Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC/SP

Paulo Ferreira do Carmo

Pensamento Matemático Avançado - como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?

Doutorado em Educação Matemática

São Paulo

2018

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC/SP

Paulo Ferreira do Carmo

Pensamento Matemático Avançado - como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como critério parcial para obtenção do título de ***Doutor em Educação Matemática****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori****.*

São Paulo

2018

Banca Examinadora

Dedico este trabalho a minha mãe Ilda Ferreira do Carmo, pelo exemplo de vida e por me guiar no caminho do conhecimento.

Bolsista CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori, pela paciência, competência e dedicação na realização desta pesquisa.

À Profa. Dra. Silvia Dias Alcântara Machado, à Profa. Dra. Claudia Leme Ferreira Davis, ao Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo e ao Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira pelas valiosas contribuições para enriquecer esta pesquisa durante o exame de qualificação.

A todos os professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

A todos os colegas da turma de doutorado do 2º semestre de 2014, Prof. Me. Rogerio Osvaldo Chaparin, Profa. Dra. Maria Rosana Soares, Profa. Dra. Helena Tavares de Souza e Prof. Me. Renne Garcia Paiva, pelo companheirismo e sugestões durante todo o curso e por compartilharmos momentos felizes e difíceis.

A todos os colegas do grupo de pesquisa GPES, pelas discussões, reflexões e contribuições durante nossos encontros na segunda-feira a tarde.

Meu agradecimento à Profa. Dra. Ana Rebeca Miranda Castillo, pelas conversas, pelas coautorias em artigos, pela companhia em congressos e pelas leituras e contribuições em diversos artigos, muito obrigado!

Meu agradecimento ao Prof. Dr. Edson Rodrigues da Silva, pelas discussões, pelas suas leituras minuciosas e pelas contribuições em diversos artigos e pela companhia em viagens para congressos e concursos, muito obrigado!

Meu agradecimento especial a minha amiga Profa. Dra. Helena Tavares de Souza, pelo companheirismo e sugestões durante todo o curso, pelas conversas, pelas coautorias em artigos, pela companhia em congressos e pelas leituras e contribuições em diversos artigos, muito obrigado!

Às minhas filhas Luiza Souza Carmo e Helena Souza Carmo, por me fazerem enxergar a vida de um modo diferente, como muito mais amor e carinho.

Ao meu irmão Marcelo Ferreira do Carmo, professor de matemática, que durante o doutorado foi diagnosticado com esclerose lateral amiotrófica (E.L.A.) e tem me levado a refletir sobre a importância e fragilidade da vida humana.

À Suzanne Lima Freitas, Assistente de Coordenação de Curso do PEPG em Educação Matemática, pela eficiência, dedicação e amizade durante minha permanência na pós-graduação da PUC/SP.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

RESUMO

CARMO, Paulo Ferreira do. **Pensamento Matemático Avançado - como essa noção repercute em dissertações e teses brasileiras?** 2018. 128 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

As teorias voltadas à conceituação do pensamento matemático têm se desenvolvido no âmbito da educação matemática. Essas teorias são de cunho cognitivista e visam conhecer os processos de formação do pensamento matemático, e dessa forma elas trazem uma contribuição valiosa ao ensino e principalmente à aprendizagem dessa área do conhecimento. Esta tese apresenta uma investigação sobre esse tema da formação do pensamento matemático avançado, mais especificamente sobre concepções de educadores matemáticos brasileiros expressas em dissertações e teses defendidas no período de 2010 a 2016. Nesse contexto elencamos como objetivos desta tese, compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado em dissertações e teses brasileiras, e avaliar que resultados foram nelas aferidos e se os mesmos expressam de algum modo diferentes concepções dessa noção. Os procedimentos metodológicos realizados para atingirmos esses objetivos foram de leitura e análise de publicações cientificas que, de alguma forma traziam, o tema da teoria do pensamento matemático avançado, literatura essa que começa a aparecer a partir do final da década de 1970, sendo David Tall e Tommy Dreyfus os principais pesquisadores no desenvolvimento dessa teoria. Na composição do *corpus* de análise constam 26 dissertações e teses selecionadas por preencherem os quesitos anunciados nos objetivos propostos. Tomando por base os preceitos da metodologia da análise de conteúdo, criamos duas categorias à quais refletem os objetivos e os resultados dos trabalhos acadêmicos analisados. A análise dessas categorias, nos indicaram que as dissertações e teses brasileiras apresentadas no período estudado associam a noção de pensamento matemático avançado ao pensamento matemático desenvolvido na aprendizagem de conteúdos matemáticos de ensino superior e à formalização dos conceitos matemáticos. A análise do *corpus* também revelou que é admitido que o processo de formação do pensamento matemático, necessário para o desenvolvimento de certas atividades, é pautado por obstáculos cognitivos e em consequência, esses obstáculos são geradores de dificuldades de aprendizagem. Podemos apontar como resultado desta pesquisa que a teoria do pensamento matemático avançado está sendo utilizada para se compreender o funcionamento do processo da formação desse pensamento, e, a partir disso, para se buscar elementos que iluminem estratégias de ensino que promovam de forma mais qualificada a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Teoria Cognitivista. Dissertações e Teses brasileiras. Educação Matemática.

ABSTRACT

CARMO, Paulo Ferreira do. **Advanced Mathematical Thinking - how this notion reverberates in Brazilian theses and dissertations?** 2018. 128f. Thesis (Doctorate in Mathematical Education) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Theories focused on the conceptualization of mathematical thinking have developed in the scope of mathematical education. These theories are cognitivist and aim to know the processes of formation of mathematical thinking, and in this way they make a valuable contribution to teaching and especially to learning in this area of knowledge. This thesis presents an investigation on this theme of the formation of advanced mathematical thinking, more specifically on the notions of Brazilian mathematical educators expressed in dissertations and theses produced in the period from 2010 to 2016. In this context, we have as an objective of this thesis, to understand and analyze in which, as and to what purpose the notion of advanced mathematical thinking appears in Brazilian production, and to evaluate what results were measured in these works and whether they express in any way different conceptions of this notion. The methodological procedures performed to reach this goal were to read and analyze scientific publications that somehow brought the theme of advanced mathematical thinking theory, which began to appear from the late 1970s, being David Tall and Tommy Dreyfus the leading researchers in the development of this theory. In the composition of the corpus of analysis there are 26 dissertations and theses selected because they fulfill the requirements announced in the proposed objective. Based on the precepts of the methodology of content analysis, we created two categories that reflect the objectives, the research questions and the results of the academic papers analyzed. The analysis of these categories indicated that Brazilian dissertations and theses presented in the period studied associate the notion of advanced mathematical thinking with mathematical thinking developed in the learning of mathematical contents of higher education and the formalization of mathematical concepts. The analysis of the corpus also revealed that it is admitted that the process of formation of mathematical thinking, necessary for the development of certain activities, is guided by cognitive obstacles and as a consequence, these obstacles generate learning difficulties. We can point out as a result of this research that the theory of advanced mathematical thinking is being used to understand the functioning of the process of the formation of this thinking, and from this to find elements that illuminate teaching strategies that promote learning in a more qualified way of mathematical concepts.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking. Cognitive Theory. Brazilian Theses and Dissertations. Mathematical Education.

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

No desenvolvimento da sociedade humana a matemática tem desempenhado um papel importante, se constituído em um poderoso apoio para a investigação nas diversas áreas do conhecimento. Além disso, ela também interfere nas escolhas e tomadas de decisões dos indivíduos em variadas situações. Assim sendo, é inegável sua importância na formação das pessoas, que não se resume apenas em utilizar técnicas ou efetuar operações e determinar medidas, atividades hoje muitas vezes realizadas por máquinas. A relevância da matemática na formação do ser humano está na possibilidade de propiciar o desenvolvimento de uma forma de pensar e de interpretar o mundo. De modo inicial podemos dizer que essa forma pode se constituir na formação de um pensamento matemático, dando condições a um indivíduo para a estruturação de dados e de informações, levantar hipóteses, conjecturar, fazer previsões e decidir, avaliar riscos e favorece a capacidade de estabelecer relações, de reconhecer padrões e de generalizar.

A intenção de caracterizar o pensamento matemático e estudar como ele se forma e desenvolve faz parte de pesquisas em educação matemática, área esta que em seus estudos buscam indicar que a escola deve encontrar meios para favorecer, um ensino em que as competências a serem desenvolvidas corroborem com esse propósito, o de desenvolver esse pensamento. Nesse início do estudo apontamos algumas dessas competências como por exemplo: classificar, contar, ordenar, realizar operações aritméticas e algébricas, estabelecer relações geométricas entre outras.

No âmbito das teorias da educação matemática, o pensamento matemático se apresenta com caracterizações diferentes, sendo, de modo geral, distinguidos de formas também diferentes entre alguns pesquisadores. Por exemplo, a tipificação do pensamento matemático em pensamento matemático avançado (PMA)[1], tem sido entendida por alguns como referência teórica para pesquisas dessa área no ensino superior, no entanto esse entendimento não é consensual (IGLIORI, 2012).

[1] A sigla PMA está relacionada ao pensamento matemático avançado traduzido da língua inglesa *Advanced Mathematical Thinking* (AMT). Esta sigla foi introduzida pelo autor Gontran Ervynck responsável pela formação do GT sobre pensamento matemático avançado na conferência do *Psychology of Mathematics Education* em 1985.

De fato, desde o início dos estudos acadêmicos a respeito do pensamento matemático avançado concepções diferentes foram apresentadas por pesquisadores da educação matemática, o que se reflete no desenvolvimento de pesquisas no âmbito da educação matemática.

É nessa problemática que assumimos como o objetivo geral desta tese, identificar noções do pensamento matemático avançado em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016. E como objetivos específicos: compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado nesses trabalhos; e avaliar que resultados foram aferidos nesses trabalhos e se os mesmos expressam de algum modo, as diferentes concepções dessa noção.

Os subsídios para a análise foram buscados em teóricos da educação matemática, em especial, Tall e Dreyfus, que conceituaram e tipificaram pensamento matemático em elementar (PME) e avançado (PMA).

Dreyfus (2002) explica que o pensamento matemático avançado é estruturado na mente de um estudante em uma longa sequência de atividades que promovem a interação entre processos mentais (representação, visualização, generalização, classificação, indução, análise, síntese, abstração e formalização). Essa estruturação ocorre de maneira intrincada, para que se estabeleça a compreensão na aprendizagem. (DREYFUS, 2002)

Para esse autor é possível pensar em tópicos de matemática avançada de forma elementar, distinguindo então o pensamento elementar do avançado por sua complexidade e pela forma como se lida com essa complexidade durante a realização de uma atividade de aprendizagem. O autor considera que a distinção entre pensamento matemático elementar e avançado não é significativa - a matemática avançada foca nas abstrações de definição e dedução de propriedades de objetos e/ou conceitos matemáticos. Dentre os processos envolvidos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, o mais importante segundo Dreyfus (2002) é a abstração, "[...] pois se um estudante desenvolve a habilidade de, conscientemente, fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele atinge um nível avançado do pensamento matemático" (p. 34, tradução nossa)[2]. A abstração e a representação são processos complementares que possuem direções opostas, assim para Dreyfus (2002), "um conceito geralmente é abstraído de suas várias representações, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato" (p. 38, tradução nossa)[3].

Para Tall (2002) o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma grande variedade de atividades matemáticas, para o desenvolvimento de novas ideias que fundamentam e ampliam um crescente sistema de teoremas demonstrados. Para o autor, em um indivíduo, o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado, parte das "percepções de" e "ações sobre" objetos em um mundo exterior, construído por meio de dois processos desenvolvidos paralelamente: um que vai do visual espacial para o formal dedutivo; e o outro que ocorre com sucessivas encapsulações do processo para o conceito, pela manipulação simbólica. Esses dois processos desenvolvidos inspiram o pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e em provas sistemáticas. O autor ainda ressalta que muitos dos processos cognitivos que se desenvolvem durante a realização de uma atividade matemática, que constituem o pensamento matemático avançado, são da mesma natureza dos que constituem o pensamento matemático elementar. A capacidade de elaborar uma definição formal e de deduzir são fatores que os diferenciam.

Igliori (2012) afirma que a pesquisa em educação matemática no ensino superior, crescente nas últimas quatro décadas, com foco na formação do pensamento matemático avançou com as contribuições resultantes da noção de pensamento matemático avançado, e que a diversidade de concepções atribuídas a ele pode interferir nos resultados de pesquisas. Para a autora é importante que um determinado conceito teórico da educação matemática, em particular o pensamento matemático avançado, contribua com a elaboração de teorias pedagógicas potentes para o ensino da matemática.

[2] "If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking." (DREYFUS, 2002, p.34)
[3] "A concept is often abstracted from several of its representations, on the other hand representations are always representations of some more abstract concept." (DREYFUS, 2002, p.38)

Nesse contexto, Joana Mamona-Downs (*University Patras*) propôs a seus pares no CERME 5[4] realizado em 2007, na sinopse do grupo de trabalho (GT) 14, relativo ao tema pensamento matemático avançado, a questão “O que é pensamento matemático avançado?” E em seus estudos afirma que desde que a teoria do pensamento matemático avançado foi introduzida na década de 1980 essa questão permanece e ressalta:

> A principal controvérsia reside em que alguns pesquisadores afirmam que existe um caminho ‘contínuo’ potencial para levar a cognição da ‘matemática escolar’ para a ‘matemática universitária’, enquanto outros afirmam que existem passos inevitáveis que exigem modos de pensar radicalmente diferentes. (MAMONA-DOWNS, 2007, p. 2222, tradução nossa)[5]

Mamona-Downs (2007) ainda afirma que o “PMA é um termo que os educadores criaram para si próprios, e que então ele ocupa um lugar para se considerar se suas posições filosóficas se encaixam com a pesquisa identificada com essa tradição” (p. 2222, tradução nossa)[6].

Leikin *et al.* (2009) refletindo a respeito dos trabalhos do grupo apresentados do grupo de trabalho (GT) 12 no CERME 6 com o tema pensamento matemático avançado, afirmaram que em 1988 David Tall discutiu o termo “Pensamento Matemático Avançado” de duas formas distintas: pensamento sobre a matemática avançada e forma avançada do pensamento matemático. O grupo, então, se pautou nessa distinção. Associaram a forma do “pensamento sobre a matemática avançada” aos conceitos e conteúdos matemáticos no nível médio, nível superior e a transição entre esses dois níveis como critério para classificar os trabalhos apresentados. A “forma avançada do pensamento matemático” foi relacionada a estudantes com alto potencial intelectual em matemática. Os trabalhos apresentados nessa perspectiva abordaram a diferenciação das ações desses estudantes com outros de mesma idade. O grupo abordou as características do pensamento matemático, como criatividade, raciocínio crítico, motivação e persistência, que pertencem ao pensamento matemático avançado.

---

[4] CERME: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

[5] “The main controversy lies in that some researchers claim there is a potential 'continuous' path to lead the cognition from 'school mathematics' to 'university mathematics', whilst others claim that there are unavoidable leaps that require radically different modes of thinking.” (MAMONA-DOWNS, 2007, p. 2222)

[6] “A.M.T. is a term that educators created for themselves, so it is in place to consider whether its philosophical positions fit with the research identified to this tradition.” (MAMONA-DOWNS, 2007, p. 2222)

Dessa forma entendemos que é relevante um estudo a respeito dessas duas tipificações: pensamento matemático avançado e pensamento matemático elementar. Em nosso estudo nos restringiremos a estudar as noções de pensamento matemático avançado em teses e dissertações brasileiras. Para orientar a pesquisa foram formuladas as seguintes questões:

Como e com que finalidade a noção de pensamento matemático avançado foi utilizada em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016? E como se apresentam os resultados dessas pesquisas relativamente ao uso dessa noção?

Para atingir os objetivos propostos e responder a essas questões estruturamos o trabalho da seguinte forma, no capítulo 2 abordamos os resultados de um estudo a respeito da teoria do pensamento matemático avançado, e apresentamos teorias associadas a ela, para dessa forma sistematizar os fundamentos teóricos que norteiam esse estudo.

No capítulo 3 apresentamos a metodologia de pesquisa bem como os procedimentos metodológicos utilizados para a coleta dos dados e uma análise baseada em quantidades dos dados obtidos.

No Capítulo 4 apresentamos a análise de noções do pensamento matemático avançado obtidas nos trabalhos levantados e categorizados.

No capítulo 5 apresentamos as considerações finais em que retomamos nossos objetivos e questões de pesquisa, bem como descrevemos os resultados obtidos.

CAPÍTULO 2

A teoria cognitivista do pensamento matemático avançado

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre o pensamento matemático, pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado pautados nas concepções de estudiosos da área da educação matemática, bem como descrevemos considerações históricas referentes à construção da teoria cognitivista que fundamenta essas concepções.

Incluímos constructos teóricos desenvolvidos por David Orme Tall, professor e pesquisador inglês, da *University of Warwick* (Reino Unido), por Tommy Dreyfus, professor e pesquisador israelense, da *Tel Aviv University* (Israel), por Ed Dubinsky, professor e pesquisador norte americano, da *Kent State University* (EUA) e por Anna Sfard, professora e pesquisadora israelense, da *University of Haifa* (Israel), além de referências a outros como Alan Schoenfeld, Luis Radford, Gontran Ervynck, Richard Rowland Skemp, Lauren B. Resnick, John Mason e Anne Watson.

Iniciamos apresentando algumas informações sobre teorias de aprendizagem, destacando a teoria cognitivista, que é a base da teoria do pensamento matemático avançado. A psicologia tem como um de seus objetivos de estudo a aprendizagem humana, tomando por fundamento que a aprendizagem é uma característica inerente a todos os seres que raciocinam. Daí o surgimento de diversas teorias como formas explicativas da aprendizagem, as quais podem ser agrupadas em três abordagens: a comportamentalista, a humanista e a cognitivista (SANTOS, 2006).

A abordagem comportamentalista, também conhecida por behaviorista, analisa o processo de aprendizagem, desconsiderando os aspectos internos que ocorrem na mente do sujeito, centrando-se no comportamento observável do mesmo (SANTOS, 2006).

A abordagem humanista prioriza como base fundamental da aprendizagem a autorrealização do aprendiz, havendo uma valorização dos aspectos: cognitivo, motor e afetivo. Para tal abordagem, o desenvolvimento da aprendizagem do sujeito deve se dar de forma integral (SANTOS, 2006).

A abordagem cognitivista propõe analisar a mente, o ato de conhecer; como o sujeito desenvolve seu conhecimento acerca do mundo. Para Moreira (1982 *apud*

SANTOS, 2006, p. 100) “a psicologia cognitiva preocupa-se com o processo de compreensão, transformação, armazenamento e utilização das informações, envolvida no plano da cognição”. A abordagem cognitivista teve grande efervescência nos anos de 1990, resgatando estudos teóricos da psicologia cognitiva como aqueles desenvolvidos por Piaget e Vygotsky.

Agora apresentamos o estudo acerca das concepções de educadores matemáticos a respeito do que seja pensamento matemático. Observamos que essas concepções estão intimamente relacionadas a como entendem que ocorre a aprendizagem da matemática.

Schoenfeld (1996) defende o ensino de matemática escolar baseado na resolução de problemas, depois do fracasso da implementação do ensino de matemática proposto pelo movimento da matemática moderna na década de 1960. Para esse autor o ensino de matemática, baseado na resolução de problemas é mais do que ensinar a resolver problemas, ajuda os alunos a pensar matematicamente, e assim para ele

> [...] pensar matematicamente significa ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo preferência por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair e aplicar ideias matemáticas a uma larga gama de situações) e ter as ferramentas do oficio para matematizar com sucesso (SCHOENFELD, 1996, p. 8).

Radford (2011) tem interesse em aspectos teóricos, mas também em práticos da matemática relativos ao pensamento, ao ensino e à aprendizagem da matemática. Sua linha central de investigação da educação matemática está relacionada a uma participação sustentada no trabalho em sala de aula, com professores e estudantes. Sua teoria de objetivação é uma teoria de aprendizagem, que tem como premissa fundamental que o pensamento matemático compartilha de um sistema simbólico com outras formas de pensamento, para ele a aprendizagem é um processo cultural e histórico onde conhecer e ser são mutuamente constitutivos e conduzam a uma concepção não-utilitarista e não-instrumentalista da sala de aula.

Para o autor a concepção de pensamento está relacionada à história e à cultura. Ele afirma que o pensamento em geral, e o pensamento matemático em particular,

> [...] são formas de práxis social reflexiva mediada na qual a organização dos processos cognitivos sensoriais dos indivíduos está relacionada ao significado das coisas conforme elas se tornam objetivadas na atividade prática e teórica (RADFORD, 2011, p. 261).

Para esse autor, pensamento é uma reflexão mediada e os artefatos (objetos, instrumentos, sistemas semióticos, etc.) não são mera ajuda ao pensamento e à ação ou amplificadores, ele concebe os artefatos como coo extensivos do pensamento e afirma que "nós agimos e pensamos com e através dos artefatos" (RADFORD, 2011, p. 283). Assim, para Radford (2011), o pensamento matemático

> É uma forma de práxis social reflexiva mediada sustentada pela forma da atividade e pelos modos de saber como disposto pelo contexto histórico-econômico da cultura em questão e em seu sistema semiótico de significações culturais (p. 299).

Watson e Mason (1998) estudiosos da aprendizagem de matemática escolheram algumas palavras que descrevem o pensar matematicamente, dividindo-as em seis grupos: G1: exemplificar, especificar; G2: completar, deletar, corrigir; G3: comparar, classificar, organizar; G4: variar, modificar, alterar; G5: generalizar, conjecturar; e G6: explicar, justificar, verificar, convencer, refutar.

Assim sendo, Schoenfeld (1996), Radford (2011), Mason e Watson (1998) são quatro pesquisadores importantes da educação matemática cujas concepções influenciam as pesquisas da área e têm ideias diferentes a respeito de como é estruturado o pensamento matemático. O mesmo podemos observar com relação ao pensamento matemático avançado como já citado brevemente anteriormente. Trata-se de: investigar e conhecer diferentes concepções sobre um determinado constructo teórico, e as possíveis implicações nos resultados das pesquisas. Nas ciências humanas, esse não é um fato incomum, mas cabe ao pesquisador identificá-lo e levá-lo em conta nos estudos de fenômenos. Logo há o que se investigar sobre diferentes concepções de um conceito teórico na educação matemática. Nesta tese nos interessamos especificamente pelo pensamento matemático avançado, por sua expressão em dissertações e teses brasileiras em um determinado período. No que segue relatamos alguns achados nesta investigação.

Em 1976 foi constituído o grupo internacional PME (*Psychology of Mathematics Education)* passando a realizar encontros anuais em diferentes locais do mundo, para compartilhar ideias de pesquisas. Em 1985, no âmbito do PME, foi criado um Grupo de Trabalho com foco em um constructo teórico denominado pensamento matemático avançado, com o objetivo de incentivar pesquisas sobre essa tipificação do pensamento matemático. É nessa época que são formuladas, por teóricos da educação matemática, duas conceituações para a estruturação cognitiva do pensamento matemático, o pensamento matemático elementar (PME) e pensamento matemático avançado (PMA).

As duas siglas (PME e PMA) foram introduzidas pelo pesquisador Gontran Ervynck, o responsável pela formação do Grupo de Trabalho que abordou pensamento matemático avançado na conferência do *Psychology of Mathematics Education* em 1985. O pensamento matemático avançado foi, inicialmente, considerado o pensamento matemático envolvido com a aprendizagem de conceitos matemáticos programados para o ensino de matemática a estudantes maiores de 16 anos, incluindo aí as atividades de matemáticos profissionais.

Nesse contexto Resnick (1987) classificou o pensamento matemático avançado como um tipo de pensamento de ordem superior, e indicou assim suas principais características: (1) não algorítmico; (2) conduz a múltiplas soluções; (3) envolve julgamentos com nuances e interpretações; (4) envolve aplicações de múltiplos critérios; (5) incertezas; (6) auto regulação; (7) imposição de resultados e (8) esforço. Para essa autora, o pensamento matemático avançado pode ser caracterizado por processos de representação e abstração; mas considera que ele pode se manifestar em conceitos tão simples como o de contar e somar, é a complexidade desses processos que é determinante.

Dreyfus (2002), um dos pesquisadores, fortemente responsável por acrescentar elementos nesse debate a respeito do pensamento matemático avançado, considera, como já dito anteriormente, que o pensamento matemático se forma em uma longa sequência de atividades de aprendizagem durante a qual uma variedade de processos mentais ocorre e interage na mente do estudante. E considera ainda que a reflexão sobre a experiência matemática é um aspecto importante do processo e do conhecimento e a forma dessa reflexão, é uma característica do pensamento matemático avançado.

Outro característica da concepção de Dreyfus (2002) é que não há distinção nítida entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar e o avançado, embora ele considere que a matemática avançada esteja mais focada nas abstrações de definição e dedução de propriedades de objetos matemáticos. Dreyfus (2002) afirma que muitos dos processos do pensamento matemático avançado, a serem considerados, já estão presentes no pensamento de crianças em conceitos matemáticos elementares. O autor ressalta que é possível pensar em tópicos de matemática avançada de uma maneira elementar, que há um pensamento bastante avançado em tópicos elementares e que uma característica distintiva entre o pensamento matemático avançado e o elementar é a diferenciação de como a complexidade nessas atividades é gerenciada. Ele considera que os processos mais poderosos são aqueles que permitem gerenciar essa complexidade, que em particular são os processos de abstração e de representação; e por meio desses dois processos pode-se mudar de um nível de detalhe para outro e assim gerenciá-la.

Por outro lado, Tall (2002) afirma

> [...] nós então, concentramos nossa atenção no ciclo completo da atividade no pensamento matemático avançado: do ato criativo de considerar um contexto problemático na pesquisa matemática que leva à formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova (p. 3, tradução nossa) [7].

Para o autor muitas das atividades que ocorrem nesse ciclo também ocorrem na resolução de problemas na matemática elementar, mas a possibilidade de definição formal e a dedução de propriedades dos objetos matemáticos é um fator que distingue o pensamento matemático avançado do elementar.

O autor ainda considera que a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição: do descrever a definir, do convencer a provar de maneira lógica com base nas definições. Segundo ele, essa transição requer uma reconstrução cognitiva, percebida durante a luta inicial dos estudantes com as abstrações formais, no primeiro ano da universidade. Para Tall (2002) trata-se da transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada, essa última baseada em entidades abstratas que o indivíduo deve construir por meio de deduções e de definições formais.

Outro teórico da educação matemática que trouxe elementos teóricos para o entendimento da formação do pensamento matemático é Dubinsky (1991). Ele não se encontra entre aqueles que utilizam a cunha de pensamento matemático avançado ou pensamento matemático elementar, diferenciando-os. Ele trata de conhecimento matemático de um modo geral em sua teoria APOS (*Action, Process, Object and Scheme*). No início da década de 1990, o autor compartilhava ideias a respeito do pensamento matemático avançado com Tall (2002). Foi autor de dois capítulos do

---

[7] “We then focus our attention on the full cycle of activity in advanced mathematical thinking: from the creative act of considering a problem context in mathematical research that leads to the creative formulation of conjectures and on to the final stage of refinement and proof”. (TALL, 2002, p. 3)

livro *Advanced Mathematical Thinking* (um de sua autoria e outro em coautoria com Tall). Em 1991, relacionou o desenvolvimento do pensamento matemático avançado a partir do conceito de abstração reflexiva da teoria de Piaget e de sua teoria APOS, que na época estava se constituindo.

Nesse trabalho analisamos alguns conceitos desse autor com vistas a buscar, em estratos de sua teoria com os conceitos Ação, Processo, Objeto e Esquema se há indicativo de que ele distingue tipos de pensamento matemático, a exemplo do que é feito pelos pesquisadores já citados anteriormente.

Dubinsky (2001) se apoia na descrição da natureza do conhecimento matemático e do desenvolvimento desse conhecimento durante a aprendizagem por um estudante. Ele afirma que sua teoria

> [...] começa com a hipótese de que o conhecimento matemático consiste em uma tendência do indivíduo para lidar com situações problema matemáticas identificadas construindo ações mentais, processos e objetos e os organizando em esquemas para dar sentido às situações e resolver os problemas (p. 1, tradução nossa)[8].

E complementa explicando que a formação de um conhecimento matemático de um estudante começa com

> [...] ações que são transformações mental ou física de objetos. Essas ações são interiorizadas aos processos. Isso significa que uma operação mental interna é construída para fazer o mesmo trabalho que uma ação mais externa. Finalmente quando for necessário ou útil aplicar uma ação ao que foi um processo, esse processo é encapsulado para se tornar um objeto mental (DUBINSKY, 1997, p. 5, tradução nossa)[9].

E ainda diz:

> [...] objetos não resultam de mover algo, que já existe em alguma fonte externa, para o espaço mental de um indivíduo. Os objetos mentais são, de acordo com a perspectiva teórica que eu trabalho, construídos por processos encapsulados e esquemas tematizados. Objetos matemáticos (processos e esquemas também) resultam de um conjunto de indivíduos (matemáticos) interagindo em uma sociedade estruturada (a comunidade matemática) e comunicando sobre suas respectivas construções mentais (DUBINSKY, 1997, p. 7, tradução nossa)[10].

---

[8] "[…] begins with the hypothesis that mathematical knowledge consists in an individual's tendency to deal with perceived mathematical problem situations by constructing mental actions, processes, and objects and organizing them in schemas to make sense of the situations and solve the problems." (DUBINSKY, 2001, p. 1)

[9] "[…] actions that are mental or physical transformations of objects. These actions are interiorized to processes. That means that an internal mental operations is constructed to do the same job as did the more external action. Finally, when it is necessary or useful to apply an action to what has been a process, this process is encapsulated to become a mental object." (DUBINSKY, 1997, p. 5)

[10] "[...] objects do not result from moving something that already exists from some external source to an individual's mental space. Mental objects are, according to the theoretical perspective in which i work, constructed by encapsulated processes and thematizing schemas, mathematical objects (and

A teoria APOS toma por referência o conceito de abstração (empírica, pseudo-empírica e reflexiva) da teoria de Jean Piaget, psicólogo suíço. Segundo Piaget e Garcia (1983) a abstração empírica deriva do conhecimento das propriedades dos objetos, ou das ações sobre esses objetos e esse conhecimento é o resultado de construções efetivadas internamente pelo sujeito. De acordo com os autores, esse tipo de abstração leva à extração de propriedades comuns de objetos, que eles denominaram de generalizações extensivas. A abstração pseudo-empírica é intermediária entre a abstração empírica e a reflexiva, ela provoca uma reflexão sobre propriedades que as ações do sujeito introduziram nos objetos e ela permite ao sujeito deduzir algum conhecimento da sua ação ou do objeto (PIAGET, 1985). A abstração reflexiva é chamada por Piaget (1980) de coordenação geral de ações, sua fonte é o sujeito, é completamente interna e então, o sujeito interioriza e coordena as ações para formar uma ordem total (PIAGET, 1972). Dubisnky (1991) afirma que esse tipo de abstração leva a um tipo de generalização muito diferente das outras, que é construtiva e resulta em "novas sínteses em meio das quais as leis particulares adquirem novo significado" (PIAGET; GARCIA, 1983, p. 11, tradução nossa)[11].

Para Dubinsky (1991) esses diferentes tipos de abstração não são completamente independentes. As ações, que consideram a abstração pseudo-empírica e reflexiva, são realizadas em objetos cujas propriedades o sujeito só conhece pela abstração empírica. Por outro lado, a abstração empírica só é possível por meio dos esquemas de assimilação que foram construídos pelo sujeito em uma abstração reflexiva. Esse teórico usa o exemplo de uma experiência física que possa ter como objetivo realizar uma abstração empírica para obter dados sobre um objeto, ele afirma que essa interdependência mútua pode ser resumida da seguinte forma: a abstração empírica e a pseudo-empírica desenham o conhecimento do objeto realizando (ou imaginando) ações sobre ele. A abstração reflexiva interioriza e coordena essas ações para formar novas ações e finalmente, novos objetos. A abstração empírica extrai dados desses novos objetos pelas ações mentais sobre eles, e assim por diante.

Ele diz também que:

---

processes and schemas as well) result from a set of individuals (mathematicians) interacting in a structured society (the mathematical community) and communicating about their respective mental constructions." (DUBINSKY, 1997, p. 7)

[11] "new syntheses in midst of which particular laws acquire new meaning." (PIAGET; GARCIA, 1983, p. 11)

> Uma ação é uma transformação de objetos que é percebida pelo indivíduo como sendo ao menos um pouco externa. Isto é, um indivíduo cuja compreensão de uma transformação é limitada a uma concepção ação pode realizar a transformação somente reagindo a pistas externas que fornecem detalhes precisos sobre quais passos podem ser dados (DUBINSKY, 1996, p. 12, tradução nossa)[12].

E que:

> Quando uma ação é repetida, e o indivíduo reflete sobre ela, ela pode ser interiorizada em um processo. Ou seja, é feita uma construção interna que realiza a mesma ação, mas agora não necessariamente dirigida por estímulos externos. Um indivíduo que tem uma concepção processo de uma transformação pode refletir, descrever ou mesmo reverter as etapas da transformação sem realmente executar essas etapas. Em contraste, com uma ação, um processo é percebido pelo indivíduo como sendo interno e sob seu controle e não como algo que se faz em resposta a pistas externas (DUBINSKY, 1996, p. 14, tradução nossa)[13].

Sobre a concepção objeto Dubinsky (1996) diz:

> Quando um indivíduo reflete sobre operações aplicadas a um processo particular, torna-se consciente do processo como uma totalidade, ele percebe que as transformações (quer sejam ações ou processos) podem atuar sobre ela e podem realmente construir essas transformações, então ele ou ela está pensando nesse processo como um objeto. Nesse caso, nós dizemos que o processo foi encapsulado em um objeto (p. 15, tradução nossa)[14].

Dubinsky ainda postula que

> No decurso da execução de uma ação ou de um processo em um objeto, é muitas vezes necessário des-encapsular o objeto de volta ao processo do qual ele veio, para usar suas propriedades na manipulação. É fácil ver como encapsulação de processo para o des-encapsulamento do objeto no retorno ao processo acontece quando se está pensando em manipulações de funções, como adicionar, multiplicar ou simplesmente constituindo conjuntos de funções (p. 15, tradução nossa)[15].

E faz suas considerações sobre a abstração reflexiva do sujeito. Ele diz:

---

[12] "An action is a transformation of objects which is perceived by the individual as being at least somewhat external. That is, an individual whose understanding of a transformation is limited to an action conception can carry out the transformation only by reacting to external cues that give precise details on what steps to take." (DUBINSKY, 1996, p. 12)

[13] "When an action is repeated, and the individual reflects upon it, it may be interiorized into a process. That is, an internal construction is made that performs the same action, but now, not necessarily directed by external stimuli. An individual who has a process conception of a transformation can reflect on, describe, or even reverse the steps of the transformation without actually performing those steps. In constrast to an action, a process is perceived by the individual as being internal, and under one's control, rather than as something one does in response to external cues." (DUBINSKY, 1996, p. 14)

[14] "When an individual reflects on operations applied to a particular process, becomes aware of the process as a totality, realizes that transformations (whether they be actions or processes) can act on it, and is able to actually construct such transformations, then he or she is thinking of this process as an object. In this case, we say that the process has been encapsulated to an object." (DUBINSKY, 1996, p. 15)

[15] "In the course of performing an action or process on an object, it is often necessary to de-encapsulate the object back to the process from which it came in order to use its properties in manipulating it. It is easy to see how encapsulation of processes to and de-encapsulation the objects back to processes arises when one is thinking about manipulations of functions such as adding, multiplying, or just forming sets of functions." (DUBINSKY, 1996, p. 15)

> Para nós, abstração reflexiva será a construção de objetos mentais e de ações mentais sobre esses objetos. Afim de elaborar nossa teoria e relacioná-la com conceitos específicos em matemática, usaremos a noção de esquema. Um esquema é uma coleção mais ou menos coerente de objetos e processos. Também às vezes usamos o termo processo ou processo mental em vez de ação mental quando enfatizamos sua natureza interna (para o assunto) (DUBINSKY, 1991, p. 102, tradução nossa)[16].

Dubinsky (1991) afirma que o seu objetivo na elaboração da teoria APOS foi isolar pequenas porções dessa estrutura complexa (conhecimento matemático) e fornecer descrições explícitas de possíveis relações entre esquemas. Ao se referir a esse procedimento para o caso de um conceito particular, ele o denomina de decomposição genética (*genetic decompositions*) do conceito.

Em Dubinsky e McDonald (2001) encontramos a proposição de que:

> Finalmente, um esquema para um certo conceito matemático é uma coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas do indivíduo que são ligados por alguns princípios gerais para formar uma estrutura na mente do indivíduo que deve ser usada em uma situação problema envolvendo esse conceito (p. 3, tradução nossa)[17].

Os autores afirmam que essa estrutura deve ser coerente, no sentido de que ela forneça, explicitamente ou implicitamente, meios para determinar quais fenômenos estão no âmbito do esquema e quais não. Ou seja, para Dubinsky e McDonald (2001) com a teoria APOS todas as entidades matemáticas podem ser representadas em termos de ações, processos, objetos e esquemas.

Para os autores a teoria faz previsões que podem ser testadas, se uma coleção particular de ações, processos, objetos e esquemas são construídas de uma certa maneira por um indivíduo, então esse indivíduo possivelmente será bem-sucedido usando certos conceitos matemáticos e em certos problemas e situações. As descrições detalhadas de esquemas (decomposições genéticas) em termos dessas construções mentais, de acordo com esses autores, são uma forma de organizar hipóteses sobre como a aprendizagem de conceitos matemáticos podem ocorrer.

---

[16] “For us, reflective abstraction will be the construction of mental objects and of mental actions on these objects. In order to elaborate our theory and relate it to specific concepts in mathematics, we will use the notion of schema. A schema is a more or less coherent collection of objects and processes. We will also sometimes use the term process or mental process instead of mental action when we are emphasizing it’s internal (to the subject) nature.” (DUBINSKY, 1991, p. 102)

[17] “Finally, a schema for a certain mathematical concept is an individual’s collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by some general principles to form a framework in the individual’s mind that may be brought to bear upon a problem situation involving that concept.” (DUBINSKY; MCDONALD, 2001, p. 3)

Para Dubinsky e McDonald (2001) os conceitos matemáticos construídos pelos estudantes de graduação, que a teoria APOS contempla, são: funções, tópicos de álgebra abstrata, matemática discreta, tópicos de cálculo diferencial e integral, tópicos de estatística, alguns tópicos teóricos elementares de número e frações. Nessas considerações nos parece que podemos ler em suas proposições que para esses teóricos não há distinção entre esses tipos de pensamentos matemáticos referentes a conceitos, sejam eles da educação básica ou do ensino superior.

Sfard (1991) apresenta um quadro teórico que visa investigar o papel dos algoritmos no pensamento matemático, em formação de conceitos relacionados a números e funções. A autora afirma “que os processos de aprendizagem e de resolução de problemas consistem em uma intrincada interação entre concepções operacionais e estruturais das mesmas noções” (SFARD, 1991, p. 1, tradução nossa)[18] relacionadas a formação dos conceitos de números e funções.

A autora considera que durante a formação desses conceitos ocorre a transição das operações calculatórias para objetos abstratos. Que essa transição é um processo longo e difícil, realizado em três etapas: interiorização, condensação e reificação. E que a etapa da reificação é complexa e difícil e que ela pode permanecer fora do alcance de certos estudantes.

Sfard (1991) utiliza o termo “conceito” como construção teórica no âmbito do universo formal do conhecimento ideal e “concepção” como todo o conjunto de representações internas evocadas pelo conceito. A concepção operacional de um conceito está relacionada a processos, algoritmos e ações. A autora ressalta que as concepções operacionais e estruturais de uma noção matemática não são mutuamente exclusivas, são facetas inseparáveis, embora drasticamente diferentes, sendo uma dualidade e não uma dicotomia.

Sfard (1991) também bebe na teoria de Piaget (1970) ao considerar dois modos diferentes de pensamentos matemáticos: o figurativo, com os estados momentâneos e estáticos (concepção estrutural); e o operativo, com as transformações (concepção operacional). Ela afirma que a concepção operacional se constitui antes da concepção estrutural.

Essa pesquisadora leva em conta o desenvolvimento epistemológico-histórico dos conceitos de número e de função, para organizar sua proposta. Ela separa o

[18] “that the processes of learning and of problem-solving consist in an intricate interplay between operational and structural conceptions of the same notions.” (SFARD, 1991, p. 1)

desenvolvimento da formação do conceito em três etapas distintas, que correspondem a três graus de estruturação. Essas etapas são nomeadas com base em uma análise puramente teórica da relação entre processos e objetos, indicado no que segue:

> À luz da mesma análise, nosso modelo de aprendizagem pode agora ser refinado em linhas semelhantes: se a conjectura sobre origens operacionais de objetos matemáticos for verdadeira, então primeiro deve haver um processo realizado nos objetos já familiares, então a ideia de transformar esse processo em uma entidade autônoma deve emergir e finalmente a capacidade de ver essa nova entidade como um objeto integrado, como todo, deve ser adquirida. Nós chamaremos essas três etapas do desenvolvimento de conceitos de interiorização, condensação e reificação respectivamente [19]. (SFARD, 1991, p.18, tradução nossa)

Na fase de interiorização, apreendem-se os processos que darão origem a um novo conceito. Tratam-se de operações realizadas em objetos matemáticos de nível inferior em que gradualmente, o estudante torna-se habilidoso para executar tais processos, afirma Sfard (1991).

A fase de condensação é um período de comprimir longas sequências de operações em unidades mais gerenciáveis. Nessa fase, o estudante se torna cada vez mais capaz de pensar em um determinado processo globalmente, sem sentir vontade de entrar em detalhes. Como no caso de procedimentos informáticos, um nome pode ser dado a esse conjunto condensado. Esse é o ponto em que um novo conceito nasce oficialmente, de acordo com a autora.

A reificação, para Sfard (1991) é definida como uma mudança ontológica, “uma capacidade súbita de ver algo familiar sob uma luz totalmente nova” (p. 20, tradução nossa)[20]. Ela afirma que enquanto a interiorização e a condensação são mudanças graduais, quantitativas, a reificação é um salto quântico instantâneo: “um processo solidifica-se em objeto, no interior de uma estrutura estática” (p. 20, tradução nossa)[21]. Várias representações do conceito tornam-se semanticamente unificadas por essa construção abstrata, puramente imaginária. De acordo com a autora, a nova entidade logo se separa do processo que a produziu e começa a extrair seu significado pelo fato de ser um membro de uma determinada categoria, e destaca:

---

[19] “In the light of the same analysis, our model of learning can now be refined along similar lines: if the conjecture on operational origins of mathematical objects is true, then first there must be a process performed on the already familiar objects, then the idea of turning this process into an autonomous entity should emerge, and finally the ability to see this new entity as an integrated, object like whole must be acquired. We shall call these three stages in concept development interiorization, condensation and reification, respectively.” (SFARD, 1991, p. 18)

[20] “a sudden ability to see something familiar in a totally new light.” (SFARD, 1991, p. 20)

[21] “a process solidifies into object, into a static structure.” (SFARD, 1991, p. 20)

> [...] os efeitos benéficos que a reificação pode ter na aprendizagem. Como explicado anteriormente, a formação de uma concepção estrutural significa reorganizar o esquema cognitivo adicionando novas camadas - transformando agregados sequenciais em estruturas hierárquicas (SFARD, 1991, p. 28, tradução nossa)[22].

Sfard (1994) afirma que experiência física faz o estudante pensar nos processos realizados em certos objetos e na produção de objetos; e "o nome 'reificação' foi dado ao ato de criação das entidades abstratas apropriadas" (p. 53, tradução nossa)[23]. Para a autora a afirmação básica subjacente a essas ideias é que, do ponto de vista do desenvolvimento, as concepções operacionais precedem as estruturais, isto é, a familiaridade com um processo é uma base para a reificação. A "reificação é a transição de um esquema operacional para um esquema estrutural corporificado" (p. 53, tradução nossa).[24]

Anna Sfard não publicou com David Tall, sua teoria está relacionada ao estudo do papel dos algoritmos no pensamento matemático para a formação de conceitos matemáticos, em especial número e função. E então podemos admitir também que para Anna Sfard, não há distinção entre pensamento matemático avançado e elementar. Ela trata da formação desse pensamento em suas etapas.

Ao nos reportarmos à epistemologia da matemática visando a compreensão da formação do pensamento matemático avançado, voltamos a David Tall. O autor destaca que há uma maior complexização do pensamento matemático a partir do momento da axiomatização da matemática, no início do século XX, quando a matemática avançada passou a ser construida por meio de teorias axiomáticas, sendo os axiomas, definições conceituais. E ele retroage a esse momento histórico para explicar seu posicionamento quando diz que "pensar em matemática avançada não é sempre um processo lógico, pois a criação de ideias matemáticas envolve ressonâncias associativas entre ideias previamente desconectadas"(TALL, 1988, p. 5, tradução nossa)[25].

---

[22] "[...] the beneficial effects reification can have on learning. As explained before, formation of a structural conception means reorganizing the cognitive schema by adding new layers - by turning sequential aggregates into hierarchical structures." (SFARD, 1991, p. 28)

[23] "the name 'reification' was given to the act of creation of the appropriate abstract entities." (SFARD, 1994, p. 53)

[24] "reification is the transition from an operational to a structural embodied schema." (SFARD, 1994, p. 53)

[25] "thinking in advanced mathematics is not always a logical process, for the creation of mathematical ideas involve associative resonances between previously disconnected ideas." (TALL, 1988, p. 5)

Mas o autor não diferencia completamente os dois tipos de pensamento matemático, avançado e elementar, pois não os distingue quando se refere à criatividade e à generalização. Ele assim o faz quando envolve a abstração.

Em 1991 quando organiza o livro *Advanced Mathematical Thinking* ele adverte sobre a complexidade de se estudar o pensamento matemático avançado citando Hadamard (1945 *apud* TALL, 2002), que destacou a dificuldade em discutir a natureza da psicologia do pensamento matemático avançado. Tall (2002)[26] afirma que para discutir essa natureza é necessário o envolvimento de duas áreas do conhecimento, a psicologia e a matemática, para que ela seja tratada adequadamente no âmbito da cognição. A interseção entre essas duas áreas tem sido investigada por matemáticos, de um lado e por psicólogos, de outro. O psicólogo procura aplicar as teorias do seu campo de estudo aos processos de pensamento do estudante, de um modo mais complexo. O matemático busca *insigths* sobre o processo de pensamento criativo do estudante com intuito de melhorar a qualidade do ensino e da pesquisa.

Tall (2002) buscou esses *insigths* em seu trabalho profissional, tanto na perspectiva de pesquisador como de professor, com o intuito de associá-los ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado dos estudantes. Para esse autor o ciclo completo da atividade matemática avançada se baseia no pensamento criativo que considera o contexto de um problema de investigação matemática que leva à formulação de conjecturas, e à fase final de refinamento e prova.

O autor ressalta que em muitas atividades de investigação que ocorrem nesse ciclo também ocorrem na resolução de problemas matemáticos elementares, mas a condição para utilizar definição formal e efetuar dedução distingue o avançado do elementar.

Tall (2002) cita Skemp (1971) para afirmar que as abordagens atuais do ensino superior apresentam, aos estudantes, situações que mobilizam apenas a parte final do ciclo que envolve o pensamento matemático, ao invés de trabalhar todo o processo. Procedendo dessa forma, o poder desse tipo de pensamento fica limitado. Ainda nessa perspectiva de crítica a certas abordagens de ensino, ele cita outra ocorrência que considera gravíssima, a apresentação lógica de um objeto ou conceito

[26] Nesta pesquisa foi utilizada uma reedição do livro *Advanced Mathematical Thinking* de 2002.

matemático, o que pode não ser adequado para o desenvolvimento cognitivo do estudante.

O autor afirma que a teoria cognitivista do pensamento matemático avançado revela os obstáculos cognitivos que surgem a medida em que os estudantes do ensino superior lutam para chegar a um acordo com ideias que desafiam e contradizem as estruturas do conhecimento que eles têm naquele momento de sua aprendizagem. Afirma também que, qualquer teoria da psicologia do pensamento matemático avançado deve ser considerada no contexto de atividade mental e cultural humana, e que não existe uma forma verdadeira e absoluta de pensamento matemático e sim diversas formas de pensar, culturalmente, e vários aspectos relativos a contextos.

Além disso, como já dito anteriormente Tall (2002) ressalta que a transição do pensamento matemático elementar para o avançado requer um grande esforço dos estudantes universitários que ingressam na universidade. Devem realizar uma reconstrução cognitiva.

Tall e Vinner (1981) afirmam que a distinção é feita entre o modo de pensar do indivíduo sobre um conceito e sua definição formal, distinguindo a matemática como uma atividade e como um sistema formal. Para esses autores o cérebro humano não é uma entidade puramente lógica, a forma complexa de seu funcionamento, frequentemente, está em desacordo com a lógica matemática. Para se referirem a essa forma complexa definem um termo específico: “Nós usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados” (p. 2, tradução nossa)[27]. Eles afirmam que a imagem conceitual (*concept image*) é construída ao longo dos anos por meio das experiências de todos os tipos, mudando à medida que o estudante encontra novos estímulos e amadurece. A imagem conceitual do estudante se desenvolve de forma não coerente em quase todos os momentos, e a entrada sensorial excita certos caminhos e inibe outros, e, que, dessa forma diferentes estímulos podem ativar diferentes partes da imagem conceitual do estudante desenvolvendo-a de uma maneira não coerente; dessa forma é possível que pontos de vistas conflitantes sejam mantidos na mente do estudante e sejam

[27] “We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes.” (TALL; VINNER, 1981, p. 2)

evocados em diferentes momentos, sem que o estudante esteja consciente do conflito, até que sejam evocados novamente.

Esses dois autores introduzem também o conceito de definição conceitual (*concept definition*) que é diferente do conceito de imagem conceitual. A definição conceitual como o próprio nome já diz, especifica um conceito, pode ser expressa por um estudante de forma rotineira ou de forma significativa e relacionada ao conceito global. Pode ser uma reconstrução pessoal feita pelo estudante a partir de uma definição formal, é a expressão em palavras que o estudante usa para explicitar sua imagem conceitual evocada. Tall e Vinner (1981) dizem que uma definição conceitual pessoal pode ser diferente da definição conceitual formal, sendo a definição conceitual formal aquela que é aceita pela comunidade matemática, em geral.

Outro conceito proposto por David Tall em sua tese de doutorado, em 1986, e que se relaciona com a formação do pensamento matemático, é a noção de organizador genérico (*generic organiser*). Ao introduzir essa noção, Tall (1989) tinha a intenção de complementar a noção de organizador prévio proposta por David Ausubel, psicólogo da educação norte americano. Na teoria da aprendizagem significativa desse autor, um organizador prévio é um material apresentado, antecipadamente, em um nível mais alto de generalidade, inclusão e abstração que a tarefa de aprendizagem em si, está explicitamente relacionado tanto com ideias existentes na estrutura cognitiva do estudante como com a aprendizagem da tarefa em si, preenchendo a lacuna entre o que ele já sabe, e o que ele precisa saber para se apropriar do conhecimento, em melhores condições.

Para Tall (1989) a noção de organizador prévio exige que o estudante possua uma estrutura cognitiva apropriada, e para situações em que o estudante não possua tal estrutura ele sugeriu a noção de organizador genérico. O autor denominou de organizador genérico a um ambiente (ou micromundo) que permite ao estudante manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático com a intenção de ajudá-lo a adquirir experiências que proporcionem uma mudança em sua estrutura cognitiva, na qual o estudante possa refletir para construir conceitos mais abstratos. O autor ressalta: ”O termo ‘genérico’ significa que a atenção do aprendiz é dirigida a certos aspectos dos exemplos que incorporam o conceito mais abstrato" (TALL, 1989, p. 6, tradução nossa)[28].

Outra noção introduzida por Gray e Tall (1994) foi a noção de proceito (*procept*) para indicar o uso do símbolo matemático como um processo e como um conceito (por exemplo: adição e soma). Para esses autores os processos começam como procedimentos passo a passo, que são otimizados em processos que podem ser considerados como um todo sem ter a necessidade de realizá-los. Os símbolos são usados para permitir que a mente opere entre o procedimento ou processo, de um lado, e o conceito mental, do outro. Para os autores: "O desenvolvimento consiste no uso cada vez mais sofisticado de símbolos que diferem em qualidades de flexibilidade e habilidade para pensar matematicamente" (TALL, 2000, p. 214, tradução nossa)[29].

Os estudos de David Tall relacionados à formação do pensamento matemático e suas formas, enveredaram para a teoria dos três mundos da matemática, cuja elaboração se iniciou em 2003 com Watson e Spirou, mais particularmente com a pesquisa de Watson sobre conceitualização de vetor em Watson *et al*. (2003).

É no livro *How Humans Learn to Think Mathematically - Exploring the Three Worlds of Mathematics*, que Tall (2013) destaca três modos essencialmente diferentes em que o pensamento matemático se desenvolve: o conceitual corporificado, o operacional simbólico e o axiomático formal.

Nessa nova investida teórica Tall (2013) não separa o pensamento matemático em elementar e avançado, mas o caracteriza de modos diferentes.

O modo conceitual corporificado é aquele que o desenvolvimento de imagens mentais acontece a partir de percepções e ações humanas, que vão sendo verbalizadas em formas cada vez mais sofisticadas e se tornam perfeitas entidades mentais na imaginação do estudante; o modo operacional simbólico cresce a partir de ações físicas em procedimentos matemáticos. O autor afirma que alguns estudantes podem permanecer em um nível processual e outros podem conceber os símbolos de forma flexível (proceito) como operações a executar, e, para serem operados por meio do cálculo e da manipulação. Por fim o modo axiomático formal é aquele em que o

[28] "The term 'generic' means that the learner's attention is directed at certain aspects of the examples which embody the more abstract concept." (TALL, 1989, p. 6)
[29] "Development consists of increasingly sophisticated usage of symbols with differing qualities of flexibility and ability to think mathematically." (TALL, 2000, p. 214)

conhecimento formal de um sistema axiomático especifico toma forma. Os conceitos são identificados por definições, e as propriedades devem ser deduzidas pela prova matemática, para serem aceitas.

Tall (2013) nomeia esses modos essenciais de pensar matematicamente em "mundos" e afirma que os três mundos estão intimamente integrados em um quadro mais amplo. O autor ainda destaca que na matemática escolar a corporificação e o simbolismo se desenvolvem paralelamente, mas de tal modo que ações corporificadas dão lugar a operações simbólicas e o simbolismo tem representações corporificadas. E na medida em que a abstração estrutural passa a necessitar de definições de conceitos e de deduções de propriedades desses conceitos é que o pensamento formal corporificado e o pensamento formal simbólico, estão se constituindo no formalismo axiomático.

É nessa perspectiva dos três mundos que Tall (2013) criou os conceitos *set-before* e *met-before*. Com o termo *set-before* ele designa "uma estrutura mental com a qual nós nascemos, e que pode demorar um pequeno tempo para amadurecer enquanto o nosso cérebro faz conexões no início da nossa vida" (p. 84, tradução nossa)[30] e com o termo *met-before* ele se refere a "uma estrutura mental que temos agora como resultado de experiências que tivemos antes" (p. 84, tradução nossa)[31].

Para o desenvolvimento desses dois conceitos Tall (2013) parte da hipótese que há *set-befores* fundamentais que evoluem de maneiras diferentes para cada indivíduo, pois os *met-before*s de cada indivíduo são constituídos por experiências anteriores, algumas das quais podem dar suporte a uma nova situação ou para alguns problemas. Para o autor os *set-befores* fundamentais compreendem o(a): "(1) reconhecimento de padrões, semelhanças e diferenças; (2) repetição de ações para construir no âmbito de sequências repetitivas; (3) linguagem para nomear e refinar conceitos encontrados, incluindo a linguagem cotidiana e o simbolismo especial da matemática" (p. 85, tradução nossa)[32]. Tall (2013) afirma que os dois primeiros se referem à percepção sensorial humana (entrada) e à ação motora (saída) e o terceiro

---

[30] "a set- before is 'a mental structure that we are born with, which may take a little time to mature as our brains make connections in early life." (TALL, 2013, p. 84)
[31] "a met-before is 'a mental structure we have now as a result of experiences we have met before." (TALL, 2013, p. 84)
[32] "(1) recognition of patterns, similarities and differences; (2) repetition of actions to build into repeatable sequences; (3) language to name and refine concepts encountered, including everyday language and the special symbolism of mathematics." (TALL, 2013, p. 85)

permite formular conceitos matemáticos cada vez mais sofisticados a medida que o indivíduo reflete sobre suas percepções e ações.

Dreyfus (2002) companheiro de David Tall no estudo da concepção de pensamento matemático elementar e avançado chama a atenção para a importância de como ocorre o processo de aprendizagem na mente do estudante e como compreender esse processo sempre foi considerado muito importante por professores de matemática. Tal processo pode ser rápido para alguns, mas, frequentemente, depende de longa sequência de atividades, durante a qual uma variedade de processos mentais ocorre e interage. Ele afirma que os pesquisadores em educação matemática também se tornaram conscientes da importância dos processos que constituem a compreensão da matemática avançada, e suas interações. Justifica esse interesse como um componente teórico básico que propicia a compreensão do funcionamento da mente do estudante, pois os processos do pensamento matemático que o professor espera provocar na mente do estudante com seu ensino, não são espontâneos, e quando ocorrem, apenas uma pequena parte dos estudantes tem consciência disso. Dreyfus (2002) desenvolve essa ideia indicando que a "reflexão sobre a experiência matemática é um aspecto importante do meta-conhecimento, outro meta-processo. Essa reflexão é uma característica do pensamento matemático avançado" (p. 25, tradução nossa)[33].

Dreyfus (2002) não faz distinção nítida entre muitos dos processos do pensamento matemático elementar e avançado, embora considere que a matemática avançada esteja mais focada nas abstrações de definição e de dedução. Como já citado anteriormente, muitos dos processos do pensamento matemático avançado estão presentes no pensamento de crianças em conceitos matemáticos elementares, cita como exemplo o conceito de número e posição relativa. E ainda considera que é possível pensar em tópicos de matemática avançada de uma maneira elementar e que há um pensamento bastante avançado em tópicos de matemática elementar. Uma característica que ele considera que distingue esses dois tipos de pensamento é a complexidade durante a realização de uma atividade matemática e de como ela é

[33] "reflection about one's mathematical experience is an important aspect of meta-cognizing, another meta-process. Such reflection is a characteristic of advanced mathematical thinking." (DREYFUS, 2002, p. 25)

tratada, e que os processos mais poderosos para gerenciar essa complexidade são os processos de abstração e de representação.

Levando suas reflexões teóricas para o ensino da matemática no nível superior Dreyfus (2002) diz que um típico curso de matemática em nível superior de primeiro ano tem um programa bem definido, deixando o professor e os estudantes informados sobre quais conteúdos devem ser ensinados e aprendidos durante aquele período. Para o professor o conteúdo a ser ensinado é bem conhecido e aceito pela comunidade matemática. O pesquisador afirma que o professor organiza suas aulas de forma a cobrir todos os conteúdos previstos no período, e, ao organizá-las, um aspecto muito importante da matemática está sendo ensinada e apresentada aos estudantes: o produto final do conhecimento matemático, que é totalmente aceito pela comunidade matemática. E continuando suas considerações, o autor ainda afirma que esse tipo de ensino tem várias vantagens (por exemplo: permite estruturar a disciplina, permite prever o progresso dos conteúdos da disciplina e cumprir o programado durante o período planejado), mas tem desvantagens muito sérias (por exemplo: inflexibilidade em termos de adaptação dos estudantes). Dreyfus (2002) reforça que esse tipo de programa funciona para estudantes que se especializam em matemática, ou que tenham um talento para esse tipo de investigação, mas para a grande maioria dos estudantes não funciona.

Outro aspecto que interessou a Dreyfus (2002) foi o de indicar semelhanças entre o processo de aprendizagem e o processo de pesquisa. Para ele em ambos os casos o indivíduo tem que fazer manipulações mentais, investigar e descobrir propriedades e relações sobre os objetos em que o seu conhecimento é parcial e fragmentado. O processo de pesquisa é extraordinariamente complexo, assim como o processo de aprendizagem, e esse processo contém a essência do pensamento matemático avançado.

> Em outras palavras, o pensamento matemático avançado consiste em uma grande variedade de processos de componentes interativos. É importante que o professor de matemática seja consciente desses processos, a fim de compreender algumas das dificuldades que seus estudantes enfrentam (DREYFUS, 2002, p. 30, tradução nossa).[34]

---

[34] “In other words, advanced mathematical thinking consists of a large array of interacting component processes. It is important for the teacher of mathematics to be conscious of these processes in order to comprehend some of the difficulties which their students face.” (DREYFUS, 2002, p. 30)

Dreyfus (2002) destaca as representações entre esses processos chamando a atenção para a importante função das mesmas na matemática. Os símbolos, diz ele, são absolutamente indispensáveis na matemática moderna, mas contrapõe destacando que existe algum perigo, para a aprendizagem, associado a eles. O pesquisador afirma que os símbolos servem para identificar um conhecimento implícito no estudante e explica que "[...] deve haver algum significado associado a uma noção antes que um símbolo para essa noção seja utilizado, no discurso educacional do ensino de matemática, isso é muitas vezes ignorado, levando ao fenômeno conhecido de 'símbolo empurrado'" (DREYFUS, 2002, p. 30, tradução nossa).[35]

Ele também classifica as representações em simbólicas e mentais. Uma representação é considerada simbólica se ela é escrita ou falada e é utilizada para facilitar a comunicação do conceito; e é considerada mental se representa os esquemas internos de quadro de referência que um estudante a usa para interagir com o mundo externo. Essa interação pode diferir de estudante para estudante.

Nessa perspectiva da representação mental, Dreyfus (2002) destaca que a visualização desempenha um papel essencial no trabalho de muitos matemáticos eminentes. Isso porque, visualizar é um processo pelo qual as representações mentais podem fazer as tais interações com o mundo externo. E assim sendo, para que um estudante seja bem-sucedido em matemática, é desejável que ele tenha ricas representações mentais de conceitos, mas em geral o que acontece é que, ao contrário, a maioria dos estudantes tem pobres representações mentais de conceitos, um dos fatores que os prejudicam sua aprendizagem matemática. Para ele seria desejável que o estudante tivesse múltiplas representações mentais dos objetos e conceitos, e múltiplas ligações entre elas permitindo o uso simultâneo dessas representações e alternando de modo adequado de acordo com o problema ou situação. E ainda complementa dizendo que ter várias representações de um conceito não é suficiente para resolver problemas, pois é preciso mudar de representação sempre que a outra seja mais eficiente. Ele afirma que o processo de tradução está

[35] "There must be some meaning associated with a notion before a symbol for that notion can possibly be of any use; in the educational discourse of teaching mathematics, this is too often overlooked leading to the well-known phenomenon of 'symbol pushing''. (DREYFUS, 2002, p. 30)

intimamente ligado à mudança de representação e que o significado da tradução é relevante para o pensamento matemático avançado.

Ainda falando sobre o papel das representações na formação do pensamento matemático, Dreyfus (2002) vai utilizar o termo modelagem, para comparar a busca de uma representação matemática para um objeto ou um processo. Modelar para o autor significa construir uma estrutura matemática que incorpore características essenciais do objeto, sistema ou processo; essa estrutura, o modelo, pode ser usada para estudar o comportamento do objeto ou do processo que está sendo modelado.

Os processos de representar e modelar são análogos, mas em níveis diferentes. Na modelagem a situação é o sistema físico e o modelo é matemático, na representação o objeto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é uma estrutura mental.

O autor defenderá que muitos desses processos ocorrem em qualquer nível de pensamento matemático, mas há outros processos que assumem uma grande importância à medida que a experiência e a habilidade matemática dos estudantes se desenvolve, e que os conteúdos que lidam com esses processos se tornam mais avançados. Para ele o processo “mais importante, entre esses processos avançados é a abstração. Se um estudante desenvolve a capacidade de, conscientemente, efetuar abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático” (DREYFUS, 2002, p. 34, tradução nossa)[36]. Entre esses processos, ele apresenta outros dois, que além da representação formam uma base para o processo de abstração: a generalização e a síntese. Para o autor generalizar é derivar ou induzir particularidades, identificar pontos em comum, expandir domínios de validade em uma atividade matemática. E sintetizar significa combinar ou compor partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade. Esse conjunto, muitas vezes equivale a mais do que a soma das partes.

Sintetizando as reflexões apresentadas até aqui apontamos que Dreyfus (2002) vai considerar que grande parte do poder do pensamento matemático está associado ao processo de abstração; que esse processo está intimamente ligado ao processo de generalização e que os principais incentivos para abstração são a natureza geral

[36] “the most important among these advanced processes is abstracting. If a student develops the ability to consciously make abstractions from mathematical situations, he has achieved an advanced level of mathematical thinking.” (DREYFUS, 2002, p. 34)

dos resultados que podem ser obtidos, e a realização de síntese. Ele diz que a "generalização geralmente envolve uma expansão da estrutura do conhecimento do indivíduo enquanto que a abstração envolve uma (re)construção mental" (DREYFUS, 2002, p. 36, tradução nossa)[37] e considera que nem o processo de generalização e nem o de síntese trazem demandas cognitivas pesadas aos estudantes como o processo de abstração.

A partir do que foi exposto até este momento nos fundamentaremos nos aportes teóricos descritos para categorizar os trabalhos acadêmicos que têm por temática a formação do pensamento matemático avançado e na sequência proceder com as análises, uma análise baseada em quantidades e outra análise qualitativa.

[37] "generalization usually involves an expansion of the individual's knowledge structure whilst abstraction is likely to involve a mental re-construction." (DREYFUS, 2002, p. 36)

CAPÍTULO 3

Metodologia de pesquisa e procedimentos metodológicos

Optamos por realizar uma pesquisa de caráter bibliográfico, uma modalidade de pesquisa que tem como principal característica a utilização de dados/informações de documentação escrita para a análise de suas questões. Nesse tipo de pesquisa, a coleta de dados/informações é feita pelo fichamento das leituras, o qual ajuda a organizar de maneira sistemática os registros relativos as informações. A pesquisa se insere no âmbito de uma investigação documental, na qual os documentos se apresentam estáveis no tempo e ricos como fonte de informações, podendo ser: filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas, cadernos de alunos, etc. Dentre os vários tipos de estudos bibliográficos ou documentais se destacam: a meta-análise, os estudos do estado da arte e os estudos tipicamente históricos (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Para atingir nossos objetivos optamos por realizar uma meta-análise que segundo os autores é uma revisão sistemática de outras pesquisas, visando realizar uma avaliação crítica e/ou produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos, transcendendo aqueles anteriormente obtidos. Em nosso trabalho buscamos: compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado na produção brasileira, de dissertações e teses defendidas no período de 2010 a 2016; e avaliar que resultados foram aferidos nesses trabalhos e se os mesmos expressam, de algum modo, as diferentes concepções dessa noção.

Para a organização das análises utilizaremos a análise de conteúdo como metodologia de pesquisa, desenvolvida pela professora e pesquisadora francesa Laurence Bardin. Segundo a autora a análise de conteúdo é “um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (BARDIN, 2011, p. 44). A autora afirma que a “intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção (ou, eventualmente, de recepção), inferência essa que recorre a indicadores (quantitativos ou não)” (p. 44).

Para a autora os principais objetivos dos métodos de análise de conteúdo são: a superação da incerteza - “o que eu julgo ver na mensagem estará lá efetivamente contido, podendo esta ‘visão’ muito especial ser partilhada por outros? Por outras palavras, será a minha leitura válida e generalizável?” (BARDIN, 2011, p. 35); e o enriquecimento da leitura - “se um olhar imediato, espontâneo, é já fecundo, não poderá uma leitura atenta aumentar a produtividade e a pertinência?” (p. 35)

Para Bardin (2011) a análise de conteúdo possui duas funções que na prática podem ou não se dissociar:

> - Uma função heurística: a análise de conteúdo enriquece a tentativa exploratória, aumenta a propensão para a descoberta. É a análise de conteúdo “para ver o que dá”.
>
> - Uma função de “administração da prova”. Hipóteses sob a forma de questões ou de afirmações provisórias, servindo de diretrizes, apelarão para o método de análise sistemática para serem verificadas no sentido de uma confirmação ou de uma infirmação[38]. É a análise de conteúdo “para servir de prova” (pp. 35-36).

Essas inferências, de acordo com a pesquisadora, podem responder a dois tipos de problemas:

> - O que levou a determinado enunciado? Este aspecto diz respeito às causas ou antecedentes da mensagem;
>
> - Quais as consequências que determinado enunciado vai provavelmente provocar? Isto refere-se aos possíveis efeitos das mensagens (BARDIN, 2011, p. 45).

Segundo Bardin (2011) o objetivo da análise de conteúdo “é a manipulação de mensagens (conteúdo e expressão desse conteúdo) para evidenciar os indicadores que permitam inferir sobre uma outra realidade que não a da mensagem” (p. 52).

De acordo com a autora a análise de conteúdo é organizada em torno de três polos cronológicos: (1) a pré-análise; (2) a exploração do material e; (3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Para Bardin (2011) a pré-análise (1) é a fase de organização da pesquisa e “corresponde a um período de intuições e tem por objetivo tornar operacionais e sistematizar as ideias iniciais, de maneira a conduzir a um esquema preciso do desenvolvimento das operações sucessivas, num plano de análise” (p. 126). De acordo com a autora essa primeira fase tem três objetivos: “a escolha dos documentos

[38] Infirmar - verbo transitivo - 1. Tirar força, a validez ou a autoridade a. 2. Invalidar. 3. Revogar. 4. Anular. Informação retirada de: www.priberam.pt Acesso em 21 jul. 2018

a serem submetidos à análise; a formulação de hipóteses e dos objetivos; e a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final” (p. 125).

Nessa fase Bardin (2011) cita a leitura ‘flutuante’ que consiste em estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações, foi nesse momento que selecionamos as dissertações e teses e fizemos a leitura dos resumos de cada trabalho. A escolha dos documentos é o universo de documentos de análise que pode ser determinado *a priori*, ou “então o objetivo é determinado e, por conseguinte, convém escolher o universo de documentos suscetíveis de fornecer informações sobre o problema levantado” (p. 126). Com o universo demarcado, é muitas vezes necessário proceder a constituição de um *corpus*. Para Bardin (2011) “*corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (p. 126), em nossa pesquisa o *corp*us foi constituído a partir do critério de que as pesquisas deveriam ter utilizado como referencial teórico a teoria do pensamento matemático avançado. A sua constituição implica, muitas vezes em escolhas, seleções e regras (da exaustividade, da representatividade, da homogeneidade e de pertinência).

A autora se refere à formulação das hipóteses e dos objetivos da seguinte forma: “trata-se de uma suposição cuja origem é a intuição e que permanece em suspenso enquanto não for submetida à prova de dados seguros” (BARDIN, 2011, p. 128). O objetivo “é a finalidade geral a que se propõem o quadro teórico e/ou pragmático, no qual os resultados obtidos serão utilizados” (p. 128). Para essa autora a referenciação de índices e a elaboração de indicadores em função das hipóteses, a organização sistemática de indicadores e a preparação do material se tratam de uma preparação do *corpus* para em seguida iniciar a exploração do material.

Bardin (2011) afirma que a exploração do material (2) depende das diferentes operações feitas na pré-análise, e que essa exploração “é mais do que a aplicação sistemática de decisões tomadas” (p. 131). Essa fase é longa e fastidiosa e consiste “em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas” (p. 131).

Após a exploração do material, os resultados brutos são tratados (3) de maneira a serem significativos e válidos de acordo com a hipótese. Bardin (2011) afirma que operações estatísticas “permitem estabelecer quadros de resultados, diagramas, figuras e modelos, os quais condensam e põem em relevo as informações fornecidas pela análise” (p. 131). E que o “analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis, pode então propor inferências e adiantar interpretações a propósito dos objetivos previstos - ou que digam respeito a outras descobertas inesperadas” (p. 131).

Em nosso trabalho como forma de iniciar nossa meta-análise selecionamos os trabalhos acadêmicos (dissertações e teses) que utilizaram, como referencial teórico, a teoria cognitivista do pensamento matemático avançado desenvolvida por David Tall e Tommy Dreyfus. Vale ressaltar que diversos conceitos foram criados ao longo do tempo durante o desenvolvimento dessa teoria cognitivista, apresentamos alguns desses conceitos que apareceram no *corpus* da pesquisa: imagem conceitual e definição conceitual, organizador genérico, raiz cognitiva, processos mentais, proceito (*procept*) e os três mundos da matemática. Alguns desses conceitos veem em continuação aos estudos de David Tall relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático nos seres humanos, desde o seu nascimento.

A seleção das dissertações e teses, com essas características, foi feita por meio de uma busca no Banco de Teses e Dissertações da CAPES[39], indicamos para busca o seguinte termo: “pensamento matemático avançado”, pois esta de acordo com o nosso objetivo de pesquisa que é identificar noções do pensamento matemático avançado em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016, escolhemos esse período com o critério de ser pesquisas defendidas recentemente (nos últimos 5 anos), foram encontrados trinta e oito trabalhos (*corpus* inicial da pesquisa).

A partir da leitura dos resumos, desses trinta e oito trabalhos acadêmicos, foram considerados, de acordo com o nosso critério, aqueles que incluíam entre os referenciais para a análise de dados, o termo pensamento matemático avançado e/ou os conceitos relacionados a esse pensamento, e que tinham sido publicados a partir de 2010 (publicações recentes), totalizando 26 trabalhos: 21 dissertações e 5 teses, constituindo assim o *corpus* definitivo para a análise.

Dos doze trabalhos descartados, alguns não foram publicados no período estipulado pelo nosso critério de pesquisa (2010 a 2016), outros estavam relacionados com o pensamento algébrico (generalização de padrões), pensamento aritmético, teoria APOS e alguns não tinham seus resumos disponibilizados, por serem trabalhos

[39] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

realizados antes da implantação da plataforma Sucupira[40]. Verificamos se esses trabalhos poderiam ser encontrados em plataforma digitais de programas de pós-graduação, porém não estavam disponíveis na íntegra, somente seu resumo o que inviabilizou nossa leitura e assim não puderam ser incluídos no *corpus* definitivo para as análises.

A seguir apresentamos o Quadro 1 com a indicação dos trabalhos selecionados, organizados cronologicamente e divididos em dissertações e teses:

Quadro 1: *Corpus* de documentos selecionados (teses e dissertações)

ANO	AUTOR(ES) E TÍTULO DO TRABALHO	FONTE	TIPO
2010	ANGELINI, N. M. Funções: um estudo baseado nos três mundos da matemática	UNIBAN/SP	Mestrado
2011	AMORIM, L. I. F. A (re)construção do conceito de limite do cálculo para análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática	UFOP/MG	Mestrado
2011	ANDERSEN, E. As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em matemática	PUC/SP	Mestrado
2011	FONSECA, V. G. O uso de tecnologias no ensino médio: a integração de *Mathlets* no ensino de função afim	UFRJ/RJ	Mestrado
2011	FRANCO, H. J. R. Os diversos conflitos observados em alguns alunos de licenciatura num curso de álgebra: identificação e análise	UFJF/MG	Mestrado
2011	NOVAIS, A. S. Equações indeterminadas e lugares geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em R^2	UFRJ/RJ	Mestrado
2011	SANTOS, A. T. C. O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do *software* GeoGebra	PUC/SP	Mestrado
2012	BERTOLAZI, K. S. Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares	UEL/PR	Mestrado

[40] Ferramenta digital que proporciona a coleta de informações, realização de análises e avaliações e é a base de referência do Sistema Nacional de Pós-Graduação (SNPG). Informação retirada de: http://www.capes.gov.br/avaliacao/plataforma-sucupira Acesso em 20 jul. 2018

2012	FONSECA, D. S. S. M. Convergências de sequências e séries numéricas no cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos	UFOP/MG	Mestrado
2012	KIRNEV, D. C. B. Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas	UEL/PR	Mestrado
2012	POGGIO, A. M. P. P. Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do ensino médio na perspectiva dos três mundos da matemática	UNIBAN/SP	Mestrado
2012	PRADO, S. C. S. O uso da calculadora e o pensamento matemático avançado: uma análise a partir das situações de aprendizagem nos cadernos do professor de matemática	PUC/SP	Mestrado
2013	ALMEIDA, M. V. Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall	PUC/SP	Mestrado
2014	CAMPOS, J. P. Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de matemática	UNIR/RO	Mestrado
2014	GERETI, L. C. V. Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade	UEL/PR	Mestrado
2014	JUNIOR, V. C. F. Repensando o ensino de análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais	UFJF/MG	Mestrado
2014	MAÇÃO, D. P. Uma proposta de ensino para o conceito de derivada	ANHANGUERA/SP	Mestrado
2014	MARINS, A. S. Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares	UEL/PR	Mestrado
2014	PINTO, R. L. Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo	UFOP/MG	Mestrado
2015	JUNIOR, J. C. M. Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra	UFOP/MG	Mestrado
2016	OLIVEIRA, J. L. A utilização de *softwares* dinâmicos no ensino de análise real: um estudo	UFOP/MG	Mestrado

	sobre a construção do conceito de integral de Riemann		
2011	JANZEN, E. A. O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica	UFPR/PR	Doutorado
2012	YOKOYAMA, L. A. Uma abordagem multissensorial para o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com síndrome de *down*	UNIBAN/SP	Doutorado
2016	LEME, J. C. M. Aprendizagem da derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento	PUC/SP	Doutorado
2016	PRADO, E. A. Álgebra linear na licenciatura em matemática: contribuições para formação do profissional da educação básica	PUC/SP	Doutorado
2016	VIEIRA, W. Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas	ANHANGUERA/SP	Doutorado

Fonte: Elaboração nossa.

Uma vez constituído o *corpus* passamos à busca do objetivo e das questões de pesquisas. Para tal procedemos da seguinte forma: elaboramos o fichamento das dissertações e teses no qual constavam as seguintes informações: título, objetivo, referencial teórico, questão/ões de pesquisa, metodologia e procedimentos metodológicos, sujeitos de pesquisas ou documentos, nível de ensino e principais resultados. Vale ressaltar que nem todos os trabalhos apresentavam todas essas informações no resumo e no corpo texto, principalmente procedimentos metodológicos e metodologia de pesquisa e três trabalhos não apresentaram questões de pesquisa.

Com essas informações construímos o Quadro 2 com sínteses das características dos 26 trabalhos, focando o tema/conteúdo e o nível de ensino.

Quadro 2: Algumas características das pesquisas selecionados (tema/conteúdo e nível de ensino)

ANO	AUTOR	TEMA/CONTEUDO	NÍVEL
2010	ANGELINI	Conceito de função	Ensino Médio
2011	AMORIM	Limites de funções reais de uma variável	Ensino Superior

2011	ANDERSEN	Teorema Fundamental do Cálculo	Ensino Superior
2011	FONSECA	Função afim	Ensino Médio
2011	FRANCO	Álgebra Abstrata	Ensino Superior
2011	NOVAIS	Equações indeterminadas e lugares geométricos	Ensino Superior
2011	SANTOS	Função logarítmica	Ensino Médio
2012	BERTOLAZI	Sistemas de equações lineares	Ensino Superior
2012	FONSECA	Convergência de sequências e séries numéricas infinitas	Ensino Superior
2012	KIRNEV	Demonstrações matemáticas	Ensino Superior
2012	POGGIO	Conceito de proporcionalidade direta e inversa	Ensino Médio
2012	PRADO	Uso da calculadora	Ensino Fundamental II
2013	ALMEIDA	Cálculo Diferencial e Integral	Ensino Superior
2014	CAMPOS	Funções e teoria dos números	Ensino Médio
2014	GERETI	Questões discursivas do Enade	Ensino Superior
2014	JUNIOR	Ensino de análise matemática	Ensino Superior
2014	MAÇÃO	Ensino de derivada	Ensino Superior
2014	MARINS	Transformações lineares	Ensino Superior
2014	PINTO	Funções e suas derivadas	Ensino Superior
2015	JUNIOR	Ensino e aprendizagem de derivada	Ensino Superior
2016	OLIVEIRA	Integral de Riemann	Ensino Superior
2011	JANZEN	Construções de provas geométricas com auxílio do *software* GeoGebra	Ensino Superior
2012	YOKOYAMA	Ensino do conceito de número natural para crianças com síndrome de *down*	Educação Especial
2016	LEME	Aprendizagem do conceito de derivada	Ensino Superior
2016	PRADO	Disciplina de Álgebra Linear na licenciatura em matemática	Ensino Superior
2016	VIEIRA	Sequências numéricas	Ensino Superior

Fonte: Elaboração nossa.

Ao analisarmos as informações do Quadro 2, podemos afirmar que as dissertações e teses se concentraram no nível superior (19 no Ensino Superior, 5 no Ensino Médio, 1 no Ensino Fundamental II e 1 na Educação Especial) totalizando, aproximadamente, 73% das pesquisas analisadas.

Verificamos em seguida quais conteúdos matemáticos apareciam nos dezenove trabalhos do ensino superior. Observamos que a maioria se concentrava em conteúdos de análise matemática (11 trabalhos), em conteúdos de álgebra (5 trabalhos), em provas e demonstrações (2 trabalhos), e em vários conteúdos de questões discursivas do Enade[41] (1 trabalho). Algumas dessas pesquisas utilizaram vários conceitos matemáticos para investigar as dificuldades de ensino e de aprendizagem no nível superior ou para sugerir estratégias didáticas para o ensino desses conceitos/conteúdos.

Com o Quadro 3 informamos o tipo de investigação, os sujeitos de pesquisa e/ou documentos e referencial teórico.

Quadro 3: Algumas características das pesquisas selecionados (sujeitos/documentos e referencial teórico)

ANO	AUTOR	SUJEITOS/DOCUMENTOS	REFERENCIAL TEÓRICO
2010	ANGELINI	8 estudantes da 2ª série do Ensino Médio	Tall e Vinner (1981) e Tall (2004)
2011	AMORIM	Análise de livros de cálculo diferencial e integral e 9 estudantes de licenciatura em matemática	Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Pinto (2001), Reis (2001) e Tall (2003)
2011	ANDERSEN	14 estudantes de licenciatura em matemática	Dreyfus (1991)
2011	FONSECA	Estudantes da 1ª série do Ensino Médio	Tall e Vinner (1981), Duval (2003) e Sierpinska (1992)
2011	FRANCO	12 estudantes de licenciatura em matemática	Dreyfus (1991), Tall e Vinner (1981) e Tall (1999)
2011	NOVAIS	Estudantes do curso de matemática	Tall e Vinner (1981), Banard e Tall (1997),

[41] Exame Nacional de Desempenho de Estudantes

			Crowley e Tall (1999) e Tall (1989)
2011	SANTOS	6 estudantes de uma 3ª série do Ensino Médio	Dreyfus (1991) e Duval (2009)
2012	BERTOLAZI	17 estudantes de licenciatura em matemática	Dreyfus (1991), Resnick (1987), Thompson (1997) e Freire (2004, 2011)
2012	FONSECA	Estudantes da disciplina de Cálculo II do curso de Engenharia de Produção	Dreyfus (1991), Tall (1991) e Tall e Poynter (2002)
2012	KIRNEV	13 estudantes de licenciatura em matemática	Balacheff (1987) e Dreyfus (1991)
2012	POGGIO	51 estudantes de 2 turmas da 3ª série do Ensino Médio	Tall e Vinner (1981) e Tall (2004)
2012	PRADO	Caderno do professor do Ensino Fundamental II da SEE/SP	Dreyfus (1991)
2013	ALMEIDA	Artigos de David Tall e colaboradores	Tall e colaboradores
2014	CAMPOS	Sequência didática	Papert (1994) e Dreyfus (2002)
2014	GERETI	13 estudantes de licenciatura em matemática	Dreyfus (2002)
2014	JUNIOR	6 estudantes de licenciatura em matemática	Tall e Vinner (1981)
2014	MAÇÃO	Análise de 2 livros de Cálculo Diferencial e Integral e proposta de ensino	Tall (2013) e Thurston (1994)
2014	MARINS	13 estudantes do bacharelado em matemática	Dreyfus (2002) e Tall (1995)
2014	PINTO	38 estudantes de um curso de Sistemas de Informação	Tall e Vinner (1981) e Blumer (1980)
2015	JUNIOR	4 professores de matemática do Ensino Superior	Dreyfus (1991) e Tall (1995)
2016	OLIVEIRA	Estudantes de licenciatura e bacharelado em matemática	Dreyfus (1991), Tall (1986, 2000) e Reis (2001)
2011	JANZEN	2 professores universitários da Alemanha	Dreyfus (1991)

2012	YOKOYAMA	8 crianças/adolescentes com síndrome de *down*	Tall e Vinner (1981) e Tall (1989)
2016	LEME	Produção de materiais	Tall (2013)
2016	PRADO	Documentos de 6 universidades e entrevista com 8 professores do curso de licenciatura matemática	Dreyfus (1991)
2016	VIEIRA	Análise de livros, entrevistas com docentes e, questionários e entrevistas com licenciandos em matemática	Dreyfus (1991) e Fischbein (1994)

Fonte: Elaboração nossa.

Ao avaliarmos os trabalhos com base na dualidade entre pesquisa teórica ou empírica, constatamos que a maioria se constituiu de pesquisas empíricas totalizando 21 trabalhos. Entre esses trabalhos, quatro tinham professores como sujeito de pesquisa, e em treze trabalhos os sujeitos eram alunos de graduação (1 pesquisa entrevistou docentes e aplicou questionários e entrevistas aos licenciandos), quatro trabalhos tinham alunos de Ensino Médio e um trabalho alunos da Educação Especial, vale ressaltar que algumas dessas pesquisas foram documentais e aplicadas e cinco pesquisas foram documentais.

Das treze investigações cujos sujeitos eram alunos de graduação, onze foram com estudantes de cursos de Matemática, uma com estudantes de cursos de Engenharia e uma com estudantes de cursos de Sistemas de Informação. Constatamos, portanto, que há uma concentração de pesquisas com estudantes de graduação em cursos de Matemática, aproximadamente 85%.

A partir dessa análise baseada em quantidades, procuramos situar como se distribuíam os dados que indicavam as principais características que propiciam uma análise qualitativa. Buscamos assim verificar como essas características repercutiam a teoria cognitivista do pensamento matemático avançado e outros conteúdos agregados. Ou seja, fomos em busca de respostas às questões de pesquisa do trabalho; como e com que finalidade a noção de pensamento matemático avançado foi utilizada em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período 2010 a 2016? E como se apresentam os resultados dessas pesquisas relativamente ao uso dessa noção?

No próximo capítulo iniciaremos as análises qualitativas com o intuito de responder a essas questões de pesquisa.

CAPÍTULO 4

Análises

Iniciamos as análises recorrendo à ideia de categorização, que é típica das metodologias qualitativas, que têm por objetivo organizar análises em unidades estruturantes, de forma a auxiliar a manipulação de uma quantidade considerável de dados, que no caso desta tese são 26 trabalhos. A primeira ação foi analisar os objetivos, as questões de pesquisa, e em seguida as conclusões dos trabalhos selecionados. Para isso, classificamos os vinte e seis trabalhos em duas categorias e dois pares de subcategorias que se interceptam em consonância com os objetivos e questões de pesquisa.

Foram assim constituídas: Categoria 1 - Trabalhos cuja base investigativa repousa no emprego de estratégias didáticas, como o emprego de técnicas e/ou tecnologias específicas. Dessa categoria submergiram 2 subcategorias, são elas: C11- Trabalhos cujo foco repousa nas estratégias didáticas, ainda que empreguem tecnologias como parte de sua execução; e C12 - Trabalhos cujo foco repousa no uso de tecnologias para o ensino e/ou aprendizagem matemática, ainda que no âmbito de estratégias didáticas.

Na Categoria 2 - Trabalhos que investigam os processos de ensino ou de aprendizagem de matemática. Dessa categoria submergiram 2 subcategorias, são elas: C21 - Trabalhos cujo foco repousa na identificação e/ou tratamento de dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos; e C22 - Trabalhos cujo foco repousa em questões formais e epistemológicas relacionadas ao processo de ensino ou aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Os objetivos e questões de pesquisa desses trabalhos apresentaram ideias que se relacionam, por exemplo para a Categoria 1, subcategoria C11: “proposta didática”, “ferramenta didática”, “sequência didática”, “atividades exploratórias”, “proposta alternativa”, “abordagem para o ensino” e “elementos e possibilidades para ressignificar”. Já para a subcategoria C12 as ideias: “utilização integrada do *software Mathlets*”, “uso da calculadora” e “provas em geometria em um ambiente dinâmico”. Na Categoria 2, subcategoria C21 foram considerados as seguintes ideias:

“dificuldades no ensino”, “investigar dificuldades relacionadas”, “dificuldades de aprendizagem” e “conflitos de aprendizagem” e finalmente para a subcategoria C22, observamos as seguintes ideias: “registros escritos apresentados por estudantes”, “processos do pensamento matemático avançado”, “identificar a imagem de conceito e definição de conceito relativo ao conceito de função”, “analisar a compreensão de quantificação de 1 a 10 elementos de crianças e adolescentes com síndrome de *down*”, “verificar e analisar a modificações nas imagens conceituais de alunos”, “investigar os processos mentais do pensamento matemático avançado em registros escritos de estudantes”, “compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas em discussões entre estudantes” e “investigar quais são as definições apresentadas por alunos do ensino médio sobre proporcionalidade”. Essas duas categorias foram organizadas para a análise do *corpus* desta tese.

No Quadro 4 constam as dissertações e teses separadas nas duas categorias e respectivas subcategorias de classificação, distinguindo as cinco teses:

Quadro 4: Categorias de classificação das 26 pesquisas

CATEGORIA 1		**CATEGORIA 2**	
C11	**C12**	**C21**	**C22**
ANDERSEN (2011)	FONSECA (2011)	FRANCO (2011)	ANGELINI (2010)
NOVAIS (2011)	JANZEN (2011) (Tese)	KIRNEV (2012)	AMORIM (2011)
SANTOS (2011)	PRADO (2012)	ALMEIDA (2013)	BERTOLAZI (2012)
FONSECA (2012)		VIEIRA (2016) (Tese)	POGGIO (2012)
CAMPOS (2014)			YOKOYAMA (2012) (Tese)
MAÇÃO (2014)			GERETI (2014)
JUNIOR (2015)			JUNIOR (2014)
PRADO (2016) (Tese)			MARINS (2014)
			PINTO (2014)
			LEME (2016) (Tese)

			OLIVEIRA (2016)

Fonte: Elaboração nossa.

Em cada categoria foi realizado o levantamento das principais características de cada dissertação ou tese (objeto de estudo, objetivo, questões de pesquisa e conclusões).

Categoria 1: Trabalhos cuja base investigativa repousa no emprego de estratégias didáticas, como o emprego de técnicas e/ou tecnologias específicas

Subcategoria C11: Trabalhos cujo foco repousa nas estratégias didáticas, ainda que empreguem tecnologias como parte de sua execução

A dissertação de Andersen (2011) teve como objeto de estudo as ideias centrais do teorema fundamental do cálculo, e os sujeitos da pesquisa foram 14 alunos de licenciatura em matemática. Foram investigados quais processos mentais intervêm e são combinados quando os estudantes desenvolvem atividades nas quais é tratada a igualdade $F\,(x) = \int_a^x f(t)dt$ e se os tipos de atividades propostas favoreciam a compreensão das ideias centrais do referido teorema.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Quais processos mentais intervêm e são combinados quando se insere atividades que se apoiam em figuras construídas pelo aluno tanto em folha de papel quanto pelo *software Winplot* ao se tratar da expressão $F\,(x) = \int_a^x f(t)dt$?
>
> Esse tipo de atividade favorece a compreensão das ideias centrais que envolvem o teorema fundamental do cálculo? (ANDERSEN, 2011, p. 28)

Andersen (2011) afirmou que a intenção com as atividades era que o estudante levantasse conjecturas sobre as relações e as propriedades dos conceitos envolvidos na igualdade $F\,(x) = \int_a^x f(t)dt$. Em um total de 4 sessões, 3 (1ª, 3ª e 4ª) foram desenvolvidas com lápis e papel e a 2ª com o auxílio *do software Winplot*. Seguem itens dessas atividades:

> **1ª Sessão**
>
> **Atividade 1**
>
> a) Construa o gráfico da função $f\,(t) = 2t + 1$ e use as fórmulas de geometria para achar a área da região limitada pelo gráfico da função *f*, pelo eixo *t* e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = 3$;
>
> c) Se $x\ > 1$, seja *A(x)* a área da região limitada pelo gráfico da função *f*, pelo eixo *t* e pelas retas verticais $t = 1$ e $t = x$. Ache uma expressão (em função de *x*) para *A(x)* (p. 37).

> **Atividade 2**
>
> a) Esboce o gráfico da função $f\,(t) = t^2 + 1$ e assinale a região do plano limitada pelo gráfico da função *f*, pelos eixos coordenados e pela reta vertical $t = 4$;
>
> b) É possível usar fórmulas da geometria para calcular exatamente a área da região acima descrita? Justifique sua resposta (p. 38).
>
> **2ª Sessão**
>
> **Atividade 3 (Parte I)**
>
> a) Utilize o programa *Winplot* para construir o gráfico da função $f\,(t) = t^2 + 1$;
>
> b) Aperte a tecla F7. Na janela "lim inferior" digite 0. Na janela "lim superior" digite 4. Na janela "subintervalos" digite 2. Selecione apenas a opção "ponto à esq:" (as demais, devem estar desabilitadas) selecione a opção "visualizar" e clique em "definida". Preencha o quadro abaixo: [...] (ANDERSEN, 2011, p. 40).

Para a autora esse tipo de atividade pode propiciar o desenvolvimento dos processos de visualização, de representação e conversões entre diferentes representações, de descoberta, de análise, de síntese, de generalização e de abstração, em acordo com Dreyfus (2002).

Andersen (2011) afirmou que em relação aos processos mentais, os resultados de sua pesquisa evidenciaram que os alunos mobilizaram os processos de visualização, representação e conversões entre diferentes representações, síntese e generalização durante a realização das atividades propostas.

Em essência, os resultados dessa pesquisa revelaram que a natureza das atividades propostas contribuiu para que os alunos se apropriassem de inter-relações entre os conceitos envolvidos no teorema fundamental do cálculo, as escolhas feitas na elaboração das atividades foram adequadas, a autora afirmou ainda que muitos dos participantes conjecturaram que a derivação e integração são operações inversas.

A autora considerou que a noção de pensamento matemático avançado está relacionada aos processos mentais utilizados pelo estudante no desenvolvimento de uma atividade matemática em que o conteúdo em estudo se insere na área do cálculo diferencial e integral e, ao tipo de atividade proposta, no caso com o auxílio de tecnologia (*software Winplot*), de acordo com Dreyfus (2002) e Tall (2002). Nesse caso Andersen (2011) associa o pensamento matemático avançado à matemática avançada.

A dissertação de Novais (2011) teve como objeto de estudo equações indeterminadas e lugares geométricos, com o objetivo de "[...] discutir e avaliar os efeitos de uma proposta alternativa para o estudo das representações das soluções de equações e sistema de equações em R²" (p. 7), tomando como referência a noção de imagem de conceito, os sujeitos de pesquisa foram estudantes do 6º período de um curso de matemática.

Esse autor analisa e critica, em sua pesquisa, a proposta tradicional apresentada em alguns livros didáticos do ensino médio e apresenta uma proposta alternativa estruturada a partir da exploração da sequência dos seguintes conteúdos: coordenadas na reta, coordenadas no plano, lugares geométricos, equações indeterminadas e sistemas de equações, para o ensino de equações indeterminadas e lugares geométricos, tema de sua pesquisa.

A sequência didática foi voltada ao conceito de equações e estruturada a partir das seguintes ideias:

> - O estudo de estruturas unidimensionais para uma posterior extensão para estruturas bidimensionais;
>
> - A assimilação de um número real como a coordenada de um ponto na reta;
>
> - Noções de geometria analítica que fornecessem a análise, conjectura, generalização e prova de várias propriedades sobre as equações e seus gráficos;
>
> - A compreensão das noções sobre Lugar Geométrico, possibilitando a futura definição de LG como reta, circunferência, parábola, elipse, etc.;
>
> - Reconhecimento do gráfico de uma equação como o Lugar Geométrico das soluções desta equação;
>
> - O entendimento que a solução de um sistema de equações é dada pelos pontos de interseção entre os Lugares Geométricos de cada uma das equações (NOVAIS, 2011, pp. 59-60)

O autor buscou, por meio dessa sequência didática, enriquecer a imagem de conceito dos estudantes, no que tange à correlação entre equações e lugares geométricos. A estrutura de sua proposta alternativa, em relação a proposta tradicional que foi analisada em sua pesquisa e criticada, foi dividida em três eixos norteadores: (1) noções fundamentais de geometria analítica; (2) lugares geométricos; e (3) equações indeterminadas e sistema de equações.

No eixo de noções fundamentais de geometria analítica apresentou uma sequência de exercícios, como os que seguem:

> Nessa etapa apresentamos a seguinte definição para coordenadas na reta: Entenderemos medida orientada como o comprimento de OP na unidade O1, em que *x* terá sinal positivo se o sentido de O para P coincidir com o sentido positivo do percurso, ou sinal negativo caso contrário. O número real *x* será chamado de coordenada do ponto P. Em seguida será proposto alguns exercícios:

> 1) Marque sobre o eixo abaixo pontos A, B e C de coordenadas $-3;\ \frac{3}{4}$ e $1{,}25$.
>
> 3) Os pontos P = $\sqrt{2}$, Q = $-3\sqrt{2}$ e R = $\sqrt{3}$, são irracionais, construa um eixo e marque a localização de suas coordenadas (dica: use uma calculadora). Seria possível marcar esses pontos sem o auxílio de uma calculadora? (NOVAIS, 2011, p. 61)

No eixo de lugares geométricos apresentou uma sequência de exercícios, como por exemplo:

> Da definição “um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma ou mais condições”, vários exercícios são resolvidos com o auxílio do GeoGebra:
>
> 1) Vamos construir o lugar geométrico dos pontos que distam $\sqrt{2}$ unidades do ponto O (0;0) do plano cartesiano. Que lugar geométrico é esse?
>
> 2) Construa o lugar geométrico dos pontos que distam 1 unidade do ponto A (-2;1) do plano cartesiano. Que lugar geométrico é esse?
>
> 3) Qual é o lugar geométrico encontrado nos exercícios 1 e 2? Use a distância de *r* unidades e o ponto O para definir esse lugar geométrico (NOVAIS, 2011, p. 66).

No eixo equações indeterminadas e sistema de equações apresentou uma sequência de exercícios, como por exemplo:

> A partir da definição “dado uma reta *r* de inclinação *α* (no sentido anti-horário) em relação ao eixo OX. O coeficiente angular ou declividade de uma reta *r* é o número real “$m = tg(\alpha)$” e de exercícios como:
>
> 16) No campo de entrada do GeoGebra digite $m = 1$ (tecle enter) e $q = 0$ (tecle enter), exiba os objetos m e *q*, em seguida digite a equação $y = m * x + q$ construindo assim o gráfico com as soluções da equação.
>
> 17) Com relação ao exercício 16, varie o valor de *m* no intervalo de [-5,5], descreva o comportamento do gráfico.
>
> 18) Com relação ao exercício anterior, varie o valor de *q* no intervalo [-5,5] e descreva o comportamento do gráfico (NOVAIS, 2011, p. 72).

As conclusões dessa dissertação foram obtidas a partir de um estudo empírico qualitativo e semiestruturado possibilitando analisar e comparar o repertório teórico anterior à proposta e posterior à sua aplicação aos sujeitos de pesquisa, afirmou o autor.

Novais (2011) apresentou como resultado que os elementos que compuseram sua proposta para o ensino de equações trouxeram enriquecimento à imagem do conceito dos estudantes. E ainda fortaleceram a conexão entre as unidades cognitivas já existentes e as adquiridas ao longo do desenvolvimento dos exercícios propostos pela sequência didática. O autor afirmou que a capacidade dos estudantes de apresentar imagens do conceito, correlacionadas com a definição formal sofreu uma evolução e, creditou a esse resultado o uso associado do *software* de geometria dinâmica e planilha eletrônica, como um meio de favorecer a aprendizagem e ajudar a suplantar dificuldades que os estudantes demonstravam ter quanto à compreensão de conceitos complexos relativos às diversas representações das soluções de uma equação.

Para Novais (2011) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento de diversas imagens conceituais do conteúdo matemático, equações indeterminadas e lugares geométricos, e também com a correlação com a definição formal do objeto matemático, de acordo com Tall e Vinner (1981). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à definição formal do objeto matemático.

A dissertação de Santos (2011) teve como objeto de estudo o ensino de função logarítmica, e "por objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática para o ensino da função logarítmica utilizando o *software* GeoGebra como estratégia pedagógica" (p. 17) com 6 alunos da 3ª série do ensino médio.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Os alunos com a sequência didática proposta neste trabalho conseguem reconhecer alguns elementos fundamentais para o estudo da função logarítmica, tais como domínio, imagem e o esboço do gráfico?
>
> Em que medida? Quais as dificuldades encontradas?
>
> Quais avanços percebidos?
>
> O uso do *software* GeoGebra como estratégia didático-pedagógica no estudo da função logarítmica contribuiu ou não para a aprendizagem dos alunos? (SANTOS, 2011, p. 18)

A sequência didática foi desenvolvida em quatro sessões. A 1ª teve por objetivo consolidar a noção de potência por meio de uma situação-problema que envolvia a exploração de conceitos fundamentais da potenciação. A 2ª teve por objetivo explorar o conceito de função exponencial por uma situação-problema que envolvia o preenchimento de tabelas, construção de gráficos no papel e com auxílio do *software* GeoGebra. Seguem alguns itens da situação-problema proposta na 2ª sessão:

> g) Construa os gráficos das funções na forma y= a^x, para os casos $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$, $y = (0{,}5)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$, utilizando o *software* GeoGebra e observe que essas funções interceptam o eixo *y* no ponto de ordenada igual a 1. Como você justifica esse fato, será que esse fato ocorre qualquer que seja o valor de a?
>
> h) Construa o gráfico da função $y = 1^x$ utilizando o *software* GeoGebra, essa função pode ser chamada de função exponencial? Justifique sua resposta.
>
> i) Observe o crescimento do gráfico das funções exponenciais que você construiu por meio do *software* GeoGebra, descreva o comportamento da curva $y = a^x$, quando $a > 1$ e $0 < a < 1$ (SANTOS, 2011, p. 116).

A 3ª sessão teve como objetivo explorar o conceito de logaritmo por meio de situações-problema nas quais deveriam ser utilizadas a função exponencial e a função logarítmica, e a 4ª sessão teve como objetivo explorar o conceito de função inversa pela exploração do registro de partida ou seja o registro gráfico e os conceitos de simetria, e da função inversa com o intuito de concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

> 2) a) Construa o gráfico da função *f* definida por $f\,(x) = \log_2 x$ utilizando o *software* GeoGebra e escreva na tabela abaixo algumas coordenadas de pontos que pertencem à função na tabela abaixo: [...]
>
> 2) b) Construa o gráfico da função *g* definida por $g(x) = 2^x$ utilizando o *software* GeoGebra e escreva as coordenadas de alguns pontos que pertencem à função *g* na tabela abaixo:[...] (SANTOS, 2011, pp. 127-128)

Após aplicar a sequência didática para alunos organizados em duplas, Santos (2011) concluiu que no decorrer das sessões houve evolução de conhecimento das duplas, as discussões entre os alunos favoreceram o levantamento de hipóteses sobre o comportamento do gráfico da função, do domínio e da imagem, e que o uso do *software* como uma estratégia didático-pedagógica contribuiu para a aprendizagem desses alunos. A autora afirmou que todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função logarítmica no *software*, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

Para Santos (2011) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao tipo de atividade proposta ao estudante, e que essa atividade pode favorecer alguns processos cognitivos para a aprendizagem do conteúdo ensinado, visualização e generalização por exemplo, com o auxílio de um *software* para otimizar os processos de representação e de visualização das funções logarítmicas e exponenciais propostas em uma sequência didática, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado aos processos mentais desenvolvidos em atividades matemáticas complexas em nível elementar.

A dissertação de Fonseca (2012) teve como objeto de estudo a convergência de sequências e séries numéricas na disciplina de cálculo diferencial e integral e seu objetivo foi

> Verificar se o desenvolvimento de atividades baseadas na corporificação dos conceitos, buscando a transição entre os mundos corporificados e simbólicos, com a utilização de s*oftware* de geometria dinâmica, favorece a compreensão da convergência de sequências e séries (p. 29).

A pesquisa foi realizada com um grupo de alunos do curso de Engenharia de Produção de um Instituto Federal de ensino que cursava a disciplina cálculo II.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “Que contribuições uma proposta pedagógica baseada na corporificação de conceitos pode trazer para a compreensão do conceito de convergência de sequências e séries em uma turma de cálculo?” (FONSECA, 2012, p. 29)

A pesquisadora propôs uma atividade introdutória que teve por objetivo verificar os conhecimentos dos alunos relacionados a sequências e suas concepções sobre as palavras convergência e divergência. Essas atividades visavam constituir conhecimentos prévios para uma futura formalização dos conceitos e para a introdução das definições de convergência de sequências e séries numéricas infinitas, tema da pesquisa. Apresentamos a seguir itens dessa atividade introdutória:

> 1. Explique o seu entendimento sobre os termos:
>
> a) Sequência b) Converge c) Diverge
>
> 2. O que você entende por sequências numéricas? Dê no mínimo 5 (cinco) exemplos de sequências numéricas.
>
> 3. O que caracteriza uma sequência numérica? (p. 88)
>
> 6. Dada as sequências a seguir, encontre o 50º termo de cada uma. Como você obteve? $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ...\}$ $\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...\}$ (FONSECA, 2012, p. 89)

A autora propôs outras atividades exploratórias para serem desenvolvidas no laboratório com o auxílio do *software* GeoGebra com o objetivo de corporificar as ideias básicas de convergência de sequências e para criar condições para uma passagem para o mundo proceitual e posterior formalização. Apresentamos alguns itens dessas atividades exploratórias:

> **Atividade 3:** Liste os cincos primeiros termos de cada uma das sequências, cujos termos gerais são dados a seguir:

> a) $a_n = \frac{n}{2n+1}$ b) $a_n = (-2)^{n+1}$ c) $a_n = \frac{2n-3}{3n-4}$ (p. 191)
>
> **Atividade 4:** Considere a sequência de termo geral $a_n = \frac{5}{n}$. Vamos explorar diferentes formas de representação dos valores dos termos dessa sequência, com os recursos do GeoGebra. (FONSECA, 2012, p. 192)

Após aplicar e analisar a sequência de atividades introdutória e exploratória, Fonseca (2012) concluiu que um curso de cálculo diferencial e integral não é necessário ter como objetivo o tratamento formal, característico da última fase do desenvolvimento cognitivo, esse tratamento segundo a autora deve ser feito na disciplina de análise e além disso concluiu que a utilização do *software* GeoGebra influenciou na construção das atividades desenvolvidas pelos alunos e contribuiu, significativamente, para a corporificação dos conceitos e para a exploração dos mesmos a partir de diferentes representações.

Para Fonseca (2012) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao tipo de atividade explorada (atividades com base na corporificação do conceito de convergência), o uso de um *software* de geometria dinâmica, que tem o potencial necessário para possibilitar a passagem do mundo corporificado para o mundo simbólico, construindo uma base para construção do mundo formal, que para essa autora é o mundo do pensamento matemático avançado, de acordo com Tall (2013). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Campos (2014) teve como objeto de estudo o uso de algoritmos para fatoração e primalidade[42] como ferramenta didática para o ensino de matemática e teve por objetivo

> [...] construir e implementar algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática que possibilitasse o desenvolvimento das capacidades de generalização e abstração, relacionadas aos conceitos sobre variáveis, funções e alguns temas introdutórios sobre teoria dos números (p 14).

O autor construiu uma sequência didática dividida em duas partes; uma parte introdutória relacionada à divisibilidade e números primos, e outra relacionada ao tratamento de algoritmos e temas mais complexos. As atividades foram propostas para construção de algoritmos com o uso das linguagens de programação *Python* e *Scratch*. A seguir apresentamos alguns itens dessas atividades:

---

[42] Um teste de primalidade refere-se a um algoritmo que tendo como entrada um número inteiro positivo *n*, determina se *n* é ou não primo. RIBEIRO, B., C., M.; TEREZA, D., M. A matemática dos testes de primalidade. ICE/DM/UFJF (s.d.). Informação retirada de: www.impa.br Acesso em 21 jul. 2018

> **Uma questão inicial é:** de que forma poderia fazer um algoritmo que retome a tabuada de um número *n* até o seu décimo múltiplo? (p. 62)
>
> **Outra questão de cunho inicial é:** qual é a soma dos números naturais pares até um dado *n*? (p. 64)
>
> ***Python* – Algoritmo da divisão**
>
> Qual é o dividendo? 127
>
> Qual é o divisor? 7
>
> O quociente é o 18. O resto é 1 (CAMPOS, 2014, p. 68).

Após apresentar e discutir a sequência didática, Campos (2014) concluiu que essa sequência pode potencializar a aprendizagem dos conceitos de variável e função como meios de relacionar grandezas, utilizando-se programação de algoritmos para discutir temas da teoria dos números, com o uso das linguagens de programação *Python* e *Scratch* e que essa sequência didática pode possibilitar o desenvolvimento dos processos de generalização e abstração, sob a perspectiva da teoria do pensamento matemático avançado.

Para Campos (2014) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao tipo de atividade que possibilita o desenvolvimento dos processos de generalização e abstração, de acordo com Dreyfus (2002). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado a fenômenos complexos que podem ser expressos na matemática elementar.

A dissertação de Mação (2014) teve como objeto de estudo o ensino do conceito de derivada e seu objetivo foi apresentar abordagens para o ensino de derivada, fundamentado na teoria dos três mundos da matemática de acordo com Tall (2013) e nas formas de entender o conceito de derivada de acordo com Thurston (1994) - infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa de variação, aproximação linear e microscópica -, dessas formas escolheu três (geométrica, taxa de variação e aproximação linear) para elaborar atividades que poderiam ser utilizadas em sala de aula, para introduzir o conceito de derivada. Para cada forma/abordagem apresentou uma análise didática, com o intuito de mostrar e justificar a presença de características dos três mundos da matemática.

Em sua investigação, o autor analisou dois livros de cálculo diferencial e integral e constatou semelhanças nas abordagens propostas em Guidorizzi (2001) e em Stewart (2010), verificou que ambos apresentavam como ponto de partida para o desenvolvimento do conceito de derivada a abordagem geométrica e em seguida a taxa de variação. Mação (2014) afirmou que esses autores propõem, em seus livros, iniciar o ensino do conceito de derivada por meio da abordagem geométrica realizando comparações com a taxa de variação explorada pelo conceito de velocidade. Nessa sequência, aproveitam a ideia do quociente entre diferenças de variação de espaço e variação de tempo para relacionar o coeficiente angular da reta secante com o conceito de velocidade média, concluindo com a comparação entre o coeficiente angular da reta tangente com o conceito de velocidade instantânea.

Na abordagem para o ensino de derivada na forma geométrica, Mação (2014) propôs a seguinte questão norteadora:

> Existe uma reta que é tangente ao gráfico da função definida por $f\ (x) =\ x^2$, no ponto $(2, f(2))$?
>
> Se sim, podemos determinar sua equação e esboçar o gráfico?
>
> Para determinar a reta *L*, escolhemos utilizar a equação desta reta na forma $L\ (x) = f(a) + m(x - a)$, em que $(a, f(a))$ é um ponto qualquer da função *f* e m é o coeficiente angular da reta (p. 103).

Na abordagem para o ensino de derivada como taxa de variação, apresentou um movimento retilíneo realizado por uma partícula, de modo que no instante t a posição s foi dada por $s = f(t) =\ t^2$, para $t\ > 0$. A partir dessa situação foi proposta a análise das posições nos primeiros 3 segundos do trajeto.

Na abordagem para o ensino de derivada pela aproximação linear, o autor propôs as seguintes questões norteadoras:

> Existe uma reta que passa pelo ponto $(4, f(4))$, cujas ordenadas de pontos próximos proporcionam uma boa aproximação para o valor da função $f\ (x) = \sqrt{x}$ (por exemplo: $x = 4{,}16$ ou $x = 3{,}91$)?
>
> Existe uma reta que passa pelo ponto $(4, f(4))$, cujas ordenadas de pontos próximos proporcionam a melhor aproximação para o valor da função $f\ (x) = \sqrt{x}$ (por exemplo: $x = 4{,}16$ ou $x = 3{,}91$)? Se existe, qual é ela? É única? Por que esta reta é importante? (MAÇÃO, 2014, p. 132)

Após desenvolver e analisar tais propostas concluiu respondendo as cinco questões de pesquisa. Para a primeira questão: “Quais abordagens aparecem em livros didáticos de cálculo usados em universidades do estado de São Paulo?” (MAÇÃO, 2014, p. 24), concluiu que a representação geométrica da derivada foi a mais usada nos dois livros didáticos de cálculo analisados, seguida pela taxa de variação. As demais representações não apareceram como abordagem, apenas como complementação em outros tópicos. Para a segunda questão: “Quais características dos três mundos da matemática aparecem nessas abordagens?” (MAÇÃO, 2014, p. 24), concluiu que na análise dos dois livros de cálculo à luz do quadro teórico dos três mundos da matemática, indicou que ambos apresentavam características dos três mundos: corporificado, simbólico e formal. Para a terceira questão:

> É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção geométrica, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito? (MAÇÃO, 2014, p. 24)

O autor partiu da questão sobre a existência da reta tangente ao gráfico da função e por meio desse processo, propôs a inserção do sujeito no problema e com a presença de características dos três mundos da matemática, respondendo afirmativamente essa questão. Para a quarta questão:

> É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção taxa, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito? (MAÇÃO, 2014, p. 24)

A partir da discussão do conceito físico de velocidade média, Mação (2014) colocou a questão norteadora que, por sua vez, sugeriu o uso do conceito de velocidade média para o cálculo da velocidade instantânea. Por meio desse processo foi analisada a proposta da inserção do sujeito no problema com a presença de características dos três mundos da matemática, que respondeu afirmativamente essa questão. E finalmente para a quinta questão:

> É possível elaborar uma abordagem inicial do conceito de derivada, pela concepção aproximação, com o objetivo de inserir o sujeito na construção de seu conhecimento e com a presença de características formais, simbólicas e corporificadas desse conceito? (MAÇÃO, 2014, p. 24)

O autor partiu da situação em que foi utilizada uma reta para calcular valores aproximados de uma função f, em pontos próximos ao ponto fixado. Mação (2014) afirmou que por meio desse processo, descrito e analisado em sua pesquisa foi proposto a inserção do sujeito no problema com a presença de características dos três mundos da matemática, o que respondeu afirmativamente a essa questão. E ressaltou, “que o objetivo proposto foi ofertar abordagens, para o conceito de derivada, que possuíssem características dos três mundos da matemática, que fizessem o sujeito participar e fazer parte da construção do próprio conhecimento” (MAÇÃO, 2014, p. 163).

Mação (2014) concluiu sua pesquisa afirmando que foi evidenciado, nas abordagens geométrica, taxa de variação e aproximação linear, cada uma delas elaborada para introduzir o conceito de derivada para sujeitos que irão supostamente vê-lo pela primeira vez, de acordo com características dos três mundos da matemática, que foram propositalmente lá colocadas, com o intuito de inserir o sujeito no desenvolvimento de seu conhecimento, conforme ideias desse quadro teórico; porém, ele ressaltou que, essas atividades não foram aplicadas durante o desenvolvimento de sua pesquisa.

Para o autor a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao tipo de atividade que favoreça características corporificadas, simbólicas e formais do conceito de derivada, de acordo com Tall (2013). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Junior (2015) teve como objeto de estudo o ensino e a aprendizagem de derivadas a partir da visualização como o uso de um *software* de geometria dinâmica e seu objetivo foi

> [...] discutir as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de diversos conteúdos relacionados às derivadas de funções reais de uma variável real no ensino de Cálculo I, a partir da visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra" (p. 7).

Essa pesquisa foi realizada com quatro professores de matemática do ensino superior com experiência docente em cálculo diferencial e integral a partir do desenvolvimento de quatro atividades exploratórias de construção e interpretação de gráficos.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: "Que contribuições a realização de atividades exploratórias com o uso do GeoGebra pode trazer à aprendizagem de derivadas a partir da visualização?" (JUNIOR, 2015, p. 19)

Apresentamos alguns itens da atividade exploratória desenvolvida e aplicada pelo pesquisador:

> **Atividade exploratória 1A**
>
> Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada: $\mathrm{f}\,(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}\mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x}^3 - \frac{1}{4}\mathrm{x}^2 + 30\mathrm{x} + 10$
>
> Com base na visualização do gráfico construído e utilizando recursos adequados do GeoGebra, pede-se:
>
> 1) Encontre o domínio da função.
>
> **Sugestão:**
>
> a) passeie ao longo do eixo *x*, visualizando a existência do gráfico da função;
>
> b) como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

> 2) Encontre a imagem da função.
>
> **Sugestão:** [...] (JUNIOR, 2015, p. 59)

Após as análises das respostas, Junior (2015) afirmou que os resultados obtidos apontaram que a visualização proporcionada pelo *software* GeoGebra contribuiu para uma ressignificação de diversos conceitos e propriedades de derivadas que são requisitados na construção de gráficos de funções reais, além de destacar a importância, nos processos de ensino e de aprendizagem de cálculo I, um equilíbrio entre os processos visuais e os processos algébricos.

O autor afirmou que sua pesquisa se mostrou adequada ao trabalho de professores, pois proporcionou uma facilidade para se trabalhar com questões complexas e de difícil compreensão. Outra qualidade foi tornar possível estabelecer uma maior valorização do tempo com as definições e verificação de exemplos. E, ainda, permitiu aos docentes, a realização de questionamentos e reflexões que podem surgir do diálogo com os alunos entre a teoria e a prática. Isso quando são construídos, em sala de aula, com a proposição de atividades elaboradas e adaptadas a partir de livros didáticos.

Junior (2015) afirmou que sua pesquisa trouxe uma contribuição aos professores de cálculo I de repensar a sua prática em sala de aula, no sentido de levar o aluno a construir sua aprendizagem de gráficos de funções e suas derivadas ou conteúdos semelhantes. E ainda que "o ensino com o auxílio de tecnologias computacionais, mediado pelo professor, demanda uma preparação, entendimento, reflexão sobre a necessária articulação com a teoria que vai ser construída na realização das atividades com os alunos" (JUNIOR, 2015, p.114).

Para Junior (2015) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a atividades que pela visualização provoquem uma discussão de certas propriedades do conceito de derivadas de funções reais resultando em algumas representações da definição desse conceito, de acordo com Dreyfus (2002) e Tall (2002). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A tese de Prado (2016) teve como objeto de estudo a disciplina álgebra linear na licenciatura em matemática, e seu objetivo foi "compreender a álgebra linear ensinada para a licenciatura em matemática como um saber voltado para a formação do professor de matemática que atuará na educação básica” (p. 9). O autor analisou documentos de 6 universidades e entrevistou 8 professores.

Para essa investigação foi proposta a questão geradora: “Qual álgebra linear é ou poderia ser ensinada na licenciatura em matemática, visando à prática docente na educação básica?” (PRADO, 2016, p. 31)

Para responder essa questão o autor formulou outras três questões norteadoras:

> Como os documentos das instituições de ensino superior selecionadas, descrevem a disciplina de álgebra linear nos projetos pedagógicos, já que esta disciplina é uma das que compõem o currículo mínimo obrigatório na licenciatura em matemática?
>
> Como os professores pesquisadores em álgebra (educação matemática), das universidades selecionadas, concedem a álgebra linear e o seu ensino?
>
> Qual álgebra linear poderia ser concebida como saber a ensinar na licenciatura em matemática, visando à formação inicial do professor da educação básica? (PRADO, 2016, p. 31)

A partir dessas três questões, Prado (2016) formulou os seguintes objetivos específicos de pesquisa:

> - Compreender a álgebra linear ensinada para a licenciatura em matemática como um saber voltado para a formação do professor de matemática que atuará na educação básica;
>
> - Buscar elementos e possibilidades para ressignificar a álgebra linear na formação do professor de matemática da educação básica, concebendo um conjunto de conhecimentos em álgebra linear, necessário para fundamentar a álgebra a ser ensinada na educação básica (p. 32).

Para esse autor o objetivo da disciplina de álgebra linear na licenciatura em matemática

> [...] é fazer com que o licenciando construa as noções matemáticas envolvidas como elementos que são partes e não os únicos a serem abordados na disciplina, isto é, o professor formador deve estabelecer conexões entre as noções matemáticas e a interface pedagógica, relacionadas a essas noções (PRADO, 2016, pp. 103-104).

Ele considera fundamental que o “licenciando faça uso consciente de diversas representações para os objetos (em álgebra linear) [...] e que faça uso do processo alternar e interpretar essas representações” (PRADO, 2016, p. 105); ainda destaca que seja proposta aos licenciandos situações que permitam “perceber o significado do rigor dedutivo num processo de demonstração, desenvolver habilidades para lidar com sistemas axiomáticos, assim como, empregar procedimentos indutivos em resolução de problemas” (p. 105) e que o licenciando “faça uso de princípios indutivos para justificar procedimentos matemáticos utilizados no ensino de matemática na educação básica” (p. 105).

Prado (2016) concluiu sua tese respondendo as três questões, construídas a partir da questão geradora. Respondeu a primeira questão considerando:

> [...] que as instituições investigadas não evidenciaram o que se espera da disciplina, em relação às necessidades do licenciando em matemática, e que não há referências às questões histórico-culturais, ao exercício da investigação matemática e à percepção da importância das conjecturas, ações consideradas essenciais na formação do licenciando (p. 218).

E,

> [...] que a partir dos conteúdos listados, dos objetivos anunciados e das escolhas bibliográficas feitas, a álgebra linear apresentada nos documentos das universidades investigadas mostra ser planejada, independentemente, das disciplinas que se referem ao ensino e a aprendizagem em matemática, articulação necessária para a formação profissional do licenciando (p. 221).

Respondeu a segunda questão, de acordo com as entrevistas, que para todos os entrevistados (8 professores) “a álgebra linear assume papel importante na formação do licenciando em matemática” (PRADO, 2016, p. 219) e foram eleitas 11 categorias a partir dessas entrevistas. São elas:

> C1) O licenciando pode perceber o significado do rigor dedutivo em um processo de demonstração, desenvolver a capacidade dedutiva com sistemas axiomáticos e empregar procedimentos indutivos ou analógicos na criação da matemática como atividade de resolução de problemas (p. 179).
>
> C2) Em álgebra linear o licenciando pode ser conduzido a perceber os procedimentos indutivos ou analógicos na dinâmica de ensino e aprendizagem e, ainda, a construir estratégias que lhe permitam justificar os procedimentos matemáticos utilizados no ensino de matemática na educação básica (pp. 181-182).
>
> C3) O estudo da estrutura algébrica espaço vetorial (p. 182).
>
> C4) Noções de álgebra estudadas na educação básica que podem ser trabalhadas em álgebra linear: sistemas de equações lineares, matrizes e determinantes (p. 184).
>
> C5) Noções de geometria estudadas na educação básica que podem ser trabalhadas em álgebra linear: vetores no plano e no espaço, reflexão e rotação de figuras no plano (p. 185).
>
> C6) O licenciando pode alternar e interpretar representações geométricas e algébricas de noções estudadas na educação básica, assim como, generalizar certas propriedades associadas a essas noções, por exemplo, sistemas de equações lineares, matriz e função (p. 186).
>
> C7) Em álgebra linear, o licenciando pode analisar, sintetizar e generalizar noções estudadas na educação básica e em geometria analítica (p. 188).
>
> C8) Estudo das transformações lineares (p. 189).
>
> C9) Outras noções de álgebra linear citadas (p. 191).
>
> C10) Considerações não especificas às noções de álgebra linear (p. 192).
>
> C11) Contribuições e relações com outras disciplinas (PRADO, 2016, p. 193).

Respondeu a terceira questão de pesquisa sugerindo cinco considerações para a disciplina de álgebra linear para a licenciatura em matemática. São elas:

> 1ª: Estudo da estrutura algébrica espaço vetorial (p. 221).
>
> 2ª: Estudo das transformações lineares (p. 222).
>
> 3ª: O estudo do processo de demonstração (p. 223).
>
> 4ª: Relações com outras disciplinas (p. 224).
>
> 5ª: Noções de matemática que são ensinadas na educação básica e podem ser abordadas à luz do pensamento matemático avançado (PRADO, 2016, p. 225).

Prado (2016) concluiu sua tese afirmando que a álgebra linear, presente nos documentos institucionais investigados, se apresentou planejada, independente das disciplinas relacionadas ao ensino e à aprendizagem em matemática. O autor ainda conseguiu evidenciar elementos que podem contribuir para a formação do licenciando, são eles:

> - Perceber que conceitos estudados pelo licenciando, não são conceitos isolados;
>
> - Fazer o uso de diferentes representações;
>
> - Explorar o conceito de definição e o papel que a matemática exerce;
>
> - Estabelecer relações com as outras disciplinas;
>
> - Explorar o critério de verdade matemática;
>
> - Vivenciar diversas formas de validar conjecturas;
>
> - Explorar questões relacionadas ao momento histórico que possibilitou a constituição da disciplina, além de abordar noções matemáticas da educação básica à luz do pensamento matemático avançado (PRADO, 2016, p.9).

Para Prado (2016) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento dos processos mentais de conceitos estudados na disciplina de álgebra linear, de acordo com Dreyfus (2002). O autor ainda considera que o licenciando precisa aprender esses conceitos da disciplina de álgebra linear para exercer seu papel como professor de matemática na educação básica. Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

Subcategoria C12: Trabalhos cujo foco repousa no uso de tecnologias para o ensino e/ou aprendizagem matemática, ainda que no âmbito de estratégias didáticas

A dissertação de Fonseca (2011) teve como objeto de estudo o uso de tecnologias no ensino médio para o ensino da função afim e seu objetivo foi “discutir e avaliar a utilização integrada do *software Mathlets* como ferramenta nas aulas de matemática, em turmas da 1ª série do ensino médio” (p. 7). Foi aplicada uma sequência de atividades aos sujeitos da pesquisa com o auxílio do *software Mathlets*.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Quais seriam as implicações educacionais decorrentes da inserção dessas inovações tecnológicas no ensino da matemática?
>
> Como o professor pode agregar a utilização de recursos tecnológicos, às suas ações da prática de ensino de matemática, com vistas à melhoria da aprendizagem dessa área de conhecimento? (FONSECA, 2011, p. 134)

A seguir apresentamos alguns itens da sequência de atividades:

> **Atividade nº 2: Fazendo pães**
> Para preparar seus pães, um padeiro costuma misturar cada 10 xícaras de farinha de trigo com 4 xícaras de leite. Complete a tabela:

Farinha de trigo	Leite
10	4
20	
	2
1	
36	
	2 ½

> a) Quais as grandezas envolvidas nessa situação? Elas variam?
> b) Para cada xícara de farinha de trigo, quantas xícaras de leite ele usa?
> c) Use a tabela para obter o gráfico cartesiano da relação acima, que tipo de gráfico você obteve?
> d) Escreva uma expressão matemática que relacione o número de xicaras x de leite, com o número de xícaras y de farinha de trigo.
> **Abra a Cena 1**
> Nesta cena representamos o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de xícaras de leite. No eixo vertical a quantidade de xícara de farinha de trigo. O gráfico dessa relação associa a cada medida x de leite à quantidade y de farinha de trigo a ser usada. A partir dessas informações responda os itens e, f, g, h, i e j [...] (FONSECA, 2011, pp. 54-55)

O autor verificou a partir das análises preliminares que os alunos apresentavam dificuldades em estabelecer relação de dependência entre as variáveis do problema, e de generalização dos resultados. À medida que os alunos foram interagindo com o *software*, na resolução das atividades, Fonseca (2011) percebeu que eles começavam a entender as relações de dependências entre as variáveis, desenvolvendo a capacidade de generalização. De acordo com o autor, a interação dos alunos nessa sequência de atividades com o auxílio do *software* “serviu para ajudá-los a desenvolverem suas imagens conceituais adquirindo a abstração necessária para encontrar a lei matemática correspondente à função que modela o problema” (p. 133).

De acordo com o autor os resultados mostraram que a integração do *software Mathlets* às atividades propostas, como inovações tecnológicas, no ensino de função afim, levou os alunos a uma autonomia crescente na realização das atividades e “que é necessário que o professor desenvolva materiais consistentes, que permitam certa adaptação, a fim de garantir a eficácia da aplicação dessas atividades, permitindo que elas, sejam adaptáveis à realidade de cada turma” (FONSECA, 2011, p. 135).

Para Fonseca (2011) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada à capacidade de generalização para posterior abstração na sequência de atividades relacionada à função afim, e o uso do *software Mathlets* pode potencializar essa aprendizagem. Ressaltando que para esse autor o desenvolvimento de imagens conceituais dos alunos para encontrar a lei matemática correspondente à função afim modeladora dos problemas propostos, por meio do *software* foi considerado como um processo de abstração, de acordo com Tall e Vinner (1981). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao processo de abstração matemática.

A tese de Janzen (2011) teve como objeto de estudo o papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica. O objetivo foi “trabalhar com provas em geometria em um ambiente dinâmico da perspectiva do papel do professor de ensino superior, em seu papel de formador do pensamento matemático” (p. 6). Apresentou um estudo prático que teve como finalidade compreender, por uma análise descritiva, esse novo papel do professor frente às tecnologias em que ele não é mais o único detentor do conhecimento, mas passa a ser um orientador das atividades dos estudantes. Os sujeitos de pesquisa foram 2 professores universitários na Alemanha.

A autora partiu da seguinte hipótese:

> O alcance da tecnologia está relacionado ao domínio por parte do professor; se este estiver preparado para utilizá-la de forma coerente, buscando todo seu potencial para a formação do aluno, aí sim se poderá falar em avanços na educação por meio da tecnologia (JANZEN, 2011, p. 15).

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “Como pode o professor de ensino superior criar um ambiente favorável para o aprender a pensar matematicamente através de provas em geometria num ambiente dinâmico com suas potencialidades?” (p. 16)

Para a autora as duas atividades propostas em sua pesquisa não envolviam nenhum conteúdo específico de geometria, e sim, um conhecimento geral e propriedades básicas desse conteúdo. A seguir apresentamos as duas atividades:

> **Atividade 1**
>
> Seja ABC um triângulo onde D é o ponto médio de AB e E é o ponto médio de AC. Crie os pontos B' e C' sendo simétricos de B e C, respectivamente, pelos pontos E e D. Movimente os vértices do triângulo e observe a relação entre os pontos B', A e C'. Qual relação existe ali? Justifique sua resposta (p. 72).
>
> **Atividade 2**
>
> Seja ABCD um quadrilátero convexo. Considere as bissetrizes dos ângulos internos e seus pontos de interseção E, F, G e H dos pares de bissetrizes consecutivas. Movimente ABCD, considerando diferentes configurações.
>
> O que acontece ao quadrilátero EFGH? Que tipo de figura pode se tornar? Pode EFGH se tornar um quadrilátero específico? Por quê? Qual a hipótese sobre ABCD você precisa para obter essas situações?
>
> Pode EFGH se tornar um ponto? Qual hipótese sobre ABCD você precisa para que isso aconteça?
>
> Escreva suas conjecturas e justifique-as (JANZEN, 2011, p. 73)

Janzen (2011) afirmou que em um primeiro momento, percebeu-se três tipos de intervenções dos dois professores durante a realização da atividade matemática proposta aos seus alunos: “de caráter organizacional, de caráter matemático e do uso específico do recurso tecnológico” (p. 117).

Já ao analisar os dados, a autora identificou que enquanto o professor fez uso das potencialidades do *software* suas intervenções foram direcionadas em dois sentidos: de cunho organizacional e de cunho matemático. Janzen (2011) afirmou que

> [...] não basta o professor ter domínio do conteúdo matemático, ele precisa estar apto a guiar o aluno no processo de prova, e isto exige uma faceta de organizador, para auxiliar o aluno a organizar suas ideias e que este chegue a uma prova como resultado da atividade proposta” (p. 124).

Nas intervenções de cunho matemático, a autora afirmou que dificilmente apareceram separadas, formaram uma rede unindo aspectos dinâmicos do *software*, do conteúdo, da especificidade das construções geométricas aliados à visualização potencializada pela utilização do *software* GeoGebra.

Para Janzen (2011) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a atividades de provas em geometria e ao uso de tecnologia para propor essas atividades e favorecer o processo de visualização potencializando a construção do conhecimento geométrico, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao processo de provas em geometria.

A dissertação de Prado (2012) teve como objeto de estudo o uso da calculadora e o pensamento matemático avançado em atividades propostas no caderno do professor da rede pública do estado de São Paulo. O objetivo foi “investigar a inserção do uso da calculadora nas situações de aprendizagem propostas no ensino fundamental II, à luz da teoria do pensamento matemático avançado” (p. 9). Procurou as ideias do pensamento matemático avançado, segundo as interações entre os processos mentais: representação, visualização, generalização, síntese e abstração a partir do uso da calculadora. Prado (2012) analisou 64 situações de aprendizagem propostas nos cadernos do professor.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “Que situações de aprendizagem, para os quais se sugere a inserção da calculadora no caderno do professor, podem promover no aluno desenvolvimento do pensamento matemático avançado?” (PRADO, 2012, p. 28)

Durante a análise, a autora verificou que das 64 situações de aprendizagem propostas no material 8 sugeriam a utilização de calculadora, e que em 6 das 8 situações de aprendizagem propostas para a investigação “a utilização da calculadora se apresentou como um instrumento apenas para a realização dos cálculos que requeriam um menor tempo para sua obtenção, e que não foi proposto um trabalho de familiarização e exploração fazendo o uso desse recurso” (PRADO, 2012, p. 172).

A seguir apresentamos uma situação de aprendizagem analisada pela autora:

> **LICÃO DE CASA**
>
> 1. Você deve ter notado que para haver um encaixe perfeito dos polígonos regulares em torno de um vértice é necessário que a soma das medidas dos ângulos agrupados nele seja igual a 360º (ângulos replementares). Dessa forma, só haverá um encaixe perfeito se a medida do ângulo interno de um polígono regular dividir 360º. Considerando isso, faça o que se pede:
>
> a) Liste todos os divisores positivos de 360º.
>
> b) Os divisores que você listou são os “candidatos” à medida do ângulo interno do polígono regular que estamos procurando. Substitua a letra *n* da fórmula indicada na tabela pelos valores listados e, em seguida, determine quais são os polígonos regulares que ladrilham o plano. Liste quais valores de *n* indicam os lados dos polígonos que ladrilham o plano (**Dica**: se necessário, utilize a calculadora) (PRADO, 2012, p. 95).

Ao analisar essa situação de aprendizagem, a autora observou a presença dos processos de generalização e de síntese, que podem propiciar o processo de abstração, que ela considera o nível mais elevado do pensamento matemático avançado.

A autora concluiu que a inserção do uso da calculadora nas situações de aprendizagem analisadas era insuficiente e para que a utilização da calculadora na resolução das situações de aprendizagem pudesse contribuir para aprendizagem dos alunos seria desejável um maior número de situações de aprendizagem para que eles tivessem um contato mais frequente com o recurso.

Para Prado (2012) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a atividades que promovam as interações entres diversos processos mentais do aluno, e que a calculadora pode potencializar essas interações de acordo com a atividade proposta, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao processo mental de abstração.

Categoria 2: Trabalhos que investigam os processos de ensino ou de aprendizagem de matemática

Subcategoria C21: Trabalhos cujo foco repousa na identificação e/ou tratamento de dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos

A dissertação de Franco (2011) teve como objeto de estudo a disciplina de álgebra abstrata e seu objetivo foi

> [...] investigar os diversos conflitos de aprendizagem apresentados por alunos de licenciatura em matemática, diante de um primeiro curso de álgebra abstrata, visando compreendê-los na perspectiva das interações entre a definição matemática formal e as imagens conceituais (pp. 16-17).

Utilizou como sujeitos de pesquisa 12 alunos do curso de licenciatura em matemática.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “O que evidenciam os conflitos de aprendizagem manifestados por alunos de licenciatura em matemática num primeiro curso de álgebra abstrata, à luz das interações entre definição formal e imagens conceituais?” (FRANCO, 2011, p. 16)

Apresentou uma análise de algumas atividades para verificar potenciais conflitos. Apresentamos um exemplo:

Exemplo 1

Seja A um domínio de integridade e a, b e $c \in$ A. Prove que, se $a \neq 0$ e $ab = ac$ então $b = c$.

COMENTÁRIO: Note que, ao se trabalhar com domínios de integridade, faz-se o cancelamento ou corte do termo a nos dois lados da igualdade $ab = ac$, ficando $b = c$. Operamos, naturalmente assim, com os conjuntos numéricos.

Entretanto, a compreensão matemática ou o convencimento da veracidade desse fato se apoia nos axiomas de anel de integridade. De maneira pormenorizada, tem-se:

$ab = ac$
Pela existência de simétrico aditivo,
$ab + [-(ac)] = ac + [-(ac)]$
$ab - ac = 0$
Pela propriedade distributiva,
$a(b - c) = 0$
Por hipótese, domínio de integridade não possui divisores de zero,
$a = 0$ ou $(b - c) = 0$
ainda por hipótese, como $a \neq 0$, então,
$b - c = 0$
$b = c$ (FRANCO, 2011, p. 62)

Em suas análises, o autor articulou a compreensão dos alunos em 3 categorias: "(1) as relações entre as imagens conceituais e a definição formal; (2) os conflitos potenciais e os conflitos cognitivos; (3) as transições entre os níveis do pensamento matemático: procedimento - processo - proceito" (FRANCO, 2011, p. 82).

Para a 1ª categoria observou que partir da apresentação axiomática das estruturas de anel, subanel, ideal e outras, a definição formal não foi suficiente para que os alunos formassem uma imagem conceitual significativa desses conceitos matemáticos. O autor afirmou baseado nas observações das aulas, que somente a partir de exemplos baseados nos conjuntos numéricos mais tradicionais, os alunos formaram imagens conceituais do objeto matemático. "Sempre quando solicitados, eles expressavam suas definições conceituais com base nesses conjuntos numéricos" (FRANCO, 2011, p. 83).

Para a 2ª categoria observou que diferente dos conflitos com notação que foram detectados anteriormente, superados pelos alunos durante o curso,

> [...] o obstáculo imposto pelo formalismo algébrico mostrou-se intransponível no sentido do amadurecimento requerido para se trabalhar imerso em um grau de abstração matemática mais elevado. No contato direto com os alunos conseguiu captar um certo sentimento de fracasso diante dessas dificuldades (FRANCO, 2011, p. 86).

Para a 3ª categoria observou que os alunos adquiriram um nível procedimental ao lidarem com esses conceitos, embora tenham sido detectados conflitos que foram superados por eles ao longo do curso.

Franco (2011) concluiu que de modo geral, os 12 alunos participantes apresentaram um rendimento satisfatório nas atividades, o que aponta no sentido de desenvolvimento nos níveis do pensamento matemático, para esse autor “em situações específicas, operavam os objetos algébricos de maneira não apenas rotineira ou repetitiva” (FRANCO, 2011, p. 87).

Para o autor a noção de pensamento matemático avançado está relacionada à definição matemática formal desenvolvida num curso de álgebra abstrata, e as interações entre a definição formal e as imagens conceituais dos alunos podem minimizar os conflitos de aprendizagem dessa disciplina, de acordo com Tall e Vinner (1981) e Dreyfus (2002). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Kirnev (2012) teve como objeto de estudo as dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas e seu objetivo foi “investigar dificuldades relacionadas as formas de demonstrações matemáticas (diretas, contra positivas, redução ao absurdo e contraexemplo) evidenciadas em registros de graduandos de matemática em uma universidade norte paranaense” (p. 7). Os sujeitos de pesquisas foram 13 graduandos do 2° ano de licenciatura em matemática.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “Que dificuldades graduandos de matemática explicitam no desenvolvimento de tarefas envolvendo demonstrações?” (KIRNEV, 2012, p. 13)

Kirnev (2012) selecionou conteúdos sobre conjuntos e funções para elaborar uma proposta de atividades que foi aplicada aos sujeitos participantes. Suas análises consistiram em categorizar agrupamentos com resoluções similares e evidenciar as dificuldades explicitadas.

A seguir apresentamos alguns itens da tarefa proposta pela autora aos sujeitos participantes:

> 1) O que são conjuntos?
>
> 2) Em sua opinião, quais das palavras a seguir apresentam relação com conjuntos? Se existir, caracterize: a) classe; b) coleção; c) elemento; d) pertinência; e) relação; f) função; g) partição; h) números; i) intervalo (p. 47)
>
> 4) Defina o conceito de pertinência em relação aos conjuntos? (p. 48)
>
> 13) Demonstre que, se A, B e C são conjuntos, então:
>
> a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (p. 53)

> 1) Seja f: X →Y uma aplicação e A ⊆ X e B ⊆ X. Considerando que as demonstrações matemáticas podem ser realizadas valendo-se das formas direta, contra positiva ou redução ao absurdo, demonstra, se for possível, as seguintes proposições: a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ [...] (KIRNEV, 2012, p. 55)

A partir da análise da tarefa Kirnev (2012) concluiu que existiram evidências de dificuldades apresentadas pelos graduandos relacionadas: “à forma de demonstração; ao conteúdo; à escrita na linguagem matemática ou materna” (p. 98), e que sua pesquisa foi relevante por “explicitar dificuldades em demonstrações matemáticas que podem ser comuns a inúmeros outros graduandos de cursos de matemática” (p. 99). Ela afirmou que sua pesquisa contribuiu à comunidade acadêmica com o intuito de instigar a reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem acerca das demonstrações matemáticas.

Para Kirnev (2012) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento de processos mentais em tarefas envolvendo demonstrações matemáticas, e que esse assunto provoca muitas dificuldades de aprendizagem em graduandos de matemática, de acordo com Dreyfus (2002) e Balacheff (1987). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao processo de demonstração matemática.

A dissertação de Almeida (2013) teve como objeto de estudo a aprendizagem de cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall e seu objetivo foi “elaborar um panorama das proposições teóricas sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral existentes em artigos de Tall, realizar sínteses de resultados e evidenciar elementos teóricos apresentados nos mesmos” (p. 21).

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Quais são os elementos teóricos utilizados em artigos de autoria ou com a colaboração de Tall na análise de dificuldades de aprendizagem do cálculo diferencial e integral?
>
> Quais foram nesses artigos as abordagens desenvolvidas por Tall para o ensino dos tópicos: infinito, números reais, limite, derivada e integral? (ALMEIDA, 2013, p. 31)

Os dados coletados foram organizados em dois conjuntos de categorias de acordo com o autor. No primeiro constaram as teorias desenvolvidas pelo próprio pesquisador inglês ou por colaboradores, as categorias que surgiram no *corpus* documental, foram: “concepções infinitesimais, conflitos, imagem conceitual e definição conceitual, proceito, utilização de computadores e desenvolvimento da matemática” (ALMEIDA, 2013, p. 39). No segundo conjunto de categorias foram destacados os tópicos do cálculo diferencial e integral que emergiram de acordo com o autor – “números reais, infinito, limites, sequências e séries, continuidade, derivada, integral e equações diferenciais” (p. 39).

No que se refere ao primeiro conjunto, Almeida (2013) indicou que os primeiros artigos Tall e seus colaboradores apresentaram abordagens de ensino para o cálculo diferencial e integral, e só posteriormente apresentaram constructos teóricos que possibilitaram a elaboração de modelos, que descrevem as operações cognitivas dos sujeitos que aprendem. E quanto ao segundo conjunto na categoria concepções infinitesimais o autor apontou que “ideias da análise não-*standard* foram utilizadas no estudo do desenvolvimento de algumas noções do cálculo diferencial e integral” (ALMEIDA, 2013, p. 143); na categoria conflitos foram “indicadas situações conflituosas ao estudante, com vistas a propiciar ideias adequadas ao desenvolvimento de um conceito da matemática” (p. 143); na categoria imagem conceitual e definição conceitual, o autor destacou que “estão abordagens que levam em conta dificuldades relacionadas à aprendizagem do cálculo diferencial e integral” (p. 143); na categoria proceito, Tall e associados utilizaram dessa noção para indicar dualidade dos símbolos matemáticos (processo ou conceito); na categoria utilização dos computadores Almeida (2013) apontou que são apresentados elementos teóricos, “como os organizadores genéricos e a noção de raiz cognitiva, que fundamentam a utilização dos computadores no ensino de tópicos avançados da matemática” (p. 143); e finalmente na categoria desenvolvimento da matemática formal, ressaltou que “abordaram constructos teóricos que buscaram analisar como o sujeito desenvolve as teorias matemáticas formais e modelos, para analisar o desenvolvimento da matemática formal por parte do sujeito” (p. 143).

Para o autor a noção de pensamento matemático avançado está relacionada aos conceitos do cálculo diferencial e integral. E ele intuiu que as dificuldades de aprendizagem do cálculo diferencial e integral proporcionou a construção da teoria cognitivista do pensamento matemático avançado por Tall e colaboradores. Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A tese de Vieira (2016) teve como objeto de estudo os processos de ensino e de aprendizagem de sequências de números reais e seu objetivo foi

> [...] identificar se dificuldades no ensino de sequências numéricas, apontadas por docentes do ensino superior que já ministraram o assunto em diversas disciplinas e cursos, são as enfrentadas por estudantes de um curso de licenciatura em matemática, em cuja grade sequências numéricas aparecem em duas disciplinas (p. 13).

Em sua pesquisa o autor realizou análise de livros didáticos de cálculo e de análise real, entrevistas com docentes dessas disciplinas, questionários diagnósticos e entrevistas semiestruturadas com estudantes de licenciatura em matemática. E propôs as questões de pesquisa:

> Quais dificuldades dos estudantes na aprendizagem de sequências numéricas são apontadas por professores que ensinam este conteúdo? (p. 33)
>
> Quais dificuldades, relacionadas às sequências numéricas e apontadas pelos docentes entrevistados, são observadas para estudantes que trabalharam com este tema no ensino superior? (p. 33)
>
> Quais processos do pensamento matemático avançado os estudantes participantes da pesquisa mostram ter desenvolvido no estudo de sequências numéricas? (p. 387)
>
> Os estudantes participantes da pesquisa inter-relacionam aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução de problemas sobre sequências numéricas? (VIEIRA, 2016, p. 388)

A classificação em erros e dificuldades de estudantes brasileiros de licenciatura em matemática sobre o conceito de convergência de sequências foi um dos objetivos de Vieira (2016) que investigou

> [...] se, e como, estudantes de licenciatura em matemática interagem aspectos algorítmicos, intuitivos e formais relativos ao conteúdo de sequências numéricas e se desenvolvem processos do pensamento matemático avançado após a realização das disciplinas de cálculo e de análise real (VIEIRA, 2016, p. 42).

Vieira (2016) identificou 16 dificuldades, que foram obtidas a partir da análise das entrevistas com docentes que ministram disciplinas de cálculo e análise real. São elas:

> 1. Dificuldade em lidar com épsilons e deltas da definição de limite de funções.
>
> 2. Supervalorização do estudo de convergência/divergência de sequências em detrimento de outras características relevantes como representações e definição de sequências.
>
> 3. Aspectos formais relegados nos cursos de Engenharia.
>
> 4. Estudantes não relacionam progressões aritméticas e progressões geométricas com o estudo das sequências numéricas no nível superior.
>
> 5. Dificuldade em caracterizar formalmente os conceitos de sequência, convergência e divergência.
>
> 6. Dificuldade no uso/identificação/elaboração da lei algébrica ou padrão que define uma sequência.

> 7. Buscar sempre uma lei algébrica para sequências, mesmo quando não há informações indicando que foram estabelecidas dessa maneira.
>
> 8. Dificuldade na compreensão e no uso da definição formal de sequência numérica.
>
> 9. Dificuldade em representar graficamente uma sequência.
>
> 10. Dificuldade em transitar entre representações de uma sequência.
>
> 11. Dificuldade na diferenciação entre discreto e contínuo nas representações gráficas de sequências.
>
> 12. Dificuldade em lidar com a definição de limite de sequências.
>
> 13. Dificuldade com a estrutura lógica de demonstrações.
>
> 14. Não atentar para características importantes de sequências numéricas - ser crescente, decrescente, limitada - no estudo da convergência.
>
> 15. Dificuldade em diferenciar sequências de limites infinitos e sem limite.
>
> 16. Dificuldade em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência (VIEIRA, 2016, p.71).

O autor afirmou que as dificuldades identificadas responderam à sua primeira questão de pesquisa e orientaram a elaboração dos dois questionários diagnósticos aplicados a estudantes que já haviam estudado sequências numéricas no ensino superior, e com isso, observou quais dessas dificuldades eram, de fato, verificadas para esses estudantes.

A seguir apresentamos itens dos questionários diagnósticos proposto aos estudantes:

> **Questão 1.1** Explique, com suas palavras, o que é uma sequência numérica? Caso conheça a definição formal, apresente-a.
> **Questão 1.2** Escreva os quatro primeiros termos das sequências de números reais definida pelas leis abaixo:
> a) a_n é uma sequência que converge para π;
> b) $b_n = \frac{4}{3+b_n}$ e $b_1 = 2$;
> c) $c_n = \frac{\sqrt{n-3}}{n}$ (p. 137).
> **Questão 2.1** Apresente uma representação gráfica para a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{n+1}{n}$. Se a sequência possui limite, indique-o na representação (p. 229).
> **Questão 2.4** (CORNU, 1983, adaptada) Considere a lista de números abaixo:
> 5,1
> 3,99
> 5,001
> 3,9999
> 5,00001
> 3,999999
> 5,0000001
> 3,99999999
> e assim por diante ...
> a) Você considera essa lista uma sequência de números reais? Por que?
> b) Identifique o 5º e o 6º termo da lista.
> c) Escreva expressões que representem o 99º e o 100º termos da lista.

> d) O número 3,999999... aparece na lista? Justifique (VIEIRA, 2016, pp. 230-231)

Vieira (2016) respondeu a segunda questão de pesquisa concluindo que 12 das 16 dificuldades apontadas pelos docentes para o curso de matemática, foram verificadas, em maior ou menor grau, para os estudantes de licenciatura, participantes da pesquisa. Ele afirmou que as análises de erros discutidas para cada uma das questões dos questionários diagnósticos confirmaram a presença dessas dificuldades e forneceram um espectro mais amplo e diversificado para cada uma delas.

Respondeu a terceira questão de pesquisa afirmando que o instrumento de pesquisa permitiu a análise do "desenvolvimento dos processos de representação, mudança entre representações, visualização, generalização e síntese" (VIEIRA, 2016, p. 388). De acordo com a análise dos protocolos e as entrevistas com os sujeitos de pesquisa: eles "não desenvolveram os processos do pensamento matemático avançado avaliados de maneira satisfatória ou plena, no estudo de sequências numéricas" (p. 388).

Respondeu a quarta questão afirmando que os sujeitos de pesquisa

> [...] não realizaram interações de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais para as respostas dada [...], de maneira geral, uma prevalência do uso de aspectos algorítmico-intuitivos na resolução de problemas, em detrimento de aspectos formais dos conceitos e ideias. Essa perspectiva dicotômica no uso dos aspectos, em muitos momentos, colocou esses estudantes em contradição ou os impediu de interpretar corretamente as questões propostas nos questionários e nas entrevistas (VIEIRA, 2016, p. 390).

Vieira (2016) concluiu a pesquisa afirmando que os sujeitos de pesquisa não inter-relacionaram aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução das questões propostas sobre sequências, e que eles não mostraram ter desenvolvido os processos do pensamento matemático avançado durante a realização da atividade, como a mudança entre representações, visualização, generalização e síntese. Também identificou dificuldades com aspectos lógico-formais, relativos à elaboração de justificativas e à argumentação matemática, e erros e incompreensões em assuntos como números reais e funções.

Para o autor, a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução de questões relacionadas ao conteúdo sequências numéricas e ao desenvolvimento de processos mentais nos estudantes propiciados por essas atividades, de acordo com Fischbein (1994) e Dreyfus (2002). O autor ainda ressalta que esses aspectos indicam dificuldades de aprendizagem. Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

Subcategoria C22: Trabalhos cujo foco repousa em questões formais e epistemológicas relacionadas ao processo de ensino ou aprendizagem de conteúdos matemáticos

A dissertação de Angelini (2010) teve como objeto de estudo o conceito de função e seu objetivo foi "identificar a imagem de conceito e a definição de conceito relativos ao conceito de função, e características dos três mundos da matemática, apresentados por 8 alunos da 2ª série do ensino médio" (p. 8) de uma escola pública na cidade de São Paulo diante da resolução de questões de um instrumento diagnóstico proposto pelo autor.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Qual imagem de conceito[43] (TALL; VINNER, 1981) de função que alunos do ensino médio apresentam, após terem estudado este tema na 1ª série do ensino médio?
>
> Qual definição de conceito[44] (TALL; VINNER, 1981) de função que alunos do ensino médio apresentam, após seu estudo deste tema na 1ª série do ensino médio?
>
> Quais características dos três mundos da matemática (TALL, 2004) surgem nas respostas de alunos ao resolver problemas relacionados ao conceito de função? (ANGELINI, 2010, p. 21)

A seguir apresentamos algumas questões do instrumento diagnóstico proposto aos alunos:

> 1) Em matemática, o que significa para você a palavra função? (p. 62)
>
> 2) Para consertar um refrigerador, uma oficina cobra uma taxa fixa de R$ 20,00 pela visita e R$ 15,00 por hora trabalhada. Qual o valor pago por um conserto se o técnico trabalhou 3,25 horas? (Deixe anotados seus cálculos, seus rascunhos e seu raciocínio) (p. 66)
>
> 5) Paulo precisa consertar seu aparelho de som. A oficina X cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 mais R$ 4,00 por hora trabalhada, enquanto que a oficina Y cobra a taxa fixa de R$ 10,00 mais R$ 8,00 por hora trabalhada.
>
> a) Em que condições é melhor utilizar a oficina X? Justifique e deixe suas contas, rascunhos e seu raciocínio.
>
> b) Em que condições é melhor utilizar a oficina Y? Justifique e deixe suas contas, rascunhos e seu raciocínio.

---

[43] Imagem de conceito nós traduzimos com imagem conceitual (*concept image*).
[44] Definição de conceito nós traduzimos com definição conceitual (*concept definition*).

> c) Em que condições os preços cobrados pelas oficinas X e Y são iguais? Justifique e deixe suas contas, rascunhos e raciocínio (p. 73).
>
> 7) Avalie as expressões abaixo e, para cada uma delas, identifique se representa uma dependência de "y em função de x". Justifique suas respostas.
>
> a) $x + y = 4$ b) $y = x^2 + 2$ c) $x = y^2$ d) $g(x) = x^2 + 2$ e) $3x - 4 = y$
> (ANGELINI, 2010, p. 76)

Em sua análise, Angelini (2010) verificou que os alunos apresentaram imagens de conceito com características quase que exclusivamente relacionadas ao mundo corporificado, restritas à utilização de métodos numéricos e localização de pontos nos gráficos. As características referentes ao mundo simbólico restringiram à utilização de uma expressão algébrica dada para obter pares de valores numéricos, sem perceber conexões com o conceito de função como uma relação de dependência entre grandezas. As respostas dadas pelos sujeitos de pesquisa segundo o autor sugeriram imagens de conceito pobres, não apresentaram ideias que podiam ser relacionadas ao mundo formal e às definições de conceito não se aproximavam das definições aceitas pela comunidade matemática.

Angelini (2010) concluiu que os 8 alunos apresentaram dificuldades em resolver as questões propostas relacionadas ao conceito de função. E afirmou que “eles demonstraram dificuldades em operações aritméticas que deveriam ser consideradas elementares para a faixa etária de 15 a 17 anos” (p. 168). O autor recomendou que esses alunos deveriam retomar o aprendizado de funções e sugeriu uma abordagem que considere as características desse conceito relacionadas aos três mundos da matemática para potencializar a aprendizagem.

Para o autor a noção de pensamento matemático avançado está relacionada à imagem de conceito e a definição de conceito do conceito de função desenvolvidos pelos alunos durante a realização de uma atividade matemática, apresentando características corporificadas, simbólicas e formais, de acordo com Tall (2013). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao desenvolvimento do conceito de função através dos três mundos da matemática.

A dissertação de Amorim (2011) teve como objeto de estudo o conceito de limite para os alunos de licenciatura em matemática e seu objetivo foi

> [...] desvendar a contribuição de uma proposta de ensino, baseada nas imagens conceituais, relacionadas ao conceito de limite de uma função, (re)construídas por alunos do curso de licenciatura em matemática, após cursarem análise real, para a aprendizagem desses alunos (p. 27).

Os sujeitos de pesquisa foram 9 alunos de um curso de licenciatura em matemática. Tratou-se de uma pesquisa teórico bibliográfica, documental e de campo.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa:

> Como uma proposta de ensino, baseada nas imagens conceituais, relacionadas ao conceito de limite de uma função, (re)construídas por alunos do curso de licenciatura em matemática, após cursarem análise real, pode contribuir para a aprendizagem desses alunos? (AMORIM, 2011, p. 27)

Foram analisadas atividades realizadas por alunos de um curso de licenciatura em matemática, na disciplina análise real, em livros didáticos de cálculo e de análise e em tópicos referentes à definição de limite de uma função.

A seguir apresentamos algumas questões das 2 atividades (Atividade I: pós-cálculo e Atividade II: pós-análise):

> **Atividade I (pós-cálculo)**
>
> 2) Explique com suas próprias palavras, o que significa cada formulação matemática abaixo. A seguir, ilustre graficamente cada formulação na reta real:
>
> a) $x \to a$
>
> b) $x \to a^+$
>
> c) $x \to a^-$
>
> d) $x \to \infty$
>
> e) $x \to -\infty$
>
> 3) Explique, com suas próprias palavras, o que significa cada formulação matemática abaixo. A seguir, esboce um gráfico de uma função que ilustre cada formulação.
>
> a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
>
> b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$
>
> c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$
>
> d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
>
> e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (p. 83)

Atividade II (pós-análise)

1) Esboce o gráfico de uma função real de uma variável que satisfaça às seguintes condições:

a) $\lim_{x\to-3} f(x) = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ [...] (p. 85)

4) Na definição de limite de uma função de uma variável, o que significa:

a) $\varepsilon > 0$, real qualquer

b) $\delta > 0$, real qualquer (AMORIM, 2011, p. 87)

Durante a realização da atividade proposta pelos alunos, a autora constatou um avanço na construção das imagens conceituais acerca do conceito de limite e percebeu uma motivação na aprendizagem por meio da superação das dificuldades apresentadas pelos sujeitos de pesquisa.

Após as análises, Amorim (2011) em sua conclusão apresentou o que considerou contribuições ao professor de análise, em uma proposta de ensino baseada nas imagens conceituais dos alunos, são elas:

- Entender e situar o momento e a aprendizagem de seus alunos;

- Perceber a importância de identificar e (re)significar imagens conceituais equivocadas e/ou conflitantes;

- Reconhecer a necessidade de (re)construir imagens conceituais coerentes e que explorem elementos intuitivos;

- Trabalhar na perspectiva de se construir definições conceituais de acordo com as definições formais;

- Repensar sua prática pedagógica e planejar suas ações;

- Incentivar uma postura mais crítica e ativa em seus alunos e, assim desmistificar o “horror” à análise (AMORIM, 2011, pp. 126-128).

Para Amorim (2011) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a definições formais do conceito de limite de funções reais de uma variável e ela considera que a construção de imagens conceituais coerentes com as definições conceituais proposta nas atividades pode favorecer a aprendizagem dos conceitos de limites de funções reais, de acordo com Tall e Vinner (1981). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Bertolazi (2012) teve como objeto de estudo os conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares. A autora investigou “os processos mentais do pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de licenciatura em matemática em tarefas sobre sistemas de equações lineares" (p. 11). Para a obtenção dos dados foi utilizada uma proposta de avaliação reflexiva com 17 estudantes de um curso de licenciatura em matemática.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: "Que manifestações de pensamento matemático avançado são reveladas em registros escritos de estudantes de licenciatura em matemática ao resolverem tarefas sobres sistemas de equações lineares? (BERTOLAZI, 2012, p. 17)

Dos 17 participantes da pesquisa, 10 atuavam como professores na educação básica, e maioria deles apresentava uma visão instrumentalista do ensino de matemática, que de acordo com Thompson (1997) é "uma visão adquirida pela acumulação de fatos, regras e habilidades a serem utilizadas na efetivação de um fim externo" (BERTOLAZI, 2012, p. 55), ou até mesmo prescritiva da matemática e que muitos dos sujeitos ainda demonstraram atitudes reflexivas à luz das ideias de Freire (2004, 2011), "pois evidenciaram autonomia e responsabilidade perante sua própria formação" (BERTOLAZI, 2012, p. 205).

A seguir apresentamos algumas questões da avaliação reflexiva proposta pela autora:

> **Parte I**
>
> **Questão 1.** a) Pensando em seu futuro profissional, como professor de matemática, o que considera importante em matemática que não pode deixar de aprender?
>
> b) Para você, o que a matemática representa? (p. 89)
>
> **Questão 2.** Explique o porquê de sua escolha pelo curso de matemática. Que razões lhe motivaram para tal escolha?
>
> **Questão 3.** Há espaço em seu curso de graduação para debates, reflexões e discussões a respeito de habilidades matemáticas, a fim de estimular um pensamento matemático avançado? (p. 90)
>
> **Parte II**
>
> **Questão 2.** a) Em quais épocas escolares você estudou sistemas de equações lineares? Relate sua experiência de forma detalhada sobre esse conteúdo.
>
> b) Existe diferença da abordagem da educação básica para a do ensino superior sobre o conteúdo de sistemas de equações lineares? Explique (p. 99).
>
> **Questão 3.** Defina um sistema de equações lineares e explicite suas características.
>
> **Questão 4.** (POOLE, 2004, p. 109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas café tostado tipo francês. Um pacote

> com “mistura gourmet” contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos do café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar? (p. 110)
>
> **Questão 4.** O que é um sistema linear homogêneo? (p. 100)
>
> **Parte III**
>
> **Questão 5.** (ANTON; BUSBY, 2006, p. 80) Considere os sistemas lineares:
>
> (I) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=4 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$
>
> a) Mostre que o primeiro sistema não possui solução e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por estas equações.
>
> b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações (BERTOLAZI, 2012, p. 111)

Bertolazi (2012) após a análise dos registros escritos pelos estudantes durante a realização das tarefas propostas, concluiu que todos apresentaram pelo menos 3 processos mentais diferentes de representação associados ao pensamento matemático avançado, dentre 9 processos que foram analisados, mas “em relação aos processos essenciais envolvendo a abstração matemática, apenas 3 estudantes dentre 17 participantes manifestaram a capacidade de formalização, generalização e síntese na resolução de tarefas sobre sistemas de equações lineares” (p. 210).

Para Bertolazi (2012) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a interações de vários processos mentais utilizados na resolução de tarefas relacionadas a sistemas de equações lineares e que os principais processos mentais relacionados ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado são: a formalização, a generalização e a síntese, essenciais para a abstração matemática, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado ao processo mental de abstração.

A dissertação de Poggio (2012) teve como objeto de estudo o conceito de proporcionalidade apresentado por alunos do ensino médio na perspectiva dos três mundos da matemática, e o objetivo foi “investigar quais são as definições que alunos do ensino médio dão sobre proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, bem como analisar com que características trabalham questões que envolvem tais conceitos” (p. 11). Seus sujeitos de pesquisa foram 51 alunos de 2 turmas de uma 3ª série do ensino médio de uma escola estadual paulista.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa:

> Qual a definição de conceito que alunos do ensino médio dão da proporcionalidade direta?
>
> Qual a imagem de conceito que alunos do ensino médio têm sobre proporcionalidade direta?
>
> Qual a definição de conceito que alunos do ensino médio dão da proporcionalidade inversa?
>
> Qual a imagem de conceito que alunos do ensino médio têm sobre proporcionalidade inversa?
>
> Com que características, entre formais, simbólicas e corporificadas, esses alunos trabalham questionamentos que envolvem a proporcionalidade direta?
>
> Com que características, entre formais, simbólicas e corporificadas esses alunos trabalham questionamentos relacionados à proporcionalidade inversa? (POGGIO, 2012, p. 11)

A seguir apresentamos algumas questões do questionário diagnóstico proposto aos sujeitos de pesquisa:

> 1) Escreva com suas palavras o que você entende por proporcionalidade direta (p. 75).
>
> 2) Dê um exemplo de proporcionalidade direta (p. 77).
>
> 3) Esboce um gráfico que represente duas grandezas diretamente proporcionais (p. 78).
>
> 6) Escreva com suas palavras qual sua primeira ideia para resolver o seguinte problema: “Um automóvel percorre uma distância de 48 quilômetros em 02 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 06 horas?” Explique o porquê desta ideia (p. 82).
>
> 7) Escreva com suas palavras o que você entende por proporcionalidade inversa (p. 83).
>
> 8) Dê um exemplo de proporcionalidade inversa (p. 84).
>
> 10) Esboce um gráfico que não represente nem proporcionalidade direta nem a proporcionalidade inversa. Explique (p. 86).
>
> 12) Escreva com suas palavras qual sua primeira ideia para resolver o seguinte problema: “Se 20 homens trabalhando durante 15 dias constroem 500 metros de um muro, quantos homens serão necessários para construir mais 100 metros desse muro em 30 dias?” Explique o porquê desta ideia (POGGIO, 2012, p. 89).

Após a análise dos protocolos de resolução do questionário diagnóstico, Poggio (2012) afirmou que as definições de conceito de proporcionalidade direta e inversa apresentadas pelos sujeitos de pesquisa tiveram características do mundo corporificado e não apresentaram características do mundo simbólico, podendo serem resumidas, respectivamente, por “quando uma grandeza aumenta a outra também aumenta” (p. 201) e “quando uma grandeza aumenta a outra diminui” (p. 203).

A autora respondeu a 1ª questão afirmando que a definição de conceito que esses alunos apresentaram de proporcionalidade direta teve, essencialmente, características corporificadas. Respondeu a 2ª questão afirmando que a imagem de conceito de proporcionalidade direta dos participantes da pesquisa apresentou características, essencialmente, corporificadas.

Respondeu a 3ª questão afirmando que a definição de conceito, que os participantes da pesquisa, apresentaram de proporcionalidade inversa, teve características corporificadas, não apresentando características simbólicas. A autora afirmou que praticamente todos os alunos não indicaram uma definição de conceito com características formais, tanto para a proporcionalidade direta como para a proporcionalidade inversa. Poggio (2012) afirmou "que esse foi um dos motivos possíveis pelos quais, nas questões que foram propostas no questionário diagnóstico, eles não conseguiram trabalhar bem os problemas que envolveram tais conceitos" (p. 203).

A 4ª questão de pesquisa foi respondida de acordo com as questões anteriores, que a imagem de conceito de proporcionalidade inversa dos participantes apresentou características essencialmente corporificadas.

Respondeu a 5ª questão de pesquisa afirmando que em relação às respostas dadas sobre a proporcionalidade direta

> [...] estas apontaram que os alunos possuíam uma imagem de conceito classificada como pobre, apresentando exclusivamente características corporificadas, baseadas em um gráfico de reta com coeficiente angular positivo e quando mostraram características do mundo simbólico, estas não correspondiam ao conceito (POGGIO, 2012, p. 208).

Respondeu a 6ª questão de pesquisa afirmando que as respostas apresentadas pelos sujeitos diante do questionário diagnóstico sugeriram que eles não faziam uma jornada pelos três mundos da matemática e apresentaram essencialmente características corporificadas. A definição de conceito apresentadas pelos alunos, tanto para a proporcionalidade direta como para a proporcionalidade inversa, "mostrou essencialmente características corporificadas, com textos muitas vezes equivocados, insuficientes para serem aceitos como uma boa definição, que fosse aceita pela comunidade matemática" (POGGIO, 2012, p. 208).

Poggio (2012) finaliza sua pesquisa afirmando que os sujeitos de pesquisa não desenvolveram o pensamento proporcional, pois não apresentaram em "suas respostas uma imagem de conceito de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa, rica e diversificada, com características dos três mundos da matemática" (p. 208). De acordo com a autora "para haver desenvolvimento cognitivo, é necessário que o sujeito transite pelos três mundos, por meio de uma ampla gama de experiências, imagens mentais, procedimentos e processos, com características mais ricas possíveis" (p. 208).

Para Poggio (2012) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento de uma imagem de conceito rica e diversificada transitando por características corporificadas, simbólicas e formais diante da resolução de atividades matemáticas relacionadas a proporcionalidade, de acordo com Tall (2013). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado a fenômenos complexos que podem existir na matemática elementar.

A tese de Yokoyama (2012) teve como objeto de estudo o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com síndrome de *down* e seu objetivo foi "analisar a compreensão de quantificação[45] de 1 a 10 elementos de conjuntos discretos das crianças e adolescentes com síndrome de *down* e elaborar atividades que poderiam contribuir para o desenvolvimento dessa compreensão" (p. 11). Os sujeitos de pesquisa foram 8 crianças/adolescentes com idades entre 5 e 19 anos.

Em sua pesquisa foram propostas algumas atividades que envolviam a interação entre conceitos e procedimentos, aproveitando outras formas de estímulo viso-espacial com material multissensorial e dedos das mãos, com o objetivo de desenvolver o conceito de número utilizando dois procedimentos de quantificação: a contagem e o *subitizing* (é a capacidade de quantificar um conjunto discreto, sem utilizar um processo de contagem). Para interpretar os resultados e analisar o processo de aplicação das atividades foram utilizados os conceitos de imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981) e organizador genérico (TALL, 1989).

A seguir apresentamos alguns itens das atividades propostas e desenvolvidas pelo autor:

[45] Esse autor entende por quantificação a capacidade de determinar quantidade de elementos de um conjunto discreto qualquer (p. 11).

> **Princípio da conservação**
>
> Dados dois conjuntos discretos de mesma cardinalidade ou não, cujos elementos são cubinhos de madeira de 1 cm de aresta, a configuração espacial de seus elementos não influencia na comparação dos conjuntos em questão.
>
> Foram apresentadas duas folhas de papel em branco e nelas colocadas cubinhos. Ao colocar quantidades iguais e quantidades diferentes perguntava-se: “tem mais cubinhos aqui (apontando o papel da esquerda), aqui (apontando o papel da direita), ou tem a mesma quantidade?” Ainda nesta situação foram colocadas outras perguntas na tentativa de compreensão por parte dos participantes: “imagine que esses cubinhos são chocolates, qual você prefere? Este (apontando o papel da direita) ou este (apontando o papel da esquerda)?” (p.71).
>
> **Atividade fundamental ou 1º organizador genérico**
>
> Consiste em apresentar ao participante uma nova unidade cognitiva, a forma do Numicon[46] que representa a quantidade requisitada pelo pesquisador, e instigá-lo a escolher uma estratégia de seleção de objetos. As peças do Numicon podem ser consideradas unidades cognitivas, pois são símbolos que representavam números e o indivíduo é capaz de focar sua atenção nesta estrutura cognitiva por um determinado instante. Logo em seguida, é solicitado ao participante a mesma quantidade de pinos que a forma do Numicon representa, ou seja, neste momento exige-se do aprendiz outra unidade cognitiva: uma estratégia para a seleção de pinos (p. 88).
>
> **Atividade significativa de sequência padrão dos números naturais: 2º organizador genérico**
>
> Consiste em fornecer ao participante algumas representações dos números de 1 a 10, ou as fichas numeradas ou as formas numéricas do Numicon, de forma que ele as identifique e as coloque em ordem. Logo em seguida, distribui-se aleatoriamente a outra representação dos números, ou as fichas ou as formas, para que se faça uma correspondência entre ambas representações. Posto isto em sua frente, o pesquisador utiliza ou pinos, ou dedos, ou pinos nos dedos para questionar o participante sobre novas quantidades toda vez que se adiciona ou se retira um elemento do conjunto. A sequência se localiza na frente do participante como um apoio à memória (YOKOYAMA, 2012, p. 102).

O autor apresentou duas questões de pesquisa: A primeira foi “analisar de que maneira o primeiro organizador genérico, ou atividade fundamental de contagem, influência na imagem conceitual de número dos participantes” (p. 214). Yokoyama (2012) respondeu à questão afirmando que esse organizador genérico mostrou uma enorme influência e que sua principal influência foi estimular a escolha de uma estratégia por parte dos participantes. A segunda foi “verificar a importância de se conhecer a sequência numérica padrão, associada a uma ação concreta de adicionar/retirar um elemento de um determinado conjunto, para o entendimento do

[46] Numicon é um conjunto de materiais multissensoriais, desenvolvido na Inglaterra, composto por formas numéricas coloridas, cartões numerados, pinos coloridos, tabuleiro, barbante, sacola, proposta de atividade, faixa com reta numerada, etc. Suas formas numéricas favorecem a visão de número e relações entre eles, de uma maneira global, diferente de outras representações numéricas como pontos enfileirados, a forma escrita e a oral, proporcionando aos alunos uma importante unidade cognitiva para a imagem conceitual de número (YOKOYAMA, 2012, p. 64).

conceito de número referente à quantidade de elementos e ao processo de contagem" (p. 214). O autor respondeu essa questão afirmando

> [...] que organizar e manipular a sequência padrão de números naturais, com materiais multissensoriais, com pelo menos dois representantes numéricos, e dar um significado concreto aos sucessores e antecessores dos números, fez com que os participantes organizassem e ampliassem suas imagens conceituais de um número (YOKOYAMA, 2012, p. 221).

Yokoyama (2012) concluiu sua pesquisa afirmando que para seus sujeitos de pesquisa a "interação entre conceitos e procedimentos foi um caminho viável para atingir uma melhor compreensão do conceito de número" (p. 222).

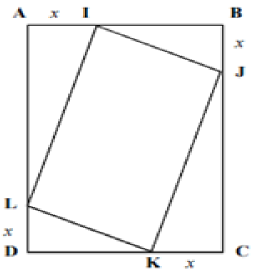
Esse autor utilizou a noção imagem conceitual e organizador genérico para o desenvolvimento da compreensão do conceito de número natural em crianças/adolescentes com síndrome de *down* por meio de atividades multissensoriais, de acordo com Tall e Vinner (1981) e por Tall (1989). Para esse autor, de acordo com nossas análises, a teoria do pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento de imagens conceituais.

A dissertação de Gereti (2014) teve como objeto de estudo os processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade e seu objetivo foi "descrever e discutir indícios/características dos processos do pensamento matemático avançado evidenciados na produção escrita de estudantes de matemática" (p. 9) de uma universidade estadual paranaense ao resolverem questões discursivas do Enade. As questões do Enade selecionadas pela autora foram aplicadas em uma turma do 4º ano do curso de matemática com 13 estudantes.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: "Que processos do pensamento matemático avançado são evidenciados por estudantes de matemática ao resolverem questões discursivas do Enade?" (GERETI, 2014, p. 18)

A seguir apresentamos 2 questões discursivas que a autora utilizou em seu instrumento de coleta de dados:

> 2) No retângulo ABCD abaixo, o lado AB mede 7 cm e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir e transcreva suas respostas para o caderno de respostas, nos locais devidamente indicados.

a) Demonstre que o quadrilátero IJKL é um paralelogramo.

b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo IJKL em função de *x* e determine, caso existam, seus pontos de máximo e de mínimo.

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com os alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio? (p. 70).

3) Em um prédio de 8 andares, 5 pessoas aguardam o elevador no andar térreo. Considere que elas entrarão no elevador e sairão, de maneira aleatória, nos andares de 1 a 8. Com base nessa situação, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando o procedimento de cálculo utilizado na sua resolução.

a) Calcule a probabilidade de essas pessoas descerem em andares diferentes.

b) Calcule a probabilidade de duas ou mais pessoas descerem em um mesmo andar (GERETI, 2014, p. 87).

Após a aplicação das questões e análise das resoluções dos estudantes a autora concluiu que os mesmos processos evidenciados nas respostas padrão do Enade foram mobilizados nas resoluções de alguns estudantes, com exceção de uma questão proposta em que três estudantes mobilizaram um processo a mais, o de visualização. De um total de treze estudantes:

> [...] onze estudantes mobilizaram o processo de representação simbólica, três estudantes mobilizaram o processo de visualização, sete estudantes mobilizaram o processo de mudança de representações e tradução entre elas, dois estudantes mobilizaram o processo de modelação, sete estudantes mobilizaram o processo de síntese e dois estudantes mobilizaram o processo de generalização (GERETI, 2014, p. 122).

A autora afirma que nenhum estudante mobilizou todos os processos mentais da teoria do pensamento matemático avançado, segundo Dreyfus (2002), nas resoluções das quatro questões e que dos treze estudantes, dois não resolveram nenhuma questão.

Gereti (2014) em sua pesquisa afirmou: “corroboramos com os autores estudados nessa investigação que os processos do pensamento matemático avançado se fazem importantes, os quais permitem que os estudantes compreendam uma gama de conceitos matemáticos” (p. 124).

Para essa autora a noção de pensamento matemático avançado está relacionada à interação de todos os processos mentais durante a resolução de questões, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Junior (2014) teve como objeto de estudo o ensino de análise e seu objetivo foi “verificar e analisar as modificações nas imagens de conceito de alunos de licenciatura em matemática durante a aplicação de atividades de ensino sobre sequências de números reais, na perspectiva da disciplina análise” (p. 8). Os sujeitos de pesquisa foram 6 alunos de licenciatura em matemática de um Instituto Federal mineiro. Foi proposto um questionário inicial e algumas atividades em horário extraclasse.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: “Como atividades de ensino de sequências de números reais podem modificar as imagens de conceito de alunos de análise na reta?” (JUNIOR, 2014, p. 13)

Junior (2014) também apresentou alguns objetivos específicos em sua pesquisa, foram eles:

> [...] verificar se os alunos conseguem entender de forma significativa os conteúdos;
>
> [...] verificar se os alunos conseguem formalizar os conteúdos e compreender as formalizações que são apresentadas a eles;
>
> [...] verificar as impressões e reações dos alunos frente à disciplina análise na reta (p. 13).

O autor formulou as seguintes perguntas para responder à questão de pesquisa de acordo com a atividade de ensino proposta aos alunos: “Como se modificam as imagens de conceito do aluno?” (JUNIOR, 2014, p. 50) “Os alunos conseguem entender de forma significativa os conceitos?” (p. 50) “Como ocorre a formalização dos conceitos?” (p. 51) “O que os alunos dizem sobre a disciplina análise? (p. 52)”

A seguir apresentamos algumas perguntas do questionário aos sujeitos de pesquisa:

> **Questionário**

> 1) Você já cursou a disciplina análise na reta ou é a primeira vez? Se já cursou, descreva sua(s) experiência(s) anterior(es) ou atual (p. 59).
>
> 2) Ainda para os que já cursaram a disciplina em outra oportunidade, qual a importância que vocês vêm nesta disciplina?
>
> 3) Você já estudou o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas? Conseguiria caracterizar os tipos de progressões? Lembra-se do somatório de cada uma dessas progressões? (p. 60)
>
> **Atividades**
>
> 1) Observe as progressões aritméticas e geométricas abaixo.
>
> (1, 3, 5, 7, ...), (16, 8, 4, 2, 1, ...)
>
> i) Faça o gráfico dessas progressões no plano cartesiano.
>
> ii) As sequências acima são limitadas? Justifique (p. 62).
>
> 2) A sequência ($a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$) é limitada inferior e/ou superiormente para $a > 1$? E para $0 < a < 1$? (p. 63)
>
> 3) Seja (x_n) uma sequência tal que $lim x_n = a$ e $lim x_n = b$, qual é a relação entre a e b? Justifique (JUNIOR, 2014, p. 64).

O autor obteve a resposta para sua primeira pergunta concluindo que não houve modificações no sentido contrário aos resultados formais.

> Nos casos de 2 alunos as atividades de ensino proposta pouco modificaram suas imagens de conceito. Já no caso dos outros alunos, que houve modificações significativas, incorporando representações e conceitos que aproximaram suas imagens de conceito aos resultados formais (JUNIOR, 2014, p. 95).

Em relação à formalização dos resultados o autor concluiu que houve um entendimento maior dos conteúdos por parte dos alunos.

Junior (2014) respondeu a segunda pergunta, com a investigação de cada participante da pesquisa, observando que pode “confrontar suas imagens de conceito criando conflitos potenciais, e isso fez com que os indivíduos prestassem atenção em incoerências antes não notadas” (p. 96). Para 2 alunos “estas atividades de ensino refletiram um pouco do ensino tradicional, pois eles só entendiam quando o pesquisador os explicava, mas não conseguiam esboçar uma resolução” (p. 97).

O autor respondeu a terceira pergunta afirmando que um aspecto importante da transição foi observado durante a aplicação das atividades: no começo, a formalização para os estudantes se dava por meio de lembranças sobre a demonstração formal já vista por eles. “Quando estimulados a pensar em outra forma, houve uma compreensão maior por parte dos estudantes, e suas imagens de conceito se agregaram a mais um tipo de representação sobre aquele resultado” (JUNIOR, 2014, p. 96).

Junior (2014) respondeu a quarta pergunta observando que 3 alunos "colocaram a importância da disciplina análise na relação desta com os conteúdos de cálculo" (p. 99). Dois dos alunos acreditavam que a importância da disciplina de análise da reta favorece a formação do professor de matemática. O autor destacou que sua pesquisa cumpriu com o objetivo de ampliar as discussões sobre o processo de ensino e de aprendizagem na disciplina análise, propondo também uma alternativa metodológica.

Para Junior (2014) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento de imagens conceituais de acordo com a formalização de conceitos matemáticos relacionados a atividades de sequências de números reais na disciplina de análise da reta, de acordo com Tall e Vinner (1981). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Marins (2014) teve como objeto de estudo o pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares e seu objetivo foi de

> [...] identificar e discutir que indícios/características de processos do pensamento matemático avançado são manifestados por estudantes do curso de matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares" (p. 16).

Os sujeitos de pesquisa foram 13 estudantes do 2º ano bacharelado em matemática.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: "Que processos do pensamento matemático avançado são manifestados nos registros escritos apresentados por estudantes do curso de matemática ao resolverem tarefas relacionadas ao conteúdo de transformações lineares?" (MARINS, 2014, p. 16)

A seguir apresentamos algumas das oitos tarefas propostas:

> **Tarefa 1:** O que é um espaço vetorial? Explique (p. 62)
>
> **Tarefa 4:** Há alguma relação entre o conteúdo de transformações lineares e os outros conteúdos da disciplina de álgebra linear, como matrizes e determinantes? Outros? E com outras disciplinas do curso de graduação em matemática? Explique (p. 67).
>
> **Tarefa 5:** Marque qual(is) da(s) aplicação(ões) abaixo é (são) transformação(ões) linear(es)? Justifique.
>
> a) ( ) $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x, y) = (-x, y)$.
>
> b) ( ) $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x, y) = (x + ky, y)$.
>
> c) ( ) $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida por: $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
>
> d) ( ) A rotação do R^2 no R^2.
>
> e) ( ) A translação do R^2 no R^2.
>
> f) ( ) O cisalhamento de R^2 de fator *k* na direção *x*. [...] (MARINS, 2014, p. 68)

A autora após analisar as tarefas propostas e resolvidas pelos estudantes afirmou que

> [...] a maioria dos processos do pensamento matemático avançado que foram manifestados nas resoluções dos estudantes foram os de representação, principalmente o de representação simbólica e mental. Apenas 3 estudantes manifestaram em suas resoluções o processo de abstração que está relacionado aos processos de generalização ou síntese, além dos de representação (MARINS, 2014, p. 154).

E que 5 estudantes não manifestaram processos do pensamento matemático avançado.

Marins (2014) concluiu sua pesquisa afirmando que 6 dos 13 estudantes manifestaram características dos processos do pensamento matemático avançado na maioria das tarefas. Dos 6 estudantes, 3 apresentaram características apenas dos processos de representação, 2 manifestaram somente o processo de representação simbólica e 1 os processos de representação simbólica, mental e mudança de representação e alternância entre elas. “Para o processo de abstração, somente 3 estudantes manifestaram características relativas aos dois processos que são a generalização e a síntese” (p. 162). Apenas 2 estudantes apresentaram características de todos os processos do pensamento matemático avançado na resolução das tarefas propostas.

A autora afirmou que os estudantes podem manifestar características dos processos do pensamento matemático avançado em relação a esses conceitos durante a graduação. Porém, “7 estudantes não apresentaram características desses processos, porque não responderam as tarefas e/ou escreveram respostas subjetivas que não mostraram algum conhecimento do assunto” (MARINS, 2014, p. 163) e que o desenvolvimento do pensamento matemático avançado pode contribuir para reflexão desses estudantes, a fim de que compreendam os conceitos matemáticos em questão e seus objetivos envolvidos.

Marins (2014) finaliza sua pesquisa afirmando:

> [...] percebemos que existem dificuldade por parte dos estudantes quanto a compreensão dos objetos matemáticos de um conceito abstrato como transformações lineares. Por esse motivo, há necessidade de que o professor de ensino superior possibilite aos seus alunos meios para suprirem essas dificuldades, busquem “novas” formas/metodologias de ensino e aprendizagem além da tradicional, que é definir e exemplificar o objeto, para que esses conceitos abstratos sejam realmente compreendidos (p. 164).

Para Marins (2014) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada à interação dos processos mentais: representação, generalização, síntese e abstração, utilizados na resolução de tarefas relacionadas ao conteúdo de transformações lineares podendo minimizar essas dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão desses conceitos abstratos, de acordo com Dreyfus (2002). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Pinto (2014) teve como objeto de estudo as definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo e seu objetivo foi

> [...] compreender como e de que forma as definições matemáticas são utilizadas em discussões entre estudantes e professores durante as apresentações em um seminário, cujos estudos enfatizavam representações gráficas e algébricas das funções e suas derivadas, elaboradas por meio de um *software* com representação gráfica dinâmica (PINTO, 2014, p. 21).

A pesquisa de campo foi realizada com 38 alunos de uma turma de Sistemas de Informação de uma universidade pública.

De acordo com a autora a análise e o estudo dos aportes teóricos que fundamentaram a pesquisa foram distribuídos em seis etapas:

> a) apreciação global dos dados para começar a definição de nosso objeto de estudo e objetivo da pesquisa;
>
> b) estabelecimento de diretrizes para a seleção de dados e, assim, a seleção de gravações para transcrever;
>
> c) seleção e transcrição de dados coletados nas atividades e no seminário;
>
> d) definição de aportes teóricos na área do pensamento matemático avançado e interacionismo simbólico;
>
> e) estudo da literatura a respeito do pensamento matemático avançado e definições matemáticas;

f) a codificação e categorização dos dados (PINTO, 2014, pp. 32-33).

Após a realização de 8 atividades pelos alunos, foi proposto um trabalho em grupo. Essa proposta de trabalho foi feita pelo professor regente da turma juntamente com a autora e teve como principal objetivo avaliar a compreensão dos alunos sobre funções e suas derivadas. As conclusões dos estudantes, baseadas nos conceitos abordados nas atividades e nas estratégias utilizadas, foram apresentadas em um seminário.

A seguir apresentamos algumas das atividades propostas:

> **Atividade 1: Taxa de variação**
>
> Situação-problema: Um mergulhador salta do trampolim a 14,7 metros de altura. Desprezando-se a resistência do ar, considerando a altura *h* em metros, o tempo *t* em segundos e sua velocidade inicial 9,8 metros por segundo, sua função posição é: $h\,(t) = -4{,}9t^2 + 9{,}8t + 14{,}7$
>
> Processo de construção/exploração de conceitos:
>
> 1.1. Abra o GeoGebra e crie um arquivo:a1_cal_si_nome_data.
>
> 1.2. Plote a função $h\,(t)$.
>
> 1.3. Crie um controle deslizante a e configure-o no intervalo [0,3] e incremento 0.5.
>
> 1.4. Crie o ponto $A = (a, h(a))$. Habilite o rastro de A e, em seguida, animação.
>
> 1.5. Use esses dados para completar a tabela 1 que relaciona a altura (*h*) do mergulhador com o tempo (*t*) nos instantes especificados [...] (p. 127).
>
> **Atividade 6: O que f' nos diz sobre f**
>
> 1. Abra o GeoGebra e crie o arquivo: a6_cal_si_nome_data.
>
> 2. Elabore as seguintes funções:
>
> 2.1. Trigonométrica: *t(x)* = 2.2. Polinomial de grau 3: *f(x)* =
>
> 2.3. Polinomial de grau 4: *p(x)* = 2.4. Racional: *r(x)* =
>
> 2.5. Exponencial: *e(x)* = 2.6. Logarítmica: *l(x)* =
>
> 3. Determine o domínio e a imagem de cada uma delas.
>
> 4. Determine algebricamente a derivada de cada função que você elaborou: *t'(x), f'(x), p'(x), r'(x), e'(x), l'(x)*
>
> 5. Plote no GeoGebra as funções e suas derivadas (em vermelho), e observando o gráfico de cada função e sua respectiva derivada, responda:
>
> 5.1. Em qual intervalo ou quais as funções são crescentes? E decrescentes?
>
> 5.2. Para quais valores de *x* a derivada é negativa? Nesse caso, a função *f* é crescente ou decrescente? Por quê?
>
> 5.3. Para quais valores de *x* a derivada é positiva? Nesse caso, a função *f* é crescente ou decrescente? Por quê?
>
> 5.4. Qual é o valor da derivada quando a função atinge um valor máximo ou mínimo?
>
> 5.5. Escreva com suas palavras o que você entende por função crescente e função decrescente.

> 5.6. De acordo com o tipo de funções que você elaborou, escreva suas conclusões, estabelecendo uma relação entre uma função e sua derivada.
>
> 5.7. Suas conclusões servem para qualquer tipo de função? (PINTO, 2014, pp. 139-140)

De acordo com Pinto (2014) a proposta de trabalho feita pelo professor regente e por ela “tinha como objetivo principal estimular e incentivar os alunos a pesquisarem e investigarem com base nos conceitos abordados nas 8 atividades desenvolvidas e nas definições exploradas pelo professor regente” (p. 28) em suas aulas.

Cada grupo se encarregou de pesquisar um tema que tratasse de uma função e de suas propriedades e observar as relações entre essa função e suas derivadas. Em grupos, os estudantes deveriam sintetizar, realizar testes com a utilização do *software GeoGebra* e, posteriormente, apresentar, em um seminário, os resultados de seus estudos relacionados às funções e suas derivadas. A autora afirmou que muitos diálogos aconteceram nas interações, pois foi intensa a participação de alunos.

Pinto (2014) definiu 6 categorias que nortearam as interpretações dos dados à luz das teorias do pensamento matemático avançado e do interacionismo simbólico. As 6 categorias emergentes foram:

> a) utilizando experiências prévias;
>
> b) transitando entre as representações;
>
> c) apresentando definição de conceitos;
>
> d) discutindo as dúvidas apresentadas;
>
> e) explorando/testando funções e suas derivadas, utilizando o GeoGebra;
>
> f) avançando na compreensão das definições (melhoria na aprendizagem) (PINTO, 2014, p. 87).

A autora observou que as

> [...] interações entre estudantes, professor e pesquisadora durante a realização das atividades e nas apresentações dos resultados pelos grupos foram relevantes e evidenciaram algumas incongruências entre a maneira como alguns estudantes utilizaram as definições matemáticas e a forma como estão compreendidas na matemática (PINTO, 2014, p. 115).

Afirmou que os dados da pesquisa “mostraram que o pensamento matemático manifestado pelos estudantes sobre os conceitos referentes às funções e suas derivadas evoluíram a partir das interações produzidas entre os estudantes e, entre eles com o professor da turma e a pesquisadora” (PINTO, 2014, p. 117).

A partir da análise dos episódios selecionados na pesquisa, Pinto (2014)

> [...] considerou que a interação social entre os estudantes, professor e pesquisadora foi importante no desenvolvimento das imagens conceituais, e apesar de que os estudantes individualmente tem diversas imagens conceituais, elas são produzidas socialmente e podem ser modificadas pelo estudante durante as interações produzidas em um contexto específico, como foi o caso do seminário realizado para que os estudantes apresentassem, discutissem e formalizassem os conceitos relacionados com distintas funções e suas derivadas (PINTO, 2014, 119).

Pinto (2014) concluiu afirmando “que os estudantes atribuíram significados aos distintos termos e símbolos utilizados na definição conceitual formal de conceitos relacionados a funções e suas derivadas, se aproximando em vários graus à definição estipulada desses conceitos” (p. 121). Entretanto a autora “crê que sejam necessárias pesquisas baseadas nas realizações de experimentos em sala de aula, onde o aluno tenha a oportunidade de se expressar e interagir com seus pares e professores, privilegiando as formas de pensamento matemático” (PINTO, 2014, p. 121).

Para Pinto (2014) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a definições matemáticas de funções e suas derivadas, e que o desenvolvimento de imagens conceituais dos alunos dessas definições deve ser desenvolvidos através de atividades que favoreçam interações sociais para que essas imagens conceituais se aproximem da definição conceitual formal, de acordo com Tall e Vinner (1981) e Blumer (1980). Para essa autora, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A tese de Leme (2016) teve como objeto de estudo a aprendizagem do conceito de derivada de acordo com a perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento. O objetivo dessa pesquisa foi

> [...] investigar os fluxos de pensamento na formação do pensamento matemático na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a teoria dos três mundos da matemática, de David Tall (2013), com vistas a identificação de meios que potencializem a aprendizagem desse conceito matemático (LEME, 2016, p. 35).

De acordo com o autor tratou-se de uma pesquisa no âmbito das investigações cognitivistas referenciadas pelo estudo dos fluxos de pensamento do sujeito quando aprende matemática. Leme (2016) teve como hipótese que a identificação dos diferentes fluxos de pensamento poderia potencializar a aprendizagem do conceito de derivada.

Para essa investigação foram propostas as questões de pesquisa: “Quais são os fluxos de pensamento, embasados na teoria dos três mundos da matemática, envolvidos na aprendizagem da derivada? Como o entendimento desses fluxos pode potencializar o aprendizado desse conceito?" (LEME, 2016, p. 108)

O autor tomou como base a teoria dos três mundos da matemática - mundo corporificado (C), mundo simbólico (S) e mundo formal (F) -, e desenvolveu 9 diferentes fluxos de pensamento, codificados como Ff, Cc, Ss, Sc, Cs, Fc, Fs, Cf e Sf que foram exemplificados utilizando o conceito de extremos locais. De acordo com o autor, "esses fluxos estavam em conformidade com as ideias de Tall (2013), sendo observados pela classificação proposta por ele, como matemática prática, matemática teórica e matemática formal" (LEME, 2016, p. 109).

A seguir apresentamos alguns exemplos de atividades que indicam alguns fluxos de pensamento desenvolvido pelo autor:

> **Simbólico → simbólico (Ss)**
>
> Seja a função real *f* dada por $f\ (x) =\ x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, para determinar os máximos e mínimos locais de *f*, deve-se executar a seguinte rotina:
>
> I. Determine f".
>
> II. Faça $f"(x)\ =\ 0$ para encontrar os números críticos, x_1 e x_2.
>
> III. Determine f''.
>
> IV. Se $f''(x_1) < 0$, então, será um máximo local.
>
> Se $f''(x_2) > 0$, então, será um mínimo local.
>
> V. Determinar os extremos relativos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (p. 71).
>
> **Simbólico → formal (Sf)**
>
> Atividade: Seja a função real $f(x) =\ x^2 - 4x + 3$ e considere a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa 2. Utilizando definições ou teoremas, indique quais estabelecem relações entre *f* e a reta tangente (LEME, 2016, p. 76)

Ao analisar os fluxos de pensamento de acordo com as atividades proposta na pesquisa, ele afirmou que nenhuma das atividades apresentadas eram inéditas ou difíceis. Leme (2016) concluiu que

> [...] em nenhuma pesquisa encontrada, foi observado a diferenciação de atividades de cálculo pelas suas caraterísticas pertinentes à forma de se pensar matematicamente e que, as atividades elaboradas para exemplificar os fluxos de pensamento ativavam diferentes características relacionadas à aprendizagem dos objetos matemáticos (p. 110).

O autor afirma que sua pesquisa buscou uma melhoria na aprendizagem de conceitos matemáticos, "utilizando os diferentes fluxos de pensamento a fim de desenvolver atividades que incitavam a ativação dos vários fluxos para a aprendizagem da derivada, podendo potencializar a aprendizagem desse conceito" (LEME, 2016, p. 110).

Leme (2016) finaliza sua pesquisa afirmando que trouxe

> [...] como contribuição às pesquisas de educação matemática, em especial, as relacionadas à aprendizagem da derivada, uma nova perspectiva, pois, nessa abordagem são declarados os elementos dos diferentes mundos e os possíveis fluxos de pensamento que podem ocorrer entre eles (p. 110).

Para Leme (2016) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada a utilização das diferentes combinações de fluxos de pensamento, transitando pelos três mundos da matemática, no desenvolvimento de atividades para a aprendizagem de derivada culminado no mundo formal, de acordo com Tall (2013). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A dissertação de Oliveira (2016) teve como objeto de estudo a construção do conceito de integral de Riemann e seu objetivo foi "investigar os processos de ensino e aprendizagem de integral de Riemann em disciplinas de análise real, oferecidas em cursos de licenciatura e bacharelado em matemática, a partir da utilização de *softwares* dinâmicos" (p. 21). A pesquisa foi um estudo de caso com um grupo de professores, separados em duplas, de 2 Universidades Federais mineiras.

Para essa investigação foi proposta a questão de pesquisa: "Quais são as contribuições da utilização de *softwares* dinâmicos para a construção do conceito de integral de Riemann no ensino de análise real, à luz dos processos do pensamento matemático avançado e da relação entre rigor e intuição?" (OLIVEIRA, 2016, p. 21)

Apresentou as seguintes tarefas na pesquisa:

> - Elaborar, implementar e avaliar atividades de exploração visual e numérica relacionadas ao conceito de integral de Riemann;
>
> - Elaborar um conjunto de atividades exploratórias, sob a forma de produto educacional, que pode contribuir para a prática docente em disciplinas de análise real, oferecidas em cursos de licenciatura e bacharelado em matemática (OLIVEIRA, 2016, p. 22).

A seguir apresentamos algumas atividades exploratórias desenvolvidas pelo autor:

Sequência didática para Atividade 1

1) Construa o gráfico da função no GeoGebra: $f\ (x) = Se\ [-1 <= x <= 1,\ x\text{^}2 + 1]$.

2) Caso necessário, ajuste a área de visualização do gráfico para o intervalo $[-1, 1]$.

3) Definição de constante: $a = -1$ e $b = 1$ (extremidades da partição).

4) Crie um seletor $k = [1, 10]$ com incremento 1.

5) Definição de constante: $n = 2\text{^}k$ (número de retângulos).

6) Definição de constante: $\Delta x = \frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}$ (base dos retângulos).

7) Definição das Somas Inferiores: S_{inf} = *SomaDeRiemannInferior[f, a, b, n]*.

8) Definição das Somas Superiores*:* S_{sup} = *SomaDeRiemannSuperior[f, a, b, n]* (p. 86).

Atividade 4 (Função de Dirichlet)
1) Construa o gráfico da função no GeoGebra: $f(x) = floor(x\ 1024) - 2floor(x\ 512)$ [...] (OLIVEIRA, 2016, p. 98).

O autor afirmou que o uso do *applet* construído em sua atividade foi um bom organizador genérico (TALL, 1986, 2000) inter-relacionado com o conceito de raiz cognitiva, apresentando contraexemplos na obtenção de uma melhor compreensão do conceito de integral.

Oliveira (2016) concluiu sua pesquisa afirmando que foram elencados 3 possíveis conjuntos de respostas, os quais ele chamou de eixos/categorias de análise: "as relações entre rigor e intuição, os processos do pensamento matemático avançado e as contribuições e limitações do *software* GeoGebra" (p. 127).

No 1º eixo afirmou que o "bom uso da inserção do trabalho com a intuição no ensino e aprendizagem de conceitos de análise, favoreceu um afloramento de suas categorias, principalmente a intuição visual, em questões a serem submetidas a provas formais" (OLIVEIRA, 2016, p. 127).

No 2º eixo defendeu o

> [...] uso das intuições, separadamente ou em conjunto, nos diversos processos do ensino e aprendizagem de cálculo e de análise, para oportunizar uma inter-relação com os aspectos rigorosos desenvolvidos, especialmente na prática do professor de matemática (OLIVEIRA, 2016, p. 128).

E que a formação do aluno e o entendimento dos conteúdos, de ser o objetivo de um curso de graduação em matemática sobrepondo o conhecimento técnico simplista.

No 3º eixo destacou que os significados gerados pelas imagens e quadros em suas atividades exploratórias “possibilitaram a refutação da ideia única de integral como área, dada a negatividade do valor das somas em algumas atividades” (OLIVEIRA, 2016, p. 129). Oliveira (2016) afirmou que acredita “que a visualização do conceito de somas superiores e inferiores, trabalhados de maneira acumulativa, pode possibilitar a inserção do rigor já no cálculo, como forma de suavizar uma futura transição para a análise” (p. 129).

Oliveira (2016) concluiu que os resultados da pesquisa

> [...] apontaram que a utilização do *software* GeoGebra contribuiu para uma possível discussão entre professores e alunos no que tange a construção e ressignificação do conceito de integral de Riemann na análise e/ou na transição entre o cálculo e a análise, [...] assim como na possibilidade de discussões de conteúdos de integral de Lebesgue, e destaca algumas possiblidades de abordagem dos processos de ensino e aprendizagem do conteúdo de integral aos professores de análise, possibilitando-os fazer um paralelo com os significados intuitivos advindos do cálculo, a fim de serem provados na análise (OLIVEIRA, 2016, p.7).

Para Oliveira (2016) a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao desenvolvimento do conceito de integral Riemann por atividades que procurem desenvolver a intuição do aluno com auxílio de um *software*. E que essas atividades desenvolvidas sejam baseadas nos processos mentais, de acordo com Dreyfus (2002) e Tall (2002). Para esse autor, de acordo com nossas análises, o pensamento matemático avançado está relacionado à matemática avançada.

A partir da categorização das dissertações e teses e da pré análise realizada até aqui, apresentaremos as análises e verificação das conjecturas levantadas a seguir.

Análises e verificação das conjecturas

A maioria das pesquisas analisadas associam a noção de pensamento matemático avançado aos conteúdos de ensino superior (a matemática avançada), especificamente à questão de formalização de conceitos associados aos objetos/conteúdos/conceitos matemáticos. Algumas associam ao tipo de atividade/tarefa matemática e aos processos cognitivos (complexidade) que devem ser mobilizados para sua resolução. Todas se baseiam em atividades que se iniciam a partir de intuições e corporificações para o desenvolvimento dos conceitos estudados para atingir a formalização dos mesmos. O uso da tecnologia é bastante presente em muitas pesquisas (10 trabalhos) com a finalidade de favorecer a visualização de certas propriedades dos objetos e até generalização dessas propriedades, algumas utilizaram os conceitos de organizador genérico, raiz cognitiva, imagem conceitual e definição conceitual (TALL, 1986; TALL; VINNER, 1981) e outras utilizaram o conceito de interações entre vários processos mentais – visualização, representação, generalização, síntese e abstração (DREYFUS, 2002). O *software* de geometria dinâmica GeoGebra foi utilizado em 7 trabalhos, o *WinPlot* e o *Mathlets* em 2 trabalhos, com a finalidade de favorecer e até potencializar a aprendizagem de certas propriedades dos objetos matemáticos estudados e/ou os conceitos.

Ao analisarmos a subcategoria C11 percebemos que os autores propuseram estratégias didáticas diferenciadas das “tradicionais” para diversos conteúdos - desde função logarítmica, passando equações indeterminadas e lugares geométricos, programação para o ensino de variáveis e funções, derivada, teorema fundamental do cálculo e a disciplina álgebra linear – pois esses conteúdos apresentam algumas dificuldades em seu ensino e/ou aprendizagem. A noção de pensamento matemático para as pesquisas dessa subcategoria está associada ao conteúdo, em grande maioria, trabalhado no ensino superior, e aos processos cognitivos que esses conteúdos exigem do aprendiz para desenvolvimento de sua aprendizagem. De acordo com esses autores esses conteúdos geram dificuldades de aprendizagem e por esse motivo, para esses conteúdos, foram sugeridas estratégias didáticas diferenciadas com o objetivo de potencializar a aprendizagem.

Na subcategoria C12 observamos que o uso de tecnologias (*softwares: GeoGebra*, *Mathlets* e a calculadora) favorece a aprendizagem quando se tem como objetivo o desenvolvimento de alguns processos mentais e definições conceituais como foi proposto por esses autores. Baseados na teoria do pensamento matemático avançado propuseram a utilização desses *softwares*/equipamento, como estratégias didáticas, para desenvolvimento dos processos mentais (visualização, generalização e abstração) e definições conceituais durante a realização das atividades propostas, visto que o uso de procedimentos padronizados para resolução de problemas não favorece ao desenvolvimento desse tipo de pensamento e a tecnologia pode desempenhar esses procedimentos favorecendo o aprendiz a desenvolver a capacidade de generalização, de síntese e de abstração das propriedades dos conceitos/objetos matemáticos envolvidos. Para essa subcategoria o pensamento matemático avançado está relacionado a complexidade da atividade matemática, os autores propuseram o uso de tecnologias para o ensino de função, provas geométricas e atividades matemáticas com o uso da calculadora.

Na subcategoria C21 os autores associam o pensamento matemático avançado a conteúdos/objetos/disciplinas do ensino superior que apresentam dificuldades para o ensino e/ou para a aprendizagem e procuraram analisar e entender essas dificuldades para propor soluções que visem favorecer o entendimento. Nesta categoria a noção de pensamento matemático avançado está associada aos conteúdos de ensino superior (matemática avançada) e as dificuldades de compreensão causadas por eles.

Na subcategoria C22 os autores associam a noção de pensamento matemático avançado a definições formais, a formalização de conceitos, a compreensão de conceitos e ao modo de estudar determinado conceito/objeto matemático (por suas definições e propriedades). Todos indicaram por objetivos investigar os processos de ensino e de aprendizagem de vários conteúdos/conceitos, desde conceito de proporcionalidade passando por transformações lineares, sistemas lineares, conceito de função, conceito de número, derivada, limites e integral de Riemann, associando ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado pelos conceitos de: imagem conceitual e definição conceitual (TALL; VINNER, 1981), três mundos da matemática (TALL, 2013) e interações entre os processos mentais - abstração e representação - (DREYFUS, 2002) sinalizando que esses conteúdos/objetos apresentam alguns problemas de ensino e/ou de aprendizagem.

A análise dessas 2 categorias e suas subcategorias, nos indicaram que as dissertações e teses brasileiras apresentadas no período estudado mostraram uma associação da noção de pensamento matemático avançado ao pensamento matemático desenvolvido na aprendizagem de conteúdos matemáticos de ensino superior, e ainda à formalização dos conceitos matemáticos.

Tínhamos como objetivo de pesquisa: compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado na produção brasileira, de dissertações e teses defendidas no período de 2010 a 2016; e avaliar que resultados foram aferidos nesses trabalhos e se os mesmos expressam de algum modo, as diferentes concepções dessa noção. Com base nas análises, podemos afirmar que a noção de pensamento matemático avançado está associada ao objeto/conceito matemático e suas propriedades e à sua formalização e essas características estão associadas aos conteúdos de ensino superior, o que está de acordo com os apontamentos de Tall (2002). Podemos afirmar também que para alguns autores essa noção está relacionada ao tipo de atividade proposta, ao modo de acessar o objeto/conceito matemático, e que essas atividades não são algorítmicas, elas exigem o desenvolvimento de algumas capacidades cognitivas em sua resolução (generalização, visualização, representação, síntese, abstração, etc.).

Entendemos que para alguns autores a teoria do pensamento matemático avançado não se expressa plenamente, pois o processo mental de abstração não foi desenvolvido nas atividades propostas e analisadas em suas pesquisas, e sim o processo de generalização e por vezes o processo de síntese o que interferiu de maneira significativa nos resultados, que de acordo com Tall (2002) e Dreyfus (2002) o pensamento matemático avançado está associado principalmente ao processo de abstração de propriedades formais de objetos matemático, que é diferente do processo de generalização e síntese, processos esses que estão no percurso para chegar à abstração, mas não são o processo em si.

Na análise dos trabalhos, buscamos responder às seguintes questões de pesquisa: Como e com que finalidade a noção de pensamento matemático avançado foi utilizada em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016? E como se apresentam os resultados dessas pesquisas relativamente ao uso dessa noção?

Nas análises observamos que a teoria do pensamento matemático avançado é uma referência teórica em dissertações e teses brasileiras defendidas no período de 2010 a 2016 relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático, principalmente pesquisas referentes aos cursos de licenciatura em matemática, o que está de acordo com Igliori (2012), ao afirmar que a pesquisa em educação matemática, quando o foco é a formação do pensamento matemático, avançou com muitas contribuições no ensino superior. Das 26 pesquisas selecionadas, 19 foram no ensino superior, mostrando que a noção de pensamento matemático avançado está relacionada ao ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos estudados no nível superior, o que corrobora com os apontamentos de Tall (2002), que afirma que essa teoria cognitivista revela os obstáculos cognitivos que surgem à medida que os estudantes do ensino superior lutam para entrar em um acordo com ideias que desafiam e contradizem sua estrutura atual do conhecimento.

Algumas pesquisas no ensino superior utilizaram o conceito de processos mentais utilizados pelos estudantes durante a realização de uma atividade matemática, o que está de acordo com Dreyfus (2002), que afirma que desses processos mentais (representação, visualização, generalização, classificação, indução, análise, síntese, abstração e formalização), os processos mais poderosos são: o da abstração e o da representação e que se o estudante desenvolver a capacidade de fazer abstrações durante a realização da atividade matemática, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático.

A primeira questão de pesquisa foi respondida segundo nossas análises, constatamos que a teoria do pensamento matemático avançado foi utilizada como um constructo teórico que pode trazer contribuições ao desenvolvimento do ensino, e favorecer a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos desde a educação básica até o ensino superior. Essa teoria foi utilizada para justificar o desenvolvimento das imagens conceituais de forma não coerentes, e as vezes conflitantes, que estudantes atribuem a conteúdos matemáticos, são associadas à formalização de conceitos e às propriedades de objetos matemáticos estudados, geralmente, no ensino superior. Por meio de constructos teóricos desenvolvidos a partir da teoria, os autores procuraram sugerir estratégias diferenciadas, e até propor sequências didáticas, que potencializem a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos.

Nessa perspectiva surge a utilização de tecnologias (*softwares* de geometria dinâmica por exemplo) para otimizar os processos e direcionar a atenção dos estudantes a certas propriedades do conceito matemático em estudo, para isso foi utilizado nessas pesquisas o conceito de organizador genérico e raiz cognitiva (TALL, 1986), o conceito de imagem conceitual e definição conceitual (TALL; VINNER, 1981) e o processo mental da visualização (DREYFUS, 2002).

A finalidade com que a noção de pensamento matemático avançado é utilizada nessas pesquisas aponta para o estudo de dificuldades de aprendizagem de certos conteúdos (derivada por exemplo) e de certa forma os trabalhos propõem situações que levem os aprendizes a encontrar meios para suplantá-las e adquirirem os conhecimentos visados. Observamos novamente que nessas pesquisas a teoria é utilizada como suporte para ensinar certos conteúdos do ensino superior, conteúdos que abordam a formalização de conceitos, o estudo de certas propriedades de objetos matemáticos, que de acordo com essa teoria, alguns tipos de atividades propostas aos estudantes podem favorecer o desenvolvimento de certos processos cognitivos relacionados à algumas capacidades necessárias para o desenvolvimento de um pensamento matemático mais complexo.

Ao buscar a resposta para a segunda questão, como os resultados dessas pesquisas se relacionam com essa teoria cognitivista, obtivemos como resposta que na maioria das pesquisas os resultados apresentados favoreceram ou potencializaram a aprendizagem ou o ensino do conteúdo pesquisado, diversos conceitos foram utilizados nas sugestões de estratégias, nas sequências didáticas e nas análises das atividades propostas aos sujeitos de pesquisa, desde o conceito de processos mentais (DREYFUS, 2002) até os dos três mundos da matemática (TALL, 2013). Algumas pesquisas não se apropriaram de modo pleno dessa teoria, utilizando constructos teóricos de ensino superior, de acordo com Tall (2002), na educação básica, o que ao nosso ver interferiu de maneira significativa no resultado de pesquisa. Outras utilizaram alguns constructos teóricos, os processos mentais por exemplo, de modo fragmentado, Dreyfus (2002) afirma explicitamente que o pensamento matemático avançado está relacionado aos processos de abstração e representação, e alguns autores em seus resultados afirmaram que outros processos (generalização e síntese por exemplo) desenvolvidos pelos estudantes durante a realização da atividade proposta demonstraram o desenvolvimento do pensamento matemático avançado o que nos pareceu em desacordo com as ideias de Dreyfus (2002).

Encontramos pesquisas que tomaram como referência a teoria do pensamento matemático avançado, mas não explorou em suas análises todo o potencial dessa teoria, o que não favoreceu tirar conclusões sobre as concepções adotadas por elas.

É importante destacar que é preciso análises e reflexões que levem a clarear a distinção entre os processos mentais indicados em Dreyfus (2002), como por exemplo entre generalização e abstração. É o que nos revelaram algumas pesquisas que consideraram um processo de generalização nas atividades propostas como sendo o processo de abstração.

A análise do *corpus* revelou que é admitido que o processo de formação do pensamento matemático, necessário para o desenvolvimento de certas atividades é pautado por obstáculos cognitivos e em consequência esses obstáculos são geradores de dificuldades de aprendizagem.

Podemos apontar como resultado desta pesquisa que a teoria do pensamento matemático avançado está sendo utilizada para se compreender o funcionamento do processo de formação desse pensamento, e, a partir disso, para se buscar elementos que iluminem estratégias de ensino que promovam de forma mais qualificada a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

CAPÍTULO 5

Considerações finais

Neste capítulo indicamos os passos realizados no desenvolvimento desta pesquisa e apresentamos os resultados obtidos das análises das dissertações e teses brasileiras defendidas no período de 2010 a 2016, que utilizaram como referencial teórico o pensamento matemático avançado, segundo os autores Dreyfus e Tall.

Para as análises essas produções científicas foram categorizadas, em acordo com os objetivos e questões das pesquisas selecionadas.

Iniciamos o estudo indicando a importância do desenvolvimento do pensamento matemático, tema da tese, na construção da sociedade. De forma sintética argumentamos que a matemática é produto da especificidade de um pensamento que o ser humano possui, o qual foi se formando e se desenvolvendo à medida que o homem necessitava medir, relacionar, interpretar quantidades, comparar, avaliar padrões e constituir linguagens formais para conceituar os objetos de seu estudo.

A caracterização desse pensamento matemático é instigante e de interesse de teóricos e de quem ensina matemática, entender sua formação e seu desenvolvimento é tema de pesquisa da educação matemática. Os resultados dessas investigações auxiliam professores e formadores que têm entre suas tarefas, em suas práticas docentes, de contribuir com a formação e desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos. A família e outras instituições sociais também são responsáveis por essa tarefa e podem trazer contribuições aos indivíduos favorecendo a oferta a eles de materiais que têm essa potencialidade, como brinquedos e jogos específicos, por exemplo.

No âmbito das teorias da educação matemática, há vários teóricos que se propuseram a caracterizar o pensamento matemático. Há entre essas proposições diferentes modos de conceber essa forma de pensar, chegando mesmo a concepções que se diferem de algum modo, em especial entre aqueles que adotam teorias cognitivistas. Como exemplo, pode-se citar a teoria do pensamento matemático avançado, que já foi enunciada com vieses não consensuais. Esses vieses podem repercutir nos resultados de pesquisas. Essa problemática é relevante e nos motivou a investigá-la em produção de dissertações e teses brasileiras.

Ela orientou a elaboração desta pesquisa e a definição de seus objetivos, quais sejam: compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado na produção brasileira, de dissertações e teses defendidas no período de 2010 a 2016; e avaliar que resultados foram aferidos nesses trabalhos e se os mesmos expressam de algum modo, as diferentes concepções dessa noção.

As informações históricas do desenvolvimento dessa teoria foram os primeiros elementos que buscamos conhecer. Verificamos que foi em 1976 com a constituição do grupo internacional *Psychology of Mathematics Education* que foram compartilhadas ideias de pesquisas de dois campos de investigação: matemática e psicologia. E que em 1985 foi criado um Grupo de Trabalho com foco no constructo teórico pensamento matemático avançado, com o objetivo de incentivar pesquisas sobre essa tipificação do pensamento matemático. Nesse momento são formuladas, por teóricos da educação matemática, duas conceituações para a estruturação cognitiva do pensamento matemático, o pensamento matemático elementar e pensamento matemático avançado. Os principais autores dessas conceituações são Dreyfus e Tall.

Para Dreyfus (2002) o pensamento matemático avançado é estruturado na mente de um estudante em uma longa sequência de atividades que promove a interação entre processos mentais - representação, visualização, generalização, classificação, indução, análise, síntese, abstração e formalização. Essa estruturação ocorre de maneira intrincada, para que se estabeleça a compreensão, na aprendizagem.

Para esse autor é possível pensar em tópicos de matemática avançada de uma forma elementar, distinguindo então o pensamento elementar do avançado pela complexidade e a forma de como se lida com essa complexidade durante a resolução de uma atividade matemática. Dreyfus (2002) considera que a matemática avançada foca nas abstrações de definição e dedução de propriedades de objetos e/ou conceitos matemáticos, e que dentre os processos mentais envolvidos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, o mais importante é a abstração.

Para Tall (2002) o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma grande variedade de atividades matemáticas para o desenvolvimento de novas ideias que fundamentam e ampliam o crescente sistema de teoremas demonstrados. Ele afirma que o desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático elementar para o avançado parte das “percepções de” e “ações sobre” objetos em um mundo exterior, construído por meio de dois desenvolvimentos paralelos: um do visual espacial para o formal dedutivo; e outro de sucessivas encapsulações do processo para o conceito. Esses dois desenvolvimentos inspiram o pensamento criativo baseado em objetos formalmente definidos e em provas sistemáticas.

Esse autor diz que muitos dos processos cognitivos que se desenvolvem durante a realização de uma atividade matemática, que constituem o pensamento matemático avançado, são da mesma natureza dos que constituem o pensamento matemático elementar. A possibilidade de definição formal e de dedução é um dos fatores que os diferenciam.

Igliori (2012) afirma que a pesquisa em educação matemática no ensino superior, crescente nas últimas quatro décadas, quando o foco é a formação do pensamento matemático avançou com as contribuições resultantes da noção de pensamento matemático avançado, e que a diversidade de concepções atribuídas a ela pode interferir nos resultados de pesquisas.

Leikin *et al.* (2009) afirmaram que em 1988 Tall discutiu o termo pensamento matemático avançado de duas formas distintas: pensamento sobre a matemática avançada ou forma avançada do pensamento matemático. E que essa discussão sobre o que é o pensamento matemático avançado ainda persiste nos dias atuais.

A partir dessas discussões sobre o pensamento matemático avançado, elaboramos duas questões de pesquisa que orientaram o desenvolvimento da pesquisa. Tais questões foram assim formuladas:

Como e com que finalidade a noção de pensamento matemático avançado foi utilizada em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016? E como se apresentam os resultados dessas pesquisas relativamente ao uso dessa noção?

Fizemos um estudo sobre teorias cognitivistas relacionadas ao pensamento matemático com o intuito de iluminar nosso entendimento dessa problemática e encontramos duas teorias cognitivista: a teoria APOS desenvolvida por Dubinsky e a teoria da reificação desenvolvida por Sfard.

Dubinsky (2001) se apoia na descrição da natureza do conhecimento matemático e do desenvolvimento desse conhecimento durante a aprendizagem por um estudante. Esse autor trouxe elementos teóricos para o entendimento da formação do pensamento matemático. Ele trata de conhecimento matemático de um modo geral em sua teoria APOS. Nesta tese, cuja temática é o pensamento matemático avançado, analisamos alguns conceitos desse autor com vistas a buscar, em estratos de sua teoria com os conceitos Ação, Processo, Objeto e Esquema se havia indicativo de que distinguisse tipos de pensamento matemático, a exemplo do que é foi pelos autores Dreyfus e Tall. Mas verificamos que ele não se encontra entre aqueles que utilizam a cunha de pensamento matemático avançado ou elementar, diferenciando tipos de pensamento matemático.

Sfard (1991) desenvolveu a teoria cognitivista da reificação, mas não faz parte do grupo que tipifica o pensamento matemático em pensamento matemático avançado ou elementar. A autora apresenta um quadro teórico que visa a investigar o papel dos algoritmos no pensamento matemático, em formação de conceitos relacionados a números e funções.

Essa autora considera que durante a formação desses conceitos ocorre a transição das operações computacionais para objetos abstratos. Que essa transição é um processo longo e difícil, realizado em três etapas: interiorização, condensação e reificação. Afirma que o fenômeno da reificação é complexo e difícil, e, que ele pode permanecer fora do alcance de certos estudantes.

O objetivo desta tese foi identificar noções de pensamento matemático avançado em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016, e assim sendo Dubinsky e Sfard não os inserimos seus constructos teóricos nesta pesquisa.

Fizemos um estudo da teoria do pensamento matemático avançado segundo os autores Dreyfus e Tall para posterior análise das noções dessa teoria em pesquisas brasileiras.

Esta pesquisa foi de caráter bibliográfico, uma modalidade de pesquisa que tem como principal característica a utilização de dados/informações de documentação escrita para a análise de suas questões. Para a organização das análises utilizamos a metodologia de pesquisa da análise de conteúdo, desenvolvida Bardin (2011). Para a autora a metodologia de análise de conteúdo é "um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens" (p. 44). A autora afirma que a "intenção da análise de conteúdo é a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção, inferência essa que recorre a indicadores" (BARDIN, 2011, p. 44). De acordo com a autora a metodologia de análise de conteúdo é organizada em torno de três polos cronológicos: (1) a pré-análise, (2) a exploração do material, e (3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

A partir da escolha da metodologia de pesquisa e dos procedimentos metodológicos fizemos a seleção das dissertações e teses por meio de uma busca no Banco de Teses e Dissertações da CAPES indicando para busca o seguinte termo: "pensamento matemático avançado" e foram encontrados 38 trabalhos.

A partir da leitura dos resumos, desses 38 trabalhos, foram considerados aqueles que incluíam entre os referenciais para a análise de dados, a teoria do pensamento matemático avançado, que tinham sido publicados no período de 2010 a 2016, totalizando 26 trabalhos: 21 dissertações e 5 teses.

A primeira ação foi fichamento dos trabalhos com suas principais características. A segunda foi de analisar os objetivos e as questões de pesquisa de cada trabalho. Através dessa análise, classificamos os vinte e seis trabalhos em duas categorias, assim constituídas: Categoria 1: Trabalhos cuja a base investigativa repousa no emprego de estratégias didáticas, como o emprego de técnicas e/ou tecnologias específicas, e dessa categoria emergiu 2 subcategorias: C11 – Trabalhos cujo foco repousa nas estratégias didáticas, ainda que empreguem tecnologias como parte de sua execução; e C12 – Trabalhos cujo foco repousa no uso de tecnologias para o ensino e/ou aprendizagem matemática, ainda que no âmbito de estratégias didáticas. E Categoria 2: Trabalhos que investigam os processos de ensino ou de aprendizagem de matemática, e dessa categoria emergiu 2 subcategorias: C21 – Trabalhos cujo foco repousa na identificação e/ou tratamento de dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos; e C22 –

Trabalhos cujo foco repousa em questões formais e epistemológicas relacionadas ao processo de ensino ou aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Por meio dessas categorias atingimos os objetivos de pesquisa que foi: compreender e analisar em quais, como e com que finalidade aparece a noção de pensamento matemático avançado na produção brasileira, de dissertações e teses defendidas no período de 2010 a 2016, e avaliar que resultados foram aferidos nesses trabalhos e se os mesmos expressam de algum modo, as diferentes concepções dessa noção.

Através das subcategorias pudemos verificar que os trabalhos classificados na subcategoria C11 propuseram estratégias didáticas diferenciadas das" tradicionais" para diversos conteúdos, pois esses conteúdos apresentam algumas dificuldades de a aprendizagem. A noção de pensamento matemático para as pesquisas dessa subcategoria está associada ao conteúdo, em grande maioria, no ensino superior, e aos processos cognitivos que esses conteúdos exigem do aprendiz para desenvolvimento de sua aprendizagem.

Os trabalhos classificados na subcategoria C12 utilizaram a tecnologia para potencializar a aprendizagem, essas pesquisas baseadas na teoria do pensamento matemático avançado propuseram a utilização desses *softwares* para desenvolvimento de alguns processos mentais e definições conceituais durante a realização das atividades propostas. A noção de pensamento matemático avançado para essas pesquisas está relacionada com a complexidade da atividade matemática e ao uso da tecnologia para gerenciá-la.

Os trabalhos classificados na subcategoria C21 associaram o pensamento matemático avançado a conteúdos/objetos/disciplinas do ensino superior que apresentam dificuldades para o ensino e para a aprendizagem e procuraram analisar e entender essas dificuldades para propor soluções que visavam a favorecer o entendimento.

Os trabalhos classificados na subcategoria C22 associaram a noção de pensamento matemático avançado as definições formais, a formalização de conceitos, a compreensão de conceitos e ao modo de estudar determinado conceito/objeto matemático. Esses trabalhos investigaram os processos de ensino e/ou aprendizagem desses conceitos.

Diante disso, apresentamos e respondemos as questões de pesquisa: Como e com que finalidade a noção de pensamento matemático avançado foi utilizada em dissertações e teses brasileiras, defendidas no período de 2010 a 2016? E como se apresentam os resultados dessas pesquisas relativamente ao uso dessa noção?

Nas análises observamos que a teoria do pensamento matemático avançado é uma referência teórica em dissertações e teses brasileiras defendidas no período de 2010 a 2016 quando o foco é a formação do pensamento matemático avançado no ensino superior, principalmente pesquisas referentes aos cursos de licenciatura em matemática.

Para responder a primeira questão de pesquisa apontamos que a teoria do pensamento matemático avançado foi utilizada como um constructo teórico que pode trazer contribuições ao desenvolvimento do ensino, e favorecer a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos desde a educação básica até o ensino superior. Essa teoria foi utilizada para justificar o desenvolvimento das imagens conceituais de forma não coerentes, e às vezes conflitantes, que estudantes atribuem a conteúdos matemáticos, associadas à formalização de conceitos e as propriedades de objetos matemáticos estudados, geralmente, no ensino superior.

Para a segunda questão, obtivemos como resposta que na maioria das pesquisas os resultados apresentados favoreceram ou potencializaram a aprendizagem ou o ensino do conteúdo pesquisado, diversos conceitos foram utilizados nas sugestões de estratégias, nas sequências didáticas e nas análises das atividades propostas aos sujeitos de pesquisa, desde o conceito de processos mentais (DREYFUS, 2002) até os dos três mundos da matemática (TALL, 2013).

Podemos apresentar como resultado desta pesquisa que a teoria do pensamento matemático avançado está sendo utilizada para se compreender o funcionamento do processo de formação desse pensamento e para se buscar elementos que iluminem estratégias de ensino que promovam de forma mais qualificada a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Como sugestão para pesquisas futuras, durante a pesquisa verificamos uma grande concentração de pesquisas empíricas relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado na licenciatura em matemática, apenas uma pesquisa com alunos de Engenharia de Produção e outra com alunos de Sistemas de

Informação, indicando que seria necessário pesquisas para outros cursos que utilizam desse tipo de pensamento. Outras sugestões seriam de pesquisas documentais ou teóricas relacionadas ao tema, pois durante a pesquisa verificamos uma grande quantidade de pesquisas aplicadas e sugestões de propostas didáticas para o desenvolvimento desse tipo de pensamento e poucas com a preocupação de trazer aportes teóricos para o tema.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. V. **Um panorama de artigos sobre a aprendizagem do cálculo diferencial e integral na perspectiva de David Tall**. 2013. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

AMORIM, L. I. F. **A (re) construção do conceito de limite do cálculo para análise: um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática**. 2011. 134f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

ANDERSEN, E. **As ideias centrais do teorema fundamental do cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em matemática**. 2011.128f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ANGELINI, N. M. **Funções: um estudo baseado nos três mundos da matemática**. 2010. 219f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

BARDIN, L. **Analise de conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro, São Paulo: Edições 70, 2011, 2ª reimpressão.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de licenciatura em matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. 229f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

CAMPOS, J. P. **Algoritmos para fatoração e primalidade como ferramenta didática para o ensino de matemática**. 2014. 95f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Process**. In D. O. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, pp. 25-41, 2002.

DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking**, in Advanced Mathematical Thinking (D. Tall, ed.), Kluwer, pp. 95-126, 1991.

DUBINSKY, E. **Applying a piagetian perspective to post-secondary Mathematical Education**, Educacíon Matemática, 3, 8, 1996.

DUBINSKY, E. **A reaction to “a critique of the selection of ‘mathematical objects’ as a central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking” by Confrey and Costa**. International Journal of Computer for Mathematical Learning, 2, pp. 67-91, 1997.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. **APOS: A Constructivist Theory of learning in Undergrad Mathematics Education Research,** 2001. In D. Holton et. (Eds.), The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3 ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012 - (Coleção formação de professores).

FONSECA, D. S. S. M. **Convergências de sequências e séries numéricas no cálculo: um trabalho visando a corporificação dos conceitos**. 2012. 210f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

FONSECA, V. G. **O uso de tecnologias no ensino médio: a integração de Mathlets no ensino de função afim**. 2011. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

FRANCO, H. J. R. **Os diversos conflitos observados em alguns alunos de licenciatura num curso de álgebra: identificação e análise**. 2011. 101f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

FREIRE, P**. A pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 30 ed. São Paulo: Paz e Terra, 2004.

FREIRE, P. **Educação e Mudança.** 33 ed. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

GRAY, E. M.; TALL, D. O. **Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic.** The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), pp. 115-141, 1994.

GERETI, L. C. V. **Processos do pensamento matemático avançado evidenciados em resoluções de questões do Enade**. 2014. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. Vol. 1, 2 ed. Rio de Janeiro; São Paulo: LTC, 2001.

IGLIORI, S. B. C. **Pensamento Avançado Matemático: em debate**. Mesa redonda In: Anais XXVI REUNIÃO LATINO AMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Belo Horizonte (MG) Brasil, 2012. pp. 103-113.

JANZEN, E. A. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. 2011. 194f. Tese (Doutorado em Educação: Linha de Educação Matemática) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

JUNIOR, J. C. M. **Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. 2015. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

JUNIOR, V. C. F. **Repensando o ensino de análise: reações, impressões e modificações nas imagens de conceito de alunos frente a atividades de ensino sobre sequências de números reais**. 2014. 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

KIRNEV, D. C. B. **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. 2012. 113f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

LEIKIN, R.; CAZES, C.; MAMONA-DOWNS, J.; VANDERLIND, P. **Advanced Mathematical Thinking: Reflection on the work at the conference.** In: Proceedings of CERME 6, pp. 2236-2436, Lyon - France, 2009. Disponível em: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/ acesso em 05/02/2017.

LEME, J. C. M. **Aprendizagem da derivada: uma perspectiva de análise pelos fluxos de pensamento**. 2016. 117f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

MAÇÃO, D. P. **Uma proposta de ensino para o conceito de derivada**. 2014. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

MAMONA-DOWNS, J. **Synopsis of the activities of working group 14, CERME-5, on the theme of “Advanced Mathematical Thinking”.** In: Proceedings of CERME 5, pp. 2220-2389, Larnaca - Cyprus 2007. Disponível em: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/ acesso em 05/02/2017.

MARINS, A. S. **Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares**. 2014. 171f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

NOVAIS, A. S. **Equações indeterminadas e lugares geométricos: uma proposta alternativa para o estudo de equações em R²**. 2011. 236f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

OLIVEIRA, J. L. **A utilização de *softwares* dinâmicos no ensino de análise real: um estudo sobre a construção do conceito de Integral de Riemann.** 2016. 143f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

PIAGET, J. **Genetic Epistemology**, W. W. Norton, New York, 1970.

PIAGET, J. **The principles of Genetic Epistemology** (W. May, trans.), Routledge & Kegan Paul, London UK, 1972.

PIAGET, J. **Adaptation and Intelligence** (S. Eames, trans.), University of Chicago Press, Chicago USA, 1980.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psychogenése et Histoire des Sciences**. Paris: Flammarion, 1983.

PIAGET, J. **The Equilibration of Cognitive Structures** (T. Brown and K. J. Thampy, trans.), Harvard University Press, Cambridge MA, 1985.

PINTO, R. L. **Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo**. 2014. 144f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

POGGIO, A. M. P. P. **Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do ensino médio na perspectiva dos três mundos da matemática**. 2012. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

PRADO, E. A. **Álgebra linear na licenciatura em matemática: contribuições para formação do profissional da educação básica.** 2016. 254f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PRADO, S. C. S. **O uso da calculadora e o pensamento matemático avançado: uma análise a partir das situações de aprendizagem nos cadernos do professor de matemática**. 2012. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RADFORD, L. **Cognição matemática: História, Antropologia e Epistemologia**. Tradução: Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. Livraria da Física Editorial, Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. National Academy Press, Washington, D. C. 1987.

SANTOS, A. T. C. **O ensino da função logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra**. 2011. 200f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, J. A. S. **Teorias da Aprendizagem: Comportamentalista, Cognitivista e Humanista.** Revista Científica Sigma, pp. 97-111, 2006.

SCHOENFELD, A. **Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas?** In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigações para aprender matemática (pp. 61-72). APM e Projeto MPT, Lisboa, 1996.

SFARD, A. **On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.** Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36, 1991.

SFARD, A. **Reification as birth of a metaphor**. For the Learning of Mathematics. 14(1), pp. 44-55, 1994.

SKEMP, R. R. **The Psychology of Learning Mathematics**. Penguim: London, 1971.

STEWART, J. **Cálculo**. Tradução: vários tradutores. 4ª edição, vol. I, São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2010.

TALL, D. O. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics**. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. **Introducing three worlds of mathematics. For the learning of mathematics.** Canada, vol. 23, n. 3, pp. 29-33, 2004a.

TALL, D. O. **The psychology of advanced mathematical thinking**. In D. O. (Ed) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, 2002. pp. 3-20.

TALL, D. O. **Concept images, generic organizers, computer & curriculum change**. For the Learning of Mathematics, 9, 3, pp.37-42, 1989.

TALL, D. O. **Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics.** 1986. 505f. Thesis (Doctorate in Mathematical Education) – University of Warwick, United Kingdom.

TALL, D. O. **The nature of advanced mathematical thinking, papers of the working group of AMT.** An early Working Group discussion paper on Advanced Mathematical Thinking, 1988i.

TALL, D. O. **Cognitive development in advanced mathematics using technology**. Mathematics Education Research, Vol. 12, n. 3, pp. 210-230, 2000.

TALL, D. O.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.** Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169, 1981.

THOMPSON, A. G. **A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica.** Zetetike. Campinas, vol. 5, n. 8, pp. 11-44, 1997.

THURSTON, W. P. **On the proof and progress in mathematics.** Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 30, n. 2, pp. 161-177, 1994.

VIEIRA, W. **Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas**. 2016. 452f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo.

WATSON, A.; MASON, J. **Questions and prompts for mathematical thinking**. Association of Teachers of Mathematics, 1998.

YOKOYAMA, L. A. **Uma abordagem multissensorial para o desenvolvimento do conceito de número natural em indivíduos com síndrome de down**. 2012. 230f.

Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALMEIDA, M. V. **Material para o ensino de cálculo diferencial e integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche**. 2017. 261f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Edição Atualizada. Editora UFPR, 2010.

ANDERY, M. A. P. A.; SÉRIO, T. M. A. P. **O pensamento é uma categoria no sistema skinneriano?** Arquivos Brasileiros de Psicologia, Vol. 54, nº 3, p. 274-283, Rio de Janeiro, 2003.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. 2009. 189f. Tese (Doutorado em Educação: área Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

CHARMAZ, K. **Métodos de pesquisa. A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa.** Tradução Joice Elias Costa. Bookman / Artmed, 2009.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativo e misto.** Tradução: Luciana de Oliveira da Rocha. Porto Alegre: Artmed, 2 ed, 2007.

DAMM, R. F. **Registros de representação.** In: Machado, S. D. A. (org.). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. Série Trilhas. São Paulo: EDUC, p. 167-188, 2010.

ECO, U. **Como se faz uma tese.** Tradução: Gilson Cesar Cardoso de Souza. 24 ed, São Paulo: Perspectiva, 2012.

FIORENTINI, D.; GRANDO, R. C.; CRECCI, V. M.; LIMA, R. C. & COSTA, M. C. **O professor que ensina matemática como campo de estudo: uma introdução ao estado da arte da pesquisa.** In: FIORENTINI, PASSOS & LIMA (2016). Mapeamento e estado da arte da pesquisa brasileira sobre o professor que ensina matemática, FE/Unicamp.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação**. 2010. 462f. Tese (Doutoramento em Educação: Didáctica da Matemática) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

KRUTETSKI, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Translated from the Russian: Joan Teller. Edited: Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup. Chicago and London: The University of Chicago Press, 1976.

PIAGET, J. **A linguagem e o pensamento da criança**. Psicologia e Pedagogia. Tradução: Manuel Campos. 4 ed. brasileira. Martins Fontes, 1986.

PIAGET, J. **Psicologia e Pedagogia**. Tradução de: Dirceu Accioly Lindoso e Rosa Maria Ribeiro da Silva. 2 ed. Companhia Editora Forense, 1970.

PIAGET, J. **A psicologia da inteligência.** Tradução: Guilherme João de Freitas Teixeira. 1ª reimpressão. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

SEVERINO, J. S. **Metodologia do trabalho científico**. Cortez Editora, 23 ed. revisada e atualizada, 8ª reimpressão, São Paulo, 2007.

SIMPSON, A. **Retirement as process and concept: a festschrift for Eddie Gray and David Tall.** School of Education, Durham University, Leazes Road, DH1 1TA, UK, 2006.

TURING, A. M. **Computing machinery and intelligence.** Mind 49 : 433-460, 1950. Dispinível em : https://www.csee.umbc.edu/courses/471/papers/turing.pdf. Acessado em 18/10/2017.

ZILIO, D**. Inteligência artificial e pensamento: redefinindo os parâmetros da questão primordial de Turing** (Ensaio). Ciência & Cognição, Vol 14 (I), p. 208-218, 2009.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. Edição Eletrônica: Ed. Ridendo Castigar Moraes (www.jahr.org), 1962.