos que ajudem a responder nossa questão de pesquisa.

Optamos por inicialmente analisar cada entrevista separadamente, considerando o contexto do entrevistado, e posteriormente proceder a uma recomposição dos discursos buscando estabelecer relações entre estes e interpretá-los à luz do referencial teórico escolhido, ou seja, pesquisas que tratam da formação docente e as ideias de Shulman.

No capítulo seguinte apresentamos como se desenvolveu a teoria de grupos.

3. ORIGEM E DESENVOLVIMENTO DA TEORIA DE GRUPOS

Embora a teoria de grupos nos interesse como saber a ensinar, considerações sobre a origem e desenvolvimento dessa área da Matemática se fazem necessárias, pois esse saber científico é um dos tópicos de uma disciplina acadêmica geralmente denominada ‘Estruturas algébricas’ ou ‘Álgebra’, foco de nossa investigação.

Assim, faremos uma breve incursão na história da Matemática, em busca de elementos que permitam contextualizar a teoria de grupos em suas origens, para melhor compreensão desse campo.

A Matemática é ciência essencialmente abstrata: seus objetos não representam diretamente a realidade. O objeto ‘grupo’ é um bom exemplo disso, e a teoria matemática que dele trata – a teoria de grupos – lida com objetos, conceitos, relações e representações extremamente refinadas e abstratas.

Atualmente na Matemática, define-se grupo como uma estrutura algébrica que tem por base um conjunto não vazio, representado por G , munido de uma operação binária $*$ ($\forall a, b \in G \rightarrow a * b \in G$), tal que:

$$\forall a, b, c \in G \rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$\exists e \in G \text{ tal que } a * e = e * a = a, \forall a \in G$$

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \text{ tal que } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Mas de onde surgiu tal definição? Neste capítulo apresentaremos a origem, o desenvolvimento histórico e as influências do conceito de grupo na Matemática. O relato terá por base principal o livro *The genesis of the abstract group concept*⁶, tradução em inglês do original alemão de Hans Wussing, e no artigo *The abstract group concept*⁷, de J.J. O'Connor and E.F. Robertson.

O conceito de grupo abstrato surgiu no século XIX por uma abstração do conceito de grupo de permutações, o qual derivou da teoria das equações algébricas. O desenvolvimento do conceito de grupo tem raízes em três grandes

⁶ *A gênese do conceito de grupo abstrato*. Originalmente publicado como *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes* em 1969.

⁷ *O conceito de grupo abstrato*.

áreas da Matemática: a teoria dos números, a teoria das equações algébricas e a geometria do final do século XVIII e início do século XIX.

A noção de grupo, ainda que de maneira embrionária, estava presente nessas áreas em exemplos específicos como o grupo de classes residuais de módulo n na teoria dos números; o grupo de permutações de n elementos na álgebra; e o grupo de transformações na geometria. Nestes exemplos, a ideia de grupo estava implícita, mas precisava ser explicitada, o que ocorreu de forma gradual e requereu o envolvimento de inúmeros matemáticos.

Não é simples identificar *a posteriori* o papel que cada uma dessas utilizações implícitas desempenhou no surgimento do conceito de grupo, nem determinar em que medida cada uma delas é efetivamente o germe desse conceito. No entanto, como destaca Wussing (1984), podemos considerar a presença implícita do conceito de grupo para designar as instâncias deste conceito que não foram reconhecidas como tais por quem as empregou.

3.1. A TEORIA DOS NÚMEROS E O CONCEITO DE GRUPO

Há milênios a humanidade se interessa pelas relações entre os números naturais, que inicialmente envolviam as chamadas operações elementares⁸.

A relação de congruência⁹ foi introduzida pelo francês Pierre Fermat (1601-1665), responsável por grande parte dos fundamentos da teoria dos números. Após longa interrupção, os estudos sobre congruências foram retomados pelo suíço Leonhard Euler (1707-1783), que publicou a primeira demonstração do chamado 'pequeno teorema de Fermat' quase cem anos depois, em 1736, e pelo alemão Johann Carl Friedrich Gauss¹⁰ (1777-1855).

Utilizando a nomenclatura e simbologia atual da Matemática, consideremos um inteiro não nulo em módulo p , tal que p seja um número primo. Gauss provou

⁸ A expressão 'operações elementares no início do ensino fundamental' diz respeito à adição, subtração, multiplicação e divisão entre números naturais. Embora o termo 'operação' aplique-se aqui à subtração e à divisão, estas não se definem para todo par de números naturais.

⁹ Dado um inteiro $n > 1$, dizemos que os inteiros a e b são congruentes de módulo n se a e b deixam o mesmo resto quando divididos por n . Simbolizamos esta situação por $a \equiv b \pmod{n}$. Além disso, Z_n é o conjunto dos inteiros de módulo n .

¹⁰ O principal trabalho de Gauss nessa área é *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801 (WUSSING, 1984).

que todos os elementos de Z_p^* são potências de um único elemento, isto é, que o grupo Z_p^* de tais inteiros é cíclico. Dado um elemento de Z_p^* , Gauss definiu a ordem de um elemento e provou que a ordem deste elemento é um divisor de $p-1$. Usou então este resultado para provar o pequeno teorema de Fermat, qual seja: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ se p não divide a . Desta forma, Gauss antecipou as ideias relacionadas à teoria de grupos para provar resultados da teoria dos números.

Inicialmente, o estudo das formas quadráticas esteve vinculado à teoria dos números, e o principal objetivo desse estudo era encontrar a representação de inteiros por meio de formas quadráticas. Em 1870, Leopold Kronecker (1823-1891) percebeu que os princípios utilizados por Gauss na teoria das formas quadráticas poderiam ser aplicados a outros contextos (KRONECKER *apud* WUSSING, 1984).

Kronecker define, sobre um conjunto finito qualquer, uma operação abstrata que deve satisfazer propriedades que hoje são os axiomas de um grupo abeliano finito (KLEINER, 2007). Ele conhecia desde a década de 1850 os trabalhos de Galois em que comparece explicitamente a noção de grupos de permutações. No entanto, Kronecker parece não perceber a relação entre esses grupos e a estrutura que descreveu (WUSSING, 1984).

Kleiner (2007) destaca não ser possível inferir que Gauss, apesar de seu extraordinário *insight*, tivesse pleno entendimento do conceito de grupo abstrato, ou de grupo abeliano finito. Embora os argumentos utilizados em *Disquisitiones arithmeticae* fossem bastante gerais, Gauss explorou as propriedades de cada um dos exemplos propostos de grupos, mas abordou-os individualmente, ou seja, não estabeleceu um conjunto de resultados que pudessem ser aplicados a toda uma classe de grupos.

A utilização implícita do conceito de grupo no campo na teoria dos números estendeu-se até a metade do século XIX, sem que se estabelecesse nenhuma relação entre o conceito implícito de grupo abeliano finito e o de grupo de permutações. Somente por volta de 1880 tornou-se claro que a teoria de grupos de permutação permitia o domínio conceitual de parte da teoria dos números (WUSSING, 1984).

3.2. AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS E A TEORIA DE GRUPOS

A resolução de equações ou de sistemas de equações tem despertado o interesse de estudiosos desde a Antiguidade, em situações em que, em geral, são conhecidas as relações entre os números, mas deseja-se saber que números são esses.

Por volta de 1800 a.C., os babilônios já utilizavam alguns métodos de resolução de equações polinomiais do segundo grau, enquanto os egípcios, na mesma época, conheciam apenas métodos de resolução de equações polinomiais do primeiro grau.

Os antigos gregos usavam métodos de construções geométricas para resolver algumas equações do segundo grau e até alguns tipos de cúbicas.

Um dos trabalhos gregos relacionados à álgebra é a *Arithmetica* de Diofanto (250 d.C.) que, embora essencialmente versando sobre a teoria dos números, continha soluções de equações envolvendo números inteiros ou racionais. Além disso, Diofanto talvez tenha sido o primeiro a dar uma notação algébrica a essas equações: criou notações para a incógnita, para as potências da incógnita (até a de expoente 6), para a subtração, para a igualdade e para inversos. Considerada a primeira escrita geral de uma equação, constituiu um passo importante para avançar da álgebra retórica à sincopada¹¹.

Antes da era cristã, os hindus, ao contrário dos gregos, empregaram métodos aritméticos na resolução de equações, posteriormente disseminados pelos árabes. Um dos resultados mais significativos desse período é, sem dúvida, a solução da equação do segundo grau.

Durante muito tempo, os trabalhos sobre resolução de equações se limitaram a casos particulares ou a um conjunto de equações do mesmo tipo. Alguns matemáticos, no entanto, percebiam a necessidade de uma solução geral.

Matemáticos como Scipione del Ferro (1465-1526), Niccolò Fontana Tartaglia (1500-1557), Girolamo Cardano (1501-1576) e Lodovico Ferrari (1522-1565) deram grande impulso ao campo ao resolverem equações algébricas de terceiro e de quarto grau. Os métodos de resolução expostos por esses italianos

¹¹ Três estágios históricos podem ser identificados na notação algébrica: álgebra retórica (apenas palavras), álgebra sincopada (alguma notação especial; abreviações) e álgebra simbólica (manipulação de símbolos).

vieram, porém, acompanhados de dois obstáculos. O primeiro diz respeito à complexidade e ao incômodo no tratamento e manipulação das fórmulas obtidas, dada a ausência de uma simbologia adequada. Um problema que já existia tornou-se mais evidente nos métodos para solução de equações de graus 3 e 4, que requeriam cálculos mais extensos. O segundo problema tem raízes mais profundas, uma delas na formação do conceito de número: a não aceitação da existência de números negativos e imaginários¹².

A partir dos trabalhos de Tartaglia e Cardano com o método para encontrar as raízes de equações de grau 3 e o de Ferrari para a de grau 4, os matemáticos passaram a buscar procedimentos adequados para a resolução de equações de graus superiores. O método usual seguia sempre o mesmo caminho: primeiro procurava-se uma equação auxiliar, se possível de grau menor que a equação dada, por meio de substituições convenientes; depois resolvia-se a equação auxiliar, e a partir de suas raízes encontravam-se as da equação original, pois havia uma relação entre as soluções de ambas.

No século XVIII, o problema central da álgebra era encontrar um método geral de resolução das equações algébricas de qualquer grau por radicais, uma vez que os procedimentos até então propostos não se aplicavam a uma equação genérica de grau arbitrário. As investigações tiveram grande impulso com Joseph-Louis Lagrange¹³ (1736-1813), que, deixando de lado o cálculo das raízes de uma equação, voltou-se ao estudo da estrutura do conjunto de raízes.

Lagrange fez um estudo crítico de todos os métodos acumulados até sua época, de modo a identificar a natureza dos procedimentos de resolução de equações de terceiro e de quarto grau. Investigou também por que tais métodos funcionavam para tais equações, mas não para as de grau superior a 4. Após longo esforço infrutífero, concluiu que tais equações talvez não fossem solúveis por radicais.

Embora Lagrange tenha trabalhado sem considerar a composição ou a propriedade de fechamento de um sistema de permutações, podemos dizer que o germe do conceito de grupo de permutações estava presente em seu trabalho. A

¹² Na época, para se resolver uma equação foi imprescindível introduzir o conceito de números complexos (MILIES, 2018).

¹³ *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, de 1771-1772, foi a grande obra de Lagrange sobre equações algébricas (WUSSING, 1984).

partir da percepção de Lagrange de que havia conexão entre a solubilidade das equações, as funções racionais de n variáveis e seus valores sob a ação das permutações destas n variáveis, as funções racionais passaram a ser um tema estudado por aqueles que se dedicavam a investigar a solução de equações algébricas.

O passo significativo seguinte rumo à solubilidade das equações algébricas foi dado 30 anos depois da publicação das *Réflexions* de Lagrange pelo italiano Paolo Ruffini¹⁴ (1765-1822). Com base no trabalho de Lagrange, demonstrou a impossibilidade de encontrar uma solução por radicais para uma equação geral de grau maior que 4. Como a demonstração inicial de Lagrange continha muitas lacunas e algumas falhas, Ruffini fez diversas correções e foi além do reconhecimento de uma conexão entre a solubilidade de equações algébricas e a teoria de permutações. Trabalhando sob uma perspectiva mais estrutural que operacional (mecânica), alcançou progresso significativo em relação a seus antecessores.

Ruffini introduziu o grupo de permutações (para o qual usou o nome *permutazione*) e utilizou explicitamente a propriedade de fechamento. Investigou os efeitos das permutações sobre as funções racionais de n variáveis, com as quais Lagrange já havia trabalhado. As pesquisas de Ruffini em equações são notáveis por conterem antecipações da teoria de grupos (CAJORI, 2007). A *permutazione* de Ruffini coincide com o que Cauchy mais tarde chamou de ‘sistema de substituições conjugadas’ e Galois de ‘grupo’.

Em trabalhos do norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) sobre a teoria das equações, podemos verificar o uso espontâneo da palavra ‘grupo’ em um sentido não técnico, como sinônimo de ‘conjunto’ ou ‘coleção’. Sua atenção ao grupo de permutações centrou-se na procura de condições que lhe permitissem decidir se uma equação era ou não algebricamente solúvel por radicais. Em 1824¹⁵, Abel reformulou a primeira prova da insolubilidade da equação geral de grau 5 por radicais, um problema que permanecera aberto por séculos, apesar do esforço de

¹⁴ Produziu 10 artigos e em 1798 lançou os dois volumes de *Teoria generale delle equazioni*, que fazem parte da obra *Opere matematiche*, cujos volumes 1 e 2 só foram publicados em 1915 e 1953, respectivamente. (WUSSING, 1984).

¹⁵ Após a morte de Abel, suas memórias foram encontradas por Augustin-Louis Cauchy em 1830. Impressas em 1841, desapareceram novamente, sendo reencontradas em 1952 em Florença. (O’CONNOR; ROBERTSON, 2001. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Abel.html>. Acesso em 28 out. 2018)

muitos matemáticos: Lagrange, em torno de 1772, apontara a possibilidade de não solução; Ruffini, em 1801, apresentara uma demonstração incompleta da não solubilidade; e Gauss, em 1801, embora afirmando inexistir solubilidade, não deixou provas dessa asserção.

Abel voltou-se ao trabalho de Ruffini, apesar das várias versões que este dera da prova da insolubilidade por radicais da equação geral de grau maior que 4, pois nelas detectou algumas falhas.

Em artigo de 1828, Abel estabeleceu as condições necessárias e suficientes para que a equação $x^n - 1 = 0$ tenha solução algébrica.

As investigações sobre a resolução de equações algébricas finalmente foram concluídas com os trabalhos do francês Évariste Galois¹⁶ (1811-1832), que, segundo Wussing (1984), explicitam uma nova metodologia e uma notável habilidade de pensamento em termos de estrutura. O avanço essencial de Galois não consistiu na descoberta do grupo, mas da estrutura do grupo unicamente associado à equação, bem como do papel de alguns subgrupos deste grupo: os chamados ‘subgrupos normais’ (WUSSING, 1984).

Os próximos passos na investigação da solubilidade de equações algébricas visaram o entendimento do trabalho de Galois por seus contemporâneos matemáticos. De 1854 a 1866, houve progresso considerável no processo de abstração do conceito de grupo de permutações, que se intensificou com a teoria de grupos de permutações tornando-se área de estudo independente. Tal consolidação revela que as possíveis aplicações dessa teoria a outras áreas da Matemática expandiram-se, o que elevou o conceito de grupo de permutações à posição de conceito fundamental da Matemática.

O'Connor e Robertson (2001) relatam que Galois formulou uma definição de grupo em 1832, publicada em 1846 por Liouville, ao escrever sobre os trabalhos de Galois. A primeira versão do importante artigo de Galois sobre a solução algébrica de equações fora submetida à *Académie des Sciences* de Paris em 1829. Nos arquivos dessa instituição, René Taton encontrou evidências de que Cauchy falara com Galois e o persuadiu a retirar o artigo e apresentar uma nova versão para o

¹⁶ Todos os trabalhos de Galois estão reunidos em duas obras: *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois*, publicada pela *Société Mathématique* de France (1897) e *Manuscripts de Galois*, publicados por J. Tannery (1908).

Grande Prêmio de 1830. Em 1845, um ano antes de Liouville publicar a definição de Galois, Cauchy apresentou uma definição para grupo.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) apresentou a teoria de grupos de permutações como assunto autônomo e deu atenção às propriedades de grupos sem preocupar-se de imediato com aplicações, dando assim os primeiros passos rumo à consideração dos grupos abstratos (CAJORI, 2007). Antes de Cauchy, o conjunto das permutações não era objeto de estudo independente, mas servia, de certa forma, como dispositivo útil para investigar soluções de equações polinomiais.

Além de sistematizar os resultados de seus antecessores, Cauchy utilizou-os para desenvolver diversos conceitos e formular grande número de teoremas gerais na teoria das permutações, que mais tarde constituíram os resultados básicos dessa teoria. Além disso, elaborou uma terminologia amplamente adotada por seus sucessores. Representou a permutação por uma simples letra e usou a palavra ‘produto’ para a composição de duas permutações. Segundo ele, duas permutações são comutativas se o resultado de seu produto independe da ordem dos fatores.

Em 1844, Cauchy usou a expressão ‘sistema de substituições conjugadas’ para denominar o conjunto das permutações. Segundo Wussing (1984), tal terminologia corresponde aos conceitos atuais de gerador e de grupo:

Dada uma ou mais substituições envolvendo algumas ou todas as n letras $x, y, z, \dots$, chamo de produtos destas substituições, por elas mesmas ou por uma outra, em qualquer ordem, as substituições *derivadas*. As substituições dadas, juntamente com as derivadas delas, formam o que chamo de um *sistema de substituições conjugadas*. A ordem do sistema é o número de substituições no sistema, incluindo a substituição com dois termos iguais, que se reduz à identidade. (CAUCHY *apud* WUSSING, 1984, p. 89; destaques no original)¹⁷

Embora sua definição de sistema de substituições conjugadas não contemplasse todas as características do sistema e não nomeasse de forma clara as permutações e a operação entre elas, Cauchy dispunha de uma compreensão refinada das permutações, de suas formas e de suas representações.

¹⁷ No original: “Given one or more substitutions involving some or all of the n letters $x, y, z, \dots$ I call the products of these substitutions, by themselves or by one another, in any order, *derived substitutions*. The given substitutions, together with the derived ones, form what I call a *system of conjugate substitutions*. The order of the system is the number of substitutions in the system, including the substitution with two equal terms, that reduces to unity”.

Os comentários, investigações e extensões de alguns artigos de Galois prosseguiram com o também francês Camille Jordan (1838-1922)¹⁸. Seu trabalho, em especial o de 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, apresenta uma solução definitiva para o problema proposto por Galois e uma formulação completa do conceito de grupo de permutações, além de uma revisão de toda a Matemática da época. Jordan marcou uma ruptura na evolução e aplicação do conceito de grupo de permutações, formulando problemas que só seriam resolvidos poucos anos depois com a ajuda de uma nova concepção de grupo, alcançada com a ampliação do conceito de grupo de permutações empreendida pelo alemão Felix Klein (1849-1925) e pelo norueguês Sophus Lie (1842-1899).

A evolução e especificação da palavra 'grupo' com o sentido de grupo de permutações fizeram surgir nas décadas de 1850 e 1860 uma correspondência histórica e lógica entre o conceito de grupo e a teoria das equações algébricas, área que produziu tal conceito e na qual foi explicitamente aplicado. Com a ampliação da teoria de grupos de permutações e o resultado da aplicação desse conceito além da teoria das equações e da Matemática, a teoria das permutações foi se ampliando gradativamente, liberando a teoria de grupos da necessidade de representar seus elementos por meio de permutações.

3.3. A GEOMETRIA E A TEORIA DE GRUPOS

Da Antiguidade ao século XVII vigorara a ideia de que existia apenas a geometria euclidiana. O desenvolvimento de outros métodos para abordá-la teve início com René Descartes (1596-1650) e Pierre Fermat (1601-1665), que empregaram o método analítico, o qual conduziu à geometria cartesiana, ou analítica, com utilização de método algébricos, e essencialmente o de coordenadas, para expressar relações numéricas de dimensões, formas e propriedades dos objetos geométricos.

Jordan acreditava que as aplicações da teoria de permutações tinham como meta fundamentar as respostas a questões concernentes a equações (WUSSING,

¹⁸ Isso é feito em seus trabalhos *Commentaire sur la mémoire de Galois* (1865) e *Commentaire sur Galois* (1869).

1984). Na introdução de seu *Traité*, listou os problemas que seriam mais detalhadamente investigados, dentre os quais destacamos a utilização da teoria das permutações para resolver problemas de geometria analítica. Desse modo, os problemas geométricos converteram-se em algébricos, permitindo aplicar-lhes os métodos de Galois.

Na década de 1860, enquanto trabalhavam juntos, Klein e Lie tinham definido o conceito de grupo de transformações como um sistema fechado de transformações (WUSSING, 1984). Por conta de seu trabalho com grupos de transformações, Lie foi gradualmente levado a reconhecer que a definição de grupo deve incluir a presença de um único elemento neutro, a existência de um inverso para cada elemento e a associatividade da composição (WUSSING, 1984). No entanto, não formulou estas condições na linguagem da teoria dos conjuntos, nem da maneira axiomática como se faz hoje.

A extensão natural do conceito de grupo de permutações para o de grupo de transformações, inicialmente no Programa de Erlangen¹⁹, foi seguida pelo refinamento do conceito de grupo de transformações nas diversas formas com que a ideia foi aplicada. O reconhecimento do poder unificador da teoria de grupos foi promovido pelo reconhecimento da multiplicidade de suas possíveis aplicações. Tal extensão, inaugurada por Klein e Lie, contribuiu para a evolução do conceito de grupo e produz uma expansão das aplicações desta teoria.

O'Connor e Robertson (2001) examinaram alguns dos movimentos em direção a essa definição alcançada no século XIX, mas não se ocuparam da maior parte do trabalho empreendido sobre a teoria de grupos no século XIX, por considerarem ser “importante perceber que a definição abstrata de um grupo foi meramente uma linha lateral esotérica da teoria de grupos ao longo do século XIX”²⁰ (O'CONNOR; ROBERTSON, 2001).

¹⁹ Klein, em sua aula inaugural na Universidade de Erlangen, na Alemanha, apresentou suas ideias no conhecido *Erlangen Programm*, que desenvolve outra visão de grupo. O novo conceito se aplica exclusivamente a fins geométricos (QUARESMA, 2009).

²⁰ No original: “It is important to realise that the abstract definition of a group was merely an esoteric sideline of group theory through the 19th century”.

3.4. A FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO DE GRUPO

Em 1854, quando a teoria das equações de Galois se tornara mais conhecida e os grupos de permutações passaram a ser estudados de maneira explícita, o inglês Arthur Cayley (1838-1922), investigando a natureza abstrata do conceito de grupo (WUSSING, 1984), ateve-se a grupos finitos, o único tipo de grupo que se costumava estudar na época.

Foi somente em 1878, com quatro novas publicações de Cayley,²¹ que suas ideias começaram ser reconhecidas. Segundo Kleiner (2007), a comunidade matemática estava mais preparada para a abstração. Em suas novas publicações, Cayley insistiu no caráter generalizador de grupo, destacando que este era um conceito geral e que não era necessário limitar o estudo de grupos aos de permutações (VAN DER WAERDEN, 1985).

Cayley não fez referência explícita ao isomorfismo de grupos, mas indícios nos levam a crer que tivesse domínio desse conceito. Em 1878, mostrou que qualquer grupo de ordem n pode ser representado por um grupo de permutações de ordem n , asserção esta conhecida como teorema de Cayley.

Em 1879, o alemão Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) e o suíço Ludwig Stickelberger (1850-1936) propuseram uma definição de grupo abeliano equivalente àquela anteriormente formulada por Kronecker no contexto da teoria dos números (KLEINER, 2007).

Na época em que os alemães Walther Franz Anton von Dyck (1856-1934) e Heinrich Martin Weber (1842-1913) formularam a definição abstrata de grupo, três tipos de grupos específicos eram conhecidos: os de permutações, os abelianos finitos e os de transformações (KLEINER, 2007).

As definições estavam até então associadas ao desenvolvimento do conceito de grupo na teoria das equações e na teoria dos números, nenhuma das quais levava em consideração o desenvolvimento desse conceito na geometria e, em especial, nos grupos de transformações infinitos.

²¹ CAYLEY, A. A Theorem on Groups. **Math. Ann.**, 13, p. 149-152, 1878.

CAYLEY, A. On the Theory of Groups. **Proc. Math. Soc. London**, 9, p. 324-330, 1878.

CAYLEY, A. The Theory of Groups. **Amer. Journ. Math.**, 1, p. 401-403, 1878.

CAYLEY, A. The Theory of Groups. Graphical Representation. **Amer. Journ. Math.**, 1, p. 403-405, 1878

Por meio do trabalho de von Dyck, em 1882²², foi possível observar as três fontes históricas do conceito de grupo vinculadas à mesma concepção (KLEINER, 2007). Isso se viabilizou graças à familiaridade de von Dyck com as três grandes áreas de aplicação do conceito de grupo, permitindo-lhe identificar os elementos mais significativos para a teoria de grupos.

Foi Weber que em 1893²³ formulou a primeira definição suficientemente ampla e sem restrições de validade para grupos finitos e infinitos. Mostrou a existência e unicidade do elemento neutro e que para cada elemento existe um único inverso. Apresentou também vários exemplos de grupos, incluindo o aditivo, o dos vetores no plano e o das permutações de um conjunto finito, bem como o grupo aditivo e o multiplicativo de classes de resíduos de módulo n .

A partir da década de 1880, as formulações abstratas foram mais bem recebidas pela comunidade matemática, o que, segundo Kleiner (2007), pode ser parcialmente explicado pelo fato de já existirem na época várias partes da teoria de grupos – grupos de permutações, abelianos, de transformações descontínuas (finito e infinito), de transformações contínuas – e de tais abstrações manterem as características essenciais desses grupos.

A latência observada no desenvolvimento do conceito de grupo no século XIX parece resultante da pouca importância que a comunidade de matemáticos dava ao conceito “abstrato” de grupo. Entre os matemáticos da época que não temiam expressar objeções à adoção de um ponto de vista abstrato na teoria de grupos, estavam Jordan e Klein, que no entanto acabaram exercendo grande influência na evolução dessa teoria. A forte objeção de Klein pode ser verificada no seguinte trecho da retrospectiva que fez em 1926 sobre seu trabalho com Lie:

²² O trabalho de von Dyck sobre o conceito de grupo é exposto em seu artigo *Gruppentheoretische Student* (WUSSING, 1984).

²³ No artigo *Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie*.

Assim, há uma perda total do apelo à imaginação. Por outro lado, o esqueleto lógico é cuidadosamente preparado. [...] Essa formulação abstrata é excelente para o trabalho com provas, mas não auxilia a encontrar novas ideias e métodos. Pelo contrário, ela representa a conclusão de um avanço. Parece portanto facilitar o processo de aprendizagem, pois ajuda a demonstrar teoremas conhecidos de uma forma perfeita e simples. Por outro lado, torna as coisas muito mais difíceis para a mente do aluno, pois ele enfrenta algo fechado, não sabe como se chega a essas definições e não pode imaginar absolutamente nada. Em geral, a desvantagem do método é a de não incentivar o pensamento. Tudo o que se deve cuidar é de não violar os quatro mandamentos²⁴ (KLEIN *apud* WUSSING, 1984, p. 228)²⁵.

Klein reconhece a vantagem das formulações abstratas e o fato de poderem auxiliar na elaboração de provas, mas atribui a esse método mais desvantagens que vantagens. Em especial, observa a possibilidade de que este tipo de abordagem dificulte o processo aprendizagem, uma vez que apresenta os resultados como acabados e fechados, sem permitir ao aluno descobrir como chegar a essas definições.

Convém ressaltar que a construção do conceito de grupo abstrato não foi imediata, mas passou por diversas modificações que refletiram as necessidades das novas áreas a que o conceito ia sendo aplicado. A formalização do conceito só se tornou possível e foi aceita em 1882, quase meio século após o trabalho de Galois. Nesse meio-tempo, vinham ocorrendo outros desenvolvimentos, entre eles o de um fundamento abstrato axiomatizado e justificado através da lógica matemática.

A teoria de grupos é a abstração de ideias que se iniciaram com o conceito de número e passaram a áreas que estavam sendo estudadas simultaneamente: a geometria, com os grupos de simetria; a teoria dos números, com estudos relacionados a números primos; e a teoria das equações algébricas, conduzindo ao estudo de permutações. Com o tempo verificou-se que a ideia de grupo era um instrumento de mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

²⁴ Klein aqui se refere às quatro propriedades: de fechamento da operação, associativa, de existência do elemento neutro e de que todo elemento possui um simétrico para uma operação binária definida em um conjunto.

²⁵ No original: "Thus there is a complete loss of the appeal to the imagination. On the other hand, the logical skeleton is carefully prepared. [...] This abstract formulation is excellent for the working out of proofs but it does not help one find new ideas and methods. Rather, it represents the conclusion of an advance. It therefore seems to ease the learning process, for it helps one prove known theorems in a flawless and simple manner. On the other hand, it makes matters far more difficult for the mind of the student, for he confronts something closed, does not know how one arrives at these definitions, and can imagine absolutely nothing. In general, the disadvantage of the method is that it fails to encourage thought. All one must beware of is that one does not to violate the four commandments".

O Quadro 3.1 lista os matemáticos citados nesse capítulo que contribuíram implícita ou explicitamente para a definição abstrata de grupo, seguidos do ano de suas publicações.

Quadro 3.1. Matemáticos que contribuíram para a definição abstrata de grupo.

Teoria dos Números	Equações Algébricas	Geometria	Formalização
	Lagrange - 1771/1772		
Gauss - 1801	Ruffini - 1798		
	Abel - 1824		
	Galois - 1830		
	Cauchy - 1844		
Kronecker - 1870	Jordan - 1870	Klein e Lie - 1860	
			Cayley - 1878
			Frobenius e Stickelberg - 1879
			von Dick - 1882
			Weber - 1893

As considerações descritas nos mostram que a teoria de grupos tem raízes longínquas, mas é um campo novo em termos de conhecimento sistematizado em pleno desenvolvimento, com contribuições importantes para a Matemática.

No capítulo seguinte focalizaremos teses que tratam da teoria de grupos em cursos de licenciatura em Matemática.

4. TESES SOBRE A TEORIA DE GRUPOS

Ao definirmos nosso objetivo de pesquisa, buscamos localizar no catálogo de Teses do portal da CAPES o que já se pesquisara sobre o tema. Aplicando os critérios de busca descritos no Capítulo 2, encontramos três trabalhos de doutorado.

Apresentaremos a seguir alguns resultados de pesquisas, em ordem cronológica de publicação, que de alguma forma investigaram a teoria de grupos na formação de professores de Matemática.

Em sua pesquisa de doutorado, **Albuquerque** (2005, p. *iii*) buscou “analisar o conceito de grupo formado por alunos do curso de Matemática da Universidade Federal de Campina Grande – *Campus* Campina Grande em seu primeiro curso de álgebra abstrata”.

Para fundamentar suas análises, embasou-se nos trabalhos de Vygotsky sobre a abordagem sócio-histórica e de Vergnaud sobre a teoria dos campos conceituais. Para coleta de dados, desenvolveu um instrumento diagnóstico constituído de perguntas abertas e situações-problema, além de realizar entrevistas.

Os sujeitos da pesquisa eram alunos que cursavam a disciplina ‘Álgebra I’ no curso de Matemática. Alocada no 5º semestre do bacharelado e no 6º da licenciatura, a disciplina tem por conteúdo a introdução à teoria de grupos e, segundo a pesquisadora, o conceito de grupo é trabalhado durante todo o semestre. A disciplina contempla os seguintes conteúdos programáticos:

Estrutura de grupos. Grupos de permutações e grupos cíclicos. Subgrupos e subgrupos normais. Grupos quocientes. Homomorfismo e Isomorfismo. Teorema de Sylow e aplicações. Grupos abelianos finitamente gerados. Produtos direto e semidireto de grupos. (ALBUQUERQUE, 2005, p. 146)

A pesquisa incluiu alunos do curso diurno e do noturno. No noturno, os dois últimos tópicos não foram abordados por falta de tempo. Como a pesquisadora não lecionava nos cursos pesquisados, manteve-se informada sobre o que estava sendo neles trabalhando em conversas informais com os professores.

A investigação compôs-se de três etapas em sala de aula com todos os alunos, abrangendo duas horas-aula, ao fim das quais agendou-se uma entrevista com cada aluno.

O instrumento diagnóstico consistiu em três sequências de atividades²⁶ (uma por etapa) a serem resolvidas por escrito. As entrevistas foram guiadas pelas soluções que os alunos adotaram e por suas verbalizações para justificar suas soluções.

Embora os dados obtidos das atividades escritas expressem soluções exclusivamente dos alunos, os registros orais incluem soluções alcançadas com mediação da pesquisadora. Tal mediação se deu “por meio de pistas, explicação de uma regra, de perguntas, de questionamentos, etc.” (ALBUQUERQUE, 2005, p. 138).

A análise dos protocolos dessas atividades revelou elevado grau de dificuldade dos sujeitos ao elaborarem as soluções, além de apresentarem algumas soluções incoerentes.

Já a análise dos dados colhidos após as entrevistas mostrou diminuição das soluções incoerentes e evidenciou um potencial construtivo dos alunos quando auxiliados por alguém mais experiente. A pesquisadora concluiu ser necessário que os alunos vivenciem um longo processo de trabalho com situações-problema permeado por debates entre professor e aluno e entre alunos.

A seguir apresentamos a pesquisa de **Quaresma** (2009) que teve por objetivo:

[...] analisar o desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de Grupo à luz do pensamento matemático avançado, proposto por Dreyfus (1991), visando apontar melhorias didáticas para o ensino desse conceito a partir da inclusão da componente histórica nas aulas de Matemática. (QUARESMA, 2009, p. 7).

Na justificativa de sua pesquisa, afirma que “a maior dificuldade na construção do conceito de Grupo, nos cursos de licenciatura em Matemática, é o caráter não significativo como esse conceito é apresentado” (QUARESMA, 2009, p. 12), e por isso buscou na história da Matemática uma maneira de obter subsídios que minimizassem os obstáculos de aprendizagem encontrados no ensino desse tópico na graduação.

Para atender seu objetivo, o pesquisador, que leciona as disciplinas ‘Estruturas algébricas’ e ‘Álgebra I’, procedeu a uma reconstrução histórica do

²⁶ A autora trata as sequências didáticas desenvolvidas por atividades (ALBUQUERQUE, 2005, p. 139).

desenvolvimento do conceito de grupo, analisando o material histórico com apoio teórico em Dreyfus e desenvolvendo esse material para o ensino de álgebra, com inclusão do componente histórico, as múltiplas representações de Dreyfus e a formação de imagens conceituais de Vinner.

Para verificar a eficácia do material elaborado, o pesquisador o testou em uma turma da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e outra da Universidade Federal do Pará (UFPA) em 2007, para avaliar a formação de imagens conceituais por alunos que cursavam disciplinas de álgebra ministradas com modelo tradicional de ensino.

Posteriormente, desenvolveu as atividades²⁷ do material a alunos de uma turma de licenciatura em Matemática da UFPA durante o primeiro semestre de 2008, ao ministrar a disciplina 'Álgebra I', de 90 horas-aula, com a participação de cerca de 50% de alunos concluintes.

Em sua pesquisa, Quaresma (2009) não explicita o que considera modelo tradicional de ensino, mas ao descrever os cursos em que conduziu sua pesquisa em 2007, afirma que privilegiam o componente formal, por influência da escola francesa, e considera que essa formalização estruturalista da álgebra influenciou os matemáticos e autores de livros brasileiros das universidades da região Sudeste, nas quais a maioria dos professores de álgebra da UFPA e da UFRN buscou sua qualificação.

Afirma ainda que no ensino superior as disciplinas de Matemática têm programas específicos definidos, cabendo ao professor aplicá-los. Assim, embora o professor busque uma melhor forma de organizá-lo, o programa é geralmente trabalhado de forma axiomática, limitada à demonstração e aplicação de determinados teoremas. Poucos professores preocupam-se realmente com o processo de reflexão dos estudantes (QUARESMA, 2009).

Sessenta dias após o término das aulas, o pesquisador elaborou um teste sobre o conteúdo 'grupo' às turmas de 2007 da UFPA e UFRN e à turma à qual desenvolveu a pesquisa com componente histórico em 2008 na UFPA. Cinco alunos se dispuseram a participar do teste em 2007 e onze em 2008.

²⁷ O autor trata as sequências didáticas desenvolvidas por atividades (QUARESMA, 2009, p. 154).

Quaresma também apresenta em seu trabalho uma pesquisa de opinião realizada com a turma de 2008, que lhe forneceu algumas respostas que julgou serem positivas quanto ao tipo de abordagem que adotara. A análise das questões do teste revelou que a turma de 2008 se saiu melhor que as de 2007.

Oliveira (2017) realizou uma pesquisa com o objetivo de:

[...] elaborar e analisar um conjunto de atividades para a constituição do conceito de estrutura algébrica grupo, direcionada pela questão: Quais são as potencialidades e limitações de um conjunto de atividades pautadas em exemplos e contraexemplos particulares de estrutura algébrica grupo para generalização e formalização do referido conceito? (OLIVEIRA, 2017, p. 5)

A pesquisadora observa que o conceito de grupo é habitualmente apresentado a partir de definições e axiomas, seguidos de exemplos e contraexemplos. Sua proposta consiste em partir de exemplos e contraexemplos para chegar ao conceito. Para isso, elaborou três atividades fundamentadas na teoria das situações didáticas de Brousseau: uma voltada a conjuntos numéricos, outra a transformações geométricas e a terceira voltada a ambos²⁸.

As atividades foram desenvolvidas junto a cinco professores que cursavam pós-graduação em Educação Matemática na PUC-SP.

Empregou-se a metodologia *Design Experiments*, que:

[...] envolve duas faces: uma prospectiva – que aborda um estudo das atividades propostas no sentido de fornecer possíveis respostas e resoluções, e outra reflexiva – que apresenta uma análise das respostas e resoluções obtidas com a finalidade de atingir o objetivo proposto (constituição do conceito de estrutura algébrica grupo). (OLIVEIRA, 2017, p. 5)

Analisando seus resultados, Oliveira aponta como potencialidade o movimento entre as fases das situações didáticas propostas por Brousseau, em conceitos necessários da estrutura algébrica ‘grupo’ (tais como, elemento neutro e propriedade associativa) e, ainda, exemplos de reflexão e composição de transformações geométricas como operação.

A autora aponta como limitações de sua proposta o fato que as fases das situações didáticas não foram vivenciadas no trabalho com conceitos como operação binária, operação fechada e estrutura algébrica ‘grupo’. Além disso, as atividades propostas não se revelaram autoexplicativas, por exigirem que os sujeitos dominassem as ideias básicas de elemento inverso, elemento neutro, propriedades

²⁸ As fases de desenvolvimento da teoria das situações didáticas são ação, formulação, validação e institucionalização.

comutativa e associativa, composição de funções e simetrias, bem como utilizassem linguagem algébrica.

Em suma:

- Albuquerque (2005) elaborou questionários e realizou entrevistas com alunos de licenciatura em Matemática e constatou terem um elevado grau de dificuldade em solucionar as atividades dos questionários, mas que após as entrevistas conseguiram corrigir algumas de suas soluções incoerentes ao serem auxiliados. A autora conclui ser necessário um longo processo de vivência dos alunos com situações-problema em um espaço permeado por debates entre professor e alunos e entre alunos. Não explicita, porém, quais conteúdos da teoria de grupos devem ser trabalhados em cursos de licenciatura.
- Quaresma (2009) comparou o desempenho de alunos de disciplinas de álgebra ministradas com modelo tradicional de ensino e alunos de uma disciplina “construída” com base no componente histórico, no desenvolvimento de múltiplas representações de Dreyfus e na formação de imagens conceituais de Vinner. Concluiu que os alunos do segundo grupo tiveram mais sucesso que os do ensino tradicional. Quaresma focaliza o contraste nas metodologias de ensino de álgebra sem discutir, porém, o conteúdo da teoria de grupos proposto para a licenciatura.
- Oliveira (2017) propôs uma mudança na forma de apresentar o conteúdo da teoria de grupos em disciplinas de álgebra: ao invés de partir de definições, axiomas e teorias e segui-los de exemplos e contraexemplos, propôs partir de exemplos e contraexemplos para por fim construir o conceito. A pesquisadora não discorre sobre a adequação dos conteúdos da teoria de grupos trabalhados nos cursos de licenciatura em Matemática.

A pesquisa que nos propusemos realizar trata do mesmo objeto matemático – grupo –, no mesmo contexto da formação de professores de Matemática, mas busca elucidar quais conteúdos da teoria de grupos devem ser trabalhados em um curso de licenciatura em Matemática. Assim, para nos auxiliarem na análise de dados, apresentaremos no próximo capítulo ideias teóricas relacionadas com a formação de professores.

5. IDEIAS TEÓRICAS

Como os conteúdos relacionados especialmente à teoria de grupos se enquadram em uma disciplina, que por sua vez, faz parte de um currículo de formação de professores, é importante analisá-la na perspectiva dos conhecimentos dos professores. Para tanto, neste capítulo apresentaremos pesquisas que tratam da formação docente, em especial a do professor de Matemática. Tomaremos como referência o modelo proposto por Lee Shulman.

5.1. FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Iniciemos com uma reflexão feita por Pereira (2005) ao tratar da dicotomia entre teoria e prática na Matemática:

Verificamos que a dicotomia entre teoria e prática já aparece nos anos 30, quando havia uma estrutura curricular que estabelecia uma hierarquia entre conteúdo e metodologia. Nos anos 60, com a Reforma Universitária, reforça-se ainda mais a separação entre as disciplinas específicas e as pedagógicas. O modelo da racionalidade técnica, nos anos 70, privilegia a formação teórica e a prática é vista como aplicação da teoria. Nos anos 80, o problema da dicotomia entre a teoria e a prática foi muito discutido devido às influências das reflexões levantadas por Vásquez. Em 1990, embora passe a ser enunciada a relação teoria-prática como um eixo articulador do currículo, e em 1996, no art. 61 da LDB, seja prevista a “associação entre teoria e prática”, os problemas da dicotomia permanecem os mesmos. (PEREIRA, 2005, p. 87)

Na década de 1990, a incorporação de concepções de aprendizagem de cunho construtivista às políticas educacionais exigiu repensar a formação de professores. Em novembro de 1999, o Ministério da Educação determinou a constituição de um grupo de representantes das secretarias estaduais de educação do ensino fundamental, médio e superior, com a incumbência de propor diretrizes gerais para a formação dos professores da educação básica.

A proposta tinha como desafio buscar uma sintonia entre a formação inicial de professores, os princípios prescritos pela Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional, as normas instituídas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para

a Educação Infantil, para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio e as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a Educação Básica.

Assim, após discussões em audiências públicas e reuniões técnicas envolvendo diferentes associações e instituições, foram aprovadas em 2001 as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica em nível superior.

Estas Diretrizes Curriculares Nacionais apontam algumas questões a serem enfrentadas nos cursos de formação de professores. Dentre elas, destacamos as seguintes:

- a) Nem sempre está claro quais conteúdos o licenciando deve aprender, dado que precisa conhecer mais do que o conteúdo que irá ensinar (BRASIL, 2001a).
- b) Nas licenciaturas que formam especialistas por área de conhecimento ou disciplina, é frequente focar quase que exclusivamente o conteúdo específico das áreas, em detrimento de um trabalho mais aprofundado sobre os conteúdos que serão desenvolvidos no ensino fundamental e médio. É preciso indicar com clareza para o aluno a relação entre o que está aprendendo na licenciatura e o currículo que ensinará (BRASIL, 2001a).

Em 2015, foram definidas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. O documento explicita uma preocupação com conteúdos específicos de cada área e com a relação entre teoria e prática:

[...] os cursos de formação deverão garantir nos currículos conteúdos específicos da respectiva área de conhecimento, seus fundamentos e metodologias. (BRASIL, 2015, p. 13)

Para superar a suposta oposição entre conteudismo e pedagogismo os currículos de formação de professores devem contemplar espaços, tempos e atividades adequadas que facilitem a seus alunos fazer permanentemente a transposição didática, isto é, a transformação dos objetos de conhecimento em objetos de ensino. (BRASIL, 2015, p. 56)

Ao tratar do eixo articulador das dimensões teóricas e práticas, o documento destaca que teoria e prática não devem ser mutuamente excludentes em termos de prioridade e que nenhuma delas deve ser o ponto de partida na formação do professor, pois no:

processo formativo, deverá ser garantida efetiva e concomitante relação entre teoria e prática, ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessários à docência. (BRASIL, 2015, p. 13)

Assim, “no processo de construção de sua autonomia intelectual, o professor, além de saber e de saber fazer deve compreender o que faz” (BRASIL, 2015, p. 56) e o “planejamento dos cursos de formação deve prever situações didáticas em que os futuros professores coloquem em uso os conhecimentos que aprenderem” (p. 57), pois “todas as disciplinas que constituem o currículo de formação e não apenas as disciplinas pedagógicas têm sua dimensão prática” (p. 57).

Dado que as diretrizes para os cursos de licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001b), explicitam a necessidade de uma disciplina de fundamentos de álgebra, e por considerarmos, em princípio, que a teoria de grupos faz parte dessa disciplina, apresentaremos a seguir alguns resultados de pesquisas pertinentes.

Fürkötter e Morelatti (2007) relatam que os cursos de licenciatura em Matemática brasileiros têm sido objeto de investigações que apontam problemas a superar, tais como: licenciatura tratada como apêndice do bacharelado; ênfase nas disciplinas específicas em detrimento das pedagógicas; e falta de relação entre teoria e prática.

Dois anos mais tarde, em artigo publicado na revista *Educação Matemática Pesquisa*, Moriel Junior e Cyrino (2009) concluíram que o número de investigações que focalizam conhecimentos sobre o ensino de Matemática necessários para ensinar e sobre a articulação entre esses conhecimentos era ainda pouco representativo.

Concordamos com Gatti (2014, p. 37) em que o conhecimento disciplinar necessário “a um professor para atuar na educação básica não é menor ou mais aligeirado, mas pode ser diferente, em alguns aspectos, do que é necessário para formar um especialista *stricto sensu*”.

Não esperamos que deva haver relação de domínio da teoria sobre a prática ou vice-versa, mas sim uma relação de simultaneidade. Desta forma, concordamos com Candau e Lelis (1995), para os quais a teoria:

[...] deixa de ser um conjunto de regras, normas e conhecimentos sistematizados *a priori*, passando a ser formulada a partir das necessidades concretas da realidade educacional, a qual busca responder através da orientação de linhas de ação. (CANDAU; LELIS, 1995, p. 59)

Também concordamos com Pereira (2005, p. 39) quando afirma que a prática não serve para comprovar a teoria e tampouco se restringe ao fazer, mas constitui-se “numa atividade de reflexão que enriquece a teoria que lhe deu suporte”.

A Matemática na perspectiva da prática docente é assim caracterizada por Fiorentini e Oliveira (2013):

Em relação à diversidade, queremos destacar que o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925)

Destacam ainda a importância das disciplinas de Matemática nos cursos de licenciatura:

São importantes os conteúdos da matemática superior que compõem as disciplinas de formação matemática da licenciatura, pois amplia-se, assim, a visão dos futuros professores acerca da matemática como campo de conhecimento. Mas, é necessário adotarmos posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 935)

Esta afirmação vai ao encontro de nossa pesquisa, pois estamos investigando um conteúdo matemático – a teoria de grupos – em cursos de licenciatura em Matemática.

Gatti (2010) constatou que na maior parte dos ementários que analisou inexistia articulação entre as disciplinas de formação específica (conteúdos da área disciplinar) e de formação pedagógica (conteúdos para a docência). Em 2014, acrescentou que:

Nessa ambiência acadêmica, acaba por se tornar difícil a atribuição de valor a saberes específicos da docência e a consideração dos processos de aprendizagem dos estudantes. Isso rebate nas licenciaturas. Muitos de seus docentes são oriundos não de cursos de licenciatura, mas são bacharéis em áreas variadas ou áreas profissionais (engenharia, saúde, química etc.) e não tiveram contato com questões da área de ensino ou educacionais. Inferem-se daí algumas dificuldades que podem ter para atuar formando professores para a educação básica. (GATTI, 2014, p. 46)

Como nos preocupamos com o conhecimento do futuro professor de Matemática, apresentaremos a seguir as categorias do conhecimento do professor definidas por Shulman.

5.2. CATEGORIAS DO CONHECIMENTO DO PROFESSOR SEGUNDO SHULMAN

Na década de 1980, no artigo *Those who understand: knowledge growth in teaching*, Shulman (1986) rebate a afirmação “*He who can, does. He who cannot, teaches*”²⁹), que Bernard Shaw incluía em sua peça *Man and superman: a comedy and a philosophy*, da década inicial do século XX.

Considerando a asserção como um insulto à profissão docente, Shulman argumenta que o conhecimento do professor constitui elemento central para o exercício da profissão docente. Destaca a mútua exclusão que se observa entre dois lados de uma mesma moeda: exclusão mútua entre o conhecimento específico de determinada disciplina e o conhecimento pedagógico.

A formação de professores carece, portanto, da combinação dessas duas áreas do conhecimento. Para atender a essa dicotomia, Shulman propõe a concepção que denominou ‘conhecimento pedagógico do conteúdo’.

Buscando uma estrutura para explicar o domínio do conhecimento pelo professor, Shulman distingue em seus trabalhos as seguintes categorias de conhecimento que o professor necessita para poder ensinar: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

O conhecimento do conteúdo consiste no conhecimento da disciplina que o professor irá ensinar. Não se resume a conhecer e compreender conceitos, processos e procedimentos, mas também a compreender os processos de sua produção, representação e validação epistemológica. Esse domínio abrangente e profundo do conteúdo é fundamental para que o professor tenha autonomia para fazer escolhas seguras do que irá ensinar e para escolher representações adequadas. Um professor que disponha de domínio limitado do conteúdo que ensina tende, por exemplo, a reproduzir passivamente o que o livro didático traz, adotando

²⁹ “Quem pode faz; quem não pode ensina.”

a mesma sequência, os mesmos exemplos, as mesmas representações que o autor propõe.

No entanto, o conhecimento do conteúdo, embora imprescindível, não é suficiente para garantir o sucesso do ensino, e por isso Shulman o diferencia do conhecimento pedagógico do conteúdo. Este consiste nos modos de formular e apresentar o conteúdo de forma a torná-lo compreensível aos alunos. Inclui analogias, ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações – em suma, as maneiras de representar e reformular o conteúdo de modo que se torne compreensível aos demais (SHULMAN, 1986). Este é também o conhecimento que diz respeito à compreensão docente daquilo que facilita ou dificulta o aprendizado discente de um conteúdo específico. Assim, o conhecimento pedagógico do conteúdo também inclui o entendimento do que torna fácil ou difícil a aprendizagem de determinado tópico, bem como as concepções errôneas dos estudantes e suas implicações na aprendizagem.

O terceiro tipo de conhecimento é o curricular, representado pelos programas elaborados para o ensino de assuntos e tópicos específicos em dado nível, bem como a variedade de materiais instrucionais disponíveis relacionados aos programas. Shulman aborda também a importância do conhecimento lateral do currículo, pois o professor, conhecendo o que os alunos estão estudando em outras matérias, poderá relacioná-las com a que está ensinando, além do conhecimento do currículo vertical, que corresponde ao que os estudantes trabalharam em anos anteriores ou irão trabalhar posteriormente.

Shulman inclui ainda outros conhecimentos, que constituem o que chama de formação pedagógica geral: as diferenças individuais, os modos de organização da sala de aula, a estrutura e funcionamento da escola – ou seja, conhecimentos advindos de outros campos, entre eles da história e da filosofia da educação e também da psicologia.

Com base na visão de Shulman sobre os conhecimentos necessários ao professor, nos questionamos: Qual conteúdo da teoria de grupos deve ser trabalhado na licenciatura de Matemática?

Um dos aspectos a ser considerado é o de que a disciplina acadêmica (como caracterizada adiante por Resende) não é cópia de um saber científico, mas

tem construções próprias, embora possa estar mais próxima deste do que da disciplina escolar.

Resende (2007) caracteriza disciplina acadêmica como:

[...] um conjunto de: conteúdos e práticas, frutos de uma transposição didática; finalidades; elementos pedagógicos e outros elementos do meio profissional de referência e da sociedade em geral; organizado de modo a manter uma unidade científica e didática. (RESENDE, 2007, p. 45)

A constituição de uma disciplina acadêmica deve levar em conta as finalidades educativas presentes no projeto de formação a que pertence. No caso da licenciatura em Matemática, há uma finalidade explícita: a de formar professores de Matemática para a educação básica.

Sob as lentes do conhecimento do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo de Shulman, focamos nossa atenção para as falas colhidas em nossas entrevistas, a fim de responder nossa questão de pesquisa: Quais conteúdos da teoria de grupos devem ser tratados nos cursos de licenciatura em Matemática?

Considerando o terceiro tipo de conhecimento apresentado por Shulman – o curricular –, buscamos conhecer os conteúdos de teoria de grupos atualmente tratados em cursos de licenciatura em Matemática. É o que apresentamos no próximo capítulo.

6. CONTEÚDOS DE TEORIA DE GRUPOS PRESENTES NO CURRÍCULO DE INSTITUIÇÕES DA REGIÃO SUDESTE

Neste capítulo focalizaremos a teoria de grupos como um saber a ensinar na formação do professor de Matemática da escola básica. Adotaremos como fontes os currículos propostos pelas instituições de ensino pesquisadas. Como enunciado na metodologia, realizamos um levantamento das propostas curriculares de disciplinas em que são abordados conteúdos da teoria de grupos. Mais delimitadamente, esta pesquisa documental dos currículos visa analisar se a teoria de grupos está sendo ensinada nos cursos de licenciatura em Matemática na região Sudeste – e “qual” teoria de grupos é esta.

6.1. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, *CAMPUS SÃO PAULO*

Na USP São Paulo, o curso de licenciatura em Matemática tem organização própria, independente da do bacharelado, e o objetivo informado em sua proposta curricular é o de formar professores de Matemática que lecionarão na segunda fase do ensino fundamental e no ensino médio.

No site da USP São Paulo consta a descrição da área de álgebra do currículo da licenciatura em Matemática:

Álgebra – Nessa área são discutidas, de um ponto de vista abstrato, a teoria elementar dos números (aritmética) e as propriedades dos anéis de polinômios, bem como tratadas a necessidade de ampliação do corpo dos reais e a introdução dos números complexos. Os objetivos fundamentais são a revisão crítica da álgebra elementar, o cuidado no trato do raciocínio lógico-algébrico, a contextualização histórica destes conteúdos, e a discussão da prática pedagógica dessa área no ensino básico. Alguns aprofundamentos possíveis são na teoria dos números ou sobre tópicos de estruturas algébricas e aplicações.³⁰

O aluno deve cursar 32 disciplinas obrigatórias, cinco ou seis optativas eletivas e duas optativas livres, com integralização prevista em oito semestres para o período diurno e 10 para o noturno. Nas disciplinas obrigatórias é inserida a prática

³⁰ Disponível em:

<https://www.ime.usp.br/images/arquivos/grad/mat/licenciatura/projeto_pedagogico_licenciatura.pdf>. Acesso em: 26 jul. 2018.

de ensino, com o objetivo de propiciar aos alunos reflexão sobre o relacionamento entre os tópicos estudados nas disciplinas e a prática pedagógica na sala de aula do ensino básico.

Dentre as disciplinas obrigatórias, as relacionadas à área de álgebra são: 'Introdução à álgebra linear', com quatro créditos no segundo semestre, 'Álgebra I para a licenciatura', com quatro créditos no terceiro semestre e 'Álgebra II para a licenciatura', com quatro créditos no quinto semestre. Nenhuma destas trata explicitamente de noções relacionadas à teoria de grupos.

A estrutura do curso permite que o aluno escolha áreas de aprofundamento que correspondam a seu interesse, sejam elas voltadas à área de educação ou se aproximem dos currículos dos bacharelados em Matemática, estatística, computação ou física, pois, além das disciplinas obrigatórias, estão previstas disciplinas optativas.

Dentre as optativas relacionadas a nosso tema de investigação oferecidas pelo Instituto de Matemática e Estatística, destacamos 'Tópicos de grupos e Aplicações', que não é especificamente direcionada aos alunos de licenciatura, pois podem ser cursadas pelos que cursam bacharelado em Matemática ou outro curso da USP. Podemos por isso inferir que a disciplina visa desenvolver o conteúdo matemático, sem preocupação de estabelecer relações com a prática docente do futuro professor.

A disciplina 'Tópicos de grupos e aplicações', com quatro créditos, não tem pré-requisito e pode ser cursada a partir do sétimo período para o diurno e a partir do nono para o noturno. O Quadro 6.1 descreve a carga horária, o objetivo, o programa e a bibliografia da disciplina.

Quadro 6.1. Disciplina ‘Tópicos de grupos e aplicações’.

Carga horária: 60 h.

Objetivo: Noções básicas da teoria de grupos e aplicações, incluindo grupos de simetria.

Programa da disciplina: Grupos. Grupos cíclicos. Produto direto. Subgrupos. Classes laterais. Teorema de Lagrange. Subgrupos normais. Grupos quociente. Grupos de permutações. Homomorfismos. Primeiro teorema do homomorfismo. Teorema de Cayley. Grupos finitos em dimensão 2 e 3: transformações ortogonais, grupos de rotação, classificação. Grupos de ponto de segunda espécie. Grupos reticulados. Grupos de ponto cristalográficos.

Método: Aulas teóricas e de exercícios.

Bibliografia:

GROVE, L.C.; BENSON, C.T. *Finite reflection groups*, 2nd. ed., Springer, 1985.

MILLER, W., Jr. *Symmetry groups and their applications*, Academic Press, 1972.

ARMSTRONG, M.A. *Groups and symmetry*. Springer, 1988.

Fonte: <<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=45&codcur=45024&codhab=1&tipo=N>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Embora no programa da disciplina seja proposto trabalhar noções básicas da teoria de grupos e aplicações, apresenta uma extensa lista de conteúdos a serem tratados em apenas um semestre, alguns deles não triviais e não encontrados na literatura atual.

Convém ressaltar que a estrutura curricular da licenciatura em Matemática da USP São Paulo permite que os alunos completem o curso sem estudar conteúdos especificamente relacionados à teoria de grupos. Por não fazer parte das disciplinas obrigatórias do curso, a teoria de grupos é abordada somente em ‘Tópicos de grupos e aplicações’, disciplina optativa – ou seja, apenas alunos que desejam se aprofundar no assunto têm contato com essa teoria.

6.2. UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAMPUS SÃO CARLOS

Na USP São Carlos, o curso de licenciatura em Matemática tem duração de quatro anos, em tempo integral. Seu objetivo é formar professores de Matemática para o ensino fundamental e o médio e também futuros pesquisadores e docentes do ensino superior nas áreas de Educação/Educação Matemática, Matemática e afins.

O aluno opta entre a licenciatura e o bacharelado a partir do quarto período letivo. Assim, os três primeiros semestres são comuns a ambas as habilitações, já

incluindo algumas disciplinas de caráter pedagógico, o que possibilita ao aluno um amadurecimento sobre as possíveis carreiras a desenvolver com cada habilitação.

Destacamos a disciplina 'Álgebra I', de quatro créditos, sugerida para o quinto período (Quadro 6.2).

Quadro 6.2. Disciplina 'Álgebra I'.

<u>Carga horária:</u> 60 h <u>Objetivo:</u> fornecer ao aluno de matemática uma formação mais abrangente em Álgebra. <u>Programa da disciplina:</u> Estruturas algébricas básicas: grupos. Anéis e corpos. Definição e exemplos. Grupos: grupo abeliano e subgrupo. Ação de grupo, órbita e estabilizador. Morfismos de grupos; isomorfismos. Grupo linear, especial, ortogonal e especial ortogonal. Grupo simétrico, alternante, diedral e cíclico. Classes laterais e Teorema de Lagrange: Classes laterais. Teorema de Lagrange: Partição de um grupo em classes laterais, índice. Corolários e aplicações. Ação de grupos: órbitas, mudança de base, teorema da órbita-estabilizador. Fórmula de Burnside para número de órbitas; aplicações para combinatória. Fórmula de Classe; aplicações para estrutura de p-grupos. Teoremas de Sylow e aplicações. Grupo quociente: subgrupo normal e grupo quociente. Teorema do isomorfismo. Teorema da correspondência Produtos: Produto direto. Enunciado do teorema de estrutura de grupos abelianos finitamente gerados. <u>Método:</u> exposição em aulas e fixação através de exercícios, com a orientação do professor. <u>Bibliografia:</u> ARTIN, M. <i>Algebra</i>. Boston, MA: Pearson Education, 2011. GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. <i>Álgebra: um curso de introdução</i>. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1988. GONÇALVES, A. <i>Introdução à álgebra</i>. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

Fonte: <<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=55&codcur=55030&codhab=300&tipo=N>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Embora o projeto político pedagógico da licenciatura em Matemática explicita que os três primeiros semestres sejam comuns à licenciatura e ao bacharelado em Matemática, ao comparar a grade curricular dos dois cursos observamos que apenas os dois primeiros semestres são comuns. A disciplina 'Álgebra I', sugerida para o quinto semestre na licenciatura comparece no bacharelado no terceiro semestre, exatamente com o mesmo programa (Quadro 6.2).

Tendo em vista que a licenciatura pretende também formar profissionais que atuarão no ensino básico, e o bacharelado formar pesquisadores na área de Matemática, esperávamos que fossem explicitados objetivos diferenciados para cada tipo de formação profissional.

A falta de explicitação dos objetivos e das atividades nos leva a inferir que os elementos norteadores do curso acabam ficando a cargo do professor que ministra a disciplina, o que não garante a necessária articulação entre conteúdos e a prática do futuro professor.

6.3. UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, *CAMPUS* BAURU

Na Unesp Bauru, o curso de licenciatura em Matemática, que é ofertado somente no período noturno, tem duração de quatro anos e visa preparar professores de Matemática para o exercício do magistério no ensino fundamental e no médio. (O *campus* não oferece bacharelado.)

Segundo os responsáveis pela proposta do curso, para que esse objetivo seja alcançado é necessário que os futuros professores de Matemática tenham sólida formação em educação, em Matemática e em Educação Matemática:

A articulação das disciplinas no currículo procura romper a divisão estanque entre as chamadas disciplinas de conteúdo específico versus disciplinas pedagógicas, para possibilitar a adequação intelectual entre o conteúdo programático e o universo de conhecimentos do professor, necessários ao bom desenvolvimento do magistério nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio.³¹

As disciplinas de conteúdo específico devem, portanto, desenvolver habilidades e competências básicas nos futuros professores para que estes tenham condições de proporcionar um ensino adequado a seus alunos.

De interesse em nossa pesquisa, consta a disciplina obrigatória 'Estruturas algébricas II', de 60 h, alocada no sexto período, que aborda temas relacionados à teoria de grupos (Quadro 6.3).

³¹ Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/graduacao/ppc-matematica-1506.pdf>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Quadro 6.3. Disciplina ‘Estruturas algébricas II’.

Carga horária: 60 h

Objetivo: fundamentar os conjuntos numéricos, entre outros, como estruturas munidas de operações que satisfazem determinadas condições; enfatizar as estruturas algébricas de grupo, anel e corpo e seus principais resultados; estudar as relações entre tais estruturas, com foco nos homomorfismos e isomorfismos e os resultados fundamentais a eles relacionados.

Programa da disciplina: 1. Operações: propriedades das operações, estruturas.

2. Grupos: definições e exemplos. Subgrupos. Produto de grupos e grupos quociente, Homomorfismos de grupos. 3. Anéis: definição e exemplos. Subanéis ideais. Produto de anéis e anéis quociente. Homomorfismos de anéis. Corpos.

Metodologia: aulas expositivas com resolução de exercícios em sala de aula; listas de exercícios; trabalhos desenvolvidos por grupos.

Bibliografia:

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. *Álgebra moderna*. 4. ed. reform. São Paulo: Atual, 2003. 6ª reimpressão de 2011.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H.A. *Estruturas Algébricas*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013.

Fonte: <<http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/graduacao/ppc-matematica-1506.pdf>>p. 104. Acesso em: 26 jul. 2018.

Ao analisarmos os objetivos da disciplina ‘Estruturas algébricas II’, observamos que se limitam ao domínio dos conteúdos, com ênfase na relação existente entre as estruturas algébricas apresentadas, sem preocupação explícita de estabelecer relação com conteúdos que são abordados no ensino médio e no fundamental – embora o projeto pedagógico ressalte a importância da relação entre os conteúdos aprendidos na licenciatura e a realidade do ensino fundamental e do médio.

6.4. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Na UFMG, o curso de Matemática é oferecido nas modalidades de licenciatura (nos períodos diurno e noturno) e bacharelado (somente diurno), ambos com duração de oito semestres. No diurno, somente no terceiro período o aluno pode optar entre licenciatura e bacharelado. Há disciplinas comuns às duas modalidades e outras que lhes são específicas.

A licenciatura em Matemática da UFMG visa preparar profissionais que atuarão no ensino fundamental, no médio e também no superior. Observamos que nas Diretrizes Curriculares Nacionais não há menção sobre atuação do licenciado no Ensino Superior.

Constatamos que não se abordam explicitamente conteúdos da teoria de grupos nas disciplinas obrigatórias na licenciatura. Somente no sétimo período do bacharelado a teoria de grupos é focalizada, na disciplina ‘Grupos e corpos’ (Quadro 6.4). Além das obrigatórias, o licenciando deve cursar cinco disciplinas optativas, entre as quais figura ‘Grupos e corpos’. Os objetivos e a metodologia da disciplina não constam no *site* da instituição.

Quadro 6.4. Disciplina ‘Grupos e corpos’.

Carga horária: 4 h semanais.

Programa: 1. Grupos: definição e exemplos, subgrupos, teorema de Lagrange, subgrupos normais, grupos quociente, homomorfismos, teoremas de isomorfismo, ações e representações de grupos, os teoremas de Sylow. Grupos solúveis. 2. Grupos de permutações: o grupo simétrico S_n de grau n , a estrutura cíclica das permutações, o teorema de Cayley, classes de conjugação, subgrupos normais de S_n , a simplicidade, o subgrupo alternado A_n , $n > 4$. 3. Extensões de corpos: subcorpos, extensões finitas, algébricas e transcendentais. Polinômios: raízes e irreducibilidade, corpos de decomposição de um polinômio. Corpos finitos. 4. Elementos da teoria de Galois. O grupo de automorfismos de um corpo e o corpo fixo por um de seus subgrupos; subcorpos intermediários de uma extensão. A correspondência entre grupos e corpos: o teorema fundamental da teoria de Galois. Solubilidade por radicais: extensões radicais e o critério de Galois.

Bibliografia:

GALLIAN, J. *Contemporary abstract algebra*, 3rd ed, D. C. Heath.

HUNGERFORD, T. W. *Abstract algebra: an introduction*, 2nd ed, Saunders College.

ARTIN, M. *Algebra*, Prentice-Hall 1991.

HERNSTEIN, I. *Topics in algebra*, 3rd ed.

LANG, S. *Algebra*. Addison-Wesley, 1972.

Fonte: <<http://www.mat.ufmg.br/site/ementas/>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Como a disciplina visa atender tanto a licenciatura quanto o bacharelado, e essas formações tem objetivos distintos, o plano de ensino é falho em não explicitá-los para cada um dos cursos.

Como esta disciplina é optativa, concluímos que nem todo licenciando completa o curso tendo trabalhado de forma específica com conteúdos relacionados à teoria de grupos.

6.5. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Na Unicamp, há cursos de Matemática em três modalidades: bacharelado, licenciatura e Matemática aplicada e computacional. A licenciatura é oferecida no período noturno, em nove semestres. No *site* da universidade consta:

Licenciatura em matemática

Formando professores, pesquisadores e alunos estimulados a envolver-se em programas de iniciação científica e iniciação à docência. Os alunos dos cursos de licenciatura em matemática se preparam para a carreira de professor de matemática nos ensinos fundamental e médio, embora possam continuar seus estudos na pós-graduação, tanto na área de educação matemática quanto em matemática ou áreas afins.³²

É interessante observar que o curso de licenciatura, além de formar professores de Matemática para a educação básica, visa que este também possa atuar como pesquisador. A disciplina ‘Elementos de Álgebra’ (Quadro 6.5), obrigatória, com carga de 60 h, é oferecida no oitavo período da licenciatura.

Quadro 6.5. Disciplina ‘Elementos de álgebra’.

Ementa: Grupos: Teorema de Lagrange e Teorema de Isomorfismo. Exemplos: grupos cíclicos, simétricos e diedrais. Anéis e corpos: domínios euclidianos, domínios de ideais principais e fatoração única. Corpo de frações. Aritmética do anel dos polinômios. Corpos numéricos e finitos. Programa: Grupos, subgrupos. Propriedades. Exemplos. 2. Teorema de Lagrange e aplicações. 3. Subgrupos normais e homomorfismos. Teorema sobre o isomorfismo. Aplicações. 4. Grupos cíclicos e diedrais. 5. Grupos simétricos. 6. Grupos de ordem pequena. 7. Anel: definição e propriedades básicas. Ideal. Exemplos. 8. Homomorfismos e teorema sobre o isomorfismo. Aplicações. 9. Domínios e corpos. Exemplos e propriedades. 10. Domínios euclidianos. 11. Domínios de ideais principais. 12. Domínios de fatoração única. 13. Corpo de frações. 14. Anel dos polinômios. 15. Aritmética do anel dos polinômios de uma variável. 16. Corpos numéricos. Corpos finitos. Extensão de corpos. Bibliografia: S. Lang, <i>Estruturas algébricas</i>, Livro Técnico, 1972. Herstein, <i>Topics in Algebra</i>, Wiley, 1975. Garcia e Y. Lequain, <i>Elementos de álgebra</i>, Projeto Euclides, IMPA, 2002.
--

Fonte: <https://www.ime.unicamp.br/graduacao/licenciaturamatematica/curriculo#_Toc406578236>. Acesso em: 26 jul. 2018.

‘Elementos de álgebra’ é ministrada somente na licenciatura, mas em seu plano de ensino nada consta sobre seu objetivo e importância na formação do professor.

6.6. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

A licenciatura em Matemática da UFRJ é oferecida pelo Instituto de Matemática, tendo estrutura curricular independente da do curso de bacharelado em Matemática.

³² Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/graduacao/licenciatura-matematica>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

O objetivo do curso é capacitar o licenciado a exercer a profissão de professor de Matemática no ensino fundamental e no médio. Sua grade curricular inclui um conjunto de disciplinas voltadas à prática como componente curricular, com o propósito de permitir que o futuro professor tenha contato com a realidade de sua atividade profissional.

Faz parte do currículo a disciplina ‘Estruturas algébricas’ (Quadro 6.6), optativa de 60 h, geralmente alocada no quinto período do curso.

Quadro 6.6. Disciplina ‘Estruturas algébricas’.

Disciplina: Estruturas algébricas

Carga-horária: 60 horas (45 horas teóricas e 15 horas práticas)

Ementa: Corpos ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, p primo). Extensões algébricas de $\mathbb{Q}$. Grau de uma extensão. Multiplicidade do grau. Construções com régua e compasso. Grupos. Grupos de simetrias de polígonos regulares e grupos de permutações. Subgrupos. Grupos finitos. Teorema de Lagrange. Grupo linear geral sobre $\mathbb{R}$. Grupos que preservam formas bilineares. Grupos ortogonais. Movimentos rígidos. Grupo euclidiano.

Bibliografia básica:

Gonçalves, Adilson. Introdução à álgebra, IMPA, 1999.

Garcia, A e Lequain. Yves. Álgebra: um curso de Introdução, IMPA, 1988.

Fonte: <<http://www.im.ufrj.br/licenciatura/Titula/EstruturasAlg-pagina.htm>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Esta disciplina se enquadra no grupo denominado ‘Estudos avançados’ e 15 h de sua carga são destinadas à prática de ensino como componente curricular (Quadro 6.7).

Quadro 6.7. Distribuição da carga horária da disciplina ‘Estruturas algébricas’.

Código	Nome	Créditos	Carga horária	
			Teórica	Prática
MAW 353	Estruturas algébricas	4	45	15

Fonte: <<http://www.im.ufrj.br>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Ressalte-se que, embora 15 h de sua carga total sejam destinadas à prática de ensino como componente curricular, o *site* da UFRJ não explicita como essas horas são desenvolvidas.

Observamos, assim, como nas universidades antes mencionadas, que os alunos de licenciatura em Matemática da UFRJ podem completar o curso sem chegarem a trabalhar especificamente com conteúdos relacionados à teoria de grupos, visto que a única disciplina que os aborda é optativa.

6.7. INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO, *CAMPUS* SÃO PAULO

O objetivo principal da licenciatura em Matemática no IFSP, *campus* São Paulo, é formar professores de Matemática para a educação básica. O *site* da instituição descreve o seguinte perfil profissional do licenciado:

O curso de licenciatura em matemática visa à formação do professor, capacitando-o para compreender a matemática dentro da realidade educacional brasileira nos contextos social, cultural, econômico e político; para dominar em profundidade e extensão o conteúdo de matemática na sua organização estrutural e sequencial, para garantir a integração entre teoria e prática; para buscar as relações entre as diversas áreas do conhecimento, por meio de uma metodologia interdisciplinar e contextualizada, tanto na sua ação educativa como em aperfeiçoamento de estudos; e para ter consciência da importância da educação continuada, da ética no trabalho do professor, da sua participação na definição da política educacional, que levam à revalorização do trabalho docente.³³

São previstas “412,5 h” de prática como componente curricular (PCC) distribuídas ao longo dos oito semestres do curso, de modo a assegurar momentos específicos para o desenvolvimento de conhecimentos pertinentes à futura prática docente.

As disciplinas de licenciatura em Matemática são divididas entre as de conhecimentos específicos do ensino de Matemática, conhecimentos pedagógicos e curriculares, conhecimentos específicos de Matemática, conhecimentos interdisciplinares e comunicação acadêmica e científica. Dentre as de conhecimento específico de Matemática consta ‘Álgebra’ (Quadro 6.8). Dessa forma, os elaboradores do plano de ensino da IFSP contemplaram as categorias de conhecimento do professor descritas por Shulman (1986): entendemos que o conhecimento do conteúdo descrito por Shulman corresponde aos conhecimentos específicos de Matemática do IFSP; o conhecimento pedagógico do conteúdo descrito por Shulman corresponde aos conhecimentos específicos do ensino de Matemática e conhecimentos pedagógicos do IFSP; e o conhecimento curricular descrito por Shulman corresponde aos conhecimentos curriculares e conhecimentos interdisciplinares do IFSP.

³³ Disponível em: <<https://spo.ifsp.edu.br/matematica>>. Acesso em: 26 jul. 2018.

Quadro 6.8. Plano de ensino da disciplina 'Álgebra'.

Carga horária: 57 horas (43,25 presenciais e 13,75 PCC)

Ementa: A disciplina aborda uma análise das estruturas algébricas visando reconhecer propriedades semelhantes entre diferentes tipos de objetos matemáticos, que diferem por sua natureza, mas não estruturalmente. Além disso, explora aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica.

Objetivos: Compreender a organização de objetos matemáticos estruturalmente. Refletir sobre as noções de álgebra na educação básica, do ponto de vista estrutural. Consolidar e aprofundar conhecimentos acerca de conceitos envolvendo polinômios de uma variável que é um dos temas relevantes da educação básica. Aprofundar os conhecimentos acerca dos conjuntos numéricos estruturalmente.

Conteúdo programático:

I. Congruências e inteiros módulo m .

II. Relações: Definição e exemplos; Relação de equivalência; Classe de equivalência; Conjunto quociente; Relação de ordem; Construção dos racionais.

III. Anéis: definição e exemplos; Domínio de integridade e corpo; Subanéis; Ideais e anéis quociente; Homomorfismos de anéis; Corpo de frações de um domínio.

IV. Polinômios em uma variável: Definição e exemplos; Algoritmo da divisão; Ideais principais e M.D.C.; Polinômios irredutíveis e Ideais maximais; Fatoração única; Critério de Eisenstein.

V. Grupos: Definição e exemplos; Subgrupos.

VI. Atividades Formativas: Estudo de erros comuns no processo de ensino e aprendizagem na educação básica em manipulações de expressões e equações algébricas, por meio da leitura de artigos científicos e observações realizadas no estágio supervisionado; explorar como diferentes objetos matemáticos que possuem a estrutura de anel são apresentados em livros didáticos da educação básica e em propostas curriculares.

Bibliografia básica:

GONCALVES, Adilson. Introdução à álgebra. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. Elementos de álgebra. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

DOMINGUES, Higino Hugo Eros; IZZO, Gelson. Álgebra moderna. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

Fonte:

<https://spo.ifsp.edu.br/images/phocadownload/DOCUMENTOS_MENU_LATERAL_FIXO/GRADUACAO/LICENCIATURA_MATEMATICA/2018/SPO_Licenciatura_em_Matematica_PPC_modelo_novo.pdf>. p. 175. Acesso em: 1 ago. 2018.

Observamos tratar-se de um currículo extenso para uma disciplina de 57 h. Além disso, a inserção de elementos da teoria de grupos é sucinta, constando tão somente a definição e exemplos de grupo e subgrupos.

O plano de ensino explicita preocupação com o ensino por meio de atividades formativas. No entanto, entre tais atividades consta somente a exploração da estrutura de anéis, o que não impede que o professor, ao explorar essa estrutura, também dê atenção à estrutura de grupo aditivo.

6.8. CONSIDERAÇÕES SOBRE OS PLANOS DE ENSINO APRESENTADOS

Todos os projetos pedagógicos dos cursos analisados apresentam como objetivo do curso de licenciatura em Matemática formar professores de Matemática que atuarão na educação básica, sendo que alguns projetos especificam para isso o ensino fundamental II (ou a segunda fase do ensino fundamental) e o ensino médio. O projeto da USP São Carlos inclui entre seus objetivos preparar o licenciando para a pós-graduação. O da Unicamp inclui a iniciação científica e a iniciação à docência, explicitando a importância da iniciação científica nesse curso.

As únicas instituições que não ministram curso de bacharelado em Matemática são a UNESP Bauru e o IFSP. As outras cinco oferecem tanto bacharelado quanto licenciatura em Matemática.

Os projetos pedagógicos dos cursos das sete instituições apresentam disciplinas que tratam de conteúdos da teoria de grupos (Quadro 6.9). Tais disciplinas têm diferentes denominações e são ministradas em 60 h, exceto no IFSP, em que a carga é de 57 h.

Quadro 6.9. Disciplinas da teoria de grupos nas licenciaturas pesquisadas.

Instituição	Denominação da disciplina	Obrigatória	Optativa
USP, São Paulo	Tópicos de grupos e aplicações		Licenciatura e bacharelado
USP, São Carlos	Álgebra I	Licenciatura e bacharelado	
Unesp, Bauru	Estruturas algébricas II	x	
UFMG	Grupos e corpos		Licenciatura e bacharelado
Unicamp	Elementos de álgebra	x	
UFRJ	Estruturas algébricas		x
IFSP, São Paulo	Álgebra	x	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Unicamp e UFRJ, as propostas curriculares da licenciatura e do bacharelado são independentes. Na USP São Paulo, USP São Carlos e UFMG, há disciplinas comuns a ambos os cursos, dentre elas as que tratam de tópicos da teoria de grupos.

Somente na USP São Paulo e na UFMG as disciplinas que focalizam tais tópicos explicitam isso em seus títulos. No entanto, essas disciplinas são optativas e

comuns a ambos os cursos. O fato de serem optativas abre a possibilidade de que o licenciando em Matemática não venha a cursá-las! E o fato de serem comuns a ambos os cursos não garante que o futuro professor da educação básica tenha tido a oportunidade de compreender tal conteúdo matemático e articulá-lo com aquele que irá ensinar. Resta a dúvida sobre que tipos de aplicações são propostas no curso da USP São Paulo.

As disciplinas que tratam da teoria de grupos nas licenciaturas da Unesp de Bauru, da Unicamp e do IFSP são obrigatórias e específicas da licenciatura, o que poderia permitir que esse curso relacione o conteúdo da disciplina com assuntos da educação básica, preparando o futuro professor para o exercício da profissão. Na USP São Carlos, a disciplina é obrigatória e comum ao bacharelado e à licenciatura. Na UFRJ, é optativa e específica da licenciatura.

Somente nos planos de ensino da USP São Paulo, da USP São Carlos e do IFSP constam os objetivos das disciplinas que tratam de tópicos da teoria de grupos. Os planos de ensino da USP São Paulo, USP São Carlos e Unesp Bauru indicam como metodologia um ensino tradicional, com aulas expositivas e listas de exercícios.

As bibliografias descritas nos planos de ensino são variadas (Quadro 6.10).

Quadro 6.10. Obras incluídas nas bibliografias descritas nos planos de ensino.

Autores	USP São Paulo	USP São Carlos	Unesp Bauru	UFMG	Unicamp	UFRJ	IFSP São Paulo
Garcia, A.; Lequain, Y.		x			x	x	x
Gonçalves, A.		x				x	x
Domingues, H.; Iezzi, G.			x				x
Artin, M.		x		x			
Hernstein, I.				x	x		
Lang, S				x	x		
Grove, I. ; Benson, C.	x						
Miller, W. Jr.	x						
Armstrong, M.A.	x						
Nascimento, M.; Feitosa, H.			x				
Gallian, J.				x			
Hungerford, T. W.				x			

Fonte: Dados da pesquisa.

As obras mais citadas são de Garcia e Lequain (quatro instituições) e de Gonçalves (três), ambas pertencentes ao projeto Euclides do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Tal projeto abrange “assuntos abordados nos cursos de pós-graduação e de áreas em que se realizam pesquisas no país”³⁴.

No prefácio da obra de Garcia e Lequain, de 1988, consta que esta surgiu de notas de aula utilizadas nos cursos de introdução à álgebra oferecidos pelo IMPA, a fim de se tornar livro de referência em cursos de álgebra de universidades brasileiras – ou seja, não se descreve explicitamente uma preocupação com a formação de professores.

A obra de Gonçalves, de 1979, também proveio de experiências em sala de aula na Universidade de Brasília e na UFRJ. Tem por objetivo apresentar um *material elementar* de dificuldade crescente, um texto de álgebra em nível de *bacharelado ou licenciatura*. No entanto, no livro não encontramos referências à formação de professores.

Dos 12 livros indicados, quatro são de autores brasileiros. As obras de Domingues e Iezzi, e a de Nascimento e Feitosa são livros didáticos, portanto destinadas especificamente ao ensino universitário. No entanto, observamos que a USP São Paulo e a UFMG trazem em seus planos de ensino apenas bibliografia estrangeira, ao passo que a Unesp, a UFRJ e o IFSP indicam apenas bibliografia nacional. Já na USP São Carlos e a Unicamp indicam-se obras nacionais e estrangeiras.

O Quadro 6.11 sumariza os conteúdos de teoria de grupos que constam nos planos de ensino.

³⁴ Disponível em: <<https://impa.br/publicacoes/projeto-euclides/>>. Acesso em: 18 out. 2018.

Quadro 6.11. Conteúdos de teoria de grupos mencionados nos planos de ensino.

Tópico	USP São Paulo	USP São Carlos	Unesp Bauru	UFMG	Unicamp	UFRJ	IFSP São Paulo
Definição e exemplos de grupos	x	x	x	x	x	x	x
Subgrupos	x	x	x	x	x	x	x
Teorema de Lagrange	x	x		x	x	x	
Subgrupos normais	x	x		x	x		
Grupos quociente	x	x	x	x			
Homomorfismo e isomorfismo de grupos	x	x	x	x	x		
Classes laterais	x	x					
Produto direto	x	x	x				
Grupos de permutação	x			x		x	
Grupos de simetria		x		x	x	x	
Grupos cíclicos	x	x			x		
Grupo linear		x				x	
Grupo ortogonal	x	x				x	
Teorema de Cayley	x			x			
Outros	x	x		x	x	x	

Fonte: Dados da pesquisa.

Os conteúdos presentes em mais da metade dos planos de ensino, grafados em negrito, são: definições e exemplos de grupos, subgrupos, teorema de Lagrange, subgrupos normais, grupos quociente, homomorfismo e isomorfismo de grupos e grupos de simetria.

Os demais tópicos listados aparecem em dois ou três dos planos de ensino pesquisados. No campo “outros”, tópicos que aparecem em apenas um dos planos de ensino pesquisado.

Os elementos analisados indicam que os planos de ensino em sua maioria não explicitam a necessidade de articular o que se aprende em teoria de grupos com a prática do futuro professor de Matemática da escola básica.

No capítulo seguinte apresentamos a importância da teoria de grupos na licenciatura em matemática sob o ponto de vista dos entrevistados.

7. A IMPORTÂNCIA DA TEORIA DE GRUPOS NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA SOB O PONTO DE VISTA DOS PROFESSORES ESPECIALISTAS E/OU EDUCADORES MATEMÁTICOS ENTREVISTADOS

Analisaremos aqui as entrevistas que visaram evidenciar quais conteúdos da teoria de grupos são vistos pelos pesquisadores em Matemática, pesquisadores em Educação Matemática e professores do ensino superior como de abordagem imprescindível em um curso de licenciatura em Matemática.

Os entrevistados serão designados por nomes pelas primeiras letras do alfabeto. Embora as entrevistas tenham sido integralmente transcritas, reproduziremos aqui apenas trechos que ajudam a responder nossa questão de pesquisa.

7.1. A PROFESSORA ANA

Contato e ambiente no qual se deu a entrevista

Ao tomar ciência de nossa intenção em entrevistá-la, a professora Ana prontamente acedeu ao pedido. Combinamos o encontro para 14 de agosto de 2017, em sala da universidade em que ela trabalha.

No horário e local combinados, nos encontramos e, após os cumprimentos, foi-lhe reiterado o objetivo da pesquisa e lhe foi entregue o TCLE, que ela assinou. A professora permitiu a gravação da entrevista.

Formação profissional e acadêmica

A professora Ana, ao terminar o ensino fundamental, cursou magistério, que na época era uma das opções do ensino médio. É licenciada e bacharel em Matemática. Sua dissertação de mestrado acadêmico versou sobre álgebra não associativa, um tipo de estrutura algébrica. Realizou seu doutorado no Programa de Psicologia da Educação.

Ana iniciou sua carreira profissional como professora do ensino médio em uma escola particular, quando ainda cursava o quarto ano da licenciatura. Logo após licenciar-se em Matemática, atuou também no ensino superior lecionando 'Álgebra linear', 'Geometria analítica' e 'Álgebras I, II e III', entre outras disciplinas, nas décadas de 1980-90.

No início de 2000, começou a lecionar também na pós-graduação, e desde então trabalhou como professora e pesquisadora em Educação Matemática, especificamente na área de álgebra.

O ensino da teoria de grupos na licenciatura

A professora concorda com o trecho proposto nas diretrizes, afirmando que a formação do professor deve ir além dos conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente articulados que compõem um campo de ampliação e aprofundamento da área. Para ela, o futuro professor de Matemática não pode saber apenas o que ensina, pois isso é muito pouco.

Ao analisar a lista de conteúdos da teoria de grupos, Ana concorda que a definição de grupo deve constar obrigatoriamente em ementas de disciplinas de álgebra na licenciatura, justificando que a teoria de grupos é importante e há tópicos da educação básica que decorrem dessa teoria, e até mesmo tem com ela ligação direta. Como exemplo, cita o fato de que alguns conjuntos numéricos trabalhados na educação básica apresentam estrutura de grupo, como é o caso dos grupos dos números: racionais, reais e complexos, que, munidos da operação de adição, são grupos comutativos.

Ana destaca que homomorfismo e isomorfismo de grupos são importantes, pois possibilitam ao professor trabalhar com um deles, e os resultados podem ser adaptados a outros grupos isomorfos, ou seja, é equivalente trabalhar com um ou com outro.

Ana considera que os grupos cíclicos são muito interessantes de trabalhar no curso de licenciatura em Matemática. Como exemplo, comenta que se *"partirmos do conjunto $\{1, -1, i, -i\}$ de números complexos, ele, munido da operação multiplicação, é cíclico, como também os conjuntos Z_2, Z_3 , quer dizer, um Z_i em que o índice é um número primo"*.

Considera que os grupos de permutação também devem ser abordados, *“principalmente a parte das simetrias nas figuras, pois além de associar a geometria à álgebra, também tem a relação dos eixos de simetria que geram as rotações”*. Acrescenta que esses conteúdos têm relação direta com a escola básica.

A entrevistada prossegue, considerando que grupos abelianos finitos devem ser trabalhados com os licenciandos, *“pois são grupos comutativos gerados por um número finito de elementos”*. Tem a mesma opinião sobre grupos de transformações no plano e no espaço, pois *“têm ligação com a educação básica, quando é trabalhada a homotetia”*, e considera os subgrupos também importantes, pois *“para verificar se algo é grupo, podemos olhar se ele é subgrupo. Afinal, todo subgrupo é grupo”*. Embora a entrevistada não explicita os motivos, afirma que o grupo quociente também tem importância.

A professora Ana conclui sugerindo que a essência está nos itens apontados acima, mas que *“o professor da disciplina tem que ver o que é essencial na ementa para atingir o objetivo visado pelo curso”*.

7.2. O PROFESSOR BRUNO

Contato e ambiente no qual se deu a entrevista

Nosso primeiro contato com o professor Bruno se deu por *e-mail*, no qual lhe apresentamos o objetivo de nossa pesquisa. Ele prontamente aceitou o pedido de conceder uma entrevista. Combinamos nosso encontro para 11 de abril de 2018, em sua sala na faculdade em que trabalha.

No horário e local combinado, após as apresentações e cumprimentos, foi-lhe reiterado o objetivo da pesquisa e lhe foi entregue o TCLE o qual assinou. Concordou com a gravação da entrevista em áudio.

Formação profissional e acadêmica

O entrevistado é bacharel, mestre e doutor em Matemática. Atualmente é professor titular de uma universidade pública no estado de São Paulo. É especialista nas teorias de grupos e de anéis. Leciona álgebra, tendo ministrado a teoria de

grupos na graduação tanto na licenciatura quanto no bacharelado, bem como na pós-graduação em Matemática.

O ensino da teoria de grupos na licenciatura, segundo o professor Bruno

Frente à questão “O que da teoria de grupos deve ser tratado em um curso de licenciatura em Matemática?”, o professor, com expressão de reprovação, comenta que muitas vezes as pessoas acham que na licenciatura deve ser tratado aquilo que o professor depois ensinará. Nesse momento, lhe entreguei o trecho das diretrizes, que ele então leu, comentando a seguir estar perfeitamente de acordo com o texto, reiterando que *“a formação do licenciado deve ir além do que vai ensinar”*.

Afirma que a teoria de grupos é um dos assuntos centrais da álgebra e da Matemática atuais, *“tanto pela intensidade da pesquisa que está sendo desenvolvida, como a quantidade de aplicações da teoria de grupos em todas as direções”*.

Acrescenta que antes de se ensinar uma teoria algébrica de natureza abstrata é preciso apresentar uma grande quantidade de exemplos, e afirma que tais exemplos vêm de muitas direções. *“Historicamente, o primeiro exemplo significativo é o de grupo de permutações. Essa foi a motivação, foi aí que começou a teoria de grupos.”* Considera que esse tópico seguramente deve ser abordado, *“pois, no fundo, ali estão todas as ideias que vão aparecer na teoria”*.

Bruno comenta que sempre trata de grupos de matrizes, matrizes inversíveis, matrizes de determinante 1 e matrizes triangulares superiores, *“especialmente porque se o aluno for aprofundar mais um pouco, elas são necessárias”*. Além desses conceitos, cita também os grupos de transformações geométricas – grupo do quadrado, do retângulo, do triângulo equilátero –, justificando que *“no fundo, ali escondido, está o segredo da cristalografia”*. Ressalta que no curso de licenciatura é necessário apresentar exemplos mais elementares:

[...] e, obviamente, deve ser trabalhado o conceito de homomorfismo e isomorfismo de grupos, pois isso também está na essência do tema. Quando se estuda algum campo da Matemática, se estuda algum tipo de conjunto com uma propriedade e as funções que preservam a propriedade. Na teoria de grupos o que importa são as funções que preservam a operação. Esses são os homomorfismos.

O entrevistado conta que, embora o teorema de Cayley não seja muito útil do ponto de vista da teoria – *“pois se você tem um grupo de tamanho n e uma representação dele por permutações, e seu subgrupo está dentro de um conjunto tamanho n fatorial; então você perde ao invés de ganhar”* –, historicamente é interessante, porque mostra que a teoria de grupos começou com as permutações e na verdade as *“permutações contêm toda a teoria de grupos finitos”*.

Outro tópico que Bruno informa discutir em aula são os grupos de raízes enésimas da unidade, *“porque no fundo aí está a essência dos grupos cíclicos, pois estes são os átomos que constroem os outros grupos”*. Acrescenta que a noção de grupo quociente é também fundamental, além do teorema da estrutura para grupos abelianos finitos. Completando, Bruno afirma ser importante garantir que no curso de licenciatura haja dois ou três teoremas significativos, *“porque tem muita gente, sobretudo quando dá aula para a licenciatura, que fica nas definições e exemplos, e só fazer isso e não fazer nada é a mesma coisa”*. Afirma que alguma coisa significativa, *“que mostre a força da teoria, tem que ser feita”*.

Nesse momento, foi-lhe apresentada a lista de conteúdos da teoria de grupos para que comentasse algum dos assuntos tratados em diversas licenciaturas em, os quais, porém, ele não tivesse ainda abordado. Examinando a lista, o entrevistado sugeriu que grupo de pontos cristalográficos, grupo reticular e grupos ortogonais poderiam comparecer apenas como exemplos.

Ao longo da entrevista, Bruno insistiu na presença da teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática, justificando essa inclusão pela importância histórica e de suas intersecções com várias áreas da própria Matemática e de outras ciências. Por exemplo, cita que:

[...] os grupos apareceram quando muitos estudiosos como, Lagrange, Ruffini, Galois, queriam resolver equações por radicais. Depois começaram a achar grupos interessantes na geometria. Hoje em dia, por exemplo, não se pode estudar cristalografia se não se sabe teoria de grupos, não se pode estudar mecânica quântica se não se conhece teoria de grupos, e mais recentemente, nos últimos 30 anos, coisa assim, tem-se feito muita teoria de códigos usando grupos.

Finalizando a entrevista, o professor espontaneamente conta que quando era mais jovem achava, como a maioria de nós, professores de Matemática, quando ensinamos álgebra, que:

[...] é um bom professor de álgebra quando você faz tudo limpinho, elegante, e hoje em dia ele acha que você é um bom professor de álgebra quando você define algo e o aluno fala: “Ahhhh, é!...”. Quando o aluno pensa “Poxa, é isso mesmo! Que legal! Claro!” Isso é o mais difícil!. E que lhe pareça [ao aluno] tudo natural. Essa é minha preocupação. [...] minha preocupação é dar voltas às vezes pela história, às vezes pela própria técnica, para que tudo pareça natural. E eu acho que isso é o essencial, especialmente para professores, porque o próprio professor aprende que as coisas nunca são regras: sempre são por alguma razão.

7.3. O PROFESSOR CAIO

Contato e ambiente no qual se deu a entrevista

Nosso primeiro contato com o professor Caio foi feito por *e-mail*, no qual apresentamos o objetivo de nossa pesquisa e lhe perguntamos se teria disponibilidade em participar, explicando-lhe que essa participação se daria por meio de uma entrevista tanto presencial quanto, conforme o caso, por meio do aplicativo Skype. O professor prontamente respondeu por *e-mail*, adiantando algumas contribuições:

[...] na minha tese, que envio em anexo, descrevo algumas aulas sobre grupos no curso de licenciatura dado no final da década de 2000. Envio o programa atual de ‘Álgebra I da universidade em que atuo, em anexo. Da minha parte, os tópicos que acredito serem essenciais ao curso, com inclusão de grupos de permutação. Espero que o material contribua. Estou à disposição. (E-mail de 22 de novembro 2018.)

Após a leitura dessa mensagem e de seus anexos, consideramos que parte das questões da entrevista já estavam respondidas. Assim, enviamos a ele, por *e-mail*, juntamente com o TCLE, parte do roteiro de entrevista, focalizando conteúdos não tratados pelo professor em sua mensagem anterior.

Quatro dias depois, recebemos novo *e-mail* de Caio, com o TCLE assinado e respostas às questões enviadas. As descrições a seguir baseiam-se em todas essas fontes.

Formação profissional e acadêmica do professor Caio

Caio é licenciado em Matemática e comenta haver cursado licenciatura em Matemática em uma universidade pública da região Norte. Comenta que o programa desse curso foi muito influenciado pelos programas de universidades do Sudeste do Brasil, como a USP.

Iniciou sua carreira docente como professor de Matemática do ensino médio. Quatro anos mais tarde, tendo terminado o mestrado em Matemática, tornou-se professor na universidade em que trabalha. Sua dissertação de mestrado versou sobre álgebra (grupos). Após alguns anos, realizou o doutoramento em educação, apresentando uma tese sobre a história e o ensino do conceito de grupo.

O ensino da teoria de grupos na licenciatura, segundo o professor Caio

Com relação ao trecho das diretrizes, Caio afirma ser favorável a que:

[...] os professores em formação tenham uma visão mais ampliada, overview, dos conteúdos que irão ensinar na educação básica. Em minha modesta opinião, cursos como o de 'Cálculo I' – funções, limites, derivadas, integrais – abordam conteúdos que são fundamentais para propiciar tal competência. Da mesma forma, precisam estudar 'Álgebra linear I', 'Álgebra I' [destaque nosso] e 'Elementos de geometria', que cumprem a mesma função formadora. Disciplinas mais avançadas para a formação de professores da educação básica, como 'Topologia', 'Cálculo de várias variáveis' e 'Variáveis complexas', não têm, explicitamente, esta função formativa.

Dentre os conteúdos listados no Quadro 2.2, o professor indica como essenciais: a definição e exemplos de grupos; grupos cíclicos; subgrupos, grupos de permutações, classes laterais (principalmente os elementos de Z_n), teorema de Lagrange, subgrupos normais e grupos quociente.

Caio afirma que esses conteúdos são importantes, pois permitem ao professor em formação:

[...] uma visão axiomática [estruturada] da álgebra [matemática] que lhes possibilita tratar os problemas matemáticos que surgem no processo de sala de aula de uma forma mais geral e efetiva, ampliando as discussões e minimizando dificuldades de aprendizagem.

O entrevistado aponta que o estudo das classes laterais permite “*ampliação da compreensão das operações das classes residuais estudadas nos cursos de teoria elementar dos números, e que por sua vez generalizam as operações de adição e multiplicação algébricas*”.

Afirma ainda que, de fato, a definição de grupo permite tratar de forma estruturada diversos objetos matemáticos que se “*constituem de um conjunto com uma operação interna que satisfaz propriedades específicas determinadas*”.

Considera que os tópicos listados são os necessários para garantir elementos na formação do professor que:

[...] permitam uma maior compreensão e manuseio da linguagem simbólica característica da matemática atual; proporcionando assim, um refinamento na abordagem, na resolução, na verificação e na comunicação da solução de problemas, no contexto escolar, inferindo melhoria efetiva aos processos de ensino e de aprendizagem.

Caio também destaca que o contato do professor em formação com esses “tópicos [assuntos, conteúdos] se faz necessário, por sua importância na continuidade da formação do professor [pós-graduação] na área de Matemática.

7.4. O PROFESSOR DAVI

Contato e ambiente no qual se deu a entrevista

Nosso contato com o professor Davi foi feito por *e-mail*, em que lhe apresentamos o objetivo de nossa pesquisa, indagando-lhe se teria disponibilidade em participar concedendo uma entrevista. Cinco dias depois, recebemos seu *e-mail*: “Mil desculpas por não ter respondido ainda. Pode contar comigo. Quando fica melhor para você?”. Respondemos que na mesma semana tínhamos disponibilidade para realizar a entrevista por Skype após as 14 h, em qualquer dos dias. Davi respondeu prontamente que poderia ser naquele mesmo dia, 28 de novembro de 2018.

Assim, nos encontramos via Skype às 14 h e, após as apresentações e cumprimentos, reiteramos o objetivo da pesquisa e lhe apresentamos o TCLE, que ele assinou, concordando com a gravação da entrevista em áudio.

Formação profissional e acadêmica do professor Davi

Bacharel, mestre e doutor em Matemática na linha de pesquisa em álgebra, apresentou tese sobre a teoria de grupos. É professor de uma universidade pública na região Centro-Oeste, atuando principalmente nos cursos de licenciatura em Matemática e Matemática Industrial. Tem ministrado disciplinas de álgebra, dentre elas a de teoria de grupos.

O ensino da teoria de grupos na licenciatura, segundo o professor Davi

O entrevistado concorda com o trecho das diretrizes curriculares que lhe apresentamos, afirmando que com certeza, na formação do professor, o conteúdo,

seja qual for, tem que ser visto, se possível, de forma interdisciplinar e, na impossibilidade, que tenha alguma conexão com sua formação ou atuação.

Afirma que o licenciando deve cursar não só disciplinas que diretamente ligadas ao ensino de Matemática na educação básica, mas também ter contato com conteúdos que ampliem seu horizonte matemático, pois para a maturidade Matemática requer aprofundamento: *“o licenciando tem que ser oportunizado de ver mais coisas do que ele vai ensinar. Ele tem que ter mais conhecimento do que o aluno dele”*.

Quando lhe dissemos ter uma lista com os conteúdos de teoria de grupos presentes em planos de ensino de cursos de licenciatura de certas universidades, o professor nos disse que preferia dar sua opinião independentemente da lista. Comentou que:

[...] em geral, nos cursos de licenciatura o aluno precisa ter uma disciplina de álgebra, pois isso está no regimento, nas normas do MEC. Se no curso tem uma disciplina voltada para teoria dos números, o professor pode focar na disciplina de álgebra ou estruturas algébricas ou introdução a álgebra, o nome é indistinto, mas chamando uma disciplina de álgebra, voltada para a licenciatura, primeiramente a definição do que é uma função, o que é uma aplicação, pois isso está totalmente aos conteúdos que os alunos vão trabalhar, porque a operação é também a base para definir um grupo. Então, afirma que antes de definir grupos, tem que rever, significado matemático de: conjunto, operação, conjunto com operação, monoides, semigrupos.

Exemplificou que:

[...] ao rotacionar o cubo mágico para montá-lo, as rotações que se faz chamamos de simetrias, o cubo mágico de um modo físico ele é o mesmo, tem como mudar as cores das faces. Isso você pode fazer também com um triângulo equilátero, você rotula os vértices do triângulo equilátero e pode fazer translação em torno de um eixo ou de outro, você está só trocando o rótulo, o triângulo continua fixo. Isso tem tudo a ver com teoria de grupos, porque essas operações são bijeções, com a operação da composição de funções forma-se um grupo, esse grupo no caso do cubo mágico é o grupo de rubik, no caso do triângulo equilátero é chamado S_3 , grupo de simetria, e no caso do quadrado o diedral.

Continuando, afirmou ser importante que o aluno *“estude função, aplicação, grupo de simetria, grupo de rotação e grupo de matrizes”*, que têm aplicação na física. *“Além de ver somente grupo, subgrupo, acho que pode ir um pouco mais além. Quando o aluno estuda homomorfismo, isomorfismo, ele pode começar a comparar duas estruturas, elas vão ter as mesmas propriedades algébricas se elas são isomorfas. Então é importante também o aluno estudar os teoremas do homomorfismo”*.

Ampliou afirmando que:

[...] o licenciando pode ver também o teorema de Sylow, e também, mesmo que seja só a noção, ver grupos solúveis por exemplo, isso seria o máximo para um aluno da licenciatura ver. Vendo grupos solúveis o aluno pode associar, como Galois, teoria de grupos com a resolução de equações por radicais. Iria verificar que um polinômio de grau maior ou igual a cinco não tem uma fórmula algébrica que o resolva, que dê as raízes, isso poderia ser aprofundado por exemplo em um segundo curso de álgebra. Agora pensando em um curso mais básico, uma introdução as estruturas algébricas, se ele visse até essa parte de homomorfismo de grupos eu acho que seria importante, de anéis até homomorfismo de anéis, de corpos até a teoria de Galois.

7.5. A PROFESSORA EVA

Contato e ambiente no qual se deu a entrevista

Nosso primeiro contato com a professora Eva foi feito via *e-mail*, no qual apresentamos o objetivo da pesquisa, perguntando-lhe se teria disponibilidade para participar por meio de entrevista. A professora prontamente acedeu ao pedido. Combinamos nosso encontro por Skype para 10 de dezembro de 2018.

No horário combinado, nos encontramos por Skype e após as apresentações e cumprimentos foi-lhe reiterado o objetivo da pesquisa. Foi-lhe também apresentado o TCLE, que ela assinou, além de concordar com a gravação da entrevista em áudio.

Formação profissional e acadêmica da professora Eva

A entrevistada graduou-se em engenharia de computação e cursou mestrado e doutorado em Matemática, com dissertação e tese sobre anéis de grupo.

Atualmente é professora e pesquisadora em uma universidade pública da região Sudeste, onde leciona em cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática.

O ensino da teoria de grupos na licenciatura, segundo a professora Eva

Quanto ao trecho das diretrizes, a entrevistada comenta que, de fato, a formação do licenciando em Matemática deve ir além do que ele irá ensinar. Justifica dizendo que “*senão fica parecendo uma espécie de engenharia reversa: você vê o*

que eles têm que ensinar, aí você ensina apenas aquilo, para cobrir aquele conteúdo que ele vai ensinar”. Completa dizendo que:

[...] os licenciandos precisam saber o que acontece por trás e não apenas o que vai ensinar, para ter propriedade de responder determinadas perguntas de seus alunos, porque as perguntas dos alunos não necessariamente se limitam àquilo que está sendo ensinado.

Sobre os conteúdos da teoria de grupos, a entrevistada consultou a lista de conteúdos que lhe apresentamos e apontou que a definição de grupos e os exemplos devem ser apresentados em um curso de licenciatura. Tem a mesma opinião sobre homomorfismos e isomorfismos e sobre grupos cíclicos.

Questiona-se imaginando que, quando se trata de classes laterais, está incluído o teorema de Lagrange, pois este deve ser trabalhado. Afirma também serem importantes os seguintes tópicos: grupos de permutação, subgrupos normais e grupos quociente, *“porque esse é um assunto que aparece não só no ensino médio, mas no ensino fundamental, como os critérios de divisibilidade, os números inteiros, e isso está fortemente calcado na aritmética modular”*.

Comenta que não sabe o que são grupos de ponto de segunda espécie e grupos de pontos cristalográficos. Considera que os produtos diretos são bem importantes, porque *“é uma coisa que aparece em diversas instâncias, em produtos diretos de anéis. Por exemplo, os alunos vão estudar isso em R^n em algum momento a vida”*.

Comenta que alguns dos itens da lista são importantes, ressaltando:

[...] é claro que o aluno da escola elementar, ensino médio, ele nunca vai ouvir falar essa palavra ‘grupo’. Os conteúdos que estão nessa lista é para o professor ter propriedade para ensinar os conteúdos, saber o que está por trás dos conteúdos que aparecem no ensino médio. Por exemplo, critérios de divisibilidade e raízes complexas.

Eva acrescenta que:

[...] seria interessante, para o curso ficar mais completo, mais amarrado, seriam os grupos livres. O professor da licenciatura pode mostrar que os grupos são quocientes de grupos livres. Isso mostraria o propósito do curso, ou seja, tudo que os licenciandos estão estudando, nada mais é do que uma estrutura desse jeito, tudo pode ser resumido desse jeito.

No final, Eva conclui que a extensa lista que lhe entregamos contém diversos itens que ela provavelmente não abordaria. Dá como exemplo a presença de grupo abeliano finito, justificando que este está relacionado ao teorema de estrutura, o qual considera ultrapassar o necessário para um curso de licenciatura:

“é um teorema que para se fazer tem muitos passos. É um teorema muito intrincado. Assim, não trataria em um curso de licenciatura. O mesmo para o teorema de representação de grupos finitos”, o qual acredita ser o teorema de Cayley. A professora finaliza dizendo que “enxugaria esse conteúdo de modo a incluir os grupos livres”.

7.6. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Realizamos cinco entrevistas com professores doutores que atuam ou já atuaram em disciplinas que tratam da teoria de grupos em cursos de licenciatura em Matemática.

Uma das entrevistadas é licenciada e bacharel em Matemática, dois são bacharéis em Matemática, um é licenciado em Matemática e uma é engenheira. Entre eles há uma mestre em Matemática e doutora em Psicologia da Educação, três mestres e doutores em Matemática e um mestre em Matemática e doutor em Educação, na área de Educação Matemática.

Observamos que três dos professores que estão trabalhando com álgebra em cursos de licenciatura são doutores na área de Matemática. Tal constatação coincide com a da pesquisadora Gatti:

Nessa ambiência acadêmica, acaba por se tornar difícil a atribuição de valor a saberes específicos da docência e a consideração dos processos de aprendizagem dos estudantes. Isso rebate nas licenciaturas. Muitos de seus docentes são oriundos não de cursos de licenciatura, mas são bacharéis em áreas variadas ou áreas profissionais (engenharia, saúde, química etc.) e não tiveram contato com questões da área de ensino ou educacionais. Inferem-se daí algumas dificuldades que podem ter para atuar formando professores para a educação básica. (GATTI, 2014, p. 46)

Como citamos no capítulo referente às ideias teóricas, as Diretrizes Curriculares Nacionais de 2001 apontam como questão a ser enfrentada nos cursos de formação de professores o fato de que nas licenciaturas que formam especialistas por área de conhecimento ou disciplina o foco está quase que exclusivamente no conteúdo específico das áreas (BRASIL, 2001a). Essa questão pode estar relacionada ao que observamos nesta pesquisa: os professores que atuam com conhecimentos específicos em cursos de licenciatura em Matemática são especialistas em Matemática.

A respeito do trecho das diretrizes sobre a formação de professores da educação básica, todos os entrevistados concordam que

[...] além dos conteúdos definidos para as diferentes etapas da escolaridade nas quais o futuro professor atuará, sua formação deve ir além desses conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente a eles articulados, que compõem um campo de ampliação e aprofundamento da área. (BRASIL, 2001a, p. 38)

As justificativas apresentadas pelos entrevistados convergem no fato de que a formação do professor deve ir além dos conteúdos que ele irá ensinar, devendo incluir conhecimentos necessariamente articulados a estes, o que vai ao encontro da caracterização que Fiorentini e Oliveira (2013) fizeram da Matemática na perspectiva da prática docente:

Em relação à diversidade, queremos destacar que o conhecimento matemático do professor não se limita aos aspectos conceituais, procedimentais e atitudinais da matemática escolar ou acadêmica. A compreensão da matemática, enquanto objeto de ensino e aprendizagem, implica, também, conhecer sua epistemologia e história, sua arqueologia e genealogia, sua linguagem e semiose e sua dimensão político-pedagógica no desenvolvimento das pessoas e da cultura humana. A matemática também precisa ser compreendida em sua relação com o mundo, enquanto instrumento de leitura e compreensão da realidade e de intervenção social, o que implica uma análise crítica desse conhecimento (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 925).

Os entrevistados afirmam que os futuros professores devem estudar os conteúdos na licenciatura com profundidade maior do aquela com que irão ensiná-los, aspecto também apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais de 2001, de que nem sempre está claro quais conteúdos o licenciando deverá aprender, dado que precisará conhecer mais do que o conteúdo que irá ensinar (BRASIL, 2001a). Este ponto é reforçado nas diretrizes de 2015: “os cursos de formação deverão garantir nos currículos conteúdos específicos da respectiva área de conhecimento, seus fundamentos e metodologias” (BRASIL, 2015, p. 13).

Os entrevistados concordam com Shulman quanto ao fato de que o conhecimento do conteúdo não se resume ao conhecimento e compreensão de conceitos, processos, procedimentos, mas também à compreensão dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica – ou seja, dominar de forma abrangente e profunda o conteúdo é fundamental para que o professor tenha autonomia para fazer escolhas seguras do que irá ensinar e escolher representações adequadas. Um professor com domínio limitado do conteúdo que

ensina tende, por exemplo, a reproduzir o que o livro didático traz, usando a mesma sequência, os mesmos exemplos e as mesmas representações que o autor propõe.

Quanto aos conteúdos de teoria de grupos, a professora Ana aponta serem essenciais: definição de grupo, homomorfismo e isomorfismo de grupos, grupos cíclicos, grupos de permutações, grupos abelianos finitos, grupo de transformações no plano e no espaço e grupo quociente.

Ana afirma que o futuro professor de Matemática não pode saber apenas o que ensinar, mas sempre justificativa essa opinião relacionando os conteúdos da licenciatura àqueles com que o professor irá trabalhar na educação básica. Isso nos leva a inferir que ela está buscando relacionar esses conteúdos aos da escola básica quando possível, o que vai ao encontro de Gatti (2014, p. 37), quando afirma que “o conhecimento disciplinar necessário a um professor para atuar na educação básica não é menor ou mais aligeirado, mas pode ser diferente, em alguns aspectos, do que é necessário para formar um especialista *stricto sensu*”.

O professor Bruno destaca como importantes nos cursos de licenciatura: exemplos de grupos, grupos de permutações, grupos de matrizes, grupo de transformações geométricas, homomorfismo e isomorfismo de grupos, grupos cíclicos, noção de grupo quociente, teorema da estrutura para grupos abelianos finitos e demonstrações de dois ou três teoremas, por exemplo o de Cayley.

Bruno dá importância à parte histórica da teoria de grupos e de suas intersecções com várias áreas da própria Matemática e de outras ciências. Destaca-se também sua preocupação em fazer parecer natural aos alunos a construção dos conhecimentos, afirmando ser isso essencial, especialmente para professores, porque o próprio professor aprende que as coisas nunca são regras: sempre são por alguma razão.

A fala de Bruno vai ao encontro do que Shulman destaca como conhecimento lateral, ou seja, conhecendo-se o que os alunos estão estudando em outras matérias permite relacioná-las com a que se está ministrando, além do conhecimento do currículo vertical, que consiste no que os estudantes trabalharam em anos anteriores ou irão trabalhar posteriormente.

Para o pesquisador Caio, os conteúdos da teoria de grupos que merecem ser trabalhados nos cursos de licenciatura em Matemática são: definição e exemplos de grupos; grupos cíclicos; subgrupos, grupos de permutações, classes laterais

(principalmente os elementos de Z_n), teorema de Lagrange, subgrupos normais e grupos quociente.

Observamos que Caio apresenta alguma justificativa sobre o que será trabalhado, relacionando-o com a educação básica e apontando a importância de se garantir o contato do professor em formação com estes conteúdos e na continuidade da formação do professor na pós-graduação na área de Matemática.

O professor Davi destaca que em um curso de teoria de grupos devem ser trabalhados os seguintes tópicos: definição do que é uma função, do que é uma aplicação, conjuntos com operação, monoides, semigrupos, grupos de simetria, grupos de rotação, grupo de matrizes, subgrupo, homomorfismo e isomorfismo, aprofundando-se um pouco o teorema de Sylow e a noção de grupos solúveis.

Destacamos que Davi aponta que o licenciando não precisa necessariamente estudar apenas disciplinas que tenham foco direto na educação básica, pois há outras que ele deve cursar estudar para que alcance maturidade matemática, aprofundamento de certos conteúdos. O licenciando deve ter a oportunidade de conhecer *“mais coisas do que ele vai ensinar”*.

Já a professora Eva afirma que definição de grupos e exemplos, homomorfismos e isomorfismos, grupos cíclicos, classes laterais, o teorema de Lagrange, grupos de permutação, subgrupos normais, grupos quociente, produtos direto e grupos livres são conteúdos importantes para o licenciando em Matemática.

Dos cinco entrevistados, Bruno, Ana, Davi e Eva citaram conteúdos não constantes dos planos de ensino, destacando outros tipos de grupo e teoremas como os de Sylow e de Lagrange – conteúdos que vão além do que o futuro professor ministrará, o que indica que concordam com Fiorentini e Oliveira quando estes que comentam que:

São importantes os conteúdos da matemática superior que compõem as disciplinas de formação matemática da licenciatura, pois amplia-se, assim, a visão dos futuros professores acerca da matemática como campo de conhecimento. Mas, é necessário adotarmos posturas que apontem para uma visão mais integradora do curso, sem deixar de aprofundar, numa perspectiva multirrelacional, epistemológica e histórico-cultural, o conteúdo específico. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 935)

Observamos que o significado de ‘grupos de ponto de segunda espécie’³⁵ é desconhecido tanto pelos entrevistados quanto em livros de teoria de grupos que

³⁵ Pesquisando *online*, encontramos esta nomenclatura em estudos de química!

consultamos, inclusive em *Éléments de mathématique* (capítulos 1 a 3, sobre álgebra), de Bourbaki (1970).

No capítulo anterior, observamos que “os planos de ensino não explicitam a necessidade de articular o que se aprende em teoria de grupos com a prática do futuro professor de Matemática da escola básica” (p. 72). Assim, não é de se estranhar que os grupos de permutação sejam mencionados em somente três dos sete planos de ensino analisados. Mas, é sim estranho que os elaboradores desses três planos de ensino tenham ignorado que o conceito de grupo de permutações é um dos conceitos fundamentais da Matemática, e que o professor do Ensino Médio vai tratar de permutações ao lecionar análise combinatória.

No capítulo seguinte retomaremos o percurso deste estudo, buscando responder a nossa questão de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A fim de atender nosso objetivo de pesquisa – investigar quais conteúdos da teoria de grupos devem ser tratados em um curso de licenciatura em Matemática –, situamos o interesse pelo tema dentro de nossa trajetória acadêmica, bem como no campo da educação algébrica.

Realizamos um estudo epistemológico sobre a origem e desenvolvimento da teoria de grupos, o qual nos mostrou que ela tem raízes longínquas, embora como conhecimento sistematizado constitua um campo novo, em pleno desenvolvimento, com contribuições importantes para a Matemática e áreas a ela relacionadas.

Apresentamos as teses encontradas no catálogo de teses da CAPES que versam sobre a teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática. A busca por teses que versam sobre teoria de grupos foi importante não somente para não repetirmos estudos realizados, mas para compreendermos em que sentido as pesquisas estão avançando na área e de que forma os pesquisadores estão enxergando a teoria de grupos. Observamos que eles têm se dedicado a pesquisar formas de ensinar a teoria de grupos, mas não a investigar os conteúdos desta que deveriam ser tratados em um curso de licenciatura em Matemática, foco de nossa investigação.

Diante disso, analisamos os planos de ensino de cursos de licenciatura em Matemática de sete instituições públicas na região Sudeste, buscando compreender qual teoria de grupos tem sido atualmente ensinada.

Todos os projetos pedagógicos dos cursos analisados apresentam como objetivo da licenciatura em Matemática formar professores de Matemática que atuarão no ensino fundamental II e no ensino médio, sendo que o curso da USP São Carlos inclui entre seus objetivos preparar o licenciando para a pós-graduação, ao passo que o da Unicamp inclui a iniciação científica e a iniciação à docência.

Cinco das sete instituições pesquisadas oferecem bacharelado e licenciatura em Matemática. Em três delas as propostas curriculares são independentes e em três há disciplinas comuns, entre elas as que tratam da teoria de grupos. Fürkotter e Morelatti (2007) relatam que os cursos de licenciatura em Matemática têm sido objeto de investigações que apontam problemas a superar: a licenciatura como

apêndice do bacharelado; a ênfase nas disciplinas específicas em detrimento das pedagógicas – ou seja, mais de 10 anos se passaram e ainda observamos que alguns cursos têm para a licenciatura e o bacharelado um mesmo currículo inicial, o qual inclui a disciplina que estuda estruturas algébricas.

As disciplinas que tratam de assuntos pertinentes à teoria de grupos têm diferentes denominações e são ministradas em sua maioria com carga de 60 h (exceto no IFSP, com 57 h). Em alguns cursos são obrigatórias; em outros comparecem como disciplinas optativas.

Quanto aos conteúdos programáticos, há um núcleo explicitamente presente nas propostas, constituído de definição e exemplos de grupos, subgrupo, homomorfismo e isomorfismo, teorema de Lagrange, subgrupos normais, grupos quociente e grupos de simetria. Entretanto, embora todos os cursos de licenciatura em Matemática das instituições pesquisadas preparem professores de Matemática para o exercício do magistério nos ensino fundamental e no médio, nenhum dos planos de ensino de suas disciplinas que lidam com teoria de grupos explicita qualquer relação entre a disciplina da licenciatura e a prática do futuro professor de Matemática na escola básica.

Entrevistamos cinco professores e pesquisadores em teoria de grupos e em educação matemática, buscando identificar em suas falas a importância que atribuem à teoria de grupos no curso de licenciatura em Matemática e quais conteúdos dessa teoria são mais adequados à licenciatura em Matemática.

Todos os entrevistados concordam ser importante que o licenciando adquira um repertório de teoria de grupos amplo o suficiente para embasá-lo a propor a exploração de situações em que estejam implícitas noções relacionadas a grupos. Alguns entrevistados destacam questões relacionadas a teoria de grupos resultantes das necessidades de diferentes áreas e da própria matemática.

Além disso, os entrevistados apontam a importância da teoria de grupos na atuação do futuro professor da educação básica. Ana, por exemplo, afirma que a teoria de grupos é importante na licenciatura em matemática por haver tópicos da educação básica que decorrem dessa teoria e até mesmo têm ligação direta com ela. Como exemplo, cita o fato de que alguns conjuntos numéricos trabalhados na educação básica apresentam estrutura de grupo, como é o caso dos grupos dos números racionais, reais e complexos, que, munidos da operação de adição, são

grupos comutativos. Caio afirma que a teoria de grupos nos cursos de licenciatura permite ao professor em formação dispor de uma visão axiomática (estruturada) da álgebra que lhe possibilita tratar de forma mais geral e efetiva os problemas matemáticos que surgem no processo de sala de aula.

Em resposta ao trecho das diretrizes curriculares que apresentamos aos entrevistados, todos afirmaram que a formação do professor deve ir além dos conteúdos, incluindo conhecimentos necessariamente articulados a estes – ou seja, consideram que o futuro professor de Matemática não pode saber apenas o que irá ensinar; sua formação deve ir além.

Como exemplo, Davi afirma que o licenciando deve cursar não só disciplinas diretamente ligadas ao ensino de Matemática na educação básica, mas também ter contato com conteúdos que ampliem seu horizonte matemático, pois para a maturidade matemática requer-se aprofundamento: “O licenciando tem que ser oportunizado de ver mais coisas do que ele vai ensinar”, declara.

Quanto aos tópicos relacionados à teoria de grupos, pensando-se em um currículo básico, os entrevistados concordam que definição e exemplos de grupo, subgrupos, grupos cíclicos, homomorfismo e isomorfismo de grupos, grupo de permutações, grupo de transformações no plano e no espaço, grupos quociente e demonstração de teoremas (de Cayley, de Lagrange e/ou de Sylow) são conteúdos imprescindíveis em um curso de teoria de grupos na licenciatura em Matemática.

Os motivos pelos quais os entrevistados defendem os tópicos são os mais variados. Como exemplo, Ana aponta os conteúdos de teoria de grupos que têm relação implícita ou explícita com a educação básica e destaca a relação dos grupos cíclicos com os números complexos, bem como a dos grupos de permutação com simetrias de figuras, afirmando que o professor da disciplina tem que perceber o que é essencial para que o objetivo da disciplina seja alcançado.

Caio aponta que o estudo das classes laterais permite ampliação da compreensão das operações das classes residuais estudadas nos cursos de teoria elementar dos números, e que por sua vez generalizam as operações de adição e multiplicação algébricas.

Davi destaca a definição de função, o que é uma aplicação, pois está inteiramente relacionado com conteúdos com que os licenciados vão trabalhar, além de relacionar os grupos de simetria ao cubo mágico.

Eva destaca os grupos quociente, pois é um assunto que comparece não só no ensino médio, mas também no fundamental, como nos critérios de divisibilidade e nos números inteiros.

Bruno relaciona os conteúdos de teoria de grupos com assuntos da própria Matemática, destacando o homomorfismo e isomorfismo de grupos, pois quando se estuda algum campo da Matemática estuda-se algum tipo de conjunto com uma propriedade e as funções que preservam essa propriedade. Na teoria de grupos, o que importa são as funções que preservam a operação, os homomorfismos.

Considerando os tópicos propostos nos planos de ensino das disciplinas que tratam da teoria de grupos, assim como a opinião de professores e/ou pesquisadores na área, destacamos alguns aspectos que podem contribuir para a concepção de uma disciplina que trate da teoria de grupos, visando a formação do professor da escola básica.

Assim, consideramos que os conteúdos da teoria de grupos que devem ser tratados em um curso de licenciatura em Matemática são: definição e exemplos de grupo, subgrupos, subgrupos normais, grupos cíclicos, homomorfismo e isomorfismo de grupos, grupo de permutações, grupo de transformações no plano e no espaço, grupos de simetria, grupos quociente e demonstração de teoremas (Cayley, Lagrange e/ou Sylow).

Podemos afirmar, dentro dos limites do que foi realizado, que a teoria de grupos não tem papel bem definido na formação do licenciando em Matemática, embora em todas as instituições pesquisadas haja uma disciplina (obrigatória ou optativa) que trate dessa teoria, que na visão dos entrevistados deve constar nos currículos de licenciatura em Matemática.

Assim, sugerimos para futuras pesquisas:

- investigar de que forma cada um desses tópicos da teoria de grupos se relaciona com os assuntos tratados na educação básica;
- investigar de que forma cada um desses tópicos da teoria de grupos é ou pode ser abordado nos cursos de licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. M. B. de. **O conceito de grupo**: sua formação por alunos do curso de matemática. Tese (doutorado em educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2009.

BOURBAKI, N. **Algebra I**: elements de mathématiques. Paris: Hermann, 1970. chap.1-3.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP 9/2001. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Brasília: CNE, 2001a.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CES 1302/2001. **Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura**. Brasília: CNE, 2001b.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº2. **Diretrizes curriculares nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada**. Brasília: CNE, 2015.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CANDAU, V. M.; LELIS, I. A. A relação teoria-prática na formação do educador. In: CANDAU, V. M. (Org.). **Rumo a uma nova didática**. Petrópolis: Vozes, 1995. p. 49-63.

COELHO, S. P.; MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003. p. 103-104. CD-ROM.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

ELIAS, H. R.; BARBOSA, L. N. S. C.; SAVIOLI, A. M. D. Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e práticas formativas? **Bolema**, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M.; FERREIRA, A. C.; LOPES, C. S.; FREITAS, M. T. M.; MISKULIN, R. G. S. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista – Dossiê: Educação Matemática**, Belo Horizonte, n. 36, p. 137-160, 2002.

FÜRKOTTER, M.; MORELATTI, M. R. M. A articulação entre teoria e prática na formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 2, p. 319-334, 2007.

GATTI, B. A. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, v. 31, n. 113, p. 1355-1379, 2010.

GATTI, B. A. A formação inicial de professores para a educação básica: as licenciaturas. **Revista USP**, São Paulo, n. 100, p. 33-46, 2013-2014.

GATTI, B. A. Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais. **Est. Aval. Educ.**, São Paulo, v. 25, n. 57, p. 24-54, 2014.

HODGSON, B. The mathematical education of school teachers: Role and responsibilities of university mathematicians. In: HOLTON, D. A. (Ed.). **The teaching and learning of mathematics at the university level: an ICMI study**. Boston: Kluwer, 2001. p. 501-518.

KLEINER, I. **A history of abstract algebra**. Boston: Birkhauser, 2007.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Belo Horizonte: UFMG, 1999.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MILLES, F. C. P. **Breve História da Álgebra Abstrata**. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acessado em 10 de maio de 2018.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M.S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MORIEL JR., J. G.; CYRINO, M. C. de C. T. Propostas de articulação entre teoria e prática em cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 3, p. 535-557, 2009.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. The abstract group concept. 2001. (MacTutor History of Mathematics archive. School of Mathematics and Statistics. University of St. Andrews, Scotland.) Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Abstract_groups.html>. Acesso em: 24 out. 2018.

OLIVEIRA, A. P. T. de. **Um estudo sobre estrutura algébrica grupo: potencialidades e limitações para generalização e formalização**. Tese (doutorado em educação matemática) – São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

PEREIRA, P. S. **A concepção de prática na visão de licenciandos de matemática**. Tese (doutorado em educação matemática) – Universidade de Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

PRADO, E. A. **Álgebra linear na licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da educação básica**. Tese (doutorado em educação matemática) – São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

QUARESMA, J. C. B. **Uma análise histórica epistemológica do conceito de grupo**. Tese (doutorado em educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina ‘teoria elementar dos números’ na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese (doutorado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

RODRIGUES, V. C. S.; MACHADO, S. D. A. Há consenso da academia em relação à importância da teoria de grupos na licenciatura em matemática. SIPEM, 5., Petrópolis, 2010. **Anais...** Petrópolis: SIPEM, 2010.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2. p. 4-14, 1986.

TRAPÉZIO GRUPO DE APOIO A ESCOLARIZAÇÃO. 2011. Disponível em: <www.trapezio.org.br>. Acesso em: 1 dez. 2018.

VAN DER WAERDEN, B. L. **A history of algebra**: from Al-Khowarism to Emmy Noether. Berlin: Springer, 1985.

WUSSING, H. **The genesis of the abstract group concept**. Cambridge: The MIT Press, 1984.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

DUBINSKY, E., DAUTERMANN, J., LERON, U., ZAZKIS, R. (1994). On learning the fundamental concepts of group theory. In: **Educational Studies in Mathematics**. N. 27 (3), 267–305.

HERSTEIN, I, N. **Topics in Algebra**. New Delhi: Vikas Publishing House PVT LTD, 1975.

ANEXO A

Termo de consentimento livre e esclarecido

Declaro, por meio deste termo, que concordei em participar da pesquisa intitulada provisoriamente: “O ensino de teoria de grupos nos cursos de licenciatura em Matemática”, desenvolvida por Natália Coelho Soares.

Fui informado(a) que:

- a) a pesquisa é orientada pelas Prof. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado e Prof. Dra. Barbara Lutaif Bianchini;
- b) a minha colaboração se fará de forma anônima;
- c) o acesso e análise dos dados coletados se farão apenas pelo pesquisador e pelo seu orientador.

Por fim, fui esclarecido(a) sobre os objetivos estritamente acadêmicos do estudo.

Afirmo que aceitei participar por minha própria vontade, sem receber qualquer incentivo financeiro ou ter qualquer ônus e com a finalidade exclusiva de colaborar para o sucesso da pesquisa.

Atesto o recebimento de uma cópia assinada deste termo de consentimento livre e esclarecimento, conforme recomendações da Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (CONEP).

São Paulo, _____ de _____ de 2017.

Nome do(a) participante:

CPF:

Assinatura do(a) participante: _____

Assinatura da pesquisadora: _____

CPF: