

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

MARIA ELIZABETH DE OLIVEIRA BORGES

**UM MAPEAMENTO DE PESQUISAS A RESPEITO DO
ESTUDO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO
FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO (2008 – 2017)**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2018**

MARIA ELIZABETH DE OLIVEIRA BORGES

**UM MAPEAMENTO DE PESQUISAS A RESPEITO DO
ESTUDO DE ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO
FUNDAMENTAL E ENSINO MÉDIO (2008 – 2017)**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva.

**PUC/SP
2018**

BANCA EXAMINADORA

Profª Dra. Maria José Ferreira da Silva
(Orientadora)

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP)

Profª Dra. Barbara Lutaif Bianchini (PUC/SP)

Prof. Dr. Adilson de Morais (MACKENZIE)

Prof. Dr. André Ricardo Magalhães (UNEB)

O presente projeto se adere ao projeto maior **Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos Pea- Mat/Dimat**, aprovado pela FAPESP processo 2013/23228-7, desenvolvido em parceria entre a PUC-SP e a PUC-PERU, pelo grupo de pesquisa PEA-MAT.

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **São Paulo e Data:** _____

À **Deus**, a quem rendo toda honra
e toda glória

Ao **Elói Felipe e Guilherme**,
amores de minha vida

Agradeço à **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES**, pela bolsa de estudos concedida, o que permitiu o desenvolvimento deste estudo.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, onisciente, onipotente e onipresente, pelo seu infinito amor, pela força e sustento em todos os momentos de minha vida.

À Professora Doutora **Maria José Ferreira da Silva**, por me acolher e não desistir de mim, pelas orientações precisas, paciência e exemplo de pessoa e profissional.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. **Saddo Ag Almouloud**, Prof^a Dra. **Barbara Lutaif Bianchini**, Prof. Dr. **Adilson de Moraes** e Prof. Dr. **André Ricardo Magalhães**, por suas preciosas contribuições.

Ao Prof. Dr. **Edson Rodrigues da Silva**, por suas valiosas contribuições.

À **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES**, por me conceder a bolsa, essencial para a permanência e conclusão do Doutorado na PUC-SP.

A meus pais, **Antonio e Jesulina**, exemplos de vida e dedicação, que me deram a base para eu tornar-me a pessoa que sou e permitir mais uma conquista na vida e as minhas irmãs **Maria Aparecida** e **Alessandra**, pelo amor e contínuo apoio e a minha cunhada **Edilene** que tanto me auxiliou nos momentos em que não pude estar presente em minha casa.

A meu marido **Elói**, amor de minha vida, amigo, intercessor, cúmplice de todos os momentos que dedicou todo seu tempo a meu lado nestes últimos anos, sempre me fazendo acreditar que chegaria ao final de meu doutorado.

A meus filhos, **Felipe** e **Guilherme** que são minhas fontes de inspiração, por cuidarem de mim e por terem me dado todo o suporte necessário para conclusão deste estudo e minha filha do coração **Polyane**, por acrescentar alegria a minha vida. Amo vocês!

À **Elza Prado**, por me ouvir e ajudar a aliviar minha alma e pelas palavras de força e ânimo.

Às amigas **Noêmia** e **Ana**, pelas palavras de força e ânimo, pelas trocas de ideias, pelo carinho, pelas orações, enfim, por estarem presentes em momentos fáceis e difíceis e por me ajudarem a superar os medos e inseguranças. À amiga **Nilza** pelo companheirismo, orações e seu carinho.

Ao **grupo de oração (Koynonia)**, pelo apoio e orações, em especial, ao **Toninho, Denise, Neilton, Lilian, Mariléia, Fabiana** e **Edmilson**.

Ao **Pastor Fernando** e à **Priscila**, obrigada pelas pregações e louvores que encheram minha alma de força e esperança para enfrentar cada dia de minha vida.

Aos demais colegas presentes em minha caminhada, em especial, **Edvonete, Jéssica e Rosana**. Às colegas de profissão presentes em minha vida, sempre com bons conselhos e palavras de ânimo, em especial, **Patrícia, Rose, Celina, Ana Paula e Luciana**.

À coordenadora **Jaqueline Cardoso** e diretora **Mirian**, por terem me acolhido quando necessitei iniciar o doutorado. À coordenadora **Sisleide Santanna** e diretora **Elaine**, pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

Agradeço ao grupo de pesquisa **PEA-MAT**, pelas discussões e troca de experiências.

Aos **professores da PUC-SP**, pelos preciosos ensinamentos durante as disciplinas, pelas orientações e dicas precisas para a conclusão deste estudo, em especial à Prof^a Dra. **Cileda de Queiroz e Silva Coutinho** e ao Prof. Dr. **Saddo Ag Almouloud**, tenho grande carinho por ambos, agradeço pelas conversas e conselhos.

Aos funcionários do Programa de Estudos de Pós-Graduação em Educação Matemática – PUC/SP, em especial, **Suzanne Lima Freitas**, Assistente de Coordenação de Curso-PEPG em Educação Matemática, pelos incentivos e palavras de apoio e carinho nos momentos difíceis.

Obrigada a todos que participaram de minha caminhada.

BORGES, M. E. O. **Um mapeamento de pesquisas a respeito do estudo de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio (2008 – 2017)**. 2018. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RESUMO

O presente estudo, de abordagem qualitativa de cunho bibliográfico, tem como objetivo apresentar o estado da arte de pesquisas acadêmicas cuja temática envolve os processos de ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, publicadas no período entre 2008 e 2017. O *corpus* de análise constitui-se de 42 pesquisas obtidas, sobretudo, em meio digital, a partir das seguintes bases: Banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES e repositórios de teses e dissertações dos Programas de Pós-Graduação. Para compor os dados de análise, cada trabalho foi fichado, tendo por base, em especial, seus dados bibliográficos e resumos. Dentre os principais resultados obtidos, destacam-se que, das 42 pesquisas coligidas, três eram teses de doutorado e 39 dissertações de mestrado. O mapeamento dessas pesquisas revelou a quantidade de produções por instituição de ensino superior, por regiões e por programas de pós-graduação. A análise das produções foi realizada por meio das categorias: *Linguagem e Pensamento algébrico; Relação entre Álgebra / Aritmética / Geometria; Múltiplas Representações; Materiais / Recursos didáticos; Concepções / Conhecimento; Metodologia de Ensino e Prática Pedagógica*. Pudemos observar que as pesquisas focam mais em alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, do que do Ensino Médio e continuam apontando para as dificuldades dos alunos em construir conhecimentos algébricos, em particular, os que envolvem variabilidade. Os poucos trabalhos que tratam de professores apontam para sua insatisfação com a falta de conexão entre a formação inicial e a prática em sala de aula, além de divergências a respeito de seus conhecimentos para o ensino de Álgebra. Dos trabalhos analisados poucos discutem os documentos oficiais ou livros didáticos a respeito do que propõem para o ensino de álgebra. Além disso, nos trabalhos que tratam de conteúdos específicos nota-se que alguns são mais trabalhados, como é o caso de equações de primeiro e segundo graus, enquanto outros nem são tratados. Assim, para uma melhor compreensão do estado do ensino e da aprendizagem de Álgebra se faz necessário desenvolver pesquisas que tratem do ensino e/ou aprendizagem de outros temas algébricos do Ensino Básico, bem como de análises aprofundadas do currículo proposto para o ensino dispostos em documentos oficiais e/ou livros didáticos, além de investigar os conhecimentos necessários para que os professores tenham condições para ensinar tal assunto, entre outros tantos temas possíveis.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Álgebra. Mapeamento.

BORGES, M. E. O. **A mapping of research on the study of Algebra in the final years of Elementary and High School (2008 - 2017)**. 2018. 197 f. Thesis (Doctorate in Mathematics Education). Faculty of Exact Sciences and Technologies. Pontifical Catholic University of São Paulo, São Paulo.

ABSTRACT

The present study, with a qualitative bibliographical approach, aims to present the state of the art of academic research whose subjects involve the teaching and learning processes of Algebra in the final years of Elementary and Secondary Education, published in the period between 2008 and 2017. The corpus of analysis consists of 42 researches obtained, mainly, in digital media, from the following bases: Bank of Thesis and dissertations of the Coordination of Higher Level Personnel Improvement - CAPES and repositories of theses and dissertations of the Programs post graduate. In order to compose the analysis data, each work was recorded, based, in particular, its bibliographic data and abstracts. Among the main results obtained, we highlight that of the 42 surveys collected, three were PhD's theses and 39 were Master's dissertations. The mapping of these surveys revealed the quantity of productions per higher education institution, by regions and by post-graduate programs. The analysis of the productions was done through the categories: *Algebraic Language and Thinking; Relation between Algebra / Arithmetic / Geometry; Multiple Representations; Materials / didactic resources; Conceptions / Knowledge; Teaching Methodology and Pedagogical Practice*. We could observe that research focuses more on students in the final years of Elementary School than on high school and continues to point out the difficulties of students in constructing algebraic knowledge, particularly those involving variability. The few works that deal with teachers point to their dissatisfaction with the lack of connection between the initial formation and the practice in the classroom, besides divergences regarding their knowledge for the teaching of Algebra. Of the analyzed works few discuss the official documents or textbooks regarding what they propose for the teaching of algebra. In addition, in the works that deal with specific contents it is noticed that some are more worked, as is the case of equations of first and second degrees, while others are not treated. Thus, for a better understanding of the state of Algebra teaching and learning, it is necessary to develop research that addresses the teaching and/or learning of other algebraic subjects in Basic Education, as well as in-depth analyzes of the proposed curriculum for teaching arranged in documents officers and/or textbooks, as well as to investigate the knowledge necessary for teachers to be able to teach this subject, among other possible topics.

Keywords: Mathematics Education. Algebra. Mapping.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Produções de teses e dissertações por Regiões e Estados	58
Quadro 2 – Categoria: Linguagem/Pensamento Algébrico.....	63
Quadro 3 – Categoria Linguagem e Pensamento Algébrico: Concepções e Pensamento Algébrico.....	73
Quadro 4 – Categoria: Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria	77
Quadro 5 – Categoria Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria: Concepções e Pensamento Algébrico.....	82
Quadro 6 – Categoria: Múltiplas representações	85
Quadro 7 – Categoria Múltiplas representações: Concepções e Pensamento Algébrico	94
Quadro 8 – Categoria: Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos	100
Quadro 9 – Categoria Materiais/Recursos tecnológicos: Concepções e Pensamento Algébrico.....	110
Quadro 10 – Categoria: Concepções/Conhecimentos	114
Quadro 11 – Categoria Concepções de Álgebra/Conhecimento: Concepções e Pensamento Algébrico.....	125
Quadro 12 – Categoria: Metodologia de Ensino	129
Quadro 13 – Categoria Metodologia de Ensino: Concepções e Pensamento Algébrico	135
Quadro 14 – Categoria: Prática pedagógica em Álgebra	139
Quadro 15 – Categoria Prática pedagógica em Álgebra: Concepções e Pensamento Algébrico.....	144
Quadro 16 – Ano de publicação, autor, títulos, nível e instituição	193
Quadro 17 – Concepção de Álgebra e Concepção de Educação Algébrica.....	195
Quadro 18 – Pensamento Algébrico.....	197

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultado da consulta ao Banco de Teses da CAPES	55
Tabela 2 – Classificação das Teses e Dissertações por ano	56
Tabela 3 – Quantidade de pesquisas por Instituição de Ensino Superior	57
Tabela 4 – Distribuição das pesquisas de acordo com as categorias e subcategorias...	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 ESTUDOS PRELIMINARES	19
2.1 A ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA	19
2.2 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA	22
2.3 O PENSAMENTO ALGÉBRICO	30
3 PROBLEMÁTICA.....	39
3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
3.2 DELINEAMENTO DO PROBLEMA	46
3.3 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	47
3.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	50
4 ANÁLISE DAS PESQUISAS	53
4.1 DESCRIÇÃO DA SELEÇÃO DAS PRODUÇÕES ACADÊMICAS.....	53
4.2 ANÁLISE DAS PESQUISAS POR CATEGORIAS	59
4.2.1 <i>Linguagem e pensamento algébrico</i>	63
4.2.2 <i>Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria</i>	77
4.2.3 <i>Múltiplas representações</i>	84
4.2.4 <i>Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos</i>	99
4.2.5 <i>Concepções/Conhecimentos</i>	113
4.2.6 <i>Metodologia de Ensino</i>	128
4.2.7 <i>Prática pedagógica em Álgebra</i>	138
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	149
REFERÊNCIAS	159
ANEXO A – RESUMO DAS TESES E DISSERTAÇÕES	167
APÊNDICE A – QUADRO DESCRITIVO	193
APÊNDICE B – QUADRO DE CONCEPÇÕES	195
APÊNDICE C – QUADRO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	197

1 INTRODUÇÃO

Em 1998, iniciei minha trajetória, como professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, na época, assumi as aulas somente como professora eventual, substituindo os professores que faltavam. A partir de 2001, foram me atribuídas aulas de Matemática para os anos finais do ensino Fundamental e Ensino Médio, na modalidade Educação de Jovens e Adultos – EJA.

A partir desse momento, que comecei a ter noção das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de diversos conteúdos de Matemática e o quanto era difícil encontrar caminhos diferenciados que pudessem auxiliá-los. Na ânsia de melhorar meu ensino, busquei por orientações técnicas oferecidas pela Diretoria de Ensino que atendia à escola onde lecionava e participei de diversos minicursos a respeito do ensino de Matemática. Em 2002, fiz um curso de aperfeiçoamento “*Construindo Sempre – Matemática*” oferecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP, em parceria com a Universidade de São Paulo – USP.

Logo após, vieram outros, como o aperfeiçoamento em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP em 2004 e a especialização em Educação Matemática, também pela PUC/SP, em 2006. Este último curso foi um incentivo para meu ingresso no mestrado, em 2007, que cursei na Universidade Cruzeiro do Sul – UNICSUL.

O segundo ano do curso de mestrado, 2008, coincidiu com a implementação, pela SEE/SP, da Proposta Curricular, a todas as escolas do Estado de São Paulo, concretizando-se de vez, em 2009, quando conclui o curso de mestrado.

Com a implantação do currículo oficial do Estado de São Paulo, surgiu o material pedagógico, do qual destacamos o Caderno do Aluno e do Professor (no formato de apostila), além de cadernos específicos com orientações aos coordenadores e diretores.

Na escola em que leciono, fomos instruídos a utilizar apenas o material fornecido pela SEE/SP, o que me trouxe inquietações, visto que os alunos

mostravam grandes dificuldades com os conteúdos apresentados nesses cadernos, pois não tinham conhecimentos anteriores necessários para desenvolver as atividades propostas nesse material. Por conta dessa situação, os gestores com os docentes optaram que o melhor seria utilizar o livro didático, como apoio na aprendizagem de Matemática, mas sempre mantendo o Caderno do Aluno, como principal recurso de ensino e aprendizagem.

Minhas preocupações, em particular, com o ensino de Álgebra já eram extensas, mas ampliaram-se com meu ingresso no Ensino Superior, como professora de Cálculo Diferencial e Integral I, em uma turma de Engenharia de Produção. As dúvidas que surgiram por parte de alguns alunos, em relação às ideias de função, variáveis e incógnitas assemelhavam-se às de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, em particular, 9º ano. A situação mostrou-se tão preocupante, que a coordenação do curso resolveu abrir uma disciplina de Matemática Fundamental, para atender às necessidades dos estudantes com dificuldades em Álgebra.

Estas experiências e meu interesse pelo tema Álgebra motivaram meu ingresso no doutorado e, com isso, meu envolvimento no grupo de pesquisa *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática – PEA-MAT*, que tem como eixo temático o “estudo do processo de formação e desenvolvimento de conceitos, conforme os paradigmas da Educação Matemática”.

Tendo em vista o currículo de Matemática a ser ensinado nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, temos a nova Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) que dispõe em seu texto que o ensino de Álgebra deve ser retomado, aprofundado e ampliado nos anos finais do Ensino Fundamental, visto que, esse tema surge nos anos iniciais, mediante atividades simples, como por exemplo, relação de equivalência, sem a utilização de letras para expressar regularidades, mas, por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico, ou seja, por meio de um tipo raciocínio em que o aluno tem habilidades, o qual “é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (BRASIL, 2017, p. 226)

Mais adiante, o BNCC (BRASIL, 2017) destaca o ensino de Álgebra nos

anos finais do Ensino Fundamental, evidenciando aspectos de como estabelecer conexão entre variável e função, incógnita e equação. A respeito do Ensino Médio, sua base curricular vem sendo elaborada.

O BNCC (BRASIL, 2017), diferentemente dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), traz seu conteúdo de forma detalhada, descrevendo o que deve ser trabalhado a cada ano de escolaridade, inclusive, indicando a disposição de conteúdos algébricos, desde os 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Percebemos que a oferta de novos currículos ampara-se na busca pela melhoria da disposição de conteúdos matemáticos a serem trabalhados no Ensino Fundamental e Ensino Médio. Esta é uma questão relevante para a área de Educação Matemática, tanto que apresentam-se diversos estudos a respeito desse assunto. Entre os vários pesquisadores, citamos Chevallard (1984; 1989) que realizou uma investigação da reforma curricular da França, tendo como centro de atenção o ensino e a aprendizagem de Álgebra.

Chevallard (1984) destaca que, no programa curricular francês, a Álgebra era vista como uma ferramenta utilizada para desenvolver de maneira formal e não funcional as atividades algébricas, ou seja, fatorar e simplificar expressões, sem a preocupação de empregá-las para facilitar as tarefas, impedindo o estudante de encontrar o caminho mais adequado para alcançar a resolução.

Outros pesquisadores, como Bolea, Bosch e Gascón (2004) também discorrem a respeito de Álgebra, quando se referem à modelização algébrica, como uma ferramenta que serve para descrever, generalizar e justificar a resolução de problemas, agrupar técnicas para resolução de novos problemas, além de contribuir para o estudo de grandezas de qualquer tipo, evoluindo, assim, para uma modelização funcional. Tendo por base esse contexto, os autores afirmam que, no ensino secundário da Espanha, pouco se conhece a respeito de Álgebra, como ferramenta de modelização.

Com base nesse cenário, surge a intenção de realizar uma investigação do tipo estado da arte a respeito de pesquisas que apresentam estudos sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e

Ensino Médio, no período entre 2008 e 2017. Para isso, estruturamos o presente trabalho em cinco capítulos.

Iniciamos com a introdução, em que descrevemos nossa trajetória profissional e acadêmica e um breve relato a respeito de Álgebra e modelização algébrica conforme, as ideias de Chevallard (1984; 1989;1990), Gascón (1997) e Bolea; Bosch e Gascón (2004)

No segundo capítulo, apresentamos os estudos preliminares onde discorremos a respeito de alguns estudos a respeito de concepções de Álgebra e do pensamento algébrico. Embora não estejam relacionados diretamente com nossa questão de pesquisa, servem de subsídio para nossas análises, pois discorrem a respeito do conhecimento, ensino e aprendizagem de Álgebra.

No terceiro capítulo, trazemos a problemática, em que apresentamos a revisão bibliográfica, o problema da pesquisa, a metodologia e os procedimentos metodológicos

No quarto capítulo, apresentamos a análise das pesquisas coletadas. Este capítulo é composto pela descrição da seleção das produções acadêmicas e o estado da arte da pesquisa em ensino e aprendizagem em Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio produzidas em programas de Pós-Graduação *strictu sensu* brasileiros no período entre 2008 e 2017.

No quinto capítulo, apresentamos as considerações finais da pesquisa.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo realizamos um estudo preliminar em que apresentamos algumas ideias a respeito de Álgebra, como Aritmética generalizada; algumas concepções a respeito de Álgebra e do pensamento algébrico que nos ajudarão a compreender as teses e dissertações mapeadas.

2.1 A ÁLGEBRA COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA

Krahe (2000) discorre que, para realizar uma discussão acerca de currículo, é importante primeiramente compreender seu significado. Para o autor:

A ideia de currículo sofre transformações através dos tempos. Usualmente entendemos currículo como textos para resolver os problemas de representação que incluem: materiais escritos para os estudantes; instrução e conselhos para os professores; "texto" verbal das exposições de classe; padrões não verbais da atividade de classe ou da vida da escola (KRAHE, 2000, p. 86)

Nos últimos anos, os estudos a respeito do assunto vêm se expandindo, pois, a composição curricular de Matemática para a educação básica vem sendo palco de discussão por diversos pesquisadores. Inserido nesse cenário, apresenta-se Chevallard (1984; 1989; 1990) que discute, em seu texto "*Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement*", a organização Matemática no programa curricular Francês com viés voltado aos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra.

O autor discorre que os programas do ciclo de ensino secundário, conhecido como *collèges*, marcados pela "reforma das matemáticas modernas" trouxe modificações estruturais que se refletem até os dias atuais. Em 1945, o quarto ano, *quatrième*, apresenta em seu programa curricular uma separação entre Aritmética e Álgebra que, por sua vez, desaparece do programa de 1971, conforme o autor, trouxe graves consequências ao ensino de Matemática.

Com o intuito de evidenciar o desaparecimento de Álgebra nos programas curriculares da França, Chevallard (1984) faz, em um primeiro momento, uma incursão à antiga organização algébrica disposta no passado. Menciona os "Elementos de Álgebra" de Euler, apresentando a disposição dos conteúdos

algébricos, que divide-se em duas partes em que se concentram seções com conteúdos algébricos. Na primeira parte desta publicação, encontram-se os cálculos com números relativos que envolvem as quatro operações, raízes, potências, logaritmos, cálculo algébrico, cálculo de relações e proporções e cálculo de equações algébricas, assim como a resolução de equações. Na segunda parte, chamada de análise indeterminada, os assuntos concentram-se em diferentes métodos de resolução de equações de graus superiores.

Dos temas apresentados nesta obra, destacam-se os números algébricos, o cálculo sobre equações algébricas e as equações algébricas, que fazem parte dos *sixième* (sexto ano) e *cinquième* (quinto ano), no período de 1969 – 1970 e 1977 – 1978. A partir da reforma do programa curricular francês, houve uma diminuição dos conteúdos que envolvem o cálculo algébrico e o estudo de equações, assim como apresenta Chevallard (1984) em uma comparação de listas de exercícios em antigos manuais de 1962, frente aos mais avançados no ano de 1973.

Chevallard (1989) ressalta que o desaparecimento de Álgebra nos programas curriculares da França confirmou-se com a continuação da reforma curricular sob o ministério de Jean-Pierre Chevènement, na década de 1980, em que houve uma promoção ao numérico frente à fragmentação e desaparecimento da aprendizagem de noções algébricas. Em vista disso, há uma ênfase dada a utilização de técnicas operatórias, ou seja, a um cálculo formal, orientado para desenvolver e fatorar, que gera falta de compreensão da Álgebra funcional trabalhada no *collège*.

Chevallard (1984; 1989) e Gascón (1994) observam no currículo de Matemática a existência de um modelo implícito, que relaciona a Álgebra com uma Aritmética generalizada. Tal situação apresenta-se no desenvolvimento de operações algébricas, nas quais as letras são vistas como números, mas o apropriado seria ter a Álgebra, como uma ferramenta da Aritmética.

A Álgebra como Aritmética generalizada vem sendo assunto recorrente em investigações em Educação Matemática, discutidas por Chevallard (1984; 1989; 1990), Gascón (1994, 1999) e Bolea (2002) entre outros pesquisadores

Estes estudiosos mencionam que o modelo implícito que se insere no cerne

da instituição escolar é o de Álgebra, como uma Aritmética generalizada, mas embora a Álgebra se contraponha à Aritmética, a primeira depende veemente da segunda em uma relação biunívoca. De maneira simples, a Álgebra elementar caracteriza-se por sua linguagem particular, como afirma Gascón (1999), por manusear símbolos que são interpretados, geralmente, como números desconhecidos ou como números generalizados, ou ainda, como variáveis,

Na prática de ensino de Álgebra, conforme declara Gascón (1994), a aritmética generalizada surge em problemas algébricos sem distinguir se estes envolvem a resolução de equações, funções ou mesmo a construção de fórmulas, o que significa resolver problemas de Álgebra como se fossem aritméticos, o que causa problemas na aprendizagem desse tema. Temos de considerar que a resolução e os resultados de problemas aritméticos envolvem números e os problemas algébricos a relação entre grandezas, tornando inviável que estes sejam completamente compreendidos, como uma generalização de Aritmética.

Por outro lado, Bolea (2002) refere-se à Álgebra como Aritmética generalizada a partir de outras características, além das já mencionadas. Nas palavras da autora, a transição da Aritmética para a Álgebra não deve se limitar somente à aplicação de propriedades, mas também deve descrevê-las e executá-las; a escrita da expressão algébrica diferencia-se dos dados conhecidos e das incógnitas e, ainda, as atividades algébricas são vistas como de difícil manipulação, sobretudo, as incógnitas, porque é difícil lhes conferir um significado objetivo. A autora também ressalta que “outra dificuldade importante da álgebra escolar reside na necessidade de atribuir aos símbolos que representam as operações (+, -, *, /) um significado diferente (e não sempre único) do que eles tinham na linguagem aritmética” (BOLEA, 2002, p. 72).

Até o momento, evidenciou-se a preocupação com o currículo de Matemática e a desarticulação e desaparecimento de Álgebra no currículo escolar, como destacou Chevallard (1984; 1989). Não menos importante, temos o fato de que a Álgebra é considerada uma Aritmética generalizada em muitas instituições escolares, levando diversos pesquisadores a propor um modelo alternativo para o trabalho com questões algébricas, de modo que ela venha a ter sentido e, assim, seja possível resplandecer novamente sua “razão de ser” no âmbito escolar.

2.2 CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA

Em particular, a Álgebra também apresenta concepções que envolvem tendências a respeito desse tema, sendo investigada por pesquisadores que buscam compreender as situações que interferem em seu ensino e em sua aprendizagem.

Usiskin (1995) partiu do pressuposto de que a Álgebra relaciona-se com a compreensão das letras, comumente chamadas de variáveis, estudadas na escola básica. O autor chama a atenção de que são vários os conceitos de variáveis que podem ser utilizados com finalidades diferenciadas, como por exemplo, fórmula, equação e função, entre outras. Ao mesmo tempo, alerta para o cuidado que o aluno deve tomar ao achar que variáveis são letras que representam números, cujo pensamento é apoiado por muitos professores. Usiskin (1995) ainda destaca que tal fato exige maior percepção e cuidado por parte dos educadores, pois, ao analisar-se outras situações da matemática observa-se que nem sempre isso é apropriado.

[...] Na Geometria, as variáveis, muitas vezes, representam pontos, como se vê no uso de A, B e C, quando escrevemos “se $AB = BC$, então, ΔABC é isósceles”. Na lógica, as variáveis p e q, muitas vezes, representam proposições; na análise, a variável A pode representar uma matriz, ou variável v, um vetor; em Álgebra superior, a variável pode representar uma operação. [...] (USISKIN, 1995, p. 11)

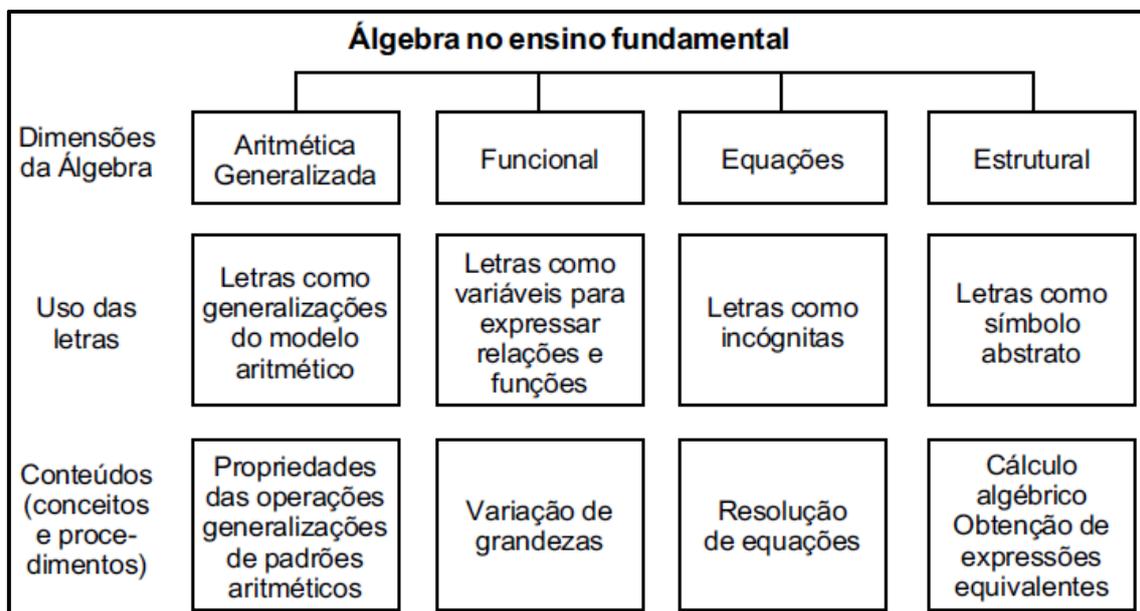
Usiskin (1995, p. 12) ainda argumenta “até que ponto pode-se exigir dos alunos a capacidade de manejar, por si próprio, diversas técnicas manipulatórias?” e “qual o papel das funções e qual o melhor momento de introduzi-las?”. Estas duas questões relacionam-se com as finalidades do ensino e aprendizagem, objetivos e concepções de Álgebra.

Assim, para descrever como as finalidades de Álgebra relacionam-se com o uso das variáveis, Usiskin (1995) apresenta quatro concepções: a Álgebra como Aritmética generalizada; a Álgebra como estudo de procedimentos; a Álgebra como estudo de relações entre grandezas e a Álgebra como estudo das estruturas.

Percebemos uma convergência apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) com as ideias descritas por Usiskin (1995), pois

o documento manifesta o seguinte texto: “Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra” (BRASIL, 1998, p. 116). O mesmo documento apresenta por meio dos dados da figura 1 os diferentes usos das variáveis

Figura 1 - Síntese das diferentes interpretações de Álgebra escolar e as diferentes funções das letras



Fonte: BRASIL, 1998, p. 116

Usiskin (1995) discorre a respeito destas concepções, ponderando que a primeira delas, Aritmética Generalizada apresenta as variáveis como generalizadoras de modelos, ou seja, a Álgebra é interpretada como uma continuação das atividades Aritméticas, em que a introdução de letras caracteriza o início de seu ensino. Desse modo, os alunos são instruídos a traduzir e generalizar as variáveis apresentadas em situações Aritméticas, encontrando assim, modelos matemáticos.

Na concepção de Álgebra como Estudo de Procedimentos, o autor destaca que as variáveis são interpretadas como incógnitas ou constantes e a resolução de problemas que envolvem as equações baseia-se em *simplificar* e *resolver*. O maior problema decorre das dificuldades que podem ser apresentadas por alguns alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra, pois não compreendem o significado ou finalidade das letras nas equações, visto que a incógnita aparece como um valor

desconhecido.

A terceira concepção, Estudo de Relações entre Grandezas, conforme Usiskin (1995), diferencia-se da anterior por não ter incógnita, pois as “variáveis variam” e são consideradas ou um argumento, ou um parâmetro. Nessa concepção desponta a ideia de variável dependente ou independente sendo oportuno para a construção da noção básica de função.

Na quarta e última concepção, Estudos das Estruturas, conforme Usiskin (1995, p. 17), a variável é vista como um símbolo qualquer, em que “o estudo da Álgebra nos cursos superiores envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais”. Esta concepção difere-se das anteriores, não há generalização da variável nem incógnitas ou argumentos. Nessa concepção, a Álgebra é reconhecida pelo estudo das estruturas, no qual as variáveis não assumem valor numérico, mas podem ser manipuladas de modo a se obter expressões equivalentes. O estudo de monômios e polinômios é o meio pelo qual esta dimensão pode ser trabalhada no Ensino Fundamental.

No final de seu texto, Usiskin (1995, p. 21) declara que a Álgebra é “a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas”, sendo mais do que um instrumento para resolução de problemas, não tendo sentido classificá-la apenas como Aritmética generalizada.

Lins e Gimenez (1997) compartilham das ideias de Usiskin (1995) a respeito das concepções de Álgebra, diferenciando-se apenas quanto a maneira como são vistas por esses autores. Enquanto, Usiskin (1995) preocupa-se em abordar e dar ênfase ao papel das letras na atividade algébrica, Lins e Gimenez (1997, p. 105) “[...] discutem uma abordagem para o ensino e a aprendizagem de Álgebra” trazendo uma abordagem pedagógica a respeito das concepções de Educação Algébrica.

Os autores discorrem que, embora haja um consenso de quais conteúdos devem ser trabalhados no ensino de Álgebra, como por exemplo, equações, funções, entre outros, não existe concordância a respeito do que é o pensar algebricamente. Consideram que a compreensão de Álgebra depende do que se propõe para a sala de aula, pois, conforme Lins e Gimenez (1997, p. 105) “As propostas para sala de aula resultam *sempre* de visões do que seja aquilo que

queremos promover por meio do ensino”.

Diante disso, os autores têm em vista discutir algumas concepções para o ensino e aprendizagem de Álgebra. Eles trazem a ideia de que as abordagens de Educação Algébrica têm origem em distintas compreensões das atividades propostas para a resolução de problemas, e, assim, indicam algumas concepções: Letrista; Letrista-facilitadora e Modelagem Matemática. Para os autores, a concepção Letrista relaciona-se com a manipulação de letras nas atividades algébricas, resume-se a cálculos literais relativos ao desenvolvimento de exercícios para aplicação de técnicas sem o mínimo de reflexão. Acrescentam que essa concepção é muito frequente nos livros didáticos brasileiros e torna-se comum nas práticas em sala de aula, não apenas pela conformidade dos professores, mas, por ser uma visão que eles já têm e que, talvez, não conheçam outro caminho para o ensino de Álgebra.

Apresentam a segunda concepção, Letrista-facilitadora, que se caracteriza pela utilização de letras nas atividades algébricas, porém, introduzidas por meio da abstração resultante da supervalorização de situações concretas. Esta concepção, ainda de acordo com os autores, apresenta-se em atividades que envolvam o ensino e a aprendizagem de áreas, como meio para ensinar produtos notáveis, ou ainda, no método da balança de dois pratos, como recurso para o ensino de equação, pois muitos acreditam que assim seja mais fácil aprender conceitos algébricos. Lins e Gimenez (1997, p. 108) pontuam que, a concepção Letrista-facilitadora ampara-se na “ideia de que uma certa estrutura que é posta em jogo na manipulação de concretos é, depois, por um processo de abstração, transformada em formal”. Diante disto, enfatizam que essa abordagem seja insuficiente para o ensino de Álgebra, pois, muitas vezes, o aluno não consegue sair de uma situação concreta para a formal, o que se torna mais um dificultador para a aprendizagem do conteúdo.

Para a terceira concepção, Modelagem Matemática, Lins e Gimenez (1997), consideram o trabalho com o concreto, mas, de um norte diferente da concepção anterior. Neste caso, o concreto relaciona-se com situações reais e não apenas ilustrativas, como apresentam os livros didáticos. Para Lins e Gimenez (1997, p. 109), “a Educação Algébrica se dá na medida em que a produção de

conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta e não como objeto primário do estudo”. Esta concepção, conforme avaliam os autores, possibilita aos alunos mostrarem como aplicar os conteúdos algébricos em situações reais. Argumentam que para o trabalho com a Modelagem Matemática, não é necessário que o professor saiba tudo, mas, que esteja receptivo para novas concepções, ou seja, o que não souber realizar seja incentivo para um novo aprendizado.

Uma das sugestões de Chevallard (1989) diz respeito ao uso da *modelização* matemática, como uma ferramenta para resolução de problemas algébricos, relacionando a Álgebra com a própria Matemática ou com outras áreas do conhecimento, como a biologia, economia, física, entre outras.

A modelização é uma ferramenta de apoio ao desenvolvimento de competências algébricas, sendo um meio para criar modelos algébricos, e, assim dar sentido e compreensão à Álgebra escolar. A competência algébrica é avaliada por meio de expressões algébricas, problemas, modelização matemática e objetos de Álgebra manipulados durante a resolução de problemas. Assim, a função da competência algébrica é adaptar-se às interpretações de expressões para usá-las de forma variada-

Chevallard (1989) apresenta um esquema com três etapas que auxiliam no entendimento a respeito de *modelização* matemática e que, em última instância, podem fundamentar o estudo de noções de Álgebra

1ª etapa – definir o sistema que pretende explorar, escolhendo o problema que queremos estudar. Para exemplificar esta etapa, o autor apresenta uma atividade matemática proposta para uma escola primária: *Tenho 23 bolas. Desse total, sete são azuis e o restante são pretas. Quantas bolas são pretas?*

2ª etapa – construção do modelo, identificando, nomeando e estabelecendo relação entre as variáveis. O problema acima descreve três variáveis: o número total de bolas, 23; o número de bolas azuis, sete; e o número de pretas é desconhecido, podemos utilizar a letra x ou outra qualquer para representá-lo. Após estabelecer a relação entre as variáveis, construímos o seguinte modelo por meio da expressão $x+7=23$.

3ª etapa – este é o momento de resolver o problema, trabalhando com o modelo construído que configura uma equação de 1º grau “ $x+7=23$ ”, encontrar o valor desconhecido e interpretá-lo, neste caso, o valor desconhecido representa o número de bolas pretas.

Assim, o autor defende que o processo de *modelização* nos dá uma visão geral do quadro a ser estudado, tanto da atividade matemática que se passa do primário à universidade, como das possíveis diferenças entre a Aritmética e a Álgebra.

Bolea (2002) corrobora as ideias de Chevallard (1989) a respeito da *modelização* algébrica, atentando que esta é vista, como uma importante ferramenta que permite a manipulação da estrutura dos problemas, além auxiliar na descrição, justificação e utilização de técnicas, também é um instrumento que contribui para unificar vários tipos de problemas, técnicas e tecnologia, o que facilita o surgimento de novos tipos de problemas.

Optamos pelas ideias de Kieran (2004a) na discussão a respeito das concepções de Álgebra, pois a autora aborda as ideias de diversos autores, entre eles, Usiskin e Lee que, com suas ideias a respeito de Álgebra, dão suporte a Kieran (2004a), para elaborar um modelo que envolve atividades de Álgebra: atividades geracionais, atividades de transformação e atividades Metanível/global

As atividades geracionais envolvem a formação de expressões e equações, tendo como objetos implícitos as incógnitas e as variáveis:

(i) equações contendo incógnitas que representam situações problemas quantitativos, (ii) expressões de generalidade decorrente de padrões geométricos ou sequências numéricas, e (iii) expressões das regras que regem as relações numéricas. (KIERAN, 2004a, p. 23).

A autora considera que, grande parte da Álgebra, encontra-se centrada nessa atividade, que tem como foco a interpretação de situações, propriedades, padrões e relações. Kieran (2004) estabelece duas estruturas, Aritmética generalizada e funções, quando o assunto é criar significados, embora essas duas estruturas apresentem algumas diferenças. Enquanto na Aritmética generalizada, as expressões e as equações são consideradas representações de processos numéricos e têm as incógnitas como prioridade sobre as variáveis, as funções têm

as incógnitas como um caso especial de variável.

Em relação às atividades transformacionais, Kieran (2004a, p. 24) descreve, que, por exemplo, nessas atividades encontram-se “agrupar termos semelhantes, fatoração, adição e multiplicação de expressões polinomiais, resolução de equações, simplificação de expressões, expressões e equações equivalentes e assim por diante”. Este tipo de atividade focaliza manter a equivalência entre as equações e expressões, mesmo quando ocorre uma transformação nelas. Para Kieran (2004a), estas atividades apresentam-se em livros didáticos, em que as regras de manipulação de expressões e equações recebem mais destaque do que os conceitos que sustentam tais regras. Destaca ainda que nas atividades transformacionais estas regras são executadas de modo automático, sem ao mesmo serem analisadas.

A *atividade metanível/global* é descrita pela autora, como uma atividade que se relaciona diretamente com a Álgebra, que opera como uma ferramenta e envolve outros contextos que não sejam só a Álgebra, como na modelagem, na resolução de problema, na generalização e na percepção de estruturas, entre outros. A autora ainda discorre que essa atividade não pode se separar das outras atividades geracional e transformacional, do contrário, a atividade metanível/global não teria sentido.

Outros autores referem-se às concepções de Educação Algébrica, entre eles, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que evidenciam as características das concepções mais frequentes no decorrer do desenvolvimento histórico da Álgebra: linguístico-pragmática; fundamentalista-estrutural e fundamentalista-analógica.

A concepção de Educação Algébrica, denominada por esses autores como linguístico-pragmática (vigente no século XIX e início do século XX), baseia-se resolução de problemas de forma puramente mecânica e no uso de técnicas requeridas pelo “transformismo algébrico”, ou seja, para o trabalho com a Álgebra seria necessário ao aluno a utilização de regras e propriedades para obtenção de expressões algébricas, sendo isso somente suficiente para desenvolver a capacidade de resolver problemas que nem sempre se relacionavam com situações do cotidiano. Outra característica particular dessa concepção, diz respeito ao fato de que, para o ensino de Álgebra, seguia-se sempre uma sequência de tópicos,

que exigiam a aquisição de procedimentos mecânicos indispensáveis à aprendizagem dos alunos. Conforme os autores, ainda hoje, observamos a concepção linguístico-pragmática nas práticas pedagógicas de alguns professores, que zelam pela memorização de regras que se apresentam em livros didáticos, como por exemplo, os produtos notáveis, a fatoração, equação de 2º grau, a trigonometria, a progressão Aritmética e a geométrica, entre outras. Nesses casos, a aquisição do conhecimento ocorre por meio do estudo de técnicas para resolução de atividades e avaliações.

Em discordância à esta situação, o Movimento da Matemática Moderna propôs uma nova concepção, denominada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) de fundamentalista-estrutural. O próprio nome desta concepção tem por base as propriedades estruturais das operações, que servem para justificar cada passagem no transformismo algébrico, assim os alunos conseguiriam adquirir a capacidade de operar com conteúdos algébricos. O papel do ensino de Álgebra, nesta concepção, conforme os autores, é fornecer fundamentação lógica para toda a matemática escolar, o que trouxe uma reorganização de determinados tópicos algébricos, como conjuntos numéricos, propriedades estruturais, equações e inequações de 1º grau, expressões algébricas, valores numéricos, operações e fatorações, por novos conteúdos, como funções polinomiais de 1º e 2º graus, entre outros.

A última concepção chamada fundamentalista-analógica tem características pedagógicas que, de acordo com os autores, propõem a resolução de problemas, procurando manter o caráter fundamental e instrumentalista da Álgebra. Utiliza os recursos analógicos geométricos para justificar procedimentos algébricos, portanto, apoia-se em uma “Álgebra geométrica, por tornar visível certas identidades algébricas [...]” (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 84). Alguns livros didáticos trazem em seu contexto essa concepção, por exemplo, o produto notável $(x+y)^2$, que pode ser representado tanto algébrica como geometricamente.

Destas concepções, tiramos algumas conclusões. Podemos relacionar a concepção linguístico-pragmática de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) com a concepção *letrista* de Lins e Gimenez (1997). O estudo das relações entre grandezas de Usiskin (1995) com a concepção letrista de Lins e Gimenez (1997).

Isso nos mostra que estas concepções encaminham-se para um mesmo entendimento de Álgebra, quando esta envolve situações que relacionam o trabalho com o concreto e o trabalho de Álgebra com Geometria.

Há convergências também entre as concepções fundamentalista-estruturais de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) com a Álgebra, como estudo das estruturas de Usiskin (1995) e as atividades transformacionais de Kieran (2004a) que se relacionam com o ensino e aprendizagem de Álgebra por meio de manipulação das estruturas das expressões algébricas.

Estes autores deixam claro que as concepções de Álgebra advêm de conceitos construídos no decorrer da formação do professor e alunos da educação básica. Para análise das pesquisas mapeadas, buscaremos identificar se há predominância de um tipo de concepção.

2.3 O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Após discorrer a respeito de algumas concepções de Álgebra, buscamos compreender como o pensamento algébrico manifesta-se no ensino e na aprendizagem de Álgebra e a caracterização do mesmo, de acordo com alguns autores.

Os pesquisadores Fiorentini; Miorim e Miguel (1993) ponderam a necessidade de se repensar a relação entre Educação Algébrica e pensamento algébrico. Por meio de situações-problema os autores mostram que o pensamento algébrico pode ser caracterizado por determinados elementos: “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização” (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 87). Os autores ainda argumentam que existem diversas maneiras de se expressar o pensamento algébrico.

A análise das situações em que esse pensamento pode se manifestar levou-nos, ainda, a concluir que não existe uma única forma de se expressar o pensamento algébrico. Ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem Aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma

linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI; MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 88)

Nessa direção, os autores salientam que esse tipo de pensamento deve estar presente em qualquer nível escolar, inclusive, nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para Lins e Gimenez (1997), o pensamento algébrico é uma das formas de dar sentido à Álgebra, ou seja, um modo de interpretar a Álgebra. Deste modo, discorrem a respeito de três características fundamentais do pensamento algébrico: Aritmeticismos – produz significados somente por meio dos números e operações Aritméticas, portanto, a intenção aqui é resolver ou modelar; Internalismo – considera os números e suas propriedades, nesta vertente os números não são ferramentas para “modelar” situações-problema; Analiticidade – nesta característica a intenção é operar com os números desconhecidos, mas considerando-os como conhecidos, isto é, as incógnitas são tratadas como valores conhecidos.

Lee (2001) acredita que o pensamento algébrico envolve significados e assim, apresenta um estudo que realizou com um grupo de professores, estudantes e pesquisadores da Educação Matemática, retirando sete visões para a Álgebra que surgiram em meio à discussão a respeito do tema: Álgebra como linguagem; Álgebra como modo de pensar; Álgebra como atividade; Álgebra como ferramenta; Álgebra como Aritmética generalizada e Álgebra como cultura. Esse texto, mostra a preocupação com a Álgebra introduzida e ensinada nas escolas.

A autora discorre que para muitos, a Álgebra é uma ferramenta para solução dos problemas matemáticos; para outros, uma linguagem ou um caminho para o pensamento. Em relação à Álgebra como linguagem, a autora declara, que esta é diferente de qualquer idioma que conhecemos, mais sintática do que semântica, ou seja, com mais utilização de regras do que palavras, o que torna a tentativa do ensino dessa linguagem ineficiente. Ao mesmo tempo, questiona se esta é a Álgebra que queremos apresentar às crianças, visto que, mesmo no ensino médio, a introdução da linguagem algébrica não é bem-sucedida. A autora declara concordar que linguagem não é apropriada para introduzir o aprendizado de Álgebra em qualquer nível, sobretudo, nos anos iniciais.

A respeito da Álgebra como modo de pensar, a autora estabelece que existe um tipo interno de pensar a respeito dos símbolos algébricos, dispostos de acordo com algumas características, que não são recomendadas ao ensino de Álgebra nos anos iniciais “como abstrato, analítico, pensamento envolvendo operações ou ações ou transformações, pensamento a respeito dos relacionamentos” (LEE, 2001, p. 393, tradução nossa), ou seja, pensar em símbolos não somente relacionados às letras, mas como uma organização.

Há também o tipo externo de pensamento algébrico que envolve sistemas matemáticos e situações do mundo real, que permite identificar padrões, resolver situações matemáticas e compreender o mundo. Lee (2001) acredita que esse tipo de pensamento é adequado para crianças em qualquer idade, tanto as mais jovens como às mais velhas.

A autora ainda discorre que uma visão do pensamento algébrico, apresentado na literatura, dispõe que os seguintes elementos possam ser considerados para introduzir a Álgebra.

- 1) raciocinar a respeito dos padrões (em gráficos, padrões de números, formas, etc.), salientando e ignorando, detectando semelhanças e diferenças, repetição e ordem; 2) generalizar ou pensar em termos gerais, vendo o geral no particular; 3) manipular mental o desconhecido, de inversão e inversão das operações; 4) pensar a respeito das relações matemáticas em vez de objetos matemáticos (LEE, 2001, p. 393, tradução nossa).

Mas, é necessário envolver os alunos em atividades para desenvolver esse tipo de pensamento algébrico, o que levou Lee (2001) para a análise da próxima visão, a Álgebra como atividade, assim, considera que a Álgebra está associada a dois aspectos. O primeiro, a manipulação de símbolos do qual decorre a simplificação de expressões mediante a resolução de equações, como também outros procedimentos; o segundo, é relativo à construção de modelos algébricos na resolução de problemas.

A autora destaca ser impossível resolver problemas algébricos sem manipulação e representação simbólica, o que torna inviável o envolvimento de alunos dos anos iniciais na fatoração e resolução de equações. A solução para este quadro, conforme Lee (2001), está na palavra representação, pois existem diversas maneiras de representar as incógnitas e variáveis, além das letras x e y . Afirmar que

as incógnitas podem ser substituídas por caixas de fósforos ou bastões de palhaço e que a Álgebra pode ser trabalhada, nos anos iniciais, por meio de desenhos, programas de computador, gráficos e tabelas.

Para Lee (2001), a modelagem poderia auxiliar na resolução de problemas até por crianças pequenas, por meio de manipulações e desenhos. Acrescenta que os estudantes mais velhos ficam “presos” a procedimentos mecânicos para resolução de problemas, mas se utilizassem habilidades intuitivas e analíticas, assim como as crianças mais novas, resguardar-se-iam de erros na resolução de atividades.

Considerando a Álgebra como uma atividade para resolução de problemas, a autora a toma uma ferramenta semiótica. Nesta quarta visão, conforme Lee (2001) a Álgebra apresenta-se sob duas perspectivas: a primeira, que destaca a resolução de problemas por meio de atividades que se apoiam em ferramentas semióticas, e a outra, que a Álgebra representa uma ferramenta que torna o pensamento mais eficaz, auxiliando na resolução de problemas de difíceis soluções sem ela. Além disso, ainda é uma ferramenta que conecta a Matemática com a Ciência e o mundo real.

Outra visão a ser considerada é a Álgebra como Aritmética generalizada que, conforme Chevallard (1984) e Lee (2001), é entendida no contexto escolar como uma extensão da Aritmética.

Para Chevallard,

os dois domínios - o numérico, o literal - irão coexistir em uma simples justaposição, existentes, que encontram em si mesmas suas próprias justificativas. As relações, ainda que, banais entre estas duas ordens de realidade matemática, parecem ter sido abolidas. Ou ainda, elas dão lugar a relações novas e invertidas: não é mais o algébrico que permite estudar o numérico, é o numérico que "justifica" e "permite compreender" o algébrico. (CHEVALLARD, 1984, p. 76, tradução nossa).

Conforme Lee (2001) a Álgebra como Aritmética generalizada também é conhecida por outros nomes: Aritmética ou pré-álgebra da letra; Álgebra da generalização numérica; estudo de expressões simbólicas de letras, sem considerar o significado dos símbolos. Conforme a autora, embora muitos pesquisadores critiquem esta visão, a Aritmética generalizada é um modelo que se

encontra implícito no currículo da escola primária e nos livros didáticos. Afirma ainda que o trabalho com a Aritmética generalizada auxilia o aluno dos anos iniciais, na aprendizagem da Álgebra nos anos seguintes da escola básica. Cita estudiosos que entendem que separar o currículo de Aritmética de Álgebra priva o estudante da escola básica de poderosos esquemas de pensamento a respeito de Matemática e acrescenta que para a introdução da Álgebra é primordial o trabalho com números, não existindo um momento correto para terminar um e começar o outro.

A Álgebra como cultura é a última visão proposta pela autora e traz um aspecto mais antropológico à Álgebra, enfocando uma cultura, pois, conforme cita Lee (2001, p. 396, tradução nossa) engloba “valores, crenças, tradições, história e processo de transmissão”. Esta visão, de acordo com a autora, reúne as anteriores, assim as atividades algébricas dependem das ferramentas algébricas e propiciam o pensamento, a linguagem e a comunicação algébrica. Esta cultura, conforme esclarece Lee (2001, p. 397, tradução nossa), tem o potencial de unificar temas fundamentais da Matemática: “Aritmética como Álgebra dos números; Geometria como Álgebra das formas e Estatística como Álgebra das medidas”.

Por sua vez, Kieran (2004b) afirma que, muito se discute a respeito do pensamento algébrico, mas o que chama sua atenção é o fato de que os estudantes tendem a operar somente com cálculos aritméticos, não estabelecendo relações entre cálculos numéricos e representações simbólicas, deixando de pensar no significado do cálculo relacional entre as operações, ou seja, compreender o que o problema solicita. A autora aponta ser necessário repensar o significado do pensamento algébrico sob alguns pontos importantes. Entre eles:

1. Um foco sobre nas relações e não apenas no cálculo de uma resposta numérica;
2. Um foco nas operações, assim como suas inversas e sobre a ideia relacionada ao fazer/desfazer;
3. Um foco em representar e resolver um problema em vez de simplesmente resolver;
4. Um foco em números e letras, e não apenas em números. Isso inclui: (i) trabalhar com letras que, às vezes, podem ser desconhecidas, variáveis ou parâmetros; (ii) aceitar expressões literais não fechadas como respostas; (iii) comparar expressões de equivalência com base em propriedades, e não em avaliação numérica;
5. Uma reorientação do significado do sinal de igualdade (KIERAN, 2004b, p. 140-141, tradução nossa)

Kieran (2004b) também enfatiza que o pensamento algébrico deve ser trabalhado nos primeiros anos de escola, por meio de atividades que tenham como

ferramenta a linguagem simbólica e, assim, o aluno tem a oportunidade de desenvolver formas de pensar a partir dos conteúdos algébricos.

Do mesmo modo, Blanton e Kaput (2005) entendem o pensamento algébrico como um processo que envolve generalizações e argumentações de ideias matemáticas, utilizando o cotidiano dos alunos nas aulas de Matemática. Por exemplo, uma simples atividade que mostra um grupo de pessoas que troca apertos de mãos, dependendo da idade dos alunos, pode ter seu resultado estabelecido por meio de generalizações, mediante palavras ou símbolos que representem o total de apertos de mãos. Para os autores, o raciocínio algébrico pode assumir diversas características.

a) Uso de Aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (Aritmética generalizada); b) Generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional); c) Modelagem como um domínio para expressar e formalizar generalizações; d) Generalização sobre sistemas matemáticos concebidos a partir de cálculos e relações (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413)

Os autores explicam que as duas primeiras características, Aritmética generalizada e pensamento funcional, são as mais utilizadas nos anos iniciais da escola, sendo ambas, importantes para desenvolver o pensamento algébrico.

Por seu lado, Radford (2006; 2010), ao se referir ao pensamento algébrico, declara que este é uma forma de reflexão matemática, ou seja, um tipo de raciocínio matemático. Assim como Lins e Gimenez (1997), entre outros estudiosos, o autor caracteriza o pensamento algébrico em três elementos: senso de indeterminação; manipulação analítica dos objetos indeterminados; modo particular simbólico de designar objetos. O primeiro, senso de indeterminação, caracteriza-se pelas incógnitas, variáveis e parâmetros que tornam possível a substituição de variáveis por incógnitas ou objetos desconhecidos, o que não ocorre com a determinação numérica, por exemplo, trocar um número por ele mesmo. Assim, tais objetos são tratados, de acordo com o autor, de forma analítica, pontuando o segundo elemento, manipulação analítica dos objetos indeterminados que também é assumido por Lins e Gimenez (1997), e trata do pensar algebricamente ao resolver equações ou problemas algébricos, quer dizer que objetos desconhecidos são manipulados de modo analiticamente. Nesse caso, as letras são tratadas como

conhecidas e possibilitam realizar qualquer operação fazendo com que a indeterminação e a analiticidade caminhem lado a lado.

O terceiro elemento do pensamento algébrico, apontado por Radford (2006; 2010), é o modo particular simbólico de designar objetos e diz respeito à representação semiótica, ou seja, a representação indireta de incógnitas, variáveis e objetos algébricos. Para o autor, o elemento simbólico não é, necessariamente, representado apenas por padrões alfanuméricos, mas pode envolver a linguagem natural, gestos e sinais ou a mistura deles.

Uma vez que esses elementos, de algum modo, entrelaçam-se e o pensamento algébrico pode ser trabalhado em qualquer nível de generalidade, Radford (2006; 2010) apresenta uma atividade de generalização de padrões, em que discute três formas para o pensamento algébrico: factual; contextual e padrão. O senso de indeterminação e a analiticidade dão lugar ao pensamento factual, que é descrito pelo fato de as incógnitas estarem implícitas, para que os estudantes busquem fórmulas que representam generalizações, nas quais as letras não existem, o desenvolvimento da atividade centra-se na essência semiótica, exigindo determinado mecanismo de percepção, na qual os alunos contam com gestos, palavras e símbolos.

No pensamento contextual, os alunos dão continuidade à atividade anterior, mas devem lidar com um novo objeto em que os termos desconhecidos tornam-se explícitos. Radford (2010, p. 8) salienta que “a fórmula algébrica é, de fato, uma descrição do termo geral, como seria desenhado ou imaginado. É por isso que denominamos essa forma de contexto de pensamento algébrico”. Aqui, a essência semiótica utilizada no pensamento factual é substituída pelos termos dêiticos linguísticos¹, advérbios, etc., como palavras-chave, “acima”, “abaixo”, “na horizontal”, “na vertical”, entre outros, descrevendo os objetos indeterminados que se relacionam com o termo “número da figura”.

¹ De forma genérica, o termo ‘dêixis’, do qual deriva o adjetivo “dêítico”, é empregado para designar a função que os pronomes pessoais e demonstrativos, as formas gramaticais que indicam tempo, inúmeras palavras e uma variedade de outras formas linguísticas desempenham ao fazer referência à situação de produção dos gêneros textuais, sejam estes nas modalidades oral ou escrita. Disponível em: <<http://sersibardari.com.br/wp-content/uploads/2011/08/A-fun%C3%A7%C3%A3o-dos-d%C3%AAditos-na-organiza%C3%A7%C3%A3o-do-texto.pdf>>. Acesso: 21 set. de 2017.

Há um momento em que os gestos, palavras, símbolos e termos dêiticos, já não são o suficiente para representar o termo geral de uma sequência de padrões, é necessário uma base alfanumérica, para representar as fórmulas que descrevem os padrões, utilizadas quando o aluno passa a ter um pensamento algébrico padrão para representar as fórmulas que descrevem os padrões. Logo, não há mais lugar para o pensamento factual ou o contextual. Para Radford (2006; 2010), a linguagem algébrica proposta para o tipo pensamento algébrico padrão é de difícil entendimento para o aluno, porque não é algo de seu cotidiano e, além disso, muitas das fórmulas encontradas pelos estudantes não são algébricas embora contenham letras.

Assim, o autor considera os pensamentos factual, contextual e algébrico-padrão como camadas de generalidade que auxiliam o aluno na construção de fórmulas algébricas para identificar algum padrão. Em referência a essas camadas de generalidade em que o pensamento algébrico pode operar Radford (2011, p. 311) afirma que:

Algumas camadas são mais concretas, um pouco mais geral. Em algumas camadas concretas, a indeterminação e a analítica podem aparecer de forma intuitiva, como na seção anterior. Em outras, podem aparecer de forma mais explícita, como quando os alunos usam simbolismo alfanumérico. (RADFORD, 2011, p. 311)

Para o autor, tais camadas tratam dos vários níveis de generalização, caracterizadas pelo desenvolvimento epistemológico do aluno no desenvolvimento de atividades matemáticas.

Da mesma forma, Ponte, Branco e Matos (2009) fazem uma reflexão a respeito do trabalho com a Álgebra, incluindo a capacidade de interpretar e resolver problemas. Para estes autores, o pensamento algébrico compreende o trabalho com expressões algébricas, equações, inequações e funções, enunciando três vertentes que representam esse pensamento: a) representar: compreende a capacidade do estudante em utilizar representações simbólicas, envolvendo problemas de natureza simbólica, em que irá ler, compreender e interpretar os vários caracteres simbólicos em diferentes contextos; b) raciocinar (dedutiva e indutivamente): nesta vertente espera-se que o aluno relacione, generalize e deduza, portanto, que ele analise as propriedades e compreenda as regras; c)

resolver problemas e modelar situações: esta terceira e última vertente propõe que o estudante utilize estratégias de resolução de atividades que envolvam expressões algébricas, equações, inequações e também situações com modelagem.

Blanton e Kaput (2005) e Radford (2006; 2010) concordam que um caminho para manifestar o pensamento algébrico é por meio do trabalho com generalização de padrões, pois os elementos de Álgebra encontram-se implícitos nessas atividades, favorecendo a reflexão e a manipulação dos conceitos algébricos. Assim como esses autores, Lins e Gimenez (1997), Kieran (2004b) e Ponte, Branco e Matos (2009) também entendem o pensamento algébrico como um meio para refletir, manipular e compreender o processo de desenvolvimento de atividades que conduzem o aluno à resolução e construção de respostas por meio de Álgebra.

Desse modo, entendemos que o pensamento algébrico se manifesta pela construção e compreensão de conhecimentos algébricos.

3 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos nossa revisão bibliográfica, o delineamento de nosso problema de pesquisa, bem como a metodologia e os procedimentos metodológicos que adotaremos neste trabalho.

3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Creswell (2007, p. 51) salienta que, logo, após identificar o tema de pesquisa, o investigador deve realizar a revisão de literatura, cumprindo, assim, determinados propósitos, “[...] Compartilhar com o leitor os resultados de outros estudos que estão intimamente relacionados àquele que está sendo realizado”. Kumar (2005) também destaca uma série de funções provenientes de uma revisão bibliográfica.

Fornecer uma base teórica para seu estudo; analisar os meios pelos quais você estabelece os *links* entre o que está propondo examinar e o que já foi estudado; em outras palavras, isso ajuda você a aprimorar sua metodologia de pesquisa; Através da revisão de literatura, você pode mostrar como suas descobertas contribuíram para o conhecimento existente em sua profissão; [...]. (KUMAR, 2005, p. 30, tradução nossa)

Sendo assim, com a finalidade de problematizar o tema de nossa investigação, buscamos apresentar algumas pesquisas acadêmicas envolvendo assuntos relacionados à Álgebra. Tomamos para esta revisão bibliográfica as pesquisas de Hessel (2010), Polla (2010), Alvarenga, K. (2013) e Baqueiro (2016), as quais realizaram estado do conhecimento e panorama e, assim como nossa investigação, realizaram mapeamentos de produções acadêmicas a respeito do ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio.

Alvarenga, K. (2013) realizou um trabalho de caráter bibliográfico, do tipo estado da arte, com métodos mistos, com o propósito de investigar e apresentar um panorama das pesquisas que realizaram estudos a respeito do ensino e a aprendizagem de inequações, no período entre 1991 e 2011. Após realizar o levantamento dos estudos acadêmicos sobre o tema, a autora selecionou 67

produções nacionais e internacionais, que incluíram teses de doutorado, artigos de periódicos e artigos publicados em eventos. O fato de existirem vários anos de publicação, suscitou a autora a ideia de refletir sobre o que já está pronto, ou seja, o que já foi pesquisado e concluído, com o propósito de auxiliar futuras pesquisas.

Ao concluir sua tese, Alvarenga, K. (2013) registra que houve poucos estudos referentes ao currículo, ao ensino e a didática. Assim, pondera ser necessário o aprofundamento das investigações nessa linha de pesquisa, pois poderão auxiliar professores em seus trabalhos em sala de aula. Também enfatiza ser necessário explorar mais esse tema, para que haja alguma mudança significativa no ensino e na aprendizagem de inequações, e que seria oportuno a realização de mais teses de doutorado e artigos científicos, já que esses apresentam poucas publicações.

Baqueiro (2016) também realizou uma tese de doutorado, com estudo documental do tipo estado da arte, envolvendo investigações do período entre 2003 e 2013, a respeito de generalização dos padrões matemáticos. Para a análise destas pesquisas, a autora amparou-se em uma abordagem metodológica de cunho qualitativo, sustentada pelas ideias de Bardin (2011) que descreve três etapas de análise de conteúdo: a pré análise; a exploração do material e o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Concluiu sua tese assinalando alguns pontos relevantes, entre eles destacam-se: a necessidade de articulação das concepções de Álgebra; os participantes das pesquisas, professores ou alunos, tiveram dificuldade em generalizar as regularidades e representa-las como uma fórmula algébrica; o processo de generalização auxilia na construção do conhecimento para compreender o conceito de “função”, sendo o papel do professor imprescindível para isso; o trabalho com a generalização de padrões auxilia o aluno no desenvolvimento de processos cognitivos; foram poucas as pesquisas que apresentaram estudos com o professor, sobretudo com os docentes dos anos iniciais do Ensino Fundamental; os trabalhos com *softwares* mostraram ser eficazes para a aprendizagem dos alunos em relação a generalização de padrões, incluindo alunos com deficiência auditiva; falta de conhecimento sobre generalização de padrões, faz com que a maioria dos professores não envolva em suas aulas esse

tema. A autora finaliza deixando diversos questionamentos, tais como levantar os motivos pelos quais as regiões Norte e Nordeste não trabalham com esse tema ou quais as concepções que professores e alunos têm sobre o tema, entre outros.

Em nível de mestrado, temos a dissertação de Hessel (2010), que realizou o estado do conhecimento de pesquisas relacionadas ao Ensino Médio, produzidas no período entre 1998 e 2008, com o objetivo de verificar o que as publicações dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática trazem a respeito da utilização da Tecnologia da Informação e Comunicação – TIC, no ensino e na aprendizagem de equações. O autor afirma que se ampara em uma metodologia qualitativa, desenvolvida em três fases: busca e seleção das publicações sobre o tema; análise dos estudos coletados e análise qualitativa.

Em suas considerações finais, Hessel (2010) destaca a necessidade de futuras pesquisas, a respeito do ensino e aprendizagem de Álgebra por meio das Tecnologias de Informação e Comunicação aliadas à Educação Matemática.

O estudo de Polla (2010) analisa as pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, construindo um panorama de 10 anos da pesquisa brasileira pós Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN.

A autora afirma que sua investigação enquadra-se em uma pesquisa do tipo estado da arte, de cunho bibliográfico. Os dados coletados foram organizados de acordo com sete categorias: Linguagem/Pensamento Algébrico; Relações entre Aritmética / Álgebra / Geometria; Múltiplas Representações; Materiais / Recursos Didáticos e Tecnológicos; Concepções / Crenças / Visões / Saberes / Conhecimentos; Didática / Metodologia de Ensino; Prática Pedagógica em Álgebra. Mas antes, Polla (2010) realizou uma análise qualitativa e quantitativa das pesquisas inventariadas.

A primeira análise realizada pela autora refere-se aos grupos de pesquisas dos programas de Pós-Graduação, na qual descreve o contexto histórico de cada um deles, destacando que o Grupo de Pesquisas em Educação Algébrica – GPEA, do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, é o que mais concentra pesquisas em Álgebra.

Em seguida, realiza uma análise quantitativa a respeito das Instituições de Ensino, constatando que a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP foi a que mais contribuiu para realização de pesquisas em Álgebra, seguida da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE e da Universidade de Campinas – UNICAMP. A autora chama atenção para a análise das titulações, observando que houve um considerável aumento de pesquisas no mestrado acadêmico e mestrado profissional, ambos em 2007. Na análise sobre os orientadores, a autora ressalta que a maioria encontra-se na PUC/SP, seguida da UFPE e UNICAMP, o que vem confirmar a análise feita a respeito das instituições.

Ao descrever as pesquisas mapeadas, Polla (2010) constatou que a criação de novos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, Ensino de Matemática e outros, provocou um aumento no número de pesquisas a respeito de o ensino e a aprendizagem de Álgebra e que estes apresentam dois enfoques, Aritmética generalizada e articulação com a Aritmética e/ou Geometria.

Conforme se aprofundou nas leituras, para elaboração das categorizações, a autora percebe a ocorrência do aumento dos números de pesquisas, no período entre 2005 e 2007 e estas com correspondência entre elas.

Ao uso de diferentes registros para representar um mesmo conceito matemático, o estudo da linguagem algébrica e construção do pensamento algébrico, as conexões ou articulações entre a Aritmética, Álgebra e geometria, a utilização de softwares matemáticos, mostrando que essas pesquisas estabelecem estreitas relações com as diretrizes propostas pelos PCN. O mesmo ocorre com as pesquisas que desenvolvem análise de livros didáticos de Matemática e estudos envolvendo sequências de ensino. (POLLA, 2010, p. 85)

Após esta primeira etapa, Polla (2010) efetua somente a análise descritiva das pesquisas por meio de sete categorias, sem se preocupar em apresentar os resultados, construídas após a leitura das pesquisas inventariadas: Linguagem/Pensamento Algébrico, subdividida em duas subcategorias, aprendizagem da linguagem algébrica e construção do pensamento algébrico; Relações entre Aritmética/Álgebra/Geometria; Múltiplas Representações; Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos; Concepções/Crenças/Visões/Conhecimentos; Didática/Metodologia de Ensino; Prática Pedagógica em Álgebra.

A primeira categoria Linguagem/Pensamento Algébrico, conforme a autora,

foi estruturada a partir das concepções de Educação Algébrica de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) apoiadas pelos:

Princípios norteadores dos PCN (1997), quando apontam como um dos principais princípios que devem ser garantidos pelo ensino de Matemática o desenvolvimento de capacidades, o estabelecimento de relações e a comunicação, ou seja, o uso de diferentes figuras de linguagens”. (POLLA, 2010, p. 53).

Nesta categoria, constam 18 pesquisas, divididas em duas subcategorias. A primeira: Aprendizagem da linguagem algébrica, conta com 10 pesquisas, sendo oito dissertações de mestrado e duas teses de doutorado. A segunda subcategoria Construção do pensamento algébrico é contemplada por oito investigações com sete dissertações de mestrado e apenas uma tese de doutorado.

Para descrever e analisar as publicações que se inserem na segunda categoria Relações entre Aritmética/Álgebra/Geometria, Polla (2010) amparou-se em Coxford (1995), Lins e Gimenez (1997), Ponte (2005) e nas discussões estabelecidas nos PCN (1997).

Para compor esta categoria, a autora investigou pesquisas que discorrem sobre as dificuldades na transição da Aritmética para a Álgebra, ou seja, dificuldade na compreensão do conceito de variável, exploração de padrões pela, sequências numéricas, desenvolvimento de problemas por meio da exploração de regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Assim, encontrou 23 trabalhos que foram divididos em subcategorias para melhor auxiliar a análise. A primeira: Relação entre Álgebra e Geometria conta com sete dissertações e duas teses. A segunda, Relação entre Álgebra e Aritmética, é contemplada por cinco dissertações e uma tese de doutorado. Na terceira subcategoria, Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria, foram oito dissertações e uma tese.

Para a próxima categoria, Múltiplas Representações, a autora tem como fundamento os PCN (1997) e afirma que a linguagem escrita depende dos diferentes registros de um conceito matemático. Além deste documento, as ideias a respeito dos Registros de Representação Semiótica de Duval, também foram relevantes, assim como os textos de Pierce e outros autores que tratam de representações múltiplas. Esta categoria apresenta 14 trabalhos, divididos em duas subcategorias. Do total destes estudos, oito dissertações e uma tese de doutorado

compõem a primeira subcategoria, Registros, produzidos pelos alunos e a segunda, Registros em livros didáticos, apresenta cinco dissertações.

Com o intuito de analisar as pesquisas que compõem a quarta categoria, Materiais/Recursos didáticos e tecnológicos, Polla (2010) apoia-se nas sugestões dos PCN (1997) anos finais do Ensino Fundamental, a respeito dos recursos tecnológicos como ferramenta para aprendizagem de Matemática.

A autora também divide esta categoria em subcategorias, sendo a primeira Livros didáticos, composta de oito dissertações de mestrado, a segunda Computador / Software / Audiovisuais, constituída por 11 dissertações e uma tese de doutorado e a terceira, Jogo / Material manipulativo, na qual inserem-se três dissertações e uma tese de doutorado.

A quinta categoria proposta por Polla (2010), Concepções / Crenças / Visões / Saberes / Conhecimentos, foi construída com base nas propostas dos PCN (1997), que tratam das concepções, crenças, visões, saberes ou conhecimentos na prática pedagógica. Esta categoria foi dividida em duas subcategorias. A primeira relaciona-se com as Concepções / Crenças / Visões, composta de 14 dissertações de mestrado e a segunda, Saberes / Conhecimentos, dispõe de duas dissertações e duas teses.

Na próxima categoria, Didática / Metodologia de Ensino, a autora considera as ideias de Artigue, Brousseau e outros, pois a didática da matemática ou a metodologia de ensino são fatores importantes para descrição das pesquisas inventariadas.

Os trabalhos, que se inserem nesta categoria, foram divididos em quatro subcategorias. A primeira, Sequências de Ensino / Modelização, traz a análise de nove dissertações de mestrado e uma tese de doutorado. A segunda, Módulo de Ensino/Métodos de Ensino, compreende duas dissertações de mestrado e duas teses de doutorado. A terceira subcategoria Proposta de Ensino apresenta três dissertações. E a quarta e última categoria desse grupo, Resolução de problemas, é composta por cinco dissertações e uma tese.

A sétima e última categoria, Prática Pedagógica em Álgebra, proposta por Polla (2010) traz pesquisas que se enquadram no estudo dos processos de ensino

e aprendizagem de Álgebra em sala de aula, tendo como foco as dificuldades e reflexões a respeito da própria prática. As pesquisas que compõem esta categoria foram dispostas em três subcategorias. A primeira, Dificuldades na aprendizagem de Álgebra, traz três dissertações de mestrado, a segunda Reflexões sobre o ensino de Álgebra, apresenta cinco dissertações e, por último, a subcategoria Prática pedagógica do professor que ensina matemática, considera 11 dissertações e uma tese de doutorado.

Após descrever os trabalhos, conforme as categorias em que se inserem, Polla (2010) traz suas considerações finais apresentando uma crítica a respeito dos resumos das pesquisas publicados nos bancos de dados, porque não apresentavam padronização e muitos deixaram de registrar os principais dados da pesquisa. A autora encontra publicações produzidas nas seis regiões do Brasil, com a maior parte desenvolvida em Programas de Pós-Graduação em Educação, Educação Matemática ou áreas afins.

Observou que os recursos tecnológicos atuam como recursos facilitadores para o ensino e aprendizagem de Álgebra e que alguns pesquisadores criaram situações de aprendizagem para auxiliar o aluno na construção de conceitos algébricos, “ou seja, construindo os conceitos [...], estabelecendo conexões entre variável-palavra, variável-figura, variável-numeral e variável-letra [...]” (POLLA, 2010, p. 85). Verificou também que as pesquisas que investigou têm correspondência com as proposituras apresentadas pelos PCN, no que se referem a auxiliar o aluno a compreender o cálculo algébrico e as funções, assim interpretar e resolver problemas, representar e resolver situações por meio de símbolos.

A revisão bibliográfica amparou-se na escolha dos caminhos que tomamos para a realização de nossa pesquisa. Chamou-nos a atenção o fato de que, após a pesquisa de Polla (2010), não encontramos outras investigações que mapeassem as produções acadêmicas a respeito do estudo de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental. Este contexto deixa evidente que ainda existem pesquisas que não foram inventariadas e que podem apresentar contribuições para desvelar qual o cenário das pesquisas que tratam de Álgebra da Educação Básica.

A seguir apresentamos o delineamento do problema, a questão de pesquisa e os objetivos geral e específicos.

3.2 DELINEAMENTO DO PROBLEMA

Nos últimos anos, nas escolas públicas do Estado São Paulo, vêm ocorrendo discussões a respeito do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP, em que a pauta centra-se nas competências e habilidades matemáticas desenvolvidas pelos alunos e como o conhecimento matemático é construído em sala de aula. Uma das observações postas no relatório pedagógico da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo alerta para o desempenho dos alunos em determinados conteúdos de Matemática que necessitam de mais atenção.

Ao comparar o desempenho dos respondentes por habilidades percebe-se que há ainda muito trabalho a ser desenvolvido, principalmente em habilidades que exigem maior técnica e lida com as propriedades algébricas, como no caso da solução de situações-problema relacionadas à função quadrática, na resolução de equações exponenciais com uso exclusivo de propriedades de potenciação, além daqueles associados à obtenção do volume do cone (mesmo com apoio da fórmula) e da área superficial da pirâmide. (SÃO PAULO, 2015, p. 172).

Além de o documento alertar sobre a existência da necessidade de uma atenção especial ao ensino de Álgebra, indica também que “a proporção de alunos no nível de desempenho avançado diminui com o nível de escolaridade” (SÃO PAULO, 2015, p. 205). Este panorama auxilia os profissionais da educação a compreender como se encontra o desempenho dos alunos das escolas estaduais paulista.

Assim, optamos por adaptar as categorias propostas no trabalho de Polla (2010), realizando uma investigação do tipo Estado da Arte de pesquisas a respeito do ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, mapeando as produções a partir de 2008 com o intuito de investigar as produções acadêmicas e tentar evidenciar o que ainda necessita ser pesquisado a respeito do tema.

Diante destes fatos, nossa meta foi realizar um estado da arte de pesquisas que apresentem investigação a respeito do ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Assim, apresentamos a seguinte questão de pesquisa: **O que revelam as pesquisas na área de Educação Matemática a**

respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino médio no período entre 2008 e 2017?

Como objetivo geral, temos como propósito apresentar o estado da arte de pesquisas acadêmicas cuja temática envolve o ensino de Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, publicadas no período entre 2008 e 2017. Para atingir este objetivo e responder a nossa questão de investigação, elegemos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar os resultados de pesquisas produzidas no período entre 2008 e 2017.
- Investigar se existem pesquisas que versem a respeito do currículo de Álgebra.

Diante disso, acreditamos que nossa investigação seja relevante para o atual cenário de ensino e aprendizagem de Álgebra, para a formação de professores que atuarão nessa esfera de ensino e para futuros investigadores da área de Educação Matemática. A seguir, apresentamos a metodologia de pesquisa e os procedimentos que adotamos para a realização de nossa investigação.

3.3 METODOLOGIA DA PESQUISA

Parte importante da investigação, a metodologia de pesquisa auxilia no processo de busca por caminhos que auxiliem na elaboração e desenvolvimento da investigação. Assim, a metodologia escolhida pelo investigador deve auxiliá-lo na organização dos dados coletados, a fim de elaborar sua análise e os resultados do estudo.

Buscamos em alguns autores, (GIBBS, 2009; SAMPIERI, COLLADO e LÚCIO, 2013; CRESWELL, 2014), respaldo para melhor compreender os caminhos que devem ser percorridos por uma pesquisa de abordagem qualitativa e, do mesmo modo, exploramos as ideias de outros estudiosos (GIL, 2002; MARCONI e LAKATOS, 2003) que discorrem sobre a elaboração de uma pesquisa bibliográfica.

Para Gibbs (2009), uma pesquisa qualitativa visa a interpretar, descrever e explicar determinados fenômenos sociais, como por exemplo, analisar e registrar diferentes práticas dos indivíduos, incluindo seus conhecimentos e histórias do cotidiano, confrontando as características semelhantes de experiência dos

indivíduos, para depois analisá-las. Conforme este autor, um dos principais componentes para uma pesquisa qualitativa tem como base o texto e a escrita.

[...] desde notas de campo e transcrições até descrições e interpretações, e, finalmente, as interpretações dos resultados e da pesquisa como um todo. Sendo assim, as questões relativas à transformação de situações sociais complexas (ou outros materiais, como imagens) em textos, ou seja, de transcrever em geral, preocupações centrais da pesquisa qualitativa (GIBBS, 2009, p. 9)

Sob o mesmo ponto de vista, Sampieri, Collado e Lúcio (2013, p. 454) pontuam que os registros escritos são condições importantes “para a análise qualitativa e refletem a linguagem verbal, não verbal e contextual dos dados”. Este tipo de procedimento facilita a organização dos pensamentos, posicionando o pesquisador diante de dados que podem ser interpretados e analisados.

Para nossa investigação, adotamos uma metodologia de pesquisa de natureza qualitativa, especificamente uma metodologia de pesquisa bibliográfica que de acordo com Gil (2002) para sua elaboração é necessária a organização de um roteiro que irá auxiliar o pesquisador em seu percurso de investigação:

a) Escolha do tema; b) Levantamento bibliográfico preliminar; c) Formulação do problema; d) Elaboração do plano provisório de assunto; e) Busca das fontes; f) Leitura do material; g) Fichamento; h) Organização lógica do assunto; i) Redação do texto. (GIL, 2002, p. 59-60)

Todo este processo exige de nós, pesquisadores, uma leitura criteriosa, de tal forma, a interpretar as propostas, os objetivos, as análises e os resultados que trazem as produções científicas, e que, em última instância, nos auxiliará a compreender de que modo está sendo trabalhada a Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Autores como Fiorentini (1994) e Ferreira, N. (2002) entendem o Estado da Arte como o tipo de investigação que realiza inventários, sistematização, avaliação e discussão da produção científica relacionada a uma determinada área. Esse modelo de pesquisa também conhecido por Estado do Conhecimento, permite, além de discussões a respeito dos aspectos propostos nos trabalhos coletados, subsidiar futuras investigações, o que afasta a ideia de uma simples revisão dos estudos publicados. Nesse sentido, essa modalidade de pesquisa busca evidenciar

características que possam ser contrapostas, conforme esclarece Melo (2006, p. 62).

[...] busca, sobretudo, identificar as convergências e divergências, as relações e arbitrariedades, as aproximações e contrariedades existentes nas pesquisas e apresentam indícios e compreensões do conhecimento a partir de estudos acadêmicos, como teses e dissertações.

Realizar uma pesquisa por meio do Estado da Arte resume-se, então, “ao desafio de conhecer o já construído para depois buscar o que ainda não foi feito, [...] de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade [...]” (FERREIRA, N., 2002, p. 259).

Ferreira, N. (2002) também aponta os caminhos que devem ser percorridos para a elaboração de um estado da arte de pesquisas em uma área de interesse. A pesquisadora destaca que o primeiro contato do investigador com as pesquisas ocorre por meio dos catálogos que abrigam os dados bibliográficos retirados das teses e dissertações dos programas de pós-graduação *strictu sensu*. Em nossa investigação, a CAPES nos proporcionou o primeiro contato com as pesquisas que dizem respeito ao ensino e à aprendizagem de Álgebra.

Os catálogos dispostos no banco de teses e dissertações apresentam os resumos, que trazem informações que orientam o pesquisador na busca de publicações de seu interesse. Pudemos perceber que algumas pesquisas apresentam resumos diferentes, isto é, na CAPES, um resumo, e na Biblioteca Digital da Universidade, outro, o que dificulta a coleta de dados. No entanto, encontramos no texto de Ferreira, N. (2002) justificativa para esse desacordo. A autora elucida que a publicação dos resumos atende às solicitações dos repositórios que os abrigam, seja na quantidade de linhas ou na formatação do texto, mas também observa que, com o avanço dos catálogos informatizados, isso já não tem ocorrido com frequência.

Acreditamos que, em alguns casos, se faz necessária a leitura de todo o texto da produção científica, pois o resumo, às vezes, não consegue fornecer todas as informações necessárias.

Entendemos que pesquisas do tipo Estado da Arte procuram expor à comunidade acadêmica o que as investigações apresentam em relação á

determinada área de conhecimento, cooperando com outros investigadores no sentido do que há para ser investigado e apontar caminhos a serem percorridos na realização de novos estudos. Assim, mapear as produções científicas é uma maneira de encontrar as memórias do que já foi publicado, em um determinado período, sobre um tema específico. Os motivos que nos conduzem a esse tipo de pesquisa foram comentados por Ferreira, N. (2002, p. 258–259):

A sensação que parece invadir esses pesquisadores é a do não conhecimento acerca da totalidade de estudos e pesquisas em determinada área de conhecimento, que apresentam crescimento tanto quantitativo quanto qualitativo, principalmente reflexões desenvolvidas em nível de pós-graduação, produção distribuída por inúmeros programas de pós e pouco divulgada. (FERREIRA, N., 2002, p.258-259).

Esta observação confirma nossa necessidade de analisar as pesquisas a respeito do ensino e da aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino caminhos que estas investigações seguiram entre 2008 e 2017.

Com o intuito de sustentar nossa escolha temática, realizamos um inventário das teses e dissertações encontradas que abordam a investigação com o ensino de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, no período entre 2008 e 2017. A seguir, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados em nossa pesquisa.

3.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para compor o texto de nosso estudo realizamos buscas nos repositórios, da CAPES e nos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática. Estes repositórios oferecem ferramentas para refinar a busca, o que, de certa forma, facilitam a coleta das produções que atendem aos objetivos que cada investigador tem para sua pesquisa. No entanto, somente a partir de 2013 o sítio da CAPES oferece acesso ao resumo e ao *link* para o *download* das pesquisas. Para ter acesso aos resumos das produções anteriores a essa data, foi necessário buscá-las nos repositórios das Universidades.

Em relação a uma provável organização dos dados obtidos nos catálogos, Ferreira, N. (2002) destaca dois momentos. O primeiro diz respeito ao contato do

investigador com a quantidade de pesquisas que encontra nos repositórios, a identificação dos dados bibliográficos fornecidos por essas produções acadêmicas e com a escolha de um período determinado para o levantamento e mapeamento dos estudos. Este é o momento em que surgem inúmeras pesquisas que se relacionam com a área de conhecimento referente ao tema, sendo, portanto, necessário inventariar aquelas que atendam aos objetivos da investigação.

O segundo momento exige do pesquisador a leitura do título, dos dados bibliográficos e, sobretudo, do resumo para que sua pesquisa não apresente informações equivocadas. Ferreira, N. (2002, p. 270) aconselha confrontar o resumo com o texto da pesquisa:

Cada resumo deve ser lido e analisado numa relação de dependência com o trabalho na íntegra, mas também como realidade relativamente independente, produto de uma tensão construída na continuidade e na ruptura com o trabalho que lhe dá origem, numa relação dialética entre os gêneros, entre as condições de sua produção e práticas discursivas.

Sendo assim, realizamos uma leitura “*flutuante*” dos documentos, que, conforme Bardin (2016) oportuniza a pré-análise e o conhecimento dos textos.

Fiorentini e Lorenzato (2012) julgam que o exame de documentos pode ser uma técnica útil para construir categorias de análise que possam ser estruturadas, a partir da leitura dos estudos, mas, que devem atender aos objetivos da investigação.

Com o intuito de subsidiar nossas análises, organizamos em tabelas e quadros, as informações retiradas de nossas leituras, dispondo a quantidade de produções coletadas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, organizando-as por ano e por nível acadêmico, conforme a Instituição de Ensino Superior.

Após a coleta, leitura e organização das pesquisas, consideramos as ideias de Laville e Dionne (1999) como orientação à elaboração de nossas categorias de análise. Os autores discorrem “que uma das primeiras tarefas do pesquisador consiste, pois, em efetuar um recorte dos conteúdos em elementos de análise, que ele poderá em seguida ordenar dentro de categorias” (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 216).

Para a organização dos elementos da análise de nossa investigação,

utilizamos as categorias propostas por Polla (2010), já apresentadas anteriormente, adaptando-as, conforme a necessidade de nosso estudo, a fim de apresentar nossas considerações a partir do Estado da Arte das 42 pesquisas mapeadas.

4 ANÁLISE DAS PESQUISAS

Nesse capítulo realizamos a análise das 42 teses e dissertações coletadas e produzidas entre 2008 a 2017.

4.1 DESCRIÇÃO DA SELEÇÃO DAS PRODUÇÕES ACADÊMICAS

Para elaboração de nosso estado da arte tomamos como direção, as orientações de Fiorentini, Passos e Lima (2016) que descrevem o roteiro a respeito do mapeamento de pesquisas. Conforme os autores,

Em geral, cada região ou estado buscou, primeiramente, contextualizar e historiar o processo de produção dessas pesquisas e os programas de onde originaram, destacando os caminhos e os obstáculos encontrados para a realização deste empreendimento. A seguir, mapearam-se os aspectos físicos das pesquisas (instituições, programas, modalidade, ano de defesa das pesquisas, orientadores etc.), as tendências metodológicas do processo de pesquisa e, por fim, as tendências temáticas, [...]. (FIORENTINI, PASSOS e LIMA, 2016, p. 14)

Optamos por realizar o mapeamento apenas de teses de Doutorado e dissertações de Mestrado Acadêmico, não considerando para nossa investigação as dissertações de Mestrado Profissional, pois, apesar de formar pesquisadores, de acordo com a CAPES esta modalidade de Pós-Graduação é “voltada para a capacitação de profissionais, nas diversas áreas do conhecimento, mediante o estudo de técnicas, processos, ou temáticas que atendam a alguma demanda do mercado de trabalho”², o que não atende aos interesses de nossa investigação. Também desconsideramos as pesquisas do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, seguindo os argumentos de Fiorentini, Passo e Lima (2016).

(1ª) por tratar-se de um programa que pertence a uma Área da CAPES (Matemática/Probabilidade e Estatística) que não estabelece interlocução ou vínculo com o ensino e a educação; (2ª) por priorizar apenas a formação matemática formal do professor, excluindo uma formação especializada, didático-pedagógica e

² Informações retiradas do site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Disponível: <http://capes.gov.br/avaliacao/sobre-a-avaliacao/mestrado-profissional-o-que-e>. Acesso em: 22 jul. de 2017.

curricular relativa ao ensino da matemática na educação básica; (3ª) por não exigir, como trabalho final, uma dissertação de mestrado baseada em um trabalho de investigação. (FIORENTINI, PASSOS e LIMA, 2016, p. 18).

Apesar da preocupação e do esforço, temos a consciência de que nunca conseguiremos coletar todas as pesquisas armazenadas nos repositórios de teses e dissertações.

Buscando compreender como as pesquisas publicadas no período de 2008 a 2017, a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, vêm sendo desenvolvidas no Brasil, efetuamos uma busca no Banco de Teses da CAPES³ e repositórios de produções acadêmicas dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, por meio do descritor “Álgebra”, que foi retomada em novembro de 2017 para complementar nosso quadro de pesquisas.

O Banco de Teses e Dissertações da CAPES oferece filtros de pesquisa que auxiliam no refinamento dos resultados. Ao inserirmos o termo “Álgebra”, encontramos 2.542 estudos publicados no período entre 1987 e 2017. A partir desse momento utilizamos os filtros nível acadêmico, para selecionar “Mestrado Acadêmico e Doutorado” e período entre “2008 e 2017”, assim obtivemos o resultado de 1.085 pesquisas. Ao selecionarmos o filtro área de conhecimento “Educação, Ensino e Ensino de Ciências Matemática” e por nome dos programas “Educação, Educação Matemática, Educação em Ciências e Matemática, Educação para Ciências e Matemática, Ensino de Ciências e Educação Matemática, Ensino de Ciências e Matemática, Ensino e História das Ciências e Matemática, Ensino de Matemática, Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática, contabilizamos 216 pesquisas.

Após a leitura dos resumos, em alguns casos do texto do estudo, coletamos 42 investigações selecionadas após desconsiderarmos as pesquisas de outras áreas de conhecimento, estudos com o ensino superior, formação inicial e contínua de professores, anos iniciais do Ensino Fundamental, Estado da Arte, metanálises, estudos biográficos, entre outros.

³ Disponível: <http://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#/>. Acesso em 18 abril de 2016.

Na tabela 1 destacamos a quantidade de pesquisas dispostas em tópicos: as pesquisas encontradas, foram as aquelas que surgiram na primeira busca de acordo com o nível acadêmico; pesquisas filtradas, determinadas a partir da área de conhecimento e nome dos programas; pesquisas selecionadas, concentram as que envolvem anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Tabela 1 – Resultado da consulta ao Banco de Teses da CAPES

Ano	Pesquisas encontradas	Pesquisas filtradas	Pesquisas selecionadas
2008	83	22	1
2009	99	18	5
2010	89	20	4
2011	108	25	5
2012	116	25	2
2013	127	16	5
2014	146	28	7
2015	140	24	5
2016	134	33	7
2017	43	5	1
Total	1085	216	42

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Na coluna que apresenta as pesquisas encontradas, fica evidente que a partir do ano de 2011 houve um considerável aumento na quantidade de publicações em relação aos anos anteriores. Em oposição, o ano de 2017 apresenta o menor número de publicações, com 43 estudos, em comparação aos anos anteriores, provavelmente por termos coletado os dados no mês de novembro desse ano, pois geralmente é no final do ano que muitos alunos entregam seus trabalhos.

Na coluna pesquisas filtradas, temos em 2016, a quantidade de 33 pesquisas, apresentando o maior número de publicações entre os anos selecionados e, em 2017, ainda com o menor número de produções, cinco estudos. A última coluna, pesquisas selecionadas, são os estudos que fazem parte de nossa investigação, temos que, 2014 e 2016 contam com o maior número de publicações entre o período escolhido, com sete produções cada um e 2017, com o menor número de seleção, com apenas uma pesquisa.

Nos dados da tabela 2 apresentamos o nível acadêmico das produções, de acordo com o ano de publicação.

Tabela 2 – Classificação das Teses e Dissertações por ano

Ano	Nível	Pesquisas selecionadas	Total
2008	Doutorado	0	1
	Mestrado	1	
2009	Doutorado	0	5
	Mestrado	5	
2010	Doutorado	0	4
	Mestrado	4	
2011	Doutorado	0	5
	Mestrado	5	
2012	Doutorado	0	2
	Mestrado	2	
2013	Doutorado	0	5
	Mestrado	5	
2014	Doutorado	1	7
	Mestrado	6	
2015	Doutorado	1	5
	Mestrado	4	
2016	Doutorado	0	7
	Mestrado	7	
2017	Doutorado	1	1
	Mestrado	0	
Total		42	42

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Na tabela 2 identificamos 42 pesquisas selecionadas para nosso mapeamento, há apenas três investigações em nível de doutorado, sendo um número ínfimo diante das 39 produções de mestrado acadêmico produzidas, no entre 2008 e 2017, indicando a necessidade de mais teses de doutorado a respeito do tema, pois estas se aprofundam em suas pesquisas.

Os dados da Tabela 3, elaborada a partir da distribuição das pesquisas listadas no Quadro 16, que se encontra no apêndice A, apresentam a quantidade de pesquisas publicadas por Instituições de Ensino Superior – IES.

A análise da tabela 3, evidencia que, a universidade que mais colaborou com produções a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, foi a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP com oito dissertações em seu Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Tabela 3 – Quantidade de pesquisas por Instituição de Ensino Superior

IES	PROGRAMA	MESTRADO	DOCTORADO	TOTAL
PUC/SP	Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática	8	0	8
UFMS	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	5	0	5
UNESP	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciência	3	1	4
UEL	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática	4	0	4
UFPE	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia/Programa de Pós-Graduação em Educação	3	0	3
UNIAN	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	1	1	2
UFPR	Programa de Pós-Graduação em Educação/Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática	2	0	2
UNIUBE	Programa de Pós-Graduação em Educação	2	0	2
UFABC	Programa de Pós-Graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática	1	0	1
UFPA	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática	1	0	1
ULBRA	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Matemática	1	0	1
UNICAMP	Programa de Pós-Graduação em Educação	1	0	1
PUC/GO	Programa de Pós-Graduação em Educação	1	0	1
UFG	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática	1	0	1
UFRJ	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática	1	0	1
UESC	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	1	0	1
UFSE	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática	1	0	1
UEPB	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática	1	0	1
UECE	Programa de Pós-Graduação em Educação	1	0	1
UFMG	Programa de Pós-Graduação em Educação	0	1	1
TOTAL		39	3	42

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Em seguida, a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS em seu Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, apresentou cinco estudos, sendo todas dissertações. A Universidade Estadual de São Paulo – UNESP comparece com três dissertações e uma tese, totalizando quatro pesquisas produzidas nos Programas de Pós-Graduação em Educação e no Programa de Pós-Graduação, em Educação para Ciência e Educação Matemática e a Universidade Estadual de Londrina – UEL, com o Programa de Pós-Graduação para Ciências e Matemática, foram produzidas quatro dissertações.

No geral, percebemos que o Programa de Pós-Graduação que apresenta maior número de publicações, refere-se à Educação Matemática, totalizando 21 produções, com 20 dissertações e uma tese. O Programa de Pós-Graduação em Educação, contribui com a publicação de uma tese e quatro dissertações, perfazendo cinco pesquisas. Nos dados do Quadro 1, é apresentada a quantidade de pesquisas por regiões e estados.

Quadro 1 – Produções de teses e dissertações por Regiões e Estados

REGIÃO	ESTADO	TOTAL
Centro-Oeste	Goiás	2
	Mato Grosso do Sul	5
Centro-Oeste – Total		7
Nordeste	Bahia	1
	Ceará	1
	Paraíba	1
	Pernambuco	3
	Sergipe	1
Nordeste – Total		7
Norte	Pará	1
Norte – Total		1
Sudeste	Minas Gerais	3
	Rio de Janeiro	1
	São Paulo	16
Sudeste – Total		20
Sul	Paraná	6
	Rio Grande do Sul	1
Sul – total		7
TOTAL – GERAL		42

Fonte: Quadro adaptado de Santos, R. (2015, p. 90-91)

Ao analisarmos o Quadro 1, percebemos que, na região Sudeste se concentra-se o maior número de produção de pesquisas, a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, 20 pesquisas, e o estado de São Paulo contribuiu com 16

publicações. Na região Nordeste, temos cinco estados que colaboraram com a produção de sete pesquisas, sendo três produzidas no estado de Pernambuco. A região Sul com dois estados, apresenta igualmente sete pesquisas, das quais seis do estado do Paraná.

O Quadro 1 também mostra a disparidade entre a região que concentra a maior quantidade de produções, região Sudeste com 20 publicações, frente a região com a menor quantidade de publicações, região Norte com apenas uma pesquisa. Esta discrepância no montante de produções de teses e dissertações, entre as regiões, ocorre pela quantidade de programas de Pós-Graduação concentrados na região Sudeste, o que é visto por Nadir (2015, p. II) como problema.

A análise da distribuição geográfica dos programas e cursos de pós-graduação existentes até então chama a atenção para um problema, não só desta área, mas também de quase todas as pós-graduações brasileiras: a concentração de programas e de cursos na região sudeste do país. (NADIR, 2015, p. II)

Este levantamento, realizado no repositório da CAPES nos possibilitou organizar um cenário de pesquisas, com algumas informações relevantes, em relação à quantidade de estudos produzidos entre 2008 e 2017.

Na próxima seção, apresentamos a análise das pesquisas tendo como base as categorias listadas a partir da dissertação de Polla (2010), com subcategorias adaptadas à necessidade de nossa pesquisa.

4.2 ANÁLISE DAS PESQUISAS POR CATEGORIAS

Nesta seção, realizamos a análise das 42 produções acadêmicas coletadas, a partir do Banco de Teses e dissertações da CAPES e repositórios de programas de Pós-Graduação. A organização das pesquisas ocorreu com base na categorização proposta por Polla (2010), apresentadas a seguir, e por meio da leitura dos resumos, considerações finais e, quando necessário, do texto das produções, com o intuito de descrever e discutir, o que revelam as pesquisas na área de Educação Matemática, a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio no período entre 2008 e 2017.

Na categoria, Linguagem e pensamento algébrico, encontramos um total de sete estudos, com uma tese de doutorado e seis dissertações. Diferentemente de outras categorias, optamos por não as dividir em subcategorias, como apresenta Polla (2010), pois, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico, pode ser desenvolvido antes mesmo da existência de uma linguagem algébrica. Entendemos que, existe uma dialética entre a linguagem e o pensamento algébrico, o que torna provável que as publicações discorram a respeito dos dois termos no *corpus* de suas pesquisas.

Na categoria intitulada Relação entre Aritmética/Álgebra/Geometria, temos três produções, divididas em duas subcategorias: Relação entre Álgebra e Geometria, com duas dissertações; Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria com uma dissertação. Como o próprio título da categoria propõe, inserem-se pesquisas que trazem investigações que relacionam a Álgebra com a Aritmética e/ou com a Geometria como estratégia para o ensino e a aprendizagem de conteúdos algébricos.

Na categoria Múltiplas representações, um total de seis produções, sendo todas dissertações, divididas nas subcategorias Registros produzidos pelos alunos, com uma pesquisa e Registros em livros didáticos, com cinco estudos. Nesta categoria estão as pesquisas que buscaram investigar os diferentes registros a respeito de Álgebra por meio de diferentes registros apresentados pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, e livros didáticos.

A próxima categoria traz investigações que tratam de concepções que professores e alunos possuem em relação à Álgebra, assim como os conhecimentos mobilizados por esse grupo. A categoria Concepções/Conhecimentos tem um total de oito pesquisas, que são distribuídas em duas subcategorias: Concepções, com três dissertações e Conhecimentos, com cinco dissertações.

A categoria Metodologia de Ensino compreende o total de cinco estudos que foram distribuídos em apenas duas subcategorias: Sequência de ensino com uma dissertação, e Resolução de problemas com uma tese e três dissertações. As pesquisas inseridas nesta categoria apresentam investigações sobre as estratégias de ensino e de aprendizagem em sequência de ensino, resolução de problemas

como estratégia didática e propostas de ensino diferenciadas para o ensino de Álgebra.

A categoria Prática pedagógica em Álgebra envolve cinco publicações, que se dividem nas subcategorias: Dificuldade na aprendizagem de Álgebra que compreende uma dissertação, Reflexões a respeito do ensino de Álgebra com uma tese e uma dissertação e Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra que envolve duas dissertações. Nesta categoria constam as pesquisas que abrangem estudos a respeito da compreensão da própria prática pedagógica, assim como de outros docentes.

Primeiramente discorreremos a respeito das categorias apresentando para cada uma delas a quantidade de trabalhos, os objetivos, a metodologia, principais referenciais teóricos e os principais resultados e ao final de cada categoria, relacionamos as pesquisas com as ideias a respeito de concepções de Álgebra e Educação Algébrica e Pensamento Algébrico apresentados nos estudos preliminares.

Os dados da Tabela 4 – dispõem as categorias, subcategorias e a quantidade de trabalhos dispostos em cada uma delas.

A partir da tabela 4, observamos que a distribuição das pesquisas mostra que, algumas das produções acadêmicas relacionam-se com mais de uma categoria. Em vista disso, optamos por inclui-las em apenas uma, ou seja, a que melhor atendia ao propósito desta investigação. A seguir, apresentamos as pesquisas que compõem cada categoria, distribuídas nos tópicos: objetivos das pesquisas; abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos e principais resultados.

Para complementar nossas análises, consideramos as ideias dos autores Chevallard (1984) e Usiskin (1995) a respeito de concepções de Álgebra, e Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) no que se refere à concepção de Educação Algébrica. No tocante pensamento algébrico, consideramos as ideias dos autores Lins e Gimenez (1997) e Lee (2001). Tanto as concepções quanto o Pensamento Algébrico estão representados por meio de síntese, no Quadro 17 (Apêndice B) e Quadro 18 (Apêndice C), respectivamente.

Tabela 4 – Distribuição das pesquisas de acordo com as categorias e subcategorias

CATEGORIA/SUBCATEGORIA	QUANTIDADE		
	Doutorado	Mestrado	TOTAL
Linguagem e pensamento algébrico	1	6	7
Linguagem e pensamento algébrico	1	6	7
Relação entre Aritmética/ Álgebra/Geometria	0	3	3
Relação entre Álgebra e Geometria	0	2	2
Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria	0	1	1
Múltiplas representações	0	6	6
Registros produzidos pelos alunos	0	1	1
Registros em livros didáticos	0	5	5
Materiais/Recursos Tecnológicos	0	8	8
Computador/ <i>Software</i>	0	4	4
Jogos/Materiais manipulativos	0	4	4
Concepções e Conhecimentos	0	8	8
Concepções	0	3	3
Conhecimentos	0	5	5
Metodologia de Ensino	1	4	5
Sequências de ensino	0	1	1
Resolução de problemas	1	3	4
Prática pedagógica em Álgebra	1	4	5
Dificuldade na aprendizagem de Álgebra	0	1	1
Reflexões a respeito do ensino de Álgebra	1	1	2
Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra	0	2	2
TOTAL	3	39	42

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.⁴

Essas escolhas justificam-se pelo fato de as ideias dos autores serem semelhantes no que diz respeito a esses temas. Essas concepções e pensamentos algébricos foram relacionados às investigações a partir da leitura do texto de cada estudo, especialmente, dos capítulos a respeito do desenvolvimento das pesquisas e das considerações finais. Ao final de cada categoria, apresentamos algumas considerações a respeito das pesquisas.

⁴ Modelo da Tabela retirado da pesquisa de Santos (2015)

4.2.1 Linguagem e pensamento algébrico

Na categoria Linguagem e Pensamento Algébrico inserem-se as pesquisas que investigaram os aspectos do pensamento, da linguagem e da simbologia algébrica, buscando compreender como os conteúdos envolvendo estes temas são mobilizados por professores e alunos, tanto nos anos finais do Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

Nesta categoria estão reunidas as pesquisas que apresentam o estudo da linguagem e pensamento algébrico nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra. Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) há muitos meios para expressar o pensamento algébrico, entre eles a linguagem. Esta categoria apresenta sete pesquisas, sendo uma tese de doutorado e seis dissertações de mestrado. Nos dados do Quadro 2 apresentamos os títulos das pesquisas, os autores e anos de publicação e nível acadêmico.

Quadro 2 – Categoria: Linguagem/Pensamento Algébrico

Título	Autor	Nível
Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental: Índices de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos	DÉCHEN, T. (2008)	Mestrado
Características do pensamento algébrico de estudantes de 1º ano do Ensino Médio	BECHER, E. L. (2009)	Mestrado
Como professores e alunos do Ensino Médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita	SANTOS, G. L. (2010)	Mestrado
Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino	SILVA, E. P. (2013)	Mestrado
Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental	SILVA, M. G. (2015)	Mestrado
Pensamento narrativo na aprendizagem matemática: Estudo com alunos do ensino fundamental na resolução de atividade de Álgebra	VALENTIM, M. A. (2015)	Doutorado
O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da teoria das situações didáticas	SILVA JUNIOR (2016)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

Objetivo das pesquisas

Dechén (2008) trouxe como principal objetivo de pesquisa identificar indícios do desenvolvimento da linguagem e pensamento algébrico de alunos de 6ª

série (7º ano) do Ensino Fundamental, a partir de tarefas envolvendo conceitos algébricos.

Becher (2009) desenvolveu sua pesquisa com alunos de 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo de identificar e mapear seus conhecimentos, competências e habilidades algébricas a partir de atividades que envolveram equações polinomiais de 1º grau, resolução de problemas com equações polinomiais de 2º grau e resolução de sistemas e inequações de 1º grau.

A pesquisa de Santos, G. (2010) visou analisar as características do pensamento algébrico mobilizado por alunos e professores do Ensino Médio mediante a resolução de questões de Álgebra retiradas de vestibulares de algumas universidades estaduais paranaenses realizados entre de 2005 e 2007.

A dissertação de Silva, E. (2013) teve como objetivo compreender os aspectos do pensamento algébrico revelados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. A autora escolheu alunos desse nível escolar, como público-alvo de sua pesquisa, com o objetivo de investigar o pensamento algébrico que esses alunos trazem de anos anteriores.

Silva, M. (2015) com o intuito de investigar o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica em alunos do 9º ano e professores do Ensino Fundamental, dentro da perspectiva da teoria histórico-cultural, analisou os registros dos trabalhos a respeito de equação de 2º grau realizados pelos estudantes.

A tese de Valentim (2015) teve como objetivo analisar as relações entre a linguagem e o pensamento expresso por alunos que cursavam os 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, mediante atividades que proporcionavam a mobilização de padrões e do sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas, que auxiliavam nas construções de significados algébricos. Este trabalho teve como base o pensamento narrativo expresso por alunos, embora não fosse considerado Pensamento Algébrico, foi relacionado à Álgebra.

Em sua dissertação, Silva Junior (2016) objetivou investigar a possibilidade de desenvolver o pensamento algébrico com alunos do 9º ano, por meio de trabalho com padrões.

Notamos que os objetivos das pesquisas, apresentadas nesta categoria, vão ao encontro das propostas dos PCN (BRASIL, 1998, p. 64) em relação ao trabalho com o pensamento algébrico.

Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p. 64)

A respeito dos temas algébricos trabalhados, percebemos que as escolhas foram variadas, indo desde estudos com padrões e equações à resolução de situações-problema que induziam alunos à busca de regras algébricas. Outro fator importante, diz respeito à escolha dos sujeitos destas investigações, quatro delas apresentaram estudo com alunos (DÉCHEN, 2008; SILVA, E., 2013; VALENTIM, 2015; SILVA JUNIOR, 2016) e uma (SILVA, M., 2015) que investiga alunos e professores, sendo todos os cinco estudos com anos finais do Ensino Fundamental. Apenas duas investigações realizaram seus estudos com alunos do Ensino Médio (BECHER, 2009; SANTOS, G. 2010), e o último autor inseriu professores em sua pesquisa. Podemos dizer que a escolha da maioria dos pesquisadores centra-se em como os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio desenvolvem o pensamento algébrico, tornando perceptível o pouco interesse pelos estudos com alunos do Ensino Médio ou professores.

A seguir apresentamos as abordagens metodológicas e referenciais teóricos escolhidos para elaboração das pesquisas.

Abordagens Metodológicas e Principais referenciais teóricos

No tocante à abordagem metodológica adotada pelas pesquisas que fazem parte da categoria linguagem e pensamento algébrico, verificamos que todas adotaram a modalidade de pesquisa qualitativa. Esta escolha metodológica atendeu às necessidades de cada estudo, como atenta Valentim (2015) quando afirma que o enfoque qualitativo:

[...] alicerça-se em informações recolhidas e analisadas com base em entrevistas, questionários, observação das interações que ocorreram neste ambiente, bem como por meio de registros escritos e em vídeos. Esse modelo de pesquisa é utilizado quando se pretende obter informações detalhadas de um determinado contexto. (VALENTIM, 2015, p. 63)

Na pesquisa de Déchen (2016), encontramos um estudo realizado no ambiente escolar. O público alvo constitui-se duas turmas de 6ª série (7º ano) do Ensino Fundamental que desenvolveram atividades que auxiliassem na exploração e análise de regularidades. Além destas atividades, a autora também analisou os registros produzidos pelos alunos.

Para a coleta das informações, Becher (2009) seguiu quatro etapas, entre elas, caracterizar o pensamento desenvolvido nos anos finais do Ensino Fundamental, utilizar o *software* SCOMAX⁵, analisar a partir do banco de dados do SCOMAX, as características do pensamento algébrico e os principais erros presentes nos registros dos alunos.

Para a coleta dos dados, Santos, G. (2010) elaborou uma prova com questões retiradas de vestibulares de universidade paranaense e aplicou à professores e estudantes do Ensino Médio. Os resultados surgiram a partir das leituras, análise descritiva dos dados e dos conteúdos das avaliações, conforme orientações de Laville e Dionne (1999).

Com o intuito de observar as atitudes e diálogos de 13 estudantes do 6º ano que participaram da pesquisa, Silva, E. (2013) decidiu desenvolver sua investigação em ambiente escolar em nove etapas, que a pesquisadora chamou de episódios. A aplicação de problemas promoveu discussão com a turma a respeito do pensamento algébrico manifestado por esses alunos. A análise dos dados foi realizada, conforme ideias de Bardin, por meio da análise de conteúdo.

Por sua vez, Silva, M. (2015) além de realizar uma pesquisa de teor qualitativo de visão dialética, envolveu a elaboração, o desenvolvimento e a análise

⁵ O SCOMAX é um sistema de inteligência artificial, que está sendo desenvolvido pelo Grupo de Estudos Curriculares da Universidade Luterana do Brasil e pelo Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, de Tenerife na Espanha, implementado em Java, que mostra os resultados de um teste adaptativo individualizado, de cada nodo (conceito) de um mapa conceitual (BECHER, 2009, p. 49).

de atividades com base na teoria histórico-cultural. Os dados foram analisados, de acordo com as atividades algébricas coletadas e os registros dos alunos.

A pesquisa de Valentim (2015) desenvolveu-se com alunos dos 6º e 9º anos do Ensino Fundamental, em sala de aula e horário escolar. O processo de coleta de dados que se deu por meio de entrevistas, questionários, observação das interações ocorridas em sala de aula baseados em atividades retiradas e adaptadas de um livro didático. Utilizou também os registros escritos pelos alunos que relacionaram o pensamento e linguagem que fazem parte dos processos de aprendizagem de conteúdos algébricos, além das estratégias utilizadas, assim como suas dificuldades na resolução das atividades.

Silva Junior (2016) também desenvolveu sua pesquisa com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, em ambiente escolar, com a construção e aplicação de uma sequência didática envolvendo padrões e relações funcionais para promover o pensamento algébrico.

Em relação ao referencial teórico, as investigações de Becher (2009), Santos, G. (2010), Silva, E. (2013) e Silva, M. (2015), utilizaram as ideias de Fiorentini, Miguel e Miorin, Lins e Gimenez, Kieran e Radford que discorrem a respeito da caracterização do pensamento algébrico e de Álgebra. Déchen (2008) utilizou as ideias de diversos autores, entre os que considera principais estão Ponte *et al.*, Alro e Skovsmose, Lins e Gimenez, Fiorentini Miorim, Miguel e Caraça. Por sua vez, a investigação de Valentim (2015) diverge desses estudos, pois ampara seu referencial teórico nas ideias de Vigotski, com a teoria sociocultural e Bruner que considera o pensamento narrativo fundamentado na realidade psíquica e o pragmático no caráter científico.

Destes estudos, observamos que apenas a pesquisa de Becher (2009) utilizou um *software* para a coleta de informações, mas também apresentou convergências com outros estudos que optaram por utilizar entrevistas, questionários, registros escritos, sequências didáticas, entre outros.

Alguns resultados e contribuições apresentados nestas pesquisas

Nesta seção discorreremos a respeito dos resultados de cada pesquisa disposta na categoria Linguagem e pensamento algébrico,

Observamos que Déchen (2008) aplicou uma sequência de problemas com o objetivo de investigar o pensamento algébrico desenvolvido por alunos da 6ª série (7º ano). Na sequência constavam atividades de padrões e regularidades que auxiliaram os alunos a desenvolverem o pensamento algébrico, no desenvolvimento da pesquisa, percebeu-se que, embora expressasseem oralmente seus pensamentos, a maioria dos alunos não conseguiu construir a linguagem simbólica.

Déchen (2008) afirma que, durante a resolução das tarefas os alunos mostraram dificuldades com o entendimento das respostas algébricas, pois ainda pensavam em resoluções numéricas, já que em anos anteriores realizaram trabalhos com padrões e generalizações aritméticas. Além disso, no processo de sua investigação, observou que a falta de compreensão a respeito de variáveis e de diferentes linguagens foi pela não aceitação dos alunos para o uso de letras.

A autora também discorre a respeito da preocupação da professora dessas turmas de 6ª série (7º ano) com o tempo de cumprimento do currículo escolar. Por se tratar de uma investigação em uma escola particular, Déchen (2008) observou que houve conflito nos objetivos de ensino da professora que ensinava Álgebra e da que ensinava Geometria, o que mostra a necessidade de que haja discussão entre os docentes a respeito dos conteúdos matemáticos ensinados.

Déchen (2008) finaliza declarando que o trabalho com tarefas exploratório-investigativas permitiu ao aluno observar e explorar padrões e regularidades até que conseguissem generalizar.

Semelhantemente, Becher (2009) pondera que em sua análise percebeu que houve muita dificuldade por parte dos alunos de 1º ano do Ensino Médio com a manipulação algébrica para percepção de padrões e resolução de problemas.

O autor investigou as habilidades e competências desenvolvidas pelos alunos em anos anteriores. Declara que “é possível identificar maior dificuldade por parte dos estudantes, com relação às questões de enfoque mais sintático e estruturais, relacionadas a contextos matemáticos, como utilizar propriedades em situações puramente matemáticas” (BECHER, 2009, p. 73)

Nesta pesquisa, a Aritmética generalizada fica evidente, quando a autora descreve os erros cometidos pelos estudantes. Durante a análise das atividades resolvidas pelos alunos, percebemos que esses erros vão ao encontro da falta de entendimento de expressões e equações, pois os alunos ainda queriam operar com a letra, como se fosse número.

Assim, os estudantes não mostraram-se capazes de resolver equação de 1º grau e a resolução de problemas, pois seus conhecimentos baseiam-se na aprendizagem de técnicas e manipulações.

Ao final, Becher (2009) salienta que os resultados obtidos não foram satisfatórios, embora os objetivos de sua pesquisa tenham sido parcialmente alcançados, com o mapeamento das habilidades algébricas desenvolvidas e utilizadas pelos estudantes, assim como os erros cometidos por eles. Mas, não foi possível identificar as concepções dos erros produzidos pelos estudantes.

Santos, G. (2010, p. 98) afirma que, ao analisar a produção escrita de professores e estudantes do Ensino Médio, pode observar a existência de vestígios de indicadores que caracterizavam o pensamento algébrico, como o uso de incógnitas. Outro aspecto predominante foi o fato de que professores e alunos utilizaram a linguagem natural em grande parte das produções superando a linguagem e o simbolismo algébrico, além de tentarem “generalizar adotando macetes para encontrar a solução do que estava sendo proposto”.

O autor ainda afirma que muitos dos participantes somente estabeleceram generalizações, sem apresentar a solução por meio de operações algébricas. Também destaca que dos 24 professores participantes da pesquisa apenas 14 apresentaram produção escrita a respeito da atividade que relacionava a representação gráfica e a expressão algébrica. O autor alerta que este fato leva a entender de que modo os estudantes estão recebendo o conhecimento algébrico. Ao final, sugere uma reflexão a respeito do trabalho do professor em sala de aula, quanto a minimizar as dificuldades do aluno e também sobre a transmissão dos conhecimentos algébricos, mediante uma linguagem provida de significados.

Em sua pesquisa Silva, E. (2013, p. 133-134) identifica que os problemas propostos aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental trouxeram evidências da manifestação de pensamento algébrico, pois:

Concebem a ideia de relações entre dois conjuntos de objetos variáveis; resolvem problemas que envolvem equações utilizando o conceito de variável; desenvolvem/criam uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente; desenvolvem/criam uma linguagem adequada para expressar equivalências e relações; utilizam símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades; compreendem os conceitos matemáticos envolvidos no problema; [...] fazem justificações em linguagem verbal ou simbólica quando lidam com desconhecidos; modelam uma situação-problema utilizando figuras, gráficos, esquemas, símbolos não convencionais pertinentes e expressões aritméticas. (SILVA, E., 2013, p. 133-134).

A autora considera que esses alunos conseguem pensar algebricamente, mas percebe que eles estão condicionados a reproduzirem e não refletirem a respeito do que lhes é ensinado. Conclui que, os aspectos do pensamento algébrico deveriam ser mais explorados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, assim como a construção de conceitos matemáticos para proporcionar aos alunos êxito na resolução de problemas.

Observamos que as concepções de Álgebra dos alunos vão ao encontro da Aritmética generalizada, assim como o pensamento algébrico. Muitas vezes esses estudantes resolvem as questões utilizando a Aritmética, como se fosse Álgebra. Acreditamos que o tipo de atividade aplicada por esses pesquisadores deu oportunidade para que isso ocorresse.

Silva, M. (2015) observou que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, sujeitos de sua pesquisa, tiveram dificuldade com o desenvolvimento do pensamento e linguagem algébrica e também com questões básicas de Matemática como ler, interpretar, operar matematicamente, calcular com frações, números decimais e representar termos algebricamente, que se evidenciaram com a aplicação de atividades algébricas.

Na análise teórica, verificou que os conceitos científicos, o movimento lógico-histórico e a assimilação desses conceitos conduzem os alunos à pensar do geral ao particular. Identificou nos documentos oficiais e livros didáticos a falta de preocupação com a formação de conceitos, além da ausência de textos reflexivos e atividades que favoreçam o pensamento científico, confirmando o que Chevallard (1984; 1989) já alertava em relação ao currículo de Álgebra. A autora também

afirma que refletir a participação dos alunos e as ações do professor como mediador e sua relação com esses estudantes foi de extrema importância para o processo de pesquisa.

Silva, M. (2015) enfatiza que o conhecimento algébrico apresentado pelos alunos foi somente intuitivo e que esse poderia ter sido melhor explorado pelo currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A autora também ressalta que se os conceitos básicos da Matemática forem bem trabalhados nos anos iniciais, os alunos terão sucesso na resolução de problemas algébricos. Radford (2006; 2010) discorre que o pensamento algébrico desenvolve-se de forma natural e que foi refinado ao longo do tempo.

A autora conclui que esse trabalho possibilitou:

o desenvolvimento do sentido pessoal dos alunos para a Álgebra e para a equação de segundo grau, que foi construído a partir do significado, que é histórico, social e culturalmente construído, que se relaciona como uma unidade com o conhecimento científico. Assim constatamos que os alunos que, realmente, estiveram em atividades de estudo, construíram os conceitos algébricos trabalhados; que o trabalho coletivo, suas manifestações, expressões e ações de discutir, relacionar, identificar, generalizar e avaliar foram relevantes para o alcance dos objetivos, especialmente no processo de desenvolvimento mental dos alunos. (SILVA, M., 2015, p. 262)

Valentim (2015) declara que, para responder sua questão de pesquisa investigou a relação entre o pensamento e a linguagem manifestados em alunos dos 6º e 9º anos por meio do pensamento narrativo⁶. O autor deixa claro que fatores como relações pessoais entre os alunos, questões sociais e relações com a escola influenciaram nos resultados. Ao refletir sobre os diálogos entre os alunos a respeito das atividades, o autor observou que estes “acabavam por modificar o pensamento do aluno na construção de conceitos e na conformação de técnicas de resolução” (VALENTIM, 2015, p. 173). Já, o pensamento narrativo como diálogo apontou pontos importantes no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, como a interação entre os alunos, auxiliando os que tinham menos conhecimento matemático, assim como a colaboração na resolução de atividades por parte dos

⁶ Para esse estudo, o pensamento narrativo é entendido como recurso cognitivo na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, em especial, da Álgebra (VALENTIM, 2015, p. 26)

estudantes que não queriam participar. Por outro lado, também declarou que alguns alunos não avançaram na resolução de atividades.

O estudo de Valentim evidenciou que o ensino e a aprendizagem de Álgebra centram-se em técnicas de resolução de questões algébricas, pois:

[...] o aluno aplicou as técnicas e na justificativa apresentou os procedimentos utilizados, sem, no entanto, perceber que suas respostas não condiziam com o contexto do problema, já que não seria possível fracionar os animais. Em outro exemplo, o aluno acertou a questão, porém não soube explicar como havia solucionado. (VALENTIM, 2015, p. 112-113).

No relato do pesquisador, percebe-se a falta de reflexões e argumentos que justificassem as soluções encontradas pelos participantes. Para eles o sentido de Álgebra baseia-se em “simplificar e resolver”, visto que não compreendem o significado ou a finalidade das letras nas equações.

Entendemos ser preocupante as dificuldades apresentadas por esses participantes, mas também é um alerta à necessidade de repensar, como se desenvolvia o ensino e a aprendizagem de Álgebra em anos anteriores, exigindo mudanças na prática docentes.

Silva Junior (2016) apresenta suas considerações finais a partir da análise dos resultados da aplicação de uma sequência didática em uma turma de 9º ano. A primeira análise descreve a relação do pensamento algébrico e as relações funcionais com uma sequência didática por meio de padrões. A próxima análise apresenta as situações didáticas a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico e as relações funcionais que auxiliaram os alunos na identificação das características de sequências pictóricas e repetitivas. As atividades aplicadas no nível intermediário possibilitaram ao aluno identificar o padrão e estabelecer relação entre os termos e suas respectivas posições auxiliando no encontro da solução e mesmo na continuidade da sequência.

Silva Junior (2016, p. 158) afirma que o nível avançado permitiu que as atividades promovessem:

O desenvolvimento de generalizações a partir de padrões de regularidade, a formação de tabelas a partir de padrões de regularidade, a construção de expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade, a

representação de gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade, a exploração de relações funcionais a partir de padrões de regularidade. Ainda que nem todas as duplas tenham conseguido desenvolver todos estes conceitos em todas as atividades, cada um deles foi trabalhado e discutido, entre os estudantes e o pesquisador, o que nos leva a afirmar que o objetivo geral de explorar padrões envolvendo relações funcionais foi alcançado (SILVA JUNIOR, 2016, p. 158).

O pesquisador concluiu que o trabalho com sequências dá oportunidade ao aluno para desenvolver o pensamento algébrico por meio da observação, compreensão e formulação de respostas a partir de seu próprio conhecimento.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Nos dados do Quadro 3 apresentamos nosso entendimento a respeito das concepções e do pensamento algébrico apresentados nas pesquisas desta categoria.

Quadro 3 – Categoria Linguagem e Pensamento Algébrico: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
DÉCHEN (2008)	Concepção – Aritmética generalizada Pensamento Algébrico – Aritmeticismo
BECHER (2009)	Concepção – Estudo de procedimentos Pensamento Algébrico – Álgebra como atividade
SANTOS, G. L. (2010)	Concepção – Estudo de procedimentos e Relações entre grandezas Pensamento Algébrico – Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta
SILVA, E. (2013)	Concepção – Aritmética generalizada Pensamento Algébrico – Aritmeticismo e Internalismo
SILVA, M. G. (2015)	Concepção – Estudos de procedimentos e Relações entre grandezas Pensamento Algébrico – Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta
VALENTIM (2015)	Concepção – Aritmética generalizada e Estudo de procedimentos Pensamento algébrico – Aritmeticismo e Álgebra como atividade
SILVA JUNIOR, (2016)	Concepção – Aritmética generalizada Pensamento Algébrico – Aritmeticismo

Fonte: Elaborado pela pesquisadora

As pesquisas de Déchen (2008) e Silva Junior (2016) mostram que as escolhas dos conteúdos, para a realização das investigações, envolvem o trabalhos com padrões e regularidades. Estes autores buscaram compreender o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio destas atividades. Geralmente, esse conteúdo é desenvolvido quando a intenção do professor é

iniciar o trabalho com Álgebra, assim, a concepção inserida neste tema refere-se à Aritmética generalizada, sendo propícia para desenvolver o pensamento algébrico no início dos anos finais do Ensino Fundamental, relacionando-se com o *Aritmetismo*.

Por sua vez, Becher (2009) optou pelo trabalho com equações polinomiais de 1º e 2º graus. Para resolução das atividades os alunos têm que compreender o significado de incógnita, além de, relacionar a linguagem algébrica com problemas que envolvem a Geometria, resolução de equações por diferentes métodos, interpretar enunciados, entre outros. Diante disso, a concepção que se relaciona com este conteúdo é Estudo de procedimentos, visto que, a Álgebra serve para simplificar e resolver certos tipos de problemas. O pensamento algébrico, neste tema, diz respeito a ler, compreender, expressar e resolver equações polinomiais de 2º grau, relacionando-se com Álgebra como atividade.

Santos, G. (2010) optou pelo trabalho com questões de vestibulares para realizar sua investigação. Nestas atividades, pudemos encontrar questões envolvendo o estudo de funções de 1º grau, problemas que exigem a resolução por meio de equação polinomial de 1º grau e fatoração, sistema de equação de 1º grau. Estas atividades exigem que o aluno diferencie variável de incógnita, realize o transformismo algébrico e estabeleça relações entre as variáveis, o que mostra as concepções estudo de procedimentos, visto que encontram-se a resolução de equação polinomial de 1º grau, e Estudo da relação entre grandezas, dado que existem atividades envolvendo funções. O pensamento algébrico, no que se refere a estes conteúdos, vai ao encontro de Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta, dando possibilidade ao aluno para desenvolver competência e habilidade referentes a analisar, compreender, justificar, entre outras.

Silva, E. (2013) propõe em sua pesquisa a resolução de problemas que introduzam o conceito de Álgebra em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. As atividades, proposta pela autora, inserem-se nas concepções Aritmética generalizada, no sentido que propõe Chevallard (1984), visto que, para resolução destes problemas não se necessita da utilização de Álgebra para encontrar a solução. Em relação ao pensamento algébrico, existem indícios de Aritmetismo e

Internalismo, pois os alunos produzem significados por meio de números, utilizando as propriedades aritméticas.

Silva, M. (2015) apresenta estudos com funções e equações polinomiais de 2º grau, propiciando ao aluno o desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como Atividade e Álgebra como ferramenta. A concepções que se apresenta neste conteúdo são Estudo de procedimentos e Relações entre grandezas. A proposta da autora para o estudo de equação é interpretar, resolver e relacionar a linguagem escrita com a linguagem algébrica, que vai ao encontro de características próprias para estes pensamentos e concepções

Embora, Valentim (2015) analise os pensamentos narrativos dos alunos, por meio de relações sociais, também apresenta atividades que envolvem padrões e regularidades e equações polinomiais de 1º grau, o que favoreceu a identificação de concepção e pensamento algébrico. Observamos a presença da concepção Aritmética generalizada e Estudo de procedimentos. Estes conteúdos possibilitam o desenvolvimento de competências e habilidade que podem ser traduzidas por meio do pensamento algébrico Aritmetismo e Álgebra como atividade.

No geral, as concepções que mais sobressaem, nesta categoria, foram as concepções de Álgebra Aritmética generalizada e Estudo de procedimentos, e quanto ao pensamento algébrico, temos Aritmetismo e Álgebra como atividade. Por fim, apresentamos algumas considerações a respeito desta categoria

Algumas considerações

A leitura destes trabalhos revelou que as que pesquisas apresentaram aspectos importantes a respeito das concepções de Álgebra, das concepções de Educação Algébrica e do pensamento algébrico desenvolvido por alunos dos anos finais dos Ensino Fundamental e Ensino Médio e como este interfere na aprendizagem de Álgebra. Um desses aspectos refere-se ao fato das pesquisas priorizarem conteúdos relacionados a equações, padrões e regularidade.

Observamos que as estratégias empregadas, neste grupo de pesquisas, não diferenciam-se entre uma e outra, mantendo os procedimentos metodológicos, como aplicação de tarefas envolvendo, sobretudo, a resolução de padrões, regularidades, sistemas de equações de 1º grau e equações polinomiais de 1º e 2º

graus, registros escritos elaborados pelos participantes, entre outros, o que foi essencial para a coleta e análise dos dados. Neste sentido, acreditamos que as escolhas dos conteúdos foram muito limitadas, podendo-se expandir para outros temas.

Embora a minoria dos estudos fosse composta por alunos do Ensino Médio, percebemos que as estratégias de resolução utilizadas por eles pouco se distinguem das escolhas dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. A maioria das pesquisas mostrou que os participantes priorizaram a resolução de atividades algébricas por meio da Aritmética, mesmo os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Nestas pesquisas, pode-se perceber uma organização didática, na qual a mecanização para resolução de atividades é frequente. Diante disso, apoiamos as ideias de Chevallard (1984) que discorre a respeito do caminho a ser seguido para o trabalho com problemas algébricos.

O ideal, evidentemente, seria propor um problema em total conformidade com aqueles que a aritmética permite em princípio resolver, mas de uma tal complexidade que, sozinhas, as luzes da aritmética nos abandonam incapazes de resolvê-lo efetivamente; então, oferecer-lhe uma solução por meio da Álgebra. (CHEVALLARD, 1984, p. 54, tradução nossa)

O que nos chamou atenção nestas pesquisas, foi o fato de que os professores apresentam atividades padronizadas que conduzem os alunos a resoluções mecânicas, como destacado na dissertação de Santos, G. (2010). Acreditamos que isso seja uma evidência de que é necessário refletir a respeito das escolhas das atividades a serem oferecidas aos alunos.

Constatamos a ausência da preocupação dos pesquisadores em discutir a relação do currículo com o ensino e aprendizagem de Álgebra. Chevallard (1989, p. 49, tradução nossa) já alertava a necessidade de repensar e refletir se “[...] é possível definir e realizar um **estado do sistema de ensino** (ou seja, um **currículo**) que determine uma relação oficial com uma Álgebra mais adequada às tarefas nas quais o algébrico será empregado [...]”.

Em vista do que observamos nesta categoria, podemos dizer que há muito o que se investigar a respeito de linguagem e pensamento algébrico, envolvendo outros conteúdos de Álgebra.

A seguir, trataremos das pesquisas que compõem a categoria Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria.

4.2.2 Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria

Nesta categoria, reunimos pesquisas que apresentam trabalhos envolvendo a Álgebra, a Geometria e a Aritmética, que foram divididas em duas subcategorias: Relação entre Álgebra e Geometria composta pelos estudos de Souza (2013) e Queiroz (2014); Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria constituída pelas pesquisas de Guadagnini (2013). Os trabalhos relacionados aqui buscaram investigar o ensino e a aprendizagem de conteúdos relacionando a Álgebra com a Aritmética e a Geometria por meio de atividades desenvolvidas por alunos.

Nos dados do Quadro 4 apresentamos o título das pesquisas, o autor e ano de publicação, nível acadêmico.

Quadro 4 – Categoria: Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria

Título	Autor	Nível
Análise de estratégias de alunos do Ensino Médio em Problemas de Cálculo de Área do Paralelogramo	SOUZA, E. R. (2013)	Mestrado
Uma proposta par o ensino de função articulando as linguagens algébricas e geométricas	QUEIROZ, P. C. (2014)	Mestrado
O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental	GUADAGNINI, M. R. (2013)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivo das pesquisas

Na subcategoria Relação entre Álgebra e Geometria, estão inseridas duas pesquisas, uma relacionada ao Ensino Médio e outra aos anos finais do Ensino Fundamental. Entendendo que os conteúdos de Geometria são propícios para explorar e desenvolver conceitos algébricos, os estudos que compõem esta subcategoria investigaram a relação entre conceitos algébricos e geométricos, buscando compreender como ocorre seu ensino e aprendizagem.

Souza (2013) elaborou sua dissertação a partir da investigação de resolução de tarefas de cálculo da medida de área de paralelogramos aplicada à

alunos do 2º ano do Ensino Médio, sob o ponto de vista relacional, cálculo numérico e Álgebra das grandezas.

A dissertação de Queiroz (2014) propôs a análise da resolução de atividades com alunos do 9º ano para verificar a articulação entre a Álgebra e a Geometria relacionadas ao conceito de função.

Na subcategoria Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria está a pesquisa de Guadagnini (2013), que foi realizada com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental que teve como objetivo verificar a relação entre os registros numéricos, algébricos e geométricos na resolução de equações polinomiais de 2º grau na forma completa por meio de fatoração.

Neste conjunto de estudos há a preocupação em compreender como os alunos articulam e compreendem conceitos algébricos com Aritmética e Geometria. No geral, esses pesquisadores preocupam-se com as dificuldades apresentadas pelos alunos com a aprendizagem de Álgebra. Os conteúdos analisados divergem em cada pesquisa, área do paralelogramo, equações e funções polinomiais de 1º e 2º graus. O público alvo constituiu-se de alunos de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio, não constando nenhuma investigação com professor.

A seguir, apresentamos as abordagens metodológicas e referenciais teóricos escolhidos pelos pesquisadores.

Abordagens Metodológicas e Principais referenciais teóricos

No que diz respeito à abordagem metodológica das investigações que constam da subcategoria Relação entre Álgebra e Geometria todas se enquadram como pesquisas qualitativas, embora Souza (2013) não deixe explícito qual a metodologia de sua investigação.

Para a coleta e análise de dados, Souza (2013) aplicou quatro atividades com situações-problema a respeito de medida da área do paralelogramos, nos quais observou o desempenho de alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Por sua vez, Queiroz (2014) amparou sua pesquisa na Engenharia didática de Artigue (1996) e aplicou uma sequência didática aos alunos de 9º ano do Ensino

Fundamental, desenvolvida em cinco sessões, contemplando relações entre grandezas, que possibilitaram a coleta e a análise dos dados.

Dentre os principais referenciais teóricos Souza (2013, p. 20) utilizou a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), para investigar “o desenvolvimento e a aprendizagem de competências cognitivas complexas” e, também a abordagem de área como grandeza de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Queiroz (2014) se amparou nos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval para analisar a produção dos estudantes em uma perspectiva cognitiva e, ainda, na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para compreender o significado dado pelo aluno à alguns conceitos algébricos.

No que tange à metodologia das pesquisas que encontram-se na subcategoria Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria, Guadagnini (2013) apoiou-se na Engenharia Didática descrita por Artigue (1996). Para análise, a autora elaborou e aplicou uma sequência didática por meio de atividades compostas com equações de 2º grau por meio da fatoração, utilizando registros algébricos e geométricos. Para compor os referenciais teóricos amparou-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995).

Como pudemos perceber a Engenharia Didática foi a escolha de duas entre três pesquisas. Esta metodologia orientou os pesquisadores nos caminhos que deveriam seguir a fim de compor o material de análise.

Observamos que, o referencial teórico foi composto por teorias francesas, que permitiu ao pesquisador realizar pesquisas a respeito do cognitivo do aluno, como analisar seus registros de representação.

Alguns resultados e contribuições apresentadas nas Pesquisas

Na subcategoria Relação entre Álgebra e Geometria, a pesquisa de Souza (2013), propôs a resolução de atividades que envolvessem o cálculo de medidas de área de trapézios por alunos do 2º ano.

O autor afirma que a maioria dos alunos do 2º ano do Ensino Médio não sabiam calcular a medida da área do paralelogramo. Dos alunos que conseguiram

desenvolver o cálculo relacional, um pouco mais da metade realiza a atividade corretamente. Em relação ao cálculo numérico, mais da metade dos alunos respondeu corretamente à questão, os outros erraram na multiplicação de números decimais por inteiros. Quanto à Álgebra das grandezas o autor constatou que muitos alunos deram respostas incorretas, como a unidade de medidas inadequadas, o que mostrou que eles não entendem o conceito de área, como uma grandeza geométrica.

No desenvolvimento destas atividades, observamos que em algumas vezes esses alunos utilizaram régua para medir o trapézio, encontraram os valores e calcularam o produto da medida da base pela medida da altura, para encontrar a medida da área. Em outras atividades, os alunos continuaram usando a Aritmética para resolver problemas a respeito de medida da área de trapézios. Ao final dessa sequência de atividades, o autor relata que os alunos conseguiram escrever uma regra para o cálculo da medida da área de um trapézio.

Queiroz (2014) explica que a análise das tarefas a respeito da articulação de Álgebra e Geometria em um processo de aprendizagem de função apresentou resultados que mostram que apesar dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental compreenderem e realizarem as conversões exigidas na atividade nem todos conseguiram fazer o caminho contrário, assim como salienta o autor.

[...] fica evidente que a conversão do registro gráfico para o registro tabular foi melhor apreendida pela turma e que a conversão no sentido contrário é fonte de dificuldades por uma parte dos alunos principalmente com relação à necessidade da escolha de uma escala. (QUEIROZ, 2014, p. 69-70).

O autor constatou que os alunos apresentaram dificuldade com a construção da representação gráfica e a relação entre as variáveis e com a utilização da linguagem algébrica para a generalização de regularidades. A Teoria das Situações Didáticas auxiliou o pesquisador e o professor a criarem condições de aprendizagem aos estudantes que, por sua vez, também foram auxiliados, por meio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a entender que as atividades matemáticas vão além de respostas.

Na subcategoria Relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria, a pesquisa de Guadagnini (2013) foi desenvolvida com alunos do 9º ano do Ensino

Fundamental. Os alunos realizaram as atividades em duplas ou em grupos de três alunos, para que pudessem discutir as produções escritas. A autora pondera que foram necessários momentos de institucionalização.

As atividades aplicadas têm por base o trabalho com a fatoração numérica, geométrica ou algébrica, cujo objetivo é analisar de que modo o aluno desenvolve e representa a forma fatorada do quadrado da soma das medidas dos lados das figuras. Com estas atividades a autora concluiu que alguns alunos conseguiram encontrar a solução de uma equação de 2º grau por meio de registros de representação geométrica.

Após realizar discussão a respeito das resoluções das atividades, os alunos conseguiram realizar a conversão do registro algébrico para o geométrico e mostraram saber o valor que completa o trinômio, mas esqueceram-se de escrever a forma fatorada. Estas atividades apresentaram a relação do currículo algébrico com o geométrico, na qual a linguagem de comunicação é algébrica, assim como o estudo da fatoração seguido do estudo de equações polinomiais de 2º grau e das propriedades estruturais para justificar o transformismo e as conversões.

Guadagnini (2013) relata que apesar de os alunos utilizarem os registros algébricos e geométricos, que os auxiliaram na resolução de equações de 2º grau por meio de fatoração, mostraram dificuldades com as equações polinomiais de 2º grau completas e os registros de representação geométrica. Contudo, os registros algébricos e geométricos oportunizaram aos alunos a validarem suas respostas, assim como encontrar os erros.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Nos dados quadro 5, apresentamos nosso entendimento a respeito do Pensamento Algébrico, concepções de Álgebra, concepções de Educação Algébrica apresentados nas pesquisas desta categoria.

Quadro 5 – Categoria Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
GUADAGNINI (2013)	Concepção – Estudo de procedimentos e Linguístico -pragmática Pensamento algébrico – Álgebra como atividade
SOUZA, E. R. (2013)	Concepção - Aritmética generalizada, Linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural, Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como pensamento e Álgebra com atividade
QUEIROZ (2014)	Estudo de grandezas, Fundamentalista-estrutural e Fundamentalista analógica Álgebra como ferramenta

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A pesquisa de Guadagnini (2013) também apresenta um trabalho com equações polinomiais de 2º grau, com a proposta de mobilizar diversos registros de representação semiótica.

Por meio da fatoração, na apreensão da resolução de equações do 2º grau completas. Ao utilizar a fatoração para resolver equações do 2º grau, acreditamos que damos sentido à fatoração, usando-a como ferramenta e, ao mesmo tempo, retomando e reinvestindo esse conhecimento na solução das equações. (GUADAGNINI, 2013, p. 17)

Estes conteúdos revelam a presença de algumas concepções, entre elas temos: Estudo de procedimento, se pensarmos somente nos fatores manipular símbolos algébricos, simplificar expressões e resolver certos tipos de problemas. Para esta pesquisa também temos que considerar a concepção Linguístico-pragmática, no que se refere ao uso de regras e propriedades. O estudo de equações polinomiais de 2º grau possibilita o desenvolvimento do pensamento Álgebra como atividade, e favorece o aprendizado dos alunos mediante a reflexão de procedimentos para encontrar a solução.

Souza (2013) apresentou a alunos do 2º ano do Ensino Médio, tarefas a respeito da área do paralelogramo, em que buscou compreender os aspectos do cálculo relacional (estratégias utilizadas), cálculo numérico (existência de operações aritméticas) e Álgebra das grandezas (existência de tratamento algébrico).

Para esta pesquisa, em especial, encontramos diversas concepções, entre elas destacam-se Aritmética generalizada, Linguístico-pragmática, fundamentalista-estrutural, Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos,

visto que o conteúdo escolhido pelo pesquisador foca diferentes aspectos da Matemática. Em relação ao pensamento algébrico, acreditamos que a proposta de conteúdo deste pesquisador, insere-se em Álgebra como pensamento e Álgebra com atividade.

Queiroz (2014) aplicou, com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, atividades a respeito de função, buscando articular a Álgebra com a Geometria analítica. Este conteúdo exige de o aluno compreender a relação entre variáveis em uma representação gráfica. Percebemos que, esta atividade tal como proposta pelo pesquisador relaciona-se com a concepção Estudo de grandezas, Fundamentalista-estrutural e Fundamentalista analógica, pois, além de ter que compreender o conceito de variável, necessita utilizar recursos analógicos, compreensão de gráficos, entre outros. Dentro deste conceito, o pensamento algébrico relaciona-se com Álgebra como ferramenta.

Observamos que a concepção e o pensamento algébrico dependem das escolhas dos conteúdos e os objetivos proposto para ele, como nas pesquisas desta categoria. Neste grupo de pesquisa, constatamos que não existe uma concepção ou pensamento em comum entre elas.

Algumas considerações

A leitura destes trabalhos revelou aspectos importantes no que se refere ao processo de desenvolvimento do entendimento dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio a respeito de resoluções de atividades envolvendo a relação entre Álgebra, Aritmética e/ou Geometria. Com estas pesquisas é possível entendermos que o fato de aplicar atividades com resoluções meramente mecânicas relacionando a esses temas, não permitiu que o aluno tivesse um efetivo aprendizado de Álgebra, pois é necessário reflexão e a compreensão de como resolver e solucionar tais questões.

Atrelado à sequência didática, observamos que os registros de representação semiótica foram partes importantes das investigações, pois evidenciaram as dificuldades dos alunos com conteúdos algébricos, conforme relata Queiroz (2014, p. 34).

Os diferentes registros utilizados para representar esse conceito são trabalhados separadamente, sem que se incentive a coordenação entre os mesmos. Com base nos estudos de Duval acreditamos que a falta de articulação entre os registros de representação e a predominância em um único sentido de conversão compromete a capacidade dos alunos em utilizar seus conhecimentos e suas possibilidades de construir novos conhecimentos.

Em nossa interpretação das atividades, entendemos que, embora os estudantes apresentem alguns resultados satisfatório, conforme explicam os pesquisadores, a resolução de forma mecânica reflete a maneira como os alunos aprendem, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998).

Percebemos que, apenas nas pesquisas de Guadagnini (2013) e Queiroz (2014), foram realizadas abordagens aos PCN. Mas, em relação ao currículo desenvolvido em sala, não houve discussão ou pelo menos, referência a respeito de sua importância para o ensino e aprendizagem de Álgebra.

Outro aspecto que observamos foi a presença de característica de Álgebra apresentadas nos estudos preliminares, constituídas pelas concepções de Álgebra, concepções de Educação Algébrica e pelos pensamentos algébricos.

A seguir trataremos das pesquisas que compõem a categoria Múltiplas representações.

4.2.3 Múltiplas representações

Nesta categoria, estão reunidas seis dissertações que apresentam os registros algébricos produzidos pelos alunos, assim como os que se apresentam nos livros didáticos. Estes estudos estão subdivididos em duas subcategorias: Registros produzidos pelos alunos, composta pela pesquisa de Salgueiro (2011). Na categoria Registros em livros didáticos encontram-se as pesquisas de Reis (2010), Almeida (2011), Souza (2014), Carmo (2014) e Masetti (2016) que realizaram investigações com livros didáticos.

Duval (2012, p. 270) sublinha que “é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro”.

Nos dados do quadro 6, são apresentados o título da pesquisa, o autor e nível acadêmico.

Quadro 6 – Categoria: Múltiplas representações

Título	Autor	Nível
Como estudantes do ensino médio lidam com Registros de representação semiótica de Funções	SALGUEIRO (2011)	Mestrado
O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras	REIS, E. S. (2010)	Mestrado
Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais de 1º grau com uma incógnita: Um estudo exploratório nos livros didáticos de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental	ALMEIDA (2011)	Mestrado
Contextualização no ensino de Álgebra: Análise de livros didáticos do 7º ano	SOUZA, N. F. (2014)	Mestrado
Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental	CARMO, P. F. (2014)	Mestrado
Análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial	MASETTI, C. (2016)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivos das pesquisas

A subcategoria Registros produzidos pelos alunos é composta por apenas pela dissertação de Salgueiro (2011) que teve como objetivo de pesquisa investigar como alunos de 1º e 2º ano do Ensino Médio mobilizam conhecimentos a respeito de conceito de função que foram apresentados por meio diferentes registros de representação semiótica.

A subcategoria Registros em livros didáticos é constituída por seis dissertações, Reis, (2010), Almeida (2011), Souza (2014), Carmo (2014) e Masetti (2016). Embora todos os pesquisadores tenham realizado suas investigações com livros didáticos seus objetivos de estudos foram diferentes.

A pesquisa de Reis (2010) estabeleceu como objetivo realizar uma análise de livros didáticos atuais e de livros didáticos utilizados na primeira república do Brasil (1890-1930), com o intuito de comparar como era e como é proposto o ensino de sistemas de equações de primeiro grau nesses volumes.

Almeida (2011) apresentou como objetivo de pesquisa analisar os livros didáticos do 7º ano para observar que tipos de problemas são propostos para o ensino de equação polinomial de 1º grau.

Souza (2014) investigou em qual contexto apresenta-se a introdução de Álgebra nos livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental. O ponto central desse estudo está na a descrição e análise das tarefas e técnicas assinaladas em cada coleção investigada.

Carmo (2014) teve como objetivo investigar se livros didáticos de Matemática dos 6º e 7º anos utilizam atividades de generalização de padrões para introdução da linguagem algébrica. Para a realização de seu estudo o autor analisou os livros escolhidos no Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD.

Masetti (2016) analisou os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio oferecidos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD a fim de investigar como apresentam propostas de atividades e resolução de problemas a respeito do ensino de funções exponenciais.

Das publicações propostas na categoria Múltiplas Representações temos os estudos de Salgueiro (2011) e Masetti (2016) que apresentam em comum a investigação do ensino de função em livros didáticos do Ensino Médio. Nos demais, temos Souza (2014) e Carmo (2014) que analisam livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Reis (2010) foi o único pesquisador desta categoria que fez comparação entre livros didáticos.

O objetivo central deste grupo de pesquisa foi a análise de registros, seja de alunos ou de conteúdos algébricos em livros didáticos.

Abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos

Na subcategoria Registros produzidos pelos alunos apresenta-se a pesquisa de Salgueiro (2011) que realizou uma investigação de cunho qualitativo utilizando pressupostos da Engenharia Didática proposta por Artigue.

Para o referencial teórico, o autor considerou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e as abordagens de pensamento algébrico de Lins e Gimenez, Kieran e Usiskin, além de estudos a respeito de erros de Cury.

Na subcategoria Registros em livros didáticos temos as pesquisas de Reis (2010) e Carmo (2014) que adotaram as ideias de análise de conteúdo proposta

por Bardin. Para a os procedimentos metodológicos de pesquisa, seguindo as etapas de pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Almeida (2011) não deixou explícita qual metodologia seguiu para desenvolver sua investigação, mas declarou a adoção de duas etapas para desenvolver seu estudo: classificar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais de 1º grau; classificar os problemas de partilha. Observamos que a pesquisa apresenta diversos dados quantitativos.

Souza (2014) embora não tenha definido explicitamente a metodologia utilizada em sua pesquisa, apresenta os caminhos percorridos para o desenvolvimento de sua investigação, entre eles, encontram-se a escolha dos livros didáticos, as categorias de análise e os procedimentos de análise.

Para Masetti (2016), sua pesquisa atende uma metodologia de natureza qualitativa, o que possibilitou trilhar caminhos para análise dos livros e contribuir com suas conclusões.

Nos principais referenciais teóricos adotados pelas pesquisas de Reis (2010) e Souza (2014) temos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard que discorre a respeito de organizações praxeológicas.

Almeida (2011) estuda as ideias de Marchand e Bednarz a respeito da definição de um problema de estrutura algébrica e na pesquisa de Carmo (2014) destacam-se autores que tratam do pensamento algébrico, linguagem algébrica, uso de variáveis e generalização de padrões: Fiorentini, Miorin e Miguel; Fiorentini, Fernandes e Cristóvão; Ursini *et al.*

Masetti (2016) tem o referencial teórico de sua pesquisa baseado nas ideias de Sacristán que disserta a respeito de seis níveis de currículo: currículo prescrito; currículo apresentado pelo professor; currículo moldado; currículo em ação; currículo realizado; currículo avaliado.

Estas pesquisas centram-se em uma metodologia de abordagem qualitativa e trazem referenciais teóricos diversificados, mas que atendem aos objetivos de suas investigações.

Alguns resultados e contribuições apresentados nas Pesquisas

Na subcategoria Registros produzidos pelos alunos, a pesquisa de Salgueiro (2011) destaca que metodologia escolhida auxiliou na análise das atividades encontrando indícios do pensamento algébrico. O referencial teórico escolhido propiciou tanto o educador quanto ao pesquisador no desenvolvimento de atividades a respeito de função, inseridas no campo algébrico e geométrico e, assim, atender aos estudantes dos 1º e 2º ano do Ensino Médio com suas diferenças na aprendizagem.

As atividades propostas por Salgueiro (2011) propunham situações-problema, partindo da generalização aritmética e conversão dos diferentes registros de representação semiótica, entre eles, do objeto matemático função, relação entre conjuntos para registro gráfico, relação entre o registro gráfico e registro tabular, relação entre domínio e contradomínio aos eixos do plano bidimensional.

Nestas atividades, prevaleceram nas sequências didáticas o estudo de funções, a utilização de propriedades estruturais para o transformismo algébrico, recursos analógicos geométricos, desenvolvimento da linguagem algébrica, realizar as atividades pelo caminho inverso.

No que diz respeito às conversões de registros propostas por Duval, como a transformação de uma representação em um registro para outra representação em outro registro, são essenciais à atividade cognitiva do pensamento.

O autor declara que a escolha pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, auxiliou na investigação do conhecimento construído pelo aluno em razão dos diferentes registros elaborados por eles.

Além disso, os resultados coletados no teste inicial facilitaram ao autor a percepção da necessidade de uma mudança nas análises dos livros do PNL D, visto que, a maior parte desses livros não traz conexões entre os diferentes registros de representação semiótica, uma vez que esses registros não ocorrem com os métodos tradicionais de ensino.

Salgueiro (2011) concluiu que trabalhar as funções relacionadas a generalização de situações em lugar de generalizações a partir de registros

algébricos pode propiciar maior entendimento dos significados algébricos aos alunos. Desta forma, declara que é possível criar situações e condições para o ensino e aprendizagem de funções, de modo que auxilie o aluno a compreender conversões entre diferentes registros.

Dentre as investigações inseridas na subcategoria Registros em livros didáticos, iniciamos pelos resultados obtido por Reis (2010) que tomou como objetivo de pesquisa analisar o ensino de sistemas de equações de primeiro grau em livros didáticos do Ensino Fundamental atuais e do período da Primeira da república, a partir da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard.

O autor adotou para análise o Tratado de Álgebra Elementar de José Adelino Serrasqueiro de 1929 e o livro Matemática para todos de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis de 2006, realizando um estudo em que mostrou as organizações praxeológicas existente no livro: tarefas e técnicas; tecnologia e teorias.

A análise do livro de Serrasqueiro de 1929 traz, conforme Reis (2010) uma valorização da língua materna e da língua algébrica, que se alternam no decorrer das explicações das tarefas, tendo os elementos tecnológicos que justificando as técnicas. Reis (2010) destaca que o autor desse livro assume a responsabilidade de institucionalização das técnicas de resolução das atividades não deixando somente a cargo do professor.

Encontramos trechos que justificam nosso entendimento a respeito da característica estrutural, quando Reis (2010) apresenta a sequência de técnicas para resolver o sistema, “Primeiro passo, escrever uma expressão qualquer com as incógnitas x e y . Segundo passo, escrever uma segunda expressão com as incógnitas x e y diferente da equação anterior [...]” (REIS, 2010, p. 110) e também discorre a respeito da linguagem utilizada no livro, “[...] o autor lança mão de diversas formas de linguagem, dentre elas temos a linguagem materna, a algébrica e o diálogo entre personagem” (REIS, 2010, p. 116).

No relato de Reis (2010) observamos a descrição das técnicas utilizadas no livro entre 1890 e 1930.

Agora passamos a descrever os passos da técnica proposta pelo autor, assim como seus elementos tecnológicos. Conforme nosso entendimento, essa técnica é composta por três passos, que são os seguintes: Primeiro passo consiste em escrever o problema proposto na forma de um sistema de equações. O segundo passo é resolver o sistema proveniente do passo anterior, e por fim, o terceiro passo analisar a solução obtida. (REIS, 2010, p. 90)

A análise do livro de Imenes e Lellis de 2006 indica que foram utilizadas diversas formas de linguagem para introduzir sistema de equações de 1º grau, entre elas encontra-se a linguagem materna, a algébrica e o diálogo entre personagens. Apesar de o livro apresentar várias tarefas, há predominância pelo trabalho com a técnica e sua institucionalização pelos autores do livro, conforme relata o pesquisador.

Ao inferirmos nossa análise do livro didático do autor Imenes, observamos que o mesmo possui um total de três tarefas desse tipo, porém, não encontramos uma técnica no corpo do exemplar para resolver essas tarefas. Entretanto, o autor faz nota sobre esse tipo de tarefa na assessoria pedagógica do livro, explica a técnica de resolução para o professor, isso nos leva a acreditar que a intenção do autor é primeiramente proporcionar um momento para o aluno explorar e construir uma técnica de resolução, em segundo lugar, deixar a cargo do professor o desenvolvimento dessas técnicas com os alunos. (REIS, 2010, p. 112).

Reis (2010) finaliza declarando que mesmo que se faça a comparação entre os livros de Serrasqueiro de 1929 e Imenes e Lellis de 2006, entende que ambos livros tem o mesmo valor para a educação, cada um em sua época.

Almeida (2011) analisou os capítulos de livros de 7º ano do Ensino Fundamental de dez coleções aprovadas no PNLD/2011 a respeito dos problemas propostos para o ensino de equação de 1º grau. Conseguiu identificar 316 problemas, mas nem todos têm relação com o ensino de equações de 1º grau, como Almeida (2011, p. 105) salienta.

Encontramos problemas de estrutura aritmética em 90% dos livros analisados (uma média de 10,5% dos problemas por LD). Em um problema desse tipo, o uso de estratégias algébricas não é justificado, uma vez que podemos resolver problemas dessa natureza pela simples utilização de operações aritméticas, ou seja, os procedimentos aritméticos não são cansativos, enfadonhos nem muito menos insuficientes para resolver um problema desse tipo. (ALMEIDA, 2011, p. 105).

Para suas análises, o pesquisador utilizou três categorias: problemas de estrutura aritmética; falsos problemas; problemas de estrutura algébrica. Observou os problemas que dificultam a passagem da Aritmética para a Álgebra, chamados de falsos problemas. Os demais dizem respeito à sistemas de equações, problemas de partilha, que na maioria dos casos têm relação com a natureza aditiva.

Por meio destas categorias, o autor concluiu que das dez coleções analisadas 90% apresentam características de aritmética generalizada para o ensino de equações polinomiais de 1º grau.

Encontramos problemas de estrutura aritmética em 90% dos livros analisados (uma média de 10,5% dos problemas por LD). Em um problema desse tipo, o uso de estratégias algébricas não é justificado, uma vez que podemos resolver problemas dessa natureza pela simples utilização de operações aritméticas, ou seja, os procedimentos aritméticos não são cansativos, enfadonhos nem muito menos insuficientes para resolver um problema desse tipo. (ALMEIDA, 2011, p. 105)

Almeida (2011) finalizou declarando que o objetivo de sua investigação foi classificar os problemas de equação polinomial de 1º grau e não analisar como esses problemas são abordados nesses livros.

Souza (2014) buscou investigar a contextualização apresentada no livro didático de 7º ano a respeito do ensino de Álgebra. Para a sua análise incluiu dois livros: Matemática e realidade de Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci; Conquista da Matemática de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. Não identificamos o ano de publicação destes livros.

O autor afirma que utilizar a Teoria Antropológica do didático de Chevallard auxiliou na análise dos livros. Embora os resultados apontem para a presença de contextualização nas atividades algébricas, o autor observou que situações envolvendo contextualização histórica dependiam somente das explicações do professor, pois os livros não apresentavam sugestões ou explicações a respeito do assunto.

As contextualizações internas à Matemática foram favorecidas por situações de aprendizagem abordadas nos livros. Souza (2014, p. 96) discorre que,

[...] os livros abordam situações que podem favorecer o ensino, principalmente no que se refere às contextualizações internas à Matemática, criam condições para um trabalho discursivo,

investigativo, mas a efetivação dessa intenção depende, fortemente, do direcionamento do professor, uma vez que não há indicações no livro didático e nem no manual do professor.

Quanto à contextualização com outras ciências, o autor declara que os livros apresentam situações que podem modeladas ou reescritas em linguagem algébrica, mas percebeu que muitas vezes essas atividades serviram apenas de pretexto para a introdução do trabalho, pois não existiam aprofundamento das questões.

De modo geral, Souza (2014) considera, nos livros analisados, a existência de atividades que favorecem o ensino e a aprendizagem de Matemática, mas considera que a contextualização, na maior parte das vezes, tem se mostrado limitada e de forma artificial nas atividades apresentadas nesses livros, servindo apenas de pretexto para abordar conceitos matemáticos.

Carmo (2014) analisou quatro livros didáticos de Matemática dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental aprovados no PNLD/2011, com o objetivo de investigar se apresentam atividades de generalização de padrões para introdução da linguagem algébrica. O autor constatou que os didáticos introduzem a linguagem algébrica por meio da generalização de padrões de forma bem resumida, não seguindo as orientações dos documentos oficiais e pesquisas a respeito do tema. Na coleções analisadas, o pesquisador também observou que a linguagem algébrica é pouco explorada ou explorada de forma estagnada.

Os resultados encontrados por Carmo (2014) a respeito do trabalho com generalização de padrões para introdução de Álgebra, favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois como o próprio pesquisador ressaltou “a maioria das atividades analisadas continha oito dos 13 indicadores do desenvolvimento do pensamento algébrico” (CARMO, 2014, p. 102), dos quais oito de destacam:

- Perceba e tente expressar relações entre representações numéricas pertinentes a uma situação-problema em um modelo aritmético/algébrico ou geométrico;
- Desenvolva algum tipo de processo de generalização;
- Perceba e tente expressar regularidades ou invariâncias;
- Perceba a relação de dependência das variáveis;
- Perceba o uso da variável como incógnita;

- Perceba o uso da variável como número geral;
- Desenvolva ou crie uma linguagem mais concisa ao expressar uma sentença ou expressão matemática.

O autor sublinha que se os livros didáticos, como principal fonte de pesquisa, oferecessem mais atividades a respeito de generalização de padrões, tantos alunos como professores poderiam se valer dessa ideia para desenvolver a linguagem algébrica.

Masetti (2016) analisou três livros didáticos de Matemática do Ensino Médio com o objetivo de investigar como esses livros apresentavam propostas de atividades e resolução de problemas a respeito do ensino de funções exponenciais.

Para a análise dos exercícios emergentes, a autora listou sete categorias de tarefas, que auxiliaram na comparação dos livros: representar graficamente funções; explorar; manipular; conjecturar, argumentar; provar; modelar; resolução de problemas. De todas, explorar aparece em tarefas de apenas um livro, a categoria provar não é oferecida em nenhuma tarefa dos três livros analisados e a categoria manipular aparece em maior quantidade em todos os livros.

Referindo-se à atividade a respeito de função exponencial proposta nos livros, Masetti (2016) afirma que todos apresentam exemplos de construção de gráficos que representam funções crescentes ou decrescentes com justificativas de propriedades.

Os principais resultados apontados na pesquisa de Masetti (2016) indicam que embora o ensino da função exponencial seja apresentado de forma contextualizada com a própria Matemática e a representação desse tema seja oferecida por meio da linguagem natural, algébrica gráfica e tabular, apresentando o desenvolvimento das atividades passo a passo, grande parte das situações-problema apresentam-se prontas cabendo ao aluno apenas substituir as incógnitas na fórmula e apresentar a resolução do problema.

As pesquisas de Souza (2014) e Masetti (2016) trazem em comum a observação da presença de contextualização nas atividades algébricas nos livros didáticos, mas discordam no sentido de que como essa contextualização é apresentada e qual seu papel no ensino e aprendizagem de Álgebra. As demais

pesquisas não apresentam resultados em comum em razão dos objetivos propostos para cada investigação.

Em relação ao livro didático, concordamos com as ideias de Romanatto (2004) ao ponderar que o livro, por muitas vezes, é utilizado como substituto do professor. Esse protagonismo do livro didático advém das promessas de conteúdos prontos e detalhados.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Apresentamos no Quadro 7, nosso entendimento a respeito das concepções e do pensamento algébrico apresentados nas pesquisas desta categoria. Optamos por não agrupar as pesquisas, mesmo quando apresentam estudos em comum, pois cada pesquisador apresentou sua própria compreensão a respeito dos livros analisados.

Quadro 7 – Categoria Múltiplas representações: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
REIS (2010)	Concepção - Linguístico-pragmática, Fundamentalista-estrutural e Estudo de procedimentos Pensamento algébrico - Álgebra como pensamento
ALMEIDA (2011)	Concepção - Linguístico-pragmática Pensamento algébrico – Aritmetismo
SALGUEIRO (2011)	Concepção – Relação entre grandezas Pensamento – Álgebra como ferramenta
CARMO, P. F. (2014)	Concepção - Aritmética generalizada Pensamento algébrico – Álgebra como linguagem
SOUZA, N. F. (2014)	Concepção - Linguístico-pragmática e Estudo de procedimentos. Pensamento algébrico – Álgebra como linguagem e Álgebra como pensamento
MASETTI (2016)	Concepção - Relações entre grandezas. Pensamento algébrico – Álgebra como cultura

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Entendemos que nossos apontamentos a respeito da concepção e pensamento algébrico, foram feitos de uma forma geral, levando em conta o relato de cada pesquisador. Para considerar as concepções e pensamento envolvido em cada livro, precisaríamos realizar outra pesquisa.

Reis (2010) analisou o desenvolvimento de sistema de equações polinomiais de 1º grau em dois livros didáticos produzidos em diferentes épocas.

De acordo com o autor, o primeiro livro adotado pelo Colégio Pedro II no período de 1890 a 1930 introduz o sistema de equações polinomiais de 1º grau por meio de situações em que as passagens algébricas são valorizadas. Associado a este aspecto, estão o estudo de equações, sistemas equivalente, primeira e segunda propriedade das raízes de um sistema de equações. A apresentação deste conteúdo conta com tarefas aritméticas e algébricas, que de acordo com Reis (2010), proporciona a capacidade de abstração e generalização.

A diferença entre primeiro e o segundo livro, que é contemporâneo, refere-se ao modo como apresenta-se o sistema de equações, em que o uso de figuras, diálogo entre personagens e linguagem materna é evidente. No demais, o autor considera que ambos os livros atendem as expectativas para o ensino e aprendizagem de Álgebra, de acordo com a época de sua publicação.

Entendemos que a concepção que se manifesta entre estes livros é diferenciada, já que o primeiro privilegia regras e técnicas de resolução, indicando a concepção de Educação Algébrica Linguístico-pragmática e Fundamentalista-estrutural, pois a preocupação era com aspectos lógicos do conteúdo. O segundo livro apresenta concepção de Álgebra Estudo de procedimentos, visto que, a necessidade é manipular símbolos, simplificar expressões e resolver equações.

A apresentação deste tema nos dois livros pode propiciar o desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como atividade, visto que, apresenta os seguintes elementos: “pensamento formal; pensando com símbolos; pensamento mecânico; pensando em referência aos artefatos da álgebra” (LEE, 2001, p. 394).

Almeida (2011) analisa como é apresentada a equação polinomial de 1º grau em sete livros didáticos de 7º ano do Ensino Fundamental. Para o autor, apesar de apresentarem diferentes abordagens, para o ensino e aprendizagem do tema, percebesse-se que grande parte destes materiais trazem problemas com estrutura aritmética, não justificando o uso de estratégias algébricas. O autor ainda alega que parte dos problemas, chamados de falsos problemas, podem não favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico e a passagem da aritmética à álgebra.

Esse tipo de problema pode não favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico nem a passagem da aritmética à álgebra por não levarem os estudantes, no momento de converterem um falso problema em linguagem natural para a linguagem algébrica, a estabelecerem relações entre as informações do enunciado, uma vez que o caráter de congruência é praticamente total. (ALMEIDA, 2011, p. 106)

O autor afirma que um terço dos livros aprovados pelo PNLD/2011 apresentam problemas de equações polinomiais de 1º grau que não propiciam o pensamento algébrico.

Diante disto, procuramos considerar os resultados que indicam favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico. Encontramos no relato do autor, que metade dos livros analisados mostram problemas em atividades com equações polinomiais de 1º grau, em que a resolução pode ser feita por meio de procedimentos aritméticos. Sendo assim, entendemos que as atividades oferecidas por estes livros favorecem o desenvolvimento do pensamento proposto por Lins e Gimenez (1997), Aritmetismo e Internalismo que propicia a produção de “significados apenas em relação aos números e operações aritméticas” (ibid., 1997, p. 151). A concepção de Educação Algébrica refere-se à Linguístico-pragmática.

Carmo (2014) analisou a presença de generalização de padrões em livros didáticos dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, constatando que nem todos os materiais trazem atividades a respeito do tema. Das quatro coleções analisadas, três oferecem trabalho com generalização de padrões, o que possibilitou o autor elencar pontos importantes para relacionar o pensamento algébrico propiciado nestas atividades.

Nestas atividades encontravam-se padrões figurais, padrões numéricos e atividades diferenciadas, que deram indícios de favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentre os principais indicadores, temos: perceber e tentar expressar relações entre representações numéricas e modelos aritmético/algébrico ou geométrico; desenvolver algum tipo de processo de generalização; perceber e tentar expressar regularidades; desenvolva ou crie uma linguagem mais concisa ao expressar uma sentença; outros.

Partimos dos indicadores apresentados por Carmo (2014), e acreditamos que este tema propicia o desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como

linguagem (LEE, 2001), com relação à concepção de Álgebra Aritmética generalizada, de acordo com as ideias de Usiskin (1995).

Souza (2014) declara que ao final de suas análises, constatou que os livros didáticos escolhidos para sua pesquisa mostraram atividades que favorecem a contextualização interna e externa à Matemática, relacionando-a a outros campos. A autora destaca a existência de situações que necessitam ser modeladas, mas que evidenciam, em alguns momentos, a necessidade de técnicas de resolução, ou reescrita na linguagem algébrica.

As atividades analisadas por esta pesquisadora vão desde equações polinomiais de 1º grau, relação entre Álgebra e Geometria, Inequações de 1º grau, situações-problema em que a resolução por meio de sistemas de equação de 1º grau se faz necessária, entre outros.

Acreditamos que os livros analisados por Souza (2014) apresentam atividades que favorecem o desenvolvimento do pensamento a respeito de símbolos algébricos, experimentar e operar com o desconhecido e pensar a respeito da conexão de Álgebra com outros elementos de Matemática. Diante disto, entendemos que Álgebra como pensamento e Álgebra como atividade de Lee (2001) é o pensamento algébrico que melhor condiz com a situação. A concepção evidenciada, conforme análise da autora, é a concepção de Educação Algébrica Linguístico-pragmática e a concepção de Álgebra Estudo de procedimentos.

Masetti (2016) investigou como apresentam-se os registros a respeito de função exponencial nos livros didáticos do Ensino Médio. A autora constatou que as coleções analisadas, em sua maioria, introduzem o ensino de função exponencial por meio de diferentes linguagens, como linguagem algébrica, gráfica, numérica e tabular, dando oportunidade ao aluno de explorar, refletir e discutir a respeito do tema.

De acordo com a autora, estes livros também apresentam situações-problema que fazem relação do tema com a vida real e outras áreas do conhecimento. Diante do exposto, percebemos que as atividades propostas nestes livros favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico proposto por Lee (2001), Álgebra como cultura, pois este tipo de pensamento possibilita relacionar a Álgebra com outros campos da Matemática e outras áreas do conhecimento,

associar a manipulação de símbolos com a simplificação de expressões, entre outros. A concepção percebida é a concepção de Álgebra Relações entre grandezas.

Deixamos a pesquisa de Salgueiro (2011) para o final por ser a única pesquisa desta categoria que investiga os registros de representação semiótica de alunos do 2º ano do Ensino Médio, referentes ao conceito de função.

Pelo relato deste pesquisador, acreditamos que a concepção que se apresenta neste estudo vai ao encontro da concepção de Álgebra Relação entre grandezas (USISKIN, 1995). Este tipo de conteúdo propicia o desenvolvimento do pensamento Álgebra como ferramenta.

Podemos perceber que metade das pesquisas apresentam a concepção de Educação Algébrica Linguístico-pragmática, e no que diz respeito ao modo de pensar a Álgebra, houve uma diversificação de pensamentos. Ponderamos que foram análises de diferentes conteúdos, tanto dos anos finais do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, por isso, o relato e resultados apresentados pelos pesquisadores foram essenciais.

Algumas considerações

Quanto às escolhas dos conteúdos investigados, observamos que há diversidade dos temas e do nível de ensino, o que favoreceu sua contribuição à área de Educação Matemática. O foco central desse conjunto de pesquisas foi investigar os registros algébricos produzidos por alunos em relação ao conceito de função polinomiais de 1º grau, e investigar como os livros didáticos apresentam registros de conteúdos algébricos.

A pesquisa de Reis (2010) diferenciou-se das outras investigações que realizaram análise de livros didáticos, por ter feito a comparação de um livro contemporâneo com um livro antigo, o que acreditamos ser de grande relevância para compreender o ensino e a aprendizagem de conteúdos algébricos. Neste caso, o autor poderia ter verificado se o estudo de sistema de equações apresentado no livro antigo, seria favorável ao ensino e aprendizagem nos dias atuais.

As investigações desta categoria exploraram as orientações dos PCN relacionando-as com seus estudos, mas não analisaram o currículo de álgebra presente nos livros didáticos, com exceções das dissertações de Carmo (2014) e Masetti (2016).

Nossos referenciais teóricos trouxeram a importante relação do professor com os materiais curriculares, que em nossa pesquisa se traduz no uso do livro didático segundo perspectiva curricular. Isto é, como os autores dos livros didáticos por nós analisados propõe o estudo de função exponencial na perspectiva do currículo. (MASETTI, 2016, p. 151)

Os resultados destes estudos trouxeram importantes informações que podem auxiliar os professores nas escolhas do livro didático e, também, repensar quais atividades são propícias para desenvolver o trabalho com Álgebra.

A determinação da concepção de Álgebra e Educação Algébrica, assim como do pensamento existentes nas pesquisas, dependeu da compreensão

Mas, declaramos encontrar dificuldade em determinar o pensamento algébrico apresentado nas pesquisas sobre análise de livros didáticos, pois além dos diferentes conteúdos e registros, também, tivemos que considerar os diferenciados entendimentos dos pesquisadores a respeito de cada tema apresentados nos livros.

A seguir apresentamos a categoria Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos.

4.2.4 Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos

Nesta categoria estão reunidas oito pesquisas divididas em duas subcategorias, Computador/Software composta por quatro dissertações, Trevisani (2012), Moraes (2013), Derossi (2015), Rezende (2016) e Jogos/Materiais manipulativos constituída por quatro dissertações, Cardoso (2010), Vieira (2011), Campos (2015) e Nunes (2016). Estas pesquisas abordaram o uso de ferramentas tecnológicas, jogos e materiais manipulativos como elementos auxiliares nos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra.

Os dados do Quadro 8 apresentam as pesquisas categorizadas em Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos, descritas conforme o título da pesquisa, autor, ano de produção e nível acadêmico.

Quadro 8 – Categoria: Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos

Título	Autor	Nível
Estratégias de generalização de padrões matemáticos	TREVISANI (2012)	Mestrado
Um estudo sobre erros na resolução de equações de 1º grau com o <i>software</i> Aplusix	MORAES (2013)	Mestrado
Objetos de aprendizagem e lousa digital no trabalho com Álgebra: as estratégias dos alunos na utilização desses recursos	DEROSSI (2015)	Mestrado
Ensino desenvolvimental e investigação com o GeoGebra: Uma intervenção pedagógica sobre o Teorema de Tales	REZENDE (2016)	Mestrado
Linguagem Algébrica: Uma proposta de ensino com o uso de jogos digitais	CARDOSO (2010)	Mestrado
Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino e aprendizagem da Álgebra	VIEIRA (2011)	Mestrado
Construindo significados para o x do problema	CAMPOS (2015)	Mestrado
Resolução de equações lineares e quadráticas com o auxílio de material concreto	NUNES (2016)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivos das pesquisas

Na subcategoria Computador/Software temos a pesquisa de Trevisani (2012) que investigou as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para generalizar padrões com auxílio do *software* MiGen⁷.

A dissertação de Moraes (2013) visou investigar os erros cometidos por alunos de 1º ano do Ensino Médio no desenvolvimento e resolução de equação de 1º grau e como eles poderiam ser superados com o auxílio do *software* Aplusix⁸.

A lousa digital foi alvo de investigação de Derossi (2015) que pesquisou as estratégias utilizadas por alunos de 9º ano no desenvolvimento e resolução de problemas de Álgebra, com auxílio de objetos de aprendizagem – OA. Em

⁷ Elaborado e desenvolvido pelo *London Knowledge Lab* (associação do *Institute of Education*¹³ – *University of London* com a *Birkbeck University of London*¹⁴), o MiGen¹⁵ é um ambiente computacional disponibilizado gratuitamente via internet que visa contribuir para a aprendizagem de generalização matemática. Informações retiradas de Trevisani (2012, p. 45)

⁸ Aplusix é um software inovador, desenvolvido no Laboratório de Informática de Grenoble, para ajudar alunos a aprender aritmética e álgebra. Disponível em: <http://www.aplusix.com/pt/>.

particular, a autora analisou a aplicação das atividades desenvolvidas na lousa digital e as estratégias dos alunos para a resolução de equações de 1º grau com o uso de lápis e papel e de objeto de aprendizagem.

Outro *software* explorado, o GeoGebra⁹, foi abordado na pesquisa de Rezende (2016) que o utilizou como recurso tecnológico com uma turma do 2º ano do Ensino Médio para ampliar a capacidade de conjecturar, interpretar e resolver o Teorema de Tales. Também investigou as mudanças na aprendizagem dos alunos por meio desse *software* e como este se agrega às aulas e auxilia para integrar as visões algébricas e geométricas do Teorema de Tales.

Na subcategoria Jogos/Materiais manipuláveis encontram-se quatro pesquisas, nas quais duas delas discorrem a respeito de atividades lúdicas como auxílio ao ensino e aprendizagem de Álgebra.

Cardoso (2010) realizou sua pesquisa com alunos da 7ª série, atual 8º ano do Ensino Fundamental, para investigar a contribuição de jogos digitais para o aprendizado de fatoração de expressões algébricas.

Vieira (2011) e Campos (2015) objetivaram investigar o ensino e a aprendizagem de Álgebra por meio de atividades lúdicas e como estas podem influenciar os alunos. O público-alvo de Vieira (2011) foram alunos do 2º ano do Ensino Médio e de Campos (2015) alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Nunes (2016) investigou as estratégias de utilização e manipulação de material concreto por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio para compreensão e resolução de equações. Também buscou averiguar se o material concreto favorecia a superação de dificuldades e defasagens em relação a Álgebra.

Na categoria Materiais/Recursos Didáticos encontramos as pesquisas de Moraes (2013), Derossi (2015) e Nunes (2016) que tiveram interesse em utilizar as

⁹ O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar.
Disponível em: https://www.geogebra.org/about?qgbLang=pt_BR. Acesso: 25 jan. de 2018.

equações para desenvolver suas investigações. Os demais pesquisadores divergem em suas escolhas a respeito do objeto algébrico.

No que diz respeito aos participantes das pesquisas, temos os trabalhos de Trevisani (2012), Derossi (2015), Cardoso (2010) e Campos (2015) que realizaram suas investigações com alunos do Ensino Fundamental. Já Moraes (2013), Rezende, Vieira (2011) e Nunes (2016) tiveram como público-alvo alunos do Ensino Médio.

Observamos em relação ao público-alvo que a maioria dos pesquisadores optou por investigar alunos do Ensino Médio. Já em relação ao conteúdo escolhido, investigar o ensino e aprendizagem de equações é contemplado na maior parte dos estudos.

Abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos

Nos aspectos metodológicos, os estudos inclusos na subcategoria Computador/Software, Trevisani (2012) declarou utilizar metodologia de pesquisa qualitativa, com a coleta de dados por meio de observação, desenvolvimento de atividades pelo do *software* MiGen e registros das interações entre os alunos.

Moraes (2013) não explicita qual a metodologia foi utilizada, mas entendemos que seu estudo segue a metodologia de pesquisa qualitativa, com análise de conteúdos de Bardin e análise de erros de Cury. A coleta de dados ocorreu por meio de atividades desenvolvidas pelos alunos por meio do *software* Aplusix, posteriormente, a autora seguiu coletando os erros dos estudantes que se apresentavam em registros escritos.

Derossi (2015) utilizou em sua investigação a metodologia de pesquisa qualitativa com objetivos amparados na pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo. A coleta de dados se deu por meio de análise da resolução de equação de 1º grau registrados pelos alunos com auxílio da lousa digital com objeto de aprendizagem.

Assim, como Derossi (2015), Rezende (2016) realizou uma investigação de abordagem qualitativa desenvolvida por meio de uma pesquisa de campo, que possibilitou coletar os dados por meio de atividades a respeito do Teorema de

Tales, desenvolvidas por alunos do 2º ano do Ensino Médio, com auxílio do *software* GeoGebra.

No que diz respeito aos principais referenciais teóricos, observamos que as pesquisas não trazem ideias em comum. Em seu referencial teórico Trevisani (2012) utilizou os pensamentos de Stacey a respeito das estratégias de generalização e contagem, tentativa e erro, diferença, termo unidade e explícita. Por sua vez, Moraes (2013) traz para seu referencial a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. A autora discorre que “a Teoria dos Campos Conceituais possibilita estudar o comportamento cognitivo dos alunos em situação de aprendizagem e permite ajudar a compreender as dificuldades de apreensão de um conceito” (MORAES, 2013, p. 23). Por seu lado, Derossi (2015) apresentou as visões de Tikhomirov a respeito de como as tecnologias influenciam o pensamento humano e se apoiou também nas ideias de Lévy (1993) e Borba e Vilarreal (2005). E no último estudo dessa subcategoria temos Rezende (2016) que apresentou uma discussão teórica fundamentada na Teoria Histórico-Cultural de Vigotski.

Quanto às pesquisas dispostas na subcategoria Jogos/Materiais manipuláveis, a investigação de Cardoso (2010) ampara-se em uma metodologia qualitativa e quantitativa, baseada nos conceitos de pesquisa-ação. A coleta de dados foi mediante registros realizados por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, a respeito da resolução de problemas envolvendo fatoração algébrica. A resolução de atividades, seja por estratégias tradicionais ou por jogos digitais, também forneceu dados relevantes para análise e coleta de resultados.

Vieira (2011) afirmou utilizar como metodologia de pesquisa o experimento didático de Cedro e Moura (2010), para auxiliar no estudo dos processos de ensino e de aprendizagem. A investigação realizada em sala de aula, com alunos do 2º ano do Ensino Médio, possibilitou coletar os dados a partir da confecção de duas atividades lúdicas, uma envolvendo o procedimento de Gauss para progressões aritméticas e a outra um jogo com fichas contendo expressões algébricas.

Campos (2015) declarou ser sua pesquisa de abordagem qualitativa, de caráter experimental. Para a coleta de informações, a autora realizou uma análise

comparativa entre os grupos experimental e de controle, a partir da realização do jogo lúdico CODERRÉ¹⁰.

A metodologia *Design Experiment* foi utilizada por Nunes (2016) para conduzir sua investigação, pois possibilita, na fase de desenvolvimento, realizações e adaptações à pesquisa. A aplicação de atividades lúdicas envolvendo equações, registros escritos e avaliação realizadas por alunos de 1º ano do Ensino Médio, auxiliaram na coleta de informações.

As principais discussões teóricas descritas nas pesquisas dessa subcategoria trazem em comum apenas as escolhas de Cardoso (2010) e Vieira (2011) que discutem a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Observamos ainda, em Vieira (2011), considerações a respeito das ideias de Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Kieran (2004; 2006), Kaput (1999) e Sousa (2004) sobre o ensino de Álgebra.

Nas demais pesquisas, temos Campos (2015) que apresenta a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e a visão de Piaget em relação ao lúdico. Nunes (2016) assume como referencial teórico de sua pesquisa a Teoria dos Três Mundos da Matemática de Tall, que procura compreender o desenvolvimento cognitivo do ser humano em relação ao pensamento matemático.

Observamos que a pesquisa qualitativa foi a escolha de metodologia das pesquisas dessa categoria. Os procedimentos metodológicos contam com algum tipo de recurso tecnológico ou lúdico. As escolhas do referencial teórico foram diferenciadas em grande parte das pesquisas, mas, em três delas, observamos convergência nas escolhas, destaque-se a didática francesa com as Teorias dos Campos Conceituais de Vergnaud e os Registros de Representação Semiótica de Duval.

¹⁰ CODERRÉ - **CO**dificação, **DE**codificação, **Re**codificação e **RE**decodificação. Atividade lúdica do tipo jogo, elaborada com conteúdos de Álgebra elementar, na forma de situações-problemas em linguagem natural e em linguagem algébrica (CAMPOS, 2015).

Alguns resultados e contribuições das Pesquisas a respeito das Múltiplas representações

Na subcategoria Computador/Software os resultados obtidos na pesquisa de Trevisani (2012) apontaram que o aspecto visual do *software* MiGen auxiliou os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental nas escolhas de estratégias, para desenvolver a generalização de padrões. O autor declara que as principais “estratégias utilizadas pelos alunos foram a contagem, o termo unidade com ajuste contextual e a explícita, sendo todas elas estratégias visuais” (TREVISANI, 2012, p. 102), que auxiliaram no desenvolvimento da generalização de padrões.

A falta de habilidade no manuseio no *software* ficou notória durante o processo de resolução das atividades, evidenciando a falta de hábito ou mesmo do contato com recursos tecnológicos. Também evidenciam-se as dificuldades dos alunos com a escrita do termo geral do padrão.

Ao investigar a resolução de equações polinomiais de 1º grau com o auxílio do *software* Aplusix, assim como os erros cometidos pelos alunos de 1º ano do Ensino Médio e a superação dos mesmos no estudo da equação de 1º grau, Moraes (2013) indicou que os resultados mostraram que a escolha da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud possibilitou a compreensão de como os alunos apreendem os conceitos matemáticos. Já, a análise dos erros, de acordo com ideias de Cury, permitiu uma visão detalhada da produção dos alunos. Com o *software* Aplusix foi possível a validação das respostas das equações de 1º grau, permitindo os alunos analisar e corrigir seus erros.

Nos resultados da pesquisa de Derossi (2015) ficam evidentes que as ideias de Tikhomirov (1981), Lévy (1993) e Borba e Vilarreal (2005), que contribuíram para a compreensão de diferentes formas do trabalho com a tecnologia e novas maneiras de pensar.

A autora declara que, em relação às estratégias utilizadas pelos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para resolução de equações de 1º grau, geraram resultados relevantes para concluir sua pesquisa. Entre eles, constatou que a resolução por meio da utilização de lápis e papel mostrou que dentre as estratégias mais utilizadas pelos alunos, encontra-se atribuir valores numéricos às variáveis e

às incógnitas. A autora acredita que as dificuldades decorrentes do entendimento da linguagem e resolução algébrica estão relacionadas ao currículo, pois este privilegia apenas a aritmética nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No que se refere ao trabalho com a lousa digital, a autora declara que esta possibilitou aos alunos o desenvolvimento de diferentes estratégias para resolução de problemas e conseqüentemente, auxiliou no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra.

Derossi (2015, p. 40) afirma que “acreditar que novas mídias, como as TIC, abram possibilidades de mudanças nas práticas pedagógicas e a busca por novas práticas se acentua nesse novo cenário educacional”. Considera que os objetivos de sua pesquisa foram atingidos, pois observou que as estratégias de resolução utilizada por meio do trabalho com objeto digital são diferentes quanto ao trabalho com lápis e papel.

Rezende (2016) declara que ao investigar o ensino e a aprendizagem do Teorema de Tales, com alunos do 2º ano do Ensino Médio, por meio das contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental, com apoio do GeoGebra, contribuiu para melhorar o entendimento dos alunos a respeito de Álgebra. O autor afirma que:

Quanto ao objetivo de identificar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental na aprendizagem do teorema de Tales, percebemos que foram várias: obteve-se a melhoria da visão conceitual dos alunos, tendo como núcleo os conceitos científicos de razão, proporção e paralelismo entre retas do fecho cortadas pelas transversais; houve a ampliação da Zona de desenvolvimento proximal do aluno, de forma a avançar e realizar muito do que antes ele não conseguia fazer e resolver sem a ajuda do professor, após o entendimento da relação nuclear, também a ampliação na capacidade de entendimento geométrico do teorema, fato que permitiu aumentar no aluno a sua capacidade de interpretar e resolver problemas. (REZENDE, 2016, p. 158-159)

O autor salienta que o trabalho com o *software* GeoGebra, além de ampliar a base conceitual do aluno e o entendimento da visão geométrica no plano, desenvolveu sua capacidade de conjecturar, interpretar e resolver as atividades envolvendo o Teorema de Tales, o que, conseqüentemente contribuiu para melhor entendimento dos conceitos de razão, proporção e paralelismo.

Rezende (2016) reitera que utilizar a Teoria do Ensino Desenvolvimental com apoio do *software* GeoGebra contribuiu no processo de aprendizagem de alunos do 2º ano do Ensino Médio em relação ao Teorema de Tales.

Na subcategoria Jogos/Materiais manipuláveis, a pesquisa de Cardoso (2010) apresentou uma comparação das atividades realizadas pela metodologia tradicional, com emprego de lápis e papel e pelos jogos digitais, mediante o Teorema em ação, proposto por Vergnaud. O desenvolvimento destas atividades mostrou que os alunos de 8º ano do Ensino Fundamental tiveram os mesmos resultados em ambas metodologias, diferenciando-se apenas pelo fato de que o computador corrige automaticamente os erros cometidos por eles.

Apesar destes resultados, o autor discorre que no processo de investigação observou que os estudantes mostraram dificuldades para encontrar o fator comum em expressões do tipo $8x^2y + 32xy^2$. Mas, acredita que os estudantes trazem dificuldades de anos anteriores.

Assim, quando ele inicia o estudo da Álgebra carrega consigo essas dificuldades agravando o problema, pois, além de ter de aprender corretamente os procedimentos para realizar operações algébricas, também deve superar dificuldades trazidas da aritmética, da geometria e das medidas. (CARDOSO, 2010, p. 53)

O autor discorre que ao apresentar uma atividade do tipo “encontrar dois números cuja soma é 78 e cujo produto é 1.296” esperava que o grupo de alunos que teve a intervenção do professor por meio de jogos, conseguissem realizar a tarefa. Ao contrário do que imaginava, esses estudantes evitaram a linguagem algébrica e optaram por utilizar a Aritmética para resolver a atividade. Assim, seguem-se os erros cometidos pelos alunos na maioria das tarefas, salvo raras exceções que conseguiram resolver as questões por meio dos conceitos algébricos.

O autor acredita que sua pesquisa contribuiu para o estudo dos Campos Conceituais de Álgebra e que o ensino da fatoração de expressões algébricas, por meio dos jogos digitais, poderia tornar-se mais eficientes, em comparação ao método tradicional, pois torna mais rápido a construção de teoremas.

Em sua pesquisa, Vieira (2011) desenvolveu um experimento com alunos do 2º ano do Ensino Médio, que constava de duas atividades, o jogo “ache-me na malha’ e a atividade lúdico-histórica (Gauss, garoto esperto!), para desenvolver o tema progressões aritmética (P. A.).

Para o autor estas atividades propõem aos alunos, expressar relações entre representações numéricas, produzir modelos algébrico/geométricos, aplicados à alunos do 2º ano do Ensino Médio. Acrescenta que:

o desenvolvimento desse experimento tem para o ensino de álgebra nessa turma de 2º Ano são compreendidas e percebidas por nós como: noção de variável, registrar leis de formação das expressões algébricas, perceber relações numa sequência de números como os da malha usado no jogo, explorar regularidades e saber expressar essa regularidade, seja em registros escritos ou orais e também generalizar uma situação problema. (VIEIRA, 2011, p. 95)

Durante o processo de desenvolvimento das atividades evidenciam-se as dificuldades dos alunos em expressar oralmente suas ideias e de realizar os registros. Um dos aspectos apresentados por eles foi a percepção e tentativa em expressar regularidades, assim como compreender quais valores variavam e quais não variavam, além da confusão no entendimento de variável e incógnita. Com isso, a autora afirmou que “a maioria dos alunos compreenderam e mobilizaram pensamentos que podem ser caracterizados como algébricos de acordo com os nossos referenciais” (VIEIRA, 2011, p. 87). A autora concluiu que realizar o trabalho com lúdico permitiu aos alunos manifestarem o pensamento e a linguagem algébrica.

A pesquisa de Campos (2015) mostra que o trabalho com o jogo lúdico, CODERRÉ possibilitou investigar a compreensão de conteúdos algébricos e sua linguagem por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A autora trabalhou com dois grupos, o grupo de controle (GC) e o grupo experimental (GE), que resolveram atividades em que constavam situações-problema em linguagem algébrica, operações com frações, com predominâncias nas equações polinomiais de 1º grau e fracionárias, mostrando as diferenças nas estratégias utilizadas para desenvolver o jogo.

Os principais resultados, da análise qualitativa da pesquisa, apresentam alguns erros cometidos pelos alunos, no processo de resolução. Entre eles utilizar a aritmética para resolver equações, deixar as respostas em branco, errar os cálculos de equações ou acertar os cálculos e errar as respostas. No que diz respeito aos benefícios da pesquisa, Campos (2015, p. 137) observa que:

os resultados encontrados na análise geral das produções dos dois grupos, experimental e de controle, podemos concluir que a intervenção de ensino elaborada de acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para a aprendizagem da álgebra contribuiu para melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas, sobretudo na manipulação de códigos, atribuindo-lhes significado enquanto objetos matemáticos necessários à compreensão dos conteúdos iniciais da álgebra.

A autora afirma que o jogo, por si só, não possibilita a compreensão de objetos matemáticos, mas fornece o caminho para a aprendizagem de Álgebra.

Em sua pesquisa, Nunes (2016) investigou a contribuição do trabalho com material concreto para o ensino e aprendizagem de equações lineares e quadráticas. O autor declara que as análises das atividades mostraram que os alunos expressaram dificuldade com a resolução de equações lineares, o que foi sanado gradativamente durante o processo de desenvolvimento da pesquisa.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos diz respeito a justificar a equação do tipo $0 \cdot x = 1$, pois exigia uma análise matemática. Destaca que a evolução na aprendizagem se deu a partir do trabalho com o material concreto, que foi utilizado como recurso para resolver fatoração e equações.

Nos encontros realizados com os alunos, o autor observou que as estratégias utilizadas por eles para resolver as equações, iam desde isolar a incógnita, utilizar fórmula de Bháskara, até confirmação de resultados por meio de material concreto e, que estes se relacionaram com o referencial teórico escolhido, conforme salienta Nunes (2016, p. 128).

O Mundo Corporificado foi evidenciado nestas atividades, pois os participantes registraram a manipulação no desenvolvimento da equação linear, utilizando os procedimentos que julgaram convenientes. Não podemos deixar de registrar que em um dos protocolos mencionados acima, evidenciamos a presença do Mundo Simbólico, ao lado dos registros com as fichas de EVA.

O autor conclui que o trabalho com material concreto contribuiu para o ensino e aprendizagem de equações lineares.

Nesta categoria, as pesquisas mostraram que, apesar das dificuldades encontradas pelos alunos com a resolução de temas algébricos, o trabalho com materiais e recursos tecnológicos é eficiente para a aprendizagem de Álgebra.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

No Quadro 9 apresentamos algumas concepções de Álgebra, concepções de Educação algébrica e pensamento algébricos interpretados de acordo com o que cada pesquisador apresentou.

Quadro 9 – Categoria Materiais/Recursos tecnológicos: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
CARDOSO (2010)	Concepção – Estudo das estruturas, Estudo de procedimentos e relação entre grandezas Pensamento - Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta
VIEIRA (2011)	Concepção – estudo das estruturas e Fundamenta-analógica Pensamento – Álgebra como pensamento e Álgebra como atividade
TREVISANI (2012)	Concepção – Aritmética generalizada Pensamento – Aritmética generalizada
MORAES (2013)	Concepção – estudo das estruturas e Fundamenta-analógica Pensamento – Álgebra como pensamento e Álgebra como atividade
CAMPOS (2015)	Concepção – Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade
DEROSSI (2015)	Concepção – Estudo de procedimentos Pensamento – Álgebra como atividade
NUNES (2016)	Concepção – Estudo de procedimentos Pensamento – Álgebra como atividade
REZENDE (2016)	Concepção – Fundamentalista estrutural e Estudos das estruturas Pensamento – Álgebra como cultura

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Em sua pesquisa, Cardoso (2010) apresentou atividades com fatoração, equações polinomiais de 1º grau e relação entre grandezas, evidenciando a concepção Estudo de estruturas, Estudo de procedimentos e Relação entre grandezas. O trabalho com esses conteúdos proporciona o desenvolvimento do pensamento algébrico, Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta, pois possibilita ao aluno compreender e interpretar a linguagem algébrica, assim como generalizar e organizar propriedades algébrica.

Vieira (2011) declara que o trabalho com progressão aritmética (P.A.) permitiu os alunos do 2º ano do Ensino Médio manifestarem o pensamento e a linguagem algébrica, especialmente, na compreensão de variável e expressão regularidades. Este conteúdo traz concepções de Álgebra e de Educação Algébrica que se referem às concepções Estudo das estruturas e Fundamentalista-analógica.

O pesquisador julga que estes alunos apresentam pensamento e linguagem algébrica próprios para a resolução destes conteúdos. Então, de acordo com a afirmação de Vieira (2011), as tarefas possibilitaram aos estudantes o desenvolvimento de pensamentos que se relacionam com Álgebra como pensamento, Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta, em que o aluno reflete a respeito dos símbolos algébricos, a respeito da resolução de equações e simplificação de expressões, entre outros.

A pesquisa de Trevisani (2012) mostra que, apesar das dificuldades dos estudantes com a escrita do termo geral do padrão, a maioria compreendeu o conceito algébrico para esse tema. Podemos dizer, que o conteúdo escolhido pelo autor apresenta concepção de Álgebra Aritmética generalizada, permitindo o desenvolvimento do pensamento algébrico Aritmética generalizada, com a possibilidade de generalizar padrões, estudar as estruturas aritméticas e expressões simbólicas, realizar generalizações utilizando a linguagem escrita e matemática para compreensão do uso da letra.

O trabalho com equações polinomiais de 1º grau foi desenvolvido nas pesquisas de Cardoso (2010), Campos (20015), Derossi (2015) e Nunes (2016), evidenciando a concepção Estudo de procedimentos, o que proporcionaria ao aluno o desenvolvimento do pensamento Álgebra como atividade, pois possibilita o aluno compreender e interpretar a linguagem algébrica, manipular símbolos, assim como generalizar e organizar propriedades algébricas.

Rezende (2016) escolheu o Teorema de Tales para realizar sua pesquisa com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Esse conteúdo corresponde às concepções Fundamentalista-estrutural e Estudos das estruturas, que favorece o pensamento Álgebra como cultura, visto que relaciona o currículo de Álgebra com outros campos da Matemática.

Estas pesquisas, em sua maioria, têm como prioridade realizar um trabalho com conteúdos que exigem do aluno leitura e interpretação dos enunciados, transposição da linguagem escrita para a linguagem algébrica, compreender o conceito de equivalência, analisar e discutir possíveis soluções, entre outros, o que justifica que determinadas concepções e pensamento algébricos evidenciam-se mais que outros.

Algumas considerações

O foco central deste conjunto de pesquisas foi a utilização de materiais concretos e lúdicos e os recursos tecnológicos como auxiliares no ensino e aprendizagem de álgebra.

Estas pesquisas evidenciam que o uso de jogos digitais como apoio ao ensino e aprendizagem, pode ao mesmo tempo possibilitar o desenvolvimento de diferentes estratégias, como inviabilizar a verificação das soluções apresentadas pelos alunos, pois o jogo corrige automaticamente os erros cometidos por eles.

Outro aspecto que nos chamou a atenção diz respeito à utilização da lousa digital. Concordamos com a autora quando esta discorre que este recurso possibilita mudanças na prática docente e, ainda, auxilia os alunos na aprendizagem de Álgebra. Mas, temos que atentar para o uso da lousa digital, pois, geralmente, é privilégio das escolas particulares, embora algumas prefeituras do estado de São Paulo tenham implantado esse recurso em suas escolas.

Concordamos com os pesquisadores que os recursos tecnológicos auxiliam no ensino e aprendizagem, mas não podemos nos esquecer que estes não substituem o professor, pois mesmo o Ensino a distância – EAD necessita de um docente como mediador. Também temos de considerar que muitos professores, assim como alunos têm dificuldades com a utilização da tecnologia. Observamos que esses recursos serviram muitas vezes para validar as respostas, como no *software* Aplusix (TREVISANI, 2012), mas isso não pode desviar a atenção das dificuldades dos alunos com a resolução de tarefas algébricas.

Em relação ao currículo de Álgebra, percebemos que houve somente citações do mesmo, com exceção de Campos (2015), que discorre a respeito do currículo, mas sem discutir sua importância.

Em relação às concepções algébricas e de Educação Algébrica e o pensamento algébrico, observamos uma diversidade entre as pesquisas, mas com predominância para a concepção Estudos de procedimentos e o pensamento Álgebra como atividade, o que mostra que os conteúdos algébricos escolhidos necessitam de competências e habilidades semelhantes para a resolução das atividades.

Acreditamos que estas pesquisas podem auxiliar o professor na escolha de recursos tecnológicos que podem ser utilizados em sala de aula ou podem ser utilizadas como um orientadora para diversificar as atividades aplicadas em sala de aula.

A seguir abordaremos as pesquisas categorizadas como Concepções/Conhecimentos, destacando os objetivos das pesquisas, bem como as principais abordagens metodológicas e os principais resultados e contribuições para o campo do ensino de Álgebra.

4.2.5 Concepções/Conhecimentos

Nesta categoria estão reunidas oito pesquisas, divididas em duas subcategorias: Concepções composta por três dissertações, Santos, D. (2009), Ferreira, M. (2009) e Guimarães (2013) e Saberes/Conhecimentos constituída por cinco dissertações, Lucas (2009), Silva, R. (2009), Fernandes (2011), Gonçalves (2014) e Modtkoski (2016). Esta categoria, como o título destaca, aborda as concepções de Álgebra e quais saberes e conhecimentos são apontadas em cada pesquisa.

Os dados do Quadro 10 apresentam as pesquisas categorizadas no tema Concepções/Conhecimentos, descritas conforme o título da pesquisa, autor e ano de produção. Em seguida, são discutidos os objetivos das pesquisas, os principais aportes teóricos e as abordagens metodológicas, além dos principais resultados e contribuições para a Educação Matemática.

Quadro 10 – Categoria: Concepções/Conhecimentos

Título	Autor	Nível
Ensino de equação de 1º grau: Concepções de professores de Matemática e formação docente	SANTOS, D. M. F. (2009)	Mestrado
Álgebra: Como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem	FERREIRA, M. L. (2009)	Mestrado
As concepções da Álgebra articuladas aos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental	GUIMARÃES (2013)	Mestrado
Equações e funções: Descontinuidades conceituais	LUCAS (2009)	Mestrado
Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental	SILVA R. M. (2009)	Mestrado
Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas	FERNANDES (2011)	Mestrado
Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de Álgebra baseadas no Saesp de 2008 a 2011	GONÇALVES (2014)	Mestrado
Conceito matemático x algoritmo: Construção do conhecimento ou simples mecanização?	MODTKOSKI (2016)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivos das pesquisas

Na subcategoria Concepções encontra-se a pesquisa de Santos, D. (2009) que apresentou como objetivo de investigação analisar as concepções dos professores do 8º ano do Ensino Fundamental a respeito do ensino de equação polinomial de 1º grau.

A dissertação de Ferreira, M. (2009) buscou investigar quais as crenças e concepções dos professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio em relação à Álgebra e como influenciam suas aulas e o aprendizado dos alunos. Os objetivos de pesquisa complementam-se com análise de equações polinomiais de 2º grau descritas em livros didáticos.

Guimarães (2013) apresentou como objetivo de pesquisa desenvolver uma sequência didática com alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de articular com os PCN e com as concepções de Álgebra apresentadas por Usiskin.

Na subcategoria Saberes/Conhecimentos encontra-se a dissertação de Lucas (2009) que trouxe como objetivo de pesquisa abordar os diferentes tipos de funções no Ensino Médio e compreender o que leva alunos do 2º ano do Ensino Médio a erros no cálculo de raízes dessas funções. O desenvolvimento da pesquisa

contou com atividades que se centralizavam nas equações polinomiais de 1º e 2º graus e funções afins e quadráticas.

Silva, R. (2009), Fernandes (2011) e Gonçalves (2014) desenvolveram seus trabalhos com alunos do anos finais do Ensino Fundamental. Particularmente, Silva, R. (2009) buscou investigar a compreensão dos alunos de 9º ano do Ensino Fundamental a respeito dos usos das variáveis em questões que envolvem sua simbolização, interpretação e manipulação. Fernandes (2011) investigou o desenvolvimento da linguagem e do letramento algébrico de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental; e Gonçalves (2014) realizou um estudo com alunos do 9º ano, para investigar as estratégias, as dificuldades e os erros referentes às questões de Álgebra presentes nos relatórios pedagógicos do Saesp 2008, 2009, 2010 e 2011.

Modtkoski (2016) investigou como os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1ª ano do Ensino Médio compreendem conceitos relacionados com as equações polinomiais de 1º e 2º graus.

Em sua maioria, as pesquisas centram suas investigações em equações polinomias e nos finais do Ensino Fundamental, com o objetivo de compreender as concepções que envolvem o ensino e a aprendizagem de Álgebra.

Abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos

No que diz respeito à abordagem metodológica das investigações que constam da subcategoria Concepções, Santos, D. (2009) declara desenvolver uma pesquisa quanti-qualitativa com estudo exploratório, que aplica questionários com o objetivo de identificar as concepções dos professores a respeito do ensino de equação de 1º grau.

Ferreira, M. (2009) e Guimarães (2013) realizaram uma investigação de cunho qualitativo. Ferreira, M. (2009) realizou uma pesquisa de campo com cinco professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio e três alunos de cada docente e Guimarães (2013) adotou o estudo de caso, que foi desenvolvido em duas fases: a primeira, abrangeu o estudo do uso de letras em Álgebra e a segunda, a produção de significados para a Álgebra em operações com expressões algébricas, por meio da aplicação de sequências de atividades.

O referencial da pesquisa de Santos, D. (2009) compreende as ideias de Thompson (1984), Carvalho (1989), Ponte (1992), Silva (1993), Cury (1994) e Garnica (2008) que discorrem a respeito das concepções dos professores a respeito de Álgebra.

Ferreira, M. (2009) e Guimarães (2013) concordaram com a escolha das ideias de Usiskin (1995) para compor o referencial teórico de suas pesquisas. Ferreira, M. (2009) também optou pelas ideias de outros autores, como Ernest (1989) com diferentes visões de Matemática e Lins e Gimenez (1997) que discorrem a respeito das concepções de Álgebra. Guimarães (2013) também se ampara na Teoria das Representações Semióticas de Duval.

As pesquisas dispostas na subcategoria Saberes/Conhecimentos, no geral, seguem a metodologia de pesquisa qualitativa, como as dissertações de Lucas (2009), Silva, R. (2009), Fernandes (2011), Gonçalves (2014) e Modtkoski (2016).

Com o objetivo de analisar as respostas, Lucas (2009) empregou a metodologia análise de conteúdo, conforme Laville e Dionne. O autor utilizou questões referentes ao estudo de equações, funções e relações entre as soluções de equações e raízes de funções.

Silva, R. (2009) realizou um estudo de caso com o objetivo de esclarecer e aprofundar os conhecimentos adquiridos. Esta metodologia permitiu a reformulação de hipóteses de trabalho conforme a investigação evoluiu. Para desenvolver sua pesquisa, a autora realizou e gravou em áudio entrevistas semiestruturadas, elaborou e aplicou um questionário e atividades com o intuito de identificar os significados e usos da variável

A pesquisa de Fernandes (2011) amparou-se em uma pesquisa exploratória, tendo como cenário a investigação da própria prática. Para o desenvolvimento do estudo, o autor aplicou uma sequência de atividades, na qual registrou os dados coletados em vídeos, gravações, diário de campo e transcrições das produções elaboradas pelos alunos.

A metodologia utilizada na dissertação de Modtkoski (2016) apresentou-se como interpretativa. Para a coleta de dados, a autora aplicou listas de exercícios,

com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, a respeito de equações polinomiais de 1º e 2º graus.

Dentre os principais referenciais teóricos apresentam-se: Lucas (2009) com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, Silva, R. (2009) com Modelo dos três usos da variável (3UV), apresentada por Ursini e Trigueros. Fernandes (2011) amparou-se nas ideias das concepções de Álgebra de Usiskin (1995) e as concepções de Educação Algébrica de Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Gonçalves (2014) utilizou em seu referencial teórico as categorias de erros propostas por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) que são: dados mal utilizados, interpretação incorreta de linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidas, falta de verificação da solução e erros técnicos e Modtkosky (2016) utilizou a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, Teoria da Complexidade na perspectiva de Edgar Morin (2010).

No geral, estas pesquisas utilizaram procedimentos metodológicos semelhantes. Os referenciais teóricos foram variados, mas essenciais para o desenvolvimento de cada estudo.

Alguns resultados e contribuições apresentadas nas Pesquisas

Na subcategoria Concepções os principais resultados da pesquisa de Santos, D. (2009) apontam que a maioria dos professores investigados teve formação marcada pelas ideias do Movimento da Matemática Moderna. Um número ínfimo de professores, 17%, realizaram cursos de Pós-Graduação, sendo que desses a maioria preferiu o curso de especialização *lato-sensu*. Os cursos de formação continuada oferecidos pela SEE-SP, em 2005 e 2006, apresentavam uma grande concentração de professores, diminuindo em 2007.

Ao analisar as concepções dos professores a respeito do ensino de equações de 1º grau, a autora identificou que esses docentes não seguem um único currículo, não realizam trabalhos interdisciplinares e contextualizados para o ensino do conteúdo fundamentam-se no livro didático.

A autora sublinha que algumas práticas de ensino sobressaíram-se, entre elas: algoritmo relacionado à equação em si; resolução de problemas da equação

em si; situações relacionadas à sua aplicabilidade; ferramenta (base para todos os conteúdos); analogia ao uso de material concreto.

Santos, D. (2009, p. 163) afirma que a análise das respostas mostra a existência de uma concepção tradicionalista inserida nos participantes.

Coerente com tal propositura, embora exista a tentativa de fazer com que o aluno interaja com o conteúdo equação de 1º grau e que esse tenha significado funcional para ele, o processo de ensino identificado ocorre tendo como parâmetro a ideia de que a apreensão do conhecimento é fruto de atividades repetitivas, sequenciadas e frequentes, assim como da memorização de procedimentos. Dessa forma, o ensino da equação de 1º grau desenvolvido pelos professores mostrou-se baseado na transmissão de conteúdos, permeado em ações centradas nos professores, tendo a exposição, como prática didática indicada como mais eficiente. (SANTOS, D., 2009, p, 163).

Nesse sentido, Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 40) já alertavam a respeito da falta de atenção dos pesquisadores à Álgebra, que assumiam um caráter fundamentalista, e criticavam a maneira como professores trabalhavam os conteúdos algébricos “[...] de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões” (ibid., p. 40).

A autora conclui considerando que os professores mantêm uma concepção tradicionalista a respeito do ensino de Álgebra, que no entendimento deles é “relevante, adequado e positivo” (SANTOS, D., 2009, p. 163). Por fim, a autora deixa em aberto para novas contribuições sobre as concepções dos professores a respeito do ensino de equações de 1º grau.

Ferreira, M. (2009) declara que os resultados de sua pesquisa iniciaram-se no primeiro questionário aplicado aos professores. Os indícios do que pensam os professores investigados trazem ideias de que a Álgebra está relacionada a letras, que indica o cálculo com incógnitas ou substituição por números. As respostas dos alunos ao questionário oferecido pelo pesquisador, só confirma o que pensam seus professores a respeito de álgebra.

O autor relaciona as concepções de Álgebra dos professores pesquisados como uma tendência letrista, de acordo com as ideias de Lins e Gimenes (1997), o que pode ser confirmado em seus discursos, como apresentado na entrevista:

Professora X: Para resolvermos determinada situação, lançamos mão da Álgebra, ou seja, do uso de letras para representar valores. Assim, quando você está frente a uma situação-problema usa-se a Álgebra para resolvê-la. E uma ferramenta da matemática usada para simbolizar. O problema dos alunos e o monte de letras misturadas com números e eles tem dificuldade, até então, para compreender isso. Eles não entendem o que expressões representam. (Perguntei o que é importante, entender o significado ou resolver exercícios). Os dois, resolver significa que ele entendeu o significado de cada peça ou símbolo. (Mar/2009). Professora Y: Sempre que penso em Álgebra me lembro das letrinhas e dos métodos para encontrar seus valores. (perguntei se a álgebra era um espaço nebuloso) acho que sim, mas só no começo (Mar/2009) (FERREIRA, M., 2009, p. 125)

Os dados coletados ao final da investigação mostraram ao autor que dependendo do conteúdo trabalhado pelas professoras, manifestam-se as concepções. Assim, tendo como base as entrevistas, as observações das aulas e conversas com os alunos, Ferreira, M. (2009) concluiu que as docentes mobilizam a concepção Estudo de procedimentos.

O autor considera que sua pesquisa contribuiu com os professores investigados em relação às suas concepções. O autor acredita que seu estudo provocará mudanças na maneira dos participantes ensinarem a Álgebra.

Guimarães (2013) concluiu que é necessário que o professor tenha conhecimento das orientações oferecidas nos PCN a respeito do ensino e aprendizagem de Álgebra. Esse motivo levou a pesquisadora a elaborar uma sequência didática articulada com as orientações desse documento.

Em relação aos documentos oficiais que utilizamos para leitura, estes sugerem que o ensino da Álgebra seja apresentado de maneira que possibilite aos alunos ler e interpretar. Não é recomendado desenvolver um estudo da álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica ou um trabalho exaustivo. (GUIMARÃES, 2013, p. 87)

As sequências didáticas, que foram aplicadas aos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, além de se articularem com os documentos oficiais também se relacionaram com as concepções de Álgebra: generalizar padrões aritméticos, resolver problemas, sendo possível diferenciar parâmetros, variáveis, incógnitas, além de permitir conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

A aplicação da primeira sequência didática apresentou em seus resultados que as principais dificuldades dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental foram com a interpretação, a generalização e o domínio das operações fundamentais dos problemas, situação que melhorou no decorrer do desenvolvimento de outras atividades. A segunda sequência mostrou que os alunos conseguiram realizar os registros de conversão, da língua natural para o registro numérico, do registro figural para o numérico e expressar diferentes registros algébricos. Na terceira sequência compreenderam a conversão dos registros gráficos e tabulares para o registro numérico.

No que concerne, aos resultados da resolução das sequências didáticas em relação às concepções, de acordo com Usiskin, os alunos apresentam interpretação coerente sobre a álgebra como estudo de relações entre grandezas, sendo esta a única relacionada por Guimarães,

Para nossa interpretação das concepções de Álgebra e do pensamento algébrico manifestado pelos alunos do 6º ano do ensino Fundamental, consideramos o último quadro elaborado por Guimarães (2013) com a síntese dos resultados,

O quesito estratégias evidencia que os alunos ainda estão considerando para resolução dos problemas somente operações aritméticas, manifestando nessa fase a concepção linguístico-pragmática, de acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 83).

Nessa concepção prevalece a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância deles que determinariam os conteúdos algébricos a serem aprendidos [...].

Ao finalizar sua pesquisa, Guimarães (2013) considera ser necessário que o professor saiba escolher atividades que tornem possível aos alunos a generalização e abstração dos conhecimentos. Salieta que, apesar dos PCN sugerirem o ensino de Álgebra a partir do 7º ano, talvez a introdução da noção de variável no 6º ano faça a diferença quando esta for estudada por meio de situações-problema.

Subcategoria Saberes/Conhecimentos, Lucas (2009) identificou que na resolução de atividades de expressões algébricas de funções e equações de 1º e 2º graus, os alunos do 2º ano do Ensino Médio, sujeitos da pesquisa, optaram pelo registro algébrico, mesmo quando solicitados a verificar se os valores numéricos fornecidos eram ou não raízes de funções ou equações. Estes resultados mostraram que esses estudantes não diferenciavam função de equação, portanto, buscavam por valores para a variável independente como se fossem incógnitas, assim relata Lucas (2009).

Por isso, pode-se concluir que, ao buscar raízes para uma dada função, os sujeitos participantes da pesquisa trataram-na como uma equação, procurando solucioná-la e encontrar um ou mais valores para sua variável independente, que no caso foi tratada como incógnita. (LUCAS, 2009, p. 101).

Das seis duplas, somente duas conseguiram articular o registro gráfico com a raiz de uma função e com diferentes registros. Um ponto relevante descrito por Lucas (2009) refere-se ao fato dos participantes apresentarem nos registros da língua natural uma descrição adequada dos termos algébricos. Ao final, concluiu que os participantes não conseguiram fazer a relação entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas correspondentes, pois não sabiam quais procedimentos adotar.

Silva, R. (2009) ao analisar as atividades à luz do Modelo dos três usos da variável (3UV), destaca os resultados apresentados nas atividades desenvolvidas pelos alunos de 9º ano do Ensino Fundamental. Optamos por apresentar esses resultados em duas categorias: os resultados satisfatórios e os insatisfatórios.

Resultados satisfatórios:

- Reconhecer padrões, perceber regras e métodos em sequências e em famílias de problemas; deduzir regras e métodos gerais em sequências e famílias de problemas;
- Simbolizar o termo desconhecido identificado em uma situação específica e usá-lo para representar uma equação;
- Determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente;
- Determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente.

Resultados insatisfatórios:

- Reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais e expressões analíticas);
- Reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos e expressões analíticas);
- Interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que assuma qualquer valor;
- Reconhecer e identificar em uma situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema;
- Substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação uma sentença verdadeira simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos; expressar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema;
- Determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requerida;
- Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica;
- Determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra.

A coleta de dados revela que as dificuldades desses alunos em relação à Álgebra é produto da forma como são abordados os diferentes usos da variável pelos docentes. Outro aspecto diz respeito ao tratamento da variável como incógnita, tão ressaltado nesta pesquisa: “Outra observação sobre a ideia de variável como representante de qualquer número é a ideia de incógnita que se revela [...]” (SILVA, R., 2009, p. 127).

A autora encerrou sua pesquisa destacando ser necessário refletir a respeito de estratégias de ensino que favoreçam uma aprendizagem significativa de álgebra.

Ao analisar as tarefas propostas aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, Fernandes (2011) observou pontos relevantes para o trabalho com o letramento algébrico desses alunos. Embora a maioria dos participantes tivessem o pensamento já desenvolvido, ainda não dominavam a linguagem algébrica.

Nesse sentido o pesquisador discorre que a mediação do professor foi imprescindível para o desenvolvimento do letramento algébrico.

Fernandes (2011) observou que embora os alunos tenham percebido alguma regularidade, não conseguiram interpretar algebricamente a questão, já as letras foram utilizadas como valores arbitrários por eles. O ponto importante no processo de desenvolvimento da pesquisa, segundo o autor, foi a socialização das respostas. Esse fato foi responsável por uma transformação no modo como os alunos passaram a realizar registros mais elaborados na tentativa de explicar as regras de generalização. O pesquisador declara que o trabalho realizado auxiliou os alunos a aprenderem e a construir relações entre duas grandezas.

Em síntese, posso afirmar que a aprendizagem obtida não ficou restrita à aquisição da escrita das fórmulas matemáticas. Destacaram-se um modo de aprender Matemática com significação e um modo de expressar, seja pela escrita, que revela a sua identidade, os anseios dos alunos diante de algo novo e inusitado, que é produzir Matemática, seja pela apresentação oral de suas ideias e raciocínios, estando eles corretos ou não, sendo validados e negociados não somente pelo professor, mas também pelos próprios alunos. (FERNANDES, 2011, p. 121)

Como o próprio autor declarou, os alunos mostraram indícios do desenvolvimento do pensamento algébrico. Concordamos com Fernandes (2011), então buscamos relacionar essas indicações com uma das visões de Lee (2001) e acreditamos que as mais próximas sejam Álgebra como linguagem e Álgebra como pensamento. Os participantes da pesquisa perceberam a presença da linguagem simbólica e as regras de Álgebra nas atividades que envolveram o raciocínio a respeito dos padrões e regularidades, apesar de não verem o sentido do símbolo algébrico. A investigação exploratório-participativa embora lenta, conforme Fernandes (2011), proporcionou um aprendizado significativo a respeito do letramento algébrico para o aprendizado do aluno.

Gonçalves (2014) destacou que os dados coletados mostraram que os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e os alunos do Ensino Médio compreendem a relação entre grandezas, conseguindo resolver os problemas com diferentes estratégias, entre elas, cálculo algébrico, cálculo numérico ou somente por tentativas.

Apesar disso, buscou investigar os erros cometidos pelos estudantes, revelados, sobretudo pela falta de interpretação correta dos dados fornecidos no problema. A atividade a respeito do sistema de equação de 1º grau revelou grande dificuldade dos alunos com o tema. Apesar disso, as estratégias oferecidas pelos estudantes estarem erradas, eles mostraram conhecimento sobre os procedimentos de resolução do sistema. Entre os erros, Gonçalves (2014) listou: confusão com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e erros na passagem de resolução do sistema de equações. Entre outros erros, o autor destaca:

Diante dos resultados obtidos na questão, foi notória a dificuldade dos alunos no que diz respeito à transformação da representação gráfica de uma reta para sua representação algébrica. Faltam conhecimentos aos alunos para que consigam resolver esta questão. Não se trata de erros ocorridos no processo de resolução, mas da falta de conhecimento a respeito dos procedimentos necessários para representar a equação da reta com base em sua representação gráfica. (GONÇALVES, 2014, p. 126)

O autor alerta, que se não forem corrigidos, poderão acumular-se outros erros e levar o aluno ao desânimo. Geralmente, são erros de fácil correção, como erros de multiplicação e divisão, então basta um pouco mais da atenção do professor. Gonçalves ressalta o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra e o processo de correção desses erros. No geral, o autor discorre que a maior parte dos erros cometidos pelos participante teve origem na má interpretação dos dados fornecidos nos problemas, sobretudo se eles estavam implícitos.

Dentre as principais conclusões, Modtkosky (2016) destacou que a causa do insucesso dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e de 1º ano do Ensino Médio com a Álgebra deve-se ao fato de apresentarem desenvolvimento de algoritmos de forma mecânica em todas as atividades lhes oferecidas. A pesquisadora percebeu, por exemplo, para a equação polinomial de 2º grau, a maioria dos alunos segue as fórmulas de Bháskara, sem considerar outros meios de resolução. em relação a equação de 2º grau, Modtkosky (2016, p. 143) ressalta que:

[...] ao analisarmos os procedimentos resolutivos, observamos que os erros cometidos pelos alunos são na maioria aritméticos ou provindos de compreensões incompletas, como dificuldades ao

lidar com os termos das equações e erros de sinal, que indicam dificuldades no conteúdo referente ao conjunto dos números inteiros e suas propriedades, ou seja, eles demonstram sabem operar mecanicamente os algoritmos das equações de 2º grau, mas cometem enganos ao manipulá-los. (MODTKOSKY, 2016, p. 143)

A pesquisadora identificou que entre os participantes havia alunos que não sabiam resolver equações de 2º grau e as equações de 1º grau eram resolvidas por meio de tentativas, com a substituição da incógnita por valores numéricos. Os alunos obtiveram êxito, conforme cita Modtkosky (2016) nos problemas que podem ser resolvidos por meio de operações aritméticas.

A pesquisadora finalizou seu estudo preocupada com as evidências de que os alunos resolvem as equações polinomiais de 1º e 2º graus de forma memorizada e mecânica, sem refletirem nas estratégias para sua resolução.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Nos dados do Quadro 11, apresentamos as concepções e pensamento algébrico dispostos, conforme conteúdos apresentados pelos autores em suas pesquisas.

Quadro 11 – Categoria Concepções de Álgebra/Conhecimento: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
FERREIRA, M. L. (2009)	Concepção - Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade
LUCAS (2009)	Concepção - Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade e como ferramenta
SANTOS, D. M. (2009)	Concepção - Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade
SILVA, R. M. (2009)	Concepção - Estudo das estruturas Pensamento - Álgebra como ferramenta
FERNANDES (2011)	Concepção - Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade
GUIMARÃES (2013)	Concepção - Estudo de procedimentos e Fundamentalista-analógica Pensamento - Analiticidade e Álgebra como atividade
GONÇALVES (2014)	Concepção - Estudo de procedimentos e Fundamentalista-analógica Pensamento - Analiticidade e Álgebra como atividade
MODTKOSKY (2016)	Concepção - Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade e como ferramenta

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

As pesquisas de Ferreira, M. (2009), Santos, D. (2009) e Fernandes (2011) apresentam atividades envolvendo o estudo de equações polinomiais de 1º grau. Esse conteúdo destaca-se pela concepção Estudo de procedimentos, pois o objetivo é simplificar e resolver em que ocorre a manipulação do símbolo algébrico. Esse tema oferece ao aluno o desenvolvimento do pensamento Álgebra como atividade, visto que permite a reflexão a respeito de como manipular os símbolos algébricos e simplificar expressões.

Os estudos de Guimarães (2013) e Gonçalves (2014) mostram que as escolhas destes autores abrangem o ensino e aprendizagem de equações polinomiais de 1º grau e sistema de equação de 1º grau. Estes conteúdos inserem-se nas concepções Estudo de procedimentos e Fundamentalista-analógica, visto que exigem, dentro da proposta de atividades destes autores, a leitura e interpretação dos enunciados, transposição da linguagem escrita para a algébrica, analisar e discutir possíveis soluções, interpretar graficamente a solução de um sistema. Essas atividades proporcionam o desenvolvimento do pensamento algébrico, em especial, da Analiticidade e Álgebra como atividade, uma vez que proporciona a manipulação de símbolos, compreender e simplificar equações, entre outros.

As atividades referentes à fatoração algébrica propostas por Silva R. (2009) exige do aluno compreender conceitos algébricos que vão além de utilizá-los para resolver equações de 2º grau. Para o trabalho com este conteúdo é necessário que o aluno compreenda o significado de variável, relacione a linguagem algébrica e geométrica em diferentes contextos, resolva situações em que é necessário manipular e justificar as propriedades, entre outros. Diante disto, entendemos que a concepção presente nestes conteúdos, diz respeito à Estudo das estruturas, possibilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como ferramenta.

Lucas (2009) e Modtkosky (2016) focalizam seus trabalhos nas equações polinomiais de 1º e 2º graus. Entendemos que para o trabalho com este conteúdo é necessário o aluno compreender o conceito de incógnita, compreender a linguagem algébrica disposta em situações-problema, resolver as equações por meio de regras e técnicas de resolução, seja pela fatoração ou Fórmula de Bháskara,

relacionar a Álgebra com a Geometria para solucionar as atividades. No entanto, entendemos que a concepção apresentada refere-se à Fundamentalista-analógica e a Estudo de procedimentos, que possibilita ao aluno pensar em Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.

O Quadro 11 revela que o maior número de concepções de Álgebra e de Educação Algébrica diz respeito ao Estudo de procedimento e pensamento algébrico Álgebra como atividade, significando que a maioria das pesquisas envolvem conteúdos que podem ser interpretados pelos alunos a partir de resolução de problemas no âmbito de Álgebra.

Algumas considerações

Nesta categoria, apresentamos um agrupamento de pesquisas com os objetivos de compreender as concepções, os saberes e os conhecimentos dos alunos e professores em relação à Álgebra. Os participantes desses estudos foram bem diversificados, entre estudantes e professores dos anos finais dos Ensino Fundamental e Ensino Médio. Na sequência das atividades, apresentam o estudo de funções e equações polinomiais de 1º e 2º graus, sistemas de equações de 1º grau e generalização de padrões, entre outros.

O processo de desenvolvimento das pesquisas, assim como os resultados, mostrou que as dificuldades apresentadas por alunos vêm de um ensino tradicionalista, que preza pela forma mecânica de resolução dos conceitos algébricos. Outro aspecto, diz respeito aos conhecimentos de alguns professores, que foram adquiridos há muito tempo, estando arraigados em suas concepções, necessitando de uma reciclagem, como por exemplo, cursos de formação continuada. Mas, entendemos que alguns desses professores não percebem essa necessidade. Outra fonte de dificuldades apresentada pelos alunos, provêm das escolhas que os professores fazem das atividades algébricas e do livro didático a ser trabalhado em sala de aula.

Embora, o PNLD apresente diretrizes a respeito dos livros didáticos, é necessário que os professores façam análise desse material a fim de evitar o que não contribui para os avanços da aprendizagem de Álgebra.

Observou-se que a maioria dos participantes mostrou possuir concepções de Álgebra e de Educação Algébrica que se centram no Estudo de procedimentos, mostrando a valorização das regras para resolução das atividades, e o pensamento algébrico desenvolvido pelos participantes também vai ao encontro da reflexão do uso de fórmulas como meio para encontrar resultados, conforme salienta Radford (2006; 2010).

Estas pesquisas mostraram que as interpretações e o entendimento de Álgebra, não estão ligados somente aos anos finais do Ensino Fundamental e Médio, mas podem ser reflexo da formação inicial do professor, que também é ensinada de maneira fragmentada.

Pudemos observar que neste agrupamento de pesquisas, há predominância de conteúdos que prezam a compreensão de incógnita, manipulação de símbolos e problemas, em que a prioridade é simplificar e resolver.

Acreditamos que esta categoria tenha contribuído com informações que as pesquisas trouxeram a respeito das concepções de Álgebra, de Educação Algébrica e pensamento algébrico presentes em alunos e professores, mostrando, como cada um deles concebe a Álgebra.

A seguir, abordamos as pesquisas categorizadas no tema Metodologia de Ensino, destacando os objetivos, as principais abordagens metodológicas, os principais resultados e contribuições para o campo de Álgebra.

4.2.6 Metodologia de Ensino

Nesta categoria, são apresentadas duas subcategorias relativas à Sequência de ensino e Resolução de problemas. Nessa direção, tomamos as ideias de Chevallard (1989) ao afirmar que o trabalho com modelos matemáticos permite a produção de conhecimentos que por outros não seria possível. Esse autor declara que “a noção de modelização permite assim tomar uma visão de conjunto sobre a atividade matemática, do primário [*école primaire*] à universidade” (CHEVALLARD, 1989, p. 61, tradução nossa).

Assim, nesta categoria foram reunidas pesquisas que buscaram, ou pelo menos tentaram apresentar modelos matemáticos. A categoria está dividida em

duas subcategorias: Sequências de Ensino composta pelo estudo de Neves (2015), e Resolução de problemas com as pesquisas de Costa, W. (2010), Puti (2011), Miranda (2014) e Alvarenga, R. (2017). No total foram cinco produções, divididas em quatro dissertações e uma tese.

A seguir, são apresentados no Quadro 12 o título das pesquisas, autor e ano de publicação, nível acadêmico e orientador. Em seguida, apresentamos os objetivos das pesquisas, abordagem metodológica e principais referenciais teóricos, os principais resultados e algumas considerações.

Quadro 12 – Categoria: Metodologia de Ensino

Título	Autor	Nível
O ensino e a aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental: a formação do conceito de função.	NEVES (2015)	Mestrado
Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau	COSTA (2010)	Mestrado
A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais	PUTI (2011)	Mestrado
A noção de variável de alunos do Ensino Fundamental	MIRANDA (2014)	Mestrado
Um estudo sobre os componentes da criatividade na solução de problemas matemáticos	ALVARENGA, R. (2017)	Doutorado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivos das pesquisas

Na subcategoria Sequências de Ensino encontra-se apenas a dissertação de Neves (2015) que investigou como ocorre a formação do conceito de função afim (1º grau) e função quadrática (2º grau) por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental

Na subcategoria Resolução de problemas o objetivo da pesquisa de Costa W. (2010, p. 33) foi “investigar em que medida os fatores de não congruência¹¹ influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações de 1º grau” em uma turma do 8º ano.

¹¹ Conforme a Teoria de Raymond Duval, as três condições que tornam um problema congruente são a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem das unidades de significado. Nosso teste, foi elaborado em função dessas condições. (COSTA, W. 2010, p.33).

Puti (2011) investigou o ensino de equações polinomiais de 1º e 2º graus por meio da resolução de problemas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A autora apoiou sua pesquisa em livros didáticos e nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998).

A pesquisa de Miranda (2014) apresentou uma investigação com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, com o intuito de descrever a noção de variável por meio da resolução de problemas.

A tese de Alvarenga, R. (2017) apresentou como objetivo de investigação um estudo a respeito do desempenho dos alunos do 2º ano do Ensino Médio a respeito da solução de problemas aritméticos, algébricos e geométrico, envolvendo os componentes de criatividade¹². Além disso, buscou analisar o discurso presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000) sobre essa criatividade.

Embora os objetivos destas pesquisas sejam diferentes, todas apresentam preocupação com ensino e aprendizagem de conceitos algébricos, no que diz respeito às funções e equações polinomiais de 1º e 2º graus e resolução de problemas. Em sua maioria, o público-alvo é composto de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos

Na subcategoria Sequências de Ensino, a investigação de Neves (2015) adota como metodologia uma pesquisa qualitativa com visão dialética. Os procedimentos metodológicos foram organizados em quatro momentos, conforme destaca o pesquisador: pesquisa bibliográfica e documental; observação das aulas de matemática; desenvolvimento das atividades com os alunos e análise dos dados coletados. Os principais autores relacionados no referencial teórico de Neves (2015) foram Vigotski com a Teoria Histórico-Cultural e Leontiev e Davidov com a Teoria da Atividade do Ensino Desenvolvidor.

¹² Para Krutetski (1976), a criatividade em Matemática, é a capacidade de encontrar meios para solucionar problemas, formular problemas simples, inventar teoremas e fórmulas, deduzir fórmulas e encontrar métodos originais para solucionar problemas

Na subcategoria Resolução de problemas, Costa, W. (2010) relata que a metodologia de pesquisa consistiu na elaboração e aplicação de problemas a respeito da conversão da linguagem natural para linguagem algébrica em problemas com equações de 1º grau em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental.

Puti (2011) adotou a metodologia da pesquisa qualitativa, apoiando-se nas ideias de Romberg para desenvolver sua investigação.

Thomas A. Romberg em seu artigo, publicado em 1992, no *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* e intitulado *Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa*, busca identificar nas Ciências Sociais as tendências de pesquisa relacionadas ao ensino e à aprendizagem escolares e determinar como essas tendências influenciam o estudo da Matemática nas escolas. (PUTI, 2011, p. 23)

Embora Miranda (2014) tenha definido que sua dissertação segue uma metodologia de pesquisa bibliográfica, os procedimentos consistiram na aplicação de instrumento diagnóstico, aplicação de questionário e problemas e na análise dos resultados.

Alvarenga, R. (2017) realizou uma pesquisa de cunho qualitativo amparada em um estudo de análise do discurso textual. Os procedimentos da pesquisa contaram com os seguintes instrumentos de investigação: análise dos PCNEM (BRASIL, 2000), quanto à criatividade; questionário para descrever os sujeitos da pesquisa; teste de Matemática da série Krutetski¹³.

Quanto ao referencial, Costa, W. (2010) amparou-se nas ideias de Raymond Duval a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Puti (2011) não evidenciou o referencial teórico de sua dissertação, mas no decorrer do texto surgiram nomes de alguns autores como, Lins e Gimenez, D'Ambrósio, entre outros. No referencial teórico da pesquisa de Miranda (2014),

¹³ O presente estudo baseou-se na aplicação e observação das seguintes séries de Krutetskii (1976): teste matemático da série VI, teste algébrico da série XIII, teste aritmético da série XIII, teste geométrico da série XIII. A série VI de Krutetskii (1976), é constituída de sistemas de problemas de diferentes categorias, que investigam os componentes: percepção, generalização, redução dos passos no processo de raciocínio, flexibilidade de pensamento e memória Matemática. A série XIII de Krutetskii (1976), são problemas que propiciam diferentes resoluções, investigam o componente: flexibilidade de pensamento. (ALVARENGA, R., 2017, p. 54).

destacam-se os estudos de Fiorentini, Miorim, e Miguel, Lins & Gimenez, Usiskin e Ursini e Trigueros. Na tese de Alvarenga, R. (2017) encontramos as ideias de Klausmeier, Derville, Riding e Cheema, entre outros.

Todas as pesquisas são de cunho qualitativo, com procedimentos metodológicos bem semelhantes, como a aplicação da sequência de atividades, aplicação de questionários e análise dos resultados. O referencial teórico destas investigações é diversificado e auxiliam o processo de investigação em que o centro é o ensino e a aprendizagem de Álgebra.

Alguns resultados e contribuições apresentados nas Pesquisas

Na subcategoria Sequências de Ensino, a pesquisa de Neves (2015) destacou as concepções de Álgebra que aparecem em literatura e documentos oficiais como PCN, mas não são exploradas em sala de aula.

O que chamou a atenção do pesquisador foi o fato de os alunos não saberem o que é Álgebra ou a entenderem como um termo que mistura letras e números. A situação agrega-se às questões básicas da Matemática, como leitura, interpretação, operações fundamentais, representações algébricas, entre outras, que também mostraram a limitação de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental com a aprendizagem de Álgebra. Os estudantes também apresentaram dificuldade para relacionar grandezas quando a atividade exigia o cálculo de perímetro e de medidas de área, volume ou tempo. No entanto, com a introdução do conceito de funções, Neves (2015) percebeu um processo de apropriação de relações entre grandezas, dependência e interdependência pelos alunos.

Segundo o autor, a linguagem verbal não foi problema para enunciar a regra geral para expressar regularidades, mas as dificuldades evidenciaram-se quando tiveram que representar por escrito tais regularidades, mostrando a falta de domínio dos alunos no que se refere a símbolos algébricos. Acrescenta que a utilização de recursos tecnológicos como um *software* de Geometria dinâmica juntamente com jogos manipulativos facilitaram o entendimento da representação gráfica de funções.

Portanto, os resultados das sequências de atividades permitiram a Neves (2015, p. 220) perceber indicadores de que os alunos compreenderam o conceito de função, “[...] percebe-se que a essência do conceito de *função* e os nexos desse conceito foram assimilados pela maioria dos alunos”.

Na subcategoria Resolução de problemas, Costa (2010) destaca que sua investigação confirmou as dificuldades dos alunos em representar registros diferentes. Entre elas, foi verificada a conversão para o registro algébrico, em razão da dificuldade de o aluno operar ao mesmo tempo com duas operações inversas; nesse caso, com a divisão e a multiplicação. Os alunos também apresentaram falta de compreensão entre rótulo e incógnita, como declara Costa, W. (2010, p. 70)

A equação montada demonstra uma prática comum, em que o sujeito, ao ler o problema, procura representá-lo no mesmo sentido da leitura. A frase “*A idade de Abreu é três vezes a de Júlio*” leva o sujeito, sem fazer uma reflexão prévia do texto, a representar $A.3 = J$. Ele faz a conversão para a escrita algébrica, no entanto, a não congruência é um elemento que muda a ordem convencional de representação. (COSTA, W. 2010, p. 70)

Esta situação mostrou a falta de conhecimento dos símbolos algébricos para substituir pela escrita natural.

Em sua pesquisa, Puti (2011) ofereceu aos alunos atividades que tratavam de expressões algébricas, equação de 2º grau, padrões geométricos, além de situações-problema com operações aritméticas e geométricas que relacionavam Álgebra e Geometria.

Os resultados apontaram que de início os alunos utilizaram propriedades aritméticas, técnicas de contagem, fatoração e método da substituição por tentativa e erro para resolverem as equações de 2º grau. A discussão proposta para a resolução de problemas mostrou-se eficiente, pois modificou a maneira como os estudantes passaram a resolver estas equações, pois a resolução dos problemas partiu de argumentações para novos conceitos de trabalho.

A pesquisa de Miranda (2014) destacou que o uso da variável como padrão generalizador e como parâmetro provocou falta de compreensão de alunos do 9º ano a respeito do valor desconhecido. Grande parte dos alunos demonstrou necessidade de encontrar resultado numérico às variáveis, quando estas

representavam valores genéricos, portanto, confundiam variável com incógnita. A autora enfatiza que:

O aluno insere as operações aritméticas nas equações e expressões ao trabalhar com a noção de variável como incógnita, nas regras relacionadas a um determinado objeto que envolvem a noção de variável como padrão generalizador e nas relações de dependência e independência da noção de parâmetro. (MIRANDA, 2014, p. 143)

A passagem do registro algébrico para o registro gráfico não foi identificada nas respostas dadas pelos alunos para as atividades. Os participantes também não reconheceram a relação entre as variáveis, em muitas vezes. Ao final, Miranda (2014) observa que os alunos ainda estão vinculados à generalização aritmética e sentem dificuldade em compreender o significado da variável.

Os resultados da investigação de Alvarenga, R. (2017), revelam que os alunos apresentam dificuldades com a resolução de problemas, sobretudo os relacionados à Geometria, seguido dos problemas associados à Aritmética. No teste algébrico a pesquisadora constatou que os alunos não expressaram flexibilidade de pensamento,

Alvarenga, R. (2017) refere que o resultado dos testes não mostrou soluções diferentes e criativas, mas revelou que os participantes tiveram grandes dificuldades para resolver e encontrar soluções aos problemas propostos, que envolviam relações entre grandezas, transposição da linguagem natural para a linguagem algébrica, entre outros. O fato indica que a escola, escolhida para realização da pesquisa, mostra que trabalham com problemas a partir de modelos e listas de exercícios.

Em relação à análise do PCNEM (BRASIL, 2000), para a autora existem passagens a respeito de criatividade, mas, declara que a primeira vez que o termo aparece não ficou claro seu sentido nesse documento.

[...] não se sabe qual é a concepção quanto a ela, conjectura-se então que a palavra é usada como o significado do dicionário Aurélio: “s.f. Faculdade ou atributo de quem ou do que é criativo; capacidade de criar coisas novas; espírito inventivo: criatividade artística”. (ALVARENGA, R., 2017, p. 64)

As demais vezes que o termo surge não está de acordo com o sentido de criatividade proposto para esta pesquisa, pois no documento o termo criatividade relaciona-se com “dever, cidadania e igualdade” conforme descreve Alvarenga, R. (2017, p. 73).

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Os dados do Quadro 13, apresentam as concepções de Álgebra e de Educação Algébrica, assim como, o pensamento algébrico que cada pesquisa apresenta, conforme relato de seus investigadores.

Em suas pesquisas, Costa (2010), Puti (2011) e Neves (2015) aplicaram atividades envolvendo equações polinomiais de 1º e 2º graus. As três investigações contemplam a resolução de problemas, com a inclusão de questões relacionadas a padrões geométricos, exigindo do aluno leitura, interpretação de texto, manipulação de símbolos, transformismo algébrico, transposição da linguagem escrita para a algébrica, resolução de equações. Consideramos também, que nestas pesquisas, algumas atividades foram resolvidas por meio de regras e técnicas de resolução.

Quadro 13 – Categoria Metodologia de Ensino: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
COSTA, W. (2010)	<i>Concepção - Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.</i>
PUTI (2011)	<i>Concepção - Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.</i>
MIRANDA (2014)	<i>Concepção - Aritmética generalizada, Estudo de procedimentos, Relações entre grandezas, Linguístico-pragmática, Fundamentalista- estrutural e Fundamentalista-analógica Pensamento - Analiticidade, Álgebra como pensamento, Álgebra como atividade e álgebra como ferramenta</i>
NEVES (2015)	<i>Concepção - Fundamentalista-analógica e Estudo de procedimentos Pensamento - Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.</i>
ALVARENGA, R. (2017)	<i>Concepção - Fundamentalista-analógica e concepção de Álgebra Relações entre grandezas Pensamento - Álgebra como atividade e Álgebra como pensamento.</i>

FONTE: Elaborado pela pesquisadora.

A partir disto, entendemos que as duas pesquisas apresentam a concepção de Educação Algébrica Fundamentalista-analógica e concepção de Álgebra Estudo de procedimentos. As escolhas dos conteúdos também favorecem o

desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.

Miranda (2014) escolheu realizar uma pesquisa a respeito da noção de variável com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Quando iniciamos a leitura da pesquisa, nosso primeiro entendimento a respeito do título, foi que esta seria investigação referente à função. Entretanto, a leitura do resumo e do texto mostrou outras visões a respeito de variável. Neste caso, a autora assumi a variável em três vertentes: variável como valor desconhecido; variável como padrão generalizador, variável como parâmetro. Todas incluem interpretar, simbolizar e manipular, com exceção da última que também inclui representação gráfica.

As atividades incluem o estudo de padrões e regularidades, equações, fatoração com a utilização de figuras geométricas, cálculo de medida de área com representação algébrica e representação gráfica de função.

Nesse contexto, entendemos que estas atividades contemplam as concepções de Álgebra Aritmética generalizada, Estudo de procedimentos e Relações entre grandezas e Concepções de Educação Algébrica Linguístico-pragmática, Fundamentalista-estrutural e Fundamentalista-analógica. A proposta da pesquisadora auxilia no desenvolvimento do pensamento algébrico Analiticidade, Álgebra como pensamento, Álgebra como atividade e Álgebra como ferramenta.

Com a intenção de investigar a criatividade dos alunos do Ensino Médio na resolução de situações algébricas, Alvarenga, R. (2017) aplicou tarefas com uma diversidade de conteúdos. Entre eles estão: expressões algébricas, transposição da linguagem escrita para a algébrica, fatoração e relação entre a Álgebra e Geometria. Estas atividades buscaram envolver o trabalho com variável. Neste sentido, entendemos que a concepção que se apresenta neste estudo é a concepção de Educação Algébrica Fundamentalista-analógica e concepção de Álgebra Relações entre grandezas. Esta investigação oportuniza o aluno no desenvolvimento do pensamento algébrico Álgebra como atividade e Álgebra como pensamento.

A concepção Algébrica e Educação Algébrica, assim como o pensamento algébrico, evidenciam-se de acordo com a proposta de cada pesquisador para suas investigações.

Algumas considerações

Observamos neste conjunto de pesquisas há uma tendência na utilização de teorias advindas das ciências sociais. Estas investigações preocuparam-se com os aspectos cognitivos dos alunos, como ocorre a interação social entre eles e com as atividades estruturadas que facilitem o desenvolvimento de habilidades, fazendo com que os estudantes internalizem conceitos algébricos.

O ponto central desse tipo de investigação surge, nas palavras de Neves (2015), com a identificação das dificuldades e superação dos alunos em relação à aprendizagem de Álgebra. O destaque na escolha de referenciais teóricos que atendam essas expectativas, mostrou a importância do ofício do professor como mediador entre os conceitos ensinados e o estudante. Com isso entendemos, que se preocupar com o cognitivo é importante, tanto para o professor como ao aluno, no que se refere à construção do conhecimento.

Estes estudos mostram que, para a resolução de sequência de atividades e problemas, podemos inserir diversos assuntos, mas, o estudo de funções e equações polinomiais de 1º e 2º graus, foi o conteúdo mais evidenciado nas pesquisas. Estas produções também mostraram que as dificuldades dos alunos vão além de conceitos algébricos, mas, de conceitos que já vêm enraizados nos anos anteriores.

Somente uma pesquisa apresentou discussão a respeito do PCNEM (BRASIL, 2000), mas sem mencionar o ensino e a aprendizagem de Álgebra, preocupando-se apenas com o termo criatividade proposto no documento. Em relação ao currículo posto nas escolas brasileiras, não houve interesse por parte dos pesquisadores, ou mesmo oportunidade para uma reflexão a respeito do assunto.

Todas as pesquisas contemplam a concepção Fundamentalista-analógica e o pensamento algébrico Álgebra como atividade, o que nos leva a considerar que, apesar do trabalho com recursos analógicos, os conteúdos escolhidos pelos

pesquisadores, ainda contempla resolução de problemas com resolução de equações, com o intuito de simplificar e resolver. Com isso, acreditamos que esse agrupamento de pesquisas vem contribuir com as reflexões e análises para esta categoria.

A seguir abordaremos as pesquisas categorizadas no tema Prática pedagógica em Álgebra destacando os objetivos das pesquisas, bem como as principais abordagens metodológicas e os principais resultados e contribuições para o campo de Álgebra.

4.2.7 Prática pedagógica em Álgebra

Moreira (2004) discorre que a prática pedagógica do professor de matemática da escola básica necessita de uma visão diferenciada, no contexto educativo, no qual os objetos matemáticos estão associados à definições, justificativas, argumentações, métodos e resultados.

Assim, nesta categoria estão relacionados os trabalhos que apresentam estudo a respeito do ensino e aprendizagem de Álgebra, tendo como objetivo investigar o professor. Esta categoria reuniu pesquisas divididas em três subcategorias: Dificuldade na aprendizagem de Álgebra composta somente pelo estudo de Vidal (2008); Reflexões a respeito do ensino de Álgebra com Passos (2012), Ferreira, M. C. (2014); Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra constituída pelas pesquisas de Oliveira (2014) e Américo (2016).

Os dados do Quadro 13 apresentam as pesquisas categorizadas no tema Prática pedagógica em Álgebra, descritas segundo o título da pesquisa, autor e ano de produção. Em seguida, são discutidos os objetivos das pesquisas, os principais aportes teóricos e abordagens metodológicas utilizadas, além dos principais resultados e contribuições à Educação Matemática. Essa categoria totaliza quatro dissertações e uma tese de doutorado.

Quadro 14 – Categoria: Prática pedagógica em Álgebra

Título	Autor	Nível
Exploração didática de erro no ensino de equação de 1º grau	VIDAL (2008)	Mestrado
A educação algébrica no 8º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis: Entendimentos dos professores de Matemática	PASSOS (2012)	Mestrado
Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a Álgebra na escola e na formação do professor	FERREIRA, M. C. C. (2014)	Doutorado
Analisando a mobilização de conhecimentos algébricos de professores de educação básica: o momento de preparação de aulas sobre equações	OLIVEIRA (2014)	Mestrado
Estudo sobre os conhecimentos dos professores de Matemática na construção do processo de generalização	AMÉRICO (2016)	Mestrado

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Objetivos das pesquisas

Na subcategoria Dificuldade na aprendizagem de Álgebra a dissertação de Vidal (2008) apresentou uma investigação a respeito das estratégias dos professores frente às dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com o estudo da equação de 1º grau.

Na subcategoria Reflexões a respeito do ensino de Álgebra, Passos (2012) buscou investigar o entendimento dos professores a respeito da educação algébrica no 8º ano do Ensino Fundamental e, se existe e, como são mobilizados os registros de representação semiótica sobre as dimensões de Álgebra como aritmética generalizada, dimensão de Álgebra como funcional, a dimensão de Álgebra como equações e dimensão de Álgebra como estrutural, no livro didático do 8º ano do Ensino Fundamental “Tudo é Matemática”.

Para sua tese, Ferreira, M. C. (2014) investigou os elementos constituintes do conhecimento do professor de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental a respeito de Álgebra.

Na subcategoria Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra verificamos a dissertação de Oliveira (2014) que investigou os conhecimentos do professor de educação básica mobilizados para o ensino de Álgebra. Em particular, estes docentes lecionavam nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Américo (2016, p. 118) propôs para sua dissertação investigar “quais

conhecimentos os professores de matemática evidenciam ao resolverem as atividades propostas nos Cadernos do Aluno de Matemática do 8º ano do Ensino Fundamental a respeito de padrões e regularidades”

Das cinco pesquisas, temos três em que os autores preocupam-se em investigar o professor e seu conhecimento a respeito de Álgebra. As demais, investigaram as estratégias utilizadas pelos docentes no ensino e suas concepções de Álgebra. Observamos que, todos os estudos ocorreram com participantes dos anos finais do Ensino Fundamental; um deles apresenta também professores do Ensino Médio.

Abordagens metodológicas e principais referenciais teóricos

As abordagens metodológicas da pesquisa de Vidal (2008) inserida na subcategoria Dificuldade na aprendizagem de Álgebra, privilegiam uma pesquisa de natureza qualitativa em um estudo de caso. Para compor o referencial teórico de seu estudo, a pesquisadora abordou as ideias de Cury a respeito da análise de erros.

Os dois estudos inseridos na subcategoria Reflexões a respeito do ensino de Álgebra assumem para suas investigações abordagem de pesquisa qualitativa. As diferenças ficam por conta dos objetivos e procedimentos. Enquanto a dissertação de Passos (2012) adotou os princípios da análise de conteúdos de Bardin e a investigação de Ferreira, M. C. (2014) segue os objetivos de uma pesquisa de uma pesquisa observacional de cunho etnográfico.

Dentre os principais referenciais, surgem os nomes de Duval com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Fiorentini, Miorim e Miguel com ideias a respeito de concepções e pensamento algébrico, na pesquisa de Passos (2012) e Shulman e Deborah Ball que discorrem a respeito do conhecimento pedagógico, nas dissertação de Ferreira, M. C. (2014).

Na subcategoria Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra se encontram a pesquisa de Oliveira (2014) e Américo (2016) que adotaram para suas investigações uma metodologia de abordagem qualitativa.

Dentre os principais referenciais teóricos, destacam-se em Oliveira (2014), os trabalhos de Shulman e, Américo (2016) amparou seu referencial nas ideias de Borralho, Isabel Vale e Luís Radford.

Apesar de inseridas em diferentes subcategorias, observamos que todas as investigações assumem a metodologia de pesquisa qualitativa. Os trabalhos de Shulman e Ball que discursam a respeito do conhecimento do professor foram os mais considerados para o desenvolvimento das pesquisas.

Alguns resultados e contribuições das pesquisas a respeito da Relação entre Álgebra e Geometria

Na subcategoria Dificuldade na aprendizagem de Álgebra, a investigação de Vidal (2008) mostrou que o professor estimulou o diálogo entre seus alunos na busca pelo resultado. Em relação aos resultados errados, incentiva os participantes a realizar a análise da resolução da equação para que pudessem compreender o erro. O autor concluiu que sua pesquisa contribuiu a respeito da importância do trabalho referente à análise de erros e da reflexão sobre a prática pedagógica.

Dentre as pesquisas que compõem a subcategoria Reflexões a respeito do ensino de Álgebra, Passos (2012) constatou que das quatro dimensões da Álgebra, duas se destacam no livro didático: a dimensão de Álgebra como equação, seguida da dimensão de Álgebra como estrutural.

Passos (2012) observou que diante dos relatos dos professores as atividades priorizadas para o 8º ano abordam conteúdos referentes à dimensão de Álgebra como estrutural. Os docentes também declararam que as atividades relacionadas com a dimensão de Álgebra como equação, geralmente envolvem conceitos geométricos, atendendo o ponto de vista de Duval a respeito dos registros de representações.

A pesquisadora concluiu que os professores participantes de sua investigação, reconhecem as características das dimensões de Álgebra, contudo priorizam apenas duas: dimensão de Álgebra como equações e dimensão de Álgebra como Estrutura.

Ao investigar os elementos constituintes do conhecimento matemático no contexto do trabalho com a Álgebra de professores do 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, Silva, M. C. (2015) observou que, o primeiro professor trabalha as expressões e equações algébricas considerando os diferentes significados das letras em diferentes situações didáticas, mas prioriza o trabalho com o desenvolvimento formal da Matemática. O segundo professor investigado também considerou os diferentes significados para as expressões e equações algébricas, mas sem prender-se às definições. O mesmo professor destacou o uso da modelagem e a resolução de problemas para contextualizar o trabalho com expressões algébricas. O autor concluiu que as concepções de Álgebra identificadas na prática dos professores podem ser influenciadas pelo livro didático adotado.

Na subcategoria Prática pedagógica do professor que ensina Álgebra, Oliveira (2014) ao realizar sua investigação com seis professores da educação básica a respeito dos conhecimentos algébricos mobilizados para o ensino de equação, constatou dois momentos. O primeiro refere-se à formação inicial e à formação continuada do professor que não associam os conhecimentos docentes ao ambiente escolar, ou seja, existe um distanciamento entre teoria e prática. O segundo momento mostra a insatisfação dos professores com a formação inicial e com o próprio ambiente de trabalho, o que se reflete no que pensam a respeito de Álgebra.

As dificuldades que os licenciandos e professores apresentam, não são diferentes para a álgebra, uma vez que muitos deles não reconhecem a estrutura de uma equação; associam as equações a procedimentos e métodos, isto é, eles têm visão limitada e com pouco significado do que representam as equações, assim, mobilizando insuficientemente as diferentes perspectivas para esse conteúdo matemático. (OLIVEIRA, 2014, p. 146)

Os resultados obtidos na pesquisa, sobre o conhecimento algébrico do professor em relação à equação, foram compilados em quadros dispostos na pesquisa de Oliveira (2014): conhecimento comum ao conteúdo; conhecimento especializado ao conteúdo; conhecimento do conteúdo e os estudantes; conhecimento do conteúdo e o ensino e conhecimento curricular.

Os principais resultados da pesquisa de Américo (2016) mostram que a prática de ensino de um dos professores relaciona-se com as ideias de Radford, no que se refere ao ensino de generalização de padrões por meio de aplicação de regras. Para esse docente, as atividades do Caderno do Aluno servem apenas como complemento, visto que ainda seguem orientações e exemplos de livros didáticos para ministrar suas aulas. Esta situação, de acordo com Américo (2016, p. 121), mostra a falta de compreensão dos pressupostos apresentados no Cadernos do Aluno, “além de uma prática da educação matemática diferente da preconizada pelos pesquisadores que apresentamos neste trabalho”.

Diferentemente, os outros dois professores declararam utilizar as atividades do Caderno do Aluno para estimular o processo investigativo e exploratório de situações algébricas, que conforme Radford, apresentam-se como professores que refletem sobre sua ação. A despeito das diferenças nas escolhas da prática pedagógica desses professores, Américo (2016) concluiu que todos oportunizaram a construção do pensamento algébrico por meio da generalização de padrões e regularidades.

Os resultados dispostos nestas pesquisas diferenciam-se conforme os objetivos de investigação. Percebemos que as concepções apontadas pelos investigadores depende de qual conteúdo algébrico estava sendo trabalhado com determinadas turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Concepção de Álgebra, Concepção de Educação e Pensamento algébrico

Para compor os dados do Quadro 15, consideramos as concepções de Álgebra e Educação Algébrica, assim como o pensamento algébrico, que trazem os professores investigados, sempre levando em conta o relato do pesquisador.

Vidal (2008) investiga a intervenção do professor frente aos erros dos alunos. Nas aulas foram observadas como o professor introduz o conceito de equação polinomial de 1º grau com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Durante as aulas, o pesquisador observou que o docente introduziu o conceito de equação por meio do uso de balanças, logo após aplicou listas de exercícios com correção ao final de cada aula. O professor introduziu as equações

fracionárias como desafios aos alunos, mas sempre priorizando técnicas de resolução.

Quadro 15 – Categoria Prática pedagógica em Álgebra: Concepções e Pensamento Algébrico

AUTOR	CONCEPÇÕES/PENSAMENTO ALGÉBRICO
VIDAL (2008)	Concepção - Linguístico-pragmática e Aritmética generalizada Pensamento - Internalismo e Álgebra como pensamento
PASSOS (2012)	Concepção – Estudo das estruturas Pensamento – Álgebra como ferramenta
FERREIRA, M. C. C. (2014)	Concepção – Aritmética generalizada Pensamento – Álgebra como pensamento
OLIVEIRA (2014)	Concepção – Estudo de procedimentos Pensamento – Álgebra como atividade
AMÉRICO (2016)	Concepção – Linguístico-pragmática Pensamento – Álgebra como linguagem

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Outro aspecto observado pelo autor diz respeito ao modo como alguns alunos passaram a compreender resolução de equações. Segundo o autor:

Em trinta minutos de discussão, a conclusão é que tanto faz, é apenas uma forma de fazer mais rápido. Alguns alunos ficaram fazendo assim: muda de lado, muda a operação, e compreendiam o porquê, exceto três alunos dos professores particulares. (VIDAL, 2008, p. 74)

As atitudes do professor mostram que ele prioriza a resolução de equações por meio de regras e técnicas, sem a preocupação de buscar outros caminhos para o ensino e aprendizagem desse tema, como por exemplo, relacioná-lo com a geometria.

Nesse contexto, podemos dizer que as concepções desse professor relaciona-se com a concepção de Educação Algébrica Linguístico-pragmática e a concepção de Álgebra Aritmética generalizada, conforme ideias de Usiskin (1995) que considera que nesta concepção o aluno ou professor prioriza a comparação entre a linguagem algébrica e a natural. O pensamento algébrico desenvolvido vai ao encontro do Internalismo e Álgebra como pensamento, visto que o professor provocou a discussão de conceitos algébrico.

Em sua pesquisa, Passos (2012) buscou compreender, por meio de entrevistas e comparações com a escolha do livros didático, quais as concepções de Álgebra estão inseridas nos professores do 8º ano do Ensino Fundamental. De

acordo com está autora “a maioria dos professores prioriza a dimensão estrutural da Álgebra” (IBID, 2012, p. 121), o que podemos relacionar com a concepção de Álgebra Estudo das estruturas, apesar de em determinados momentos não considerarem as conversões de registros.

De acordo com o relato da pesquisadora, entendemos que as atividades selecionadas pelos docentes podem desenvolver o pensamento algébrico Álgebra como ferramenta, pois considera que a álgebra é própria para resolução de problemas, sendo vista como uma ferramenta que pode tornar o pensamento mais eficiente.

Ferreira, M. C. (2014) realizou sua pesquisa com dois professores, dos 8º e 9º anos. Em seu relato mostra que, ao trabalhar com equação polinomial de 2º grau, as concepções de Álgebra do professor do 9º ano se evidencia, relacionado-se com às concepções estrutural e procedimental, sendo que este docente enfatiza a utilização de regras em suas aulas. A concepção de Álgebra do professor do 8º ano relaciona-se com Aritmética generalizada, visto que o professor interpreta a letra como um número, conforme as ideias de Chevallard (1984).

De acordo com o relato da pesquisadora, ambos os professores priorizam a utilização de regras para a resolução das atividades algébricas. Então podemos dizer, que o pensamento algébrico desenvolvido nas aulas destes professores indicam a Álgebra como pensamento.

Oliveira (2014) realizou uma investigação com seis professores de matemática, com foco no ensino de equações. Nos apoiamos nos resultados desta investigação para tentar compreender as concepções de Álgebra que esses professores mobilizam. Mediante entrevistas, o pesquisador mostrou que os docentes participantes de sua investigação compreendem e apresentam domínio para o ensino de equações, inserindo-se assim, na concepção Estudo de procedimentos, mesmo porque encontramos nesses resultados que o uso da balança para o ensino de resolução de equações é uma estratégia comum entre eles. Entendemos que esse tipo de ensino seja favorecido pelo pensamento algébrico Álgebra como atividade.

Com resultados opostos, Américo (2016) realizou sua pesquisa com professores de 8º ano do Ensino Fundamental a respeito do ensino de

generalização de padrões. A autora constatou que estes docentes, ao ensinar generalização de padrões, privilegiaram a aplicação de regras para a resolução das atividades. De acordo com a autora, embora tenham conhecimento matemático, os professores mostraram dificuldade com o ensino deste conteúdo. Apesar de entendermos que existem dificuldades, como as apontadas pela pesquisadora, acreditamos que a concepção de Álgebra que estes professores mobilizam diz respeito à concepção de Educação Algébrica Linguístico-pragmática, e o pensamento algébrico Álgebra como linguagem.

Para esta categoria retomamos diversas vezes as leituras e entendemos que o professor ao ensinar seus alunos, priorizam algumas situações que diz respeito a utilizar listas de exercícios para se chegar a um efetivo aprendizado. Também, mostram que priorizam técnicas e regras para o ensino de equações.

Algumas considerações

Os focos deste agrupamento de pesquisas são os conhecimentos, as estratégias e as concepções de Álgebra dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. As entrevistas com professores e alunos e as observações em sala de aula, foram pontos essenciais para que os investigadores coletassem os dados para compor suas análises e resultados.

No geral, pelos resultados mostrados nas pesquisas, observamos que o professor, independente de qual estudo faz parte, ainda preocupa-se muito com o uso do livro didático e com a aplicação de listas de exercícios. Também utiliza exemplos, colocados na lousa, como forma de estratégias para o ensino de Álgebra.

No caso das escolas paulistas, o professor usa o Caderno do Aluno como um complemento do livro didático, pois não acreditam que este atenda todas as necessidades de aprendizagem do aluno, o que diverge da Proposta Curricular para a educação de São Paulo. Este tema mereceu destaque na pesquisa de Oliveira (2014), pois, quando indagados se utilizavam a Proposta Curricular de São Paulo ou os PCN, a maioria dos professores entrevistados respondeu que não ou já utilizou em algum momento. Em outras pesquisas, o docente mostra ter pouco conhecimento sobre o currículo, também mostra não estar preocupado com isso.

Em todas as pesquisas, os professores apresentam conhecimento do conteúdo ensinado, em particular, destaca-se o ensino de equações polinomiais de 1º grau e a generalização de padrões. A observação das aulas expositivas revelou alguns pontos importantes a respeito da prática docente, entre eles, o favorecimento de técnicas e regras para resolução das atividades.

Outro aspecto discutido nestas pesquisas, refere-se às concepções de Álgebra que os professores manifestaram ter. Como já expressamos, essas concepções foram elencadas de acordo com a proposta de conteúdo que cada professor expôs em suas aulas. Acreditamos que os docentes apresentam outras concepções, já que os pesquisadores afirmaram que os professores mostram conhecimento de Álgebra, mas que não foram oportunos para estas investigações.

Concordamos com os pesquisadores quando ponderam a necessidade de mais atenção à formação inicial do professor, pois esta traz uma Matemática muito fragmentada, além da sugestão de que estes profissionais dediquem-se à formação continuada, que em muitos estados é oferecida por meio das Secretarias de Educação.

No próximo capítulo, apresentamos algumas conclusões e as considerações finais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo desta tese foi, a partir do estado da arte das pesquisas, investigar **o que revelam as pesquisas na área de Educação Matemática a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino médio no período entre 2008 e 2017.**

Para responder à nossa questão de pesquisa realizamos um levantamento de teses e dissertações produzidas nos programas de Pós-Graduação *strictu sensu* e que se encontram no Banco de Teses e Dissertações da CAPES e *sites* de Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática.

Após filtrar as pesquisas encontradas, a partir da palavra-chave *Álgebra*, realizamos uma leitura *flutuante* dos resumos das produções acadêmicas e selecionamos 42 produções, compostas de três teses e 39 dissertações, produzidas e publicadas em 20 universidades brasileiras, nas quais percebemos um maior destaque para: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SP, com oito produções; Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS, com cinco pesquisas; Universidade Estadual Paulista – UNESP e Universidade Estadual de Londrina – UEL, com quatro produções acadêmicas, cada uma delas; dentre outras.

Nossa pesquisa amparou-se em um estudo qualitativo, por isso acreditamos ser necessário algumas explicações. Após selecionarmos as produções que fizeram parte de nosso mapeamento, iniciamos uma leitura mais profunda dos textos, pois somente os resumos não forneceram informações suficientes para nossa análise.

Algumas destas investigações não deixaram claro qual metodologia seguiram, assim como os teóricos escolhidos. Em muitas delas encontramos dificuldades para compreender e identificar se houve ou não avanços na aprendizagem dos alunos. No que diz respeito ao professor, os autores mostraram-se tímidos ao relatar o que observaram, o que também nos causou dificuldades para análise. Por isso, não foram poucas as vezes que tivemos de fazer a leitura e releitura do mesmo texto, pois não conseguíamos encontrar as informações de forma explícita.

Em relação a outras informações relevantes a nosso estudo, temos as regiões e estados onde mais se concentraram as produções acadêmicas: Região Sudeste com 20 produções, tendo o estado de São Paulo com 16 publicações, Minas Gerais com três pesquisas e Rio de Janeiro contribuiu com um estudo; Região Centro-Oeste colaborou com sete pesquisas, o estado de Goiás com duas produções e Mato Grosso do Sul com cinco pesquisas; Região Sul participou com sete pesquisas, divididas entre os estados de Paraná com seis produções e Rio Grande do Sul com uma publicação; entre outras.

O nível de ensino mais privilegiado foi o Ensino Fundamental com um total de 22 produções, destacando-se o 9º ano com 13 estudos. As investigações com o Ensino Médio centralizaram-se em apenas nove pesquisas. Só quatro pesquisadores envolveram professores em suas investigações e cinco contemplaram o livro didático. Como podemos perceber foi dada ênfase aos estudos com o Ensino Fundamental e os trabalhos envolvendo professores que se mostraram em quantidades bem inferiores comparando a outros.

Os conteúdos algébricos mais investigados dizem respeito à resolução de funções e equações polinomiais de 1º e 2º graus, seguido de problemas que envolveram a generalização de padrões, expressões algébricas, evidenciando que ainda há temas de Álgebra que necessitam de atenção.

As análises envolveram sete categorias: Linguagem e Pensamento Algébrico com sete pesquisas, sendo uma tese e seis dissertações; Relação entre Aritmética/Álgebra/Geometria com três dissertações; Múltiplas representações com seis dissertações; Materiais/Recursos didáticos e tecnológicos com oito dissertações; Concepções e Conhecimentos com oito dissertações; Didática e Metodologia de Ensino com cinco pesquisas, sendo uma tese e quatro dissertações; Prática pedagógica em Álgebra com cinco pesquisas, sendo uma tese e quatro dissertações.

A metodologia predominante foi a pesquisa qualitativa, com algumas vertentes para a análise de conteúdo, pesquisa de campo e estudo de caso. Entre os referenciais teóricos, se destacam as pesquisas de: Fiorentini, Miorim e Miguel; Usiskin, Chevallard, Vergnaud e Duval.

Na categoria Linguagem e pensamento algébrico as produções de destacaram-se por investigarem a linguagem e o pensamento algébrico na resolução de problemas envolvendo funções e equações polinomiais de 1º grau, padrões e regularidades desenvolvidos por meio da aplicação de sequências didáticas, teste de sondagem e validação das atividades, por alunos e professores dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A importância destas pesquisas destaca-se nas ideias de Grugeon (2000) que declara que a linguagem algébrica permite a formulação de problemas, desempenhando um papel essencial para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Radford (2011) pondera ser necessário criar condições pedagógicas para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Na categoria Relação entre Álgebra/Aritmética/Geometria as investigações focaram a construção do conhecimento algébrico por meio de atividades que envolveram a Geometria, assim como a Aritmética. Em especial, estas atividades foram relacionadas ao conceito de função e equações polinomiais de 1º e 2º graus e fatoração, aplicadas por meio de sequências didáticas. Os pesquisadores buscaram a conversão de representações da linguagem algébrica para a linguagem geométrica. Duval (2012, p. 268) afirma as “que diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias”, pois assim, as representações algébricas podem ser convertidas em outras linguagens, como os gráficos, ou outra linguagem semiótica. Estas pesquisas tiveram referencial teórico fundamentado em teorias francesas, ou seja, nas teorias de Brousseau e Duval, com a Teoria das Situações Didática e Representação Semiótica, respectivamente.

Na categoria Múltiplas representações encontram-se pesquisas que discutiram os registros realizados pelos alunos, em meio às transformações algébricas e as que centraram suas preocupações nos registros algébricos apresentados nos livros didáticos. Romanatto (2004, p. 5) ressalta que “o livro didático, como qualquer outro recurso pedagógico, só será eficiente se estiver integrado no processo de aprendizagem”. Portanto, não basta os livros didáticos estarem de acordo com os documentos oficiais. A fundamentação teórica destas

pesquisas foi fundamentada nas ideias de Duval, Lins e Gimenez, Kieran e Usiskin, Cury e Chevallard.

A categoria Materiais/Recursos didáticos reuniu as pesquisas que concentraram as preocupações dos investigadores no ensino e na aprendizagem de Álgebra por meio de jogos lúdicos e recursos tecnológicos. As atividades abrangeram equações polinomiais de 1º e 2º graus, Teorema de Tales, fatoração de expressões algébricas, padrões e regularidades. O referencial teórico embasa-se nas teorias de Vergnaud, Duval e nas ideias de Lévy e Borba e Villarreal. Todos os pesquisadores concluíram afirmando que a utilização de jogos e recursos tecnológicos como os *softwares* GeoGebra e Aplusix e a lousa digital contribuíram para o ensino e a aprendizagem de Álgebra. Apesar destes pesquisadores defenderem o uso da tecnologia, Javaroni e Zampieri (2015) alertam a respeito da importância do trabalho com recursos tecnológicos, mas ressaltam a necessidade de constante atualização por parte dos professores, argumentando que ele deve sair de sua “zona de conforto”.

A categoria Concepções/Conhecimentos agrupa as pesquisas que apresentaram estudos relacionados às concepções de alunos e professores a respeito de equações de 1º grau, padrões e resolução de problemas, entre outros. No geral, o referencial teórico destas pesquisas abordou as ideias de Ursini e Trigueros, Usiskin, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, Lins e Gimenez e Duval. De forma geral, os pesquisadores concordam entre si, que os professores ensinam a Matemática de forma tradicionalista, o que reflete a ideia de Ponte (2017) que discorre que uma concepção usualmente associada à Matemática é de que esta tem de ser ensinada com domínio de rigor absoluto.

Na categoria Metodologia de Ensino, encontram-se as produções que investigaram o ensino e a aprendizagem de Álgebra por meio de sequências didáticas e resolução de problemas, envolvendo equações polinomiais de 1º e 2º graus, situações algébricas, aritméticas e geométricas. Os principais referenciais teóricos abrangeram as ideias de Vigotski, Fiorentini, Miorim, e Miguel, Lins e Gimenez, Usiskin e Ursini e Trigueros. Ainda que, os pesquisadores tenham percebido as dificuldades dos participantes na resolução de atividades aplicadas, os resultados comprovaram-se satisfatórios.

A categoria Prática pedagógica em Álgebra é composta por pesquisas que investigaram o professor, ou seja, a prática pedagógica, os saberes e estratégias dos professores frente às dificuldades para aprendizagem de Álgebra. Na maior parte das pesquisas, as observações concentram-se na prática de ensino do professor, entre elas, verificou-se como o docente desenvolve atividades a respeito da generalização de padrões que encontram-se no Caderno do Aluno. O referencial teórico destas pesquisas foi composto pelas ideias de Shulman, Debora Ball, Borralho, Isabel Vale e Luís Radford. Entre os resultados destas investigações, ficou evidente que a prática de ensino dos professores sofre influência dos livros didáticos. Outro resultado refere-se à insatisfação docente quanto à sua formação inicial e a seu ambiente de trabalho. Ball, Thames e Phelps (2008) salientam que, basta observar uma sala de aula por alguns minutos para perceber que a Matemática trabalhada pelos professores não é a mesma que aprendem em sua formação.

Apesar de a maioria das pesquisas agrupadas em cada categoria destacarem que os alunos apresentaram dificuldades na aprendizagem de Álgebra, observamos que algumas delas divergem desses resultados, pois as pesquisas agrupadas nas categorias Materiais/Recursos Didáticos e Tecnológicos apresentam resultados favoráveis à aprendizagem dos alunos. Acreditamos que essa divergência, em relação aos resultados de pesquisas de outras categorias, deve-se ao fato de apresentarem investigações com software ou jogos lúdicos que oferecem ao aluno a oportunidade de trabalhar em grupo por meio de cooperação e que instiga a curiosidade. Na categoria Prática pedagógica encontramos divergências entre os resultados apresentados pelos pesquisadores. Enquanto, Oliveira (2014) afirma que os docentes participantes de sua investigação compreendem e apresentam domínio para o ensino de equações, Américo (2016, p. 121) declara que os professores tiveram “dificuldade em resolver as atividades propostas, mesmo podendo utilizar-se de conhecimentos específicos de conceitos que ainda não são necessários nestas atividades”. Além disso, essa autora evidencia a fragilidade do conhecimento desses professores, não somente a respeito de conteúdos matemáticos, mas também em relação ao aspecto pedagógico.

Ao elaborar nosso referencial teórico, realizamos a leitura de diversos textos. Mas, encontramos dificuldades em determinar se as visões de Álgebra proposta por Lee (2001), eram concepções ou pensamentos. Amparamo-nos na pesquisa Silva, M. H. (2006) para decidirmos pelo entendimento dessas visões como pensamento algébrico.

Após as considerações de Lins e Gimenez, sobre Aritmética e Álgebra, faremos uma exposição dos estudos feitos por Lee (2001) a respeito das adequações das visões, para alunos do Ensino Fundamental, centradas em como ensinar a Álgebra para que os alunos construam um pensamento algébrico. (SILVA, M. H., 2006, p. 26).

Decidido isto, elaboramos quadros com a síntese de algumas concepções e pensamento algébrico para nos auxiliar na análise das pesquisas.

As concepções de Álgebra mais evidenciada foram o *Estudo de procedimentos*, que apareceu em 21 pesquisas, e o pensamento algébrico, diz respeito à Álgebra como atividade, com 25 pesquisas. Acreditamos que, seja devido aos conteúdos presentes nestas investigações, que privilegiam esta concepção e este pensamento. Mostrando que em mais da metade das pesquisas, temos a Álgebra sendo ensinada e aprendida de forma mecanizada, com ênfase para regras e técnicas de resolução.

Outro aspecto importante diz respeito aos professores, como ficou evidente em algumas pesquisas, por evitarem o trabalho com atividades algébricas mais elaboradas, favorecendo sempre atividades elementares, por acreditarem que os alunos sentem muita dificuldade com a Álgebra. Outro ponto importante diz respeito ao livro didático, professores não realizam trabalhos interdisciplinares e contextualizados e fundamentam-se apenas no livro. O Caderno do Aluno oferecido às escolas estaduais paulistas, é pouco trabalhado pelos docentes, visto por muitos como um complemento do livro didático, divergindo da proposta para o uso desse material.

Nestas pesquisas, observamos a pouca preocupação dos pesquisadores com o currículo, sobretudo no que diz respeito ao modo como a Álgebra é apresentada nos documentos oficiais. As poucas pesquisas, que, porventura, abordaram os PCN ou a Proposta Curricular mostraram que a preocupação dos

docentes com estes documentos era mínima. Nesse sentido, há necessidade de um estudo a respeito da Álgebra no currículo de Matemática, para que este não seja visto como um caderno de regras e orientações de qual conteúdo algébrico deva ser ensinado primeiramente. Chevallard (1984; 1989) manifesta preocupação com o currículo, pois entende que este funciona como um “quadro diretor”, que somente apresenta regras.

O currículo, estado do sistema de ensino em um momento dado, não é inteiramente definido pelos programas oficiais. Estes fixam um quadro diretor que se impõe como um sistema de regras explícitas no processo de transposição didática, mas que não saberia determiná-lo exatamente. (CHEVALLARD, 1989, p. 49)

Constatamos também a falta de abordagem a respeito do ensino e da aprendizagem de Álgebra por meio da modelagem, em especial, do processo de modelização, assim como apresentado por Chevallard (1989).

1ª etapa – definir o sistema que pretende explorar, escolhendo o problema que queremos estudar;

2ª etapa – construção do modelo, identificando, nomeando e estabelecendo relação entre as variáveis; e

3ª etapa – resolver o problema, trabalhando com o modelo construído, encontrar o valor desconhecido e interpretá-lo.

As investigações apresentadas neste estado da arte discorrem a respeito dos modelos algébricos de uma maneira simplória, como lei de formação de padrões e funções, entre outros.

Vimos a maioria das pesquisas mostrarem as dificuldades dos alunos para aprenderem conteúdos algébricos e algumas as dificuldades do professor em ensinar tais conteúdos, no entanto, não encontramos pesquisas que tratem do que é ensinado como sendo Álgebra. O que está posto, tanto em livros didáticos, quanto em documentos oficiais, privilegia o cálculo algébrico a partir de suas regras operatórias e grande parte das pesquisas focam em diversas estratégias para a aprendizagem dessas regras. De acordo com Chevallard (1984, 1989, 1990) o raciocínio funcional e a construção de modelos matemáticos para classes de problemas intra ou extra matemáticos, por exemplo, talvez pudessem proporcionar

aos alunos a construção de conhecimentos efetivamente algébricos. Mas, tais temas ainda não são pesquisados pelo que vimos.

Retomando nossa questão de pesquisa: **O que revelam as pesquisas na área de Educação Matemática a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino médio no período entre 2008 e 2017**, podemos considerar que não houve mudanças nas escolhas dos temas de Álgebra que foram cerne de investigação nesse período, ou seja, no Ensino Médio o estudo alvo eram sistemas de equações, funções e equações polinomiais de 1º e 2º graus e no Ensino Fundamental, equações polinomiais de 1º e 2º graus, padrões e generalizações. Estes conteúdos inseridos em sequências de atividades ou problemas, em sua maioria, foram resolvidos mediante técnicas e regras ou por meio de representação ou generalização. Tal situação nos conduz a relevar a necessidade de novas investigações, que envolvam outros conceitos algébricos. As investigações relacionadas ao Ensino Médio foram minoria e mostraram que, grande parte dos alunos ainda apresenta concepções de Álgebra e pensamento algébrico, condizentes a alunos que estão nos anos finais do Ensino Fundamental.

Outro aspecto observado, diz respeito às dificuldades encontradas pelos estudantes ao depararem-se com variáveis, seguidos da interpretação de problemas e diferentes representações. Além do mais, as pesquisas mostraram as dificuldades dos alunos com o manuseio do computador e, conseqüentemente, do *software* utilizado. Uma das investigações relatou o número insuficiente de computadores e os problemas encontrados para ligar as máquinas. Ressaltamos que os *softwares* mais utilizados nas investigações foram os *softwares* Aplusix e o GeoGebra.

Apesar disso, o uso de tecnologia apresentou importantes resultados, quando permitiu que o aluno percebesse seus erros. Outros recursos, como jogos lúdicos e a lousa digital também se mostraram favoráveis à aprendizagem. Mas, nos questionamos até que ponto, pois em relação à lousa digital, sabemos que a disposição desse recurso nas escolas públicas é limitada. Entendemos que outros recursos poderiam ser utilizados, como o uso de vídeos e a internet, tendo o professor como mediador das situações de ensino e de aprendizagem.

Em relação ao professor, ressaltamos a fala de um dos docentes entrevistados, a respeito da articulação entre a formação inicial e a prática em sala de aula, assim como a insatisfação com a própria formação. Nestas pesquisas, pouco se falou da formação dos professores, a não ser por um dos estudos que relatou que um número limitado de docentes se interessa pela formação continuada. Entendemos que apesar de as Secretarias de Educação oferecerem cursos, é necessário também incentivo por parte da direção e coordenação das escolas, além de garantir a qualidade desses cursos.

No decorrer da leitura identificamos que alguns estudos fazem-se necessários, sobretudo no que diz respeito aos conteúdos algébricos de Ensino Médio e do Ensino Fundamental. Em relação ao professor, seria importante investigar o conhecimento que eles apresentam, em especial, os conteúdos do Ensino Médio.

As análises fizeram-nos refletir a prática docente em relação ao ensino e à aprendizagem de Álgebra e a necessidade de apresentar estratégias que auxiliem o aprendizado dos alunos. Neste cenário, além de investigações com os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, incluímos também os anos iniciais do Ensino Fundamental, já que houve pesquisas que alertaram a respeito da preocupação de como os alunos são preparados para a aprendizagem de Álgebra no início da escolarização. É importante ressaltar, que apesar da ampla quantidade de pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem de Álgebra, ainda há muito o que pesquisar, como já afirmamos.

Finalizamos nossa tese de modo simples e despretensioso com o objetivo de contribuir com a área de Educação Matemática e assim, auxiliar futuros pesquisadores na escolha de temas algébricos que ainda necessitam de estudo.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. R. D. **Problemas Propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita**: um estudo exploratório nos livros didáticos de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental. Recife: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2011. 115 p.
- ALVARENGA, K. B. **O que dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de inequações**. São Paulo: Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2013. 275 p.
- ALVARENGA, R. C. M. **Um estudo sobre os componentes da criatividade na solução de problemas matemáticos**. Bauru: Tese (Doutorado em Educação para Ciências), Universidade Estadual Paulista, 2017. 141 p.
- AMÉRICO, L. R. **Estudo sobre os conhecimentos dos professores de Matemática na Construção do processo de generalização**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016. 132 p.
- ARTIGUE, M. et al. **Taching and learning Algebra: approaching complexity through complementary perspectives**. Paris: DIDIREM, 2000.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.
- BAQUEIRO, G. D. S. **Achados sobre a generalização de padrões ao "garimpar" pesquisas brasileiras de Educação Matemática (2003-2013)**. São Paulo: Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016. 229 p.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luíz Antero Reto e Augusto Pinheiro. 3ª reimp. da 1ª. ed. São Paulo: LDA/Almedina Brasil, 2016.
- BECHER, E. L. **Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do Ensino Médio**. Canoas: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, 2009. 108 p.
- BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.
- BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Zaragoza: memoria realizada para la obtención del título de doctor, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 2002. 1-262 p.
- BOLEA, P.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Why is modelling not included in the teaching of. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, n. 14, p. 125-133, 2004.
- BORBA, M. C. **SOFTWARES e internet na sala de aula de Matemática**. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador: [s.n.]. 2010. p. 1-11.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.** Brasília:MEC: [s.n.], 2000.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, MINISTÉRIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular.** 3ª. ed. Brasília: [s.n.], 2017.

CAMPOS, M. A. **Construindo significados para o X do problema.** Ilhéus: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual de Santa Cruz, 2015. 168 p.

CARDOSO, V. C. **Linguagem algébrica:** Uma proposta de ensino com o uso de jogos digitais. Maringá: Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática), 2010. 428 p.

CARMO, P. F. **Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros disânicos de Matemática do Ensino Fundamental.** São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014. 107 p.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. **Petit x**, n. 5, p. 51-94, 1984.

_____. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Deuxième partie. **Petit x**, n. 19, p. 43-72, 1989.

_____. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. **Petit X**, Marseille, p. 5-38, 1990.

COSTA, W. R. **Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau.** Recife: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2010. 106 p.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto / John W. tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. 248 p.

_____. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:** escolhendo entre cinco abordagens. Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. 3ª. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

CRUZ, P. D. S. F. D. **pensamento algébrico e os significados do sinal de igualdade:** O uso da oralidade e da narrativa nas aulas de Matemática. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade de São Paulo, 2016. 122 p.

DÉCHEN, T. **Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do ensino fundamental:** indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. São Carlos: Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, 2008. 126 p.

- DEROSSI, B. **Objetos de aprendizagem e lousa digital no trabalho com Álgebra**: As estratégias dos alunos na utilização desses recursos. Curitiba: Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática), Universidade Federal do Paraná, 2015. 139 p.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.
- FERNANDES, F. L. P. **Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas**. Campinas: Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, 2011. 140 p.
- FERREIRA, M. C. C. **Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica**: A Álgebra na escola e na formação do professor. Belo Horizonte: Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, 2014. 184 p.
- FERREIRA, M. L. **Álgebra**: Como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos. Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009. 162 p.
- FERREIRA, N. S. D. A. As Pesquisas denominadas "Estado da Arte". **Educação & Sociedade**, Campinas, v. XXIII, n. 79, agosto 2002.
- FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática**: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Campinas: Tese (Doutorado em Educação), Universidade de Campinas, 1994.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores associados (Coleção formação de professores), 2012.
- FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar. a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-90, março 1993.
- FIORENTINI, D.; PASSOS, C. L. B.; LIMA, R. C. R. **Mapeamento das Pesquisas acadêmica Brasileira sobre o Professor que Ensina Matemática**: Período de 2001-2012. Campinas: FE/UNICAMP, 2016.
- GASCÓN, J. Un nouveau modele de l'algebre elementaire. **Petit X**, n. 37, p. 43-63, 1994.
- _____. A natureza prealgébrica da matemática escolar. **Educação Matemática**, v. 11, n. 1, p. 77-88, 1999.
- GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- GONÇALVES, A. **Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de Álgebra baseadas no Saesp de 2008 a 2011**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014. 178 p.

- GRUGEON, B. Une structure D'Analyse multidimensionnelle en algebre elementaire: conception, exploitation et perspectives. **DIDIREM**, Paris, 2000.
- GUADAGNINI, M. R. **O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Mato Grosso do Sul, 2013. 151 p.
- GUIMARÃES, J. F. **As concepções da Álgebra articuladas aos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2013. 95 p.
- HESSEL, L. D. A. **Um Estado do Conhecimento de Dissertações e Teses Brasileiras Sobre Equações: O Uso das Tecnologias no Ensino Médio (1998-2008)**. São Paulo: Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, 2010.
- JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. O Uso das TIC nas Práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o projeto Mapeamento e seus desdobramentos. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 998-1022, 2015.
- KIERAN, C. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. **The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study**. Melbourne: Springer, v. 8, 2004a. p. 21-34.
- KIERAN, C. Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? **The Mathematics Educator**, Québec, v. 8, n. 1, p. 139-151, 2004b. Disponível em: <<https://gpc-maths.org/data/documents/kieran2004.pdf>>. Acesso em: 22 mar. 2017.
- KRAHE, E. D. **As reformas na estrutura curricular de licenciaturas na década de 90: Um estudo de caso comparativo: UFRGS (Brasil) – UMCE (Chile)**. Porto Alegre: Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000. 221 p.
- KUMAR, R. **Research Methodology: A Step-by-Step Guide for Beginners**. Austrália: SAGE Publications LTd, 2005.
- LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: Manual de metodologia da pesquisa em Ciências Humanas**. Tradução de Heloisa Monteiro e Francisco Settineri. Belo Horizonte: UFMG, 1999. 342 p.
- LEE, L. **Early Algebra - but Which Algebra?** Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction-The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Melbourne: Department of Science and Mathematics Education. 2001. p. 392-399.
- LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 7ª. ed. Campinas: Ed. Papyrus, 1997. 176 p.
- LUCAS, A. B. **Equações e Funções: Descontinuidades Conceituais**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. 130 p.
- MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

- MASETTI, C. **análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016. 165 p.
- MIRANDA, T. P. **A noção de variável de alunos do ensino fundamental**. Belém: Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, 2014. 160 p.
- MODTKOSKI, H. M. **Conceito matemático x algoritmo: construção do conhecimento ou simples mecanização?** Curitiba: Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Paraná, 2016. 160 p.
- MORAES, F. R. **Um estudo sobre erros na resolução de equações do 1º grau com o software Aplusix**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2013. 108 p.
- MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na escola básica**. Minas Gerais: Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.
- NADIR, R. A pesquisa em ensino de Ciências e Matemática no Brasil. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 21, n. 2, p. I-V, jun. 2015. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132015000200001&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 12 nov. 2017.
- NEVES, J. D. **O ensino e a aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental: A formação do conceito de função**. Uberaba: dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Uberaba, 2015. 238 p.
- NUNES, C. E. **Resolução de equações lineares e quadráticas como auxílio de material concreto**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016. 194 p.
- OLIVEIRA, F. A. P. V. S. **Analisando a mobilização de conhecimentos algébricos de professores de educação básica: o momento de preparação de aulas sobre equações**. Santo André: Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática), 2014. 161 p.
- PASSOS, D. S. **A Educação Algébrica no 8º ano do Ensino Fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis/SE: Entendimento dos professores de Matemática**. São Cristovão: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Universidade Federal de Sergipe, 2012. 184 p.
- POLLA, G. B. **As pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental: Panorama de 10 anos de pesquisa brasileira pós PCN**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS, 2010.
- PONTE, J. P. **Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992. 185-239 p. Disponível em: <<http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2985>>. Acesso em: 27 ag. 2017.
- PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: [s.n.], 2009. Disponível em:

<[www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_\(Set2009\).pdf](http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf)>. Acesso em: 11 ago. 2015.

PUTI, T. D. C. **A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais**. Rio Claro: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, 2011. 245 p.

QUEIROZ, P. C. **Uma proposta para o ensino de função articulando as linguagens algébrica e geométrica**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2014. 158 p.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: S. ALATORRE, J. C. M. S. & A. M. **Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. [S.l.]: [s.n.], v. 1, 2006. p. 1-21.

RADFORD, L. Algebraic thinking from a cultural semiotic. **Research in Mathematics Education**, Reino Unido, v. 12, n. 1, p. 1-19, fevereiro 2010.

_____. Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. In: CAI, J.; KNUTH, E. **Early Algebraization, Advances in Mathematics Education**. Ontario: Springer, 2011. p. 303-322.

REIS, E. D. S. **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2010. 135 p.

REZENDE, S. R. A. **Ensino desenvolvimental e investigação Matemática com o GeoGebra: Uma intervenção pedagógica sobre o Teorema de Tales**. Goiânia: Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica de Goiás, 2016. 188 p.

ROMANATTO, M. C. **O Livro Didático: alcances e limites**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática. [S.l.]: [s.n.]. 2004.

SALGUEIRO, N. C. G. **Como estudantes do Ensino Médio lidam com registros de representação semiótica de funções**. Londrina: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2011. 134 p.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F.; LUCIO, M. P. B. **Metodologia de pesquisa**. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. 5ª. ed. Porto Alegre: Penso, 2013.

SANTOS, D. M. F. **Ensino de equação do 1º grau: concepções de professores de Matemática e formação docente**. Presidente Prudente: Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual Paulista, 2009. 177 p.

SANTOS, G. L. **Como professores e alunos do Ensino Médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita**. Londrina: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, 2010. 137 p.

SANTOS, R. M. **Estado da Arte e história da pesquisa em Educação Estatística em Programas brasileiros de Pós-Graduação**. Campinas: Tese (Doutor em Educação), Universidade Estadual de Campinas, 2015.

SÃO PAULO. **Relatório Pedagógico. SARESP**. São Paulo: SEE, 2015.

SILVA, E. P. **Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino**. Londrina: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual de Londrina, 2013. 147 p.

SILVA JUNIOR, L. M. **O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da Teoria das Situações Didáticas**. Campina Grande: Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, 2016. 174 p.

SILVA, M. G. **Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental**. Uberaba: Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Uberaba, 2015. 284 p.

SILVA, R. M. **Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental**. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Educação matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2009. 141 p.

SILVA, M. H. D. **Estudos das visões sobre Álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de Matemática do Ensino Fundamental em relação a números e operações**. São paulo: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

SOUZA, E. R. **Análise de estratégias de alunos do Ensino Médio em problemas de cálculo de área de paralelogramo**. Recife: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Pernambuco, 2013. 109 p.

SOUZA, N. F. **Contextualização do ensino de Álgebra: Análise de livros didáticos do 7º ano**. Campo Grande: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2014. 107 p.

TREVISANI, F. D. M. **Estratégias de generalização de padrões matemáticos**. Rio Claro: Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, 2012. 113 p.

USISKIN, Z. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. S.; SHULTE, A. P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

VALENTIM, M. A. **Pensamento narrativo na aprendizagem matemática: estudos com alunos do Ensino Fundamental na resolução de atividade de Álgebra**. São Paulo: Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015. 238 p.

VIDAL, S. J. R. B. **Exploração didática de erro no ensino de equação do 1º grau**. Fortaleza: Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual do Ceará, 2008. 138 p.

VIEIRA, L. B. **Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino e aprendizagem da Álgebra**. Goiânia: Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), Universidade Federal de Goiás, 2011. 125 p.

ANEXO A – RESUMO DAS TESES E DISSERTAÇÕES

ALMEIDA, J. R. *Problemas Propostos para o Ensino de Equações Polinomiais do 1º Grau com uma Incógnita: Um Estudo Exploratório nos Livros Didáticos de Matemática do 7º Ano do Ensino Fundamental*. 2011, 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Essa pesquisa buscou investigar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais de 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de matemática do 7º ano no Brasil. Nesse sentido, nossa análise foi realizada nos livros didáticos de matemática do 7º ano das dez coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2011. A análise foi realizada em dois momentos. No primeiro momento classificamos os problemas encontrados nos capítulos que têm como objeto de ensino as equações polinomiais de 1º grau com uma incógnita, tendo como categorias iniciais as criadas por Marchand e Bednarz (1999) em sua pesquisa realizada nos livros didáticos canadenses. No segundo momento, tivemos como foco os problemas de partilha (PP), que são os problemas que têm um valor total conhecido que é repartido em partes desiguais e desconhecidas. Os PP foram classificados de acordo com o número, a natureza e o encadeamento das relações. A análise foi realizada, inicialmente, em cada livro com o propósito de traçar um perfil desses livros. Em seguida, fizemos uma análise comparativa entre os dez livros didáticos. Como resultado, destacamos que os livros didáticos têm uma forte tendência em abordar “falsos problemas”, que são problemas que não favorecem a passagem da aritmética à álgebra. Também foram encontrados, em 90% dos livros analisados, problemas de estrutura aritmética, que são problemas que não justificam o uso de equações na sua solução. Em relação aos problemas de estrutura algébrica, todos os livros abordam os problemas de partilha, tendo preferência para os com encadeamento tipo fonte e com apenas uma relação, que são os considerados mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes. Encontramos poucos problemas de transformação e não identificamos nenhum problema de taxa. Portanto, acreditamos que os problemas propostos nos livros didáticos de matemática do 7º ano para o ensino de equações polinomiais de 1º grau com uma incógnita nem sempre estão relacionados com esse saber matemático, assim como nem sempre favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico e a passagem da aritmética à álgebra.

ALVARENGA, R. C. M. *Um Estudo Sobre os Componentes da Criatividade na Solução de Problemas Matemáticos*. 2017, 141 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

O objetivo desta pesquisa foi investigar o desempenho e as dificuldades de alunos do Ensino Médio na solução de problemas que envolvem componentes da criatividade. Desta forma, pretendeu-se analisar: Qual o discurso presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), quanto à criatividade? Qual o desempenho dos alunos na solução de problemas aritméticos, algébricos e geométricos que avaliam os componentes da criatividade? Qual o desempenho dos alunos do 2º ano do Ensino Médio na solução de problemas, envolvendo os componentes da criatividade? A perspectiva metodológica para abordagem das questões deste estudo é de análise do discurso e de pesquisa qualitativa. Os participantes da pesquisa são 28 alunos de um segundo ano do Ensino Médio diurno de uma escola pública do estado de São Paulo, situada na cidade de Garça. Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: Questionário de Brito (1996), e os testes matemáticos das séries de Krutetskii (1976): o teste matemático da série VI, o teste algébrico da série XIII, o teste aritmético da série XIII e o teste geométrico da série

XIII. Os resultados do estudo apontaram, no que diz respeito aos testes aplicados: Teste matemático série VI (contendo 6 questões): 35,7% não acertaram nenhuma das 6 questões, 7,1% acertaram 1 questão, 35,7% acertaram 3 questões e 21,4% acertaram 4 questões; Algébrico série XIII (contendo 5 questões): 28,6% não acertaram nenhuma das cinco questões; 32,1% obtiveram 3 acertos; 39,3% obtiveram 4 acertos; Geométrico série XIII (contendo 5 questões): 0% de acertos; Aritmético série XIII (contendo 4 questões): 64,3% não acertaram nenhuma das cinco questões; 21,4% obtiveram 1 acertos; 14,3% obtiveram 2 acertos. Os resultados revelam que os sujeitos tiveram grandes dificuldades em solucionar os problemas propostos, em todos os testes, mostrando um nível baixo de desenvolvimento das habilidades matemáticas. Em geral, não foram encontradas soluções diferentes e criativas para os problemas. Todos os resultados encontrados puderam trazer uma compreensão da complexidade de variáveis que interferem no rendimento em Matemática. A análise do discurso mostrou que embora os PCNEM enfatizem o desenvolvimento da criatividade, eles não dão subsídios em seu discurso textual, de conceitualização da mesma e nem como desenvolvê-la, o tratamento dado à criatividade, pelos PCNEM, é muito superficial, não evidenciando ao professor a sua real importância no processo de aprendizagem e ensino da Matemática escolar.

AMÉRICO, L. R. *Estudo sobre os conhecimentos dos professores de matemática na construção do processo de generalização*. 2016, 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Ao pesquisar sobre a construção do processo de generalização de padrões e regularidades, foram encontrados muitos autores que consideram este estudo essencial ao desenvolvimento da aprendizagem matemática por apresentarem situações de exploração, experimentação e investigação como forma de estimular o desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica. Tal reconhecimento denota à ação docente importante papel por meio da investigação, da observação e experimentação oportunizada durante as aulas. Desta forma, esta pesquisa busca investigar o conhecimento que os professores de matemática apresentam sobre o estudo de generalizações de padrões e regularidades. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo, baseada em entrevistas gravadas em áudio e protocolos de resolução de Atividades, que nos permitiram analisar quais conhecimentos pedagógicos e sobre o ensino da matemática, os professores da rede pública estadual de São Paulo, manifestam ao resolverem atividades sobre padrões e regularidades, contidas no material curricular utilizado nestas escolas. Para cada entrevistado realizamos um processo de investigação descrevendo trechos das resoluções, em seguida, com base nos referenciais teóricos desta pesquisa, categorizamos os conhecimentos apresentados em conhecimentos do conteúdo matemático e conhecimentos pedagógicos. Os resultados obtidos após a análise dos cinco entrevistados nos permitiram observar que os professores não apresentam dificuldades na resolução das atividades, porém percebemos fragilidades no conhecimento sobre a importância e possibilidades que estas atividades podem oferecer na construção do conhecimento matemático. Esta reflexão corroborou com a análise dos conhecimentos pedagógicos que consideramos sobre o conhecimento do conteúdo e do ensino da Álgebra. Estas análises nos permitiram refletir sobre como os professores participantes desta investigação entendem os materiais curriculares disponibilizados, a compreensão que possuem sobre o percurso escolhido pelos idealizadores deste currículo para a construção do conhecimento matemático e quais as possibilidades de conexões com conceitos matemáticos poderiam ser oportunizadas em cada Situação de Aprendizagem. Durante a realização das entrevistas pudemos perceber o interesse apresentado pelos professores em aproveitar o momento e conversar sobre suas apreensões a respeito das Atividades e sobre o que observam da aprendizagem de seus alunos, assim como a preocupação com

a utilização de materiais manipuláveis e da linguagem materna para melhor aproximação entre o saber que o aluno traz como aprendizado e o objetivo que se deseja atingir com as atividades propostas. Os resultados encontrados confirmam a fragilidade que os docentes apresentam nestas áreas do conhecimento e o desejo de formações continuadas que permitam a ampliação do saber docente.

BECHER, E. L. *Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1 Ano do Ensino Médio*. 2009, 108 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas.

O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial para que o estudante seja capaz de compreender, representar e operar algebricamente com a finalidade de fazer representações, generalizações e resolução de problemas. Buscando compreender como esse processo de desenvolvimento ocorre, esse trabalho buscou mapear, com estudantes de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Osório - RS, as competências e habilidades algébricas desenvolvidos durante o Ensino Fundamental com os conteúdos comumente estudados naquelas séries, através de uma investigação qualitativa segundo uma abordagem de estudo de caso. Ao mesmo tempo também se procurou identificar as dificuldades e as concepções errôneas dos estudantes participantes do experimento. Para a realização dessa investigação, partiu-se de uma pesquisa sobre as principais competências e habilidades algébricas requeridas em testes de avaliação e sobre os conteúdos propostos nos livros didáticos para a aprendizagem da Álgebra e o desenvolvimento das referidas competências e habilidades. A seguir, procedeu-se a estruturação de um banco de questões que permitisse o mapeamento das competências, habilidades e conhecimentos dos estudantes, fazendo-se uso do *software* SCOMAX, com o intuito de realizar um mapeamento mais preciso através do uso de testes adaptativos informatizados, baseados na teoria de resposta ao item (TRI). Ao final do processo, foi possível verificar que os estudantes investigados apresentavam as habilidades relacionadas com a manipulação mais desenvolvidas que as habilidades relacionadas com generalização e resolução de problemas, além disso os resultados obtidos pelos estudantes mostraram-se melhores quando as questões utilizavam uma linguagem próxima daquela que eles conheciam dos livros didáticos. A investigação também foi capaz de identificar os erros mais frequentes cometidos pelos estudantes, o que oportunizou constatar que os estudantes participantes do experimento têm muitos de seus procedimentos algébricos baseados na aprendizagem anterior da Aritmética. Por fim, os dados obtidos permitiram que se obtivesse um mapa das habilidades algébricas desenvolvidas pelos estudantes participantes do experimento.

CAMPOS, M. A. *Construindo Significados para o X do Problema*. 2015, 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Santa Cruz, Ilhéus.

Este estudo teve como objetivo investigar o possível efeito que uma intervenção de ensino, pautada numa atividade lúdica intencionalmente criada para esse fim e com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, pode exercer sobre a compreensão dos conteúdos de álgebra e de sua linguagem por alunos do 7º. ano do Ensino Fundamental. Especificamente pretendemos investigar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e sua significação. Subsidiamo-lo pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2004, 2009, 2011), pelo lúdico na visão de Piaget (1978) e pelas concepções de Álgebra dos pesquisadores da Educação Matemática. A metodologia compreendeu um estudo quase-experimental, com a participação de dois Grupos: Experimental (GE) e de Controle (GC), realizado com duas turmas de 7º.ano de

uma Escola da Rede Pública na cidade de Vitória da Conquista-Bahia. Os dois grupos responderam a três instrumentos diagnósticos: pré-intermediário e pós testes. Intercalados a estes testes o GE participou de uma atividade que criamos, o CODERRÉ, focando conceitos algébricos em situações problemas em linguagem natural e em linguagem algébrica, enquanto que o GC continuou com as aulas rotineiras com o professor da classe e com os mesmos conteúdos, o que nos forneceu dados para a análise com um estudo comparativo entre os grupos. Os principais resultados apontam que o GE e o GC partiram de patamares baixos e próximos no pré-teste, chegando o GE ao pós-teste com uma diferença de 8,7% em relação ao desempenho do GC, não deixando dúvidas sobre a eficiência da nossa intervenção. Os resultados apontam ainda que a intervenção foi importante na formação do pensamento algébrico, com algumas dificuldades nas conversões. O estudo conclui que a principal contribuição do CODERRÉ para a aprendizagem da álgebra pelos alunos foi a apropriação da linguagem algébrica, percebida com o maior êxito dos alunos nas etapas de decodificação dos problemas propostos.

CARDOSO, V. C. *Linguagem Algébrica: Uma Proposta de Ensino com Uso de Jogos Digitais*. 2010, 428 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Este trabalho é o resultado de uma pesquisa com abordagens qualitativa e quantitativa, realizado com 28 alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, em uma escola particular da cidade de Maringá-PR, nos anos de 2008 e 2009. Nosso objetivo foi investigar algumas potencialidades dos jogos digitais para a aprendizagem da fatoração neste nível de ensino. Com base na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, analisamos os dados coletados, comparamos duas situações: como o aluno aprende o conceito de fatoração pela metodologia tradicional e como este aprendizado ocorre pela metodologia dos jogos digitais. Pautamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para identificação de teoremas em ação e possíveis esquemas utilizados, no desenvolvimento deste conceito, e apresentados pelos estudantes nas duas metodologias: aula expositiva (tradicional) e com jogos digitais. Antes e depois da aplicação da sequência didática, aplicamos testes para verificar o aparecimento e a repetição de teoremas em ação que fossem estáveis, permitindo assim, a análise dos efeitos da utilização destas metodologias e da sedimentação desses teoremas e conceitos em ação. Para Vergnaud (1990), um dos caminhos para se entender como se dá a aprendizagem de algum conceito é o estudo dos teoremas em ação utilizados em diferentes situações-problema. Os resultados preliminares encontrados mostraram que os alunos que participaram da sequência didática, utilizando os jogos digitais, tiveram rendimento igual ou superior nos testes realizados, quando comparados com aqueles que participaram do estudo utilizando a metodologia tradicional de ensino. Este estudo sinaliza para pesquisas futuras que possam esclarecer a relação entre a aprendizagem de álgebra e a utilização de jogos digitais, já que de acordo com os resultados preliminares encontrados em nossa investigação, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem da fatoração podem ser superadas pelo uso de jogos digitais integrados às situações de sala de aula.

CARMO, P. F. *Um Estudo a Respeito da Generalização de Padrões nos Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental*. 2014, 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

O estudo da álgebra é de extrema importância na educação básica, pois amplia a capacidade de nossos alunos na resolução de problemas matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. Diversas pesquisas (PONTE 2005; SESSA, 2005; BRANCO, 2008;

VALE *et al.*, 2008) vêm mostrando que alunos da educação básica apresentam inúmeras dificuldades ao utilizarem a linguagem algébrica para expressar suas ideias e resolver problemas. O objetivo desta pesquisa foi analisar se os livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental II escolhidos no PNLD/2011, introduzem a linguagem algébrica por meio de atividades de generalização de padrões e como isso ocorre. Como referencial teórico, foram usadas as ideias de Fiorentini; Miorin; Miguel (1993); Fiorentini; Fernandes; Cristóvão (2005); Sessa (2005) e Ursini *et al.* (2005). A metodologia de pesquisa utilizada foi a Análise de Conteúdo desenvolvida por Bardin (2011); para a análise das atividades de generalização de padrões selecionadas nos livros didáticos, foram utilizadas as categorias para o desenvolvimento do pensamento algébrico adaptadas por Hamazaki (2010). Como resultado de pesquisa, verificou-se que, das quatro coleções de livros didáticos analisadas, três utilizam atividades de generalização de padrões para introduzir a linguagem algébrica e, destas três, só uma emprega os quatro tipos de atividades de generalização de padrões que categorizamos. Destas atividades predominaram as de padrões figurais em uma única coleção, mostrando que este tipo de atividade está sendo pouco utilizada para introdução da linguagem algébrica, embora várias pesquisas e documentos oficiais mostrem o potencial desse tipo de atividade para a iniciação do estudo da álgebra.

COSTA, W. R. *Investigando a Conversão da Escrita Natural para Registros em Escrita Algébrica em Problemas Envolvendo Equações de Primeiro Grau*. 2010, 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

O presente trabalho se propõe a investigar em que medida os fatores de não congruência influenciam na conversão da escrita natural para a escrita algébrica nos problemas envolvendo equações do primeiro grau. No intuito de alcançar esse objetivo, adotamos como pressuposto teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Segundo essa teoria, a Matemática se caracteriza pela diversidade de representações para um mesmo objeto. Um objeto pode ser representado na escrita algébrica, na forma gráfica, numérica, entre outras, de modo que a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação é uma condição essencial para a aprendizagem em Matemática. De acordo com essa teoria, o que pode dificultar o reconhecimento de um objeto em diversas representações são os fatores de não congruência. São eles: correspondência semântica das unidades de significado, univocidade semântica terminal e conservação da ordem das unidades de significado. Nossa metodologia consistiu na elaboração e aplicação de oito problemas numa turma de oitavo ano (7ª série). Cada um dos problemas possuía variações diferentes nos fatores de não congruência de modo que fosse possível investigar a influência desses fatores na conversão. Um dos resultados encontrados nas análises se deu na dificuldade de os sujeitos converterem as equações da escrita natural para a algébrica quando os três fatores estão presentes na questão. Além disso, obtivemos como dado da pesquisa qual foi a influência mais comum que cada fator causou nos problemas. Concluímos, ressaltando que as influências dos fatores de não congruência nos problemas de equação do primeiro grau interferem na taxa de sucesso da conversão.

DÉCHEN, T. *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do ensino fundamental: indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos*. 2008, 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.

A presente pesquisa, de caráter qualitativo, teve origem com a prática docente da pesquisadora, nos desafios encontrados no ensino de álgebra e nos estudos realizados a

respeito das investigações matemáticas como uma metodologia potencialmente motivadora e de resultados positivos em relação ao desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Com o objetivo principal de identificar indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos de alunos que estão iniciando a aprendizagem nesse tema, foram observadas a dinâmica e as comunicações que ocorreram no desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas em duas turmas de 6ª série do Ensino Fundamental em uma escola particular da cidade de Americana - SP. A pesquisa foi feita em parceria com uma professora que, além de possuir experiência docente, já havia pesquisado e trabalhado com atividades exploratório-investigativas. Pesquisadora e professora parceira construíram as tarefas desenvolvidas durante a investigação com a colaboração dos participantes do Grupo Colaborativo de Estudos em Educação Matemática (GCEEM), do qual ambas fazem parte. Diante dos dados da pesquisa, um segundo objetivo foi estabelecido: identificar algumas potencialidades e limites da utilização de tarefas exploratório-investigativas no atual contexto educacional. Com o foco na dinâmica da aula, na comunicação proporcionada por tarefas exploratório-investigativas e no ensino da álgebra, foi possível aprofundar a análise da primeira tarefa, em que os alunos eram levados a explorar uma situação e analisar uma regularidade. Nas trocas de ideias entre os alunos, com a professora e nos registros feitos durante o desenvolvimento da tarefa, foi possível identificar os indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébricos. Os dados foram coletados e analisados, segundo diversos referenciais teóricos sobre investigações matemáticas, comunicação e ensino de álgebra. Para construir a análise dos objetivos traçados, primeiramente buscou-se identificar e analisar as comunicações dos alunos e da professora, tanto a oral como a escrita, ocorridas durante a realização da tarefa. Os dados analisados foram agrupados em três blocos: (1) O movimento da aula investigativa e os indícios do pensamento e da linguagem algébricos. (2) Os movimentos da sala de aula que geraram conflitos e dificuldades. (3) O conflito entre o pensamento e a linguagem. Durante a análise notou-se que as dificuldades encontradas pelos alunos tiveram origem na falta de conceitos — principalmente o de variável — e na diferente linguagem usada pela professora. Foi possível observar que os alunos, ainda com o pensamento aritmético, foram induzidos a usar a linguagem simbólica — usada pela professora — sem antes desenvolver os conceitos necessários. Pôde-se ainda perceber alguns limites dentro do contexto educacional, como o tempo necessário para dar significado aos conceitos. Ao identificar os indícios, ficou claro que é preciso que os alunos sintam necessidade de usar a álgebra simbólica — pensar cientificamente — para resolver problemas, ou seja, precisam ser estimulados para que a álgebra tenha significado.

DEROSSI, B. *Objetivos de Aprendizagem e Lousa Digital no Trabalho com Álgebra: As Estratégias dos Alunos na Utilização Desses Recursos*. 2015, 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

Em nosso trabalho analisamos que estratégias são utilizadas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II na resolução de problemas de Álgebra com uso de objetos de aprendizagem nas lousas digitais em relação às utilizadas no uso de lápis e papel. Para isso, inicialmente buscamos entender como as TIC influenciam o pensamento humano; chegando à conclusão de que elas reorganizam nosso pensamento, fazendo com que pensemos de formas diferentes quando trabalhamos com algum material digital. Concluímos também que as lousas digitais são ferramentas multimídias que vem sendo instaladas em boa parte das escolas brasileiras e podem proporcionar aulas mais dinâmicas por meio de uma linguagem digital. Os objetos de aprendizagem, por sua vez, potencializam as ferramentas das lousas digitais e permitem que os alunos explorem um determinado conteúdo arrastando objetos com uma caneta ou com o dedo, dependendo

do modelo de lousa utilizado. Além disso, nosso estudo revelou que, quando trabalham com o lápis e o papel, as principais estratégias utilizadas pelos alunos são aquelas que não envolvem procedimentos algébricos, ou seja, na maioria das vezes, os alunos optam por procedimentos numéricos, mesmo tratando-se de problemas que envolvem a Álgebra. Destacamos que a estratégia mais frequente identificada nas resoluções com lápis e papel é a tentativa e erro, na qual o aluno vai substituindo a letra por algum valor numérico até encontrar um resultado satisfatório. Nossa pesquisa revelou também que na utilização de um OA na LD, os alunos participaram intensivamente das resoluções, opinando e dando caminhos para o colega que estava utilizando o OA, surgindo, neste caso, a construção de um conhecimento coletivo, o que evidencia um possível coletivo pensante. Além disso, percebemos que, como o OA não dava a opção de substituir um valor numérico no lugar da variável, o aluno acabou resolvendo a equação passo a passo, utilizando procedimentos mais próximos de algébricos. Houve também a presença da interatividade (aluno com o OA e a LD) e da interação (aluno com aluno), evidenciando um possível coletivo pensante.

FERNANDES, F. L. P. *Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas*. 2011, 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

O objetivo principal desta pesquisa foi compreender como se dá o desenvolvimento do letramento algébrico de alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no interior do estado de São Paulo. Foram escolhidas duas classes, nas quais eu era o professor responsável. Trata-se de uma pesquisa sobre a própria prática desenvolvida em um ambiente exploratório-investigativo, de natureza qualitativa, sobretudo interpretativa. A coleta de dados contou com a participação de uma auxiliar de pesquisa. O material de campo foi constituído pelo diário de campo do pesquisador e narrativas produzidas pela auxiliar de pesquisa, relatórios e cartazes produzidos pelos alunos e gravações em áudio e vídeo, sendo algumas delas transcritas. Como categorias de análise, temos (i) a mediação realizada pelo professor em diferentes momentos das aulas, dando atenção especial ao momento de socialização/sistematização das apresentações no processo de letramento algébrico; (ii) a constituição de um letramento algébrico, tendo como foco de análise e interpretação as crenças, valores e saberes mobilizados pelos alunos e a produção de sentidos e a negociação de significados desenvolvidas por eles durante a atividade investigativa e a socialização/sistematização de suas produções. Podemos afirmar a aprendizagem não se restringiu às tarefas contempladas. Além de os alunos se apropriarem de um modo de produzir sentido e estabelecer relação com a atividade algébrica, concebida como prática social de leitura e escrita de textos que mobilizam signos próprios da álgebra, também se apropriaram do modo de relacionar-se com o conhecimento matemático, mediante a uma dinâmica exploratório-investigativa.

FERREIRA, M. C. C. *Conhecimento Matemático Específico para o Ensino na Educação Básica: A Álgebra na Escola e na Formação do Professor*. 2014, 184 f. Teses (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Há certo consenso em torno da ideia de que professores de matemática da Educação Básica deveriam possuir um conhecimento “mais aprofundado” do conteúdo a ser ensinado. No entanto, o aprofundamento da formação em matemática por si só, isto é, destituído do objetivo de estabelecer interações e conexões, também profundas, com outros componentes de saber da profissão docente, tem sido visto como insuficiente e até

mesmo inócuo, em termos de uma preparação adequada do professor para atuar em um espaço tão complexo como a sala de aula de matemática da Escola Básica. Assim, a discussão do tema “Qual matemática para formar o professor de matemática?” tem despertado o interesse de pesquisadores e formadores de professores de matemática. Shulman introduziu na literatura o termo conhecimento pedagógico do conteúdo para designar um tipo especial de saber profissional docente: um amálgama entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos disciplinares que constituiria uma forma específica de o professor conhecer sua disciplina. Pesquisadores da Universidade de Michigan, liderados por Deborah Ball, a partir da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman, desenvolveram o conceito de conhecimento matemático para o ensino, que é um conhecimento matemático específico do professor de matemática da escola básica, com uma composição e características próprias, em geral distintas do conhecimento matemático utilizado no exercício de outras profissões. O objetivo desta pesquisa é identificar elementos constituintes desse conhecimento matemático específico do professor, no que se refere particularmente ao trabalho com a álgebra na Educação Básica. Observamos as aulas de dois professores de uma escola pública da rede federal de ensino em Belo Horizonte, de abril a agosto de 2012, período em que a álgebra foi o principal assunto abordado. A partir da observação das aulas, procurou-se identificar elementos de saber, específicos do professor de matemática, que foram efetivamente mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis na prática concreta de sala de aula de álgebra. Diversas questões relevantes apontadas nas pesquisas sobre ensino e aprendizagem de álgebra se fizeram notar durante o processo de observação e coleta de dados, tendo ficado claras a necessidade e a conveniência de analisá-las do ponto de vista do conhecimento matemático específico do professor. Duas questões se sobressaíram, adquirindo posição de destaque em nossa análise: a utilização da argumentação e da demonstração para justificar a extensão de resultados obtidos nos processos de generalização na álgebra e a dualidade processo-objeto presente na construção de noções abstratas, em particular, daquelas associadas às expressões algébricas. Foi possível explicitar tensões entre os processos de validação aceitos no desenvolvimento formal dedutivo, característico da matemática acadêmica, e aqueles adequados ao desenvolvimento lógico dos conteúdos escolares, de acordo com o contexto da sala de aula da Educação Básica. A dualidade processo-objeto se manifestou na tensão identificada entre a concepção estrutural do professor e a concepção procedimental dos alunos na compreensão das expressões algébricas. O estudo realizado identifica saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico do professor da Educação Básica e que não são mencionados nas recomendações para a formação de professores de matemática no Brasil.

FERREIRA, M. L. *Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos*. 2009, 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Esta pesquisa procurou verificar como os professores compreendem álgebra e quais concepções sobre álgebra possuem. Buscamos também identificar se ocorre ressonância das concepções dos professores na concepção de álgebra dos alunos. Realizamos um estudo de caso de cunho qualitativo, o qual se desenvolveu em três etapas. Inicialmente entrevistamos cinco professores do ensino fundamental e médio da rede pública do estado do Rio de Janeiro. As entrevistas abordaram os seguintes temas: matemática, ensino de matemática, álgebra e o ensino de álgebra. No segundo momento, observamos as aulas de duas professoras, pedimos que elas analisassem livros didáticos (escolhidos por elas) e situações referentes a equações do 2º grau. Posteriormente, entrevistamos três alunos de cada professora, que foram escolhidos em consenso com as docentes, para que

podéssemos verificar qual a ressonância das crenças e concepções das professoras nesses alunos. Os trabalhos de Ernest (1989), Usiskin (1988/1995), Lins e Gimenez (1997) ofereceram o suporte teórico para desenvolver a pesquisa e analisar os dados coletados. Procuramos relacionar as respostas nas entrevistas com o discurso das professoras ao longo da pesquisa de campo. A análise dos dados nos deu indícios de que as professoras apresentam semelhanças quanto às concepções sobre álgebra. Ambas entendem este campo da matemática como resultado de demandas do mundo. Além disso, concepções do tipo “álgebra como estudo de técnicas para resolver certos tipos de problemas” foram bastante frequentes. Acreditamos que este trabalho contribui para uma discussão sobre o comportamento dos professores em sala de aula, observando como os mesmos pensam e divulgam a álgebra.

GONÇALVES, A. *Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões de álgebra baseadas no Saresp de 2008 a 2011*. 2014. 178 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Esta pesquisa qualitativa teve como objetivo analisar as estratégias dos alunos com foco nos erros cometidos e dificuldades apresentadas ao resolverem um instrumento de coleta de dados composto por 13 questões de Álgebra escolhidas nos relatórios pedagógicos do Sistema de Avaliação da Aprendizagem Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) dos anos de 2008 a 2011. Empregou-se como referencial teórico as categorias de erros propostas por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) que são: dados mal utilizados, interpretação incorreta de linguagem, inferências logicamente inválidas, teoremas ou definições distorcidas, falta de verificação da solução e erros técnicos. Com a aplicação do instrumento de coleta de dados e a análise feita buscou-se responder à seguinte questão de pesquisa: Quais são as estratégias utilizadas, as dificuldades e os erros cometidos pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II ao resolverem questões de Álgebra que estão presentes nos relatórios pedagógicos do Saresp dos anos de 2008, 2009, 2010 e 2011? A investigação foi realizada em uma escola pública da rede pública paulista e contou com a participação de 15 alunos. Após a etapa de coleta de dados, foram feitas as análises das estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem as questões. Nesse percurso, procurou-se identificar diferentes estratégias utilizadas comparando-as com uma análise *a priori* realizada. À medida que os protocolos foram analisados, tinha-se o olhar voltado para identificar as possíveis dificuldades encontradas e erros cometidos pelos alunos. Os alunos procuraram sempre resolver os problemas utilizando estratégias variadas, muitas vezes diferentes das previstas na análise *a priori*. A análise realizada possibilitou a identificação de dificuldades, das quais destacam-se as relacionadas à utilização correta da linguagem e simbolismos matemáticos. Alguns matemáticos não foram corretamente utilizados por alguns alunos, o que aponta para a necessidade de um trabalho que desenvolva essa capacidade neles. Há também dificuldades em assuntos pontuais, como aplicação do Teorema de Pitágoras, transformação de linguagens e semelhança de triângulos. No que diz respeito aos erros revelados, destacamos que as duas principais categorias foram a de dados mal utilizados e erros técnicos. A diversidade de estratégias utilizadas e a criatividade com que alguns alunos resolveram as questões mostram sempre que for possível é importante o professor propor problemas nos quais os alunos possam usar diferentes estratégias de resolução.

GUADAGNINI, M. R. *O Uso da Fatoração na Resolução de Equações do 2 Grau por Alunos do 9 Ano do Ensino Fundamental*. 2013, 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Esta pesquisa tem como objetivo analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolver equações do segundo grau na forma completa por meio de fatoração. Para atingir tal objetivo, utilizamos como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), particularmente as situações adidáticas com ênfase na de validação e a situação de institucionalização e também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica concebida por Raymond Duval (1995), tendo como foco os aspectos relacionados ao tratamento e à conversão de registros. Utilizamos alguns erros em álgebra proposto por Booth (1995), Alonso *et al* (1993) e Nguyen (2006). O referencial metodológico no qual nos apoiamos foi a Engenharia Didática, conforme descrição de Artigue, para elaborar, aplicar e interpretar nossa sequência de atividades. Para sua concretização, seguimos as quatro fases denominadas de análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Na fase da análise preliminar realizamos um estudo bibliográfico sobre a epistemologia e abordagens das equações do 2º grau. Na fase da concepção e análise *à priori* elaboramos uma sequência didática, composta por três blocos de atividades, bem como a descrição e previsão de possíveis ocorrências durante sua aplicação. Na fase da experimentação coletamos os dados por meio de produções escritas e gravações em áudio das discussões dos alunos acerca das atividades aplicadas, para as quais realizamos posteriormente a análise *a posteriori* e a validação. A investigação experimental foi realizada em uma escola pública de Campo Grande – MS, com um grupo de alunos voluntários, no contra turno do horário de suas aulas regulares. As análises mostraram que os alunos resolvem equações do 2º grau por meio da fatoração, tanto utilizando registros algébricos como geométricos. Os resultados da pesquisa sinalizaram que, na resolução das equações do segundo grau completas, os alunos encontraram maior dificuldade no uso do registro de representação geométrica do que com o de representação algébrica. Constatamos que no tratamento algébrico houve erros provenientes da manipulação algébrica e, dificuldade, com a conversão do registro algébrico para o registro geométrico. A utilização numa mesma atividade dos registros algébrico e geométrico contribuiu para verificar a validade do outro registro, como também, para a busca dos erros e de resolução satisfatória, favorecendo o desenvolvimento de situações adidáticas de validação.

GUIMARÃES, J. F. *As concepções da Álgebra articuladas aos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental*. 2013, 95 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Este estudo tem como objetivo desenvolver sequências de atividades, articulando os quatro blocos de conteúdos de matemática apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental - PCNEF com as concepções da álgebra propostas por Usiskin – como aritmética generalizada, estudo de procedimentos para resolver tipos de problemas, estudo das relações entre grandezas e estudo das estruturas. Para tanto, escolhemos como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica descrita por Raymond Duval. Os sujeitos da pesquisa foram cinco estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal da Bahia no município de Ibicaraí. As análises das produções realizadas pelos estudantes em conjunto com as transcrições das entrevistas gravadas durante a aplicação das sequências das atividades apontaram que houve dificuldade de alguns alunos em fazer a conversão do registro gráfico para o registro numérico, do registro da língua natural para o registro algébrico. O relato dos participantes contribuiu para entendermos as estratégias e procedimentos empregados nas resoluções. Percebemos que alguns desses alunos não tinham domínio nas operações fundamentais, além de apresentarem certa dificuldade em interpretação. Notamos que no contato com a primeira atividade eles estavam ansiosos em dar uma

resposta exata. No decorrer da resolução das atividades eles foram evoluindo, buscaram fazer a leitura, interpretação, estratégias de soluções e argumentação do que realizaram e como realizaram através das entrevistas. Considerando a nossa prática, ao realizar esta pesquisa percebemos o quanto é difícil elaborar uma sequência de atividade e planejar estratégias de como aplicar estabelecendo objetivos. Identificamos que o importante não é ter materiais, livros didáticos em que os exercícios aparecem prontos, mas sim o que pode contribuir para a aprendizagem. É necessário e de fundamental importância que o professor saiba escolher ou elaborar situações-problema que possibilitem aos alunos investigar, elaborar estratégias de resolução e assim tornar possível a generalização e abstração do conhecimento.

SILVA JUNIOR, L. M. *O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico e das Relações Funcionais com Uso de Padrões Matemáticos: Uma Compreensão à Luz da Teoria das Situações Didáticas*. 2016, 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande.

Esta pesquisa, intitulada *O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico e das Relações Funcionais com Uso de Padrões Matemáticos: uma Compreensão à Luz da Teoria das Situações Didáticas* tem por objetivo investigar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões a partir da Teoria das Situações Didáticas na Matemática Escolar. Tal pesquisa segue uma abordagem qualitativa. O estudo experimental foi desenvolvido com uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental, com foco no trabalho com Padrões voltado ao desenvolvimento do pensamento algébrico e o estudo de relações funcionais. Para o levantamento de dados, foi criada uma sequência didática baseada em nosso referencial teórico sobre o ensino de Álgebra, no trabalho com padrões e em especial na Teoria das Situações Didáticas. A mesma foi dividida em três níveis, a saber: introdutório; intermediário e avançado, sendo cada um destes níveis formado por um conjunto de três atividades. A análise dos dados, em um primeiro momento concentrou-se nos principais resultados e percepções, relativas ao desenvolvimento das atividades da sequência didática, observando o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, e posteriormente, em um segundo momento, concentrou-se na identificação de vivências de situações didáticas por parte dos estudantes, durante o desenvolvimento da fase experimental da pesquisa. Foram identificados diversos momentos em que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar as tipologias das *situações didáticas*, tais como: *situações de ação*, *situações de formulação*; *situações de validação* e as *situações de institucionalização*. A conexão estabelecida entre padrões, álgebra e situações didáticas, pôde trazer contribuições efetivas para construção de conhecimentos, proporcionando a observação de regularidades, desenvolvimento do pensamento algébrico, observação e estudo das relações funcionais, por meio de atividades que propiciaram a vivência das diferentes tipologias das situações didáticas.

LUCAS, A. B. *Equações e Funções: Descontinuidades Conceituais*. 2009 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

O problema de pesquisa deste trabalho está relacionado a questões formuladas desde o início de nossa experiência profissional, tendo atingido o *status* de problemática durante o Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, particularmente no grupo de pesquisa TecMEM (Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática). Apesar do grande número de pesquisas sobre o tema “Funções”, sentimos a necessidade de especificar questionamentos acerca das articulações deste tema com o

tema “Equações”. Para isso, formulamos a seguinte questão: *Ao se abordar os diferentes tipos de funções no ensino médio, quais são e porque ocorrem descontinuidades conceituais que levam a conclusões errôneas acerca das raízes dessas funções?* Apoiados em pesquisas anteriores sobre os temas, elaboramos um instrumento que foi aplicado a doze alunos do 2º Ano do Ensino Médio para diagnosticar, por exemplo, quais conhecimentos estes sujeitos mobilizam para distinguir uma equação de uma função dada por uma expressão algébrica ou, ainda, em que medida esta distinção influencia na compreensão dos gráficos destas funções. Nosso foco foram as equações de 1º e 2º grau e as funções afins e quadráticas. Para a análise dos protocolos, baseamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na metodologia da análise de conteúdo, identificando as principais descontinuidades presentes nos registros em língua natural. Como um dos resultados mais importantes obtidos em nossa investigação, verificamos que, ao buscar raízes para uma dada função, os sujeitos participantes da pesquisa trataram-na como uma equação, procurando solucioná-la e encontrar um ou mais valores para sua variável independente, que no caso foi tratada como incógnita. Destacamos a necessidade de se incentivar na escola atividades que contemplem conversões entre os registros de representação semiótica requeridos para a compreensão dos conceitos envolvidos, que propiciem aos alunos reconhecer semelhanças e refletir sobre as diferenças entre estes dois objetos matemáticos, que consensualmente integram o rol de ideias centrais a serem ensinadas em Álgebra.

MASETTI, C. *Análise de Livros Didáticos de Matemática: Função Exponencial*. 2016, 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

O estudo da álgebra é de extrema importância na educação básica, pois amplia a capacidade de nossos alunos na resolução de problemas matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. Diversas pesquisas (PONTE 2005; SESSA, 2005; BRANCO, 2008; VALE *et al.*, 2008) vêm mostrando que alunos da educação básica apresentam inúmeras dificuldades ao utilizarem a linguagem algébrica para expressar suas ideias e resolver problemas. O objetivo desta pesquisa foi analisar se os livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental II escolhidos no PNLD/2011, introduzem a linguagem algébrica por meio de atividades de generalização de padrões e como isso ocorre. Como referencial teórico, foram usadas as ideias de Fiorentini; Miorin; Miguel (1993); Fiorentini; Fernandes; Cristóvão (2005); Sessa (2005) e Ursini *et al.* (2005). A metodologia de pesquisa utilizada foi a Análise de Conteúdo desenvolvida por Bardin (2011); para a análise das atividades de generalização de padrões selecionadas nos livros didáticos, foram utilizadas as categorias para o desenvolvimento do pensamento algébrico adaptadas por Hamazaki (2010). Como resultado de pesquisa, verificou-se que, das quatro coleções de livros didáticos analisadas, três utilizam atividades de generalização de padrões para introduzir a linguagem algébrica e, destas três, só uma emprega os quatro tipos de atividades de generalização de padrões que categorizamos. Destas atividades predominaram as de padrões figurais em uma única coleção, mostrando que este tipo de atividade está sendo pouco utilizada para introdução da linguagem algébrica, embora várias pesquisas e documentos oficiais mostrem o potencial desse tipo de atividade para a iniciação do estudo da álgebra.

MIRANDA, T. L. *A Noção Variável dos Alunos do Ensino Fundamental*. 2014, 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém.

O presente estudo trata da educação algébrica escolar, tendo como objetivo geral a busca de uma descrição da noção de variável, através da resolução de problemas por alunos que

estão cursando o ensino fundamental. Verificou-se noções de variável que aparecem no processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar que permitiram responder as seguintes questões: Quais elementos que constituem as noções de variável são percebidos pelos alunos, de modo a proporcionar-lhes uma maior compreensão da álgebra escolar? De que maneira a identificação destes elementos em ambiente escolar nos permite propor uma descrição para álgebra no ensino fundamental? Para alcançar o objetivo, a pesquisa foi dividida em duas fases. Na primeira fase do estudo, foi adotado como percurso metodológico a pesquisa bibliográfica, baseada na investigação histórica do desenvolvimento da álgebra e de seu ensino no contexto da educação matemática, com a finalidade de estudar a evolução da concepção de álgebra e de variável ao longo da história e identificar as noções de variável descritas em pesquisas da área de educação matemática. Entre os referenciais teóricos trabalhados estão Tabak (2004), Wussing (1998), Boyer (2012), Kieran (1989), Usiskin (1995), Ursini e Trigueros (2003), entre outros. Com base nos referenciais escolhidos, estruturou-se a pesquisa de campo, que constituiu a segunda fase do estudo, a qual apresentou como instrumento diagnóstico de levantamento de dados três questionários, compostos cada um de 10 questões, que foram aplicados para 65 alunos que cursavam o 9º ano do ensino fundamental em três escolas públicas do município de Belém (PA). A aplicação dos questionários auxiliou na identificação das noções de variável e dos elementos destas noções presentes em sala de aula. Os resultados obtidos revelam que os alunos não dominam todas as noções de variável que foram classificadas em nosso referencial teórico. Foi verificado que a noção de variável como incógnita é a que apresenta maior domínio por parte dos alunos, contudo, percebe-se que elementos que constituem esta e as outras noções, relativos a manipulação, simbolização e interpretação, representam obstáculos de compreensão do pensamento e da linguagem algébrica.

MODTKOSKI, H. M. *Conceito Matemático x Algoritmo: Construção do conhecimento ou simples mecanização?* 2016, 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

O presente estudo refere-se aos resultados da pesquisa qualitativa de natureza interpretativa, cujo objetivo é identificar se os alunos de uma escola do Ensino Fundamental do Município de Curitiba compreendem conceitualmente o conteúdo programático de equações polinomiais de 1º e 2º graus ou se as resolvem mecanicamente pela compreensão apenas de seu algoritmo. Os instrumentos para a coleta de dados são listas de exercícios, sendo uma de aplicação direta de equações de 1º e 2º graus e outra de problemas relativos às mesmas equações e foram construídos tendo por base elementos teóricos organizados nos eixos denominados como: construção do conhecimento, conceito matemático e algoritmo, resolução de problemas e a álgebra escolar. As categorias para análise dos dados são provenientes do conteúdo teórico referente ao campo algébrico e do nosso referencial teórico. Analisamos os dados em função das seguintes categorias provisórias organizadas a partir de Bernard e Cohen (1995) para as equações de 1º grau: método de desfazer, inversos operacionais, reversibilidade de um processo, passos invertíveis, resoluções aritméticas e resoluções algébricas. Já para as equações de 2º grau as categorias são: completamento de quadrados, fórmula de Bháskara e relação entre os coeficientes. Os instrumentos foram aplicados a 29 alunos, seguido de entrevistas com alguns deles, conforme as resoluções apresentadas. Após esta aplicação, os dados empíricos foram analisados à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, de elementos da Teoria da Complexidade na perspectiva de Edgar Morin (2010), do conceito de experiência de Jorge Larrosa (2002) e de Ettiène Guérios (2002), em que fragmentação, relação parte-todo e circularidade-linearidade constituíram pontos de aproximação interpretativa entre as categorias.

MORAES, F. R. *Um Estudo Sobre Erros na Resolução de Equações do 1 Grau com o Software Aplusix*. 2013, 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

O presente trabalho tem por objetivo investigar erros no estudo de equações de 1º grau e sua superação por alunos de 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software* Aplusix. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública de Campo Grande, Mato Grosso do Sul; os encontros ocorreram em semanas alternadas, no laboratório de informática da escola, após as aulas do período matutino, com alunos voluntários. Para este estudo foi usada a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) como suporte teórico para ajudar a compreender o processo de apreensão de um conceito pelos alunos. A partir de estudos sobre erros e dificuldades de aprendizagem, foram elaboradas atividades para identificar, por meio dos esquemas mobilizados pelos alunos, alguns teoremas em ação falsos utilizados na resolução dessas atividades. Além disso, foram propostas atividades visando à desestabilização desses teoremas, buscando a superação dos erros mobilizados pelos alunos. Para análise dos dados nos baseamos na análise de Conteúdo dos Erros (CURY, 2008), metodologia de pesquisa que nos permitiu uma análise detalhada das respostas dos alunos. A análise dos dados baseou-se nos registros das atividades realizadas e nos registros orais. Foi possível concluir que a validação oferecida pelo *software* contribuiu com o processo de desestabilização dos erros cometidos pelos alunos. As retroações do Aplusix levaram os alunos a analisar e corrigir seus erros que, no decorrer dos encontros diminuíram a frequência de aparição.

NEVES, J. D. *O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental: a formação do conceito de função*. 2015, 238 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Uberaba, Uberaba.

O objeto de pesquisa da presente dissertação é a formação do conceito de função, que se insere na linha de pesquisa —Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de II. O projeto é parte integrante das pesquisas iniciadas no âmbito do Programa Observatório de Educação –OBEDUC (O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental), desenvolvido na Universidade de Uberaba, com o apoio da CAPES. A justificativa para estudar a formação do conceito de função está fundamentada na visão de Caraça (1984), que o considera como um dos conceitos fundamentais da matemática; no fato de que a formação dos conceitos tem papel decisivo no processo de ensino e aprendizagem e, ainda, nos baixos índices de aproveitamento obtidos pelos alunos dos anos finais do ensino fundamental nas avaliações externas. O objetivo principal da pesquisa é analisar como ocorre a formação do conceito de função junto aos alunos do 9º ano do ensino fundamental. A metodologia adotada foi a de pesquisa qualitativa numa visão dialética, com a realização de um experimento didático, conforme apontado e discutido por Freitas (2010) e Davidov (1998). Os procedimentos metodológicos foram organizados em quatro etapas compostas de pesquisa bibliográfica e documental, elaboração das atividades de ensino, desenvolvimento das atividades e análise dos dados coletados a partir dos pressupostos da teoria adotada. O referencial teórico inclui a Teoria Histórico-Cultural, cujo grande expoente é o cientista, pesquisador e humanista Vigotski; a Teoria da Atividade e do Ensino Desenvolvimental, com Leontiev e Davidov; além de outros seguidores e apoiadores dessas teorias, como Galperin, Elkonin e Talizina. Os resultados permitem considerar que há indícios de que os alunos se apropriaram dos elementos constitutivos do conceito de função; que o trabalho coletivo, as manifestações e expressões dos alunos e suas ações de discutir, relacionar, identificar, generalizar e avaliar foram

relevantes para o alcance dos objetivos, especialmente no seu processo de desenvolvimento mental.

NUNES, C. E. *Resolução de Equações Lineares e Quadráticas com Auxílio de Material Concreto*. 2016, 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera, São Paulo.

O objetivo deste trabalho é investigar a contribuição do uso do material concreto para o processo de abstração e a superação de defasagens e dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de equações lineares e quadráticas no nono ano do Ensino Fundamental e primeira série do ensino médio. Como ponto de partida, recorreremos às recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN - no que diz respeito ao conteúdo a ser abordado. Buscamos, posteriormente, analisar três coleções de livros didáticos que são utilizados em escolas públicas, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, para conhecermos como tais conteúdos são introduzidos e desenvolvidos nos textos. Para tratarmos das equações, buscamos referências em pesquisas nacionais e internacionais, escolhendo trabalhos de pesquisadores que discutem o assunto e nos fazem refletir a respeito do ensino de Matemática, e, em particular, o ensino de Álgebra. Buscamos analisar a contribuição do uso de um material concreto para o trabalho com resolução de equações, à luz dos Três Mundos da Matemática. As atividades desenvolvidas com os participantes foram consideradas experiências voltadas ao Mundo Conceitual Corporificado e ao Mundo Operacional Simbólico, baseadas no Mundo Formal, explorando as características destes mundos e observando o desenvolvimento do pensamento matemático. Esta pesquisa foi realizada com a participação de um grupo de alunos do nono ano do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio de uma escola particular de Extrema - Minas Gerais. As orientações metodológicas foram as do *Design Experiment*. Como ferramenta de coleta de dados aplicamos uma sequência de oito atividades relacionadas à resolução de equações com o auxílio de um conjunto de fichas quadradas e retangulares em duas cores. Os registros foram feitos por meio de protocolos escritos e imagens/fotos. Ao final, foi realizada uma atividade de avaliação e os participantes responderam a um questionário. Nossa análise aconteceu em sequência à aplicação das atividades, possibilitando uma maior precisão e compreensão dos protocolos. Para concluirmos, afirmamos que este material concreto se mostrou favorável para auxiliar a compreensão e sofisticação do processo de resolução de equações dos participantes desta pesquisa.

OLIVEIRA, F. A. P. V. S. *Analisando a mobilização de conhecimentos algébricos de professores de educação básica: o momento de preparação de aulas sobre equações*. 2014, 161 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da, História, e Filosofia das Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da, História, e Filosofia das Ciências e Matemática, Universidade Federal do ABC, Santo André.

Essa é uma pesquisa a qual fora desenvolvida no programa de pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática na Universidade Federal do ABC, em Santo André, cujo título é: “Analisando a mobilização de conhecimentos algébricos de professores de educação básica: O momento de preparação de aulas sobre equações.”. Os objetivos dessa pesquisa consistem em mapear, investigar e compreender quais os conhecimentos algébricos que são mobilizados por professores quando estão elaborando suas aulas sobre equações para a Educação Básica. Adotou-se uma abordagem qualitativa como metodologia de pesquisa e os dados foram obtidos através de questionários e da análise documental das aulas preparadas pelos professores dessa pesquisa; gravações em áudio dos encontros os quais os professores preparam suas aulas em duplas. Os seis sujeitos

de pesquisa são pessoas que preparam aulas para a Educação Básica nos conteúdos matemáticos tanto para seu ofício como professor(a) efetivo ou contratado, quanto para o desenvolvimento de pesquisa associado aos projetos de formação inicial ou continuada. Com isso, para fundamentar essa pesquisa inclusive nas análises dos dados, foram utilizados os trabalhos de Shulman (1986 e 1987) e Ball e equipe (2008). Estes últimos autores sugerem o quadro teórico do “Conhecimento Matemático para o Ensino”, que é o “conhecimento matemático necessário para realizar o trabalho de ensinar matemática”, além da existência de dois subdomínios, a partir dos trabalhos de Shulman: (i) Conhecimento Comum do Conteúdo e Conhecimento Especializado do Conteúdo; e (ii) Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes e Conhecimento do Conteúdo e o Ensino. Após analisarmos os dados, baseados na perspectiva do conhecimento matemático para o ensino, pudemos identificar, entre outros, os seguintes conhecimentos algébricos: Reconhecimento de que uma sentença matemática não é equação (Conhecimento Comum do Conteúdo); Compreensão do multissignificado do símbolo “=” (Conhecimento Especializado do Conteúdo); Reconhecimento dos conteúdos prévios para que os alunos possam compreender e participar de uma aula sobre equações (Conhecimento do Conteúdo e os Estudantes); Utilização de uma abordagem etimológica das palavras “equação” e “igualdade”, com o objetivo de promover uma discussão destes conteúdos em sala de aula (Conhecimento do Conteúdo e o Ensino) e, por fim, Reconhecer que o conteúdo de equação, em especial a equação polinomial de 1º grau, tem forte relação e importância para o conteúdo de inequações, funções e outros conteúdos mais avançados (Conhecimento Curricular).

PASSOS, D. S. *A educação algébrica no 8º ano do ensino fundamental das escolas públicas de Ribeirópolis/SE: Entendimentos de professores de matemática*. 2012, 184 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

Nesta pesquisa buscamos investigar os entendimentos dos professores de Matemática das escolas públicas de Ribeirópolis/SE em relação à educação algébrica no 8º ano do Ensino Fundamental. Para tanto adotamos como parâmetro os oito (08) docentes que ministraram aulas de Matemática nas escolas públicas da rede municipal e estadual de ensino de Ribeirópolis/SE no ano de 2010. No intuito de identificar os encaminhamentos didáticos desses professores constatamos os livros didáticos adotados e fotocopiamos vinte e cinco (25) cadernos de alunos, sendo que a apreciação de tais instrumentos ocorreu por meio dos princípios da análise de conteúdo (BARDIN, 2010). Posteriormente, realizamos entrevistas semiestruturadas com todos os docentes, buscando distinguir alguns entendimentos em relação às dimensões da álgebra e aos registros de representação semiótica mobilizados. Nessa perspectiva, tomamos como sustentação teórica Duval (2003, 2009, 2011), Brasil (1998), Usiskin (1994). Com base nos dados coletados e seguindo os pressupostos da pesquisa qualitativa concluímos que os professores reconhecem que o livro didático estabelece relação entre conteúdos da Matemática escolar que pertencem ao campo da álgebra e da geometria, mas que nem todos assinalam que tal ação visa aproximar esses dois campos por meio de conversões que contribuem para a apreensão cognitiva do aluno, uma vez que relatam alterar a sequência do livro didático. Apesar da maioria dos professores apontar conteúdos vinculados exclusivamente à dimensão estrutural como elementos imprescindíveis para serem apreendidos no 8º ano do Ensino Fundamental, quatro professores enfatizam quantitativamente mais atividades na dimensão equacional. A metade dos professores reconhece que a dimensão da aritmética generalizada pode contribuir para o trabalho com a dimensão funcional, desde que sejam evidenciadas as variáveis dependentes e independentes. Ao considerar as transformações semióticas, os sujeitos da pesquisa identificam que atividades de

tratamento são mais elementares que as de conversão e que podem ser empregadas tanto na dimensão equacional quanto na dimensão estrutural. No entanto, ao analisarmos as transformações propostas nos encaminhamentos didáticos dos docentes pesquisados, independentemente da dimensão privilegiada, observamos que o percentual de atividades envolvendo conversão de registros é superado por tratamento. Os professores reconhecem que os alunos apresentam dificuldades em relação à execução de tratamentos nos registros algébricos e numéricos e frente a essas dificuldades revelam que selecionam atividades mais elementares. Mesmo considerando a importância em empregar o registro geométrico como elemento de apoio para justificar os tratamentos no registro algébrico os professores são categóricos ao afirmarem que os alunos apresentam um maior nível de compreensão quando são utilizadas apenas substituições numéricas. De acordo com os docentes as conversões mais relevantes são aquelas que tomam o registro da língua natural como elemento de partida, pois propiciam o desenvolvimento de capacidades de leitura, interpretação e visualização dos objetos matemáticos. Apesar disso, a maioria dos professores revela desconhecer que para realizar uma conversão que parte do registro da língua natural torna-se imprescindível mobilizar conceitos inerentes ao registro de chegada, seja ele algébrico, geométrico, gráfico ou figural.

PUTI, T. C. *A Produção de Significados Durante o Processo em Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Equações Polinomiais*. 2011, 245 f. Dissertação (Mestrado Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

O objetivo desta pesquisa é o de analisar o ensino-aprendizagem de equações polinomiais do 2º grau. Para esta pesquisa adotamos a Metodologia de Pesquisa de Romberg. Definido o Fenômeno de Interesse, o *Ensino-Aprendizagem de Equações Polinomiais do 2º grau*, foi criado um Modelo Preliminar e apoiado em ideias de outros sobre os eixos norteadores do desenvolvimento da pesquisa: a Álgebra Escolar, a Produção de Significados e a Resolução de Problemas, nos conduziram à seguinte questão: *Quais os significados produzidos, pelos alunos, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de equações polinomiais do 2º grau?* Para resolver esse problema, estratégias (o quê?) e procedimentos (como?) foram criados gerando o Procedimento Geral – a criação de um projeto de ensino-aprendizagem avaliação para trabalhar as equações polinomiais de 2º grau. Esse Procedimento Geral foi posto em ação, em sala de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na qual os alunos devem ser co-construtores de seu próprio conhecimento durante o processo da resolução do problema proposto, levando-os à construção de novos conceitos, conteúdos e técnicas operatórias matemáticas. Para a coleta de dados utilizamos algumas técnicas: observação participante, seguida de registros (notas de campo, registros de trabalhos de alunos em diferentes momentos e vídeos de algumas aulas). A análise da produção de significados dos alunos foi realizada a partir das atividades trabalhadas em sala de aula. Esta análise apresentou uma abordagem qualitativa que nos possibilitou múltiplas interpretações dos dados coletados segundo nossas crenças, experiências e concepções.

QUEIROZ, P. C. *Uma Proposta para o Ensino de Função Articulando às Linguagens Algébrica e Geométrica*. 2014, 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Esta pesquisa teve por objetivo investigar o processo de aprendizagem de função por alunos do 9º ano do ensino fundamental por meio de situações didáticas que permitem a articulação entre a álgebra e a geometria analítica. Para tanto elaboramos uma sequência

didática, nos moldes da Engenharia Didática, pautada em resultados de estudos de documentos e de pesquisas que fornecem um panorama do ensino e das dificuldades na aprendizagem do conceito de função, bem como possibilidades de superação dessas. Esses documentos compõem, juntamente com a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, o nosso referencial teórico. A aplicação dessa sequência didática foi realizada em uma escola pública da rede municipal de Campo Grande/MS. Constatamos que as situações propostas e a mobilização de diferentes representações para o conceito possibilitaram a esses alunos observar a variação entre grandezas e a relação entre elas para construir diferentes estratégias de resolução, o que contribuiu tanto para a mobilização quanto para a construção de conceitos.

REIS, E. S. *O Estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em Livros Didáticos Utilizados em Escolas Brasileiras*. 2010, 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Esta pesquisa tem como objeto o estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. As fontes utilizadas foram um livro didático adotado no Colégio Pedro II no período de 1890 a 1930 (*Tratado e Álgebra Elementar de José Adelino Serrasqueiro*), e um livro contemporâneo (*Matemática Para todos de IMENES & LELIS*), assim como, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as resenhas do Guia do Livro Didático do Plano Nacional do Livro Didático e programas de estudos do Colégio Pedro II. Para estudar esse objeto, a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Yves Chevallard é adotada como referencial teórico, e é feita uma abordagem metodológica baseada na Análise de Conteúdo de Laurence Bardin. Além desses referenciais, utilizaremos experiências absorvidas a partir de leituras e análise de pesquisas que de alguma forma caminham paralelamente como o nosso objeto de estudo. Os resultados evidenciam algumas questões importantes, como: valorização do estudo de sistemas tanto nos livros antigos quanto nos livros contemporâneos; a diversidade de registros de linguagem nos livros contemporâneos; a valorização da linguagem materna nos livros antigos; a diversidade de exercícios propostos em ambos os livros.

REZENDE, S. R. A. *Ensino desenvolvimental e investigação matemática com o GeoGebra: uma intervenção pedagógica sobre o teorema de Tales*. 2016, 188 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia.

A pesquisa buscou identificar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental combinada à investigação matemática para o ensino e a aprendizagem do teorema de Tales. Essa questão decorre da problemática em que se insere o ensino de matemática no contexto da escola brasileira atualmente, sobretudo no ensino médio, em que se verifica pouca aprendizagem dos alunos em relação a conceitos fundamentais dessa disciplina. Este estudo fundamentou-se em princípios da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov e da investigação matemática a partir das ideias de Ponte. O software GeoGebra foi utilizado na atividade dos alunos para o estudo do teorema de Tales. Desse modo, o objetivo geral foi esclarecer quais são as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática, como apoio do software GeoGebra. Como objetivos específicos, buscou-se identificar quais as mudanças apresentadas na aprendizagem dos alunos ao longo da realização do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales; o que a investigação matemática com o GeoGebra pode agregar nas aulas e ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de

Tales. A pesquisa foi de natureza qualitativa, por meio de experimento didático formativo, tendo como campo empírico uma escola da rede estadual de ensino do Estado de Goiás. Nesta escola foi pesquisada uma turma de 2o ano do ensino médio, tendo como participantes os alunos, seus pais e o professor de matemática, que também atuou como colaborador da pesquisa. Os dados foram coletados por meio de observação direta não participante, questionários, entrevistas semiestruturadas, organizados e analisados conforme os procedimentos da análise qualitativa. Os resultados mostram que a combinação de princípios da teoria do ensino desenvolvimental com a investigação matemática e a utilização do software GeoGebra potencializou o aspecto investigativo na atividade de estudo teorema de Tales pelo aluno. A introdução do software GeoGebra possibilitou concretizar de forma dinâmica a integração entre a álgebra e geometria, permitindo ao aluno o trabalho ativo com o objeto teorema de Tales, facilitando a identificação do seu núcleo conceitual e das relações que o envolvem. Os alunos expressaram que o estudo do teorema de Tales, da forma proposta, contribuiu para a compreensão da geometria de forma mais significativa, facilitando a aprendizagem. Conclui-se que o ensino do teorema de Tales estruturado com base na teoria de Davydov e na investigação matemática, por meio do software GeoGebra, pode resultar em melhor aprendizagem desse conceito pelos alunos. Para isso, é indispensável que o professor tenha conhecimento da teoria do ensino desenvolvimental e da investigação matemática, como também as funcionalidades do software GeoGebra.

SALGUEIRO, N. C. G. *Como Estudantes do Ensino Médio Lidam com Registros de Representação Semiótica de Funções*. 2011, 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Esta pesquisa consistiu em uma investigação de como estudantes do Ensino Médio de uma escola de Rolândia, PR, lidam com o conceito de função ao se depararem com uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática apresentados por Artigue (1996), trabalhando diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático. Como referencial teórico utilizou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2005), as abordagens do pensamento algébrico de Lins e Gimenez (1997), Kieran (1992) e Usiskin (1995) e, para os estudos do erro, Cury (2007). A sequência didática possibilitou aos estudantes a realização de conversões entre os registros de representação semiótica abordados, quais sejam registros na relação entre dois conjuntos, registro gráfico e registro algébrico do objeto função. Observaram-se indícios de pensamento algébrico nos registros escritos quando da generalização de situações e da utilização de linguagem algébrica e, alguns tipos de erros, como falta de conhecimento do uso de decimais, falta de entendimento do conceito de função como relação entre conjuntos, na conversão entre os registros de representação semiótica, no uso da linguagem algébrica, na determinação do domínio e na representação de funções com domínios discretos.

SANTOS, D. M. F. *Ensino de equação de 1º grau: concepções de professores de matemática e formação docente*. 2009, 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNESP/Campus de Presidente Prudente, Presidente Prudente, São Paulo.

A presente pesquisa, de natureza quanti-qualitativa, vinculada à linha de pesquisa “Práticas Educativas e Formação de Professores”, do Programa de Pós-Graduação em Educação, da Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT/UNESP de Presidente Prudente, analisa as concepções de 47 professores de Matemática de 7ª série (atual 8º ano) do Ensino Fundamental, da rede estadual, da Diretoria de Ensino, Região de Marília/SP, sobre o

ensino da equação de 1º grau. Considera-se que a 7ª série está no centro do problema da aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental, como pode ser confirmado nos relatórios do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) dos anos de 2005 e 2007. Também nesta série há expressiva concentração de Álgebra, cujo principal conteúdo é a equação de 1º grau. Em razão desses determinantes, buscou-se, nesta pesquisa, especificamente, identificar e analisar o conceito de equação de 1º grau advindo das concepções desses professores, investigar ainda as relações entre essas concepções e a prática docente em relação à equação de 1º grau. Procurou-se, ainda, nesta investigação, identificar e analisar as relações apontadas pelos professores entre sua formação e sua prática pedagógica, no que se refere ao ensino de equação de 1º grau. À luz da teoria pautada na evolução histórica, nos atributos definidores da equação de 1º grau, bem como nas concepções de Educação Algébrica e nos multissignificados da equação (RIBEIRO, 2007), é que se constituíram as categorias da análise dos dados. A coleta dos dados foi realizada pelo método survey. O programa SPSS (Statistical Package for the Social Sciences) orientou o tratamento do material coligido. A análise dos dados indicou que o universo pesquisado envolve professores experientes, uma vez que 57,3% deles possuem mais de 15 anos de exercício docente; em termos funcionais, eles demonstram-se parcialmente estáveis, já que 76,6% são efetivos; 89,4% são formados por instituições particulares; 85,15% deles são formados em cursos específicos de licenciatura na área de exatas e quase metade concluiu sua primeira formação entre as décadas de 1970 a 1980. Para os professores, a instância de formação que mais contribuiu para sua prática docente foi a sua experiência em sala de aula, seguida da formação continuada e da formação inicial. Quanto ao ensino da equação de 1º grau desenvolvido pelos professores, este se mostrou fundamentado, prioritariamente, no livro didático, tendo em vista a transmissão de conteúdos. As justificativas dos professores sobre o seu trabalho em sala de aula parecem indicar que permanecem vinculados à concepção de ensino de Matemática organizado de forma linear e sequenciada. As concepções dos professores sobre o ensino da equação de 1º grau mais recorrentes são: algoritmo relacionado à equação em si, que se refere aos procedimentos da sua própria resolução; resolução de problemas da equação em si; situações relacionadas à sua aplicabilidade; ferramenta (base para outros conteúdos); e analogia ao uso de material concreto, baseada em representações com material concreto como forma de demonstrar e justificar as transformações algébricas.

SANTOS, G. L. *Como professores e alunos do ensino médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita*. 2010, 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Neste trabalho analisamos a produção escrita de professores e estudantes do Ensino Médio, verificando os modos de resolução que estes utilizaram para resolver as questões de Álgebra das provas de conhecimentos gerais de alguns vestibulares de universidades estaduais paranaenses. Numa abordagem predominantemente qualitativa, com cunho interpretativo, buscamos, por meio da análise da produção escrita, identificar os conteúdos algébricos presentes nas questões e também os modos e de resolução utilizados pelos participantes da pesquisa ao resolverem tais questões, inferindo sobre as possíveis características do pensamento algébrico, bem como a linguagem e simbologia algébricas. Os conteúdos abordados nas questões são, em sua maioria, conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental. Os professores e alunos apresentaram modos de resolução baseados na Matemática Escolar trabalhada na Educação Básica e indícios do pensamento algébrico numa fase de transição permeada pela linguagem natural e alguns símbolos algébricos, considerando que muitas vezes o próprio enunciado das questões possa ter norteado algumas das produções apresentadas.

SILVA, E. P. *Aspectos do Pensamento Algébrico e da Linguagem Manifestados por Estudantes do 6º Ano em um Experimento de Ensino*. 2013, 147 f. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciência e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Esta investigação, de cunho qualitativo, objetivou identificar, analisar e discutir aspectos do pensamento algébrico manifestados por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas em um Experimento de Ensino. O referencial teórico utilizado reúne informações a respeito de quais processos matemáticos realizados possam ser evidências de que crianças do Ensino Fundamental estejam pensando algebricamente. Referimo-nos a aspectos de pensamento algébrico como evidências de habilidades do pensamento matemático, consideradas necessárias para o sucesso em álgebra ao resolverem problemas que envolvem conceitos algébricos. A coleta de informações se deu no ano de 2012 em uma sala de aula de uma escola pública de Palotina – Pr., por meio da metodologia baseada no Experimento de Ensino, devida a Steffe e Thompson (2000). Analisamos três episódios de ensino e registros escritos de dois problemas à luz da Análise de Conteúdo de Bardin (2004). Foi possível identificar alguns aspectos de pensamento algébrico nos registros escritos dos estudantes, destacando o desenvolvimento de uma linguagem sincopada para expressar-se matematicamente, a utilização de símbolos não convencionais e convencionais relacionados a conceitos e propriedades, a compreensão dos conceitos envolvidos no problema, a utilização da proporção direta, a resolução de equações por meio de operações inversas, a análise e expressão de relações entre grandezas desconhecidas sem recorrerem a valores específicos, entre outros. Além disso, verificamos quais aspectos de pensamento algébrico apresentaram-se com maior e menor frequência e identificamos três modos de pensar matemática apresentados pelos estudantes do 6º ano: i) um modo algébrico de pensar; ii) um modo de pensar limitado por crenças e rotinas; iii) um modo ingênuo de pensar.

SILVA, M. G. *Potencialidades da Atividade de Estudo no Desenvolvimento do Pensamento e da Linguagem Algébrica dos Alunos dos anos finais do Ensino Fundamental*. 2015, 284 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade de Uberaba, Uberaba.

Considerando os resultados insatisfatórios dos alunos em matemática, indicados pelas avaliações sistêmicas (SAEB, SIMAVE, dentre outras) realizadas no país, e a necessidade de um ensino mais eficaz da álgebra, propôs-se esse estudo, cujo objetivo é analisar as contribuições de uma proposta de atividades de estudo, na perspectiva histórico-cultural, no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica de alunos do 9º ano do ensino fundamental. Esta dissertação insere-se na linha de pesquisa “Desenvolvimento Profissional, Trabalho Docente e Processo de Ensino-Aprendizagem” e no projeto OBEDUC/CAPES e Edital 13/2012 da FAPEMIG, intitulado “O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental”, desenvolvido na UNIUBE. A metodologia da pesquisa se apoia em uma abordagem qualitativa numa visão dialética, que possibilita observar o fenômeno em seu movimento, considerando que o pesquisador esteve inserido no contexto, analisando o caso em suas especificidades a partir das suas apreensões do objeto de estudo e dos referenciais teóricos nos quais se fundamenta. Como procedimentos de pesquisa, realizaram-se pesquisa bibliográfica, documental e de campo. Na pesquisa bibliográfica fundamentada na teoria histórico cultural, os conceitos de pensamento e linguagem, bem como as suas relações, foram construídos segundo Vigotski; a teoria da atividade e da atividade de estudo conforme os pressupostos de Leontiev e Davidov, respectivamente, além de outros pesquisadores apoiadores da teoria

histórico-cultural, que possuem como objeto de estudo a álgebra. Na pesquisa documental, foi realizada a contextualização considerando os PCN, os registros do desenvolvimento lógico-histórico dos conhecimentos algébricos, os documentos que regulamentam o ensino na escola pesquisada, o Projeto Político Pedagógico, o planejamento do professor, dentre outros registros. A pesquisa de campo consistiu num experimento didático, embasado na teoria histórico-cultural, realizado com alunos do 9º ano do ensino fundamental da ESEBA/UFU. Para isso, foram realizadas sessões de estudo entre o pesquisador e o professor da turma pesquisada, fornecendo suporte para elaboração coletiva das atividades de estudo; foram observadas 95 aulas pelo pesquisador; elaboração e proposição da atividade de estudo. Os dados coletados no estudo de grupo, na observação da atividade, os registros dos alunos e as suas falas, foram analisados, levando em consideração o aporte teórico no qual está fundamentada a pesquisa. Os resultados desta pesquisa permitem considerar que um ensino devidamente organizado contribui para o processo de ensino-aprendizagem-desenvolvimento. Observam-se indícios de que os alunos por meio de trabalho coletivo apresentam manifestações e expressões do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica, no sentido de construção de sentido para a linguagem simbólica, ao percorrerem o movimento lógico-histórico da álgebra, passando da fase retórica até chegar à álgebra simbólica. Os processos de discutir, relacionar, identificar, generalizar e avaliar foram relevantes para o alcance dos objetivos, especialmente no processo de desenvolvimento mental dos alunos que se apropriaram dos recursos necessários para trabalhar com equações do segundo grau.

SILVA, R. M. *Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental*. 2009, 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Este relatório se refere a um estudo de caso que teve por objetivo verificar a compreensão e os usos da variável por alunos de oitava série, em questões que envolvem sua simbolização, interpretação e manipulação. Para tal, foi utilizada uma ferramenta teórico-metodológica denominada Modelo dos três usos da variável (3UV), apresentada por Trigueros e Ursini (2001). Tal modelo relaciona as habilidades necessárias ao entendimento dos três principais usos da variável na álgebra escolar: incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional. Como ferramenta metodológica foi utilizado na elaboração de um questionário para identificar os significados e usos da variável por dezessete alunos de uma escola da rede estadual da grande São Paulo. Além da aplicação do questionário, que contou com a presença de um observador, foram utilizadas gravações em áudio e entrevistas semiestruturadas como instrumentos de coleta de informações. O conjunto de dados obtido foi analisado tomando como referências o Modelo 3UV e os aspectos que, segundo Caraça (1954) sintetizam o conceito de variável: o simbólico e o substancial. Os resultados mostram a dificuldade de simbolização, principalmente quando deve ser por variáveis nos papéis de número genérico ou em relacionamento funcional. Quanto à interpretação, esses alunos, quando questionados, citam a variável como representante de quaisquer valores, porém, nem sempre se referindo ao conjunto que ela representa, mas também ao seu coeficiente. Em procedimentos de manipulação, indicam a falta de interpretação da variável nas sentenças algébricas, mostrando o predomínio do uso de algoritmos para a resolução e a falta de entendimento das soluções obtidas, mesmo quando foram utilizados corretamente. Os resultados também apontam que os aspectos simbólicos e substancial se destacam, separadamente, dependendo do que requer a questão.

SOUZA, E. R. *Análise de Estratégias de Alunos do Ensino Médio em Problemas de Cálculo de Área do Paralelogramo*. 2013, 109f. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) - Programa de Pós-Graduação e Educação Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

O objetivo desse trabalho foi analisar, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e com base no modelo didático para a conceituação da área como grandeza, proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian, como alunos do ensino médio técnico lidam com a área de paralelogramos. Estudos anteriores mostraram que habitualmente, nos problemas de cálculo da área de um paralelogramo, os dados numéricos são necessários e suficientes para realizar o cálculo por meio da fórmula, a figura desenhada é “inclinada para a direita” e tem o lado de maior comprimento na posição horizontal. Elaboramos um teste de sondagem, que contemplou tarefas em que, ora essas características eram respeitadas, ora intencionalmente as condições eram bem diferentes das comumente observadas, como não fornecer os dados numéricos e deixar a cargo dos alunos a escolha do lado a ser tomado como base. Esse teste foi aplicado com 104 alunos de quatro turmas de 2º ano do ensino médio técnico de uma escola pública estadual da região metropolitana da cidade do Recife – PE. As resoluções dos alunos foram analisadas de três pontos de vista complementares: cálculo relacional, cálculo numérico e álgebra das grandezas. Observamos que embora seja prevista a abordagem da área de paralelogramos desde o terceiro ciclo do ensino fundamental (6º e 7º anos), dificuldades de aprendizagem persistem entre os alunos no ensino médio. Quanto ao cálculo relacional, o uso de procedimento de resolução adequado à situação (produto dos comprimentos de um lado tomado como base pela altura correspondente, por exemplo) foi observado em aproximadamente 40% dos sujeitos, nas condições habituais, e 25% dos sujeitos na tarefa proposta em condições não habituais. Além disso, uma quantidade significativa de alunos empregou fórmulas erradas, com destaque para o produto dos comprimentos dos lados e cálculos que envolvessem, de diferentes maneiras todos os dados numéricos fornecidos. Em relação ao cálculo numérico, por volta de um terço dos estudantes cometeram algum erro em operações numéricas com números decimais, em pelo menos uma das tarefas. Sob o ponto de vista da álgebra das grandezas, percebemos que em ambas as tarefas, menos de 20% dos estudantes expressou a área do paralelogramo por meio de um par (número, unidade de área). Muitos alunos deram como resposta apenas um número e outros utilizaram unidades inadequadas, como o centímetro ou o centímetro cúbico. O cruzamento dos dados relativos aos três pontos de vista mostrou que o acerto simultâneo de cálculo relacional e cálculo numérico é de aproximadamente 30% em condições habituais e 20% em condições não habituais. Em ambas as tarefas, menos de um quarto dos alunos que acertam o cálculo relacional lidam adequadamente com unidades de comprimento e de área. Mesmo entre os alunos que expressam a área por meio de um número acompanhado de uma unidade de área, com frequência operam com números e ao final expressam o resultado acrescentando a unidade.

SOUZA, N. F. *Contextualização do Ensino da Álgebra: Análise de Livros Didáticos do 7º ano*. 2014, 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

O ensino da Matemática tem nos inquietado em dois aspectos, o primeiro deles é o fato de a contextualização ter sido proposta de modo a estabelecer relações com situações do cotidiano do aluno. O segundo é, por um lado, a ênfase dada ao ensino da Álgebra e por outro lado os resultados indesejáveis no que diz respeito à aprendizagem dos alunos nesse campo matemático. Diante dessa realidade desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo de caracterizar a contextualização da introdução da Álgebra em livros didáticos destinados ao 7º ano do ensino fundamental. Para tanto nos pautamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Chevallard, mais especificamente no bloco prático-técnico, que compreende os tipos de tarefas e técnicas, e nos momentos que compõem a Organização Didática, que nos auxiliam na identificação das contextualizações propostas

no âmbito dos livros em questão. Nessa pesquisa a TAD é utilizada para compreender como uma estratégia metodológica – a contextualização – é utilizada no ensino de Álgebra e nossas análises nos permitiram concluir que a maioria das situações desse tipo parecem ser artificiais. Além disso, as contextualizações mais frequentes são referentes aos contextos matemáticos e às práticas sociais, sendo constantemente usadas para a introdução de conceitos matemáticos.

TREVISANI, F. M. *Estratégias de Generalização de Padrões Matemáticos*. 2012, 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Pesquisas têm utilizado e discutido com frequência o ensino da álgebra por meio do trabalho com padrões. Além disso, programas governamentais buscam inserir computadores nas escolas públicas, objetivando melhorar a qualidade do ensino. Nesse contexto, apresento esta pesquisa norteada pela questão “quais são as estratégias utilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental para generalizar padrões com o software MiGen?”. Buscando compreender as estratégias que estudantes desse ano escolar utilizam para generalizar padrões com o uso de um software denominado MiGen, que trabalha com padrões que se movimentam na tela do computador, uma investigação de caráter qualitativo foi realizada em uma escola pública da cidade de Rio Claro, interior do estado de São Paulo, Brasil. Seis atividades foram elaboradas e aplicadas a oito alunos, que responderam, em duplas, às questões dadas e interagiram com o computador ao mesmo tempo. A análise dos dados se deu com base em cinco estratégias de generalização, a saber: tentativa e erro, contagem, termo unidade, diferença e explícita. A partir dos resultados e do referencial teórico adotado, concluímos que as estratégias usadas pelos alunos foram a explícita, a termo unidade e a contagem, e que o MiGen influenciou na escolha delas para se determinar uma expressão geral de um padrão, principalmente porque este é apresentado de forma dinâmica na tela do computador. Assim, as estratégias utilizadas pelos alunos para generalizar os padrões visaram a busca pela expressão geral do padrão ao invés do trabalho com casos particulares, contribuindo para o desenvolvimento do processo de generalização algébrica dos alunos participantes da pesquisa.

VALENTIM, M. A. *Pensamento Narrativo na Aprendizagem Matemática: Estudos com Alunos do Ensino Fundamental na Resolução de Atividade de Álgebra*. 2015, 238 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera, São Paulo.

Esta pesquisa objetivou descrever e analisar as relações entre pensamento e linguagem que se estabelecem nos processos de aprendizagem de conteúdos algébricos na construção de significados e no auxílio de explicações, interpretações e, principalmente, nas resoluções matemáticas de alunos de 6º e 9º anos do Ensino Fundamental (EF) de uma escola municipal da cidade de Juiz de Fora, MG. Mais especificamente, analisou as características do pensamento narrativo, presentes nas expressões verbais dos alunos. Tomou-se o aporte teórico de Lev Vigotski, nas reflexões sobre a relação pensamento e linguagem e sobre as possibilidades de aprendizagem e desenvolvimento na Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP; de Jerome Bruner, na explicitação de pensamento narrativo e pensamento lógico-científico e de Mikhail Bakhtin, no conceito de enunciação, enfatizando as réplicas e tréplicas dos alunos. O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. O material de análise foi recolhido dos diálogos originados por meio da interação entre os alunos (vídeo gravadas) e de registros escritos, entrevistas e questionários. O recolhimento dos diálogos junto aos estudantes voluntários foi feito no próprio ambiente escolar e envolveu dois grupos de três alunos de 6º ano e dois grupos de

três alunos do 9º ano do EF. As atividades aplicadas foram retiradas do livro didático adotado pela escola e constituíram-se de duas atividades de sequências para todos os grupos e uma atividade de sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas somente para os grupos do 9º ano. Os materiais produzidos pelos alunos foram recolhidos para análise e todo o processo de aplicação das atividades dos grupos, foi vídeo gravado e posteriormente transcrito. Os diálogos recolhidos mostraram a importância do pensamento narrativo, expressos em narrativas orais ou escritas, na construção/apropriação dos conteúdos matemáticos, ou seja, do pensamento lógico-científico. A análise permitiu categorizar o pensamento narrativo matemático, como um processo transitório de pensamento e linguagem possível e necessário na aprendizagem matemática. A categoria mais ampla de pensamento narrativo matemático permitiu a elaboração de três subcategorias de análise: (1) pensamento narrativo matemático como diálogo, subdividido em mediação no espaço da ZDP e na enunciação, que permitiu identificar os níveis de ajuda por meio da enunciação e diálogo, servindo de concretização do pensamento narrativo. Os diálogos revelaram que a capacidade cognitiva sofre alterações mais significativas quando os pensamentos narrativos são compartilhados; (2) como expressão de técnica, que deu condições de diferenciar as estratégias de resolução entre técnica e tecnicismo. Mesmo em momentos onde as estratégias utilizadas não levaram ao êxito da atividade, ficou demonstrado que o conhecimento matemático retrospectivo foi suficiente, faltando para tanto, uma organização do pensamento; (3) como expressão de conceitos em formação, que mostrou a evolução nos tipos de procedimentos aplicados durante a resolução. Em vários momentos, o silêncio deu espaço para contribuições na elaboração de estratégias que conduziram a resolução. Isso foi possível, pois as subcategorias de análises são intercambiáveis e indissociáveis. Os resultados mostram que os pensamentos narrativos matemáticos são fundamentais na apropriação do conhecimento para os alunos, pois permitem uma reflexão sobre suas estratégias de resolução ao interagir com o outro, propiciando caminhos que auxiliam a aprendizagem matemática.

VIDAL, S. J. R. B. *Exploração didática de erro no ensino de equação do 1º grau*. 2008, 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza.

Na Educação Matemática, os erros dos alunos, no processo de aprendizagem, são enfoque de estudo de pesquisadores. Erro em muitos anos, era evitado senão, eliminado, por ser algo ruim. No entanto, concepções pedagógicas foram surgindo e trazendo outra visão de erro: natural ao processo de aprendizagem que pode ser utilizado como ferramenta do aluno. O erro pode se tornar importante mediador, se for compreendido e trabalhado de forma construtiva. Entretanto pesquisas mostram que o erro ainda possui conotação negativa porque professores não sabem como tratá-lo. Pesquisadores alertam a necessidade de estudos de estratégias de exploração como algo construtivo. Neste trabalho investigam-se estratégias do professor diante de erros ou dificuldades dos alunos no estudo de Equação de 1º Grau. A escolha do assunto deve-se ao fato de professores relatarem dificuldades dos alunos com Álgebra. Para tal, fez-se um estudo de caso, em escola construtivista de Fortaleza, com turma de 7º ano do Ensino Fundamenta II. O professor, sujeito da pesquisa, tem visão construtiva do erro, e, nas observações, utiliza estratégias diante de erros ou dificuldades dos alunos. A análise mostra que a reflexão do erro, em ambiente propício, é ferramenta importante para construção do conhecimento, fazendo das dificuldades fontes de descobertas.

VIEIRA, L. B. *Implicações Pedagógicas de Lúdico para o Ensino e Aprendizagem da Álgebra*. 2011, 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

O presente trabalho objetivou estudar as implicações pedagógicas de atividades lúdicas para o ensino e aprendizagem da álgebra no Ensino Médio. Utilizamos como caminho metodológico o experimento didático que é um método de investigação que estuda os processos de ensino e aprendizagem de estudantes em sala de aula (CEDRO; MOURA, 2010). Como principais referências no que diz respeito à educação lúdica consideramos as ideias de Brougère (1997), Caillois (1997; 1990), Campagne (1989) e Soares (2008). Para a definição de atividade matemática/algébrica utilizamos Fischbein (1987), Mendes (2006), Muniz (2009) e Vergnaud (1998). Partimos dos estudos de Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Kieran (2004; 2006), Kaput (1999) e Sousa (2004) para as discussões sobre o ensino da álgebra. O experimento didático foi realizado com uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública composta de 31 alunos em Aparecida de Goiânia, Goiás. Foram elaboradas duas atividades, um jogo e uma atividade lúdico-histórica, ambas são direcionadas para a noção de variável. A partir das análises das produções dos participantes da pesquisa, das filmagens e do diário de bordo da pesquisadora, constatamos que as atividades propostas podem favorecer para o ensino e aprendizagem da álgebra no nível médio. Essa constatação se deu pela compreensão, durante o experimento, de vários aspectos que caracterizam o pensamento algébrico de acordo com nossos referenciais. Constatamos também no desenvolvimento desta pesquisa, o quanto é complexo trabalhar o lúdico em sala de aula, não podendo ser considerado apenas o jogo pelo jogo ou a diversão pela diversão, mas sim, jogo e educação em um mesmo patamar. Assim, é feita uma discussão procurando estabelecer um equilíbrio na concepção do que é jogo, atividade lúdica.

APÊNDICE A – QUADRO DESCRITIVO

Quadro 16 – Ano de publicação, autor, títulos, nível e instituição

	ANO	AUTOR	PESQUISA	NÍVEL	IES
1	2008	DÉCHEN, T.	Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do ensino fundamental	Mestrado	UFSC
2		VIDAL, S. J. R. B.	Exploração didática do erro no ensino de equação de 1º grau	Mestrado	UECE
3	2009	BECHER, E. L.	Características do pensamento algébrico de estudantes do 1 ano do Ensino Médio	Mestrado	ULBRA
54		LUCAS, A.B.	Equações e Funções: Descontinuidades Conceituais	Mestrado	PUC/SP
6		SANTOS, D. M. F.	Ensino de equação de 1º grau: concepções de professores de Matemática e formação docente	Mestrado	UNESP
7		SILVA, R. M.	Diferentes usos da variável por alunos do Ensino Fundamental	Mestrado	PUC/SP
8	2010	CARDOSO, V. C.	Linguagem Algébrica: uma proposta de ensino com uso de jogos digitais	Mestrado	UEL
9		COSTA, W. R.	Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau	Mestrado	UFPE
10		REIS, E. S.	O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras	Mestrado	UFMS
11		SANTOS, G. L.	Como professores e alunos do Ensino Médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita	Mestrado	UEL
12	2011	ALMEIDA, J. R.	Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1 grau com uma incógnita: Um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7 ano do Ensino Fundamental	Mestrado	UFPE
13		FERNANDES, F. L. P.	Iniciação e práticas de letramento algébrico em aulas exploratória-investigativas	Mestrado	UNICAMP
14		PUTI, T. C.	A produção de significados durante o processo de ensino- aprendizagem- avaliação de equações polinomiais	Mestrado	UNESP
15		SALGUEIRO, N. C. G.	Como estudantes do Ensino Médio lidam com registros de representação semiótica de funções	Mestrado	UEL
16		VIEIRA, L. B.	Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino e aprendizagens da álgebra	Mestrado	UFGO
17	2012	PASSOS, D.S.	A Educação Algébrica no 8 ano do Ensino Fundamental das Escolas Públicas de Ribeirópolis- SE: Entendimentos dos professores de Matemática	Mestrado	UFSE
18		TREVISANI, F. M.	Estratégias de generalização de padrões matemáticos	Mestrado	UNESP
19	2013	GUADAGNINI, M. R.	O uso da fatoração na resolução de equação do 2 grau por alunos do 9 ano do ensino fundamental	Mestrado	UFMS
20		GUIMARÃES, J. F.	As concepções de Álgebra articuladas aos conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental	Mestrado	PUC/SP
21		MORAES, F. R.	Um estudo sobre erros na resolução do 1 grau com <i>software Aplusix</i>	Mestrado	UFMS
22		SILVA, E. P.	Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6 ano em um experimento de ensino	Mestrado	UEL

23		SOUZA, E. R.	Análise de Estratégias de alunos do Ensino Médio em Problemas de Cálculo de Área do Paralelogramo	Mestrado	UFPE
24	2014	FERREIRA, M. C. C.	Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: A Álgebra na escola e na formação do professor	Doutorado	UFMG
25		CARMO, P. F.	Um estudo a respeito da generalização de padrões nos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental	Mestrado	PUC/SP
26		GONÇALVES, A.	Análise das estratégias e erros dos alunos do 9º ano em questões da álgebra baseadas no Saesp de 2008 a 2011	Mestrado	PUC/SP
27		MIRANDA, T.L.	A noção de variável de alunos do Ensino Fundamental	Mestrado	UFPA
28		OLIVEIRA, F. A. P. V. S.	Analisando a mobilização de conhecimentos algébricos de professores de Educação Básica	Mestrado	UFABC
29		QUEIROZ, P. C.	Uma proposta para o ensino de função articulando as linguagens algébrica e geométrica	Mestrado	UFMS
30		SOUZA, N. F.	Contextualização no ensino da álgebra: Análise de livros didáticos do 7º ano	Mestrado	UFMS
31			CAMPOS, M. A.	Construindo Significados para o X do problema	Mestrado
32	2015	DEROSSI, B.	Objetos de aprendizagem e lousa digital no trabalho com álgebra: As estratégias dos alunos na utilização desses recursos	Mestrado	UFPR
33		NEVES, J. D.	O ensino e a aprendizagem de Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental: A formação do conceito de função	Mestrado	UNIUBE
34		SILVA, M.G.	Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do ensino fundamental	Mestrado	UNIUBE
35		VALENTIM, M. A.	Pensamento narrativo na aprendizagem matemática: Estudo com alunos do ensino fundamental na resolução de atividade de Álgebra	Doutorado	UNIAN
36		2016	AMÉRICO, L. R.	Estudo sobre os conhecimentos dos professores de Matemática na construção do processo de generalização	Mestrado
37	2016	MASETTI, C.	Análise de livros didáticos de Matemática: função exponencial	Mestrado	PUC/SP
38		MODTKOSKI, H. M.	Conceito matemático x algoritmo: Construção do conhecimento ou simples mecanização?	Mestrado	UFPR
39		NUNES, C. E.	Resolução de equações lineares e quadráticas com auxílio de material concreto	Mestrado	UNIAN
40		REZENDE, S. R. A.	Ensino desenvolvimental e investigação Matemática com o GeoGebra: Uma intervenção pedagógica sobre o Teorema de Tales	Mestrado	PUC/GOIÁS
41		SILVA JUNIOR, L. M.	O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos: Uma compreensão à luz da teoria das situações didáticas	Mestrado	UEPB
42	2017	ALVARENGA, R. C. M.	Um estudo sobre componentes da criatividade na solução de problemas matemáticos	Doutorado	UNESP

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

APÊNDICE B – QUADRO DE CONCEPÇÕES

Quadro 17 – Concepção de Álgebra e Concepção de Educação Algébrica

CONCEPÇÃO DE ÁLGEBRA E CONCEPÇÃO DE EDUCAÇÃO ALGÉBRICA		
Chevallard (1984)	Fiorentini, Miorin e Miguel (1993)	USISKIN (1995)
Aritmética generalizada	Linguístico-pragmática	Aritmética generalizada
Álgebra é vista como uma generalização de Aritmética enunciando propriedades numéricas; resolver problemas por meio da Aritmética.	Resolução de problemas de forma puramente mecânica e no uso de técnicas requeridas pelo “transformismo algébrico”; utilização de regras e propriedades para obtenção de expressões algébricas,	Álgebra interpretada como uma continuação das atividades Aritméticas, em que a introdução das letras caracteriza o início de Álgebra; traduzir e generalizar as variáveis.
Modelização	Fundamentalista-estrutural	Estudo de Procedimento
Definir o sistema: intra e extramatemático; construir modelo; utilizar o modelo para resolver o problema	Justifica cada passagem no transformismo algébrico; os alunos conseguem adquirir a capacidade de operar com conteúdos algébricos	Variáveis são interpretadas como incógnitas ou constantes e a resolução de problemas que envolve equações baseia-se em simplificar e resolver.
////////////////////	Fundamentalista-analógica	Estudo de Relações entre grandezas
////////////////////	Utiliza os recursos analógicos geométricos para justificar procedimentos algébricos, portanto, apoia-se a uma “Álgebra geométrica”.	Desponta a ideia de variável dependente ou independente sendo oportuno para a construção da noção básica de função.
////////////////////	////////////////////	Estudo das Estruturas
////////////////////	////////////////////	As variáveis não assumem valor numérico, mas podem ser manipuladas de modo a se obter expressões equivalentes, como monômios e polinômios

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

APÊNDICE C – QUADRO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Quadro 18 – Pensamento Algébrico

PENSAMENTO ALGÉBRICO	
Lins e Gimenez (1997)	Lee (2001)
Aritmetismo	Álgebra como linguagem
Produz significado por número e operações aritméticas	Linguagem algébrica para pensar e expressar pensamento matemático; expressar relacionamento quantitativo
Internalismo	Álgebra como pensamento
Considera os números e suas propriedades	Pensamento interno: pensamento a respeito de símbolos algébricos; pensamento envolvendo operações, ações ou transformações; ocorre raciocínio a respeito de padrões
Analiticidade	Álgebra como atividade
operar com os números desconhecidos, mas considerando-os como conhecidos, isto é, as incógnitas são tratadas como valores conhecidos	Modelar, resolver problemas algébrico por meio de desenhos, manipulações algébricas, úteis para pensar, comunicar e representar propriedades gerais de números e padrões.
////////////////////	Álgebra como ferramenta
////////////////////	Álgebra como ferramenta para resolução de problemas da ciência e vida, além de transportar e transformar mensagens
////////////////////	Álgebra como Aritmética generalizada
////////////////////	Generalizações de padrões; estudo da estrutura aritmética; estudo das expressões simbólicas, sem considerar o significado da letra
////////////////////	Álgebra como cultura
////////////////////	Envolve as visões anteriores, como a linguagem, pensamento, linguagem, entrelaçando-se no currículo da Aritmética e Geometria

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.