PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Helena Tavares de Souza

Resolução de Problemas - enfoque metodológico e teórico

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Helena Tavares de Souza

Resolução de Problemas - enfoque metodológico e teórico

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Helena Tavares de Souza

Resolução de Problemas - enfoque metodológico e teórico

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como requisito parcial para obtenção do título de **DOUTORA** em **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação da **Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori**

SÃO PAULO

2018

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________Local e Data:_____________

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu grande amor, meu marido Francisco, que sempre se alegra com as minhas conquistas e enxuga as minhas lágrimas nos momentos de tristezas e angustias. A esse homem encantador que por mais de duas décadas têm me apoiado para que os meus sonhos e metas sejam reais e vivenciados com plenitude.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro fundamental para a realização do trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu infinito e incondicional amor, cuidado e proteção em todos os meus dias.

À minha querida orientadora Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori por todos os seus ensinamentos, os quais contribuíram para o meu amadurecimento como pesquisadora e profissional. Nos momentos difíceis que passei com enfermidades, agradeço o seu cuidado singelo e carinhoso que ficaram gravados na minha memória e no meu coração. Tenho muito respeito e admiração pelo sua pessoa e profissionalismo.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP pela solidez do corpo docente, cujo objetivo é proporcionar aos discentes ensinamentos científicos, reflexões e experiências como pesquisadores e profissionais na Educação Matemática.

Aos Professores Doutores Iran Abreu Mendes e Antônio Máspoli de Araujo Gomes e às professoras Doutoras Celina Aparecida Almeida Pereira Abar e Maria José Ferreira da Silva que gentilmente aceitaram o convite e fizeram parte da Banca Examinadora contribuindo com sugestões pertinentes e valiosas à minha pesquisa.

Aos meus colegas de sala Maria Rosana, Renne, Rogério, aos colegas do Grupo de Pesquisa "O Elementar e o Superior em Matemática" (GPES) pelo companheirismo, as trocas de experiências e os diversos conselhos e apoios. Ao colega Márcio por todo apoio técnico na minha qualificação. Meu agradecimento especial ao amigo Paulo, companheiro de sala, pesquisas, conversas e por toda acessória na entrega mensal dos relatórios de bolsa da Capes e do material para a qualificação.

À Suzanne Lima de Freitas, secretária do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP, pela eficiência, dedicação e amizade durante a minha permanência no Programa.

Ao meu marido Francisco por toda cumplicidade acadêmica, profissional, emocional e pessoal.

Aos meus pais (in memoriam) pelos infinitos ensinamentos, amor e zelo. Sei que teriam muito orgulho de mim pela conquista deste título. Que saudade de vocês!

Ao meu irmão Raul que tanto amo e que continua com o mesmo instinto protetor de quando eu era criança, pelo apoio e credibilidade e por sempre pronunciar que sou o seu orgulho.

Às minhas cunhadas Teca, Ninha e a minha comadre Luciane pelo carinho e acolhida que me deram nas vossas casas a cada semana que eu chegava em São Paulo. Ao meu cunhado Walter e aos meus sobrinhos Andreia, Adriana, Renata, Cleber e Waltinho que durante quatro anos foram me buscar e levar ao aeroporto. Amo vocês família!

À minha afilhada Anna Clara que traz amor, alegria, leveza e ensinamentos aos meus dias.

Ao meu padrinho Adenilson pelo carinho, cuidado, credibilidade e amizade.

Aos meus amigos da cidade de Paripiranga (BA) e Aracaju (SE) Elton, Josilúcia, Társio, Vanessa, Bernardo, Ingrid, Tiago, Suzana e Samuel pela força que me deram a cada semana que viajei a São Paulo para estudar e pelo carinho, companheirismo, apoio, atenção e cuidado com o meu marido na minha ausência.

A todos muito obrigada!

"De tudo só ficam três coisas:

A certeza de que estamos sempre começando.

A certeza de que é preciso continuar.

A certeza de que seremos interrompidos antes de terminar".

Fernando Pessoa

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo tratar da metodologia Resolução de Problemas na educação matemática segundo dois aportes, Polya e Duval, analisando convergências, divergências e complementaridades. Buscou-se extrair dessa análise etapas de resolução com vistas a contribuir com a compreensão e interpretação de situações problema de matemática; descrever as contribuições específicas de cada abordagem e indicar as complementaridades da teoria Registro de Representação Semiótica à metodologia Resolução de Problemas. Para atender tais objetivos, as investigações foram delineadas de forma a responder à questão de pesquisa: *Quais as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática?* A pesquisa se desenvolveu em uma abordagem qualitativa do tipo bibliográfica com a utilização da metodologia Teoria Fundamentada. Essa teoria traz categorias apresentadas em quadros, memorandos, redações teóricas das análises. Os resultados apontam que a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval aplicada à metodologia Resolução de Problemas indicada por Polya favorece o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos para a compreensão de conceitos e a formação do pensamento matemático. Esse desenvolvimento é ampliado em face de que essa teoria defende de que é somente por meio das representações semióticas que, se torna possível, as atividades sobre os objetos matemáticos. E, assim sendo, ela descontrói o senso comum de que os estudantes não sabem resolver problemas pois desconhecem a língua materna. Duval indica que esse conhecimento deve ir mais além da língua materna, o estudante precisa saber transitar entre os registros de representação dos conceitos que aparecem no enunciado de um problema matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Registro de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This work aims at dealing with Problem Solving methodology in Mathematics education following two theoretical bases, Polya and Duval, analyzing convergences, divergences and complementarities. We sought to extract some stages of resolution from this analysis in order to contribute with the comprehension and interpretation of problem-situations in Mathematics; we also describe specific contributions from each approach and indicate complementarities from the Registers of Semiotic Representation to the Problem Solving methodology. In order to achieve such objectives, our investigations were designed to respond to the research question: *Which are the contributions from the Registers of Semiotic Representation according to Duval to the Problem Solving methodology in Polya perspective, among other authors, to the comprehension and interpretation of problem-situations in Mathematics?* The research was developed under a bibliographic and qualitative approach with the use of the Grounded Theory methodology. This theory presents categories in pictures, memorandums and theoretical compositions of the analyses. The results point to the fact that the theory of Registers of Semiotic Representation according to Duval applied to the Problem Solving methodology indicated by Polya, among other authors, favors the cognitive development of the subjects to the comprehension of concepts and the formation of a mathematical thinking. This development is magnified as this theory promotes that it is only through these semiotic representations that the activity about mathematical objects are made possible. And, under this perspective, this theory disassembles the common sense that students do not know how to solve problems as they are not familiar with the mother tongue. Duval indicates that this knowledge should go further than the mother tongue, and that the student needs to be aware of how to go by the concepts representation registers that come in the heading of a mathematical problem.

Keywords: Mathematics Education; Problem Solving; Registers of Semiotic Representation.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Diferenças entre exercícios e problemas matemáticos............................39

Quadro 2- Critérios para transformar as tarefas escolares em problemas................41

Quadro 3- Palavras-chave para resolver problemas segundo Polya.........................45

Quadro 4- Método de resolução de problemas..48

Quadro 5- Palavras-chave para resolver problemas segundo Schoroeder e Lester.53

Quadro 6- Palavras-chave para resolver problemas segundo Schoroeder e Lester.56

Quadro 7- Palavras-chave para resolver problemas segundo Brito et al...................59

Quadro 8- Palavras-chave para resolver problemas segundo Onuchic et.al.............64

Quadro 9- Síntese da teoria Registro de Representação Semiótica.........................86

Quadro 10- Definição de problema...95

Quadro 11- Como resolver um problema..96

Quadro 12- Classificação da resolução de problemas...96

Quadro 13- Benefícios da resolução de problemas..97

Quadro 14- Conceitos de Semiótica..100

Quadro 15- Classificação do sistema semiótico..101

Quadro 16-Registro de Representação Semiótica na matemática.........................102

Quadro 17-Identificações na resolução de problemas..105

Quadro 18- Pontos de vista distintos nas situações-problema...............................107

Quadro 19- Apoios para resolver problemas: uma comparação..............................115

Lista de Figuras

Figura 1- Tipos de registros de representação semiótica no funcionamento matemático..82

Figura 2- Síntese da comparação entre os recursos da resolução de problemas matemáticos..117

SUMÁRIO

Introdução...16

Capítulo I - Resolução de Problemas..34

1.1 Breve estudo histórico da Resolução de Problemas..............................34

1.2 Exercícios e problemas matemáticos...39

1.3 Resolução de Problemas – George Polya..43

1.4 Resolução de Problemas – Abordagens de Schoroeder e Lester...........49

1.4.1 Ensinar sobre Resolução de Problemas..50

1.4.2 Ensinar Matemática para resolver problemas..50

1.4.3 Ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.....................51

1.5 Resolução de Problemas – Abordagens de Stanic e Kilpatrick..............53

1.5.1 Resolução de Problemas como contexto..53

1.5.2 Resolução de Problemas como habilidade...54

1.5.3 Resolução de Problemas como arte...55

1.6 Resolução de Problemas – Brito – Fini – Neumann- Inglez de Souza – Alves...56

1.7 Resolução de Problemas – Onuchi – Allevato – Zuffi.............................60

Capítulo II- Registro de Representação Semiótica..66

2.1 Breve estudo histórico da Semiótica..66

2.2 Registro de Representação Semiótica...68

2.3 A Representação...72

2.3.1 Signo e representação...73

2.3.2 Os códigos e os registros de representação 75

2.4 A revolução semiótica e seus registros de representação.......................76

2.4.1 Representação identificável, tratamento e conversão.............................78

2.4.2 Tipos de registros de representação semiótica aplicados na matemática...80

2.5 Congruência e não congruência na conversão.......................................83

Capítulo III- Procedimento Metodológico e Análise dos dados..........................89

3.1 Pesquisa Qualitativa...89

3.2 Pesquisa Bibliográfica..90

3.3 Metodologia Teoria Fundamentada...91

3.3.1 Etapas da Teoria Fundamentada...91

3.4 Análise dos dados...94

3.5 Relatório de Conclusão...114

Considerações finais....119

Referências...125

Anexos...131

INTRODUÇÃO

Trajetória Profissional

Minha primeira formação acadêmica foi em Licenciatura Plena em Matemática na Fundação Santo André - SP em 1993 e em seguida, cursei *Lato Sensu* em Metodologia do Ensino Superior. Em 2003 conclui o curso de Licenciatura Plena em Pedagogia e Supervisão Escolar na UNIABC- Universidade do Grande ABC em São Paulo.

Comecei a experiência na docência em 1991 quando ainda cursava o segundo ano da faculdade da primeira formação. Durante todos esses anos lecionei no ensino fundamental II, ensino médio, ensino técnico/profissionalizante e ensino superior. Em 2008 aceitei um convite para lecionar no continente africano, em Angola, na Universidade Óscar Ribas, instituição particular que acabara de começar os seus processos acadêmicos. Meu contrato de trabalho naquele momento era de um ano, entretanto, com o envolvimento intenso no processo de ensino e aprendizagem em outra cultura, hábitos e costumes e com experiências ímpares, permaneci em terras angolanas por cinco anos consecutivos.

Em agosto de 2011, ainda vinculada à Universidade em Talatona (Luanda) retornei ao Brasil e iniciei o Mestrado Profissional em Ensino da Matemática do Programa de Estudos da Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP e, em janeiro de 2014, voltei definitivo ao Brasil para coordenar o curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário Ages em Paripiranga na Bahia, na qual fiquei por quatro anos. Atualmente, estou na coordenação do curso EAD de Pedagogia da Universidade Tiradentes (UNIT) em Aracaju.

Motivações da Pesquisa - Problemática

Esta tese de doutorado desenvolvida no âmbito de Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC/SP e inserida no Grupo de Pesquisa “O Elementar e o Superior em Matemática” (GPES) é continuidade à temática da minha dissertação de mestrado realizada em 2013 na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que trouxe duas situações-problema para serem solucionadas algébrico e geometricamente por meio da Resolução de Problemas utilizando o *software* Geogebra como estratégia pedagógica. No período foram convidados aleatoriamente 23 docentes a participarem da investigação, mas apenas quatro professores do ensino médio de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo estavam presentes no dia combinado para as atividades aplicadas.

Os sujeitos A e B responderam todas as questões propostas e os sujeitos C e D, parcialmente, desses últimos, vale a pena destacar as respostas do professor C: Situação-problema 1 – “algebricamente não tenho nenhuma sugestão no momento”. Situação-problema 2 – “no momento não sei como expressar algebricamente e nem geometricamente a questão” (SOUZA, 2013, p.119). Os resultados apontaram que para resolver situações-problema é preciso ter o conhecimento de termos matemáticos, dos registros de representação, tanto da linguagem natural como algébricos e gráficos.

Após a conclusão do mestrado, como esperado, me tornei mais rigorosa nas leituras e resoluções de problemas matemáticos. Em 2014 comecei a lecionar numa universidade privada no Estado da Bahia e alguns estudantes do quinto e sexto período, alguns indicaram ter dificuldades em resoluções de situações-problema envolvendo álgebra básica, não compreendiam o sentido e significado do problema, não sabiam o que registrar e como representar as respostas. Os mesmos discentes traziam relatos dos seus estágios realizados nas escolas públicas e privadas nos Estados da Bahia e Sergipe, dizendo que as aulas que observaram os professores e seus estudantes tinham dificuldades para compreender problemas diversos, envolvendo álgebra, geometria, operações numéricas, dentre outros conteúdos matemáticos. As dificuldades dos meus alunos, dos professores e estudantes das escolas públicas me trouxeram reflexões para iniciar minhas pesquisas no doutorado.

Outra situação que destaco é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) que avalia o que alunos de 15 anos, ao final da educação obrigatória, adquiriram em relação a conhecimentos e habilidades essenciais para a completa participação na sociedade moderna. A avaliação é trienal e foca três áreas cognitivas: ciências, leitura e matemática, além da contextualização dos resultados por meio de questionários aplicados aos estudantes, diretores de escolas e professores.

A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2016) publicou o documento oficial “Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros”[1] relatando que foram avaliados três aspectos das áreas cognitivas:

- Letramento científico: explicar fenômenos cientificamente; avaliar e planejar investigações científicas e interpretar dados e evidências cientificamente.
- Letramento em leitura: localizar e recuperar informação; integrar e interpretar; e refletir e analisar.
- Letramento matemático: formular situações matematicamente; empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínios matemáticos; e interpretar, aplicar e avaliar resultados matemáticos.

O documento ainda descreve que participaram 841 escolas brasileiras (Federal, Estadual, Municipal, Privada, Urbana e Rural – das capitais e interiores) sendo no total 23.141 estudantes. Os resultados mostram que os alunos brasileiros foram os que tiveram um dos maiores porcentuais de itens em branco nas questões de matemática entre os 70 países comparados nesse estudo: O resultado do PISA de 2015 mostra que os estudantes brasileiros se encontram abaixo da média mundial, ocupando a 66ª colocação em um ranking de 70 países.

Diante das problemáticas apresentadas faço algumas indagações:

1. Após a leitura de situações-problema com temas matemáticos os docentes e discentes têm quais dificuldades para solucioná-los? Deixam as questões sem respostas por não compreenderem os sentidos, os significados, as palavras-chave, os símbolos, a linguagem matemática, os registros de representação? Não conseguem compreender o problema?
2. A metodologia Resolução de Problemas que foi iniciada por George Polya e outros autores continuaram os estudos e é considerada em várias pesquisas

[1]http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf

uma boa maneira para resolver situações-problema. Quais as dificuldades de docentes e discentes no desenvolvimento das etapas em problemas matemáticos?

3. A teoria Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval pode direcionar e favorecer a compreensão e a interpretação de situações-problema?
4. Em que a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval completa, auxilia, converge ou diverge à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores?

Esses questionamentos são embasados e referenciados por pesquisas publicadas no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes, conforme descritos a seguir.

Levantamento Bibliográfico

As pesquisas consultadas que fomentam as bases para as argumentações desta investigação, foram buscadas no sítio da Capes[2], na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[3] e no Google acadêmico[4]. Utilizou-se para a busca as palavras-chave: Metodologia Resolução de Problemas, Resolução de Problemas, Resolução de Problemas Matemáticos, Registro de Representação Semiótica e Raymond Duval. A área de conhecimento: Ensino e Educação. E a área de concentração: Educação Matemática e Ensino de Ciências Matemática. E ainda no levantamento bibliográfico apresenta-se uma amostra de teses que pareceu ser relevante a essa pesquisa.

A tese de doutorado de Cavalheiro (2017), trata da Resolução de Problemas e Investigação Matemática na formação inicial de professores de matemática e objetivou responder às seguintes perguntas: Quais as contribuições, para licenciandos em matemática, de um processo de intervenção formativa que envolve teoria, prática e análise da Resolução de Problemas e da Investigação Matemática como metodologias de ensino e aprendizagem de Matemática? Segundo esses sujeitos,

---
[2] http://sdi.capes.gov.br/banco-de-teses/01_bt_index.html
[3] www.bdtd.ibict.br
[4] https://scholar.google.com.br/

quais as potencialidades e as dificuldades didático-pedagógicas no uso em sala de aula das metodologias em questão?

A investigação dessa pesquisa de cunho qualitativo trouxe uma amostra de sete licenciandos do curso de matemática, de uma instituição pública de ensino superior no interior do Estado de São Paulo sendo também estagiários do ensino fundamental II. A coleta dos dados foi realizada por meio de questionários, resolução de situações-problema de álgebra e geometria, observação participante e entrevistas. Os resultados mostraram que todos os sujeitos, após formarem os grupos com os alunos, entregaram os problemas propostos e observaram, organizaram, mediaram, intervieram e incentivaram o trabalho discente. Apenas 5 licenciandos discutiram oralmente com os alunos a resolução dos problemas propostos, mas nenhum dos sete sujeitos souberam explicar as dificuldades dos alunos nas soluções dos problemas, relatando insegurança, por não terem domínio pleno do conteúdo.

Todos entenderam que é necessário desafiar os alunos, propondo atividades que estimulem o espírito investigativo deles, porém, apenas dois concordaram que o docente precisa raciocinar matematicamente e ter a compreensão de palavras específicas da matemática, estando assim, preparado para responder todo tipo de pergunta do aluno, desenvolvendo o seu modo de pensar para exemplificar, com significados, o conteúdo matemático no dia a dia do discente.

Essa pesquisa permitiu aos sujeitos adquirirem novos conhecimentos a respeito da Resolução de Problemas e Investigação Matemática como metodologias de ensino e aprendizagem de matemática, alguns descreveram que em ambas as metodologias é necessário domínio do conteúdo matemático, saber trabalhar em grupos com os alunos e superar as dificuldades dos discentes e deles mesmos, os sujeitos, na utilização da Resolução de Problemas e da Investigação Matemática.

Os resultados descritos corroboram com as minhas conjecturas quanto às dificuldades dos docentes e discentes na resolução de situações-problema. A pesquisa de Cavalheiro (2017) mostra que mais de 70% dos sujeitos investigados entendem que o professor não precisa pensar matematicamente para resolver problemas matemáticos e compreender os significados matemáticos apresentados no problema. E nenhum dos estagiários resolveram por escrito as dificuldades dos alunos. Isto reforça as dificuldades na compreensão dos símbolos, signos, registros e representações na resolução de problemas.

Em Lima (2017) são investigadas "Práticas pedagógicas de professores no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental e a Resolução de Problemas". Essa pesquisa teve por intenção responder à questão: Que práticas pedagógicas são evidenciadas no trabalho do professor que ensina a matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, considerando-se as implicações relacionadas à Resolução de Problemas? Para responder, investigou e analisou como são as práticas pedagógicas de professores no ensino de matemática, nos anos escolares iniciais no contexto didático da Resolução de Problemas, e ainda, como é o discurso dos docentes acerca de suas ações pedagógicas, e quais são os que acreditam dominar os conteúdos da matemática e os recursos didáticos empregados na Resolução de Problemas.

Nessa abordagem oito professores que atuam no ensino de matemática no 4º e 5º ano do ensino fundamental, em duas escolas da rede municipal de Marília-SP, participaram do estudo como sujeitos da pesquisa. A qual foi de cunho qualitativo, e teve como procedimentos a observação, a entrevista semiestruturada e a análise de situações-problema de matemática sobre operações aritméticas, medidas e combinatória.

O desdobramento das análises apontou que na prática pedagógica dos professores investigados perpetua-se uma prática formal, comportamentalista, que adota procedimentos didáticos e metodológicos marcados pela repetição e pela memorização, seis sujeitos não trouxeram aos alunos sentido e significado do enunciado das situações-problema, preocuparam-se apenas com os cálculos, "as contas", conforme referenciam-se. Apenas dois professores afirmaram que a solução do problema também pode ser por meio de desenhos ou figuras, não somente por procedimento algorítmico. A observação das aulas dos professores, revelou que a maioria deles "fala bastante", expressam-se oralmente intensamente para ensinar o aluno a solucionar problemas, tanto nos atendimentos individuais como nos coletivos, mas registram parcialmente as ações tomadas. A pesquisa mostrou que a prática de Resolução de Problemas está limitada ao uso de algoritmos, que não possibilita ao aluno desenvolver a autonomia e a criatividade para resolver problemas.

Eu infiro dos resultados da pesquisa de Lima (2017) que eles trazem elementos para a resposta à minha indagação quanto às dificuldades de docentes e discentes na metodologia Resolução de Problemas. Os docentes têm dificuldades nos registros das soluções. Vale destacar a fala de uma professora após entregar uma situação-problema aos alunos: “Como vou descobrir quanto ele gastou? Na sequência trabalhou verbalmente a subtração: “Se pago, eu perdi, por isso é subtraído e retirado da quantia” (p.155). Essa mesma professora na entrevista respondeu: “é mais fácil falar como faz a conta em vez de armar tudo na lousa onde nem todos os alunos vão entender” (Ibid., p.170). Nessa resposta entende-se que a docente tem dificuldades quanto à utilização da metodologia. A pesquisa também mostra que 80% dos sujeitos investigados não trazem significados aos enunciados dos problemas e sempre usam a mesma estratégia algorítmica, não permitindo os alunos descobrirem outros caminhos de investigação.

A autora Justulin (2014) investigou “A formação de professores de matemática no contexto da Resolução de Problemas”. A pesquisa objetivava responder: Que aprendizagens profissionais docentes se manifestam em um grupo de estudo apoiado na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas? A investigação de cunho qualitativo apresentou sete sujeitos participantes que são professores de matemática de uma escola pública em São Paulo. Os instrumentos utilizados na pesquisa de campo foram questionários, entrevistas, observação participante e situações-problema envolvendo álgebra e números racionais. A Resolução de Problemas permeou as discussões e, em especial, foi trabalhada a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática pela Resolução de Problemas, possibilitando assim, a problematização dos saberes profissionais dos sujeitos da pesquisa. Os professores não se sentiram seguros em aplicar a metodologia aos seus alunos, cinco deles destacaram que a parte mais difícil é a compreensão, interpretação do problema e conhecer os termos dos conteúdos.

A pesquisa de Justulin (2014) trouxe resultados quanto à compreensão e intepretação de situações-problemas de docentes e discentes. Vale destacar algumas falas dos sujeitos investigados que corroboram com as minhas conjecturas: “a compreensão é a maior dificuldade e, posteriormente, a associação a algum conceito matemático” (PROFESSOR 3, p.194); “a maior dificuldade é a leitura e interpretação do problema" (PROFESSOR 6, p. 194). A pesquisa também destaca os relatos dos professores diante de um problema proposto durante a aula e qual a dificuldade apresentada por seus alunos: "a minoria gosta e a maioria reclama e espera respostas prontas" (PROFESSOR 2, p.195); "maior dificuldade é identificar os dados já fornecidos nos problemas e articulá-los para encontrar a solução" (Professor 5, p. 196); "os alunos não gostam, pois têm que pensar, requer conhecimentos passados e motivação para o desenvolvimento" (PROFESSOR 4, p.196); "a maior dificuldade deles é lembrar dos conhecimentos passados e isso os leva a perda de interesse durante a resolução" (PROFESSOR 1, p.196). O professor 1 em outro momento levanta dúvidas em relação ao trabalho com resolução de problemas: "com os caderninhos do ensino médio, a resolução de problemas está mais enfatizada, pois sempre utilizamos problemas para ensinar, mas sem a certeza de estarmos trabalhando a resolução de problemas" (p.193).

Na concepção de Santos (2014) que investigou "Os Registros de Representação Semiótica mobilizados por acadêmicos de um curso de Ciências Contábeis em Resolução de Problemas" e teve como objetivo responder à questão: Quais os registros de representação semiótica mobilizados pelos acadêmicos sobre o conceito Função e como tais sujeitos os articulam por meio do tratamento e da conversão? A investigação é de cunho qualitativo e contou com vinte acadêmicos do segundo período, presentes na disciplina de Matemática Aplicada do curso de Ciências Contábeis, como sujeitos participantes. As analises apresentadas das resoluções de sete problemas com o objeto matemático função afim, quadrática e exponencial referente à taxa de variação mostraram que a utilização das representações semióticas no estudo e análise de resolução de problemas permitem a comunicação entre as diversas formas de registros desse objeto matemático.

A pesquisa de Santos (2014) trouxe o objeto do conhecimento nas situações-problema, no caso da sua pesquisa, Função, só será conhecido por meio das representações que podem ser numéricas, algébricas e gráficas. E compreender a importância das representações semióticas no desenvolvimento do pensamento humano, especificamente, na matemática, permite refletir sobre o seu ensino sob um ponto de vista diferenciado: "considerar além das definições e termos, as representações semióticas dos objetos matemáticos como instrumento de mediação, como forma de comunicação" (p.104). O estudo confirma que o desenvolvimento da compreensão de um conceito matemático envolve trabalhar com as suas diferentes representações, realizando conexões entre elas, identificando e compreendendo suas limitações.

Na abordagem de Azerêdo (2013) foram investigadas "As representações semióticas de multiplicação: um instrumento de mediação pedagógica". A pesquisa traz um diálogo com a teoria de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica como possibilidade de compreensão e construção do pensamento matemático. A investigação buscou responder à questão: Qual o papel das representações semióticas no ensino e aprendizagem de multiplicação de anos iniciais de escolarização? A investigação é de cunho qualitativo e apresentou oito sujeitos graduados em Pedagogia e que são docentes do segundo ao quinto ano do ensino fundamental I de escolas municipais. Os instrumentos utilizados na pesquisa de campo foram questionários, entrevistas e situações-problema com conteúdo de multiplicação. Algumas perspectivas foram indicadas na pesquisa: a utilização de representações semióticas variadas no ensino de multiplicação; a exploração de registros semióticos de forma coletiva, no espaço da sala de aula, favorecendo a tomada de consciência dos professores e alunos, de seus conhecimentos, lidando com a discriminação, reversibilidade e análise, por meio da expressão oral, do uso da palavra quanto aos termos e as compreensões dos registros de representação de situações-problema com conteúdo de multiplicação.

A pesquisa de Azerêdo (2013) mostrou as dificuldades dos docentes quanto à compreensão dos significados da operação de multiplicação. Nos seus relatos o problema é assumido como um elemento de motivação, de ponto de partida para o ensino do conteúdo, não como um "caminho" para ensinar e aprender Matemática. A professora 3 descreve: "faço o início com uma historinha, invento na hora, envolvendo a situação real deles, se não for a historinha invento um probleminha" (p.138). Em outro momento os sujeitos relatam as dificuldades dos seus alunos na resolução de problemas: "a maior dificuldade dos meus alunos é na intepretação dos problemas, não conseguem identificar quais as operações devem fazer para achar a solução" (PROFESSOR 5, p. 126); "a resolução de problemas é uma dificuldade porque acham que a matemática é apenas números, e também fazer o cálculo, porque muitos tinham o hábito de copiar a respostas prontas e não raciocinar e calcular" (PROFESSOR 2, p.126). O autor pode destacar que um trabalho sistemático com a resolução de problemas corresponde à necessidade de validação dos resultados e que os alunos precisam ser estimulados a registrarem e a expressarem seus pensamentos e estratégias em forma de desenhos, figuras e números. Esses resultados contribuem com os meus questionamentos quanto às dificuldades de docentes e discentes na compreensão de significados, símbolos, palavras-chave de problemas matemáticos.

Thiel (2013) investigou "Práticas Matemáticas no plano cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação". A pesquisa objetivou utilizar a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval para compreender as dificuldades dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, na conversão dos diferentes registros de representações das regiões do plano cartesiano, por meio de representações na forma textual (escrita), gráfica e algébrica, indicando os elementos que devem ser levados em consideração para nortear as abordagens que buscarão uma melhoria no ensino e no aprendizado. Para tal responde à questão: No contexto da aprendizagem escolar, quais os procedimentos que norteiam a compreensão e análise pelo aluno de diferentes registros nas regiões do plano cartesiano? A investigação é de cunho qualitativo e apresentou análises de situações-problema envolvendo o plano cartesiano e suas regiões. Essas situações problema foram aplicadas a noventa e sete alunos divididos em três classes de nono ano em uma escola municipal de Santa Catarina. A pesquisa retratou, nos seus resultados, a variedade de representações de um mesmo objeto matemático em diferentes contextos do cotidiano do aluno e a aproximação da teoria e prática. Descreveu ainda que ignorar os registros de representação semiótica na construção do conhecimento matemático tendo o aporte da teoria de Duval significa desconsiderar a essência da evolução do pensamento matemático, envolvido por representações.

A pesquisa anterior mostrou a dificuldade dos alunos em lidar com os diferentes registros de representação que aparecem nos enunciados dos problemas. Exemplificando um dos problemas, os estudantes deveriam elaborar o gráfico e fazer a leitura do saldo mensal de uma empresa de salgadinhos. O total de "43% tiveram dificuldades em fazer a conversão para o registro gráfico da situação-problema, e, aproximadamente, 62% tiveram dificuldade para fazer a conversão do registro gráfico e/ou da tabela expressa na forma tabular para a linguagem natural. O autor descreveu que envolver o tratamento e a conversão de registros para regiões do plano cartesiano foi um grande desafio, pois a todo momento vários sujeitos perguntavam durante as resoluções das situações-problema: Como posso construir o gráfico, se tenho apenas a expressão matemática? “Com apenas dois pontos posso traçar uma reta? Qual o caminho que deve ser feito para indicar na reta (eixo x) os símbolos da desigualdade? Qual a região que compreende o prejuízo, o lucro, e nem lucro nem prejuízo? A forma natural significa que devo responder na forma de texto?” (p.142). Esses resultados corroboram com meus questionamentos quanto às dificuldades de discentes nas conversões e tratamentos com os registros de representação semióticos, ou seja, linguagem natural, símbolos e gráficos envolvidos nas situações-problema matemáticos.

Vale destacar que foram encontradas outras pesquisas de Resolução de Problemas e Registro de Representação Semiótica, as quais não foram apresentadas aqui, devido seus objetivos e resultados não estarem relacionados exatamente com a problemática desta pesquisa, mas estão indicadas nos anexos.

Problema, objetivos e metodologia da pesquisa

A partir das observações das análises de Laville e Dionne (1999, p.87) é possível afirmar que “um problema de pesquisa é um problema que se pode ‘resolver’ com conhecimentos e dados já disponíveis ou com aqueles factíveis de serem produzidos”, sendo que os autores ainda destacam que um problema de pesquisa deve “fornecer novos conhecimentos para o tratamento de questões a eles relacionados”(Ibid., p.88).

O autor Creswell (2010, p.43) conceitua um problema de pesquisa como uma “questão ou uma preocupação que precisa ser tratada” e que conduz a necessidade de um estudo. Luna (2013, p.28) afirma que “um pesquisador iniciará uma pesquisa, fará intervenções na realidade a ser pesquisada e colherá informações com o propósito explicito de localizar um problema de pesquisa ou de detalhar o problema formulado”.

A partir dos elementos descritos na problemática e nas pesquisas no campo da educação matemática sobre Resolução de Problemas (CAVALHEIRO, 2017; LIMA, 2017; JUSTULIN, 2014) e Registro de Representação Semiótica (SANTOS, 2014; AZERÊDO, 2013; THIEL, 2013) e as observações sejam em pesquisa “um estudo com professores do ensino médio sobre função modular por meio de Resolução de

Problemas utilizando o *software* Geogebra como estratégia pedagógica" ou na experiência da sala de aula esta pesquisa buscou investigar: **Quais as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática?**

E com esta pergunta elaborou-se como o objetivo desta pesquisa estabelecer um diálogo entre a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval e a metodologia Resolução de Problemas iniciada e divulgada por Polya e utilizada por outros autores quanto as suas abordagens para o ensino e aprendizagem da matemática com situações-problema. E destacam-se as finalidades específicas:

- ✓ Elaborar as convergências, divergências e complementaridade entre a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval e a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores.

- ✓ Descrever as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática.

Assim, opta-se nesta pesquisa por uma abordagem qualitativa acompanhando Severino (2007) quando diz que é mais adequado empregar o termo abordagem qualitativa por considerar que muitas são as pesquisas com metodologias diferenciadas, as quais podem caracterizar-se como uma abordagem qualitativa e quantitativa. Corroborando com tais termos, Appolinário (2011) descreve que na pesquisa qualitativa os dados são coletados por meio de interações sociais e analisados subjetivamente pelo pesquisador, pois nessa modalidade a preocupação do pesquisador está no fenômeno.

Em função dos objetivos apresentados entende-se que esta pesquisa está inserida na modalidade estudo teórico, que para Fiorentini e Lorenzato (2009) esse tipo de estudo tem por objetivo a (re)construção ou desenvolvimento de teorias, termos e ideias, tendo em vista, em termos imediatos, o aprimoramento de fundamentos teóricos ou desenvolvimento de quadro de referência. Esses autores afirmam que "o pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza todos os dados e fatos empíricos para avaliar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica" (p.67).

Quanto aos procedimentos de coleta de dados feita para esta pesquisa, eles são classificados como uma pesquisa bibliográfica que acompanhando Leite (2008, p.47) que afirma que "é a pesquisa cujos dados e informações são coletados em obras já existentes e servem de base para a análise e a interpretação dos mesmos, formando um novo trabalho científico". Esta investigação foi realizada a partir de levantamento de referências teóricas e metodológicas publicadas em meios escritos e eletrônicos, como livros, teses, dissertações e artigos científicos.

A metodologia escolhida para esta tese foi a Teoria Fundamentada aplicável tanto a estudos qualitativos quanto a quantitativos, sendo que o pesquisador constrói a teoria a partir da observação específica do fenômeno e não pela aplicação de uma teoria pré-estabelecida para explicá-lo. A teoria foi desenvolvida na década de 1960, nos Estados Unidos, pelos sociólogos Glaser e Strauss, os quais realizaram estudos sobre os relacionamentos entre médicos e pacientes terminais. Os autores deram aos dados coletados um tratamento analítico explícito e produziram análises teóricas sobre a organização social e a disposição temporal da morte e apresentaram estratégias metodológicas, dando uma alternativa à tradição hipotético-dedutiva da época (CHARMAZ, 2009).

Como elucidam Strauss e Corbin (1990, p.23) a teoria fundamentada "é aquela derivada indutivamente do estudo do fenômeno que representa", isto é, ele "é descoberto, desenvolvido, e provisoriamente verificado por meio de sistemática coleta e análise de dados", portanto, a coleta de dados, análise e teoria possuem relação recíproca entre si. Não se começa com uma teoria para prová-la, começa-se com uma área de estudo em que se permite a emersão do que é relevante

Na percepção de Charmaz (2009) a lógica da teoria fundamentada orienta os seus métodos de coleta de dados, bem como, de elaboração teórica. A qualquer momento da pesquisa o pesquisador pode tomar o conhecimento de coisas as quais gostaria de ter explorado antes e avaliar os ajustes entre os seus interesses de pesquisa iniciais e os seus dados emergentes.

Charmaz (2009) preconiza que o processo de codificação para análise dos dados seja realizado em pelo menos duas etapas: codificação inicial e focalizada. Na codificação inicial, o pesquisador estuda rigorosamente seus dados e conceitua suas ideias por meio de códigos que podem ser estabelecidos palavra por palavra, linha a linha ou incidente por incidente. A codificação focalizada, por sua vez, permite ao pesquisador separar, classificar, sintetizar, integrar e organizar grandes quantidades de dados, com base nos códigos mais significativos e/ou frequentes, visando à conceituação do material empírico. Um dos requisitos para o desenvolvimento do processo analítico da teoria fundamentada é a sensibilidade teórica. Trata-se da habilidade do pesquisador em reconhecer diferenças e variações nos dados, em termos conceituais, no processo de codificação e na interpretação dos significados. Tal capacidade baseia-se no conhecimento adquirido a partir da literatura científica, na experiência profissional, pessoal e, especialmente, na experiência do pesquisador no processo analítico da teoria.

Vale destacar que foi utilizado nessa pesquisa alguns aspectos da teoria fundamentada quanto à amostragem teórica, a codificação e a redação da teoria[5].

Justificativa do tema

A sociedade moderna exige um cidadão capaz de resolver problemas e situações a todo momento, que avalia os contextos sócio históricos e mantem-se, permanentemente, em processo de formação. Mas há diferença entre problema e situação-problema? E resolver problemas matemáticos contribui em que para o indivíduo estar inserido nas exigências da sociedade moderna?

A palavra problema nos faz pensar em algo que necessita ser resolvido, superado e que exige um pensar consciente para solucioná-lo. Vale a pena ressaltar que um problema “é qualquer situação que exija a forma matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” (DANTE, 2010, p.10). Esse autor ainda descreve que “o que é problema para alguns pode não ser para outros, ou o que é um problema num determinado contexto pode não ser em outro” (Ibid., p.23). A

[5] É possível encontrar os detalhes dos procedimentos metodológicos e a descrição detalhada desta pesquisa no capítulo III desta tese.

autora Onuchic (1999, p.215) corrobora com o conceito afirmando que problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental encontra-se a definição do termo sendo abordado da seguinte maneira: "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p.82).

Onuchic e Allevato (2004) afirmam que problemas de matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar há muito tempo, fato que atualmente é muito mais significativo. A necessidade de se "entender" e "ser capaz" de usar matemática na vida diária e nos locais de trabalho nunca foi tão grande.

Esse conceito também abordado por Pais (2008) relata que o trabalho com resolução de problemas amplia os valores educativos do saber matemático e do desenvolvimento dessa competência, além de contribuir na capacitação do aluno para melhor enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

Na tentativa da elucidação dos termos anteriores sobre problema, é possível afirmar que a resolução de situações-problema na matemática vem por meio da compreensão e interpretação. A partir dessa afirmação trago à baila a indagação se compreender é o mesmo que interpretar?

De acordo com Paulino (2011et al.) a palavra compreender vem do latim: *cum*, que significa junto e *prehendere* que significa pegar. Compreender é, portanto, pegar junto e isso traz a ideia de dois ou mais elementos, ou seja, abarcar, envolver, abranger, incluir. Também cabe a acepção que: o leitor não está sozinho de um lado e/ou texto/problemas do outro, ou seja, nem o leitor nem o texto estão isolados dos contextos que os envolvem. Leitor e texto só existem quando se encontram no momento da leitura.

Para esse autor a palavra interpretar vem do latim *interpes*, que estava relacionada à pessoa que examinava as entranhas de um animal para prever o futuro. O *interpres* não podia atribuir um significado, não podia tirar algo de dentro de si para depositar no objeto; podia apenas extrair o significado que já estava dentro do animal. Diante disso, para o *interpres*, o significado emerge do próprio objeto em direção ao leitor. Essa ideia de extração de significado permanece até hoje, quando se trata de ler o futuro nos objetos.

Na concepção de Costa (2008, p.11) a definição de interpretar é explicitado levando em conta que: “quem interpreta normalmente atua como se estivesse a desvendar os sentidos contidos no texto e a crença de que o sentido é imanente ao objeto faz parte do exercício de quase toda atividade de interpretação”. Orlandi (2001, p.116) também corrobora com o conceito afirmando que: “enquanto interpreta, o leitor apenas reproduz o que já está lá produzido, de certa forma, podemos dizer que ele não lê, é ‘lido’, uma vez que apenas ‘reflete’ sua posição de leitor na leitura que produz”.

O autor descreve que a resolução de problemas[6] como estratégia didática pode contribuir com o desenvolvimento da compreensão e o desvendar os sentidos contidos no texto, e isso implica nas habilidades do leitor, do docente ou discente de observar, buscar, compreender, interpretar os termos, os símbolos e registrar as soluções dos problemas matemáticos.

Segundo Polya (2006) o criador da metodologia Resolução de Problemas[7], não é possível responder uma pergunta sem compreensão e interesse, bem como para resolver problemas, sejam ou não matemáticos, é preciso realizar quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Nas pesquisas de Onuchic (2014 et al.); Diniz (2001) e Leal Junior e Onuchic (2015) são descritos que a Resolução de Problemas, como uma prática, ultrapassa o trabalho com simples problemas convencionais ou situações-problema que são apresentados aos estudantes no final de determinado conteúdo para sua fixação. Isso é algo que não permite aos docentes e discentes o reconhecimento, a percepção e a interpretação dos registros talvez, mais não com certeza, a compreensão de seus sentidos e de seus significados.

É possível encontrar na obra de Cruz Sousa e Gouveia de Sousa (2016, p.4) a afirmação de que a Resolução de Problemas está relacionada à aprendizagem de

---

[6] resolução de problemas: refere-se ao processo da resolução do problema.
[7] Resolução de Problemas: refere-se à teorização da metodologia Resolução de Problemas.

conteúdo e “é o recurso à comunicação nas aulas; recurso essencial, pois é o aluno, falando, escrevendo ou desenhando, que apresenta ou mostra indícios de que habilidades ou atitudes ele está desenvolvendo e quais termos ou fatores ele domina, mostra as dificuldades ou incompreensões”. O autor Cândido (2001, p.15), corrobora descrevendo que no ensino e aprendizagem da matemática “a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática”.

Dessa forma, à luz da teoria de Duval, Registro de Representação Semiótica, busca-se a compreensão da relação entre os registros de representação, a percepção, a construção de significados para o aprendizado da matemática, do ponto de vista cognitivo, na busca do reconhecimento de seus objetos e a compreensão de seus termos, observando assim, como esses fatores contribuem à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores que utilizam a abordagem dessa metodologia.

Acrescentando que para Duval o que interessa aos que “ensinam Matemáticas e aos formadores dos que ensinam são ferramentas que permitem analisar os trâmites matemáticos no quadro da resolução de problemas” (DUVAL, 2009, p.10). Ele descreve que a formação e a aprendizagem em matemática fazem parte da compreensão e essa “não pode se reduzir aos elementos de prova e justificação”, pois, “essa questão é na realidade a dos processos cognitivos que são mobilizados em qualquer ação do pensamento matemático” (Id., 2011, p.15).

As atividades cognitivas da matemática precisam de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens, pois ainda na descrição de Duval (2009, p.13) é possível afirmar que:

> sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que contenham estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representação em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Em outro momento Duval defende que a importância dessas representações não são apenas para expressar o que foi aprendido, mas para aprender o que ainda não se sabe, contribuindo para o aluno no seu “desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização”, dos aprendizes (DUVAL, 2003, p. 11).

A presente tese está estruturada em uma introdução, três capítulos, considerações finais, referências e anexos, assim dispostos:

No primeiro capítulo está abordado um breve histórico da metodologia Resolução de Problemas, as diferenças de exercícios e problemas matemáticos e, na sequência, a perspectiva de Polya e outros autores que utilizam essa metodologia e a importância e o apoio cognitivo na resolução de problemas matemáticos.

No segundo capítulo está descrita a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Raymond Duval, apresentando os conceitos de signo, registros, códigos, tratamento, conversão, tipos de registros de representação semiótica aplicados na matemática e suas contribuições no ensino e na aprendizagem da matemática.

No terceiro capítulo estão abordados os procedimentos metodológicos, bem como, a metodologia Teoria Fundamentada. As análises dos capítulos I e II são apresentadas com quadros comparativos, memorandos, redações teóricas e as aplicações, análises e conclusões da metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores que utilizam a abordagem dessa metodologia e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval em situações-problema na matemática.

Nas considerações finais são trazidos o alinhamento às principais observações resultantes dos objetivos, do problema e das análises da pesquisa, bem como, as contribuições da pesquisa junto a outras e à educação matemática e as recomendações de novas pesquisas relativas ao tema.

Os anexos trazem várias pesquisas encontradas no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações com o propósito de auxiliar outras pesquisas.

CAPÍTULO I

Resolução de Problemas

O objetivo deste capítulo é apresentar um breve histórico sobre a Resolução de Problemas, diferenciar exercícios e problemas matemáticos, descrever o conceito à luz da metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de George Polya e outros autores que utilizam a abordagem dessa metodologia e a contribuição deste tema no ensino e aprendizagem da matemática.

1.1 Breve estudo histórico da Resolução de Problemas

A educação matemática brasileira encontrava-se em sua fase de gestação, como campo profissional e científico, sendo que nessa época, que vai do início do século XX ao final dos anos de 1960 "não era usual olhar para o ensino da matemática com perspectivas diferentes daquelas voltadas diretamente às tarefas e aos procedimentos da prática de sala de aula e à produção de manuais ou subsídios didáticos" (FIORENTINI e LORENZAT, 2012, p. 17). A pesquisa de Allevato e Onuchic (2009) corroboram quando afirmam que o ensino de matemática no início do século XX, foi caracterizado pela repetição e valorização da memorização de conceitos. Anos depois, começou-se a falar na compreensão da matemática, na necessidade de que os alunos entendessem o que estavam fazendo - surge a proposta da resolução de problemas por George Polya.

A pesquisa sobre Resolução de Problemas e as iniciativas de considerá-la como uma forma de ensinar matemática receberam atenção a partir de Polya - considerado o precursor da Resolução de Problemas - na sua obra "*How to Solve It"* (traduzido em português como "A arte de Resolver Problemas" - 1944, 1ª edição em 1945) e que descreve uma ideia geral da heurísitca[8] de problemas matemáticos e não matemáticos. Essa publicação foi um fato fundamental no ensino de problemas, pois pela primeira vez, é ilustrada uma metodologia de ensino para a resolução de problemas (NUNES, 2010).

---

[8] Estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção (POLYA, 2006, p.99).

De acordo com Onuchic e Allevato (2004, 2011) nas décadas de 60 e 70 o ensino de matemática no Brasil e em outros países foi influenciado por um movimento de renovação – a Matemática Moderna. Ela apresentava uma estrutura lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas, o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas. As autoras destacam que todas essas reformas não tiveram o sucesso esperado, pois o tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para esse trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, levou-o ao fracasso.

Elas ainda descrevem que nos EUA, houve uma tentativa de retornar às práticas anteriores à Matemática Moderna, na fase que foi intitulada "Volta às bases", porém, não teve grandes efeitos e tampouco conseguiu adeptos em outros países(Ibid., p.78). Assim, durante a década de 1980, educadores matemáticos que não desistiram de ideais preconizadas anteriormente, que acreditavam no potencial da resolução de problemas e visavam um ensino e aprendizagem com compreensão e significado, continuaram trabalhando nessa busca.

A proposta de Resolução de Problemas passou por várias modificações e aperfeiçoamentos, sendo que em 1980 o *Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) -* Conselho Nacional de Professores de Matemática, entidade norte-americana, apresentou o documento *"An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's"* (Uma Agenda para Ação: Recomendações para Matemática Escolar na década de 1980), recomendando que "resolver problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80" (NCTM, 1980, p.1). Onuchic e Allevato (op.cit.) descrevem que havia entre os educadores matemáticos, um grande interesse em fazer da resolução de problemas um foco do currículo de matemática, com isso desenvolveram materiais por meio de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho dos alunos nessa área, sempre visando o trabalho em sala de aula.

As autoras ainda relatam que este material ajudou muitos professores a fazer da resolução de problemas o ponto central do seu trabalho, entretanto, não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de matemática apoiado na resolução de problemas; ou seja, não havia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado. Elas também esclarecem que essa falta de concordância ocorreu, possivelmente, devido às diferenças de concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de “resolução de problemas ser o foco da matemática escolar”, como recomendava o *An Agenda for Action* (NCTM, 1980) (ONUCHIC, 1999, p. 206).

Onuchic e Allevato (2011) afirmam a partir das recomendações do NCTM, seguidores de Polya, com algumas variações, acreditavam em teorizar esse tema, ou seja, que era necessário ensinar estratégias e métodos para resolver problemas. Outros a interpretavam no sentido de que o professor deveria apresentar a matemática formal para, depois, oferecer aos alunos o problema como aplicação dessa matemática construída, acreditando que deveriam ensinar matemática para resolver problemas. Foram várias publicações do NCTM do final dos anos oitenta e durante os anos noventa, com a finalidade de auxiliar os professores e destacar aspectos considerados essenciais para o ensino de matemática: *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics*[9] (NCTM, 1989), *Professional Standards for School Mathematics*[10] (NCTM, 1991) e *Assessment Standards for School Mathematics*[11] (NCTM, 1995).

Em abril do ano 2000, nos EUA, o NCTM após uma década defendendo as ideias nos *Standards*[12], publica o *Standards 2000*, oficialmente chamados *Principles and Standards for School Mathematics*[13] que possuem reformulações contendo seis Princípios: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia, sendo estes ligados aos programas da Matemática escolar e divididos em dois grupos: Padrões de Conteúdo – Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida e Análise de Dados e Probabilidade. Padrões de Processo – Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação, Conexões e Representação (Id., 2000, p.4).

---

[9] Currículo e Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar (NCTM, 1989).
[10] Padrões Profissionais para Matemática Escolar (Id., 1991).
[11] Padrões de Avaliação para Matemática Escolar (id., 1995).
[12] Documentos com objetivos e princípios das práticas curriculares, de ensino e de avaliação para ajudar professores e educadores a desenvolverem uma Matemática forte para todos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).
[13] Princípios e Padrões para Matemática Escolar (NCTM, op. cit., 2000).

Quanto à Resolução de Problemas o documento descreve com clareza as seguintes definições:

> Resolver problemas não é apenas um objetivo de aprender matemática, mas também um meio importante de o fazer. É parte integrante da matemática, não uma parte isolada do programa de matemática. Os estudantes necessitam de oportunidades frequentes para formular, lidar e resolver problemas complexos que envolvem uma quantidade significativa de esforço. Eles devem ser encorajados a refletir sobre seu pensamento durante o processo de solução de problemas, para que possam aplicar e adaptar as estratégias que desenvolvem a outros problemas e em outros contextos. Ao resolver problemas matemáticos, os estudantes adquirem maneiras de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança em situações desconhecidas que os servem bem fora da sala de aula de matemática (NTCN, 2000, p.4., **tradução nossa**)[14].

E quanto à representação é abordado da seguinte maneira:

> Ideias matemáticas podem ser representadas de várias maneiras: imagens, materiais concretos, tabelas, gráficos, símbolos de números e letras, exibições de planilhas e assim por diante. As maneiras pelas quais as idéias matemáticas são representadas são fundamentais para o modo como as pessoas entendem e usam essas ideias. Muitas das representações que agora tomamos como certas são os resultados de um processo de refinamento cultural que ocorreu durante muitos anos. Quando os alunos obtêm acesso a representações matemáticas e às ideias que expressam e quando podem criar representações para capturar conceitos ou relacionamentos matemáticos, eles adquirem um conjunto de ferramentas que expandem significativamente sua capacidade de modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos (Ibid., **tradução nossa**) [15].

---

[14] Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so. It is an integral part of mathematics, not an isolated piece of the mathematics program. Students require frequent opportunities to formulate, grapple with, and solve complex problems that involve a signifi cant amount of effort. They are to be encouraged to refl ect on their thinking during the problem-solving process so that they can apply and adapt the strategies they develop to other problems and in other contexts. By solving mathematical problems, students acquire ways of thinking, habits of persistence and curiosity, and confi dence in unfamiliar situations that serve them well outside the mathematics classroom (NCTM, 2000, p.4).

[15]Mathematical ideas can be represented in a variety of ways: pictures, concrete materials, tables, graphs, number and letter symbols, spreadsheet displays, and so on. The ways in which mathematical ideas are represented is fundamental to how people understand and use those ideas. Many of the representations we now take for granted are the result of a process of cultural refi nement that took place over many years. When students gain access to mathematical representations and the ideas they express and when they can create representations to capture mathematical concepts or relationships, they acquire a set of tools that signifi cantly expand their capacity to model and interpret physical, social, and mathematical phenomena (NCTM, 2000, p.4).

No Brasil, na década de 90, foram implementados os PCN Parâmetros Curriculares Nacionais, semelhantes às ideias dos *Standards* 2000. Tais Parâmetros indicaram a Resolução de Problemas como ponto de partida da atividade matemática e discutiram caminhos para “fazer matemática” na sala de aula, destacando a importância da história da matemática e das tecnologias de informação e comunicação. Apontaram também a importância de estabelecer conexões entre os blocos de conteúdos, entre a matemática e as outras áreas do conhecimento e suas relações com o cotidiano e os temas sociais urgentes (como meio ambiente, saúde, pluralidade cultural, ética, etc) (PIRES, 2009).

Onuchic e Allevato (2004) corroboram afirmando que os objetivos gerais da área de Matemática contidos nos Parâmetros Curriculares Nacionais têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental descrevem que a resolução de problemas:

> Possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua auto confiança (BRASIL, 1998, p.40).

Encontra-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio a afirmação que “a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios” (Id., 1999, p.112).

Brito (2006) aborda que, até a década de 90, a Resolução de Problemas era descrita como meta a ser atingida, processo ou habilidade básica. Somente nesse período é que ela passou a ser vista e interpretada como uma metodologia estratégica nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Há vários modos para se abordar a Resolução de Problemas e existem diferentes concepções de problema, de acordo com a definição de cada autor. Tratar-se-á no próximo item a visão de alguns autores quanto à exercícios e problemas matemáticos.

1.2 Exercícios e problemas matemáticos

De acordo com as definições desses autores, é possível ter uma ideia do significado de problema, acompanhado por Onuchic (1999, p.215) da seguinte maneira: “problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer”, já para Van de Walle (2001, p.42) “problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta” e finalizamos com Vila e Callejo (2006, p.6) que definem problema como uma “proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor”.

Nota-se que tais definições trazem a informação de que um problema se constitui problema para um determinado indivíduo e pode ser apenas exercício para outro, assim, é necessário que o professor tenha clareza quanto à diferenciação de exercícios e problemas matemáticos para que o aluno não resolva exercícios de fixação, após a teoria apresentada, deixando de estabelecer relações importantes e mecanizando todo o processo de resolução.

No quadro 1 constam algumas características que diferenciam exercícios de problemas matemáticos.

Quadro 1: Diferenças entre exercícios e problemas matemáticos

EXERCÍCIOS MATEMÁTICOS	PROBLEMAS MATEMÁTICOS
1. Ao ler um exercício, vê-se imediatamente em que consiste a questão e qual é o meio de resolvê-la.	**1.** Diante de um problema não se sabe, à primeira vista, como atacá-lo e resolvê-lo; às vezes, nem se quer se vê com clareza em que consiste o problema.
2. O objetivo que o professor persegue quando propõe um exercício é que o aluno aplique de	**2.** O objetivo que o professor persegue ao propor um problema é que o aluno busque,

forma mecânica conhecimentos de algoritmos já adquiridos e fáceis de identificar.	investigue, utilize a intuição, aprofunde o conjunto de conhecimentos e experiências anteriores e elabore uma estratégia de resolução.
3. Em geral, a resolução de um exercício exige pouco tempo e este pode ser previsto de antemão.	**3.** Em geral, a resolução de um problema exige um tempo que é impossível de prever de antemão.
4. A resolução de um exercício não costuma envolver os afetos.	**4.** A resolução de um problema supõe um forte investimento de energia e afeto. Ao longo da resolução, é normal experimentar sentimentos de ansiedade, de confiança, de frustração, de entusiasmo, de alegria etc.
5. Em geral, os exercícios são questões fechadas.	**5.** Os problemas estão abertos a possíveis variantes e generalizações e a novos problemas.
6. Os exercícios são abundantes nos livros didáticos.	**6.** Os problemas costumam ser escassos nos livros didáticos.

Fonte: VILA; CALLEJO, 2006, adaptado.

O Quadro 1 mostra que quando o enunciado é de clara compreensão considera-se que se trata de um exercício e para ser um problema a proposição deve ter a característica de não apresentar com facilidade uma solução imediata, tendo que pensar, elaborar estratégias, encontrar a incógnita, os dados, as condicionantes, executar os planos e chegar a uma resposta favorável ou não ao que se procura no problema. A autora Souza (2016) corrobora quando afirma que o professor precisa ter clareza que a habilidade de resolver problemas não é inata, muito pelo contrário, pode e deve ser desenvolvida. Os alunos precisam ser estimulados e amparados durante a resolução de uma situação a fim de que possam estabelecer os vínculos necessários entre o que já sabem e o que pretendem desenvolver.

Vila e Callejo (2006) descrevem que os alunos costumam valorizar mais o produto que o processo, porque observam o mesmo ato nos seus professores, razão pela qual esses pesquisadores destacam a necessidade de mudança na postura do professor. Eles afirmam que os sistemas de crenças dos professores quanto à ideia de problema e os seus papeis na educação matemática os levam a tomar decisões, em alguns casos de modo inconsistente, sobre a tipologia de problemas que propõem.

Em um estudo realizado na Catalunha com quatro professores Vila e Callejo (2006) mostraram grande discrepância em relação ao que cada um considera como problema em matemática. Eles ainda destacam que as crenças dos alunos em torno da resolução de problemas não são modeladas apenas na escola, tendo uma grande importância a família e outros espaços de socialização. Sugerem como forma de auxiliar os alunos a desenvolver crenças adequadas a respeito da resolução de problemas:

> - Começar logo a propor problemas.
> - Assegurar-se de que os problemas propostos sejam verdadeiros.
> - Apresentar-se aos alunos como resolvedores de problemas que não conhecem todas as respostas.
> - Centrar-se nos processos de resolução, não só nos resultados.
> - Incentivar-se seguidamente os alunos a trabalharem em pequenos grupos, animando-os a discutir e a buscar soluções alternativas.
> - Ajudar os alunos a reconhecerem tanto os seus próprios bloqueios quando se deparam com problemas difíceis e a superá-los como a satisfação e prazer que experimentam quando encontram a solução.
> - Valorizar os processos, as explicações e as estratégias dos alunos, além de suas respostas, e animá-los a dar conta de seu trabalho.
> - Não enfatizar o cálculo (VILA e CALLEJO, 2006, p.77).

Na obra de Pozo e Echeverría (1998) é possível identificar alguns critérios que permitem transformar as tarefas escolares em problemas, ao invés de exercícios, conforme descrito no Quadro 2.

Quadro 2: Critérios para transformar as tarefas escolares em problemas

Na proposição do problema
1. Propor tarefas abertas que admitam vários caminhos possíveis de resolução e, inclusive, várias soluções possíveis, evitando as tarefas fechadas.
2. Modificar o formato ou a definição dos problemas, evitando que o aluno identifique uma forma de apresentação com um tipo de problema.
3. Diversificar os conteúdos nos quais se propõe a aplicação de uma mesma estratégia, fazendo com que o aluno trabalhe os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo, diante de conteúdos conceituais diferentes.
4. Propor as tarefas não só como um formato acadêmico mais também dentro de cenários cotidianos e significativos para o aluno, procurando fazer com que o aluno estabeleça conexões entre ambos os tipos de situações.
5. Adequar à definição do problema, as perguntas e a informação proporcionada aos objetivos da tarefa, usando, em diferentes momentos, formatos mais ou menos abertos, em função desses mesmos objetivos.
6. Usar os problemas com fins diversos durante o desenvolvimento ou sequência didática de um tema, evitando que as tarefas práticas apareçam como ilustração, demonstração ou exemplificação de alguns conteúdos previamente apresentados pelos alunos.

Durante a solução do problema
7. Habituar o aluno a adotar as suas próprias decisões sobre o processo de resolução, assim como a refletir sobre esse processo, dando-lhe uma autonomia crescente nesse processo de tomada de decisões.
8. Fomentar a cooperação entre os alunos na realização das tarefas, mas também incentivar a discussão e os pontos diversos, que obriguem a explorar o espaço do problema para comparar as soluções ou caminhos de resolução alternativos.
9. Proporcionar aos alunos a informação que precisarem durante ao processo de resolução, realizando um trabalho de apoio, dirigido mais a fazer perguntas ou fomentar nos alunos o hábito de perguntar-se do que a dar resposta às perguntas dos alunos.
Na avaliação do problema
10. Avaliar mais os processos de resolução seguidos pelo aluno do que a correção final da resposta obtida, ou seja, avaliar mais do que corrigir.
11. Valorizar especialmente o grau em que esse processo de resolução envolve um planejamento prévio, uma reflexão durante a realização da tarefa e uma autoavaliação pelo aluno do processo seguido.
12. Valorizar a reflexão e a profundidade das soluções alcançadas pelos alunos e não a rapidez com que são obtidas.

Fonte: POZO; ECHEVERRÍA, 1998, adaptado.

Os critérios apresentados no Quadro 2 sugerem proposições para a resolução de problemas matemáticos, bem como para a duração da resolução e a forma de avaliar o problema. A autora Souza (2016) contribui ao descrever que a proposta dos problemas pode variar em função dos objetivos do professor no desenvolvimento dos tópicos em matemática. Dessa forma, cabe ao docente selecionar os problemas para atingir da melhor forma possível os objetivos específicos ou gerais referentes ao ensino de determinado conteúdo matemático, mas sempre destacando que a proposta essencial para o ensino e aprendizagem da matemática é a sua utilização dentro e fora da sala de aula.

Os problemas sejam matemáticos ou não podem ser resolvidos pela metodologia Resolução de Problemas. Nos próximos itens são tratadas as concepções de alguns autores sobre o tema em questão e inicia-se com o criador da metodologia George Polya.

1.3 Resolução de Problemas – George Polya

O primeiro a tratar dessa metodologia foi o teórico George Polya em sua obra "*How to Solve It"* - publicada a primeira edição em 1945. A seguir são apresentadas citações da tradução em português - "A arte de Resolver Problemas" - publicação de 2006. O autor argumenta que existem quatro etapas para a resolução de problemas.

Na obra *A arte de resolver problemas* além da análise de estratégias, de padrões e analogias, são identificadas quatro etapas fundamentais que ocorrem na resolução de problemas: *compreensão do problema*, *estabelecimento de um plano*, *execução do plano* e *retrospecto*.

Nas duas primeiras etapas o autor mostra a importância dos processos de descoberta, que ele mesmo denominou heurística, ressaltando a importância de explorar analogias, identificar padrões e analisar problemas correlatos mais simples, por outro lado, nas outras duas etapas, o enfoque é dado para a execução e a garantia de ter encontrado uma solução correta.

As quatro etapas de resolução de problemas apresentadas por Polya (2006)[16]:

1) Compreensão do problema: é preciso compreender o problema, ou seja, as primeiras descobertas com os seguintes passos:

- ✓ Qual é a incógnita[17]? Quais são os dados? Qual é a condicionante[18]?
- ✓ É possível satisfazer à condicionante? A condicionante é suficiente para determinar à incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?
- ✓ Trace uma figura. Adote uma notação adequada.
- ✓ Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

2) Estabelecimento de um plano: encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução por meio dos seguintes passos:

---

[16] Os itens 1 a 4 são *ipsis litteris* das páginas xix-xx.
[17] Do que é que se precisa? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? (POLYA, 2006, p.2).
[18] Considerar as partes principais do problema? (Ibid., p.5).

- ✓ Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?
- ✓ Conhece um problema correlato?
- ✓ Conhece um problema que lhe poderia ser útil?
- ✓ Considere a incógnita e procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.
- ✓ Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método?
- ✓ Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?
- ✓ É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
- ✓ Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?
- ✓ Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

3) Execução do plano: execute o seu plano usando os seguintes passos:

- ✓ Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo.
- ✓ É possível verificar claramente que o passo está correto?
- ✓ É possível demonstrar que ele está correto?

4) Retrospecto: examine a solução obtida com os seguintes passos:

- ✓ É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento?
- ✓ É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

- ✓ É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Quanto à incógnita, os dados, a condicionante, Polya (2006, p.6) descreve o seguinte exemplo:

Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura.

- ✓ Qual é a incógnita? O comprimento da diagonal de um paralelepípedo. Quais são os dados? O comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo.
- ✓ Adote uma notação adequada. Qual a letra que deve denotar a incógnita? X.
- ✓ Quais as letras que escolheria para o comprimento, a largura e a altura? A, B e C.
- ✓ Qual é a condicionante que relaciona A, B e C com X? X é a diagonal do paralelepípedo, no qual A, B e C são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura.
- ✓ Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Sim, ele é razoável. Se conhecermos A, B e C, conheceremos o paralelepípedo. Se o paralelepípedo ficar determinado, a sua diagonal também o ficará.

Propõe-se a seguir, no Quadro 3, uma síntese com as palavras-chave para resolver problemas segundo Polya (2006).

Quadro 3: Palavras-chave para resolver problemas segundo Polya

Compreensão do Problema	**Estabelecimento de um plano**	**Execução do Plano**	**Retrospecto**
Incógnita	Problema correlato	Plano de resolução	Verificar o resultado
Dados	Problema análogo	Conhecimentos anteriores	Verificar o argumento
Condicionante	Incógnita semelhante	Hábitos mentais	Utilizar o resultado em outro problema

Figura	Elemento auxiliar	Concentração no objetivo	Reexaminar o resultado
Notação adequada	Reformular o problema	Verificar cada passo	Reconsiderar a solução
	Incógnita e os dados próximos	Demonstrar o passo	

Fonte: POLYA, 2006, adaptado

O Quadro 3 apresenta palavras relevantes para a solução do problema e entende-se que diante dessas etapas o indivíduo precisa além de compreender o problema também desejar resolvê-lo e que o caminho que vai desde à compreensão do problema até à resposta final e o principal feito na resolução de um problema é a concepção da estratégia para solucioná-lo.

Na obra de Polya (2006, p.29) é possível encontrar boas definições quando descreve e esclarece que a compreensão de um problema está subdividida em dois estágios: familiarização e aperfeiçoamento da compreensão.

> Familiarização: Comece pelo enunciado do problema. Visualize o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível. É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo. A atenção concedida ao problema pode também estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes.
> Aperfeiçoamento da compreensão: Comece de novo pelo enunciado do problema, quando estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de deixá-lo por completo. Isole e verifique as partes principais do problema, a hipótese e a conclusão, considerando-as uma a uma, em seguida examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes e cada um com a totalidade do problema.

E continua descrevendo quanto à procura da ideia proveitosa, a execução do plano e o retrospecto, sendo ressaltado pelo mesmo autor da seguinte maneira:

> Procura da ideia proveitosa: Considere o problema sob diversos pontos de vista. Destaque as diferentes partes, examine repetidamente os diversos detalhes de maneiras diferentes. Procure perceber algum significado novo em cada detalhe, alguma nova interpretação do conjunto. Mesmo que, por algum tempo, não lhe ocorra qualquer nova ideia apreciável, deverá ficar agradecido se a sua concepção do problema se tornar mais completa, coerente, homogênea ou equilibrada.
>
> Execução do plano: Comece da ideia feliz que o levou à resolução. Principie quando se sentir seguro de que dominou a conexão principal e confiante em que pode proporcionar os detalhes menores que faltam. Realize

> detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já verificou serem viáveis. Verifique a correção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o problema é muito complexo, pode distinguir passos "grandes" e "pequenos", constituindo-se cada grande passo de diversos pequenos. Verifique primeiro os grandes e passe depois para os pequenos.
> Retrospecto: Considere os detalhes da resolução e procure torná-los tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; perceba toda a resolução num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores e menores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quanto for possível, nos seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e utilizá-lo em outros problemas. Examine o resultado e procure utilizá-lo em outros problemas. É possível que encontre outra resolução melhor, que descubra fatos novos e interessantes. De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas (POLYA, 2006, p.30-31).

Todas as etapas mostram que o objetivo é enfatizar que na resolução de problemas deve-se ter sempre começo, meio e fim. Considerar sempre a variável, os meios e maneiras para encontrá-las e por fim, considerar a conclusão, ou seja, a validação da resolução.

O autor ainda salienta em sua obra os seguintes destaques:

> Não esqueça a sua meta. Pense naquilo que deseja obter. Tenha em mente aquilo para que esteja a trabalhar. Considere a incógnita [...]. Ao focalizar a atenção e concentrar à vontade no nosso objetivo, pensamos em meios e maneiras de alcançá-lo. Quais os meios para este fim? Como podemos chegar a ele? Que causas poderiam produzir este resultado? [...]. Considere a conclusão (Ibid.).

Em sua obra deixa claro que o ensinar a pensar deveria ser o objetivo principal do ensino de matemática, pois, segundo ele:

> Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (Ibidem., p.100).

Para uma melhor aplicação desses métodos à resolução de problemas, o autor supracitado indica caminhos aos professores e alunos. Tais indicações podem ser para discentes e docentes do curso básico ou superior ou qualquer pessoa interessada no ensino da matemática e/ou de outras ciências.

Na obra de Souza (2016, p.51-52) é possível encontrar um quadro, como o Quadro 4, que propõe alguns destes caminhos apresentados por Polya (2006) correspondentes aos professores e alunos nos processos do ensino e aprendizagem da resolução de problemas, o qual ela denomina método de resolução de problemas.

Quadro 4: Método de resolução de problemas

Professor	**Aluno**
1.Auxiliar seus alunos discretamente sem dar na vista.	1.Adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível.
2.Não ajudar demais nem de menos o seu aluno	2.Adquirir uma parcela razoável do trabalho.
3.Colocar-se no lugar do aluno, perceber o ponto de vista deste procurar compreender o que se passa em sua cabeça.	3.Não se sentir sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente. Experimentar qualquer progresso na compreensão.
4.Fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido ao próprio estudante.	4.Desenvolver a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.
5.A cada problema fazer as mesmas perguntas e indicar os mesmos passos: Qual é a incógnita? Do que se precisa? O que se deve procurar?	5.Se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas.
6.Fazer indagações proveitosamente repetidas.	6.Chegar a ideia certa pela repetição da indagação.
7.Provocar a operação mental, útil para a resolução de problemas por meio da indagação e da sugestão.	7.Assimilar a maneira correta para apresentar a si próprio realizando com naturalidade e vigor a operação mental correspondente.
8.Ao resolver um problema em aula, fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar o aluno.	8.Descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.
9.Trabalhar para um fim que se deseja.	9.Desejar resolver o problema.
10.Escolher bem o problema: nem muito difícil nem muito fácil. O enunciado verbal precisa ficar bem entendido.	10.Estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante.
11.Transmitir ao aluno o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. É sempre possível aperfeiçoar a compreensão da resolução.	11.Escrever a resolução, verificar cada passo e acreditar que resolveu corretamente o problema, mas assim mesmo perguntar: É possível verificar o resultado?
12.Não dar ao aluno a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros.	12.Investigar as relações de um problema ao fazer o retrospecto de sua resolução.

Fonte: POLYA , 2006, adaptado

O Quadro 4 reforça as ideias de que o docente deve colocar no lugar do aluno que tem dificuldades, mais não auxiliar nem a mais nem a menos e fazer perguntas que estimule esse estudante a pensar, identificar a incógnita, os dados, a condicionante, elaborar estratégias e resolver o problema. Quanto ao discente é destacado que qualquer progresso na compreensão do problema é importante para a sua capacidade de resolver problemas e a sua autoestima.

É possível encontrar uma contribuição relevante explicitada na obra de Nunes (2010, p.79) quando aborda que:

> Esse ensinar a pensar, ou seja, o pensamento com o qual Polya estava preocupado significava, na visão dele, um "pensar para um propósito. [...] diz Polya: "Estabelecido incompletamente, mas concisamente, deixem os professores ensinar demonstrando por todos os meios, mas deixem-nos também ensinar conjecturando". Polya preconizava um ensino ativo para a Matemática, na crença de que um aprendizado eficiente dar-se-ia se o estudante mergulhasse no mundo da descoberta.

Entende-se que a metodologia Resolução de Problemas é importante para o processo de ensino e aprendizagem quando problemas passam a ser uma ferramenta para pensar matematicamente e não apenas como uma atividade técnica. O conhecimento matemático deve emergir da experiência com a resolução de problemas, sendo esse um caminho didático que engloba processos como exploração do contexto, dos termos, da elaboração de novos algoritmos e novas formas de explicitar formulação e solução de problemas.

A partir da década de 1980 outros autores também escrevem sobre a resolução de problemas, assim, a presente pesquisa apresentará a abordagem de alguns teóricos que contribuem com a metodologia Resolução de Problemas.

1.4 Resolução de Problemas – Abordagens de Schoroeder e Lester

Schroeder e Lester (1989) no livro Novas Direções para a Matemática Escolar Elementar[19] descrevem três modos de abordar a resolução de problemas e destacam que, embora na teoria essas três maneiras de trabalhar Resolução de Problemas

[19] New Directions for Elementary School Mathematics.

possam ser separadas, na prática elas se superpõem e podem acontecer em várias combinações e sequências.

1.4.1 Ensinar sobre Resolução de Problemas

O quadro de insucesso configurado na Matemática Moderna levou pesquisadores e educadores matemáticos a buscar alternativas para o ensino da Matemática (ONUCHIC, 1999). Voltaram-se, então, os olhos para a resolução de problemas. As heurísticas ganharam força, constituindo-se em listas de sugestões e estratégias gerais, independente do assunto particular. Elas auxiliavam a fazer aproximações, compreender um problema e dispor, eficientemente, os recursos para resolvê-lo, portanto, foi sedimentada a crença de que era preciso ensinar os estudantes a resolver problemas, ou o que é o mesmo, ensinar resolver problemas.

Para Schroeder e Lester (1989) o professor que ensina resolver problemas realça as etapas criadas por Polya em 1945, ou alguma variação delas. Esses momentos descrevem um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos:

- Compreender o problema;
- Elaborar um plano;
- Levar avante esse plano;
- Olhar de volta o problema original para analisar a validade da solução encontrada.

A Resolução de Problemas deve, nessa forma de trabalho, ser tratada como uma nova disciplina.

1.4.2 Ensinar matemática para resolver problemas

Analisando a obra de Schroeder e Lester (1989, p.32) constata-se que "ao ensinar para resolver problemas de matemática", o professor se concentra sobre modos em que a matemática ensinada pode ser aplicada na resolução tanto de problemas rotineiros como não rotineiros. Embora a aquisição do conhecimento matemático seja importante, o propósito essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la, portanto, aos estudantes são dados muitos exemplos de termos e de estruturas matemáticas sobre o que eles estão estudando e muitas oportunidades para aplicar a matemática estudada na resolução de problemas. Posteriormente, o professor que ensina para resolver problemas está preocupado com a habilidade dos estudantes em transferir o que eles aprenderam num contexto de um problema para outros.

Essa abordagem está nomeada como o paradigma *teach-then-solve* (ensine-então-resolva) e descrita da seguinte forma pelo autor:

> Há uma nítida separação entre o que é ensinar matemática e o que é resolver problemas. Tradicionalmente o professor inicia o trabalho apresentando o novo conteúdo, e mostrando, em seguida, algumas aplicações por meio de exemplos. Depois o professor dá uma imensa lista de exercícios de fixação no qual o aluno deverá aplicar o novo conhecimento. O aluno não fixando bem os conceitos, pois tem somente uma absorção passiva de ideias, depende exclusivamente da ação do professor. Este caminho de ensino está separado do aluno e de seu aprendizado. A aprendizagem deveria começar “onde o aluno está”, isto é, “partindo do que ele já sabe” (VAN de WALLE, 2001, p.42).

Esse conceito é corroborado por Onuchic (1999) quando ressalta que os usos e aplicações da matemática merecem a atenção de professores e estudantes, entretanto, não pode ser ensinada como uma ferramenta, dependendo dos seus campos de aplicação. A autora argumenta que a repetição de uma estratégia ou técnica operatória, mesmo que realizada corretamente, não garante a compreensão do conceito ou conteúdo envolvido.

1.4.3 Ensinar matemática por meio da resolução de problemas

O ponto de partida dessa abordagem é a situação-problema e o novo conhecimento matemático é construído durante a resolução do problema, sendo que esse modo é visto, no início da década de 1990, como uma metodologia de ensino.

Ensinar matemática por meio da resolução de problemas, é conceituado por Schroeder e Lester (1989) como uma abordagem mais consistente, pois são aprendidos termos e habilidades matemáticas são aprendidos no contexto da resolução de problemas. Os problemas são avaliados não somente como um propósito para aprender matemática, mas também, como um meio importante de fazê-la. Os autores argumentam que a aprendizagem de matemática deve ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real serve como exemplo do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Esses dois autores ainda afirmam que é difícil ensinar por meio da resolução de problemas, entretanto, apresentam algumas razões que justificam o esforço:

- A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes em ideias e em “dar sentido”.
- A resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos *Standards 2000*: resolução de problemas, raciocínio e prova comunicação, conexões e representação.
- A resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a autoestima.
- A resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem (Ibid., 1989, p.49).

Onuchic (1999) corrobora afirmando que quando os professores ensinam matemática por meio da resolução de problemas, eles estão dando aos seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver a sua própria compreensão, sendo que à medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, a habilidade deles em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Propõe-se com o Quadro 5, uma síntese com as palavras-chave para resolver problemas segundo Schoroeder e Lester (1989).

Quadro 5: Palavras-chave para resolver problemas segundo Schoroeder e Lester

Ensinar sobre Resolução de Problemas	Ensinar para Resolução de Problemas	Ensinar por meio de Resolução de Problemas
• Compreender o problema. • Elaborar um plano. • Levar avante esse plano. • Olhar de volta o problema original para analisar a validade da solução encontrada.	• Ação do professor. • Concentração do professor. • Habilidade do estudante. • Conceitos e estruturas matemáticas aplicadas na resolução de problemas	• Situação-problema. • Novo conhecimento. • Metodologia de ensino. • Conceitos e habilidades matemáticas. • Movimento do concreto para o abstrato. • Problema real para representação simbólica.

Fonte: SCHOROEDER e LESTER, 1989, adaptado

O Quadro 5 propõe uma síntese de palavras que auxiliam, orientam e contribuem com o ensinar a resolver problemas, ensinar para Resolução de Problemas e ensinar por meio de Resolução de Problemas.

1.5 Resolução de Problemas – Abordagens de Stanic e Kilpatrick

Na obra de Stanic e Kilpatrick (1990) é possível encontrar apontamentos para três temas gerais caracterizando o papel da resolução de problemas nos currículos de matemática: resolução de problemas como contexto; resolução de problemas como habilidade e resolução de problemas como arte.

1.5.1 Resolução de Problemas como contexto

A resolução de problemas como contexto tem cinco subtemas baseados na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins importantes. Os autores Stanic e Kilpatrick (1990) classificam em:

- ✓ Resolução de problemas como justificação: a resolução de problemas foi inserida no currículo de matemática em parte porque os problemas fornecem uma justificação para ensinar matemática - alguns problemas relacionados com experiências do mundo real foram incluídos no currículo para convencer os alunos e professores do valor da matemática.

- ✓ Resolução de problemas como motivação: é procurado o objetivo de atrair o interesse dos alunos para resolver o problema, como por exemplo, um problema específico envolvendo a adição com reagrupamento deve ser usado para introduzir uma série de lições conduzindo à aprendizagem do algoritmo mais eficiente para resolver a operação de adição de números.

- ✓ Resolução de problemas como atividade lúdica: os problemas são fornecidos nem tanto para motivar os alunos a aprender mas para lhes permitir ter algum divertimento com a matemática que eles já aprenderam.

- ✓ Resolução de problemas como veículo: Os problemas são muitas vezes fornecidos, não simplesmente para motivar os alunos a se interessar pela instrução direta de um tópico, mas como veículo por meio do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta refletem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas.

- ✓ Resolução de problemas como prática: a resolução de problemas como prática tem tido a maior influência no currículo de matemática. Nesse subtema, os problemas não providenciam justificativa, motivação, atividade lúdica ou veículo tanto como a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente.

Segundo os autores embora a resolução de problemas como contexto se mantenha como um tema forte e persistente, o tema resolução de problemas como capacidade tornou-se dominante para aqueles que veem a resolução de problemas como uma valiosa finalidade curricular, merecendo especial atenção, em vez de ser simplesmente um meio para atingir outros fins ou um inevitável produto do estudo da matemática.

1.5.2 Resolução de Problemas como habilidade

A resolução de problemas é frequentemente vista como uma das muitas capacidades a serem ensinadas no currículo escolar (STANIC e KILPATRICK, 1990), sendo que a resolução de problemas na hierarquia das capacidades adquiridas pelos alunos conduz a certas consequências no currículo - dentro das capacidades gerais da resolução de problemas, fazem-se distinções hierárquicas entre resolver problemas rotineiros e problemas não rotineiros. A resolução de problemas não rotineiros é caracterizada como uma capacidade de nível elevado a ser adquirida depois da capacidade de resolução de problemas rotineiros (que, por sua vez é adquirida depois dos alunos apreenderem conceitos e capacidades matemáticas básicas).

Essa visão adia a atenção para a resolução de problemas não rotineiros e, como resultado, apenas alguns alunos que conseguiram dominar os pré-requisitos chegam a ser expostos a tais problemas. Mais do que para todos os alunos, a resolução de problemas não rotineiros torna-se então uma atividade para os estudantes especialmente capazes.

1.5.3 Resolução de Problemas como arte

A resolução de problemas como arte é a visão mais profunda e mais compreensiva da resolução de problemas nos currículos escolares de matemática – a visão da resolução de problemas como arte – emergiu do trabalho de George Polya, que reviveu no nosso tempo a ideia da heurística (a arte da descoberta). Matemáticos antigos como Euclides e Pappus e mais recentes como Descartes, Leibnitz e Bolzano, discutiram métodos e regras para a descoberta e invenção em matemática, mas as suas ideias nunca tiveram grande eco nos currículos escolares (STANIC e KILPATRICK, 1990). Ficou para Polya a tarefa de reformular, estender e ilustrar várias ideias acerca da descoberta matemática de tal modo que os professores as pudessem compreender e usar.

Os autores também concordam com as afirmações de Polya (1945) quanto ao principal objetivo da educação, qual seja o desenvolvimento da inteligência – ensinar os jovens a pensar. Na escola primária, as crianças devem ser ensinadas a fazer a sua aritmética muito mais com compreensão do que mecanicamente porque, embora o comportamento que envolve compreensão seja um objetivo mais ambicioso, tem de fato uma maior probabilidade de sucesso. Esse objetivo produz resultados mais rápidos e mais permanentes.

Na escola do ensino fundamental II e ensino médio, a matemática deve oferecer algo àqueles que a usarão e àqueles que não usarão nas suas carreiras ou estudos posteriores, pois, a mesma matemática deve ser ensinada a todos os alunos porque ninguém pode saber logo à partida quais os alunos que eventualmente usarão profissionalmente a matemática.

Propõe-se, com o Quadro 6, uma síntese com as palavras-chave para resolver problemas segundo Stanic e Kilpatrick (1990).

Quadro 6: Palavras-chave para resolver problemas segundo Stanic e Kilpatrick

Resolução de Problemas como contexto	**Resolução de Problemas como habilidade**	**Resolução de Problemas como arte**
• Meios para atingir os fins. • Resolução de Problemas como justificativa. • Resolução de Problemas como motivação. • Resolução de Problemas como atividade lúdica. • Resolução de Problemas como veículo. • Resolução de Problemas como prática.	• Problemas rotineiros: o estudante aprende conceitos e capacidades matemáticas básicas. • Problemas não rotineiros: o estudante domina os pré-requisitos básicos, tornando-se aluno especialmente capaz.	• Ideia da heurística. • Mais compreensão que mecanismo. • Resultados mais rápidos e permanentes. • Matemática deve ser ensinada a todos.

Fonte: STANIC e KILPATRICK, 1990, adaptado

O Quadro 6 mostra palavras e frases relevantes para orientar a Resolução de Problemas como contexto, como habilidade e como arte.

1.6 Resolução de Problemas – Brito – Fini – Neumann- Inglez de Souza – Alves

Pode-se definir a habilidade de acordo com Brito, Fini e Neumann (1994) como um dos elementos necessários para a resolução de problemas e incluem aspectos individuais dos processos mentais como percepção, atenção, memória, imaginação, pensamento ou solução de problemas.

Alves e Brito (2003) e Brito (2006) descrevem que muitos autores apresentam algumas fases específicas da resolução de problemas e com número de operações diversas, mas a ordem de execução das operações seguidas durante a solução de um problema é semelhante. Em primeiro lugar o sujeito percebe a dificuldade da situação, a seguir entra em contato com o problema a fim de definí-lo, levanta os dados do problema e passa a selecionar, dentre as estratégias já conhecidas, a mais adequada à situação.

Brito (2006) descreve que desde 1922 pesquisadores já afirmavam que um problema é composto do enunciado, do processo mental de solução – que inclui a representação e o espaço de solução - e da solução final. Ao se defrontar com uma determinada situação, o sujeito necessita buscar alternativas para atingir uma meta, encontrando-se, assim, frente a um problema. E a resolução de problemas é entendida como geradora de um processo por meio do qual o aprendiz vai combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos, e que são necessários para encontrar a solução para a nova situação. Em outras palavras um problema está caracterizado quando a resposta não é rapidamente recuperada da memória.

Na obra de Inglez de Souza e Brito (2007) é possível identificar com detalhes que pesquisadores adotam dois enfoques distintos em relação aos processos implícitos durante a resolução de problemas e ressaltam da seguinte maneira:

- ✓ Como habilidade geral: é fato que as resoluções de problemas e de exercícios apresentam diferenças, mas também similaridades, no sentido de que exigem uma série de capacidades de raciocínios e habilidades comuns que se adaptam a cada situação. E, mais ainda, existiria uma série de procedimentos e habilidades que seriam comuns a todos os problemas, independentemente do conteúdo a que se reportam, como, por exemplo, prestar atenção, recordar, relacionar entre si os elementos do problema, entre outros. Além da disposição para a solução,há os planos, metas e submetas que o aluno estabelece (ou deveria estabelecer) em busca da solução – as estratégias ou procedimentos heurísticos e os procedimentos de transformação da informação que essas atividades requerem, regras, algoritmos e operações – são importantes para a obtenção da solução.

- ✓ Como habilidade individual: é importante no sentido de proporcionar uma aplicação adequada no processo de aprendizagem de cada indivíduo. Trata do processo de resolução de problemas de um conteúdo específico considerando as diferenças de desempenho entre o aluno expert e o novato.

Quanto ao aluno expert e novato as autoras basearam-se nos estudos de Lester (1994):

1. O expert sabe mais e diferentemente de um novato, pois ele conecta seu conhecimento em esquemas.
2. O expert percebe características estruturais do problema enquanto o novato foca-se em características superficiais.
3. Os experts são mais atentos em seus pontos fortes e fracos que os novatos.
4. Os experts monitoram e regulam seus esforços mais eficientemente que os novatos.
5. O expert concentra-se em obter soluções mais elegantes.

Dessa forma, Inglez de Souza e Brito (2007) descrevem que o estudo das diferenças de desempenho de novatos e experts, durante a solução de problemas, tem os seguintes pressupostos:

- ✓ As habilidades e estratégias de resolução de problemas são específicas de um certo domínio, não sendo transferíveis entre as diferentes áreas;
- ✓ As diferenças de desempenho entre sujeitos são devidas aos conhecimentos específicos dos experts e não a uma maior capacidade cognitiva geral.
- ✓ O especialista consegue usar os recursos cognitivos de forma mais eficiente.
- ✓ A destreza na resolução de problemas é um efeito da prática.

- ✓ A eficácia depende, principalmente, da disponibilidade e ativação de conhecimentos conceituais da área. Assim, o expert possui grande repertório de conhecimentos, dentre eles, os conceituais.

As autoras ainda afirmam que a seleção dos procedimentos adequados, segundo a teoria do processamento da informação, é orientada pelo conhecimento conceitual, portanto, o expert pode até ser mais lento que o habilidoso, mas terá mais sucesso na tarefa.

Muitos autores se empenharam em descrever as etapas pelas quais passa o pensamento durante a resolução de problemas, dessa forma, na obra de Brito (2011) encontra-se uma revisão desses estudos e apontou as seguintes etapas:

- ✓ compreensão do enunciado ou do texto (história do problema);
- ✓ representação do problema;
- ✓ categorização do problema;
- ✓ estimativa de solução;
- ✓ planejamento da solução;
- ✓ autoavaliação do procedimento utilizado;
- ✓ autoavaliação do cálculo
- ✓ redação da resposta, que leva o estudante a uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto.

Propõe-se, no Quadro 7, uma síntese das palavras-chave para resolver problemas segundo Brito, Fini, Neumann (1994), Alves e Brito (2003), Inglez de Souza e Brito (2007) e Brito (2006, 2011).

Quadro 7: Palavras-chave para resolver problemas segundo Brito et. al

Categorias para Resolução de Problemas	Fases da Resolução de Problemas	Características da Resolução de Problemas
• Habilidade • Percepção • Atenção • Memória • Imaginação	• Perceber a dificuldade da situação. • Definir o problema. • Levantar os dados do problema. • Selecionar as estratégias conhecidas.	• Cognitiva. • Processo. • Dirigida. • Pessoal

• Pensamento		
Composição do Problema	**Processos Implícitos na Resolução de Problemas**	**Etapas do Pensamento durante a Resolução de Problemas**
• Enunciado. • Processo mental de solução. • Representação e espaço de solução. • Solução final.	• Habilidade geral: atenção, recordar, relacionar, metas, submetas, estratégias, procedimentos, regras, algoritmos. • Habilidade individual: diferenças de desempenho, aluno expert, aluno novato, estratégias, conhecimentos, destreza, eficácia.	• Compreensão do enunciado. • Representação de problema. • Categorização do problema. • Estimativa de solução. • Planejamento da solução.

Fonte: BRITO et. al,1994, 2003, 2006, 2007, 2011, adaptado

O Quadro 7 salienta as palavras-chaves e expressões que favorecem à organização de categorias, fases, características, composições, etapas e os processos da Resolução de Problemas.

1.7 Resolução de Problemas – Onuchi – Allevato - Zuffi

De acordo com as autoras Onuchic e Allevato (2004) ensinar matemática por meio da Resolução de Problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas. Onuchic (1999, p.216) que explicita que “visando um ensino e aprendizagem acompanhado de compreensão e significado por meio da Resolução de Problema” elaborou um roteiro para a aula de matemática quanto à resolução de problemas e posteriormente ampliado (ZUFFI e ONUCHIC, 2007; ALLEVATO e ONUCHIC, 2009, 2014; ONUCHIC e ALLEVATO, 2011). A proposta consiste na organização das atividades por meio das etapas a seguir segundo Onuchic e Allevato (2011):

- ✓ Preparação do problema: O docente deve selecionar um problema gerador visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. O conteúdo matemático requerido para a resolução do problema não deve ter sido trabalhado em sala de aula.

- ✓ Leitura individual: O discente deve receber uma cópia do problema, preferivelmente impressa para que não se distraia ou perca tempo em copiá-lo da lousa. O docente deve propor que ele faça uma leitura individual.

- ✓ Leitura em conjunto: Nesse momento, os discentes se reúnem em grupo e realizam a leitura do problema novamente. Se houver dificuldade no entendimento de palavras do enunciado (o que seria um problema secundário) eles poderão consultar o dicionário. Caso haja dificuldade em ler o problema, o docente pode auxiliar.

- ✓ Resolução do problema: Após percorrer as etapas anteriores, em seus grupos, os discentes buscam resolver o problema. Esse é um trabalho cooperativo e colaborativo em que os estudantes irão aprender uns com os outros.

- ✓ Observar e Incentivar: O docente tem o papel de observador, mediador, questionador e incentivador da aprendizagem. Cabe a ele possibilitar que os estudantes pensem e reflitam e troquem ideias nos grupos. A postura do professor não é a daquele que passa uma atividade na lousa e permanece sentado em sua mesa, mas daquele que circula entre os grupos e observa, avalia e anota as atividades que estão ocorrendo, incentivando a autonomia e soluções criativas durante a resolução dos problemas. Além disso, o docente deve auxiliar os alunos a resolver problemas secundários, como por exemplo, interpretação do enunciado, notação, passagem da língua materna para a linguagem matemática, dificuldades nas técnicas operatórias etc.

- ✓ Registro das resoluções na lousa: Diversas resoluções devem ser colocadas pelos grupos na lousa. Não importa se as resoluções estão certas ou erradas, mas devem constar nelas os diferentes processos realizados. É um momento muito rico, pois os discentes sentem-se envolvidos e curiosos para a resposta.

- ✓ Plenária: Nesse momento, os alunos são convidados a defender seus pontos de vista e a esclarecer suas dúvidas. Os estudantes devem discutir suas resoluções e analisar a validade de suas respostas com os colegas. O docente, nesse processo, é o mediador nas discussões e deve possibilitar a participação ativa e efetiva de todos os discentes, pois a avaliação é um processo contínuo.

- Busca do consenso: Com o esclarecimento das dúvidas e a análise das diversas resoluções, todos buscam um consenso sobre o resultado correto.

- Formalização do conteúdo: Após esse trabalho conjunto, cabe ao docente fazer a sistematização dos termos e conteúdos construídos. É importante o uso da terminologia matemática, além das definições, demonstrações e uso das propriedades adequadas ao assunto.

- Proposição e resolução de novos problemas: Os novos problemas propostos possibilitam que o docente analise se os estudantes compreenderam os elementos essenciais do conteúdo matemático aprendido, introduzido naquela aula. Além disso, o professor, por meio dessa etapa, pode consolidar aprendizagens construídas nas etapas anteriores, aprofundar e ampliar as compreensões sobre determinado assunto ou tópico matemático.

Para auxiliar o professor de matemática as autoras indicam algumas questões que devem ser feitas pelo professor durante a escolha de um problema baseado no projeto “Ensinando Matemática por meio da Resolução de Problemas” (ONUCHIC, 1998, 2009, 2011). São elas:

- Isso é um problema?
- Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para quais séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução? Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

A obra de Lima (2017, p.46) traz importante contribuição quando descreve que a “tarefa do professor é associar os problemas ao interesse do aluno e instigar a sua participação na resolução; promover a interação na troca de ideias sobre a solução alcançada e investigar a estratégia por ele empregada no procedimento de resolução”. É necessário que o professor tenha a clareza de que o aluno só conceberá a tarefa como um problema, se souber atribuir significado e sentido aos dados propostos pelo problema.

Onuchic e Allevato (2004, 2011) elencam como potencialidades no uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de matemática o fato dela:

- ✓ Focalizar as ideias matemáticas e dar sentido ao que se está estudando;

- ✓ Desenvolver o poder matemático nos alunos, isto é, a capacidade para pensar matematicamente, fazendo uso de diversas e convenientes estratégias na Resolução de Problemas, permitindo assim maior compreensão dos conteúdos e termos matemáticos;

- ✓ Estimular a crença de que os estudantes são capazes de fazer matemática, com isso a confiança e a autoestima deles se elevam;

- ✓ Empolgar os professores, que não querem voltar a ensinar da forma tradicional. Eles se sentem gratos com o fato dos alunos desenvolverem a compreensão por seus próprios raciocínios;

- ✓ Fazer com que o docente formalize os conceitos e teorias matemáticas somente na etapa final da aula, sendo que dessa forma os conteúdos passam a fazer mais sentido para os aprendizes.

Onuchic e Allevato (2004) atentas às novas tendências e demandas mundiais que se apresentavam para o ensino e a aprendizagem de matemática, o Grupo de Trabalho e Estudo sobre Resolução de problemas (GTERP) do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP-SP debruçou-se em estudos e apresentaram uma nova abordagem para a resolução de problemas sobre ensino-aprendizagem de matemática.

As autoras ainda descrevem que a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, foi criada para expressar a ideia de que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente e a avaliação deve estar integrada ao ensino para promover a aprendizagem.

Na obra de Justulin (2014, p.66) também é possível encontrar uma definição para o conceito e o mesmo afirma que a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da Resolução de Problemas ocorre em um processo “em espiral”, possibilitando que “o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos”, com “participação ativa dos mesmos”, e que possa “aprofundar e ampliar” suas compreensões sobre um conceito, procedimento ou conteúdo matemático.

Propõe-se, com o Quadro 8, uma síntese com as palavras-chave para resolver problemas segundo Onuchic (1998, 1999, 2011), Onuchic e Allevato (2004, 2011) e Zuffi e Onuchic (2007).

Quadro 8: Palavras-chave para resolver problemas segundo Onuchic et.al

Roteiro para Resolução de Problemas	Pré-diagnóstico do problema	Potencialidades na metodologia Resolução de Problemas
• Preparação do problema. • Leitura individual. • Leitura em conjunto. • Resolução do problema. • Observar e incentivar. • Registro das resoluções na lousa. • Plenária. • Busca do consenso. • Formalização do conteúdo. • Proposição e resolução de novos problemas.	• Isso é um problema? • Por quê? • Que tópicos de matemática podem ser iniciados com esse problema? • Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele? • Para quais séries acredita ser este problema adequado? • Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução? Como observar a razoabilidade das respostas obtidas? • Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema? • Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema? • Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?	• Focalizar as ideias matemáticas com sentido. • Desenvolver o poder matemático nos alunos: maior compreensão dos conteúdos e conceitos matemticos. • Estimular a crença, a confiança e a autoestima matemática. • Empolgar os professores, que não querem voltar a ensinar da forma tradicional.

		• Fazer com que o docente formalize os conceitos e teorias matemáticas somente na etapa final da aula.

Fonte: ONUCHIC et. al, 1998, 1999, 2004, 2007, 2009, 2011, 2014, adaptado

É possível observar no Quadro 8 palavras e frases relevantes que orientam e contribuem para o roteiro, bem como o pré-diagnóstico do problema e as possibilidades da metodologia Resolução de Problemas.

Dessa forma, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de matemática pode proporcionar aos docentes e discentes a possibilidade dos mesmos formularem seus próprios problemas, o que pode ocorrer antes, durante ou depois da resolução de um problema, contribuindo assim, na capacidade, autonomia e criatividade do sujeito.

Nas etapas para a resolução de problemas essa pesquisa investiga, concomitamente, a utilização da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval como contribuição à metodologia Resolução de Problemas na perscpectiva de Polya e outros autores. A teoria será tratada no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

Registro de Representação Semiótica

O objetivo deste capítulo é apresentar elementos da teoria Registro de Representação Semiótica na perspectiva de Raymond Duval, trazendo um breve estudo histórico da Semiótica, os conceitos de signos, códigos, registros de representação identificável, tratamento, conversão, tipos de registros de representação semiótica aplicados à matemática.

2.1 Breve estudo histórico da semiótica

Em Nöth (2008) encontra-se a etimologia do termo semiótica descreve que vem do grego *sēmeion* que significa signo e *sêma* que pode ser traduzido por sinal ou signo também. O ancestral mais antigo da semiótica é encontrado na história da medicina[20] – primeiro estudo diagnóstico dos signos das doenças.

Na perspectiva de Santaella (2003) a semiótica é definida como a ciência que tem por objeto de investigação o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno de produção, de significação e de sentido. As linguagens estão no mundo e nós estamos nas linguagens - verbais, escritas, sonoras, binárias, do computador, dos sinais de energia emitidos pelo corpo, dos sinais do silêncio, dos sonhos, gráficos, setas, luzes, objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, por meio do olhar, do sentir e do apalpar.

Na obra de Colapietro (1993, p.179) o conceito de semiótica vem sendo afirmado como "o estudo ou doutrina dos signos, algumas vezes considerada como uma ciência dos signos; uma investigação sistemática da natureza, propriedades e tipos de signo" e a contribuição de Lyons (2013) corrobora descrevendo que a semiótica é conceituada como ciência dos signos, do comportamento simbólico e dos sistemas de comunicação.

---

[20] "O médico grego Galeno de Pérgamo referiu-se à diagnóstica como sendo a parte semiótica – (*semeiotikón méros)* da medicina" (NÖTH, 2008, p.19).

Santaella (2003) também contribui com a terminologia quando descreve que o campo de abrangência da semiótica é vasto, irregular, eclético, pois suas indagações vão desde a culinária até a psicanálise, se intrometem na meteorologia e também na anatomia, investigadores dão palpites tanto ao cientista político quanto ao músico, isso não significa que a semiótica esteja roubando o campo do saber e da investigação específica de outras ciências – ela busca enxergar e compreender o seu ser de linguagem, ou seja, sua ação de signo.

A história mostra que as correntes da Semiótica são amplas e diversas, mas não indefinidas - Platão (427-347), Aristóteles (384-322), Agostinho (354-430), Hobbes (1588-1679), Locke[21] (1632-1704), Diderot (1713-1784), Hegel (1770-1831), dentre outros. No final do século XIX e início do século XX em tempos simultâneos e espaços distintos acontecia uma nova acepção dos estudos semióticos: uma nos EUA (Charles Sanders Peirce - 1839 -1914) e a outra na Europa Ocidental – França - (Fernand Saussure - 1857 - 1913) (NÖTH, 2008; SANTAELLA, 2003).

Somente nesse período a semiótica começa a adquirir autonomia e status de ciência. Encontramos o seguinte destaque na obra de Santaella (op. cit. p.11) afirmando que:

> Esse surgimento em lugares diferentes, mas temporalmente quase sincronizados, só vem confirmar uma hipótese de que os fatos, isto é, a proliferação histórica crescente das linguagens e códigos, dos meios de reprodução e difusão de informações e mensagens, proliferação esta que se iniciou a partir da Revolução Industrial — vieram gradativamente inseminando e fazendo emergir uma "consciência semiótica”.

O americano Charles Sanders Peirce, considerado o precursor da semiótica moderna, aborda a filosofia das linguagens - teoria semiótica. O suíço Ferdinand de Saussure destaca as linguagens particulares – imagens, gestos, teatros - a semiologia[22]. Os dois cientistas nunca conheceram o trabalho um do outro, surgiram de forma independente, e nenhum publicou suas teorias de forma completa em vida, mas ambas as teorias foram um marco na história para a semiótica.

---

[21] Primeiro filósofo a chamar Semiótica de “a ciência dos signos”.

[22] União das palavras gregas *sēmeion*, que significa sinal, e *logos que significa estudo*.

Quanto às especificidades das duas teorias, Nöth (2008, p.23) traz ótimas contribuições quando relata que:

> No nosso século, o termo semiologia ficou ligado à tradição semiótica fundada no quadro da linguística de Fernand de Saussure e continuada por semioticistas como Louis Hjelmslev ou Roland Barthes. Sob essas influências semiologia permaneceu durante muito tempo como o termo preferido nos países românicos, enquanto autores anglófonos e alemães preferiram o termo semiótica. Alguns semioticistas, porém, começaram a elaborar distinções conceituais entre semiologia e semiótica: semiótica designando uma ciência mais geral dos signos, incluindo os signos dos animais e da natureza, enquanto semiologia passou a referir-se unicamente à teoria dos signos humanos, culturais, e, especialmente, textuais.

A partir dos estudos de Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Saussure o pesquisador francês Raymond Duval desenvolveu a teoria Registro de Representação Semiótica[23] e para evitar confusão nas denominações dos signos, prefere usar o termo registro para os signos com a mesma referência em um sistema semiótico, sendo que "o termo registro já fora utilizado por Descartes, em 1637, em seu livro Geometria para distinguir a escrita algébrica de sua forma de representação figural" (DUVAL, 2004, p. 44). O termo em francês significa também utilizar a língua de diferentes maneiras para se expressar.

Elementos da teoria Registro de Representação Semiótica serão descritos neste capítulo elementos esses que se apresentam como embasamento teórico essa abordagem cognitivista pode trazer à metodologia Resolução de Problemas.

2.2 Registro de Representação Semiótica

Os registros de representações semióticas fornecem de acordo com Duval (2009, p.37) "os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor". As representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos, à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos indagam três fenômenos que são abordados da seguinte forma:

[23] *Théories Registres de Représentation Sémiotique.*

1) Diversidade dos registros de representação semiótica: a primeira aproximação dessa diversificação é entre a linguagem e a imagem. A linguagem natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como formadoras de um só e mesmo registro. As figuras geométricas, os gráficos cartesianos ou as tabelas são sistemas de representação diferentes entre si e aprendizagens específicas.

2) Diferenciação entre representante e representado: é associada à compreensão do que uma representação representa, associando a ela outras representações e integrando-a no processo de tratamento.

3) Coordenação entre os diferentes registros: o conhecimento de regras de correspondência entre dois sistemas semióticos não é suficiente para que possam juntos ser utilizados e mobilizados (DUVAL, 2009, p.37-38).

Quanto aos sistemas semióticos o autor descreve que devem permitir o cumprimento de três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

> Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. [...] a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem essas atividades. Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunica-las a um interlocutor. (DUVAL, p.36-37).

O autor ainda descreve a classificação dos sistemas semióticos em três linguagens: natural, simbólica e figural:

> Muitas vezes queremos ser capazes de distinguir entre os diferentes sistemas semióticos e, assim, fazermos uma distinção entre a língua que falamos e escrevemos usando palavras e, por exemplo, notação algébrica. Outra distinção torna-se necessária quando se consideram as diferenças entre usos matemáticos e não-matemáticos do mesmo sistema semiótico. A necessidade de fazer essas distinções levou a proliferação de expressões como "linguagem natural", "linguagem verbal", "linguagem cotidiana", etc, utilizadas de maneiras que não são definidas com precisão (Id., 2005, p.790, **tradução nossa)**[24].

[24] we often want to be able to distinguish between the various semiotic systems and thus make a distinction between the language that we speak and write using words and, for example, algebraic notation. Further distinction becomes necessary when considering the differences between mathematical and non-mathematical uses of the same semiotic system. The need to make these distinctions has led to proliferation of expressions such as ‘natural language’, ‘verbal language’, ‘everyday language’, etc., used in ways that are not precisely defined (DUVAL,2005, p.790).

Vale destacar que as questões sobre tratamento, representante, representado e registros de representação serão abordados com mais detalhes ainda neste capítulo.

O autor deixa claro que a introdução de um novo procedimento ou conhecimento relacionados com a aprendizagem da matemática aparecem logo após algumas semanas de aula, ou até mesmo em uma única aula – essas são as dificuldades locais. Durante um ano, ciclo ou currículo surgem as dificuldades globais – aquelas que estão integradas ao raciocínio, à visualização gráfica e à geométrica, bem como à resolução de problemas (DUVAL, 2011).

O autor aponta que as dificuldades globais se confundem com as locais. Além do mais, afirma que precisamos nos questionar sobre o que é conhecimento matemático e o que se pode ter de diferente em relação a outros tipos de conhecimentos. Para ele, esses aspectos são de ordem cognitiva e epistemológica sendo que “a análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso por nós mesmos” (Ibid., p.15).

A questão descrita pelo autor: “Como podemos ter acesso por nós mesmos?” É essencial tanto para a formação quanto para a aprendizagem matemática – compreensão - “em matemática, ela não pode se reduzir aos elementos de prova e justificação”. Essa questão trata dos processos cognitivos que são mobilizados em qualquer ação do pensamento matemático. Nesse contexto, cabe apresentar outras indagações: Como entender as dificuldades que muitos estudantes têm na compreensão de situações-problema matemáticos? Qual a natureza dessa não compreensão?

Para Duval (2003, p.11-12) as respostas dessas questões não devem ser limitadas ao campo matemático nem a epistemologia, pois na sua descrição transcreve que:

> É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em

> decimais, neste ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em matemática, o autor apresenta duas questões:

> 1.Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos? 2. Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia, astronomia, física, biologia...) e práticos, ou ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? (DUVAL, 2003, p.12).

O autor continua descrevendo que essas questões levam a considerar que os sistemas semióticos deveriam estar associados a modelos da arquitetura cognitiva dos indivíduos, como estruturas fundamentais do funcionamento do pensamento, assim como o meio em que a totalidade das organizações neurais autoriza a associação de vários dados sensoriais, o controle de atenção e o funcionamento de distintas memórias.

E em função disso, o autor apresenta quatro ideias fundamentais:

> 1. O desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representação - tratamento - e de objetivação consciente para o sujeito. Um dos “cacifes” da formação inicial é a apropriação e o domínio desses sistemas.
>
> 2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial, o progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.
>
> 3. Certas vantagens cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas.
>
> 4. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos, visar a esse desenvolvimento sem se fixar de forma míope sobre a aquisição de tal noção particular e provavelmente o aporte maior que se pode esperar da aprendizagem matemática para a sua educação (Ibid., p.29-30).

Quanto ao questionamento de que os sistemas cognitivos são os únicos mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos, ele afirma:

> [...] a atividade matemática deve ser estudada naquilo que ela tem de específico, quer dizer, naquilo que ela tem de diferente do trabalho de um botânico ou de um geólogo, ou daquele de um físico no seu laboratório. E a utilização de um modelo comum para a aquisição de todos os conhecimentos, matemáticos e não matemáticos, arrisca ser tão pouco pertinente e pouco operatória para esclarecer os problemas de aprendizagem em matemática (DUVAL, 2003, p.23).

Levando em consideração os temas apresentados neste tópico, entende-se relevante explicar a diferença entre representação e registro de representação nos termos de Duval.

2.3 A Representação

O primeiro esquema de análise do conhecimento se desenvolveu segundo Duval (2011, p.16-18) com base na “oposição epistemológica entre a representação de um objeto e o objeto representado”. O autor afirma que o conhecimento nasce quando não empregamos as representações do objeto no lugar do objeto, dessa forma, questiona: “quando acreditamos estar na presença de um objeto, trata-se do próprio objeto ou de uma representação? Há várias representações para um objeto, cabe mencionar a multiplicação das representações possíveis de um mesmo objeto que pode ser:

a) Multiplicação indefinida das representações de mesmo tipo, por exemplo, “as imagens produzidas por reflexão da luz sobre uma superfície variam com o ângulo de incidência, com a forma da superfície etc.
b) A diversidade de tipos de representações – Platão (Republique X, 596-598) já se referia às representações denominadas “imitações”, isto é, as representações intencionais de um modelo como os quadros dos pintores.
c) Representações obtidas com instrumentos científicos: luneta astronômica, microscópio, osciloscópio etc.

d) As representações construídas na matemática: figuras geométricas, representações gráficas, equações etc.
e) As representações não observáveis: lembranças visuais de faces encontradas, sonhos etc.

Diante desses tipos de representações, o autor trata do signo e da representação como uma linha divisória cognitiva. A questão será apresentada no item a seguir.

2.3.1 Signo e representação

A noção de signo surgiu da análise da expressão verbal – o discurso - que se inicia no interesse pela forma em que uma expressão verbal significa qualquer coisa a alguém, sendo que a expressão verbal apresenta duas faces diferentes: o locutor e o interlocutor. O interlocutor tem somente “as palavras que ele escutou pronunciar para compreender o que o locutor queria lhe dizer”, por sua vez, o locutor, “presta pouca atenção na precisão do que diz, como também ele não distingue as coisas que visa intencionalmente” (DUVAL, 2011, p.21). Dessa forma, essa é a primeira característica dos signos que resulta dessa dualidade das expressões verbais.

Nessas condições, o que comunica a dualidade de toda expressão verbal como produção intencional é a diferença entre a significante e significado e o autor afirma que a relação dos signos com as coisas que eles significam é uma relação de referência e não de causalidade.

A natureza de uma relação de referência é descrita da seguinte maneira pelo autor:

> Não é somente o sentido das palavras na língua que permite ao ouvinte ou ao leitor compreender a relação da expressão verbal com o objeto que ele descreve ou define, mas é o emprego intencional que o locutor faz desse objeto. Ora, essa utilização intencional se realiza pelas operações de designação. Assim, quando falamos sobre um elemento de uma figura geométrica <<o centro de um círculo>>, ou <<a metade de um segmento que é um diâmetro>> ou <<Seja O o ponto...>>! Isso permite esclarecer o que constitui a natureza de uma relação de referência (Ibid., p.22).

Todas as observações relacionadas aos fenômenos de representação, aos signos e seus papeis, podem ser apresentadas nas conclusões seguintes:

a) As representações são de modo epistemológico ambivalentes, uma vez que há dois aspectos distintos: (1) não confundir as representações com os objetos; (2) as representações são continuamente necessárias, para que tenhamos acesso aos objetos, em razão a sua diversidade. Isso porque as representações estão no lugar dos objetos ou porque elas os evocam, quando os mesmos não são prontamente acessíveis (DUVAL, 2011).

b) Os signos são representações e não podem ser confundidos com aqueles objetos que eles fazem referência.

> É por isso que os signos são definidos por sua característica comum com as representações, como podemos ver nesta definição que se tornou clássica:<<o signo é uma coisa que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa...>> (Ibid., p.23).

c) Os signos possuem uma relação de referência com os objetos, sendo diferente da relação das representações com os próprios objetos, que é uma relação de causalidade.

> E é isso que vai fazer a diferença entre as forças cognitivas das produções intencionais produzidas nos sistemas de signos (palavras, símbolos, traçados gráficos) e as forças cognitivas das representações produzidas dos sistemas físicos (Ibidem.).

d) Os signos não têm nenhuma função na relação objeto e representação, uma vez que a totalidade dos modelos cognitivos que foram retirados dessa análise do conhecimento, contempla as representações produzidas casualmente. O autor também aborda que:

> Os processos de abstração e esquematização que “se inscrevem no conjunto das faculdades ou dos sistemas constituindo o sujeito do conhecedor (o sentido, a memória, a imaginação, o entendimento, a razão), escapam em grande parte de uma produção intencional e controlada do sujeito” (Ibidem., p.24).

Observa-se pouco o papel central das representações e dos signos no conhecimento e em seu desenvolvimento, devido à transparência do que eles representam. Na atividade de conhecimento, eles cumprem uma função comum que é “se colocar no lugar de” o que eles “representam ou designam e surgem da mesma exigência epistemológica fundamental que é de jamais se confundirem com os próprios objetos" (DUVAL, 2011, p. 37).

O autor ainda afirma que a separação entre as representações e os signos ocorre pela natureza da relação com os próprios objetos. A relação entre os signos e os objetos dependem do sistema semiótico utilizado, a língua, um sistema de numeração etc. Em resumo, os signos são caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, os gestos de mão, 1 e não 0, branco e não preto ou azul. Os signos são coisas pelas quais é preciso começar para dar um sentido. O signo reenvia a outro(s) signo(s) um sistema que determina possiblidades de utilização, funcionamento e interpretação e esse sistema são os códigos (Ibid.).

2.3.2 Os códigos e os registros de representação

Os registros de representação e os códigos são sistemas semióticos diferentes, sendo que os registros são sistemas cognitivos, produtores e criadores de representações sempre novas que permite descobrir novos objetos, como por exemplo, as representações gráficas permitem criar outros tipos de curvas algébricas (Ibidem.). Desta forma, o conteúdo das representações produzidas por um registro apresenta duas propriedades: (1) um objetivo – as representações semióticas cumprem uma função cognitiva. (2) um *continuum* de sentido – permite passar de um tipo de representação a outro, assim, "os enunciados, as configurações geométricas, os esquemas, as fórmulas são produções cujo conteúdo chama a atenção sobre um objeto, mesmo que elas pareçam explicitá-lo, não devem ser confundidas com o objeto representado" (Ibidem., p.72).

O autor ainda descreve que os códigos são sistemas que substituem a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão (numérico, analógico, visual, auditivo etc.). Produzem sequência de signos ou caracteres homogêneos, sendo que o comprimento é tão rápido que excede a capacidade de apreensão imediata e de memorização, mais não remetem a nada e não representam nada. Por exemplo, "os sistemas de escrita são códigos, mas sua particularidade é a de se fundir seja com a produção fonética de uma língua (alfabetos), seja com as ideias que a língua permite produzir vocalmente (ideograma). Fusão só funciona quando ela se torna automática ou espontânea" (DUVAL, 2011, p.72).

Desta forma a diferença entre registro e código é que os registros abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas, o que os códigos não permitem. O autor destaca que:

> O conhecimento matemático não começa com as representações. Essas transformações são as operações semióticas e um registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas. Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. As operações semióticas próprias aos diferentes registros utilizados na matemática constituem os gestos intelectuais necessários e não importa qual atividade matemática (Ibid., p.73).

Para o autor são essas transformações que contribuem para o surgimento de novas representações e, consequentemente, para a produção de outros conhecimentos.

2.4 A revolução semiótica e seus registros de representação

A revolução semiótica se manifestou com a emergência e a rápida predominância das equações em álgebra, das fórmulas em física e das representações gráficas permitindo explorar as novas curvas como curvas mecânicas, sendo assim, a criação de um simbolismo que constitui "a língua dos cálculos" e marca uma nova etapa no desenvolvimento do pensamento matemático (Ibidem., p. 24-37). A introdução das letras no lugar das grandezas e dos números faz surgir, pela primeira vez, "a questão do papel dos signos no pensamento matemático", como vistos nos trabalhos de Newton, Leibniz, Descartes e outros.

O autor ainda afirma que as representações semióticas apresentam duas características não encontradas nos signos: (1) organização interna que varia de um tipo de representação para outra, ou seja, a representação de uma frase simples não é o mesmo de uma equação, a representação interna de uma representação gráfica não é a de uma figura geométrica ou de um esquema. (2) não importa qual representação semiótica, existem sempre várias maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização – isso é evidente para as frases e para as equações – as unidades de sentido verdadeiras não são as unidades separadas por brancos (as palavras, os símbolos), mais os agrupamentos de unidades que têm um sentido diferente das unidades reagrupadas.

Em resumo, para Duval (2011) as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou traços. Ele defende também a importância das representações semióticas não apenas para expressar o que foi aprendido, mas para aprender o que ainda não se sabe e também afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação e não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação (Id., 2003, 2009).

Duval (2003) ressalta que a noção de representação semiótica surgiu com um problema de modelização da linguagem (Chomsky, Peirce etc). A especificidade das representações semióticas consite em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em um outro sistema, podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. O autor afirma que:

> A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma “mudança de forma”. Traçar a curva correspondente a uma equação do segundo grau, ou passar do enunciado de uma relação à escritura literal dessa relação consistiria em “mudar a forma pela qual um conhecimento é representado” (p.32-33).

Em resumo, para Duval (2009) as representações semióticas ocupam do papel de comunicação, bem como das atribuições primordiais de tratamento de informação e a função de objetivação ou de tomada de consciência. Nas representações semióticas há um suporte para as representações mentais estimulando espontaneamente a dualidade entre a forma (o representante) e o conteúdo (o representado). Para um sistema semiótico ser reconhecido como um registro de representação, ele deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose[25], que são: formação de representação identificável, tratamento e conversão (DUVAL, 1993).

A seguir essas três atividades serão descritas com mais detalhes.

2.4.1 Representação identificável, tratamento e conversão

As **formações de representações identificáveis** são as funções das unidades e das regras de formação que são próprias ao registro semiótico em qualquer representação que é produzida. Essas formações devem respeitar as seguintes regras: as condições de identificação e de reconhecimento da representação, bem como a possibilidade de sua utilização pelos tratamentos (Ibid.). Essas são regras de conformidade que não implicam a competência para formar as representações, mas somente para reconhecê-las. O autor ainda destaca que:

> A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível em uma língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula... Essa formação implica uma seleção de traços e de dados no conteúdo da representação (Ibidem., p.41, tradução nossa)[26].

Os **tratamentos de uma representação** de acordo com Duval (2009) são transformações dessa representação no próprio registro, no qual ele foi formado, ou seja, é uma transformação interna a um registro. O autor ainda define que:

> A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: esta é uma das numerosas operações que dão ao registro das figuras seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica à toda representação figural (DUVAL, op. cit. p. 41, tradução nossa).[27]

---

[25] Termo introduzido por Charles Sanders Peirce para designar significação e significados.

[26] la formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné: énonciation d'une phrase (compréhensible dans une langue naturelle donnée), composition d'un texte, dessin d'une figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule… Cette formation implique une *sélection* de traits et de données dans le contenu à représenter (DUVAL, 1993, p.41).

[27]la paraphrase et l'inférence sont des formes de traitement en langue naturelle. Le calcul est une forme de traitement propre aux écritures symboliques (calcul numérique, calcul algébrique, calcul propositionnel...). La reconfiguration est un type de traitement particulier pour les figures géométriques: c'est l'une des nombreuses opérations qui donne au registre des figures son rôle

A **conversão de uma representação** para Duval (2009) é a transformação dessa em uma representação em outro registro, conservando a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma transformação externa ao registro de partida.

Para o autor somente mediante as duas condições que a aplicação da conversão, como instrumento pode ser feita:

> Dar-se a representação a mais elementar possível, R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B;
> Proceder a todas as variações possíveis de $R_{1\ldots}$ R_n que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R'_1 no registro de chegada B. (Fazer, assim, variar uma representação no registro de saída corresponde ao princípio de análise estrutural utilizado pelos linguistas desde Saussure.) As representações $R_{1\ldots}$ R_n do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante R'_i no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada (Id., 2003, p. 25).

Duval (1993) afirma que a conversão não deve ser confundida com duas atividades que são, particularmente, próximas: a codificação e a interpretação. Ele ainda afirma que:

> A atividade de conversão de uma representação, pode, frequentemente, parecer estar intimamente ligada a uma interpretação ou a uma codificação, ela é irredutível a elas, porque, por um lado, ela não se funda em qualquer analogia como no caso da interpretação, e que, por outro lado, a conversão não pode obtida pela aplicação de regras de codificação. Não existem e não podem ser regras de conversão como existem regras de conformidade e regras de tratamento (Ibid., p.43, tradução nossa)[28].

O autor cita que a conversão é uma atividade cognitiva distinta e independente da atividade de tratamento e destaca como exemplo a adição de dois números com sua escrita decimal, fracionária e com expoente. Segundo ele são três registros distintos de representação dos números.

---

heuristique. L'anamorphose est une forme de traitement qui s'applique à toute représentation figurale (DUVAL, 1993, p.41).

[28] l'activité de conversion d'une représentation puisse souvent paraître être étroitement liée à une interprétation ou à un codage, elle leur est irréductible, parce que d'une part elle ne se fonde sur aucune analogie comme dans le cas de l'interprétation et que, d'autre part, la conversion ne peut être obtenue par l'application de règles de codage. Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement (DUVAL,1993, p. 43).

> [...] o significado operatório não é o mesmo para 0,25, para ¼, e para 25.10^{-2}. Porque não são os mesmos procedimentos de tratamento que permitem efetuar as três adições seguintes:
> $0,25+0,25=0,5$
> $¼+1/4=1/2$
> $25.10^{-2}+25.10^{-2}=50.10^{-2}$ (DUVAL, 2009, p.60).

Para justificar a escolha do termo, ele salienta que:

> Não se refere somente à maneira de qualificar uma classe particular de processos, mas também à maneira de a situar entre os outros tipos de processos cognitivos que permitem o exercício do pensamento e o desenvolvimento do conhecimento: processo periférico ou processo central, condição ou consequência, etc. Aqui não vamos somente do termo a um conceito, mas do termo a um modelo ou a uma teoria. Essas são as razões da escolha desse termo <<conversão>>, para qualificar a passagem de um tipo de representação a um outro, assim que as questões e as perspectivas dessa escolha para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento [...] (Id., 2007, p. 10, tradução nossa)[29].

Neste contexto, apresenta o exemplo matemático de conversão: "a colocação em equação dos dados de um enunciado do problema é a conversão de diferentes expressões linguísticas de relações em outras expressões dessas relações no registro de uma escrita simbólica", portanto, essa conversão está na transformação do registro em língua natural para o registro algébrico (DUVAL, op. cit. p.59).

2.4.2 Tipos de registros de representação semiótica aplicados na matemática

A individualidade da atividade matemática se encontra na mobilização concomitante de, no mínimo, dois registros de representação ao mesmo tempo ou na viabilidade de mudar de registro de representação a todo instante (Id., 2003). O autor ainda descreve que:

> Certamente, segundo os domínios ou as fases da pesquisa, em uma resolução de problema um registro pode aparecer explicitamente privilegiado, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro. Podemos, então, antecipar a hipótese, ou, em linguagem matemática, "conjecturar" o seguinte: a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas (Ibid., p. 15).

---

[29] le choix d'un mot ne renvoie pas seulement à la manière de qualifier une classe particulière de processus, mais aussi à la manière de la situer parmi les autres types de processus cognitifs qui permettent l'exercice de la pensée et le développement de la connaissance: processus périphérique ou processus central, condition ou conséquence, etc. Ici on ne va pas seulement du mot au concept, mais du mot à un modèle ou à une théorie. Ce sont les raisons du choix de ce mot <<conversion>>, pour qualifier le passage d'un type de représentation à un autre, ainsi que les questions et les perspectives de ce choix pour analyse du fonctionnement cognitive de la pensée [...] (DUVAL, 2007, p.10).

O autor também afirma que:

> a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo [...] É por isso que a conversão não chama a atenção, como se tratasse somente de uma atividade lateral, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão(...). De acordo com essas ideias, o ato da conversão seria uma das formas mais simples de tratamento, pois seria suficiente aplicar regras de correspondência para “traduzir”. Assim, passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou, ainda, passar de uma expressão em português*- como “o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa” – à escrita simbólica – no caso, “y >yx” – seria igualmente uma codificação, como toda a escrita literal de relações entre os números (DUVAL, 2011, p. 16-17).

O autor ainda entende que:

> há, por trás da aplicação de uma regra de codificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. A conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento (Id., 2003, p. 17).

Na concepção de Duval (op. cit.) a conversão das representações pode ou não ter passagens entre registro monofuncional e registro multifuncional. Na Figura 1apresenta os tipos de transformação de representações que fazem parte da atividade matemática – as operações próprias de cada registro e a variedade de tipos de conversão.

Figura 1: Tipos de registros de representação semiótica no funcionamento matemático

	Registros DISCURSIVOS Linearidade fundamentada na sucessão para a produção das expressões	Registros NÃO DISCURSIVOS Apreensão simultânea de uma organização bidimensional
Registros MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos são não algoritmizáveis	As LINGUAS: **três operações hierarquicamente incluídas** (designação de objetos, enunciação e raciocínio) Duas modalidades de produção oral/escrita	ICÔNICA: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas características das partes do objeto. CONFIGURAÇÃO GEOMÉTRICA: **três operações independentes** (construção instrumental, divisão e reconfiguração merológicas, desconstrução dimensional das formas).
	Representações AUXILIARES TRANSITÓRIAS para as **operações livres ou externas**	
Registros MONOFUNCIONAIS: as transformações de expressões são **algoritmizáveis**	AS ESCRITAS SIMBÓLICAS para as **operações de substituições ilimitadas** (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais) Uma modalidade de produção: escrita	Junção entre os pontos ou nós, e orientação marcada por flechas. GRÁFICOS CARTESIANOS: **operação de zoom, interpolação, mudança de eixos.** ESQUEMAS

Fonte: DUVAL, 2011, p.118

A Figura 1 apresenta segundo Duval (2011) a distância cognitiva que separa as representações de dois registros diferentes e que não é a mesma segundo os pares de registros.

O autor descrever que os registros são multifuncionais e monofuncionais, sendo que os registros monofuncionais as transformações de expressões são algoritmizáveis e, por outro lado, os registros multifuncionais os tratamentos são não algoritmizáveis, nas funções de comunicação, de objetivação e "não primeiramente, ou mesmo raramente, para uma função de tratamento e isto é absolutamente evidente para a linguagem matemática" (Ibid., p.117). Há duas práticas radicais da linguagem no ensino da matemática e, embora o autor não apresente claramente essas práticas, entende-se que ele está se referindo aos registros multifuncionais e monofuncionais.

Ele também esclarece em sua obra que “para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único”, pois, segundo o autor existe diferenciação entre as conversões diretas e as inversas entre dois registros e o aluno converter em um sentido não significa que possa fazê-lo no sentindo inverso (DUVAL, 2011, p.118).

Ao tratar da representação identificável, do tratamento, da conversão, bem como dos diferentes tipos de registros de representação semiótica na matemática, considera-se relevante explorar a congruência e a não congruência da conversão.

2.5 Congruência e não congruência na conversão

Em qualquer operação de conversão, observa-se que surge a característica cognitiva, específica da atividade de conversão, bem como nos dois tipos de fenômenos: congruência e não congruência; além da heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. A possibilidade de não congruência e a heterogeneidade dos sentidos de conversão caracterizam a conversão de registros de representação. O autor escreve que:

> Para analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada. Esquematicamente, duas situações podem ocorrer. Ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – diz então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência (Id., 2003, p.19).

Na perspectiva de Duval (op. cit. p. 121) “a variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos enunciados do problema para os alunos”. O autor destaca que os problemas matemáticos não deveriam ser apresentados por meio de enunciados, mas com base em situações de jogos para os alunos se apropriarem com mais facilidade. As variações de congruência e não congruência estão entre o material e o registro semiótico mobilizado. O autor destaca que:

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. Falando de outra maneira, o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática, ocorre no caso dos monoregistros. Existe como um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (DUVAL, 2003, p.21).

A diferença entre sentido e referência está rigorosamente vinculada ao princípio de substituição, pois segundo a autor é fundamental nos processos de dedução ou de cálculo, uma vez que "duas expressões, com a mesma referência, podem ser trocadas uma pela outra, em uma frase ou em uma fórmula, sem que o valor da verdade mude" (Id.,1988, p. 7).

O autor continua a descrever que a diferença entre o sentido e referência é uma das mais produtivas em todas as esferas nas quais a relação às ideias e aos conceitos realiza-se por meio do controle de signos, de expressões ou de símbolos, pois, relata que "ela levou à separação do significado, que depende do registro de descrição escolhido, e da referência, que depende dos objetos expressos ou representados (Ibidem, tradução nossa).[30]

De acordo com a perspectiva da constituição objetiva do saber, o autor trabalha em relação à referência, à substituição, que permite o desenvolvimento da demonstração e do cálculo, entretanto, conforme perspectiva da apropriação subjetiva do saber matemático, a substituição faz-se inicialmente em função do sentido associativo interno, conforme a abordagem de Duval (1988, p. 8), "tudo depende então do que chamamos **congruência** ou **não congruência semântica das expressões a substituir** (tradução nossa) (grifo do autor).[31]

---

[30] elle a conduit à bien séparer la signification, laquelle dépend du registre de description choisi, et la référence, laquelle dépend des objets exprimés ou représentés" (DUVAL, 1988, p.7).
[31] tout dépend alors de ce que nous appellerons la **congruence** ou la **non congruence sémantiques des expressions à substituer"** (DUVAL, 1988, p.8) (grifo do autor).

Para Duval (1988) há duas relações independentes para serem levadas em consideração entre as duas expressões ou duas apresentações de uma mesma informação, que são: a) a relação de equivalência referencial e b) a relação de congruência semântica. Ele argumenta que, o matemático examina a equivalência referencial de modo prioritário, de tal sorte que, geralmente, está de acordo com uma condição indispensável, para que faça sentido seu pensamento natural, como: a continuidade associativa e semântica em meio às expressões que serão substituídas.

O autor destaca que, muitos indivíduos, nos processos de aprendizagem, levam em consideração a congruência semântica gerando um obstáculo, uma vez que é a equivalência referencial que deveria ser colocada em xeque no ensino da matemática. Ele cita que:

> Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos na aprendizagem de matemática está ligado ao fato de que a equivalência referencial se destaca da congruência semântica e, no entanto, o funcionamento espontâneo do pensamento segue prioritariamente a congruência semântica (Ibid., p.9, tradução nossa)[32].

Dessa forma, não garante que a equivalência referencial seja uma razão satisfatória para agrupar em uma única rede semântica e, com maior razão ainda, para afiançar o destaque instantâneo da substituição de uma expressão por outra não congruente (Ibidem.). O autor destaca que muitos indivíduos que frequentam distintos níveis, bem como distintos domínios da aprendizagem matemática, encontram esta dificuldade, que a torna ainda mais importante, uma vez que não é clara e nem sistematicamente considerada no ensino.

Outro destaque é que os professores têm a tendência da escolha de problemas em que as conversões a realizar sejam congruentes e a reservar para as aulas de pesquisa com alunos mais avançados os problemas com conversões que sejam não congruentes, sobre isto o autor descreve que:

> [...] não tiveram essa variável didática explicitamente na cabeça, eles propõem sempre problemas que exigem as conversões não congruentes para os alunos que já têm dificuldades. Na realidade é a prática da apresentação e da utilização da resolução de problemas que deve ser

[32] Un des obstacles rencontrés par beaucoup d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique (DUVAL, 1988, p. 9).

> questionada novamente. No lugar de apresentar cada problema por ele mesmo, independentemente dos outros, é toda uma gama de apresentações possíveis, ordenadas segundo as variações de congruência e não congruência sobre as quais os alunos deveriam trabalhar para discutir e tomar consciência (DUVAL, 2011, p.122).

O autor apresenta em sua obra uma síntese para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento matemático descrito da seguinte maneira:

> - Existe um funcionamento semiótico específico para cada registro de representação.
> - Na passagem de um registro a outro é preciso desenvolver uma coordenação sinérgica entre pelo menos dois registros.
> - A compreensão dos "conceitos matemáticos", difere da compreensão dos conceitos nas outras disciplinas e pressupõe a coordenação sinérgica entre pelo menos dois registros (Ibid., p.124).

Ele ainda destaca que os indivíduos não podem encontrar problemas de congruência sempre que a associação externa dos signos ou dos símbolos depende do jogo da associação interna (Id., 1988), entretanto, destaca que os problemas de congruência promovem um novo acesso ao tema: linguagem matemática.

Dessa forma afirma que:

> Os fenômenos de não congruência são mais numerosos que os fenômenos de congruência. É isso que faz a riqueza criadora da diversidade de registros. Eles não são previsíveis, mas devem ser estudados caso a caso, para cada atividade ou cada problema que propomos (DUVAL, op. cit. p. 124).

Diante do que foi exposto apresentar-se-á o Quadro 9 que apresenta a síntese das palavras-chave da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval.

Quadro 9: Síntese da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval

Registro de Representação Semiótica	**Signos**	**Códigos**	**Registros de Representação**	**Representação Semiótica**
Fornecem graus de liberdade ao sujeito para objetivar ideias confusas, explorar informações ou	Surgiu da análise da expressão verbal – o discurso - que se inicia no interesse pela forma no qual uma expressão verbal significa	Os códigos são sistemas que substituem a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão (numérico,	A matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento	Há várias representações para um objeto, cabe mencionar a multiplicação das representações

comunicar a um interlocutor. A linguagem natural e as línguas simbólicas não são formadoras de um só e mesmo registro. Uma representação representa, associando a ela outras representações e integrando-a no processo de tratamento. Dois sistemas semióticos não são suficientes para juntos serem utilizados e mobilizados. Os sistemas semióticos classificam-se em linguagem natural, simbólica e figural. O progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. As representações semióticas cumprem uma função cognitiva.	qualquer coisa a alguém - o locutor e o interlocutor. O signo é uma coisa que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa. Os signos (palavras, símbolos, traçados gráficos) possuem uma relação de referência com os objetos. Os signos são representações e não podem ser confundidos com aqueles objetos que eles fazem referência. A relação entre os signos e os objetos dependem do sistema semiótico utilizado: a língua, um sistema de numeração etc. A introdução das letras no lugar das grandezas e dos números faz surgir, pela primeira vez, a questão do papel dos signos no pensamento matemático. Os signos são caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, palavras-chave, os gestos de mão, 1 e não 0, branco e não preto ou azul. Os signos são coisas pelas quais é preciso começar para dar um sentido.	analógico, visual, auditivo etc.). Os códigos não abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas. Os sistemas de escrita são códigos, mas sua particularidade é a de se fundir seja com a produção fonética de uma língua (alfabetos), seja com as ideias que a língua permite produzir vocalmente (ideograma).	das capacidades cognitivas globais dos indivíduos, Os registros são sistemas cognitivos, produtores e criadores de representações sempre novas que permite descobrir novos objetos, como por exemplo, as representações gráficas permitem criar outros tipos de curvas algébricas. Os registros abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas. O registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas. Mudar de registro de representação não é só mudar o conteúdo da representação de um objeto, é mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação. O tratamento (operação) é uma transformação interna a um registro. A conversão (passagem) é uma transformação externa ao registro de partida – dois tipos de fenômenos: congruência e não congruência. A individualidade da atividade matemática se encontra na mobilização concomitante de, no mínimo, dois registros de representação ao mesmo tempo. Os registros discursivos são as línguas naturais e formais ou as escritas simbólicas vindas do	possíveis de um mesmo objeto que pode ser: As figuras geométricas, os gráficos cartesianos ou as tabelas são sistemas de representação diferentes entre si. A relação é de casualidade entre as representações e os objetos. Nas representações semióticas a organização interna varia de um tipo de representação para outra - a representação de uma frase simples não é o mesmo de uma equação. Não importa qual é a representação semiótica, existem sempre várias maneiras de distinguir as unidades de sentido ou os níveis de organização – isso é evidente para as frases e para as equações. As representações são classificadas em mental, interna/computacional e semiótica.

			mesmo tipo de representação. Os registros não discursivos são as imagens, as figuras geométricas (sem nenhuma codificação), os gráficos cartesianos ou os esquemas cuja origem seja do mesmo tipo de representação visual. Cada registro apoia um tipo de transformação das representações que os outros registros não autorizam e que são as operações próprias desse registro. Os registros os registros monofuncionais são específicos da matemática e, por outro lado, os registros multifuncionais são aplicados fora do contexto matemático, nas funções de comunicação, de objetivação. Para que haja coordenação sinérgica de vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos e não em um único.	

Fonte: DUVAL, 1998, 1993,1995, 2003, 2004, 2005, 2007, 2011, adaptado

Finalizar este capítulo com o Quadro 9 que mostra uma síntese das expressões relevantes da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval e uma conexão entre elas, entende-se que as análises da teoria com a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores converge, diverge e traz complementaridade no processo de ensino e aprendizagem na matemática. No próximo capítulo serão apresentados o procedimento metodológico da pesquisa e as análises dos dados.

CAPÍTULO III

Procedimento Metodológico e Análise dos dados

O objetivo deste capítulo é apresentar o referencial metodológico, bem como descrever os detalhes dos procedimentos do método desenvolvido na pesquisa e as análises dos dados

3.1 Pesquisa Qualitativa

A presente pesquisa é de abordagem qualitativa que segundo Javaroni, Santos e Borba (2011, p.198) é aquela em que “a maior preocupação do pesquisador não deve ser com a representatividade numérica de um grupo pesquisado, pelo contrário, nela o pesquisador busca um aprofundamento da compreensão de alguns aspectos desse grupo”, sendo que nesse tipo de investigação a pesquisa encontra-se nas relações que tem significado para o pesquisador.

Outra questão não menos importante que corrobora e justifica a pesquisa ser qualitativa é que:

> Uma pesquisa de caráter qualitativo é descritiva, sendo que palavras e/ou imagens são mais adequadas à descrição do que os números. São comuns na apresentação dos resultados, excertos retirados dos dados, de forma a “ilustrar e substanciar a apresentação”, procurando respeitar a forma pela qual foram obtidos. Os relatórios resultantes podem desta maneira, surgir de forma minuciosa, considerando que nenhuma visão de mundo pode ser reduzida à trivialidade e nenhum detalhe é vazio de significado(OLIVEIRA, 2007, p.30).

Observa-se na obra de Borba (2004, p.3) algumas definições da pesquisa qualitativa. O autor descreve que:

> Desta forma, quando falo de pesquisa qualitativa, estou falando de uma forma de conhecer o mundo que se materializa fundamentalmente através dos procedimentos conhecidos como qualitativos, que entende que o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas do momento.

> Como já dizia Paulo Freire: da escolha da pergunta de pesquisa já é em si um ato embebido de subjetividade.

O foco deste estudo, na abordagem qualitativa, implica conforme afirmam os autores supracitados numa ênfase sobre as qualidades dos processos e significados, enfatizando os valores da investigação e de materiais analisados (textos, documentos, produções científicas, etc.) descrevendo assim, os resultados das análises quanto à problemática e aos objetivos da pesquisa.

3.2 Pesquisa Bibliográfica

A pesquisa em questão é bibliográfica que conforme Leite (2008) é o tipo de pesquisa muito utilizada entre os pesquisadores, por ter como fonte os livros, os documentos existentes na Biblioteca. Daí seu nome de Bíblia (livro) mais grafia (discurso, escrita). O autor descreve que:

> A pesquisa bibliográfica é a realizada através do uso de livros e de documentos existentes na Biblioteca. É a pesquisa cujos dados e informações são coletados em obras já existentes e servem de base para a análise e a interpretação dos mesmos, formando um novo trabalho científico. A pesquisa bibliográfica é fundamental, pois além de ser autônoma, isto é, independente das outras, serve de base, de alicerce para o fundamento e alcance dos objetivos dos outros tipos de pesquisa (Ibid., p.47).

Fachin (2006, p.104) traz que a pesquisa bibliográfica tem um importante objetivo de “conduzir o leitor a determinado assunto e à produção, à coleção, ao armazenamento, à reprodução, à utilização e à comunicação das informações coletadas para o desempenho de uma pesquisa específica”. As técnicas mais importantes desse tipo de pesquisa são: o levantamento documental, a seleção bibliográfica, a leitura e o fichário.

Dessa forma, a presente pesquisa é do tipo bibliográfica pois, teve como objetivo proposto a aplicação da leitura dos objetos de estudo abrangendo análises e interpretações das obras dos autores em questão, a fim de proporcionar o diálogo entre ambos.

3.3 Metodologia Teoria Fundamentada

Entre a abordagem qualitativa e o tipo bibliográfico, a pesquisa aqui assume as bases da metodologia denominada Teoria Fundamentada – inicialmente proposta pelos sociólogos Glaser e Strauss (1967) no livro *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research.* Essa teoria fundamentada é uma metodologia aplicável tanto a estudos qualitativos quanto a quantitativos. Nesse sentido, Glaser e Strauss (1967, p.17) afirmam que “toda forma de dados é útil tanto para verificação quanto para a geração de teorias, qualquer que seja a ênfase [...]”.

Segundo Strauss e Corbin (1997) é uma metodologia indutiva que se aproxima do assunto a ser investigado sem uma teoria a ser testada. Usada no desenvolvimento de uma teoria fundada em dados sistematicamente coletados e analisados, a teoria evolui durante a pesquisa real e isso ocorre devida à contínua interação entre análise e coleta de dados. Os autores Glaser e Strauss (op. cit.) destacam que o pesquisador analisa os dados de modo a entender determinada situação e como e por que seus participantes agem de determinada maneira, como e por que determinado fenômeno ou situação se desdobra dessa ou daquela maneira.

Nessa perspectiva, Gasque (2007) destaca que a teoria é aquilo com que o pesquisador encerra seu trabalho e não como o principia. Não é aquilo que vai ser testado, mas o que se conclui depois de uma pesquisa e da análise comparativa dos dados dela resultantes, assim, por ser um método geral de análise comparativa constante, a teoria fundamentada é citada frequentemente como método comparativo.

Essa discussão é abordada por Fragoso, Recuero e Amaral (2011) explicitando que uma das vantagens da teoria fundamentada é o fato de valorizar o contato do pesquisador com o objeto e estimular a criação de uma sensibilidade para os dados. Experimentar o campo empírico permite ao pesquisador também observar os novos elementos e construir suas percepções por meio da análise e reflexão sistemáticas dos dados encontrados em campo.

3.3.1 Etapas da Teoria Fundamentada

O processo de pesquisa na Teoria Fundamentada apresenta uma interdependência e encadeamento circular das partes em que as atividades ocorrem simultaneamente. Nesse processo, incluem-se três etapas principais: a **amostragem teórica**, **a codificação** e a **redação da teoria**.

Amostragem teórica: refere-se ao processo de coleta de dados para a geração da teoria. Glaser e Strauss (1967) explicam que nessa primeira fase, o analista deve coletar, codificar e analisar conjuntamente os dados, identificando aqueles que serão coletados em seguida e onde encontrá-los para fundamentar a teoria emergente.

Dick (2005) descreve que muitas técnicas de amostragem teórica podem ser utilizadas na Teoria Fundamentada, como a observação participante, entrevistas, discursos, cartas, literaturas, biografias, autobiografias, pesquisas na biblioteca, etc.

O passo seguinte compõe o processo de **codificação**, que segundo Charmaz (2009, p.72) "é o elo fundamental entre a coleta dos dados e o desenvolvimento de uma teoria emergente para explicar esses dados". A codificação na teoria fundamentada tem pelo menos duas fases principais: (1) uma **fase inicial ou aberta** que envolve a denominação de cada palavra, linha ou segmento dado. (2) uma **fase focalizada** e **seletiva** que utiliza os códigos iniciais mais significativos ou frequentes para classificar, sintetizar, integrar e organizar grandes quantidades de dados em que os mesmos são examinados cuidadosamente.

Na **codificação inicial ou aberta**, afirmam Strauss e Corbin (1990) que a codificação aberta é originada dos rótulos atribuídos livremente a cada frase, linha ou parágrafo. Na obra de Charmaz (op. cit., p.74) sugere "fixar rigorosamente os dados" e "observar as ações em cada segmento de dados em vez de aplicar categorias preexistentes aos dados", destaca assim, que se pode codificar com palavras que reflitam a ação, ou linha a linha detalhando os problemas ou processos empíricos fundamentais, ou comparar os incidentes, identificando as propriedades do conceito emergente. A autora ressalta que as vantagens da codificação inicial orientam o pesquisador para a realização de dois critérios para a conclusão de uma análise de teoria fundamentada: ajuste e relevância. Dessa forma, afirma que:

> O seu estudo se ajusta ao mundo empírico quando você tiver construído códigos e desenvolvido esses códigos em categorias que cristalizam a experiência dos participantes. E tem relevância quando você apresenta um esquema analítico incisivo que interpreta o que acontece e estabelece relações entre os processos implícitos e as estruturas visíveis (CHARMAZ, 2009, p.83).

A autora destaca que codificação palavra por palavra e a codificação linha por linha ajudam a ver o que é conhecido no documento investigado sob uma nova perspectiva. O pesquisador consegue ganhar distância das suas preconcepções e suposições em relação ao material, vendo-o sob uma nova perspectiva.

A **codificação focalizada ou axial** é o processo de identificar as categorias mais relevantes e inseri-las como fenômeno central para estabelecer as relações entre as categorias e subcategorias. De acordo com Strauss e Corbin (1990, p.96) "a codificação axial é um conjunto de procedimentos após a codificação aberta em que os dados são colocados em uma forma, por meio das relações entre as categorias [...] envolve condições, contexto, estratégias de ações/interação e suas consequências". A codificação focalizada "exige a tomada de decisão sobre quais os códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os seus dados de forma incisiva e completa" conforme a descrição de (CHARMAZ, op. cit., p.87).

Na **codificação seletiva** que é a terceira e última etapa da codificação, Strauss e Corbin (op. cit., p.124) afirmam que é a codificação que idêntica a "categoria essencial em torno da qual as outras categorias desenvolvidas podem ser agrupadas e integradas, sendo que o fenômeno central é o coração do processo de integração". Nessa perspectiva Charmaz (op. cit.) argumenta que essa codificação reagrupa os dados fragmentados para dar a coerência à análise emergente.

A fase de finalização da teoria fundamentada é a **redação da teoria** que de acordo com Strauss e Corbin (op. cit., p.225) ao longo do processo da pesquisa, "o pesquisador construiu vários instrumentos analíticos como memorandos, diagramas, registro das relações entre a categoria central e as subcategorias e uma história analítica global que serão para a redação da teoria".

A questão principal é como traduzir esse material analítico de forma clara e efetiva para que outros possam se beneficiar ao utilizá-lo? Para essa questão Charmaz (2009, p. 94) descreve essa redação como "um nível sofisticado de codificação" e podem intensificar a pesquisa uma margem analítica bem definida, acrescentando precisão, clareza, coerência, compreensão e ajuste dos dados.

Vale destacar que um ponto fundamental da teoria fundamentada segundo Fragoso, Recuero e Amaral (2011, p.106):

> É a criação de uma “sensibilidade teórica”. Trata-se de um processo de sensibilização do pesquisador para com as informações que os dados estão oferecendo. Isso significa que o pesquisador precisa exercitar sua capacidade de perceber as idiossincrasias oferecidas pelo campo empírico, questionando-se permanentemente e construindo uma sensibilidade para a pesquisa.

Na teoria fundamentada Dick (2005), Garque (2007) destacam que não existem critérios rígidos para a saturação, sendo uma decisão do pesquisador quanto à seleção e encerramento, o que pode resultar em muitos códigos e comparações, entretanto, nessa teoria se configura como uma metodologia complexa com diretrizes, estratégias e abordagens que podem ser adequadas ao objeto de estudo.

Na obra de Charmaz (op. cit.) encontra-se a sugestão que se elabore um **memorando** analisando as ideias das codificações apresentadas, pois, redigir memorandos sucessivos em todas as partes do processo de pesquisa mantém o pesquisador envolvido na análise e ajuda a elevar o nível de abstração das ideias. A autora ainda destaca na sua obra que:

> Os memorandos proporcionam um espaço e um lugar para comparar dados e dados, dados e códigos, códigos de dados e outros códigos, códigos e categorias e categorias e conceitos, assim como para articular conjecturas sobre essas comparações (Ibid., p.108).

A autora conclui que dessa forma, no momento da redação do memorando, a possibilidade de surgir novas ideias e, consequentemente, novos *insights* durante o ato da escrita contribui para elaboração final dos detalhes do texto

3.4 Análise dos dados

As análises dos dados desta pesquisa são apresentadas por categorias de palavras-chave, frases e parágrafos relevantes, termos e definições dos autores trazidos na metodologia Resolução de Problemas e na teoria Registro de Representação Semiótica.

Os registros das categorias serão apresentados por quadros e ao lado terá um memorando com frases relevantes quanto às categorias, codificações iniciais, focalizadas, seletivas e os dados destacados.

As primeiras análises são as **codificações inicias**: definição de problema, etapas para resolver um problema, características da resolução de problemas e benefícios da resolução de problemas.

Categoria 1: Definição de problema

Quadro 10: Definição de problema **Memorando**

O que é problema?	"Problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer" (ONUCHIC,1999, p.215). "Problema é qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (VAN DE (WALLE, 2001, p.42). "Problema é uma "proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor" (VILA; CALLEJO, 2006, p.6). Está caracterizado um problema quando a resposta não é rapidamente recuperada da memória (BRITO, 2006).	**Problema...** ✓ É resolver alguma coisa que ainda não se têm a resposta. ✓ É resolver alguma atividade com finalidades educativas ou não. ✓ A solução não é imediata. ✓ Não está de imediato na memória. ✓ O problema pode ser matemático ou não. ✓ Instiga, induz à investigação.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 2: Etapas para resolver um problema

Quadro 11: Como resolver um problema **Memorando**

Quais as etapas para resolver um problema?	Compreensão do problema. Estabelecimento de um plano. Execução do plano. Retrospecto (POLYA, 2006). Compreender o problema. Elaborar um plano. Levar avante esse plano. Olhar de volta o problema original para analisar a validade da solução encontrada (SCHROEDER; LESTER, 1989). Primeiro o sujeito percebe a dificuldade da situação, a seguir entra em contato com o problema a fim de definí-lo, levanta os dados do problema e passa a selecionar, dentre as estratégias já conhecidas, a mais adequada à situação (ALVES; BRITO, 2003; BRITO, 2006). Compreensão do enunciado ou do texto (história do problema). Representação do problema. Categorização do problema. Estimativa de solução. Planejamento da solução. Autoavaliação do procedimento utilizado. Autoavaliação do cálculo. Redação da resposta, que leva o estudante a uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto (BRITO, 2011). Preparação de um problema. Leitura individual. Leitura em conjunto. Resolução do problema. Observar e incentivar. Registro das resoluções na lousa. Plenária. Busca do consenso. Formalização do conteúdo. Proposição e resolução de novos problemas (ONUCHIC, 2014).	**As etapas para resolver um problema...** ✓ Ter um problema que não se conhece de imediato a solução. ✓ Ler o enunciado e encontrar o significado das palavras desconhecidas. ✓ Ler novamente para saber se compreende o enunciado – suas afirmações, negações ou perguntas. ✓ Elaborar uma estratégia de solução – qual o raciocínio lógico aplicar? qual a fórmula matemática? ✓ Fazer um registro da resposta. ✓ Voltar a ler o enunciado do problema e verificar se a resposta está correta, caso não esteja, criar outra estratégia de solução.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 3: Classificação da resolução de problemas

Quadro 12: Classificação da resolução de problemas **Memorando**

Quais são as classificações da resolução de problemas?	A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios (BRASIL, 1999, p.112). Na resolução de problemas ocorre a familiarização com o problema, o aperfeiçoamento da compreensão, a procura da ideia proveitosa, a execução do plano e o retrospecto (POLYA, 2006).	**As classificações da resolução de problemas...** As classificações, os atributos, as particularidades da resolução de problemas é ter “intimidade com o problema” que por meio de várias leituras pode-se chegar à compreensão do enunciado, criar estratégias para a solução e colocá-la em prática. No ensino da Matemática pode-se ensinar sobre, para ou por meio da resolução de problemas, desenvolvendo

	Ensinar a resolver problemas, para resolução de problemas e por meio de resolução de problemas (SCHROEDER; LESTER,1989). Resolução de problemas como contexto, habilidade e arte (STANIC; KILPATRICK,1990). A resolução de problemas apresenta quatro características: é cognitiva, é um processo, é dirigida a um objeto e é pessoal, pois é dependente do conhecimento prévio do indivíduo (BRITO, 2006). Ensinar, Aprender e Avaliar (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004).	contextos, habilidades e artes. Lembrando que a resolução de problemas é um processo cognitivo e depende do conhecimento prévio do indivíduo.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 4: Benefícios da resolução de problemas no processo ensino e aprendizagem

Quadro 13: Benefícios da resolução de problemas **Memorando**

	Possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua auto confiança (BRASIL, 1998, p.40). O professor de matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (POLYA, 2006, p.100). A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias e sobre o “dar sentido”. A resolução de problemas envolve os estudantes nos cinco padrões de processo descritos nos *Standards 2000*: resolução de problemas, raciocínio e prova comunicação, conexões e representação. A resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer Matemática e de que ela faz sentido, isto é, aumenta a confiança e a autoestima. A resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permite tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a ter sucesso com a aprendizagem (SCHROEDER; LESTER,1989, p.49).	**Benefícios da resolução de problemas...** A metodologia Resolução de Problemas e o fazer resolução de problemas traz benefícios no processo ensino e aprendizagem de matemática. Desenvolve habilidades e o raciocínio lógico, bem como amplia os conhecimentos, aprende a fazer, pensar e criar os seus próprios problemas durante e depois da resolução. O estudante que desenvolve a habilidade para resolver problemas matemáticos fortalece a sua autoestima e autoconfiança. No processo ensino-aprendizagem-avaliação o sujeito pode ampliar as suas concepções pessoais de como resolver o problema em teorização dos termos e procedimentos matemáticos. Dessa forma, poderá dar sentido às suas ideias matemáticas no processo da resolução de problemas.

Quais os benefícios da resolução de problemas no processo ensino e aprendizagem de matemática?	A resolução de problemas são meios para atingir fins importantes que se classificam em: justificação, motivação, atividade lúdica, veículo, prática, finalidade curricular, inevitável produto de estudo da Matemática, habilidade e arte (STANIC; KILPATRICK,1990, p.12-13). Os processos implícitos no estudante durante a resolução de problemas são: habilidades gerais (capacidades de raciocínios, habilidades comuns, procedimentos a todos os problemas - prestar atenção, recordar, relacionar entre si os elementos do problema, disposição para a solução, os planos, metas e submetas, as estratégias ou procedimentos heurísticos e os procedimentos de transformação da informação que essas atividades requerem, regras, algoritmos e operações). Habilidade individual (é importante no sentido de proporcionar uma aplicação adequada no processo de aprendizagem de cada indivíduo – o processo de resolução de problemas de um conteúdo específico considerando as diferenças de desempenho entre o aluno expert e o novato) (INGLEZ DE SOUZA; BRITO, 2007). A Resolução de Problemas traz potencialidades no processo ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: focalizar as ideias matemáticas e dar sentido ao que se está estudando. Desenvolver o poder matemático nos alunos, isto é, a capacidade para pensar matematicamente, fazendo uso de diversas e convenientes estratégias na Resolução de Problemas, permitindo assim maior compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos. Estimular a crença de que os estudantes são capazes de fazer matemática, com isso a confiança e a autoestima deles se elevam. Empolgar os professores, que não querem voltar a ensinar da forma tradicional. Eles se sentem gratos com o fato dos alunos desenvolverem a compreensão por seus próprios raciocínios. Fazer com que o docente formalize os conceitos e teorias matemáticas somente na etapa final da aula, sendo que dessa forma os conteúdos passam a fazer mais sentido para os aprendizes (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2011). A metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática por meio da Resolução de Problemas ocorre em um processo “em espiral”, possibilitando que “o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos”, com “participação ativa dos mesmos”, e que possa “aprofundar e ampliar” suas compreensões sobre um conceito, procedimento ou conteúdo matemático (JUSTULIN, 2014, p.66). Possibilita que os alunos formulem seus próprios problemas, o que pode ocorrer antes, durante ou depois da resolução de um problema (CAVALHEIRO, 2017, p.50).	

Fonte: Elaborado pela autora

Redação teórica 1

Para resolver um problema, primeiro, é necessário diferenciá-lo de exercício, sendo que na abordagem de Vila e Callejo (2006), imediatamente, o leitor compreende à questão e os meios de resolvê-lo, enquanto que, no problema, não se sabe, no primeiro momento, como resolver e talvez nem se veja com clareza em que consiste o problema. Os autores ainda destacam que os exercícios são questões fechadas e estão em abundância nos livros didáticos, já os problemas estão abertos a vários caminhos de soluções e costumam ser escassos nos livros didáticos.

Os autores Pozo e Echeverría (1998) sugerem que as atividades escolares sejam transformadas em problemas, dentro de cenários do cotidiano e com significados ao discente, evitando as tarefas fechadas, diversificando os tipos de estratégias e que o estudante trabalhe os mesmos tipos de problemas em diferentes momentos do currículo, aplicando conteúdos conceituais diferentes.

Todo problema induz a investigar com mais profundidade o processo de resolução, desta forma, os autores destacam que o estudante deve explorar o problema com várias alternativas de soluções e ter autonomia no processo de tomada de decisões, sem ficar perguntando, a todo momento, ao docente, a resposta do problema.

Diante disso, para a resolução do problema Polya (2006) descreve que é preciso ler o problema e ter o máximo de clareza, nitidez e compreensão, ou seja, familiarizar-se com ele, dar atenção ao problema pode estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes. Uma boa estratégia é a principal realização na resolução de um problema – destacar, examinar e repetir os diversos detalhes de maneiras diferentes.

Abordando ainda o conceito, Brito, Fini e Neumann (1994) esclarecem que um dos elementos necessários para a resolução de problemas é a habilidade incluindo a memorização, a percepção, a atenção, a imaginação, o pensamento ou a solução de problemas. Stanic e Kilpatrick (1990) comentam que esse processo ensina os jovens a pensar e Van de Walle (2001, p.42) destaca que a aprendizagem dessa resolução deve começar “onde o aluno está”, isto é, “partindo do que ele já sabe”.

Analisando a obra de Onuchic (1998, 2009, 2011) encontra-se a indicação de algumas questões para orientar o sujeito na resolução do problema: (1) Isso é um problema? (2) Por quê? (3) Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema? (4) Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele? (5) Para quais séries acredita ser este problema adequado? (6) Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução? (7) Como observar a razoabilidade das respostas obtidas? (8) Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais? (9) Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais? (10).

Os autores Schoroeder e Lester (1989) trazem boas contribuições ao afirmarem que os problemas são rotineiros ou não rotineiros e essas soluções têm as características de ensinar sobre resolver problemas – destaca as fases ou algumas variações de George Polya; ensinar para resolver problemas – transferi a habilidade do estudante do que aprendeu num contexto de um problema para outro e ensinar por meio de resolver problemas – estudante aprende conceitos e habilidades, sendo que os problemas são avaliados com o objetivo de aprender e também fazer.

Desta forma, Onuchic (op. cit., 1999) afirma que quando se ensina por meio da resolução de problemas, dar-se-á aos alunos uma estratégia muito importante de desenvolver a sua própria compreensão e quando se torna profunda e rica, a habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente.

Dando sequência, as próximas análises são as **codificações focalizadas**: conceitos de semiótica, classificação do sistema semiótico e registro de representação semiótica na matemática.

Categoria 1: Conceitos de Semiótica

Quadro 14: Conceitos de Semiótica **Memorando**

	Semiótica vem do grego *sēmeion* significa signo e *sêma* sinal ou signo (NÖTH, 2008). Semiótica é a ciência que investiga o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno	**Semiótica...** ✓ Signo, significação, símbolo, sentido. ✓ Expressão verbal.

O que é semiótica?	de produção, de significação e de sentido (SANTAELLA, 2003). Semiótica é o estudo ou doutrina dos signos, algumas vezes considerada como uma ciência dos signos; uma investigação sistemática da natureza, propriedades e tipos de signo” (COLAPIETRO, 1993, p.179). Semiótica é a ciência dos signos, do comportamento simbólico e dos sistemas de comunicação (LYONS, 2013). Registro de Representação Semiótica - usa o termo registro para os signos com a mesma referência em um sistema semiótico (DUVAL, 2004).	✓ Qualquer coisa a alguém. ✓ É uma ciênica. ✓ Signo substituído pelo termo registro. ✓ Signos são representações. ✓ Signos são caracteres para codificar letras, siglas, algarismos, etc.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 2: Classificação do sistema semiótico

Quadro 15: Classificação do sistema semiótico **Memorando**

Segundo a teoria de Duval (1995, 2003, 2004, 2009, 2011) quais as classificações do sistema semiótico?	• Linguagens: natural, simbólica e figural. • Representação: mental, interna ou computacional, semiótica. • Códigos e registro de representação: formação de representação identificável, tratamento e conversão.	**Sistema Semiótico...** O sistema semiótico compõe uma gama de sentidos tais como: ✓ Linguagem, imagem ✓ Linguagem natural e línguas simbólicas. ✓ Significado e registro são diferentes. ✓ Gráficos e tabelas fazem parte do sistema de representação diferentes. ✓ Os sistemas de escritas são códigos. ✓ Representante e representado são diferentes. ✓ Pelo menos dois registros de representação ao mesmo tempo para mobilizá-los. ✓ Há várias representações para um objeto. ✓ Representações são diferentes de objetos. ✓ Representações estão no lugar do objeto. ✓ Representações são necessárias para ter acesso ao objeto. ✓ Tratamento são as operações. ✓ Conversão é a passagem de uma representação para outra.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 3: Registro de Representação Semiótica na matemática

Quadro 16: Registro de Representação Semiótica na matemática Memorando

Quais são os registros de representação semiótica na matemática? (DUVAL, 2011) Quais são as conversões nos registros de representação semiótica na matemática? (DUVAL, 2011).	• Registros multifuncionais. • Registros monofuncionais. • Conversão congruente. • Conversão não congruente.	**Registros de Representação Semiótica na matemática...** As atividades de conversão podem ser: ✓ Monofuncionais: conversões específicas da matemática. São tratamentos com algoritmos (sistema de numeração, escrita algébrica). ✓ Multifuncionais: conversões fora do contexto matemático. São tratamentos sem algoritmos (produção oral e escrita). ✓ Congruente: ocorre uma simples codificação - a representação terminal se faz conhecida na representação de saída. ✓ Não congruente: não se mostra totalmente na representação final a representação de saída.

Fonte: Elaborado pela autora

Redação Teórica 2:

O precursor da teoria Semiótica é Charles Sanders Peirce, o qual aborda a filosofia das linguagens e Ferdinand de Saussure criador da teoria da Semiologia aborda estudo das linguagens específicas (imagens, gestos, teatros, etc.). Essas duas designações são construídas a partir das palavras gregas *sēmeion/sêma* que significam signo ou sinal. Desde a Antiguidade nos estudos da medicina há uma disciplina que se chama “semiologia”, que consiste em estudar a interpretação dos signos e dos sintomas das diferentes doenças. Os antigos não consideravam como signos apenas os sintomas médicos, mais também, a linguagem como uma categoria de signos, ou de símbolos que serviam para os homens se comunicarem entre si (NÖTH, 2008; SANTAELLA, 2003).

Raymond Duval retirou o que envolvia das teorias de Peirce e Saussure e ampliou o conhecimento na sua teoria - Registro de Representação Semiótica. O pesquisador francês substitui para o termo “registro” a expressão “signo” e afirma que a noção de signo surgiu da análise da expressão verbal que significa qualquer coisa a alguém e apresenta duas faces diferentes: o locutor, que “presta pouca atenção na precisão do que diz e não distingue as coisas que visa intencionalmente”, por outro lado, o interlocutor, que tem somente “as palavras que ele escutou pronunciar para compreender o que o locutor queria lhe dizer” (DUVAL, 2011, p.21).

Em vários momentos o autor supracitado afirma que a relação dos signos com as coisas que eles significam é uma relação de referência, ou seja, “não é somente a relação da expressão verbal com o objeto que descreve ou define, mas o emprego intencional que o locutor faz desse objeto” (Ibid., p.22). Ele ainda destaca que “o signo é uma coisa que, além da forma percebida pelos sentidos, faz vir a partir dele o pensamento de qualquer outra coisa...” (Ibidem., p.23). Também descreve que os signos e as representações cumprem a função de “se colocar no lugar de” e “jamais devem se confundir com os próprios objetos” (Ibidem., p.37). Os signos são caracteres para codificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, os gestos de mão, 1 e não 0, branco e não preto ou azul. O signo reenvia a outro(s) signo(s) um sistema que determina possiblidades de utilização, funcionamento e interpretação – os códigos, por exemplo, os sistemas de escrita.

Os registros ainda segundo o autor, são sistemas cognitivos que produzem e criam representações novas e descobrem novos objetos. O registro apresenta duas propriedades no conteúdo das representações produzidas: o objeto, cuja representações semióticas realizam uma função cognitiva e o *continuum* de sentido, sendo que permite passar de um tipo de representação a outro, dessa forma, “os enunciados, as configurações geométricas, os esquemas, as fórmulas são produções cujo conteúdo chama a atenção sobre um objeto, mesmo que elas pareçam explicitá-lo, não devem ser confundidas com o objeto representado” (Ibidem., p.72). Logo, os registros abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas.

O autor ainda destaca que um registro se evidencia pelas operações semióticas específicas e que mudar de registro de representação é mudar o conteúdo da representação de um objeto, além de mudar as operações semióticas a realizar para transformar o conteúdo da nova representação.

Quanto às representações semióticas descreve que a representação de uma frase simples não é o mesmo de uma equação, a representação interna de uma representação gráfica não é a de uma figura geométrica ou de um esquema e não há conhecimento que não possa ser mobilizado por alguém sem uma atividade de representação semiótica, representações essas como: as frases em linguagem natural, as equações, as figuras, os esquemas e os gráficos ” (DUVAL, 2011, p.72).

As representações semióticas são classificadas em: representação mental, interna ou computacional e a representação semiótica, existindo nessa, um suporte para a representação mental, estimulando espontaneamente, a forma (o representante) e o conteúdo (o representado) (Id., 2009).

Nas obras de Duval (1993, 2009) é afirmado que um sistema semiótico para ser reconhecido como um registro de representação deve respeitar três atividades cognitivas: (1) formação de representação identificável - enunciação de uma frase em uma língua natural, composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula. (2) tratamento - o cálculo é uma forma de tratamento próprio às escrituras simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional). (3) conversão - é a transformação dessa em uma representação de outro registro, conservando a totalidade ou somente uma parte do conteúdo da representação inicial. A conversão é uma atividade cognitiva distinta e independente da atividade de tratamento, por exemplo, a adição de dois números com sua escrita decimal, fracionária e com expoente.

A atividade de conversão “aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”, por exemplo, passar da linguagem natural à frase o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa para a escrita simbólica $y>x$, ou seja, seria uma codificação, sendo que “a conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento” (Id., 2003, p.16-17).

O autor destaca que na atividade de conversão pode haver registro monofuncional e multifuncional, sendo que os registros monofuncionais são específicos da matemática - tratamentos com algoritmos (sistema de numeração, escrita algébrica) e os registros multifuncionais são aplicados fora do contexto matemático, nas funções de comunicação - tratamentos sem algoritmos (produção oral e escrita) e “a conversão das representações que não é uma codificação, é uma operação cognitivamente não reversível” (DUVAL, 2011, p.118).

Quanto às conversões congruentes e não congruentes o autor destaca que a variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão e erros de interpretação dos alunos referentes à enunciados do problema, pois para analisar a atividade de conversão é preciso comparar a representação no registro inicial com a representação no registro final. Se a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação – se diz, então, que há congruência e se ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não congruência (Id., 2003, 2011).

O autor alerta que os professores propõem aos estudantes que apresentam dificuldades os problemas que exigem as conversões não congruentes. A prática da resolução de problemas deve ser discutida. Os próprios discentes devem refletir e tomar consciência das variações de congruência e não congruência apresentadas em cada problema.

As últimas análises são as **codificações seletivas:** as convergências e as divergências entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica.

Categoria 1: Convergências[33] entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica

Quadro 17: Identificações na resolução de problemas **Memorando**

As dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema.	Os alunos devem centrar-se nos processos de resolução, não só nos resultados; reconhecerem os seus próprios bloqueios quando se deparam com problemas difíceis e a superá-los como a satisfação e prazer que experimentam quando encontram a solução (VILA; CALLEJO, 2006). Os estudantes com dificuldades no raciocínio, na visualização gráfica e geométrica, na resolução de problemas, nas conversões. Desta forma, a	**As convergências (identificações) entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica na resolução de problemas...**

[33] Caminhar para o mesmo objetivo. Inclinação para o mesmo feito ou resultado.

As resoluções mentais nas situações-problema	prática da apresentação e da utilização da resolução de problemas que deve ser questionada. (DUVAL, 2011). O docente deve provocar a operação mental, útil para a resolução de problemas por meio da indagação e da sugestão. O discente deve assimilar a maneira correta para apresentar a si próprio realizando com naturalidade e vigor a operação mental correspondente (POLYA, 2006). Um problema é composto do enunciado, do processo mental de solução – que inclui a representação e o espaço de solução - e da solução final (BRITO, 2006).	**Quanto às dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema...** ✓ Dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema: no raciocínio, na visualização gráfica, nas conversões. ✓ Os discentes focam no resultado e não na própria resolução do problema.
A linguagem matemática.	O desenvolvimento da capacidade mental de representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos, pois esses sistemas preenchem a função de comunicação e a transformação de representação. A noção de representação divide-se em três momentos e uma delas é a representação mental (DUVAL, 2003, 2009). A comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática (CÂNDIDO, 2001, p.15). O docente deve auxiliar os alunos a resolver problemas secundários: interpretação do enunciado, notação, passagem da língua materna para a linguagem matemática, dificuldades nas técnicas operatórias, dentre outras (ONUCHIC, 2014). As atividades cognitivas das matemáticas precisam de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: "sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que contenham estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representação em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas etc" (DUVAL, 2009, p.13).	**Quanto às resoluções mentais nas situações-problema...** ✓ As resoluções mentais são úteis. ✓ As resoluções mentais fazem parte do enunciado do problema e devem ser instigadas pelo docente e assimiladas pelo discente. ✓ A comunicação e a transformação de representação são responsáveis pela capacidade mental de representação. **Quanto à linguagem matemática...** ✓ A linguagem é abstrata e simbólica. ✓ A linguagem matemática é universal. ✓ Professor auxilia o aluno a passar da língua materna para a linguagem matemática. ✓ Atividades cognitivas das matemáticas precisam: sistemas de expressão, representação, linguagem natural, imagens e sistemas variados.

	Converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. [...] a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem essas atividades (DUVAL, 2009, p.36-37). Diversidade dos registros de representação semiótica: a primeira aproximação da diversificação é entre a linguagem e a imagem. A linguagem natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como formadoras de um só e mesmo registro (DUVAL, 2009, p.37). Na linguagem matemática a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas (DUVAL, 2003, p. 15).	✓ A linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, convertem as representações de um sistema para outro. Sendo que é necessários ao menos dois registros de representações. ✓ A linguagem e a imagem são aproximações da diversidade dos registros de representação.

Fonte: Elaborado pela autora

Categoria 2: Divergências[34] entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica

Quadro 18: Pontos de vista distintos nas situações-problema **Memorando**

Fases distintas para resolução de situações-problema na matemática.	Compreensão do problema. Estabelecimento de um plano. Execução do plano. Retrospecto (POLYA, 2006). Compreender o problema. Elaborar um plano. Levar avante esse plano. Olhar de volta o problema original para analisar a validade da solução encontrada (SCHROEDER; LESTER, 1989). Primeiro o sujeito percebe a dificuldade da situação, a seguir entra em contato com o problema a fim de defini-lo, levanta os dados do problema e passa a selecionar, dentre as estratégias já conhecidas, a mais adequada à situação (ALVES; BRITO, 2003; BRITO, 2006). Compreensão do enunciado ou do texto (história do problema). Representação do problema. Categorização do problema. Estimativa de solução. Planejamento da solução. Autoavaliação do procedimento e do cálculo utilizado. Redação da resposta, que leva o estudante a	**Pontos de vista distintos nas situações-problema...** A solução de situações-problema matemáticos passa por etapas distintas na Resolução de Problemas e no Registro de Representação Semiótica, mais essas distinções se completam quando utilizadas juntas. ✓ Fazer uma leitura individual ou em grupo para compreender o enunciado do problema ou texto matemático, identificando as palavras-chave, as incógnitas, os dados, as notações e o que

[34] Pontos de vista diferentes. Formas diferentes, mais que completam o ensino e a aprendizagem matemática.

	uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto (BRITO, 2011). Preparação de um problema. Leitura individual. Leitura em conjunto. Resolução do problema. Observar e incentivar. Registro das resoluções na lousa. Plenária. Busca do consenso. Formalização do conteúdo. Proposição e resolução de novos problemas (ONUCHIC, 2014). A conversão pode ser por meio de linguagens natural, simbólica e figural. A representação é mental, interna/computacional, semiótica. Os códigos e registro de representação: formação de representação identificável, tratamento e conversão. Registros multifuncionais e monofuncionais. Conversão congruente e não congruente (DUVAL, 1995, 2003, 2004, 2009, 2011).	mais o leitor entender ser importante. ✓ Elaborar um plano, selecionar as estratégias por meio de categorização, representação mental, computacional ou semiótica. ✓ Executar o plano, fazer o registro das resoluções na lousa, no papel, no computador: utilizar registros de representação, conversão, tratamento. ✓ Resposta do problema, a formalização do conteúdo por meio dos registros de representação semiótica.

Fonte: Elaborado pela autora

Redação Teórica 3

A metodologia Resolução de Problemas e a teoria Registro de Representação Semiótica tem convergências, identificações entre si, ou seja, caminham para o mesmo objetivo, inclinam para o mesmo feito ou resultado. No Quadro 17 são apresentadas três subcategorias convergentes: as dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema, as resoluções mentais nas situações-problema e a linguagem matemática.

As dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema Vila e Callejo (2006) descrevem que os alunos têm dificuldades em: focar-se nos procedimentos da resolução, reconhecer e superar os seus bloqueios para solucionar problemas difíceis. Duval (2011) corrobora afirmando que as dificuldades dos estudantes estão no raciocínio lógico, na visualização gráfica e geométrica e, isso ocorre, devido os professores escolherem os problemas em que as conversões são não congruentes para os alunos que já têm dificuldades, ou levam esses problemas para as aulas de pesquisa com estudantes mais avançados. O autor destaca que a prática da apresentação e da utilização da resolução de problemas deve ser questionada e que a dificuldade das conversões reflete a distância cognitiva que separa as representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes.

A Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica destacam que as resoluções mentais nas situações-problemas são relevantes ao docente e ao discente. Polya (2006) denomina operação mental e descreve que é útil ao professor para indagar e sugerir as soluções e ao aluno para assimilar a forma correta e correspondente do problema, como Brito (2006) usa a expressão processo mental e destaca que esse faz parte da composição do enunciado do problema e inclui a representação e o espaço da solução final. A autora destaca que nesse processo mental o sujeito combina na estrutura cognitiva dos termos, princípios, procedimentos, técnicas e habilidades para a resolução do problema.

Duval (2003, 2009) quando caracteriza em capacidade ou representação mental corrobora com Brito (2006) que descreve que a representação depende do desenvolvimento cultural de sistemas semióticos, pois preenchem a função de comunicação, transformação (tratamento) e objetivação. O indivíduo deve ter a apropriação e o domínio desses sistemas para obter sucesso na resolução do problema.

Quanto à terceira subcategoria, a linguagem matemática, é universal, abstrata e simbólica e segundo Cândido (2001) existe uma ligação entre as concepções informais, intuitivas e a linguagem matemática, sendo que a comunicação tem o objetivo de auxiliar os estudantes nessa construção. Onuchic (2014) comenta que o professor deve auxiliar o aluno na interpretação do enunciado, na notação, na passagem da língua materna para a linguagem matemática, lembrando que, essa “passagem”, Duval (1995, 2003, 2004, 2009, 2011) denomina “conversão”.

Na obra de Duval (op. cit.) encontra-se a afirmação que além da linguagem natural, das imagens, das conversões (escrita para numérica, notação simbólica para objetos, língua paralela à linguagem natural) as atividades cognitivas das matemáticas necessitam de sistema de expressão e representação, tais como, em gráficos, figuras geométricas, redes, diagramas, esquemas, língua simbólica). O autor destaca que a primeira aproximação das variações dos registros de representação é entre a linguagem e a imagem e que a linguagem natural e as línguas simbólicas não formam um só e mesmo registro. Na linguagem matemática para haver compreensão é preciso existir ao menos dois registros de representação semiótica.

Quanto às divergências da Resolução de Problemas e do Registro de Representação Semiótica, entende-se que são pontos de vista e formas diferentes de propor a resolução de problemas matemáticos, porém, quando utilizadas juntas, ampliam o conhecimento e enriquecem o processo do ensino e aprendizagem da matemática. O Quadro 18 propõe apenas uma subcategoria que são as fases distintas para resolução de situações-problema na matemática e esses auxiliam e orientam o docente e o discente na resolução de problemas.

As fases da resolução de problemas para os autores Alves e Brito (2003) e Brito (2006) são específicas e com diversas operações semelhantes: em primeiro lugar o docente ou discente percebe a dificuldade da situação, a seguir entra em contato com o problema para defini-lo, levanta os dados do problema e passa a selecionar, dentre as estratégias já conhecidas, a mais adequada à situação. A partir dessas etapas, inicia-se as formas distintas da Resolução de Problemas e do Registro de Representação Semiótica para solucionar situações-problema na matemática.

A primeira etapa de acordo com as ideias de Onuchic (2014) é a leitura individual ou em grupo, para Polya (2006), Schroeder e Lester (1989) é a compreensão do problema, para Alves e Brito (2003) e Brito (2006, 2011) é a compreensão do enunciado ou do texto, ou seja, a história do problema, o sujeito entra em contato com o problema a fim de defini-lo. Esta compreensão abarca alguns significados que para Duval (2011) é o sentido das palavras na língua, a utilização proposital que o sujeito faz do objeto e a natureza de uma relação de referência, como por exemplo, o centro de um círculo, o ponto O, dentre outros.

O autor complementa essa primeira fase, alertando que os objetos que fazem referência não podem ser confundidos com os signos, os quais são coisas, se colocam no lugar de alguma coisa, são caracteres para codificar – letras, siglas, algarismos, palavras-chave, os gestos de mão. A relação entre os signos e os objetos dependem do sistema semiótico utilizado – a língua, um sistema de numeração etc.

Faz parte do momento da compreensão do problema matemático, segundo Duval (1993, 2003, 2007) a representação de um registro, ou seja, a enunciação de uma frase, a composição de um texto, o desenho de uma figura geométrica, a elaboração de um esquema, a escrita de uma fórmula. A escolha da representação de um registro permite o exercício do pensamento e o desenvolvimento do conhecimento, o caminho é da representação de um termo, de um exemplo ou uma teoria. Nessa fase deve-se conjecturar que a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica deve fazer parte do problema.

Na segunda etapa segundo as concepções de Polya (2006) deve-se estabelecer um plano, ou seja, encontrar a conexão nos dados, na incógnita (o que se precisa, o que se quer) e na condicionante (as partes principais do problema). O autor sugere utilizar o método de um problema correlato, que tenha a mesma incógnita ou semelhante para auxiliar na resolução, isto significa, considerar o problema sob diversos pontos de vista, destacar as partes, analisar várias vezes os detalhes e procurar interpretações novas, adquirindo uma concepção completa, coerente e homogênea do problema.

Em relação a segunda fase, Brito (2011) comenta que é preciso o processo mental de solução, o qual inclui a representação, o espaço de solução do problema por meio da categorização. O autor Duval (1995, 2003, 2009, 2011) completa a ideia da autora trazendo que não há conhecimento sem recorrer a representação semiótica, ou seja, uma mudança de forma, convertidas em representações equivalentes, em outro sistema. Por exemplo: traçar a curva correspondente a uma equação do segundo grau, ou passar do encunciado de uma relação à escritura literal. Vale destacar que as representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, as figuras, os esquemas, os gráficos e não as palavras, os algarismos, as letras, os pontos ou os traços. A representação semiótica ocupa o papel de comunicação e existe um auxílio para as representações mentais estimulando a dualidade entre a forma (o representante) e o conteúdo (o representado).

Essa fase é para selecionar as estratégias já conhecidas e a mais adequada à situação deve ser utilizada, segundo os autores Alves e Brito (2003) e Brito (2006). Os planos selecionados, segundo Duval (2005) estão divididos em três linguagens: natural, simbólica e a figural. O autor também traz a relevância de que os registros de representações semióticas promovem liberdade ao sujeito de objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento ainda oculto para explorar informações relativas ao raciocínio, à compreensão dos textos, à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos.

Na terceira etapa da metodologia Resolução de Problemas é o momento da execução do plano e da estratégia elaborada e Polya (2006) indica realizar detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que sejam viáveis, verificando a correção de cada passo pelo raciocínio formal, pela intuição e se possível demonstrar o passo correto. O autor ainda sugere que se for uma situação-problema complexa pode-se dividir em passos grande e pequenos, considerando cada grande passo diversos e pequenos.

Na terceira fase os registros dos cálculos devem ser feitos na lousa, segundo propõe Onuchic (2014) mas a autora não detalha como devem ser demonstrados e, nesse momento, Duval (1993,1995, 2003, 2004, 2009, 2011) amplia, complementa e especifica os passos da resolução do problema, alertando que a linguagem natural e as línguas simbólicas não podem ser consideradas como formadoras de um só e mesmo registro e as figuras geométricas, os gráficos cartesianos ou as tabelas são sistemas de representação diferentes entre si, dessa forma, as representações são integradas no processo de tratamento, a paráfrase e a inferência, no caso da língua natural, o cálculo numérico, algébrico, no caso das escrituras simbólicas, a reconfiguração, para as figuras geométrica, a anamorfose, que se aplica à representação figural.

Duval (2009, 2011) descreve três passos importantes no cumprimento das atividades cognitivas inerentes as representações semióticas (frases em linguagem natural, equações, figuras, esquemas, gráficos): (1) constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. (2) transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. (3) converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que essas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado: a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas que permitem essas atividades.

O autor deixa claro que a conversão de uma representação é uma transformação externa ao registro de partida e é uma atividade distinta e independente da atividade de tratamento, como por exemplo, a adição de dois números com sua escrita decimal, fracionária e com expoente que não são os mesmos procedimentos de tratamento, têm significados operatórios e adições diferentes: 0,25+0,25=05 e 1/4+1/4=1/2 e $25.10^{-2}+25.10^{-2}=50.10^{-2}$. Outro exemplo pode ser o enunciado de um problema com várias expressões linguística convertido em uma representação de equação dos dados. Essa conversão é a transformação do registro em língua natural para o registro algébrico.

A atividade matemática é individual na mobilização simultânea e para Duval (2003) é preciso, no mínimo, dois registros de representação ao mesmo tempo e em cada um dos dois registros deve-se considerar as unidades de significado pertinentes. O autor destaca que a conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento e ela pode ter a necessidade de passagens de registros monofuncionais que são específicos da matemática e os multifuncionais que são aplicados fora do contexto matemático. E é importante analisar a congruência e a não congruência dos tipos de registros de representação semiótica.

Por fim, ocorre a quarta etapa que é a resposta do problema, o retrospecto que segundo Polya (2006) é preciso considerar os detalhes da resolução e deixá-los simples, examinando o método que utilizou e caracterizá-lo em outros problemas. O autor alerta que talvez se encontre outra solução melhor e descubra-se fatos novos, ordenados e interessantes para utilizar até mesmo em outros problemas. A autora Brito (2011) classifica essa fase como autoavaliação dos procedimentos e cálculos utilizados e Onuchic (2014) descreve como formalização do conteúdo, levando o discente a uma nova leitura da proposição do problema e desenvolvendo a capacidade de resolver de novos problemas.

Para essa etapa Duval (2003, 2011) amplia as indicações e alerta que na organização interna a representação de uma frase simples não é o mesmo de uma equação, a representação interna de uma representação gráfica não é a de uma figura geométrica ou de um esquema. Outra questão que deve ser revista na situação-problema, segundo o autor, é a mudança de registro de representação, a qual não é apenas mudar o conteúdo da representação de um objeto, mais é mudar as operações semióticas para transformar o conteúdo da nova representação.

Nessa etapa é necessário lembrar que para que haja harmonia entre os vários registros, é preciso ser capaz de converter as representações nos dois sentidos, ou seja, a representação no registro de partida com a representação no registro de chegada. O autor indica que duas situações podem ocorrer: (1) a representação terminal torna-se conhecida na representação de saída. (2) para haver congruência a conversão deve estar próxima de uma situação de simples codificação e não congruência ela não transparece. As variações de congruência e não congruência devem ser trabalhadas, discutidas e questionadas sempre na resolução de problemas (DUVAL, 2003, 2011).

Serve para utilizar na última fase da resolução de problemas três passos propostos pelo autor para a análise do funcionamento cognitivo do pensamento matemático: (1) cada registro de representação tem um funcionamento semiótico específico. (2) na passagem de um registro a outro é preciso desenvolver harmonia entre pelo menos dois registros. (3) atenção quanto aos fenômenos de não congruência, pois são mais numerosos que os fenômenos da congruência. Eles não são previsíveis e devem ser estudados caso a caso para cada problema indicado (Ibidem.).

Diante do apresentado quanto às complementaridades entre a metodologia Resolução de Problemas e a teoria Registro de Representação Semiótica o próximo item será o relatório de conclusão dos resultados obtidos e uma proposta com as dialéticas na resolução de problemas matemáticos.

3.5 Relatório de Conclusão

Resolver problema exige reflexão, esforço, determinação, raciocínio lógico e formas diferentes de pensar e, segundo NCTM (2000) também é uma forma de aprender, fazer e representar de várias maneiras a matemática, como por exemplo, com símbolos de números, imagens, tabelas, gráficos, planilhas, dentre outros.

As dificuldades dos sujeitos quanto à resolução de problemas estão relacionadas ao raciocínio, à visualização gráfica e geométrica, a mudança de registro e a mobilização simultânea de dois registros, que de acordo com Duval (2003, 2011) é preciso uma abordagem cognitiva que desenvolva essas capacidades. É necessário, primeiro, abordar o funcionamento cognitivo para que o discente compreenda, efetue, controle e utilize seus conhecimentos para compreensão e aprendizagem matemática.

Para auxiliar docentes e discentes nas soluções de problemas propõe-se uma forma explicitando as análises dos objetivos das convergências, divergências e complementaridade entre a metodologia Resolução de Problemas abordada por George Polya e outros autores e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval. Entende-se que juntas ampliam e enriquecem os processos do ensino e aprendizagem da compreensão e interpretação da resolução de situações-problema matemáticos.

Dessa forma, expressa-se com o Quadro 19, uma comparação no que tange à resolução de problemas com o apoio da Metodologia da Resolução de Problemas ou da teoria Registro de Representação Semiótica.

Quadro 19: Apoios para resolver problemas: uma comparação

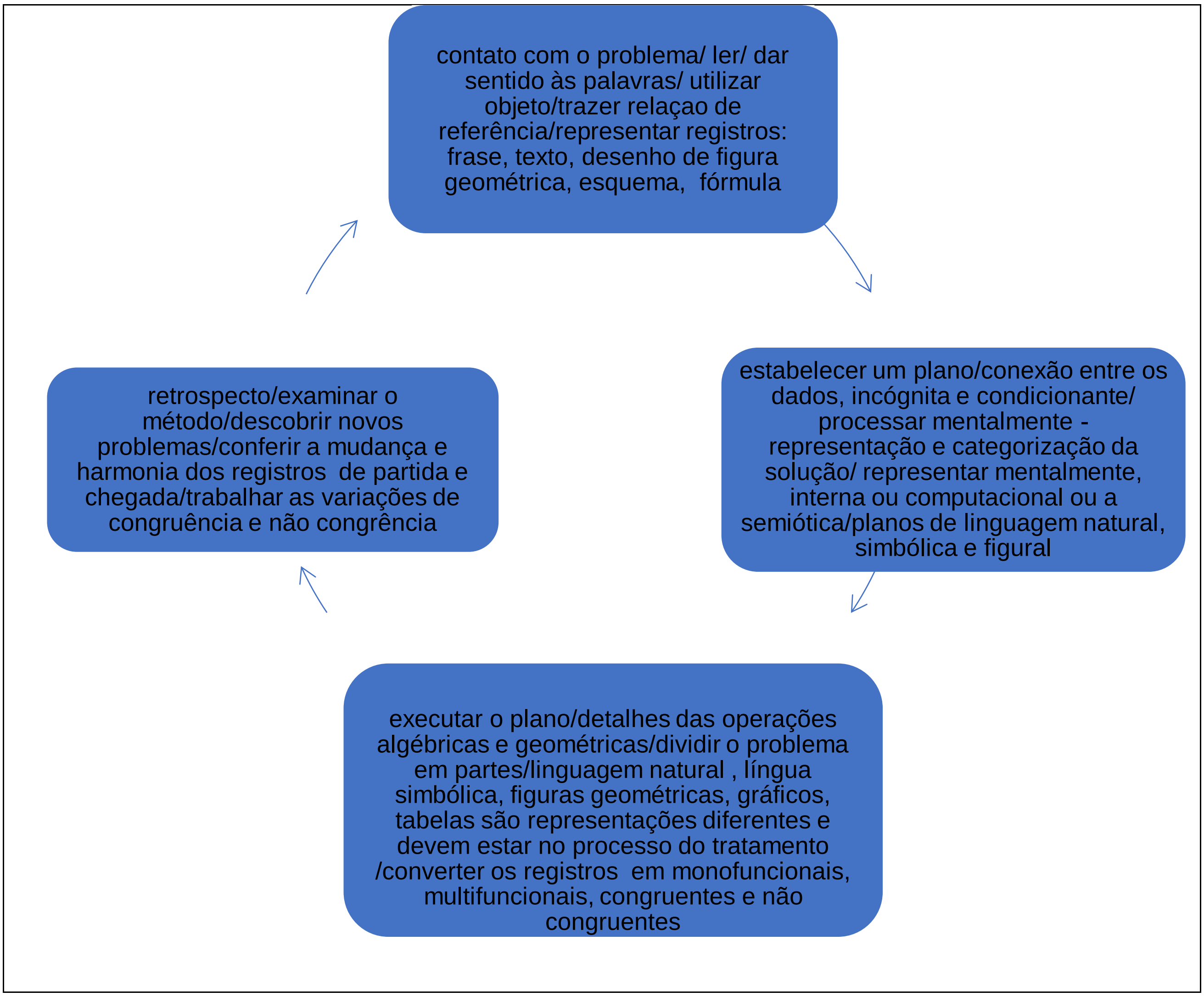
Resolução de problemas	Registro de Representação Semiótica
Ler para compreensão do enunciado. Ter contato com o problema para resolvê-lo	Dar sentido às palavras da língua materna. Fazer a utilização do objeto e a relação de referência. Representar um registro: frases, composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula.
Estabelecer um plano. Encontrar conexão nos dados, no que se deseja encontrar (incógnita) e nas partes principais do problema (condicionante). Processar mentalmente a solução: representação e categorização	Representar mentalmente: plano de ação e representação Representar interna ou computacional: falhas na definição dos passos necessários, das regras dos cálculos. Representar a semiótica: mudança de forma convertidas em representações equivalentes, em outro sistema - frases em linguagem natural, as equações, as figuras, os esquemas, os gráficos. Selecionar os planos em linguagens: natural, simbólica e a figural.
Executar o plano e a estratégia. Realizar detalhes viáveis das operações algébricas e geométricas Dividir o problema em partes pequenas para facilitar o processo.	Não usar a linguagem natural e as línguas simbólicas como um só e mesmo registro. Compreender que as figuras geométricas, os gráficos cartesianos ou as tabelas são representações diferentes entre si. Aplicar a representação da língua natural (paráfrase e inferência); das escrituras simbólicas (cálculo numérico e algébrico) e da

	representação figural (figuras geométricas e anamorfose) no processo de tratamento. Converter os registros de representação: registro em língua natural para registro algébrico ou registro algébrico para registro gráfico dentre outros. Observar que sempre é preciso, no mínimo, dois registros de representação e considerar as unidades de significado pertinentes. Considerar que é irredutível ao tratamento a conversão das representações e podem ter passagens de registros monofuncionais e multifuncionais congruentes ou não congruentes.
Responder o problema. Fazer um retrospecto na situação-problema. Examinar o método que utilizou e verificar se pode ser utilizado em outros problemas. Descobrir novos problemas, novas resoluções. Fazer a autoavaliação dos procedimentos e cálculos.	Conferir a mudança de registro de representação: mudar o conteúdo da representação de um objeto e as operações semióticas. Verificar a harmonia entre pelos menos dois registros: no registro de partida com a representação no registro de chegada. Trabalhar as variações de congruência e não congruência.

Fonte: Elaborado pela autora

Pode-se perceber com essa comparação do Quadro 19 que o apoio da teoria dos Registros de Representação Semiótica possibilita ampliar a percepção dos significados simbólicos nos problemas matemáticos, favorecendo a compreensão dos enunciados a partir das mudanças de registros e ampliando as condições do estudante em resolver os problemas. A Figura 2, expressa essa comparação de forma sintética.

Figura 2: Síntese da comparação entre os recursos da resolução de problemas matemáticos



Fonte: Elaborado pela autora

Tanto o Quadro 19 quanto a Figura 2 descrevem etapas envolvendo a Resolução de Problemas segundo Polya e outros autores e o apoio da teoria dos Registro de Representação Semiótica segundo Duval para resolver problemas matemáticos.

Vale destacar que essas fases não são cíclicas, ou seja, elas não seguem uma ordem sequencial nos procedimentos da resolução do problema matemático, pois entende-se que cada indivíduo é imbuído de percepções particulares, tendo dessa forma, a liberdade para transitar de forma aleatória pelas etapas propostas.

Dessa forma, o processo é constante e contínuo na arte de resolver problemas e com a contribuição simultânea dos registros de representação semiótica possivelmente o êxito no cotidiano para resolução de situações-problema tornar-se-á com maior possibilidade de compreensão e interpretação nos problemas matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa nasceu devido alguns questionamentos observados nos resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes de 2015 (PISA), dos depoimentos de acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática numa Instituição do Ensino Superior na Bahia e de investigações de dissertações e teses quanto às dificuldades de docentes e discentes na compreensão e interpretação de situações-problemas na matemática. As referências teóricas foram sugestão da orientadora da tese.

O levantamento bibliográfico foi efetivado a partir de consulta ao banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, conforme descrito na introdução, e apresentado seis amostras de pesquisas que corroboram com esta investigação. As pesquisas de Carvalho (2007), Lima (2017), Justulin (2014) e Santos (2014) descrevem as dificuldades de docentes e discentes no processo do ensino e aprendizagem para utilizar a metodologia Resolução de Problemas e Azerêdo (2013) e Thiel (2013) trazem questões da teoria Registro de Representação Semiótica quanto às dificuldades de estudantes nas conversões da linguagem natural, simbólica e gráfica.

Diante dos resultados apresentados na problemática, levantou-se algumas indagações pertinentes: às dificuldades na resolução de situações-problema ocorrem pela não compreensão dos significados, das palavras-chave, dos símbolos, da linguagem matemática, dos registros de representação? A teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval pode contribuir à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores direcionando com mais clareza a compreensão e interpretação de problemas matemáticos? Em que a teoria Registro de Representação Semiótica completa, auxilia, converge ou diverge comparativamente à metodologia Resolução de Problemas?

Dessa forma, a pesquisa teve por propósito investigar, quais as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática? Ela também teve como objetivo estabelecer um diálogo entre a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval e a metodologia Resolução de Problemas iniciada e divulgada por Polya e utilizada por outros autores quanto às suas abordagens para o ensino e aprendizagem da matemática com situações-problema. E destacam-se as finalidades específicas: elaborar as convergências, divergências e complementaridade entre a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval e a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores; descrever as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática.

Para responder essas questões utilizou-se a alguns aspectos da metodologia Teoria Fundamentada trazendo comparativos por meio de quadros, memorandos, redações teóricas e categorizando as codificações sugeridas pela metodologia. Foram três grupos de categorias referentes às três codificações desenvolvidas da seguinte forma:

Grupo 1: Codificações iniciais – categoria 1: definição do problema; categoria 2: etapas para resolver um problema; categoria 3: classificação da resolução de problemas; categoria 4: benefícios da resolução de problemas no processo ensino e aprendizagem. Este grupo representou a metodologia Resolução de Problema;

Grupo 2: Codificações focalizadas – categoria 1: conceitos de semiótica; categoria 2: classificação do sistema semiótico; categoria 3: Registro de Representação Semiótica na matemática. Este grupo representou a teoria Registro de Representação Semiótica.

Grupo 3: Codificações seletivas – categoria 1: convergências entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica; categoria 2: divergências entre a Resolução de Problemas e o Registro de Representação Semiótica. Este grupo representou a metodologia Resolução de Problemas e a teoria Registro de Representação Semiótica.

Os resultados das análises das categorias mostram que é preciso saber diferenciar o problema do exercício matemático e que, segundo Polya e vários autores, na metodologia Resolução de Problemas, as situações-problema na matemática seguem quatro passos para suas resoluções e na teoria Registro de Representação Semiótica, as soluções são desenvolvidas e trabalhadas com signos, códigos, conversões, tratamentos, registros de representação (monofuncional, multifuncional, congruência, não congruente).

Quanto às **convergências** entre a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores que utilizam essa metodologia e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval, os autores abordam três pontos em comum:

1) **dificuldades dos discentes na resolução de situações-problema**, Vila e Callejo (2006) descrevem que eles não têm concentração em cada passo da resolução e têm bloqueios no momento de solucionar problemas difíceis e Duval (2011) corrobora afirmando que as dificuldades são no raciocínio, na visualização gráfica e geométrica e nas conversões.

2) **resoluções mentais nas situações-problema** são importantes, pois a operação mental faz parte do processo de solução e deve ser sugerido pelo docente e assimilado pelo estudante (POLYA, BRITO, 2006) lembrando que, a capacidade mental de representação para ser desenvolvida, afirma Duval (2003, 2009) depende do desenvolvimento cultural dos sistemas semióticos (linguagem natural, simbólica e figural), os quais completam a comunicação e a transformação de representação.

3) **linguagem matemática** é abstrata e simbólica e é papel do docente ajudar os discentes na passagem da língua materna para a linguagem matemática, bem como, nas técnicas operatórias e na interpretação do enunciado (CÂNDIDO, 2001; ONUCHIC, 2014).

É bom relembrar que dentro da linguagem matemática conforme descrito na pesquisa, Duval (op.cit.) destaca também a linguagem natural, línguas simbólicas notações simbólicas, figuras geométricas, representação em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, frisando que é preciso ao menos dois registros de representações semióticas na conversão de representação de um sistema para outro.

Em relação às **divergências** entre a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores que utilizam essa metodologia e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval, os autores abordam pontos de vista diferentes, porém, aplicadas juntas na resolução de problemas, trazem mais esclarecimentos, auxílios e complementaridade no processo.

Os autores citados no capítulo I e II abordam **fases distintas para a resolução de situações-problema na matemática** descrevendo que o problema precisa ser preparado com leituras para dar início à compreensão do enunciado e à percepção das dificuldades encontradas, passando assim, a elaborar estratégias adequadas com categorizações e estimativas do problema. Logo em seguida, deve-se executá-las obtendo a resposta final, mais são indicadas autoavaliações dos procedimentos e dos cálculos utilizados, bem como, uma redação da solução, retrospecto – validade da solução encontrada, trazendo ao sujeito uma nova leitura do problema (ONUCHIC, 2014; BRITO, 2011; POLYA, 2006; SCHROEDER; LESTER, 1989; ALVES; BRITO, 2003; BRITO, 2006).

Os procedimentos desses passos ficam melhores acompanhados com as contribuições de Duval (1988, 1993, 1995, 2003, 2004, 2009, 2011) para a solução de problemas matemáticos: nas linguagens natural, simbólica e figural os registros de representação são por meio de representação identificável, por tratamento e por conversão, sendo que os registros podem ser monofuncionais ou multifuncional na conversão congruente ou não congruente.

Os resultados das análises dos dados das convergências, divergências e complementaridade da metodologia Resolução de Problemas e da teoria Registro de Representação Semiótica trouxeram a elaboração de dialéticas para auxiliar na compreensão e interpretação de situações-problema de matemática, vale destacar que **é o diálogo da teoria Registro de Representação Semiótica com a metodologia Resolução de Problemas**, conforme apresentado no final do capítulo III.

No momento que o sujeito estiver em contato com o problema, lendo e dando sentido às palavras, poderá utilizar o objeto do problema e trazer à relação de referência, representando os registros em frases, textos, desenhos de figuras geométricas, esquemas, fórmulas etc. É preciso também estabelecer um plano, ou seja, a conexão entre os dados, a incógnita (o que deseja encontrar) e a condicionante (partes principais do problema), em seguida, traçar a solução por meio da representação e categorização (linguagem natural, simbólica e figural), utilizando a representação mental, computacional ou semiótica.

É importante a execução do plano elaborado na etapa anterior e desenvolver com detalhes as operações algébricas e geométricas, se possível, dividir os problema em partes pequenas, utilizar as diferentes representações, tais como, a linguagem natural (paráfrase e inferência), as escrituras simbólicas (cálculo numérico e algébrico), as figuras geométricas, os gráficos, as tabelas e todas essas representações são irredutíveis ao tratamento e a conversão das representações, podendo assumir passagens de registros monofuncionais e multifuncionais congruentes ou não congruentes. É importante lembrar que sempre é preciso, no mínimo, dois registros de representação. E por fim, atentar-se para o retrospecto do problema, que é o momento de examinar o método escolhido, conferir a mudança e a uniformidade dos registros de partida com a representação no registro de chegada, trabalhar as variações de congruência e não congruência e após toda essa conferência, o sujeito descobrirá novas leituras e novos problemas, desenvolvendo, desta forma, a capacidade de resolver problemas.

Diante de tudo que foi proposto desenvolver nesse trabalho acadêmico como, pesquisar, analisar e apresentar os resultados encontrados da questão investigativa às contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de matemática, entende-se ser preponderante na possibilidade de proporcionar contribuições valiosas, enriquecedoras com complementaridade, trazendo benefícios e acréscimos aos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Essa pesquisa proporcionar constatar que a teoria Registro de Representação Semiótica aplicada à metodologia Resolução de Problemas amplia o pensamento cognitivo dos termos quando o sujeito mobiliza mais de um registro de representação semiótica, e é somente por meio das representações semióticas que, se torna possível, as atividades sobre os objetos matemáticos. Dessa forma, ela descontrói o senso comum de que os estudantes não sabem resolver problemas pois desconhecem a língua materna, sendo que Duval indica que esse conhecimento deve ir mais além da língua materna, o estudante precisa saber transitar entre os registros de representação dos conceitos que aparecem no enunciado de um problema matemático.

A proposta dessa pesquisa não foi resolver problemas matemáticos, mais sim, trazer um diálogo entre a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval mostrando as complementaridades entre elas, dessa forma, os resultados da presente investigação serão utilizados em situações de resolução de problemas em minha prática docente para futuras pesquisas.

E, como sugestões de pesquisas futuras propõe-se a investigação com a utilização dos resultados da presente pesquisa em problemas matemáticos estudados no ensino fundamental I, II, ensino médio e ensino superior.

Espera-se que esta pesquisa contribua para o Grupo de Pesquisa O Elementar e o Superior em Matemática - GPES, bem como para o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e que sirva à comunidade científica que investiga a metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores e a teoria Registro de Representação Semiótica segundo Duval.

Essa tese contribuiu para a minha formação acadêmica como pesquisadora em Educação Matemática ampliando os meus conhecimentos e levando-me a compreender de forma mais crítica e consciente certos fenômenos que permeiam este campo do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da resolução de problemas. Boletim Gepem, Rio de janeiro, n. 55, p. 122-154, jul./ dez. 2009.

____________________________.Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ALVES, E. V., BRITO, M. R. F. Algumas Considerações sobre a Solução de Problemas. VII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática, Rio Claro- SP: UNESP, 2003.

APPOLINÁRIO, F. Dicionário de Metodologia Científica: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo: Atlas, 2011.

AZERÊDO, M. A. de. As representações semióticas de multiplicação: um instrumento de mediação pedagógica. Tese (Doutorado em Educação). Paraíba: UFPB, 2013.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. In: Anais da 27ª reunião anual da Anped. Caxambu, Nov. 2004. CD-ROM.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: orientações curriculares para o ensino médio aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 1999.

______ no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: Fundação Santillana, 2016. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf. Acesso em 25 de agosto de 2017.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). Solução de problemas e a matemática escolar. Campinas, Alínea, 2006, p. 13-53.

_____________. Psicologia da Educação Matemática: Um ponto de vista (Número especial). Educar em Revista, 2011, p. 29-45.

______________.; Fini, L. D. T.; Neumann, V. J. N. Um Estudo Exploratório Sobre as Relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático. Proposições. Campinas, SP: v. 5, nº 1, p.37-44,1994.

CÂNDIDO, P. T. Comunicação em matemática. In SMOLE, K.; DINIZ, M. I. (Orgs.). Ler, escrever e resolver problemas. Porto Alegre: Artmed, 2001, p.15-28.

CAVALHEIRO, G. C. S. Resolução de Problemas e investigação matemática: um processo de intervenção formativa para licenciados em matemática. Tese (Doutorado em Educação). Bauru/São Paulo: UNESP, 2017.

CHARMAZ, K. A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

COLAPIETRO, V.M. *Glossary of Semiotics*. New York: Paragon House, 1993.

COSTA, A. A. Direito e método: diálogos entre a hermenêutica filosófica e a hermenêutica jurídica. Tese Doutorado. Universidade de Brasília, 2008.

CRESWELL, J. W. Projeto de Pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Magda Lopes. 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CRUZ SOUSA, R. M.; GOUVEIA DE SOUSA, A.C. Diversidade de representações semióticas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental. IV SELEM: Seminários de Escritas e Leituras em Educação Matemática. Natal/RN, 13 e 14/05/2016.

DICK, B. Grounded Theory: a thumbnail sketch. 2005. Disponível em: http://www.scu.edu.au/schools/gcm/ar/arp/grounded.html. Acesso em 28 de abril de 2018.

DINIZ, M. I. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Orgs.) Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DUVAL, R. *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.1. I.R.E.M, 1988.

__________. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Starsbourg, n.5, 37-65, 1993.

__________. *Semiosis et pensee humaine – registres semiotiques et apprentissagens intellectuels.* New York, Paris, Wien: Peter Lang S.A., 1995.

__________. Registros de representações semióticas e funcionamente cognitivo a compreensão em matemática. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara. Aprendizagem em matemática: registros de representações semióticas. São Paulo: Papiros, 2003.

___________. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R.; FERRARI, P. L.; HOINES, M.J.; MORGAN, C. *Language and Mathematics. Congresso f the European Society for Research in Mathematics Education* – CERME 4. Spain, 2005.

DUVAL, R.; FERRARI, P. L.; HOINES, M.J.; MORGAN, C. *La conversion des représentations: um des deux processos fondamentaux de la pensée.* In: Du mota u concept conversion. Grenoble: PUG – Presses Universitaires de Grenoble, 2007.

_________. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

_________. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FACHIN, O. Fundamentos de metodologia. São Paulo: Atlas, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

FRAGOSO, S.; RECUERO, R.; AMARAL, A. Métodos de pesquisa para internet. Porto Alegre: Sulina, 2011.

GASQUE, K.C.G.D. Teoria fundamentada: nova perspectiva à pesquisa exploratória. In: MUELLER, S.P.M. (Org.). Métodos para a pesquisa em ciência da informação. Brasília: Thesaurus, 2007. p.107-142.

GLASER, B. G.; STRAUSS, A. L. *The discovery of grounded theory*. Chicago: Aldine, 1967.

INGLEZ DE SOUZA, L. F. N.; Brito, M. R. F. Crenças de autoeficácia, autoconceito e desempenho em matemática. Estudos de Psicologia (Campinas), 2007, p.193-201.

JAVARONI, S. L.; SANTOS, S. C. dos; BORBA, M. C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v.13, n.1, pp.197-218, 2011.

JUSTULIN, A. M. A formação de professores de matemática no contexto da Resolução de Problemas. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro/ São Paulo: UNESP, 2014.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução Heloísa Monteiro e Francisco Settieri. Porto Alegre: Artes Médicas/UFMG, 1999.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas como Prática Sociointeracionista. Rio Claro: Bolema, v. 29, n. 53. dez/ 2015.

LEITE, F.T. Metodologia Científica: métodos e técnicas de pesquisa: monografias, dissertações, teses e livros. São Paulo: Ideias & Letras, 2008.

LESTER, F. O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In D. Fernandes, A. Borralho; G. Amaro. Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular. Lisboa: IIE, 1994, p. 13-34.

LIMA, S. M. Práticas pedagógicas de professores no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental e a Resolução de Problemas. Tese (Doutorado em Educação). Marília/São Paulo: UNESP, 2017.

LUNA, S. V. de. Planejamento de pesquisa: uma introdução. 2 ed. São Paulo: EDUC, 2013.

LYONS, J. Linguagem e Linguística: uma introdução. São Paulo: LTC, 2013.

NCTM. *National Council of Teachers of Mathematics. An Agenda for Action*. Reston: NCTM, 1980.

______. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

______. Professional Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1991.

______. Assessment Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

______. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NÖTH, W. Panorama da Semiótica*: de Platão a Peirce*. São Paulo: Annablume, 2008.

NUNES, C. B. O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Tese de Doutorado. Rio Claro/São Paulo: UNESP, 2010.

OLIVEIRA, G. P. Colaboração e multidimensionalidade como elementos para a avaliação da aprendizagem em curso on-line. Revista de Ciências Exatas e Tecnologia, v. II, pp.30-45, 2007.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatro operações. Revista de Educação Matemática, São José do Rio Preto, SP, ano 6, n. 4, p.19-26, 1998.

_____________. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-220

_____________; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs). Educação Matemática pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

ONUCHIC, L. R. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema. Boletim de Educação Matemática. UNESP. Rio Claro, v. 25, p. 73-98, 2011.

_____________; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Paco Editorial. Jundiaí. 2014.

ORLANDI, E. P. Discurso e leitura. 6ed. São Paulo: Cortez; Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2001.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: Sílvia Dias Alcântara Machado (Orgs). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

PAULINO, G. et al. Tipos de texto, modos de leitura. Belo Horizonte: Formato, 2011.

PIRES, C. M. C. P. Implementações de inovações curriculares em matemática: embates com concepções, crenças e saberes de professores. In: MARANHÃO, C. (Org). Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio: pesquisas e retrospectivas. São Paulo: Musa, 2009.

POLYA, G. How to Solve It. Princeton: Princeton University Press, 1945.

_________. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A solução de problemas: aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANTAELLA, L. O que é semiótica. Coleção primeiros passos. São Paulo: Brasiliense, 2003.

SANTOS, G. L. dos. Os Registros de Representação Semiótica mobilizados por acadêmicos de um curso de Ciências Contábeis em Resolução de Problemas. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Londrina/Paraná: UFL, 2014.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. *Developing Understanding in Mathematics*. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. Reston: NCTM, pp.31-42, 1989.

SEVERINO, A. J. Metodologia do Trabalho Científico. 26 ed. São Paulo: Editora Cortez, 2007.

SOUZA, H. T. de. Um estudo com professores do Ensino Médio sobre Função Modular por meio de Resolução de Problemas utilizando o software Geogebra como estratégica pedagógica. Mestrado Profissional em Ensino da Matemática. São Paulo: PUC, 2013.

______________. Reflexões de professores sobre Resolução de Problemas matemáticos: um estudo com professores do ensino médio sobre Função Modular por meio de Resolução de Problemas utilizando Geogebra. São Paulo: Novas Edições Acadêmicas, 2016.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum.* In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Reston: NCTM, p.1-22, 1990.

STRAUSS, A. L.; CORBIN, J. *Basics of qualitative research: grounded theory, procedures and techniques. Newbury*: SAGE,1990.

STRAUSS, A. L.; CORBIN, J. *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing Grounded Theory*. California: SAGE, 1997.

THIEL, A. A. Práticas matemáticas no plano cartesiano: um estudo da coordenação de registros de representação. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnologia). Florianópolis/ Santa Catarina: UFSC, 2013.

VAN DE WALLE, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics*. New York:Longman, 2001.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n.11, p.79-97, set. 2007. Disponível em: <http://www. fisem. org/paginas/union/info.php?id=232>. Acesso em 15 março 2018.

ANEXOS

COSTA, L. M. da. A compreensão em atividades de modelagem matemática: uma análise à luz dos registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Londrina: UEL, 2016.

DUTRA, D. S. A. Resolução de problemas em ambientes virtuais de aprendizagem num curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.

FELIX, A. C. M. Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências). Londrina. UEL, 2014.

FERNANDES, M. B. S. Funções lineares no ensino médio: contextualizações e representações. Tese (Doutorado em Educação). Paraíba: UFPB, 2014.

FERREIRA, N.C. Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro/São Paulo: UNESP, 2017.

FONSECA, A. J. S. O ensino da análise combinatória: um estudo dos registros de representação semiótica por meio de sequência didática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Sergipe: UFS, 2015.

FRIZZARINI, S.T. Estudo dos Registros de Representação Semiótica: implicações no ensino e aprendizagem da álgebra para alunos surdos fluentes em língua de sinais. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Maringá: UEM, 2014.

HSIA, Y. W. Resolução de problemas: um estudo sobre seu processo evolutivo nos Estados Unidos, na China e no Brasil. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2013.

HUANCA, R. R. H. A Resolução de Problemas e a modelização matemática no processo de ensino-aprendizagem-avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro/São Paulo: UNESP, 2014.

LENARTOVICZ, I. G. Aplicação da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de Administração. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2013.

LIED, R. Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de Registros de Representação Semiótica. Dissertação (Metrado em Educação Matemática). Santa Maria. UFSM, 2016.

LIMA, J. L. S. Solução de problemas de matemática: um estudo sobre os procedimentos usados por estudantes universitários em questões baseadas no ENEM e nos vestibulares da Unesp e Fuvest. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência). Bauru: UNESP, 2016.

LINO, M. A. Os Registros de Representação Semiótica na Aprendizagem de derivada. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Santa Cruz: UESC, 2015.

MELO, E. M. A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2015.

MENDONCA, R. R. Habilidades de Resolução de Problemas: desenvolvimento de uma medida e relações com o método Montessori. Tese (Doutorado em Psicologia). Minas Gerais: UFJF, 2017.

MORAIS, R. S. O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em Educação Matemática - um inventário a partir de documentos dos ICMEs. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 2015.

PROENÇA, M. C. A resolução de problemas na Licenciatura em Matemática: análise de um processo de formação no contexto do estágio curricular supervisionado. Tese (Doutorado em Educação para Ciência). Bauru: UNESP, 2012.

RUPPENTHAL, R. A habilidade argumentativa e a capacidade de resolver problemas nos anos finais do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Educação em Ciências). Santa Catarina: UFSM, 2017.

SILVA, C. R. Conversão de registros de representação: desenvolvimento de aplicativos para o ensino-aprendizagem de funções. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem). Santa Catarina: Universidade do Sul de Santa Catarina, 2009.

SILVA DA, C. R. Signos peirceanos e registros de representação semiótica: qual semiótica para a matemática e o ensino? Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2013.

SILVA, E. R. A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval. Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2015.

SOUZA, A. C. P. Análise combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro/ São Paulo: UNESP, 2010.

VOGADO, G. E. R. O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de integral, por meio da resolução de problemas. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: PUC, 2014.