

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC/SP

Edson Rodrigues da Silva

**Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de
variação na Educação Básica**

Doutorado em Educação Matemática

São Paulo

2017

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC/SP

**Uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de
variação na Educação Básica**

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de doutor em **Educação Matemática**, sob a orientação da **Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva**.

São Paulo

2017

Banca Examinadora

Maria José Ferreira da Silva

Saddo Ag Almouloud

Gabriel Loureiro de Lima

Gilson Bispo de Jesus

Francisco Ugarte Guerra

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos, desde que citada a fonte.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Benedito Rodrigues da Silva e Vitória
Bezerra Rodrigues, que são as pessoas
mais importantes da minha vida.*

Bolsista CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

AGRADECIMENTOS

À Capes, pelo auxílio financeiro.

À Profa. Dra. Maria José Ferreira da Silva, pela brilhante orientação, apoio, dedicação, comprometimento e, principalmente, pelos ensinamentos que levo para a vida.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud, Dr. Gabriel Loureiro de Lima, Dr. Gilson Bispo de Jesus e Dr. Francisco Ugarte Guerra por aceitarem compor a banca examinadora deste trabalho, por suas críticas, sugestões e contribuições.

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, agradeço especialmente pela confiança, incentivo e pelas ideias e sugestões que acabaram guiando a construção deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Gabriel Loureiro de Lima, pela paciência e atenção em momentos que precisei de sua ajuda.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Aos amigos pelo apoio, convívio, compreensão e conforto.

Agradeço especialmente aos meus pais Benedito Rodrigues da Silva e Vitória Bezerra Rodrigues pelo incentivo, apoio e por tudo que fizeram e ainda fazem por mim.

À minha família, pela compreensão em todos os momentos que estive envolvido neste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para o desenvolvimento desta pesquisa, meu sincero “muito obrigado”.

O autor.

SILVA, E. R. **Uma base de conhecimento para o ensino de taxa de variação na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, e de modo a guiar nossa investigação, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: Qual base de conhecimentos é necessária para o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Para responder essa questão recorremos a um estudo bibliográfico como aporte metodológico, em que as fontes de investigação constituíram-se de pesquisas que versam a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica, dos documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de Matemática no Brasil e na maioria dos estados brasileiros, de materiais didáticos utilizados em diferentes períodos na Educação Básica e de artigos científicos. O referencial teórico baseou-se na Teoria da Base de Conhecimentos para o Ensino, especificamente nas concepções de Shulman, Mishra e Koehler, Lima e Silva e Ball, Thames e Phelps e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard. Essas teorias nos auxiliaram a compor um cenário que evidenciasse os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. São quatro categorias de conhecimentos docentes fundamentais e necessárias para o ensino de taxa de variação na Educação Básica mediado por tecnologias: conhecimento do conteúdo, conhecimento didático, conhecimento tecnológico e conhecimento pedagógico, em que suas diferentes interações vão ao encontro da concepção de conhecimento como uma rede de significados e que, para nós, constituem uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação nesse nível de escolaridade. A construção de um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de taxa de variação na Educação Básica evidenciou uma Organização Matemática que compreende os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo para este ensino. Os conhecimentos didáticos para o ensino de taxa de variação compreendem a gama de conhecimentos referentes a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria Antropológica do Didático, a Engenharia Didática, a noção de Contrato Didático e a noção de Obstáculo. O conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação compreende os conhecimentos acerca da interface, funcionalidade e características de *softwares* dinâmicos de Matemática que podem ser usados em favor dos processos de ensino e de aprendizagem dessa noção. O conhecimento pedagógico para o ensino de taxa de variação compreende a gama de conhecimentos que o professor precisa mobilizar para preparar, estruturar e avaliar tarefas, motivar e apoiar a autonomia dos estudantes, organizar os diferentes materiais disponíveis, gerenciar a sala de aula, lidar com a subjetividade e a heterogeneidade em sala de aula, com o tempo cognitivo de cada aluno, com grupos diversificados, etc.

Palavras-chave: Taxa de variação; Base de conhecimentos para o ensino; Conhecimento didático; Conhecimento do conteúdo; Conhecimento tecnológico; Conhecimento pedagógico.

ABSTRACT

The present research aims to build a knowledge base for the teaching of rate of change in Basic Education. For this, and in order to guide our research, we have established the following research question: What knowledge base is required for the teaching of rate of change in Basic Education? To answer this question, we used a bibliographical study as a methodological contribution, in which the sources of investigation consisted of researches that deal with the processes of teaching and learning of the rate of change in Basic Education, of the official documents that guide and organize the teaching of Mathematics in Brazil and in most Brazilian states, of the didactic materials used in different periods in Basic Education and scientific articles. The theoretical framework was based on the Knowledge Base Theory for Teaching, specifically in the conceptions of Shulman, Mishra and Koehler, Lima and Silva and Ball, Thames and Phelps and in the Anthropological Theory of Didactics of Chevallard. These theories helped us to compose a scenario that evidences the know that, when studied, conditions the construction of the necessary knowledge for the teaching of rate of change in Basic Education. There are four categories of teaching knowledge of fundamental and for the teaching of rate of change in Basic Education mediated by technologies: content knowledge, didactic knowledge, technological knowledge and pedagogical knowledge, in which their different interactions meet the conception of knowledge as a network of meanings and that, for us, constitute a knowledge base for the teaching of rate of change in this level of schooling. The construction of an Epistemological Model of Reference for the teaching of rate of change in Basic Education evidenced a Mathematical Organization that includes the know that, when studied, condition the construction of content knowledge for this teaching. The didactic knowledge for the teaching of rate of change includes the range of knowledge concerning the Theory of Didactical Situations, the Theory of Registers of Semiotic Representation, the Theory of Conceptual Fields, the Anthropological Theory of the Didactics, Didactic Engineering, the notion of Didactic Contract And the notion of Obstacle. The technological knowledge for the teaching of rate of change comprises the knowledge about the interface, functionality and characteristics of dynamic mathematical software that can be used in favor of the teaching and learning of this notion. The pedagogical knowledge for rate of change teaching comprises the range of knowledge that the teacher needs to mobilize to prepare, structure and assess tasks, to motivate and support student autonomy, to organize the different materials available, to manage the classroom, to deal with subjectivity and heterogeneity in the classroom, with the cognitive time of each student, with diverse groups, etc.

Keywords: Rate of change; Knowledge base for teaching; Didactic knowledge; Content knowledge; Technological knowledge; Pedagogical knowledge.

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1. CONCENTRAÇÃO DE NICOTINA NA CORRENTE SANGUÍNEA.....	103
GRÁFICO 2. GRÁFICOS DE FUNÇÕES CRESCENTES EM UM INTERVALO $A = [0, 7]$	152
GRÁFICO 3. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = 3x + 1$	154
GRÁFICO 4. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax + b$, COM $a > 0$	156
GRÁFICO 5. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax + b$, COM $a < 0$	157
GRÁFICO 6. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = x^2 - 4x + 4$	160
GRÁFICO 7. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = x^2 - 4x + 4$	161
GRÁFICO 8. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = x^2 - 4x + 4$	162
GRÁFICO 9. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = x^2 - 4x + 4$	163
GRÁFICO 10. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax^2 + bx + c$, COM $a > 0$	164
GRÁFICO 11. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax^2 + bx + c$, COM $a > 0$	165
GRÁFICO 12. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM UMA RETA TANGENTE A f EM UM PONTO $P(x_1, f(x_1))$	166
GRÁFICO 13. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f CRESCENTE EM UM INTERVALO I	168
GRÁFICO 14. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f DECRESCENTE EM UM INTERVALO I	169
GRÁFICO 15. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f QUE ADMITE DERIVADA NULA EM UM PONTO P_5 DO SEU DOMÍNIO	169
GRÁFICO 16. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM PONTO DE MÁXIMO LOCAL EM P_2	170
GRÁFICO 17. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM PONTO DE MÍNIMO LOCAL EM P_2	171
GRÁFICO 18. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM CONCAVIDADE PARA CIMA.....	172
GRÁFICO 19. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM CONCAVIDADE PARA BAIXO.....	173
GRÁFICO 20. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO f COM PONTO DE INFLEXÃO EM $(x_1, f(x_1))$	173

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. RELAÇÃO ENTRE SABER E CONHECIMENTO.....	62
FIGURA 2. CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO.....	75
FIGURA 3. CONHECIMENTO TECNOLÓGICO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO.	80
FIGURA 4. TRIÂNGULO PEDAGÓGICO	87
FIGURA 5. QUADRILÁTERO DIDÁTICO.....	88
FIGURA 6. TRIÂNGULO DIDÁTICO	89
FIGURA 7. TRIÂNGULO DA APRENDIZAGEM PSICOGENÉTICA	89
FIGURA 8. HEXÁGONO DIDÁTICO	90
FIGURA 9. TETRAEDRO DIDÁTICO	93
FIGURA 10. HEXAEDRO DIDÁTICO	95
FIGURA 11. AS DIFERENTES CATEGORIAS DE CONHECIMENTOS DOCENTES	96
FIGURA 12. DOMÍNIOS DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO	105
FIGURA 13. UM ESQUEMA QUE REPRESENTA UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.....	114
FIGURA 14. DEFINIÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO f	137
FIGURA 15. TIPO DE TAREFA QUE EXPLORA A IDEIA DE LIMITE	140
FIGURA 16. DEFINIÇÃO DE DERIVADA.....	141
FIGURA 17. ESQUEMA QUE RELACIONA OS SABERES QUE FUNDAMENTAM A CONSTRUÇÃO DOS CONHECIMENTOS DO CONTEÚDO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO	174

LISTA DE TABELAS

TABELA 1. REPRESENTAÇÃO TABULAR DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = 3x + 1$	154
TABELA 2. REPRESENTAÇÃO TABULAR DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax + b$, COM $a > 0$	156
TABELA 3. REPRESENTAÇÃO TABULAR DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax + b$, COM $a < 0$	158
TABELA 4. REPRESENTAÇÃO TABULAR DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = x^2 - 4x + 4$	160
TABELA 5. REPRESENTAÇÃO TABULAR DA FUNÇÃO f DEFINIDA POR $f(x) = ax^2 + bx + c$, COM $a > 0$	164

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 PROBLEMÁTICA	17
2.1 REVISÃO DE LITERATURA	17
2.2 TAXA DE VARIAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS.....	36
2.3 JUSTIFICATIVA	42
2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	48
2.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	51
3 REFERENCIAL TEÓRICO	55
3.1 UMA CONCEPÇÃO DE CONHECIMENTO	55
3.2 BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO	64
3.2.1 A CONCEPÇÃO DE LEE SHULMAN	65
3.2.2 CONHECIMENTO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO.....	78
3.2.3 CONHECIMENTO DIDÁTICO PARA O ENSINO	85
3.2.4 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO	99
3.2.5 UM ESQUEMA QUE REPRESENTA UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA	112
3.3 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	121
4 UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA	131
4.1 CONHECIMENTO DO CONTEÚDO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO.....	131
4.2 CONHECIMENTO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO	175
4.2.1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	180
4.2.2 A TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	185
4.2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	190
4.2.4 A NOÇÃO DE CONTRATO DIDÁTICO.....	196
4.2.5 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO.....	202
4.2.6 METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA	207
4.2.7 NOSSAS CONSIDERAÇÕES.....	210
4.3 CONHECIMENTO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO	214
4.4 CONHECIMENTO PEDAGÓGICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO	219
4.5 INTERAÇÕES ENTRE AS CATEGORIAS DE CONHECIMENTOS FUNDAMENTAIS DE UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO	222
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	227
REFERÊNCIAS	241

1 INTRODUÇÃO

Cientes de que os estudantes da Educação Básica têm condições de construir significado para a ideia de taxa de variação, conforme constatamos em nosso trabalho de mestrado, e de que os professores de Matemática desse nível de escolaridade consideram o ensino de ideias fundamentais do Cálculo importante para a formação básica de seus alunos, conforme constataram Guedes e Assis (2009), nos perguntamos o porquê estas ideias, especificamente a ideia de taxa de variação, não são devidamente exploradas na escola básica, pois, quando feito, se é ofertado apenas um verniz superficial acerca das mesmas, o que não pode ser considerado como um ensino eficaz, capaz de levar o estudante ao aprendizado.

Na busca por respostas para esse questionamento nos deparamos com uma situação ímpar, em que se atribui esse fato à falta de preparo do professor da Educação Básica para ensinar rudimentos de Cálculo, como é o caso, por exemplo, do Currículo de São Paulo, que apesar de sugerir que o estudo de taxa de variação seja explorado na educação básica como precursor do Cálculo, não o faz nos materiais de apoio disponibilizados à rede pública de ensino por considerar as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral distantes da prática docente.

Para nós, esse distanciamento/despreparo, na maioria das vezes, é oriundo da situação caótica em que se encontra a Educação Básica brasileira, em que 52% dos professores em exercício não têm formação específica na área que lecionam¹. Na Matemática esse número ainda é maior, como é o caso da cidade de São João da Boa Vista – SP, em que 88% dos professores que lecionam essa disciplina não possuem formação específica para fazê-lo², por exemplo.

Diante desse cenário, voltamos nossa atenção para os professores que são licenciados em Matemática e nos perguntamos o porquê estes também não são aptos a ensinar noções de Cálculo, especificamente a noção de taxa de variação,

¹ <http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/32691/alunos-enfrentam-falta-de-preparo-de-professores-em-sala-de-aula/>. Acesso em 20/08/2017.

² <http://g1.globo.com/sp/sao-carlos-regiao/noticia/2014/07/88-dos-professores-de-matematica-nao-tem-licenciatura-em-sao-joao.html>. Acesso em 20/08/2017.

se todos estudaram Cálculo Diferencial e Integral na graduação, disciplina obrigatória em toda licenciatura em Matemática.

Na busca por respostas para este questionamento surgiram diversas outras inquietações referentes aos conhecimentos, habilidades e competências que estes professores deveriam possuir para o ensino da noção de taxa de variação na Educação Básica que, em última instância, nos levaram a inferir que a problemática referente ao ensino de taxa de variação nesse nível de escolaridade não é oriunda, exclusivamente, da falta de preparo destes docentes; para nós, apenas faltam elementos que os auxiliem a construir uma base de conhecimentos própria para essa finalidade.

Fundamentados nessa inferência, nos propomos a construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, cientes de que os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, ou de qualquer outra ciência, são contínuos e dinâmicos, em que seus protagonistas (professores e estudantes) defrontam-se com episódios únicos, condicionados a peculiaridades de diversas naturezas e contextos, passamos a realizar uma pesquisa bibliográfica com a finalidade de delinear um panorama do atual ensino de taxa de variação na Educação Básica que nos desse subsídios à construção desta base.

Assim, pretendendo compor um cenário que revelasse os saberes cujo estudo fundamenta a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, nos propomos a responder a seguinte questão de pesquisa: Qual base de conhecimentos é necessária para o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Para respondê-la voltamos nossa atenção aos estudos referentes a Teoria da Base de Conhecimentos para o Ensino, especificamente às concepções de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006), Lima e Silva (2015) e Ball, Thames e Phelps (2008), nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard (1991) e estruturamos a presente investigação em cinco capítulos, sendo o primeiro esta introdução.

No segundo capítulo, passamos a delinear nossa problemática, em que apresentamos uma revisão de literatura acerca dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica, um estudo dos

documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática nesse nível de escolaridade, justificamos a presente investigação, delimitamos nosso problema de pesquisa, com a questão de pesquisa e os objetivos almejados e o finalizamos com a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados.

No terceiro capítulo apresentamos nossa concepção de conhecimento como uma rede de significados e passamos a construir um referencial teórico para subsidiar a construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, em que as concepções de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006), Lima e Silva (2015) e Ball, Thames e Phelps (2008) fundamentaram a construção de um esquema que, para nós, representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral. Este esquema, em consonância com a Teoria Antropológica do Didático, nos forneceu os elementos necessários para identificar, explorar e apresentar os saberes cujo estudo condiciona a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

No quarto capítulo, realizamos um estudo ecológico para identificar o Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica, sua razão de ser oficial e propomos um Modelo Epistemológico de Referência alternativo a este modelo dominante, em que evidenciamos e discutimos os saberes que fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo para ensino de taxa de variação. Também evidenciamos os conhecimentos didáticos, tecnológicos e pedagógicos para o ensino de taxa de variação e discutimos a respeito das possíveis interações entre esses quatro componentes fundamentais do conhecimento docente.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos nossas considerações finais, em que retomamos os aspectos que consideramos relevantes na presente investigação, nossa questão de pesquisa, os objetivos almejados, as questões eleitas nas três dimensões do nosso problema didático e finalizamos apontando algumas sugestões para estudos futuros.

2 PROBLEMÁTICA

Começamos o capítulo com uma revisão de literatura das pesquisas que tratam de processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica. Em seguida, discorremos a respeito do tratamento dado à taxa de variação em documentos oficiais que direcionam e organizam a Educação Básica no Brasil e em alguns estados brasileiros, visto que nem todos disponibilizam um Currículo Oficial de Matemática e que não são todos os Currículos que fazem alusão ao ensino de taxa de variação. Com isso, delineamos um panorama do ensino de taxa de variação na Educação Básica brasileira. Por fim, expomos nossas justificativas, delimitamos nosso problema de pesquisa e apresentamos a metodologia e os procedimentos metodológicos adotados.

2.1 REVISÃO DE LITERATURA

Iniciamos a revisão elegendo as palavras-chave que utilizamos na busca em bancos de dados de programas de pós-graduação de universidades brasileiras, no banco de teses da CAPES, na revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) e em anais de congressos nacionais e internacionais. As palavras-chave utilizadas emergiram do tema de pesquisa, foram elas: “taxa de variação”, “taxa de variação instantânea”, “taxa de variação média”, “taxa de variação na Educação Básica”, “Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio”, “derivada no Ensino Médio”, “conhecimentos docentes para o ensino de taxa de variação” e “base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação”. Também utilizamos as mesmas palavras-chave em espanhol, inglês e francês, além de realizar buscas específicas em bancos de teses de programas de pós-graduação de universidades francesas, espanholas e portuguesas.

Em um primeiro momento, nos deparamos com diversas pesquisas que tratam do estudo de taxa de variação, todavia, como nosso interesse estava em pesquisas direcionadas à Educação Básica, esse foi nosso critério de seleção. Dessa forma, selecionamos onze pesquisas que, para nós, vão ao encontro de

nossa investigação, das quais, três são artigos publicados em anais de congressos, cinco são dissertações de mestrado e três são teses de doutorado.

Frente à quantidade de pesquisas encontradas, utilizamos três categorias para separá-las. A primeira foi composta por aquelas que desenvolveram trabalhos com estudantes, a segunda, por as que são ensaios teóricos e, a terceira, por as que trabalharam com professores. Dessa forma, buscamos evidenciar os pontos comuns, discrepâncias e relações entre as três categorias.

A primeira categoria foi formada pelas pesquisas de André (2008), Pereira (2009), Matos (2013), Silva, E. (2012), Silva e Silva (2015), Spina (2002), Villa-Ochoa, Jaramillo e Esteban (2011), Villa-Ochoa (2012) e Lucas (2015), a segunda pela pesquisa de Rezende (2003), e a terceira pela pesquisa de Guedes e Assis (2009).

André (2008), em sua pesquisa de mestrado, elaborou e aplicou uma sequência de atividades para um grupo de estudantes do Ensino Médio com o objetivo de explorar a ideia de derivada a partir da mobilização das ideias de taxa de variação média e instantânea, sem utilizar a definição de limite como ponto de partida, mas sim como uma ideia intuitiva para auxiliar na compreensão da derivada. Para isso, a autora fundamentou-se nas teorias de David Tall, especificamente, na Teoria de Imagem de Conceito, definida como o conjunto de estruturas cognitivas associadas a um conceito, incluindo todas as imagens mentais, processos e propriedades relacionados a ele, e na Teoria de Raiz Cognitiva, definida “como sendo um conceito âncora que o aprendiz encontra facilidade para compreender, e que, ainda assim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída.” (ANDRÉ, 2008, p. 18).

A autora caracterizou sua pesquisa como qualitativa, e utilizou um questionário inicial para avaliar o conhecimento dos estudantes a respeito da noção de função, considerada, por ela, fundamental para a compreensão da ideia de derivada e, sem a qual, não seria possível prosseguir com a sequência de atividades. Os resultados evidenciaram que “a maioria dos participantes apresentou entendimento em relação ao conceito de função, função polinomial do 1º grau, velocidade média e velocidade instantânea.” (ANDRÉ, 2008, p. 62).

Feito isso, na primeira etapa da sequência a autora explorou a noção de variação de uma função por meio do estudo da relação de interdependência entre duas grandezas; na segunda apresentou a “taxa de variação média (TVm) como uma razão das variações de duas grandezas” evidenciando, sempre que possível, “que esta mesma (TVm) pode oferecer uma análise imprecisa do comportamento de uma função num determinado intervalo.” (ANDRÉ, 2008, p. 51). Na terceira conceituou taxa de variação instantânea a partir da noção de retidão local com o auxílio do *software Graphmatica* e, na última, explorou a noção de derivada a partir do estudo de taxa de variação instantânea.

Após percorrer as quatro etapas, os estudantes realizaram uma atividade final de cunho avaliativo, que ocorreu uma semana após o desenvolvimento da última etapa. Os resultados evidenciaram que os alunos compreenderam e mobilizaram corretamente os conhecimentos adquiridos na sequência de ensino, pois, segundo a pesquisadora, todos “apresentaram, de forma geral, desempenho satisfatório, mostrando entendimento inicial do conceito de derivada, ou, pelo menos, uma familiaridade intuitiva com o conceito que possibilite desenvolvimentos formais posteriores.” (ANDRÉ, 2008, p. 87). A análise dos dados coletados durante a aplicação das atividades e após a atividade final também revelou que as ideias exploradas foram aprimoradas com o decorrer dos processos de ensino e de aprendizagem, favorecendo a construção de significado para a ideia de derivada.

Frente a estes resultados, a autora concluiu que estudantes do Ensino Médio têm condições de compreender a ideia de derivada a partir do estudo de taxa de variação, desde que estes possuam os conhecimentos referentes a ideia de função, e finalizou seu trabalho ressaltando que a aplicação de propostas de ensino que têm por finalidade explorar a ideia de derivada no Ensino Médio “exige uma conscientização, do professor do Ensino Médio e Fundamental, da necessidade de revisão do currículo no sentido de priorizar conteúdos essenciais como sugerem os PCN (2000) e os PCNEM (2002).” (ANDRÉ, 2008, p. 90).

Pereira (2009), em sua pesquisa de mestrado, também elaborou e aplicou uma sequência de ensino para um grupo de estudantes do Ensino Médio, cuja finalidade era levá-los a perceber a taxa de variação instantânea enquanto aproximações sucessivas da taxa de variação média com intervalos cada vez

menores e, como consequência, a reta tangente a uma curva em um ponto P do seu domínio enquanto aproximações sucessivas de retas secantes a essa curva definidas por P e por outro ponto qualquer da curva que se aproxima cada vez mais de P. Para isso, o autor baseou-se em pressupostos da Engenharia Didática e no mesmo referencial teórico utilizado por André (2008), as Teorias de Imagens de Conceito e Raiz cognitiva.

De modo similar a André (2008), o autor aplicou um questionário inicial para avaliar o conhecimento dos estudantes a respeito do conceito de função, em que os resultados evidenciaram “que os estudantes não estavam habituados a pensar como e de que forma variam as funções” (PEREIRA, 2009, p. 130), pois a maioria deles, apesar de mobilizar um pensamento variacional para o estudo com funções afim, não conseguiu transpô-lo para o estudo variacional de outras funções polinomiais.

Feito isso, o autor propôs seis fichas de atividades para explorar a ideia de taxa de variação instantânea, cujos resultados evidenciaram que a maioria dos sujeitos da pesquisa compreendeu esta ideia enquanto aproximações sucessivas da taxa de variação média em intervalos cada vez menores, e a reta tangente a uma curva em um ponto P do seu domínio enquanto aproximações sucessivas de retas secantes à curva que passam por P e um ponto M qualquer da curva que se aproxima cada vez mais de P. Ao fazer essa constatação e considerar a forma com que os alunos progrediram durante a realização das fichas de atividade, o autor considerou validada sua sequência, e concluiu que estudantes do Ensino Médio são capazes de compreender a ideia de taxa de variação instantânea a partir do estudo de taxas de variação média calculadas em intervalos cada vez menores, indo em direção aos resultados obtidos por André (2008).

Diante destes resultados, e do fato de o ensino de Cálculo ser tecnicista, em que são priorizadas a construção e manipulação de técnicas operatórias em detrimento de levar os estudantes à construção de significado para suas ideias fundamentais, Pereira (2009, p. 166) finaliza seu trabalho ressaltando que a tão propalada “falta de base” para o aprendizado de noções de Cálculo encontra-se, exclusivamente, na “pequena habilidade apresentada pela maioria de nossos alunos em procedimentos algébricos”, o que, de acordo com ele, é imprescindível

para o sucesso no aprendizado de Cálculo e para uma sólida formação Matemática dos estudantes.

Concordamos que possuir habilidades inerentes às manipulações algébricas é condição necessária para o aprendizado das noções fundamentais do Cálculo, mas não suficiente. Também se faz necessário possuir outras habilidades como, por exemplo, as referentes à leitura, interpretação e manipulação de representações gráficas e tabulares, como foi explorado pelo próprio autor em sua sequência de ensino.

Ao que nos parece, o autor se contradiz ao dar esse destaque às manipulações algébricas em detrimento à mobilização de outros registros de representação, visto que todas as fichas propostas em sua sequência de ensino foram fundamentadas na análise e interpretação de representações gráficas e tabulares, deixando às manipulações algébricas um papel auxiliar na construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea.

Fundamentado no mesmo referencial teórico utilizado por André (2008) e Pereira (2009), Matos (2013) também desenvolveu uma sequência de ensino para investigar a compreensão de um grupo de estudantes da terceira série do Ensino Médio acerca das ideias de derivada e integral a partir da mobilização de ferramentas disponíveis nos *softwares WolframAlpha* e *Geogebra*. Para isso, e com base no método de Experimento de Ensino que, de acordo com o autor, tem como objetivo principal experimentar a aprendizagem e o raciocínio matemático de estudantes, o pesquisador levantou a hipótese de que a taxa de variação pode ser uma raiz cognitiva para a noção de derivada, visto que, no seu entendimento, ela atende a quatro condições fundamentais:

- i. a taxa de variação é parte central do conceito de derivada e pode ser usada como ponto de partida do estudo da derivada.
- ii. através de exemplos permite-se o desenvolvimento inicial do processo cognitivo, fazendo a análise da taxa de variação média até a taxa de variação instantânea, inclusive graficamente.
- iii. apresenta condições para desenvolvimentos posteriores como no cálculo integral de como as coisas se acumulam, a partir da análise de como elas variam.
- iv. no decorrer do seu desenvolvimento, a derivada como taxa de variação apresenta infinitas aplicações em várias áreas do conhecimento. (MATOS, 2013, p. 34).

Diante disso, o autor confeccionou e aplicou uma sequência de ensino dividida em quatro momentos, em que no primeiro os participantes exploraram a sintaxe do WolframAlpha. No segundo, foram aplicadas as atividades que contemplavam o estudo de derivada a partir da noção de taxa de variação. No terceiro, foram aplicadas atividades que enfatizavam o cálculo da medida da área da região delimitada por uma curva que representa uma função f e pelo eixo das abscissas e a relação entre tal procedimento e a ideia de integral. No último momento, foram exploradas cinco atividades com a finalidade de levar os estudantes a construir relações entre as ideias de derivada e integral de modo que, ao final, fosse possível “analisar as principais dificuldades e compreensões emergentes na abordagem do TFC (Teorema Fundamental do Cálculo) e ainda enriquecer a imagem dos conceitos de derivada e integral” a partir do referencial teórico adotado. (MATOS, 2013, p. 121).

Por meio do confronto entre as soluções apresentadas, as verbalizações e as atitudes dos estudantes frente às atividades propostas, o autor pôde afirmar que “os participantes mostraram ter construído uma boa imagem do conceito de derivada” e que a noção de integral, estudada como a medida da área da região delimitada pela curva que representa uma função f com o eixo das abscissas “parece ter ficado fortemente impregnada na imagem do conceito dos alunos.” (MATOS, 2013, p. 148).

Ante estes resultados, ao final do trabalho, como André (2008) e Pereira (2009) também concluíram, Matos (2013, p. 149) concluiu que estudantes do Ensino Médio são capazes de construir significado para a noção de derivada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P do seu domínio. O pesquisador também observou que estudantes desse nível de escolaridade têm condições de compreender a ideia de integral e de relacioná-la com a noção de derivada, e que esse tipo de abordagem pode e deve ser explorada “desde as séries iniciais, por meio da comparação de alturas, preços, volumes, entre outros”, e finalizou sua pesquisa advertindo que não é adequado que as noções de derivada e integral sejam exploradas no Ensino Médio do mesmo modo como é feito em cursos de Cálculo ministrados no Ensino Superior.

Já a investigação de mestrado de Silva, E. (2012), diferente das pesquisas já citadas, se baseou na Teoria de Registros de Representação Semiótica, que enfatiza a diversidade e a articulação de diferentes registros de representação nas atividades Matemáticas, e na Teoria das Situações Didáticas (TSD). A partir desses referenciais teóricos, e fundamentado em pressupostos da Engenharia Didática, o autor elaborou e aplicou uma sequência didática para um grupo de estudantes da terceira série do Ensino Médio com a finalidade de levá-los a construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir da mobilização da noção de taxa de variação média.

A sequência foi aplicada em quatro encontros. O primeiro objetivou explorar as ideias básicas de taxa de variação, o segundo consistiu em construir com os estudantes os "conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média" (SILVA, E., 2012, p. 98), o terceiro explorou exclusivamente a ideia de taxa de variação instantânea (taxa de variação em um ponto), e o último objetivou levar os estudantes a perceber que a taxa de variação da taxa de variação de uma função polinomial de 2º grau é sempre a mesma, ou seja, é constante.

Por meio do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*, o autor considerou validada a sequência didática, e concluiu que estudantes do Ensino Médio podem construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea por meio de uma abordagem intuitiva da noção de taxa de variação média. O autor também concluiu que "a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea deu-se somente por meio da mobilização simultânea dos registros de representação algébrica, gráfica e tabular" (SILVA, E., 2012, p. 131), e que os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação instantânea na escola básica devem ser pautados em situações de ensino que permitam a coordenação entre dois, ou mais registros de representação.

Corroborando as conclusões de André (2008), Pereira (2009) e Matos (2013), Silva, E. (2012) finaliza sua investigação afirmando que estudantes do Ensino Médio têm condições de construir significado para a ideia de derivada, estudada como a taxa de variação instantânea, desde que não se traga para esse

nível de escolaridade as estruturas e terminologias de um curso superior de Cálculo.

No artigo de Silva e Silva (2015), também fundamentado na Teoria de Registros de Representação Semiótica e na TSD, os autores desenvolveram uma situação de aprendizagem para “levar um grupo de estudantes à apropriação dos conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média.” (SILVA; SILVA, 2015, p. 2).

Fundamentados em pressupostos da Engenharia Didática, os pesquisadores propuseram cinco atividades, em que as duas primeiras tinham a finalidade de “levar os estudantes a perceber que a velocidade média de um móvel, em um determinado intervalo, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um intervalo muito pequeno, ou em um instante qualquer” (SILVA; SILVA, 2015, p. 3), e as três últimas objetivavam levar os estudantes a construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea por meio da mobilização dos registros de representação algébrica, tabular e gráfica.

Na fase de análise *a posteriori* e validação, os pesquisadores constataram que apesar de os alunos não terem mobilizado algumas noções Matemáticas previstas *a priori* e de terem se defrontado com alguns “obstáculos” que necessitaram a intervenção do professor aplicador como, por exemplo, na conversão das unidades de medidas necessárias ao cálculo da velocidade média de um móvel, a “situação de aprendizagem parece tê-los levado a modificações comportamentais frente ao objeto matemático taxa de variação, o que caracterizou a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média.” (SILVA; SILVA, 2015, p. 11). Ante estes resultados, os autores consideraram validada a situação de aprendizagem, e concluíram que a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea deu-se somente por meio da mobilização simultânea dos registros de representação algébrica, gráfica e tabular, como também concluiu Silva, E. (2012), e indo ao encontro dos resultados das pesquisas de Pereira (2009), André (2008) e Matos (2013).

Já a pesquisa de mestrado de Spina (2002), apesar de também ter sido desenvolvida com estudantes do Ensino Médio a fim de explorar a noção de derivada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P do

seu domínio, difere das pesquisas já citadas por estar fundamentada em pressupostos de Modelagem Matemática de um fenômeno da natureza.

Nessa direção, e entendendo que “o sucesso de um modelo matemático resulta da capacidade de representar e manipular o conhecimento qualitativo e quantitativo das variáveis envolvidas e as formas de interação entre elas” (SPINA, 2002, p. 23), seu trabalho consistiu no uso de ideias fundamentais do Cálculo Diferencial para a criação de um modelo matemático que auxiliasse os estudantes na compreensão de como ocorre a formação de alvéolos, que são os recipientes aglomerados de cera que armazenam o mel de abelhas em uma colmeia.

A partir de algumas atividades introdutórias, em conjunto com as conjecturas e inferências levantadas pelos estudantes a respeito de um modelo “ideal” de alvéolo, a autora desenvolveu o processo de modelagem a fim de levá-los a construir significado para a ideia de derivada a partir da mobilização da noção de função em consonância com alguns conhecimentos geométricos, trigonométricos e algébricos.

Foi no sentido de compreender a otimização da capacidade de armazenagem de mel em um alvéolo que ocorre naturalmente em uma colmeia e de compreender o esforço necessário para minimizar a área da superfície do alvéolo mantendo sua capacidade inalterada que, de acordo com a autora, emergiu a ideia de derivada no processo de modelagem. Após ter explorado as ideias envolvidas no estudo de máximos e mínimos, de taxa de variação e de ter mobilizado a ideia de derivada na construção de modelos de alvéolos e no estudo do crescimento populacional de uma colmeia de abelhas, a autora pôde concluir que os sujeitos de sua investigação interpretaram a derivada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P de seu domínio, como também concluíram os autores já citados.

Diante das análises das pesquisas apresentadas até aqui, apesar das divergências quanto aos métodos e referenciais teóricos adotados, todas confluem para uma única conclusão, de que estudantes do Ensino Médio têm condições de construir significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média, desde que este ensino não seja uma antecipação de

um curso superior de Cálculo Diferencial, tal como propõem Silva, E. (2012) e Matos (2013).

Indo ao encontro das pesquisas de mestrado já apresentadas, o artigo de Villa-Ochoa, Jaramillo e Esteban (2011), apoiado no pressuposto de que se deve construir, desde o Ensino Fundamental, diferentes caminhos e aproximações significativas para a compreensão e uso de conceitos imersos no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, apresenta um estudo de caso com a finalidade de explorar o processo de compreensão da ideia de taxa de variação instantânea como uma aproximação do conceito de derivada por quatro estudantes egressos do Ensino Médio.

Fundamentado na Teoria para a Evolução da Compreensão Matemática de Pirie e Kieren, que “[...] sugere que o processo de compreensão de um tópico ou conceito matemático deve considerar o conjunto de noções, procedimentos e ferramentas, que se tornam um ponto de partida à compreensão” (VILLA-OCHOA; JARAMILLO; ESTEBAN, 2011, p. 3, tradução nossa)³, o estudo foi desenvolvido em três momentos. No primeiro, foi explorado um questionário composto por cinco atividades que objetivavam verificar se os estudantes reconheciam a taxa de variação em ambientes gráficos, algébricos e tabulares. O segundo fundamentou-se no reconhecimento das características básicas da ideia de taxa de variação, que consistiu em levar os estudantes a reconhecer e interpretar a taxa de variação constante, a representação gráfica de determinadas funções, as representações algébrica e tabular dessas funções e a taxa de variação média. E o último, dividido em quatro atividades, teve por objetivo verificar os diferentes modos de compreensão da ideia de taxa de variação instantânea.

Feito isso, e com base no confronto entre a produção dos estudantes e suas verbalizações, os pesquisadores concluíram que a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea emergiu da mobilização de alguns conceitos já “vistos” pelos estudantes como, por exemplo, os conceitos de variável, função e proporcionalidade. Todavia, o fato de estes conceitos estarem mal compreendidos

³ [...] sugiere que el proceso de comprensión de un tópico o concepto matemático debe tener en cuenta el conjunto de nociones, procedimientos y herramientas los cuales se convierte en el punto de partida de la comprensión. (VILLA-OCHOA; JARAMILLO; ESTEBAN, 2011, p. 3).

pelos estudantes, evidenciou que o processo de aprendizagem dos mesmos não foi suficiente para favorecer a evolução da compreensão da ideia de taxa de variação instantânea, o que, de acordo com os autores, impossibilitou determinar com exatidão o conhecimento primitivo (primeiro nível da Teoria para Evolução da Compreensão Matemática) dos estudantes acerca desta ideia.

Diante destes resultados, os autores finalizam o artigo sugerindo que sejam aprofundadas as discussões atinentes ao modo como a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea requer a coordenação de diferentes registros de representação, tal como sugerem Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015).

Villa-Ochoa (2012), em sua tese de doutorado, também realizou um estudo de caso com estudantes egressos do Ensino Médio com o objetivo de identificar às características inerentes a compreensão da noção de taxa de variação instantânea como um meio de aproximação da ideia de derivada. Para isso, e também fundamentado na Teoria para a Evolução da Compreensão Matemática, que em seu trabalho “[...] se constitui em uma ferramenta que atuou como uma lente através da qual se pôde observar o processo de evolução da compreensão Matemática de um indivíduo ou de um grupo de indivíduos” (VILLA-OCHOA, 2012, p. 44, tradução nossa)⁴, o autor desenvolveu a pesquisa em duas fases.

Na primeira, denominada “fase de imersão”, foram selecionados os voluntários e aplicado um questionário para verificar a compreensão dos mesmos a respeito do conceito de função, como também fizeram André (2008) e Pereira (2009). Os resultados evidenciaram que os estudantes relacionavam corretamente a noção de taxa de variação com as ideias imersas no conceito de função, o que, em um primeiro momento, parece contradizer os resultados obtidos no questionário inicial aplicado por Pereira (2009), mas que não o faz, pois enquanto os sujeitos da pesquisa de Pereira (2009) foram alunos da primeira e segunda séries do Ensino Médio, os sujeitos da pesquisa de Villa-Ochoa (2012) foram estudantes egressos

⁴ [...] se constituye en una herramienta que actúa como una lente a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la comprensión matemática de un individuo o de un grupo individuos. (VILLA-OCHOA, 2012, p. 44).

do Ensino Médio que cursavam a disciplina de Matemática Operacional⁵ no primeiro ano universitário de um curso de Sistemas de Informação e Gestão em Saúde. Isto nos leva a inferir que o fato de estes estudantes já terem concluído a Educação Básica pode ter sido determinante para os resultados do questionário da pesquisa de Villa-Ochoa (2012) divergirem dos resultados obtidos no questionário aplicado por Pereira (2009).

Na segunda fase, denominada de “Aprofundamento”, foram aplicadas as atividades do “módulo de ensino”, com a finalidade de atingir o objetivo primeiro da pesquisa, cujos resultados evidenciaram que “o uso de *softwares* educativos se tornou um dos elementos de promoção da compreensão da taxa de variação pelos estudantes.” (VILLA-OCHOA, 2012, p. 157, tradução nossa)⁶. A análise dos resultados também evidenciou três momentos conceituais associados à compreensão da noção de taxa de variação como uma maneira de se aproximar ao conceito de derivada: a compreensão da taxa de variação média, da taxa de variação instantânea e da função taxa de variação, caracterizando um percurso similar ao desenvolvido por André (2008), Pereira (2009), Matos (2013), Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015).

A partir das produções dos estudantes, das verbalizações e dos resultados obtidos nas duas fases da pesquisa, o autor concluiu que a compreensão da ideia de taxa de variação como uma maneira de se aproximar da noção de derivada provocou uma evolução no entendimento que os estudantes possuíam a respeito das ideias de razão, taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Também foi constatado que o enfoque em aspectos procedimentais ou em manipulações algébricas não garante uma maior compreensão da noção de taxa de variação, o que corrobora com os resultados obtidos por Silva, E. (2012), para quem, a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea não se dá por meio da mobilização de um registro de representação isoladamente, e sim, por meio da

⁵ Este curso tem por finalidade corrigir as deficiências que os estudantes de primeiro semestre do programa de Sistemas de Informação e Gestão em Saúde (GESIS), da Faculdade Nacional de Saúde Pública – Universidade de Antioquia, apresentam referente aos conteúdos básicos de Matemática.

⁶ El uso de *software* educativo se convirtió en uno de los elementos que promovió en las estudiantes la comprensión de la tasa de variación. (VILLA-OCHOA, 2012, p. 157).

coordenação de dois ou mais registros, e contrapõe uma das conclusões de Pereira (2009), que considera que o sucesso no processo de aprendizagem das ideias fundamentais do Cálculo está nas habilidades do estudante em realizar manipulações algébricas.

Ao finalizar seu trabalho, Villa-Ochoa (2012) ressalta dois fatores que, segundo ele, influenciaram diretamente na compreensão da noção de taxa de variação como um meio de aproximação da ideia de derivada, são eles: a utilização dos *softwares Geogebra e Modellus* e as interações entre os estudantes e entre o investigador e os estudantes que, de acordo com o pesquisador, foram cruciais para atingir o objetivo primeiro do trabalho, pois somente a partir destas interações os estudantes tomaram consciência das relações que se estabeleciam entre os objetos matemáticos estudados.

Como se pode notar, apesar de Villa-Ochoa (2012) ter desenvolvido uma pesquisa de doutorado fundamentada em um referencial teórico diferente daqueles mobilizados nas pesquisas de mestrado já apresentadas, seus resultados apenas as confirmam. Se as pesquisas de mestrado já haviam constatado que estudantes do Ensino Médio são capazes de construir significados para a ideia de derivada a partir das noções de taxa de variação média e instantânea, é possível concluir, sem muito esforço, que estudantes egressos do Ensino Médio também podem construir esse significado.

Por sua vez, a tese de doutorado de Lucas (2015), fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e inserida no Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática⁷, que pressupõe a necessidade de se construir modelos epistemológicos da atividade matemática institucional, teve por objetivo criar uma possível razão de ser para o Cálculo Diferencial Elementar⁸ no

⁷ O programa epistemológico na didática surgiu quando Guy Brousseau, nas primeiras formulações da *teoria das situações didáticas* (TSD) nos anos 70 (Brousseau, 1972), instituiu a necessidade, para a didática, de criar um modelo próprio, explícito e compatível com a atividade matemática que não a reduza ao estudo dos processos cognitivos dos alunos. Esta é a origem do que Brousseau denominou *epistemologia experimental ou didática fundamental*. (LUCAS, 2015, p. 417, tradução nossa).

⁸ Lucas (2015) denomina de Cálculo Diferencial Elementar todo tipo de Organização Matemática escolar que é nomeada de Cálculo ou de Análise que, comumente, é explorada na etapa final do Ensino Secundário português junto com alguns elementos do Cálculo Diferencial e Integral que é explorado no primeiro ano universitário do Ensino Superior português.

campo da Modelização Funcional (construção e manipulação do modelo) entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Ensino Superior de Portugal.

Em um primeiro momento, a autora realizou um estudo ecológico⁹ para identificar as restrições que incidem sobre a vida escolar da Modelização Funcional entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Ensino Superior, cujos resultados evidenciaram que o modelo docente habitual e o modelo epistemológico da atividade matemática constituem a maior fonte dessas restrições. O estudo também permitiu identificar o modelo epistemológico dominante que condiciona o ensino das ideias do Cálculo Diferencial Elementar nas instituições escolares, em que se constatou que as dificuldades de interpretação da derivada como uma taxa de variação, provocadas pelo fenômeno da rigidez da nomenclatura, são coerentes com a descrição do modelo epistemológico dominante nas instituições escolares.

Diante disso, a autora construiu um Modelo Epistemológico de Referência (MER) estruturado em uma rede de Organizações Matemáticas norteada por processos sucessivos de Modelização Matemática para o ensino das ideias básicas do Cálculo Diferencial Elementar, cuja materialização deu-se por meio de um Diagrama de Atividades que esquematiza, *a priori*, os principais tipos de tarefas que constituem atividades de Modelização Matemática para explorar o Cálculo Diferencial Elementar entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Ensino Superior.

Estas atividades foram, então, aplicadas para uma turma de vinte e dois estudantes do primeiro ano de um curso de Medicina Nuclear de uma Universidade Portuguesa, cujos resultados evidenciaram que as notas finais dos estudantes foram melhores do que as obtidas por estudantes do mesmo curso em anos anteriores, ou seja, que os alunos que estudaram as ideias do Cálculo Diferencial Elementar a partir do MER proposto obtiveram melhor rendimento nas avaliações finais, se comparados com alunos do mesmo curso e período de anos anteriores. Nas palavras da autora, com a implementação do Diagrama de Atividades, “os

⁹ O estudo ecológico “ênfatisa as condições necessárias para que seja possível o estudo institucionalizado da matemática e põe em evidencia as restrições que incidem sobre este estudo.” (LUCAS, 2015, p. 436, tradução nossa).

alunos tiveram a oportunidade de desenvolver mais habilidades do que as inicialmente pretendidas e previstas.” (LUCAS, 2015, p. 346, tradução nossa)¹⁰.

Desse modo, esse MER, segundo a pesquisadora, constitui uma razão de ser alternativa para o Cálculo Diferencial Elementar na esfera da Modelização Funcional entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Superior de Portugal e, dentro deste âmbito,

[...] uma das razões de ser do Cálculo Diferencial Elementar reside em sua economia e operacionalidade para construir modelos funcionais, para trabalhar em todas as etapas do processo de Modelização Funcional e para responder muitas das questões que se levantam tanto no sistema modelizado como no próprio modelo. (LUCAS, 2015, p. 191, tradução nossa)¹¹.

A pesquisadora destaca, ainda, que o MER proposto explicita as funções que o Cálculo Diferencial Elementar pode desempenhar para potencializar o desenvolvimento da Modelização Funcional entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Superior. Todavia, ao interpretar os resultados obtidos no estudo ecológico a partir dos conhecimentos detectados no MER, a autora constatou que não há a presença destas funções. Segundo ela, quando se constroem modelos funcionais, o que quase nunca ocorre, as ferramentas do Cálculo Diferencial Elementar desempenham apenas um papel auxiliar ou secundário. No final do Ensino Secundário praticamente nunca são exploradas tarefas de construção de modelos funcionais a partir de dados empíricos nem, tampouco, se explora a taxa de variação como um conhecimento prévio para realizar uma aproximação de um modelo discreto para outro contínuo.

Diante do MER construído, e interpretando-o como uma possível razão de ser para o Cálculo Diferencial Elementar no âmbito da Modelização Funcional, é esperado que os estudantes possuam uma gama de conhecimentos necessários para trabalhar com Cálculo Diferencial Elementar do modo como é proposto no Diagrama de Atividades. Todavia, esta gama de conhecimentos não é explorada

¹⁰ los alumnos han tenido la oportunidad de desarrollar un mayor número de competencias que las inicialmente pretendidas y previstas. (LUCAS, 2015, p. 346).

¹¹ Una de las razones de ser del cálculo diferencial elemental reside en su economía y operatividad para construir modelos funcionales, para trabajar en todas las etapas del proceso de Modelización Funcional y para responder a muchas de las cuestiones que se plantean tanto en el sistema modelizado como en el propio modelo. (LUCAS, 2015, p. 191).

no Ensino Secundário de Portugal. Diante disso, Lucas (2015) adverte que é somente a partir de algumas modificações curriculares que tais conhecimentos podem ser explorados entre a etapa final do Ensino Secundário e início do Superior, de modo que os estudantes possam explorar as ideias imersas no estudo do Cálculo Diferencial Elementar como precursoras dos processos de Modelização Funcional e de construção de significado para a ideia de derivada.

Na segunda categoria que utilizamos para analisar as pesquisas que versam a respeito da ideia de taxa de variação na Educação Básica, está a tese de doutorado de Rezende (2003), que se propõe a realizar um ensaio teórico acerca das dificuldades de natureza epistemológica do ensino superior de Cálculo com viés voltado ao ensino de Matemática na escola básica. O autor se mostra convicto que ao explorar as ideias fundamentais do Cálculo na Educação Básica, a maioria das dificuldades no ensino e na aprendizagem de Matemática pode diminuir, “além de diminuir a sobrecarga e a responsabilidade de um curso de Cálculo inicial no Ensino Superior.” (REZENDE, 2003, p. 47). Diante disso, sua pesquisa teve por objetivo mapear as dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, de modo a evidenciar o papel do Cálculo na formação do cidadão e na construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, e fundamentado na ideia de “mapa”, entendida como um instrumento de análise de um “novo tipo de conhecimento que se anuncia, fruto da transição paradigmática da ciência moderna para o conhecimento pós-moderno” (REZENDE, 2003, p. 53), o autor constatou que o problema do ensino superior de Cálculo não está na “falta de base” dos estudantes egressos da Educação Básica, e sim no fato de não se explorar as ideias fundamentais do Cálculo nos ensinamentos fundamental e médio. Segundo o pesquisador, as ideias balizadoras do Cálculo são evitadas, ignoradas, ou tratadas superficialmente pelos professores da Educação Básica.

Na escola básica estuda-se, por exemplo, funções crescentes/decrescentes, mas não se qualifica seu crescimento/decrescimento. O estudo de funções é caracterizado, em grande parte, via registro de representação algébrica, em que se prioriza o uso de técnicas e manipulações algébricas em detrimento da construção de significado para suas ideias fundamentais. Fato esse,

que de acordo com o autor, “é claramente um sintoma de evitação das ideias básicas do Cálculo e constitui-se [...] na principal fonte de obstáculos de natureza epistemológica para a resolução de problemas de taxas relacionadas e de otimização.” (REZENDE, 2003, p. 408).

Frente a essa realidade, e convencido que a origem das dificuldades no ensino de Cálculo encontra-se em outros contextos, que transcendem seu próprio espaço-tempo local, Rezende (2003) usou cinco dualidades essenciais do Cálculo e de seu ensino¹² para identificar as dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Sua análise evidenciou, em última instância, um único lugar-matriz destas dificuldades: “o da omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.” (REZENDE, 2003, p. 402).

Tendo em vista este lugar-matriz, o autor propõe que o primeiro grande passo para solucionar os problemas referentes ao ensino e a aprendizagem do Cálculo, é “[...] fazer emergir o conhecimento do Cálculo do ‘esconderijo forçado’ a que este está submetido no ensino básico.” (REZENDE, 2003, p. 402). Para isso, o pesquisador sugere que na Educação Básica, o ensino de Matemática não seja processado somente por meio de suas vias tradicionais (via da Aritmética, da Álgebra e da Geometria), deve-se acrescentar uma quarta via, que o autor denomina de “via da Mecânica”, por meio da qual a variabilidade e o movimento podem ser incorporados à arquitetura do conhecimento matemático abordado nesse nível de escolaridade. Dessa forma, Rezende (2003) espera não somente preparar o educando para o ensino superior de Cálculo, mas também permitir que esse campo do conhecimento matemático desempenhe seu papel na construção do conhecimento deste estudante e, principalmente, aprimore o próprio ensino de Matemática como um todo.

Diante disso, é evidente que o pesquisador não propõe a antecipação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral estudada no ensino superior para a Educação Básica, mas sim, que as ideias fundamentais do Cálculo participem da

¹² Cinco dualidades essenciais do Cálculo e de seu ensino: discreto/contínuo; finito/infinito; variabilidade/permanência; local/global; sistematização/construção. (REZENDE, 2003, p. 325).

tecedura do conhecimento matemático abordado nesse nível da educação, tal como também propõem Silva, E. (2012) e Matos (2013).

Já a terceira categoria, composta pelo artigo de Guedes e Assis (2009), apresenta uma pesquisa desenvolvida com trinta professores de Matemática do Ensino Médio com o objetivo de verificar se o ensino de ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral era aceito por esses professores em suas aulas.

Baseados no método da pesquisa descritiva, que permite compreender os fatores que influenciam diretamente o comportamento do fenômeno e das variáveis envolvidas, e entendendo que as ideias fundamentais do Cálculo devem ser exploradas no âmbito do Ensino Médio, Guedes e Assis (2009, p. 6) aplicaram um questionário uniformizado, composto por questões fechadas e por algumas “perguntas mistas, em que existiam quesitos de respostas já prontos para o professor escolher as mais adequadas segundo sua opinião.”

Cada questionário foi dividido em blocos, formados por um tema específico composto por cinco perguntas que foram respondidas por todos os professores, cujos resultados revelaram, em última instância, que a maioria “dos professores participantes da pesquisa concorda que o ensino de elementos de Cálculo seria importante para o aluno do Ensino Médio.” (GUEDES; ASSIS, 2009, p. 10). Apesar disso, a pesquisa evidenciou que este ensino não é posto em prática por diversos motivos, dentre eles, os autores apontam para a falta de qualificação dos professores para ensinar rudimentos de Cálculo e para o baixo nível de conhecimento matemático que os estudantes dispõem ao ingressar no Ensino Médio.

No que se refere aos professores de Matemática do Ensino Médio, [...] a pesquisa constatou que mais de 80% dos participantes se consideraram despreparados para ensinar esse assunto no Ensino Médio, um dado preocupante, uma vez que se espera que um professor de Matemática Licenciado seja capaz de ensinar os elementos do Cálculo de forma básica. (GUEDES; ASSIS, 2009, p. 11).

Além disso, a pesquisa também constatou que muitos professores não conhecem ou têm uma interpretação equivocada dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), “alguns chegam a afirmar que os parâmetros já trazem o currículo de Matemática do Ensino Médio todo pronto e que o professor tem que o seguir a risca” (GUEDES; ASSIS, 2009, p. 12), o que não é verdade. Tal interpretação pode

se tornar um “obstáculo” frente aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, tornando-os difíceis e custosos. Nas palavras de Rossini (2006, p. 333), não há uma cultura, por parte dos professores, em ler os documentos oficiais que direcionam e organizam a Educação Básica, o que, de acordo com André (2008), pode inviabilizar o ensino de Matemática e, conseqüentemente, das ideias fundamentais do Cálculo nesse nível de escolaridade.

Rossini (2006) ainda destaca, que a leitura dos PCN não é de fácil assimilação, pelo contrário, pressupõe um professor que possua tanto conhecimentos do conteúdo, quanto pedagógicos. Além disso, a compreensão dos PCN também pressupõe um professor que possua conhecimentos tecnológicos, uma vez que este documento indica o uso de tecnologias em prol do ensino e da aprendizagem da Matemática, e conhecimentos inerentes à Didática da Matemática, que o auxiliem na identificação dos fatores que influenciam positivamente o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Ante ao exposto, é possível perceber que as três categorias elencadas convergem para um ponto comum, de que o ensino de taxa de variação pode e deve ser explorado na Educação Básica, seja para o exercício pleno da cidadania, por conta de uma melhora no ensino superior de Cálculo ou por conta de uma melhora no próprio ensino de Matemática. Enquanto a primeira categoria evidencia a possibilidade de se explorar a ideia de taxa de variação instantânea a partir da mobilização da noção de taxa de variação média, a segunda ressalta a necessidade de se explorar tais ideias nesse nível de escolaridade, e a terceira apresenta os motivos pelos quais os professores do Ensino Médio não as exploram em sala de aula.

Não encontramos pesquisas que explorem os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação com foco no professor, nem que estudam as escolhas docentes e como elas interferem, *a priori*, nestes processos. Também não encontramos pesquisas que explorem os conhecimentos docentes que podem e/ou devem ser mobilizados para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Diante disso, e uma vez que os resultados das pesquisas apresentadas evidenciam que estudantes do Ensino Médio têm condições de construir significado para a ideia de taxa de variação, consideramos importante voltar nossa atenção à perspectiva

do professor, aos fatores e conhecimentos que influenciam diretamente a ação docente, tendo em vista, inclusive, que os professores da Educação Básica consideram de vital importância o ensino de ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral para seus alunos, conforme foi constatado por Guedes e Assis (2009).

Nesse sentido, e em consonância com o atual cenário das pesquisas que tratam de processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica, no item seguinte apresentamos um estudo dos documentos oficiais que direcionam e organizam os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Educação Básica brasileira para que possamos identificar se o ensino de taxa de variação é, ou não, proposto nesse nível de escolaridade e sua razão de ser oficial.

2.2 TAXA DE VARIAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS

Buscamos os documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de Matemática na Educação Básica brasileira no site do MEC (Ministério da Educação) e nos sites de secretarias de educação estaduais. A nível nacional, analisamos a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, o Guia de livros didáticos: PNLD (Programa Nacional do Livro Didáticos) 2015 e a segunda versão da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que contempla orientações voltadas aos ensinamentos Fundamental e Médio. Já a nível estadual, analisamos os Currículos Oficiais de Matemática de vinte e dois estados e do Distrito Federal, pois não estão disponibilizados, ou não encontramos, os Currículos Oficiais de Matemática do Amazonas, Bahia, Rio Grande do Norte e Roraima.

É a lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional brasileira. Ela discorre a respeito dos aspectos gerais do sistema educacional brasileiro e propõe uma Base Nacional Comum de Conhecimentos para a Educação Básica que deve ser contemplada em cada

escola ou sistema de ensino. De acordo com esse documento, os currículos do Ensino Fundamental e Médio “devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.” (BRASIL, 1996, p. 23).

Com base nessa lei, foram elaborados os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 2000), que têm por finalidade relacionar as competências e habilidades indicadas na Base Nacional Comum de Conhecimentos, estabelecida pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96), com os conhecimentos específicos de cada disciplina. No caso da Matemática, os PCN caracterizam-se como um documento de subsídio à implementação das diretrizes e bases da educação nacional, e têm por objetivo direcionar o aprendizado dos estudantes “no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico.” (BRASIL, 2000, p. 6).

Desse modo, a Matemática estudada na Educação Básica, especificamente no Ensino Médio, passa a ser vista não somente por meio de seu caráter formativo ou instrumental, mas também como uma ciência, com suas nuances e características próprias, em que o estudo de seus diversos ramos deve propiciar ao estudante “o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo.” (BRASIL, 2000, p. 41).

Nessa perspectiva, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio orientam que a escolha de conteúdos para esse nível de escolaridade deve ser pautada no atual processo de desenvolvimento brasileiro, uma vez que seu sustento e o estabelecimento de novos patamares de desenvolvimento dependem veementemente de mão de obra qualificada, “o que implica na reestruturação da escola com vistas à introdução de novos conteúdos e de novas metodologias de ensino capazes de promover a oferta de uma formação integral.” (BRASIL, 2013, p. 157). Assim, as finalidades educacionais do Ensino Médio, particularmente de Matemática, passam a ter maior ambição formativa, tanto no que tange ao tratamento empregado às informações, quanto no que se refere ao desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a continuidade

de estudos e para a conquista da cidadania plena. Nesse sentido, os PCN estabelecem como objetivos específicos para o Ensino Médio, levar os estudantes a desenvolver “conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e [...] conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo.” (BRASIL, 2000, p. 6).

Nessa direção, os PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos PCN) propõem que o ensino de Matemática se dê por meio de “um conjunto de temas que possibilitem o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos.” (BRASIL, 2002, p. 120). Para isso, são sugeridos três eixos estruturadores a serem desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do Ensino Médio: Álgebra: números e funções; Geometria e Medidas; Análise de dados. É no eixo da Álgebra, subdividido em duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria, que se deve explorar a ideia de taxa de variação.

Complementando os PCN+ e com o intuito de melhor esclarecer suas sugestões, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomendam que os conteúdos básicos de Matemática sejam organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade, a serem trabalhados simultânea e articuladamente. É no bloco de *Funções*, especificamente no estudo do comportamento das funções polinomiais de primeiro e segundo grau e das funções exponencial e logarítmica, que são propostas as discussões referentes ao estudo de taxa de variação. Nesse contexto, é proposto que a ideia de taxa de variação seja explorada por meio de situações reais de crescimento populacional, por meio de suas possíveis aplicações na Matemática Financeira e em aplicações em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Física e na Química, buscando a integração dos conhecimentos explorados nesse nível de escolaridade por meio de um trabalho interdisciplinar, que relacione a Matemática com as demais disciplinas da grade curricular.

O fato de o estudo de taxa de variação favorecer a interação da Matemática com outras disciplinas vai ao encontro das sugestões da BNCC (BRASIL, 2016), ao orientar que o ensino de Matemática na Educação Básica deve ser

contextualizado e interdisciplinar, e que, ao mesmo tempo, deve auxiliar o estudante no desenvolvimento da capacidade de abstrair, de perceber o que pode ser generalizado para outros contextos e de usar sua imaginação. Na disciplina de Física, por exemplo, os conhecimentos inerentes à taxa de variação podem ser explorados no estudo de mecânica, quando se pode relacioná-los ao estudo do movimento, enquanto na disciplina de Química pode ser explorado no contexto do estudo dos gases.

Referindo-se a interação da Matemática com as demais disciplinas que compõem a grade curricular do Ensino Médio, o Currículo de São Paulo adverte que

[...] vivemos uma época em que as atividades interdisciplinares e as abordagens transdisciplinares constituem recursos fundamentais para a construção do significado dos temas estudados, contribuindo de modo decisivo para a criação de centros de interesse nos alunos. (SÃO PAULO, 2010, p. 28).

Nesse sentido, e com uma perspectiva educacional voltada à construção de significado para o objeto de estudo, o Currículo de São Paulo propõe que “o destaque dado às taxas de variação pode servir de base para uma apresentação das primeiras noções de Cálculo” (SÃO PAULO, 2010, p. 38), privilegiando uma abordagem interdisciplinar entre Matemática e Física. Este documento orienta, ainda, que “a noção de taxa de variação, ou seja, a medida da rapidez com que uma das grandezas interdependentes varia em relação à outra, será destacada como um prelúdio ao estudo do Cálculo” (SÃO PAULO, 2010, p. 43), contrariando o foco do Ensino Básico, que não tem por finalidade introduzir o estudo de um conteúdo específico do Ensino Superior.

Todavia, apesar dessas orientações, o Currículo de São Paulo não as coloca em prática nos materiais de apoio disponibilizados à rede pública de ensino por considerar o estudo das ideias fundamentais do Cálculo um tema distanciado da prática docente. Mas é sabido que os conteúdos curriculares dos cursos de Matemática (Licenciatura ou Bacharelado) de toda Instituição de Ensino Superior devem contemplar uma grade de conteúdos comuns, em que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é obrigatória, conforme foi estabelecido nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, promulgada em 2002.

Indo em direção às orientações pautadas no Currículo de São Paulo, o Currículo de Pernambuco orienta que o ensino de taxa de variação seja iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental e que perdure por todos os anos do Ensino Médio. O documento sugere que um momento propício para explorar a noção de taxa de variação é no estudo de Geometria Analítica, em que

[...] os significados geométricos de coeficientes de equações (da reta e da circunferência), de retas paralelas, perpendiculares, tangentes e secantes, podem contribuir bastante para a compreensão das relações entre a geometria e a álgebra. [...] Assim, as articulações da geometria analítica com outras áreas da Matemática escolar podem ser exploradas de forma proveitosa. Por exemplo, as ideias como crescimento, decrescimento, taxa de variação de uma função, inclinação de um gráfico, entre outras, podem ser relacionadas com o estudo das diferentes funções abordadas no Ensino Médio. (PERNAMBUCO, 2012, p. 122).

É esperado que os estudantes compreendam a ideia de taxa de variação por meio da mobilização de mais de um registro de representação, o que corrobora os resultados das pesquisas de Silva, E. (2012), Silva e Silva (2015) e Villa-Ochoa (2012), e vai ao encontro das orientações para o estudo de funções apresentadas na BNCC, que considera “a conversão entre representações algébricas e gráficas de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas.” (BRASIL, 2016, p. 576).

Por sua vez, os Currículos do Acre (2010), Piauí (2013), Minas Gerais (2010) e Mato Grosso (2010) orientam que sejam criadas situações de ensino que propiciem condições para que os alunos aprendam e desenvolvam as capacidades de ler, interpretar e descrever as características fundamentais de representações gráficas de funções polinomiais a partir do estudo da variabilidade. O Currículo de Minas Gerais (2010, p. 70), por exemplo, orienta que a ideia de taxa de variação seja explorada no contexto do estudo de funções, o que possibilita “discutir problemas que envolvam a questão da taxa de variação através da análise de notícias que falam de crescimento rápido ou lento” por meio de situações de ensino que exploram a ideia de proporcionalidade a partir dos registros de representação gráfica, tabular e algébrica. O Currículo de Mato Grosso orienta, ainda, que sejam explorados centros de interesses que permeiem desde a evolução do conceito de derivada até algumas aplicações em situações concretas. De acordo com esse documento, as ideias matemáticas imersas no estudo do Cálculo Diferencial, especialmente as imersas no estudo da derivada, “devem ser incentivadas quando

surgirem o contexto e a oportunidade no momento educacional e sempre abordadas de maneira conceitual, nunca como uma técnica em si.” (MATO GROSSO, 2010, p. 147).

Os Currículos do Distrito Federal, Goiás, Maranhão, Paraíba, Paraná e Rio Grande do Sul fazem menção ao ensino da noção de taxa de variação desde os anos finais do Ensino Fundamental e em todo o Ensino Médio em seus quadros de conteúdos, mas não detalham as finalidades deste ensino, tampouco o justificam, como fizeram os Currículos já apresentados.

Já a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016), que não substitui os Currículos Estaduais, mas que tem por objetivo apontar os conhecimentos matemáticos imprescindíveis para a Educação Básica, orienta que o estudo da ideia de taxa de variação esteja presente desde o último ano do Ensino Fundamental e em todos os anos do Ensino Médio. Para o eixo de Funções, por exemplo, é esperado que o estudante compreenda os modelos de variação que se estabelecem entre as grandezas envolvidas em diferentes situações, de modo a construir significado para a ideia de taxa de variação em consonância com os estudos do crescimento, decrescimento e dos pontos de máximo e mínimo de uma função. Já no eixo da Geometria, o estudo de taxa de variação é sugerido como um meio articulador entre Geometria Analítica e Álgebra, quando é possível explorar o significado geométrico dos coeficientes de equações, de retas paralelas, perpendiculares, entre outras, como também é proposto no Currículo de Pernambuco.

Como podemos observar, o ensino de taxa de variação está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, na Base Nacional Comum Curricular e na maioria dos Currículos analisados. Apenas os Currículos do Amapá, Alagoas, Ceará, Espírito Santo, Mato Grosso do Sul, Pará, Rio de Janeiro, Rondônia, Sergipe, Santa Catarina e Tocantins não fazem menção ao ensino deste conteúdo.

Em direção às propostas para o ensino de taxa de variação destes documentos, o Guia de Livros Didáticos – PNLD (BRASIL, 2014, p.88), adverte que o estudo deste objeto matemático “extrapola o âmbito interno da Matemática e é também fundamental no estudo dos fenômenos nas ciências naturais e humanas”, corroborando o fato de que a ideia de taxa de variação pode modelar problemas

interdisciplinares. Dentre as seis coleções de Matemática aprovadas no PNLD 2015 para o Ensino Médio, que serão analisadas no capítulo 4 do presente trabalho, cinco trazem a ideia de taxa de variação como um conteúdo a ser explorado no contexto do estudo de funções, sendo que quatro delas, Dante (2014), Iezzi et al. (2013), Paiva (2013) e Leonardo (2013), propõem apenas o estudo de taxa de variação média na primeira série, enquanto a coleção de Smole e Diniz (2013) vai além, propondo o estudo das ideias de limite, continuidade e derivada na terceira série.

Diante destes estudos e da análise das pesquisas apresentadas em nossa revisão de literatura, temos elementos suficientes para conjecturar e interpretar uma possível razão de ser oficial para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos de orientações propostas para dar sentido ao seu ensino. Em suma, a ideia de taxa de variação é explorada na Educação Básica como uma ferramenta de auxílio no estudo do comportamento de funções. A análise dos documentos oficiais evidenciou que a ideia de taxa de variação é utilizada apenas como uma técnica de resolução de problemas, ela não é explorada como uma ideia fundamental à construção do conhecimento matemático do estudante, tal como propõe Rezende (2003).

Ante ao exposto, entendemos que no panorama atual da Educação Básica há indícios favoráveis para o ensino de taxa de variação, visto que todos os documentos oficiais a nível nacional e a maioria dos currículos estaduais orientam o estudo deste conteúdo. Além disso, nossa revisão de literatura evidenciou que estudantes desse nível de escolaridade pode construir significado para a noção de taxa de variação instantânea a partir da ideia de taxa de variação. Diante disso, a seguir, passamos a justificar o trabalho que pretendemos desenvolver.

2.3 JUSTIFICATIVA

Concordamos com Artigue (1995), que ao dissertar a respeito dos problemas epistemológicos, cognitivos e didáticos defrontados no ensino das ideias fundamentais do Cálculo reitera a preocupação, por parte de professores e pesquisadores, em desenvolver uma primeira aproximação do Cálculo adaptada aos estudantes de hoje em dia, menos algébrica e algoritmizada do que as

anteriores, de modo que eles construam maior significado às ideias que irão mobilizar em futuras aprendizagens ou para o exercício pleno da cidadania.

Nesse sentido, todas as pesquisas analisadas que trabalharam com estudantes evidenciaram a possibilidade de se explorar, no Ensino Médio, a ideia de taxa de variação como um prelúdio à noção de taxa de variação instantânea com um enfoque menos rígido e formal do que a abordagem “tradicional”. Na análise dos documentos oficiais também é possível notar, claramente, uma preocupação com o ensino de taxa de variação nesse nível de escolaridade.

Um aspecto relevante observado nos estudos já realizados é a possibilidade de interação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, especialmente a Física, por meio de situações de ensino que propiciam a exploração da ideia de taxa de variação como uma ferramenta de auxílio na construção de significado para as ideias imersas no estudo de Mecânica. Para Ávila (2006), a noção de derivada, interpretada como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P do seu domínio, deve ser ensinada logo na primeira série do Ensino Médio, quando pode ser articulada harmoniosamente ao estudo do movimento, promovendo a interação entre Matemática e Física. Segundo o autor, “um dos principais objetivos na introdução da derivada logo no início da primeira série do Ensino Médio é a interdisciplinaridade com a Cinemática.” (ÁVILA, 2006, p. 36).

Nessa direção, e referindo-se a algumas possibilidades de interação da Matemática com outras áreas do conhecimento, Simmons (1987, p. 86) ressalta que

[...] o conceito de derivada está intimamente relacionado com o problema de calcular a velocidade de um objeto móvel. [...] Poderia parecer que só os estudantes de Física achariam vantajoso preocupar-se com ideias precisas acerca da velocidade. No entanto, essas ideias dão uma introdução bastante fácil ao conceito geral de taxa de variação e esse conceito é importante em muitos outros campos de estudo, incluindo as ciências biológicas e sociais – especialmente Economia.

Além disso, a análise das pesquisas apresentadas em nossa revisão de literatura também evidenciou outros aspectos relevantes dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação que nos auxiliam na construção desta justificativa. Dentre eles, convém destacar a utilização de computadores e

calculadoras gráficas como ferramentas de auxílio na construção de significado para a ideia de taxa de variação e, por conseguinte, para a noção de função, requerendo do professor um conhecimento mínimo referente as tecnologias educacionais.

Observamos que estes recursos são, na maioria das vezes, mobilizados por conta de suas características dinâmicas, pois, em alguns casos, propiciam a visualização de mais de um registro de representação simultaneamente, por meio de diferentes janelas de visualização, além de permitir a interação com diferentes representações gráficas ao mesmo tempo, o que seria uma tarefa árdua com lápis e papel. Todas as pesquisas analisadas que realizaram trabalhos com estudantes apoiaram-se em recursos tecnológicos. Apesar da diversidade de programas computacionais utilizados, existem ainda diversos *softwares* disponíveis para o ensino de Matemática que podem ser utilizados no ensino de taxa de variação, cuja escolha poderia contribuir para o alcance de resultados diferentes dos obtidos nas pesquisas analisadas, dentre esses, podemos citar o *Maple*, o *Winplot*, o *Cabri-géomètre*, etc.

Outro fator relevante observado em nossa revisão de literatura refere-se aos motivos e justificativas apresentadas para a inserção e exploração de rudimentos de Cálculo na Educação Básica. Algumas das pesquisas analisadas propõem a inclusão das ideias fundamentais do Cálculo na Educação Básica para amenizar a discrepância entre o que é ensinado nesse nível de escolaridade com os conteúdos específicos de um curso superior de Cálculo, como se pode observar, por exemplo, em Rezende (2003), para quem, uma boa estratégia para resolver os problemas de aprendizagem do ensino superior de Cálculo dá-se por meio da emersão das ideias do Cálculo do “esconderijo forçado” a que este está submetido na Educação Básica. De acordo o pesquisador, “não se trata de se antecipar a disciplina de Cálculo para o Ensino Médio – como, inclusive, já sugeriram alguns autores –, mas, sobretudo, de se iniciar, desde cedo, uma preparação para o Cálculo.” (REZENDE, 2003, p. 393).

Concordamos que uma preparação para o ensino superior de Cálculo amenizaria seus problemas de aprendizagem, conforme afirmam alguns pesquisadores. Mas qual seria a finalidade dessa preparação para os jovens que

não se defrontarão com o Cálculo em sua formação superior? E para os jovens que não ingressarão em um curso superior?

Para Ávila (1991, p. 8), o Cálculo deve ser estudado no Ensino Médio por conta de seu caráter modernizador,

[...] porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno.

De acordo com Silva, E. (2012, p. 14), “é importante que a ideia de taxa de variação faça parte do conhecimento matemático de todos”, pois, identificar quando

[...] uma função cresce, decresce ou é constante deve ser uma tarefa trivial para qualquer cidadão que tenha concluído a Educação Básica, entretanto, para perceber o quão rápido essa representação gráfica cresce ou decresce, ou seja, para qualificar seu crescimento ou decrescimento é necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação. (SILVA, E., 2012, p. 14).

Todavia, “essa não é a realidade da maior parte da população brasileira, uma vez que a maioria dos cidadãos não tem discernimento para interpretar, por exemplo, um gráfico de intenção de votos divulgado em um meio de comunicação impresso.” (SILVA; SILVA, 2016, p. 52). O cidadão percebe o crescimento/decrescimento de um gráfico que representa as intenções de voto para um determinado candidato quase que instantaneamente, mas não percebe o quão rápido estas intenções estão crescendo/decrescendo, ou se este gráfico é, ou não, enganoso. Concordamos com Rezende (2003, p. 33), ao afirmar que “no mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto está crescendo/decrescendo.”

No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) há questões cuja solução requer a mobilização da noção de taxa de variação, em que o estudante deve qualificar o crescimento/decrescimento de um gráfico, reconhecer, calcular e interpretar a taxa de variação média entre grandezas e mobilizar a noção de taxa de variação instantânea. Desse modo, e uma vez que este exame, além de avaliar a formação pessoal do aluno ao final da Educação Básica, “serve também para a constituição de parâmetros para a auto avaliação do participante, com vistas à

continuidade de sua formação e à sua inserção no mercado de trabalho”¹³, reiteramos que todo cidadão deve possuir a noção de taxa de variação como parte integrante de seu conhecimento matemático, não somente aquele que irá ingressar em um curso superior de exatas.

Mas se o ENEM explora os conhecimentos inerentes a ideia de taxa de variação, porque nem todos os currículos estaduais orientam seu estudo? Uma resposta para esse questionamento pode ser encontrada no 7º artigo da Portaria Ministerial nº 1045, expedida pelo Ministério da Educação e Saúde em 1951, que facultou aos governos estaduais e territórios a confecção de planos de desenvolvimento próprios (sujeitos a aprovação do Ministério), fato esse que perdura até os dias atuais e que é um contrassenso a atual realidade do estudante, uma vez que, ao mudar de estado no meio do ano letivo, por exemplo, ele pode defrontar-se com um currículo diferente daquele que estava sendo trabalhado em seu estado de partida, fazendo com que alguns conteúdos talvez nunca sejam estudados por esse aluno, deixando lacunas em sua aprendizagem.

Ante ao exposto até aqui, entendemos que as ideias fundamentais do Cálculo são imprescindíveis para a formação básica do cidadão e suscetíveis à compreensão de estudantes da Educação Básica. Concordamos com Silva, E. (2012, p. 16), para quem, estas ideias

[...] não são de difícil assimilação, pelo contrário, são simples e passíveis de serem compreendidas tanto por estudantes da escola básica quanto por estudantes universitários, basta que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

Diante disso, surgem as inquietações do porque estas ideias não são devidamente exploradas no Ensino Médio, se a maioria dos documentos oficiais analisados sugere seu ensino. E porque os professores de Matemática da Educação Básica não estão aptos a ensiná-las, tal como afirma o Currículo de São Paulo, se eles estudaram e foram aprovados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e, de acordo com Guedes e Assis (2009, p. 10), consideram seus cursos de formação inicial bons e com “uma boa grade curricular em termos de adequação

¹³ Retirado de <http://portal.inep.gov.br/web/enem/perguntas-frequentes>. Acesso em 21/08/2015.

e suficiência de disciplinas, e que os mesmos forneceram um bom embasamento teórico para o aprendizado do Cálculo.”

Uma resposta para esses questionamentos é apresentada na tese de doutorado de Rossini (2006), que ao dissertar a respeito da formação de professores de Matemática com viés voltado à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, afirma que “os conceitos de taxa de variação e de derivada, conceituada como a taxa instantânea de variação, são conteúdos do curso de Cálculo de toda licenciatura em Matemática. Mas taxa de variação não se articula com aquilo que é feito na sala de aula.” (ROSSINI, 2006, p. 280). Ainda analisando essa dicotomia entre o que é desenvolvido no curso de licenciatura em Matemática e o que é efetivamente trabalhado na prática docente, Soares et al. (1997) ressalta que

[...] não há espaço, dentro da formação específica do licenciando para que ele seja exposto, de maneira sistemática e coerente, à Matemática que vai ensinar, com um olhar voltado especificamente para a sua formação profissional. (SOARES et al., 1997, p. 28 apud ROSSINI, 2006, p. 280).

Para nós, o fato de o professor não articular a ideia de taxa de variação, ou qualquer outro conteúdo estudado em sua formação inicial, com sua prática docente, talvez não seja oriundo exclusivamente de uma “má formação”, ou da “falta de tempo” nos cursos de formação de professores. Ponderamos que faltam elementos que o auxiliem a relacionar os saberes explorados em sua formação inicial com os saberes que efetivamente devem ser ensinados em sala de aula. Além disso, também há uma gama de conhecimentos que não são desenvolvidos na formação inicial docente, são construídos na prática, na vivência, em estudos teóricos e em formações continuadas. No caso das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial, concordamos com Reis (2001, p. 23), ao afirmar que é

[...] somente estabelecendo elementos que esclareçam a real função do Cálculo na formação Matemática do aluno, que o professor terá condições de refletir sobre que objetivos traçar, que conteúdos e metodologias estabelecer, enfim, que prática pedagógica desenvolver.

Mas isso não será possível enquanto este professor se considerar despreparado para ensinar rudimentos de Cálculo em sua sala de aula, tal como foi constatado por Guedes e Assis (2009). Diante disso, surgem-nos, então, outras inquietações, quanto ao porquê deste professor se considerar inapto para exercer essa tarefa e se ele possui, ou não, os conhecimentos necessários para fazê-lo. Se

ele os possui, então por que não os articula adequadamente em prol dos processos de ensino e de aprendizagem de ideias fundamentais do Cálculo.

Para sanar estas inquietações buscamos por pesquisas que tratam dos conhecimentos docentes necessários para o ensino de ideias fundamentais do Cálculo Diferencial na Educação Básica, mas não obtivemos sucesso. De acordo com Lucas (2015), as ideias fundamentais do Cálculo Diferencial têm sido objeto de estudo de diversas aproximações teóricas. Segundo a autora, têm-se estudado, particularmente, questões cognitivas e instrucionais, mas existem pouquíssimas investigações centradas nos professores e, menos ainda, nos conhecimentos que o professor deve ter para ensiná-las.

Frente a essa realidade e às reflexões pontuadas até o momento, no item seguinte passamos a delimitar nosso problema de pesquisa, que deriva das discussões referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na escola básica e do tratamento dado a esta noção nos documentos oficiais analisados.

2.4 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Os estudos realizados até o momento evidenciaram uma preocupação com o ensino de taxa de variação no âmbito da Educação Básica tanto por professores e pesquisadores, quanto pela maioria dos documentos oficiais analisados, permitindo-nos inferir que há necessidade de se explorar a ideia de taxa de variação nesse nível de escolaridade não por conta do ensino superior de Cálculo, mas sim por uma melhora no próprio ensino de Matemática.

“Se existe uma boa razão para se fazer algo, sempre é possível arquitetar uma maneira de fazê-lo: quem tem um ‘porquê’ arruma um ‘como’.” (SÃO PAULO, 2010, p. 49). Nesse sentido, as pesquisas analisadas que trabalharam com estudantes arquitetaram um modo de explorar as ideias fundamentais do Cálculo na Educação Básica, evidenciando que alunos desse nível de escolaridade têm condições de compreender a noção de taxa de variação instantânea a partir da ideia de taxa de variação e de mobilizá-la em situações-problema.

Todavia, apesar destes resultados e de a maioria dos documentos oficiais analisados fazerem menções ao ensino de taxa de variação instantânea, esta não é a realidade da sala de aula na Educação Básica. De acordo com Guedes e Assis (2009, p. 10),

as razões, segundo os professores de Matemática do Ensino Médio, para não ensinar Cálculo no Ensino Médio são múltiplas, mas podemos apontar duas delas como principais, a primeira seria a falta de qualificação dos professores de Matemática para ensinar esse assunto e, a segunda, o baixo nível de conhecimento matemático que dispõe o aluno quando chega ao Ensino Médio.

É sabido que os jovens ingressantes no Ensino Médio possuem um baixo nível de conhecimento matemático, e que finalizam essa etapa de escolarização sem o aprendizado matemático adequado para o exercício pleno de sua cidadania ou para o ingresso no ensino superior, conforme foi constatado no relatório “De Olho nas Metas”, produzido pelo movimento Todos Pela Educação¹⁴. Mas, como foi possível observar nas pesquisas analisadas, esse fato não foi determinante para a exploração das ideias fundamentais do Cálculo nesse nível de escolaridade. Surgem então as questões do porquê não serem ensinadas, se isso ocorre apenas por “falta de qualificação” dos professores de Matemática, e se eles realmente estão despreparados para o ensino de noções de Cálculo, especificamente, de taxa de variação.

Para nós, essa “falta de qualificação” não deriva, exclusivamente, da ausência dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação. Ao que nos parece, e como também foi constatado por Guedes e Assis (2009), há uma aparente desarmonia entre os conhecimentos adquiridos nos cursos de formação de professores de Matemática com a prática docente. Talvez estes professores apenas não relacionam os conhecimentos de Cálculo construídos em sua graduação e em formações posteriores com as ideias imersas no estudo de taxa de variação que podem ser exploradas na Educação Básica. Pensamos que estes professores não são desqualificados para o ensino de taxa de variação, apenas lhes faltam elementos que os auxiliem na construção de uma base de conhecimentos própria (interna) para este ensino.

¹⁴ Disponível em <http://www.todospelaeducacao.org.br>. Acesso em 20/05/2016.

Diante disso, e na busca por respostas às dúvidas e inquietações levantadas até aqui, estabelecemos como objetivo geral de pesquisa construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para atingir este objetivo estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Construir um esquema para representar uma base de conhecimentos para o ensino de Matemática;
- Realizar um estudo ecológico para identificar o Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica e a razão de ser oficial deste ensino;
- Construir um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, constituído por Organizações Matemáticas (e Didáticas associadas).
- Identificar os conhecimentos do conteúdo, didáticos, tecnológicos e pedagógicos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica;
- Estabelecer as possíveis interações entre estes conhecimentos;¹⁵

Para atingir esses objetivos, e cientes que estes conhecimentos não derivam exclusivamente da formação inicial do professor de Matemática, muitos deles são adquiridos/aprimorados na prática docente, em cursos de formação continuada, em estudos teóricos e, inclusive, em sua vivência, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa que dirigiu nossa investigação:

Qual base de conhecimentos é necessária para o ensino de taxa de variação na Educação Básica?

Ante ao exposto, e diante da escassez de pesquisas que tratam dos conhecimentos docentes necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, entendemos que se faz necessário iniciar uma investigação de forma aprofundada que nos leve a delimitar quais poderiam ser estes conhecimentos. Para isso, a seguir, passamos a apresentar a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos adotados neste estudo.

¹⁵ Os termos Modelo Epistemológico de Dominante, Modelo Epistemológico de Referência, Razão de ser, Organizações Matemáticas e Organizações Didáticas serão esclarecidos no próximo capítulo.

2.5 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Toda pesquisa implica o levantamento de dados de diversas fontes, independente dos métodos ou técnicas utilizadas, e pode ser classificada mediante algum critério pré-estabelecido pelo pesquisador, por uma comunidade acadêmica, por um grupo de pessoas com interesses comuns, etc. De acordo com Gil (2009, p. 41), é comum a classificação de pesquisas a partir de seus objetivos gerais, sendo possível classificá-las em exploratórias, descritivas e explicativas.

Pesquisas do tipo exploratórias têm por finalidade proporcionar maior familiaridade com o objeto de estudo, de modo a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses referentes ao mesmo. Nas palavras de Morse (1991 apud CRESWELL, 2007, p. 38), esse tipo de pesquisa pode ser necessário ou porque o tema de estudo é novo, ou porque nunca foi abordado com uma determinada amostragem ou grupo de pessoas ou, ainda, porque as teorias existentes não se aplicam a uma determinada amostra ou população em estudo.

Pesquisas do tipo descritivas têm como objetivo descrever fatos ou fenômenos sem realizar qualquer tipo de intervenção direta. Consistem em investigações empíricas, em avaliar programas ou isolar as principais variáveis referentes aos fatos ou fenômenos estudados. Já as pesquisas explicativas têm por objetivo identificar e explicar os fatores que contribuem ou que determinam a ocorrência, ou não, de certo fenômeno, esse é o tipo de pesquisa que explica a razão, os motivos, o porquê das coisas.

Considerando o objetivo geral do presente trabalho e o fato de o tema de estudo ser inédito, entendemos que nossa pesquisa é de caráter exploratório, visto que pretendemos explorar e identificar algo ainda não estudado. Pesquisas do tipo exploratórias são desenvolvidas, sobretudo, quando o tema de estudo é pouco explorado, isto é, quando não há muitos trabalhos que o tratem detalhada e sistematicamente, o que pode tornar a tarefa de formular hipóteses concisas e operacionalizáveis árdua e vagarosa, como é o caso dos estudos inerentes a base de conhecimentos que pretendemos construir.

O fato de esse método de pesquisa apresentar menor rigidez quanto ao seu planejamento e estrutura dá margem para o levantamento de hipóteses e

conjecturas dos mais variados aspectos. Diante disso, e de modo a confrontar as perspectivas teóricas próprias das pesquisas exploratórias com as práticas e análises dos dados coletados empiricamente, se faz necessário definir seu delineamento, que emerge, especificamente, dos procedimentos metodológicos adotados para a coleta de dados.

Assim, podem ser definidos dois grandes grupos de delineamentos: aqueles que se valem das chamadas fontes de 'papel' e aqueles cujos dados são fornecidos por pessoas. No primeiro grupo, estão a pesquisa bibliográfica e a pesquisa documental. No segundo, estão a pesquisa experimental, a pesquisa *ex-post-facto*, o levantamento e o estudo de caso. (GIL, 1999, p. 65).

Nessa perspectiva, e uma vez que recorreremos a “fontes de papel” para coleta e análise dos dados deste trabalho, constituídos, exclusivamente, por livros, teses, dissertações, artigos científicos e documentos oficiais, o consideramos uma pesquisa bibliográfica.

A grande vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de possibilitar, ao pesquisador, a cobertura de uma gama de elementos muito maior do que aquela que poderia ser pesquisada em campo. Todavia, a consulta a toda bibliografia já tornada pública em relação a um tema de estudo também pode comprometer a qualidade da pesquisa, pois, segundo Gil (2009, p. 66), “muitas vezes as fontes secundárias apresentam dados coletados ou processados de forma equivocada”, cabendo ao pesquisador assegurar-se das condições em que foram coletados e analisados.

De acordo com Lakatos e Marconi (2003, p. 183), “a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto”, e também não é uma simples revisão de literatura, pois “propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras”, podendo ser desenvolvida em diferentes etapas, ficando a critério do pesquisador estabelecê-las e ordená-las. Nas palavras de Köche (1997, p. 122), pesquisas do tipo bibliográficas podem ser desenvolvidas com diferentes objetivos:

a) para ampliar o grau de conhecimentos em uma determinada área, capacitando o investigador a compreender ou delimitar melhor um problema de pesquisa; b) para dominar o conhecimento disponível e utilizá-lo como base ou fundamentação na construção de um modelo teórico explicativo de um problema, isto é, como instrumento auxiliar para a construção e fundamentação de hipóteses; c) para descrever ou sistematizar o estado da arte, daquele momento, pertinente a um determinado tema ou problema.

Nesse sentido, reiteramos que nossa pesquisa bibliográfica tem por finalidade identificar os conhecimentos que podem/devem ser mobilizados para o ensino da noção de taxa de variação na Educação Básica, de modo a estabelecermos uma base de conhecimentos para esse ensino.

Como fontes de nossa pesquisa bibliográfica, utilizamos os trabalhos apresentados em nossa revisão de literatura, os documentos oficiais analisados, as pesquisas relativas a base de conhecimentos para o ensino e realizamos um estudo ecológico acerca do ensino de taxa de variação na Educação Básica brasileira, apresentado no capítulo 4.

Ante ao exposto, como se pode observar, a pesquisa exploratória pode, então, ser delineada por uma pesquisa bibliográfica, cujos procedimentos metodológicos são constituídos, exclusivamente, pela busca, estudo e análise de “fontes de papel” que, por sua vez, seguem uma ordem pré-determinada pelo pesquisador, mas não necessariamente fixa, visto que, apesar de se partir de um objeto de estudo já definido, o pesquisador poderá voltar ao mesmo sempre que necessário, de modo a aprimorá-lo ou, até mesmo, modificá-lo, gerando novas escolhas metodológicas.

No caso da presente investigação, iniciamos nossa pesquisa bibliográfica com o tema de estudo definido *a priori* e, em um primeiro momento, procuramos atingir os objetivos específicos apresentados no item precedente ordenadamente.

Posto isso, diante do referencial metodológico adotado, no capítulo seguinte passamos a delinear um referencial teórico que nos auxiliará na construção de uma base de conhecimentos para o ensino de forma geral, composto pelos trabalhos de Shulman (1986, 1987), Mishra, Koehler e seus colaboradores, Lima e Silva (2015) e Deborah Ball e seus colaboradores.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Os questionamentos e inquietações levantadas a partir dos estudos já realizados apontam para o referencial teórico do presente trabalho, os estudos referentes a base de conhecimentos para o ensino, iniciados por Shulman (1986, 1987) e continuados e aprofundados por Mishra e Koehler (2006), Lima e Silva (2015) e por Ball, Thames e Phelps (2008).

Neste tópico apresentamos nossa concepção de conhecimento, diferenciamos saberes de conhecimentos docentes, apresentamos as quatro categorias de conhecimentos fundamentais da base conhecimentos para o ensino, conhecimentos do conteúdo, pedagógicos, didáticos e tecnológicos, assim como suas possíveis interações, apresentamos a noção de conhecimento matemático para o ensino, propomos um esquema que, para nós, representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral e o finalizamos com a Teoria Antropológica do Didático no Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática.

3.1 UMA CONCEPÇÃO DE CONHECIMENTO

Algumas concepções de conhecimento influenciaram e continuam influenciando veementemente a epistemologia da prática docente, dentre elas, destacam-se a empirista, a cartesiana, a progressista e a concepção de conhecimento como uma rede de significados.

A concepção empirista de conhecimento como um bem adquirido e passível de acumulação – que Machado (2011) relaciona metaforicamente a figura de um “balde”, como se todo ser humano nascesse com um reservatório de conhecimentos vazio, dotados das mesmas faculdades e das mesmas fraquezas, isto é, como se todos nascessem nus e impotentes – é aquela em que o conhecimento além de ser adquirido e acumulado, é transmissível e mensurável. Nesta visão, a mente humana é como um papel branco, desprovido de todos os caracteres, sem nenhuma ideia, que Locke (1999) compara a uma “tabula rasa” que deve ser ocupada por conhecimentos.

Mas como suprir tal reservatório? De onde vêm as ideias? De onde emergem os conhecimentos? Isso, Locke (1999, p. 57) responde por meio de uma única palavra: experiência. Segundo o autor, todas as ideias originam-se da sensação (experiência exterior) ou da reflexão (experiência interior), “dessas duas fontes de conhecimento jorram as nossas ideias, ou as que possivelmente teremos.”

De acordo com Becker (1995, p. 15), nesta concepção,

O professor considera que seu aluno é tabula rasa não somente quando ele nasceu como ser humano, mas frente a cada novo conteúdo estocado na sua grade curricular, ou nas gavetas de sua disciplina. [...] Isto porque ele o concebe, não apenas como folha em branco na Matemática que ele vai ensinar, mas, devido à sua concepção epistemológica, considera-o estruturalmente incapaz de assimilar esse saber.

Em tal concepção, a ação do professor é legitimada, ou fundamentada, por um modelo epistemológico docente que, de acordo com D'Amore (2008, p. 10), é construído de modo empírico para satisfazer às necessidades dos processos de ensino e de aprendizagem.

Apesar dessa concepção não ser muito bem aceita na academia e de estar perdendo cada vez mais sua credibilidade, ela ainda está muito presente no discurso docente por meio de falas que remetem a uma suposta “aquisição de conhecimentos” pelos educandos. O aluno aprende se, e somente se, o professor ensina, como se o conhecimento em jogo fosse “transmitido” pelo professor, detentor do mesmo, para um estudante que possui as aptidões necessárias para adquiri-lo. Para Becker (1993, p. 81), esta concepção de conhecimento é a que mais amplamente caracteriza o modelo epistemológico docente, “numa palavra, todos os docentes são, pelo menos em algum grau, empiristas.”

Já a concepção cartesiana, inspirada na ideia de universalidade do conhecimento, pressupõe que há um único e “verdadeiro método para chegar ao conhecimento de todas as coisas de que o espírito é capaz” (DESCARTES, 1996, p. 21), e estabelece quatro preceitos básicos de ascensão ao conhecimento:

- Nunca aceitar coisa alguma como verdadeira sem que a conhecesse evidentemente como tal; ou seja, evitar cuidadosamente a precipitação e a prevenção, e não incluir em meus juízos nada além daquilo que se apresentasse tão clara e distintamente ao meu espírito, que eu não tivesse nenhuma ocasião em pô-lo em dúvida.

- Dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para melhor resolvê-las.
- Conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos objetos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos, e, supondo certa ordem mesmo entre aqueles que não se precedem naturalmente uns aos outros.
- Fazer em tudo enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que eu tivesse certeza de nada omitir. (DESCARTES, 1996, p. 23).

Nota-se, com isso, a linearidade, o racionalismo e o intuicionismo da concepção cartesiana, em que o conhecimento deve ser perseguido e alcançado hierarquicamente, partindo sempre de um conhecimento mais simples, que constitui uma premissa a um conhecimento mais complexo. Aqui, o conhecimento emerge a partir de encadeamentos lógicos, como se “todas as coisas que podem cair sob o conhecimento dos homens encadeiam-se da mesma maneira.” (DESCARTES, 1996, p. 23).

Apesar das críticas à linearidade cartesiana, esse modelo orientou, e ainda continua orientando, a concepção de conhecimento docente. De acordo com Rezende (2003, p. 39), o método cartesiano ainda “é tido como paradigma do conhecimento matemático pela grande parte dos professores desta disciplina.” Fazendo um paralelo entre a atual prática docente e as concepções empirista e cartesiana, Rezende (2003, p. 39) profere que a “maioria dos docentes é predominantemente cartesiana na hora de planejar, organizar e executar as ações de ensino, e ‘baldista’ na hora de realizar suas avaliações”, o que é um contrassenso, pois, apesar destas concepções terem algumas características comuns, elas não se completam nem se articulam.

Já a concepção progressista, rompe com a concepção cartesiana e contrapõe a visão de que o conhecimento pode ser adquirido e acumulado, como sugere a concepção empirista. Bachelard (1996), contrário a concepção empirista, afirma que a ideia de que o ser humano nasce com um reservatório de conhecimentos vazio e passível de preenchimento só pode prosperar em culturas de justaposição, onde um fato conhecido é prontamente uma riqueza.

De acordo com Beltran (2014, p. 59), na concepção progressista, “o conhecimento avança de forma progressiva, aproximando-se da verdade por meio

de um longo trabalho de construção e retificação, ou seja, rompendo com o conhecimento anterior.” Nessa perspectiva, Bachelard (1996, p. 17) afirma que “no fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”, ou seja, o ato de conhecer dá-se linearmente, por meio de sucessivas rupturas, onde o conhecimento é reconstruído a cada momento, substituindo um conhecimento anterior.

Nas palavras de Beltran (2014), a essência dessa concepção está na passagem do pensamento concreto ao abstrato, que, de acordo com Bachelard (1996), deve ser encarada em termos de obstáculos, em que o conhecimento de senso comum é o primeiro obstáculo a ser superado, pois este não constitui uma base segura à formação do espírito científico, bloqueando e impedindo outros conhecimentos.

Contrapondo-se a esta visão, Machado (2011) adverte que as abstrações não constituem o início ou o fim do processo de ascensão ao conhecimento, pelo contrário, elas são mediações necessárias à construção do significado e à elaboração do conhecimento em qualquer área. De acordo com o autor, o processo que conduz das abstrações à construção de significado e à elaboração do conhecimento

[...] não se exaure após uma simples mudança de nível; sob a luz de abstrações mais abrangentes, cada novo patamar pode tornar-se – em geral se torna – um novo ponto de partida, que conduzirá a um novo estágio, onde as relações determinantes estruturam-se de modo ainda mais significativo. (MACHADO, 2011, p. 44).

Para o autor, o ato de conhecer dá-se por meio da construção/mobilização de uma rede de significados em um espaço cognitivo de representações. Seria algo como uma teia de relações e significados, em que:

- compreender é aprender o significado;
- aprender o significado de um objeto ou de um acontecimento é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos;
- os significados constituem, pois, feixes de relações;
- as relações entrecruzam-se, articulam-se em teias, em redes, construídas social e individualmente, e em permanente estado de atualização;
- em ambos os níveis - individual e social - a ideia de conhecer assemelha-se à de enredar. (MACHADO, 2011, p.132).

Percebe-se, assim, que nesta concepção a construção de conhecimento não se dá por meio da transmissão e acúmulo de conteúdos, linearmente ou em

termos de rupturas, como se pôde observar nas concepções já apresentadas. Aqui, o conhecimento emerge da apreensão do significado do objeto de saber, isto é, da ação de significar por meio de um processo de abstração indispensável e fundamental à construção do conhecimento.

Nesta concepção, o ato de conhecer constitui-se em uma rede de significados, cuja construção não se inicia exclusivamente no âmbito escolar, pode ser anterior ou externa a ele, e agrega-se, sempre que possível, ao que já é conhecido, isto é, a uma protorrede inata.

De acordo com Machado (2011), os aspectos característicos de uma rede de significados são, em um dado instante, a pluralidade de pontos (nós/significados) e a pluralidade de ramificações (relações entre os nós), não sendo possível isolar um só ponto, ou somente uma ramificação; os pontos são interligados por feixes de ramificações, e as ramificações são as ligações entre tais pontos.

A inexistência de um único percurso para se chegar a um determinado ponto, a impossibilidade de isolar um ponto ou somente uma relação, a multiplicidade de ligações entre dois ou mais pontos e a possibilidade de se construir novos caminhos entre quaisquer pontos, contrapõe a linearidade e o encadeamento lógico cartesiano, além de contrapor a ideia de que o conhecimento avança progressivamente.

Serres (1967 apud PIRES, 2000, p. 115), ao caracterizar a ideia de rede por meio da multiplicidade de percursos (caminhos) para ir de um ponto a outro e das complexas interações entre esses pontos, afirma que, de fato,

É óbvio que esse percurso pode passar por tantos pontos quanto desejarmos e, em particular, por todos eles. Desse modo, não existe nenhum logicamente necessário: o mais curto, isto é, o pequeno circuito entre os pontos em questão pode, eventualmente, ser mais difícil ou menos interessante (menos praticável) que outro mais longo, transportando, no entanto, mais determinação, mas aberto momentaneamente por essa ou aquela razão. Isso representa uma vantagem de maior aproximação com as situações reais, cuja complexidade envolve múltiplas mediações ou, ainda, devido ao fato de um raciocínio de diversas entradas e múltiplas conexões ser mais rico e flexível que um encadeamento em linha.

Nesta concepção, o ato de conhecer não se dá paulatinamente, por meio de transmissão e acúmulo de informações, em que um detentor do conhecimento

transmite-o para um “aprendiz” que, naturalmente, toma posse do mesmo, dá-se quando este “aprendiz” constrói e relaciona os significados abstraídos do objeto de saber em jogo.

Diante disso, é no sentido da concepção de conhecimento como uma rede de significados que pretendemos construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, antes de mais nada, consideramos pertinente esclarecer nosso entendimento acerca de duas nomenclaturas que, apesar de a linguagem corriqueira e mesmo alguns pesquisadores¹⁶ tomarem-nas como sinônimos, apresentam sentidos muito diferentes no âmbito da Educação da Matemática. Tratam-se das terminologias utilizadas para se referir a epistemologia do professor, saberes docentes e conhecimentos docentes que, embora não seja “usual destacar essa diferença, para se fazer uma boa análise didática, é conveniente buscar um sentido mais preciso para esses termos.” (PAIS, 2012, p. 12).

Para Margolinas (2014, p. 3), o saber matemático, cuja instituição produtora é formada por “matemáticos”, se define, assim de antemão, como aquilo que deve ser estudado no domínio de uma instituição, enquanto o conhecimento é o que vai emergir deste estudo, daí a necessidade de diferenciar e caracterizá-los. No âmbito da Teoria das Situações Didáticas (TSD),

[...] a distinção entre um saber e um conhecimento se apoia, antes de mais nada, em seu estatuto cultural; um saber é um conhecimento institucionalizado, ao passo de um estatuto a outro implicar em transformações que os diferenciam e que se explicam parcialmente pelas relações didáticas que se acumulam. (BROUSSEAU, 1986, p. 42, tradução nossa)¹⁷.

De acordo com Brousseau (1986), cada conhecimento pode caracterizar-se por uma (ou várias) situação a-didática que, em última instância, constitui uma

¹⁶ Para Puentes, Aquino e Neto (2009, p. 182), o significado conceitual dos termos utilizados para referir-se a epistemologia da prática docente (conhecimentos e saberes) são praticamente os mesmos. De acordo com os autores, “a profissionalização da docência compõe-se de três ingredientes fundamentais, mas não suficientes: de saber, de saber-fazer e de saber-ser apresentados na forma de saberes, de conhecimentos ou de competências.”

¹⁷ La distinción entre un saber y un conocimiento se apoya antes que nada en su estatuto cultural; un saber es un conocimiento institucionalizado, el paso de un estatuto a otro implica no obstante transformaciones que los diferencian y que se explican parcialmente por las relaciones didáticas que se acumulam. (BROUSSEAU, 1986, p. 42).

situação fundamental¹⁸. Nessa direção, Bosch (1997) ressalta que a hipótese de existência de uma situação fundamental específica para cada um dos conteúdos matemáticos não é apenas uma confissão de otimismo que guia a construção de situações didáticas, mas sim a própria definição de conhecimento matemático que a teoria das situações propõe. Nas palavras da autora, um conhecimento é descrito em termos de situação, um conhecimento é uma situação.

Dessa forma, a noção de situação fundamental proposta na TSD, constitui um instrumento chave para caracterizar os conhecimentos matemáticos, sejam aqueles práticos ou a serem ensinados, quer sejam explícitos ou implícitos. Nessa direção, Pais (2012, p. 13) ressalta que o saber é aquilo que valida o conhecimento, enquanto o conhecimento é aquele que se relaciona aos aspectos mais experimentais, envolvendo situações de ação em que o sujeito tem uma relação mais pessoal com o objeto de saber.

Margolinas (2014) também destaca que é o conceito de conhecimento que estabelece o equilíbrio entre o sujeito e o meio, que comporta tanto os conhecimentos oriundos da interação com o meio, quanto os conhecimentos da ação, do corpo, os conhecimentos prévios, etc. Já o saber, segundo ela, é de outra natureza. É uma construção social e cultural que vive em uma instituição, é despersonalizado, descontextualizado e atemporal. É formulado, formalizado, validado e memorizado.

Indo ao encontro dessa definição, Bosch (1997, p. 354, tradução nossa)¹⁹ acrescenta que o saber matemático resulta, especificamente, das ações humanas e institucionais, “é algo que pode ser produzido, utilizado, ensinado ou mais geralmente transportado de uma instituição para outra.” De acordo com a autora, o saber matemático está na origem de toda problemática didática e remete a uma Organização Matemática específica, dotada de uma capacidade geradora que lhe permite funcionar como um dispositivo gerador de conhecimentos.

¹⁸ Nas palavras de Almouloud (2007, p. 34), “uma *situação fundamental* constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada/indicada, situações que permitam introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica.”

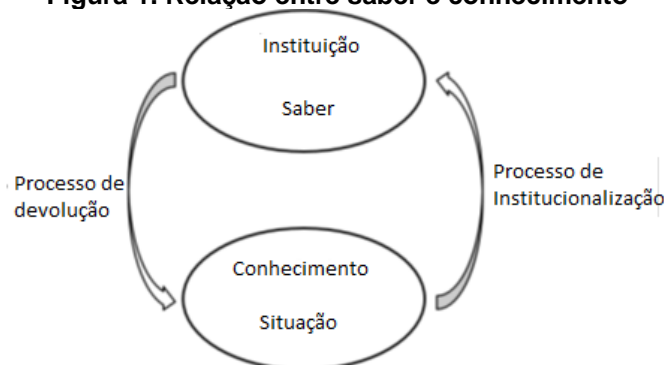
¹⁹ e'est quelque chose qui se produit, s'utilize, s'enseigne et se transpose dans des institutions. (BOSCH, 1997, p. 354).

Com base nessas distinções, pode-se concluir, no âmbito da Educação Matemática, que o conhecimento emerge de situações de ensino, enquanto o saber, produzido por “matemáticos”, é aquele que sobrevive e é estudado no domínio de uma instituição, ou até mesmo em diversas instituições simultaneamente. Assim,

para definir um conhecimento dado, é necessário descrever as situações fundamentais deste conhecimento. Para definir um saber particular, é necessário dizer qual é a instituição que produz e legitima esse saber, o que conduz, às vezes, a considerar distintas instituições e seus eventuais conflitos. (MARGOLINAS, 2014, p. 3, tradução nossa)²⁰.

Nesse sentido, e fundamentada na distinção entre saber e conhecimento proposta na TSD, Margolinas (2014) ressalta que o processo de devolução, definido “como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema, aceitando as consequências dessa transferência” (ALMOULOUD, 2007, p. 35), perpassa pela construção, ou escolha, de situações de ensino que caracterizam o conhecimento em jogo, baseando-se, implícita ou explicitamente, em questionamentos referentes as razões de ser do saber que deve ser estudado, enquanto o processo de institucionalização, definido com o momento em que o professor fixa o estatuto cognitivo do saber em jogo, estabelece um vínculo entre o conhecimento e este saber, como mostra o esquema da figura 1.

Figura 1. Relação entre saber e conhecimento



Fonte: Margolinas (2014, p. 3, tradução nossa)

Neste esquema, os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática situam-se na interação entre conhecimento e saber que, direta ou indiretamente,

²⁰ Para definir un conocimiento dado, es necesario describir las situaciones fundamentales de este conocimiento. Para definir un saber particular, es necesario decir cuál es la institución que produce y legitima ese saber, lo que conduce a veces a considerar distintas instituciones y sus eventuales conflictos. (MARGOLINAS, 2014, p. 3).

estão condicionados a um modelo epistemológico docente, pois, de certa forma, cada professor, em sua particularidade, tem uma concepção epistemológica²¹ do conhecimento que deve ser institucionalizado para se tornar um saber mobilizável em outras situações de ensino ou no cotidiano do estudante, e esta concepção, por sua vez, interfere diretamente na elaboração e na escolha das situações didáticas que descrevem o conhecimento em jogo.

Diante do apresentado, e convictos que toda prática docente também se situa na interação entre conhecimento e saber, entendemos por saberes docentes o conjunto de ações docentes e institucionais que, em última instância, têm por finalidade gerar e organizar conhecimentos. Seu habitat²² é um tipo de instituição caracterizada pela produção, utilização, ensino e transposição desse saber que pode ser, por exemplo, uma universidade, um centro de pesquisa ou, até mesmo, uma escola.

Já o conhecimento docente, para nós, entra em cena por meio da noção de relação. Um objeto de ensino existe se, e somente se, há uma relação entre um sujeito (o professor) e esse objeto, ou seja, se esse sujeito, ou até mesmo uma instituição, conhece ou reconhece esse objeto. Dado um determinado objeto de ensino, o conhecimento docente emerge das interações realizadas entre o sujeito (professor) e esse objeto no âmbito de uma instituição que, por sua vez, coloca em jogo este objeto por meio de um conjunto de situações didáticas cuja busca por soluções condiciona a construção/mobilização do conhecimento em questão, tal como propõe Brousseau (1986).

Assim sendo, para nos referir a epistemologia da prática docente para o ensino de taxa de variação, utilizaremos a terminologia conhecimentos docentes, uma vez que os saberes referentes a noção de taxa de variação já estão postos, foram produzidos por matemáticos no domínio de uma instituição, enquanto os

²¹ De acordo com D'Amore (2007, p. 3), uma *concepção epistemológica* é um conjunto de convicções, de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a dizer o que são os conhecimentos dos indivíduos ou de grupos de pessoas, como funcionam, os modos de estabelecer sua validade, bem como adquiri-los e então de ensiná-los e aprendê-los.

²² Segundo Almouloud (2007, p. 114), no âmbito da Didática da Matemática o habitat corresponde a um "tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo."

conhecimentos referentes a essa noção emergem do estudo desse saber, ou seja, são construídos a partir deste estudo.

Desse modo, e uma vez apresentada nossa concepção de conhecimento, esclarecido nosso entendimento acerca das terminologias saberes e conhecimentos docentes e assumida a terminologia conhecimentos docentes para nos referir à epistemologia da prática do professor, a seguir, passamos a apresentar os estudos referentes a uma base de conhecimentos para o ensino de forma geral, de modo que possamos mobilizá-los no delineamento de um esquema que represente uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral para, então, construir uma base de conhecimentos para o ensino da noção de taxa de variação na Educação Básica.

3.2 BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO

Em meados da década de 1980, no Canadá e nos Estados Unidos iniciaram-se estudos referentes ao pensamento, a prática e ao conhecimento do professor, que culminaram em um movimento reformista de reivindicação de *status professional* para o professor da Educação Básica. Surge, então, um campo de pesquisa com a "finalidade de identificar um repertório de conhecimentos do ensino que serviriam para a elaboração de programas de formação de professores." (ALMEIDA; BIAJONE, 2007, p. 283). Em última instância, os estudos imersos neste campo pretendiam estabelecer uma base de conhecimentos para o ensino, além de contribuir para a construção e reconhecimento da identidade docente.

Pressupondo a existência desta base de conhecimentos, muitos pesquisadores começaram a investigar e sistematizar os conhecimentos docentes, com o intuito de aprimorar a formação e a prática de professores da Educação Básica. Nesse sentido, diversos estudos surgiram com diferentes perspectivas teórico-metodológicas que, apesar de não conclusivos, auxiliam-nos na compreensão do pensamento, da prática e da construção do conhecimento docente.

De acordo com Mizukami (2004), a base de conhecimentos para o ensino envolve conhecimentos de diferentes naturezas, todos necessários e indispensáveis à prática docente. Segundo a autora, esta base

[...] consiste em um corpo de compreensões, conhecimentos, habilidades e disposições que são necessários para que o professor possa propiciar processos de ensinar e aprender, em diferentes áreas de conhecimento, níveis, contextos e modalidades de ensino. (MIZUKAMI, 2004, p. 38).

Nessa direção, diversas pesquisas têm contribuído para a formação desta base de conhecimentos, dentre essas, nos fundamentamos nas obras de Shulman (1986, 1987), por este ser o pioneiro nesses estudos, nas pesquisas de Debora Ball e seus colaboradores, nos trabalhos de Mishra, Koehler e seus colaboradores e nas pesquisas de Lima e Silva (2015), que continuaram e aprofundaram os estudos iniciados por Shulman.

3.2.1 A CONCEPÇÃO DE LEE SHULMAN

O interesse de Shulman em desenvolver um trabalho teórico com a finalidade de constituir uma base de conhecimentos para o ensino deu-se como em um estalo, conforme relatou o autor em uma entrevista concedida para um grupo de pesquisadores brasileiros em 2005:

Eu estava assistindo dois professores que estavam dando aulas em salas próximas uma da outra e ambos estavam trabalhando o mesmo programa (assunto), e mesmo assim o quê eles estavam fazendo e como estavam fazendo era tão diferente que eu fiquei intrigado. Quero dizer, eles deveriam estar ensinando o mesmo programa (assunto), eles estavam trabalhando com crianças muito, mas muito semelhantes; na verdade, eu assisti as mesmas crianças indo da sala de um professor para a sala do outro, mas o ensino deles era tão dramaticamente diferente, e não era por causa das diferenças de personalidade, era algo que estava relacionado com o entendimento, a visão e a prática desses professores. Eu acabei conversando com ambos os professores por um longo tempo depois das aulas. E, daí, voltando para o hotel onde estava hospedado, eu comecei a me questionar, na tentativa de acabar dizendo alguma coisa para mim mesmo que me ajudasse a descobrir que tipo de teoria eu precisaria para entender o quê aqueles professores fizeram e que foi tão diferente. (GAIA; CESÁRIO; TANCREDI, 2007, p. 151).

Após este *insight*, foram emergindo diversas inquietações no percurso das pesquisas que Shulman e seus colaboradores desenvolviam, levando-os a voltar sua atenção aos processos de formação e construção do conhecimento docente, o que

deu origem ao programa de pesquisa “*Knowledge Growth in Teaching*”²³ que, mais tarde, culminaria na teoria da base de conhecimentos para o ensino.

Foi a partir das análises e comparações entre os testes que eram aplicados para professores estadunidenses nas décadas de 1960, 1970 e 1980 com aqueles que eram aplicados no século XIX, por volta dos anos 1870, que Shulman (1986) deu início às pesquisas referentes as concepções de conhecimento docente. De acordo com o autor, o resultado dessas análises evidenciaria o modo como eram definidos os conhecimentos docentes em diferentes épocas, além de dar margem a comparações entre as concepções de conhecimento docente do passado e as atuais.

Em um primeiro momento, estas análises evidenciaram uma enorme discrepância entre a ênfase dada aos conteúdos e aos processos pedagógicos. Enquanto nos anos 1870 o foco das testagens estava nos conteúdos, com 95% das questões voltadas exclusivamente aos conhecimentos do conteúdo, nas décadas de 1960, 1970 e 1980 o foco estava na capacidade de ensinar, isto é, nas competências e habilidades docentes, ignorando-se a importância dos conteúdos.

De acordo com o autor, os testes de professores das décadas de 1960, 1970 e 1980 baseavam-se em pressupostos do programa *processo-produto*, que consistia em investigar e identificar os padrões de comportamento e conduta dos professores que influenciavam o “bom” desempenho dos estudantes. Segundo Mizukami (2004, p. 2), essas investigações “tinham suas referências teórico-metodológicas ancoradas na psicologia, mais especificamente, nas perspectivas comportamentalista, experimental e funcional”, deixando de lado a perspectiva cognitivista e, principalmente, recusando o pensamento como elemento central do ensino.

Apesar dessa linha de investigação ter recebido muitas críticas tanto por sua perspectiva teórica, quanto por seus procedimentos metodológicos, muito se conquistou com esse tipo de pesquisa. De acordo Shulman (1986), as pesquisas inseridas nesse programa eram relevantes na medida em que evidenciavam os

²³ Disponível em: <https://searchworks.stanford.edu/view/3479636>. Acesso em 15/07/2016.

comportamentos e condutas de professores que influenciavam positivamente na aprendizagem dos estudantes, mas ignoravam totalmente o conteúdo,

[...] ninguém perguntou como o conteúdo era transformado a partir do conhecimento do professor em conteúdo de instrução. Nem perguntou como as formulações particulares daquele conteúdo relacionavam-se com o que os estudantes passaram a conhecer ou interpretar equivocadamente. (SHULMAN, 1986, p. 6, tradução nossa)²⁴.

Nas palavras do autor, a ênfase desse tipo de pesquisa estava no modo como o professor organizava a sala de aula, preparava as atividades, estruturava as tarefas e avaliava os estudantes. Os resultados provinham, exclusivamente, da perspectiva dos aprendizes, ignorando as nuances e características do professor. Deixavam-se de lado as questões referentes aos conteúdos das lições ensinadas, possíveis inquietações e suas devidas explicações.

Frente a essa realidade, Shulman (1986) buscou equilibrar o foco das pesquisas entre as perspectivas dos estudantes e as dos professores, isto é, entre o conteúdo e o processo pedagógico, propondo-se a responder os seguintes questionamentos:

Quais são as fontes de conhecimento do professor? O que um professor sabe e quando ele buscou esse saber? Quando um novo conhecimento é adquirido, o conhecimento antigo é recuperado, e ambos combinados para formar uma nova base de conhecimentos? [...] Como o professor se prepara para ensinar algo nunca aprendido pelos estudantes? Como ele aprende para ocorrer o ensino? (SHULMAN, 1986, p. 8, tradução nossa)²⁵.

A partir destes questionamentos, e sem a intenção de diminuir a importância da compreensão pedagógica no desenvolvimento das competências e habilidades necessárias para um ensino eficaz, Shulman (1986, p. 9) elegeu três categorias de conhecimentos que subjazem a compreensão que o professor necessita ter para levar seus educandos à aprendizagem: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento do currículo. Continuando seus estudos, em 1987 o autor completou e detalhou essas categorias da seguinte maneira:

²⁴ No one asked how subject matter was transformed from the knowledge of the teacher into the content of instruction. Nor did they ask how particular formulations of that content related to what students came to know or misconstrue. (SHULMAN, 1986, p. 6).

²⁵ What are the sources of teacher knowledge? What does a teacher know and when did he or she come to know it? How is new knowledge acquired, old knowledge retrieved, and both combined to form a new knowledge base? [...] How does the teacher prepare to teach something never previously learned? How does learning for teaching occur? (SHULMAN, 1986, p. 8).

- Conhecimento do conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral, considerando, especialmente, aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização de sala de aula que transcendem o âmbito do assunto;
- Conhecimento do currículo, com especial domínio dos materiais e dos programas que servem como ‘ferramentas para o ofício’ do professor;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo: essa especial amálgama entre conteúdo e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, suas próprias fontes de compreensão profissional;
- Conhecimento dos estudantes e suas características;
- Conhecimento dos contextos educacionais, que variam desde o grupo ou sala de aula, ou gestão e financiamento dos distritos escolares, para o caráter das comunidades e culturas; e
- Conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educacionais, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. (SHULMAN, 1987, p.8, tradução nossa).²⁶

Para nos situarmos quanto ao foco dos trabalhos desenvolvidos por Shulman (1986, 1987), agrupamos essas categorias em duas classes, a primeira voltada às dimensões gerais do conhecimento docente, formada pelos conhecimentos dos educandos e suas características, pelo conhecimento pedagógico geral e pelos conhecimentos dos contextos e dos objetivos educacionais, e a segunda voltada às dimensões do conteúdo, formada pelos conhecimentos do conteúdo, pedagógicos do conteúdo e do currículo.

Eram os conhecimentos da primeira classe que sustentavam os programas de testagem, avaliação e formação docente das décadas de 1960, 1970 e 1980 que, embora não estivessem no foco dos estudos de Shulman (1986, 1987), foram de suma importância para evidenciar as habilidades e competências pedagógicas do “bom professor”.

Dentre os conhecimentos alocados nessa classe, faz-se importante esclarecer nosso entendimento acerca da expressão *general pedagogical*

²⁶ Content knowledge;

General pedagogical knowledge, with special reference to broad principles and strategies of classroom management and organization that appear to transcend subject matter;

Curriculum knowledge, with particular grasp of the materials and programs that serve as “tools of the trade” for teachers;

Pedagogical content knowledge, that special amalgam of content and pedagogy that is uniquely the province of teachers, their own special form of professional understanding;

Knowledge of learners and their characteristics;

Knowledge of educational contexts, ranging from the working of the group or classroom, the governance and financing of school districts, to the character of communities and cultures; and

Knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds. (SHULMAN, 1987, p. 8).

knowledge, que é traduzida por alguns autores como “conhecimento pedagógico geral” e, por outros, como “conhecimento didático geral”.

No contexto espanhol, por exemplo, “a equivalência entre os termos ‘pedagógico’ e ‘didático’ se justifica dado que o sentido específico e pejorativo do termo didático no contexto anglo-saxão não existe na Espanha” (ALMEIDA, 2015, p. 65), daí a razão pela qual os espanhóis utilizam a expressão *conocimiento didacto general*. Já no contexto português, a distinção entre esses termos se justifica por conta de a didática ter um estatuto de menoridade em relação a pedagogia, sendo tratada de modo pejorativo, como “um repositório de receitas sobre os modos de transmitir o conhecimento disciplinar.” (PONTE, 1999, p 4). No caso da disciplina de Matemática, Ponte (2012) destaca que o conhecimento pedagógico geral, tradução da expressão *general pedagogical knowledge*, refere-se, exclusivamente, aos processos de ensino e de aprendizagem da disciplina, enquanto o conhecimento didático é aquele que se refere a prática letiva do professor, momento em que é possível perceber as especificidades desses processos.

Shulman (1986) concebe como *general pedagogical knowledge* um tipo de conhecimento que compreende as competências e habilidades necessárias para um ensino eficiente, capaz de levar os estudantes a construir significado para o objeto de estudo. Para o autor, esse é o tipo de conhecimento que o professor mobiliza para gerenciar sua sala de aula, organizar e estruturar as atividades, planejar estratégias de ensino e julgar a compreensão e o aprendizado dos estudantes. De acordo com Mizukami (2004, p. 4), esse tipo de conhecimento transcende a área de estudo específica,

incluir conhecimentos de teorias e princípios relacionados a processos de ensinar e aprender; conhecimentos dos alunos (características dos alunos, processos cognitivos e desenvolvimentais de como os alunos aprendem); conhecimentos de contextos educacionais envolvendo tanto contextos micro, tais como grupos de trabalhos ou sala de aula e gestão da escola, até contextos macro como o de comunidades e de culturas, de manejo de classe e de interação com os alunos.

Segall (2004, p. 493, tradução nossa)²⁷, ao examinar como a noção *general pedagogical knowledge* é concebida e o papel que ela ocupa na base de

²⁷ school learning, restricted to the work of classroom teachers. (SEGALL, 2004, p.. 493).

conhecimentos proposta por Shulman (1986, 1987), observou que, para do autor, esse é um tipo de conhecimento que se refere, exclusivamente, “a aprendizagem escolar, é restrito ao trabalho dos professores em sala de aula.” Nessa mesma direção, García (1992), também a luz dos estudos realizados por Shulman (1986, 1987), interpretou a noção de *general pedagogical knowledge* como um tipo de conhecimento que compreende as competências, crenças e habilidades que os professores possuem, e que estão diretamente relacionadas com o ensino, a aprendizagem, os alunos, a gestão de sala de aula, a estruturação das lições, os aspectos ligados a história e filosofia da educação etc.

Diante disso, e no contexto brasileiro, em que a Pedagogia é entendida como um “campo de conhecimento que investiga a natureza das finalidades da educação numa determinada sociedade, bem como os meios apropriados para a formação dos indivíduos, tendo em vista prepará-los para as tarefas da vida social” (LIBÂNEO, 1994, p. 24), adotamos a expressão “conhecimento pedagógico geral” para nos referir ao que Shulman (1986) denomina de *general pedagogical knowledge*, visto que, para nós, sua concepção vai em direção ao que entendemos por conhecimentos pedagógicos gerais, que são aqueles conhecimentos que orientam os processos, práticas e métodos de ensino e de aprendizagem de modo geral, não especificamente de um conteúdo ou área de ensino, são conhecimentos ligados às ciências da educação.

No Brasil, esse tipo de conhecimento é explorado em cursos específicos de Pedagogia, instituídos desde 1939, que, após diversas reformas educacionais, hoje tem o carácter de licenciatura para a formação de professores atuantes na educação infantil, nos anos iniciais do ensino fundamental (fundamental I), na educação de jovens e adultos (EJA), no Ensino Médio na modalidade normal e na gestão de escolas.

Nas demais licenciaturas para formação de professores especialistas também são explorados estes conhecimentos. Todas são divididas em duas vertentes, uma voltada aos conhecimentos específicos da área e outra aos conhecimentos específicos para a docência, ou seja, aos conhecimentos pedagógicos. Todavia, essa divisão não é proporcional,

Se oferece nesses cursos apenas um verniz superficial de formação pedagógica e de seus fundamentos que não pode ser considerado como realmente uma formação de profissionais para atuar em escolas na contemporaneidade. É observada uma redução da carga horária útil dos cursos de licenciatura – voltada a processos formativos profissionais, teóricos e práticos, de fundamentos e metodologias –, redução que se faz via um conjunto de atividades vagamente descritas nos currículos, como: atividades culturais, estudos independentes, atividades complementares, etc. (GATTI, 2014, p. 39).

No caso específico das licenciaturas em Matemática, embora seus currículos e ementas tenham uma divisão aparentemente bem equilibrada entre os conhecimentos específicos da área e os pedagógicos, conforme foi constatado por Gatti (2010), na prática, isso não ocorre. Segundo a autora, as instituições públicas de ensino, por exemplo, “mantem, em sua maioria, carga horária bem maior para as disciplinas relativas a conhecimentos específicos, espelhando mais a ideia de um bacharelado do que licenciatura.” (GATTI, 2010, p. 1373).

Indo ao encontro dessa afirmação e ampliando essa discussão para as demais instituições de ensino superior (privadas), Junqueira e Manrique (2015, p. 633), ao analisar as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, verificaram que as tentativas de dissolver a dicotomia entre conteúdos específicos e pedagógicos parecem tarefas impossíveis de serem viabilizadas no âmbito das licenciaturas em Matemática. De acordo com as autoras, nestas licenciaturas ainda é predominante o formato tradicional (3+1), em que os conhecimentos específicos da área são privilegiados em detrimento dos conhecimentos pedagógicos. Para elas, esse tipo de licenciatura não contempla determinadas características integradoras que, atualmente, são fundamentais à prática docente.

Para contemplar tais características, é necessário que as licenciaturas em Matemática se desvinculem deste “ensino tradicional”, dando ao conhecimento pedagógico seu devido destaque na formação inicial docente, considerando-o como um conhecimento fundamental à prática docente, sem o qual os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na Educação Básica se tornam árduos e custosos.

Diante disso, entendemos por conhecimentos pedagógicos para o ensino de taxa de variação aqueles conhecimentos que guiam os processos, métodos e

práticas de gestão e organização de sala de aula, específicos para o ensino deste objeto matemático.

Quanto aos conhecimentos locados na segunda classe, ausentes dos programas de testagem, avaliação e formação docente das décadas de 1960, 1970 e 1980, foram estes que constituíram o foco das pesquisas de Shulman (1986, 1987), estabelecendo um novo paradigma de investigação, denominado pelo autor de paradigma ausente, que “se refere a um ponto cego em relação ao conteúdo que agora caracteriza a maioria das pesquisas referente ao ensino e, conseqüentemente, a maioria dos programas de avaliação e certificação de professores.” (SHULMAN, 1986, p. 7, tradução nossa)²⁸.

O conhecimento do conteúdo, de acordo com autor, refere-se aos conhecimentos específicos da disciplina a ser ensinada. Inclui tanto a compreensão de fatos, conceitos, terminologias, procedimentos, etc. da área específica do conhecimento, quanto os relativos à sua construção. Inclui também a compreensão das estruturas da disciplina que, segundo Shulman (1986), são duas: a substantiva, relacionada às várias maneiras de organização dos conceitos e princípios básicos da disciplina, que inclui além do acúmulo de informações, conceitos e princípios gerais do conteúdo, os conhecimentos de referenciais teóricos e da estrutura interna da disciplina; e a sintática, relacionada aos moldes pré-estabelecidos pela comunidade disciplinar, de forma a orientar, construir, avaliar e validar as pesquisas na área.

Para o autor, o professor não pode ter uma compreensão intuitiva ou pessoal de um determinado conteúdo, nem somente ser capaz de defini-lo para seus alunos, ele deve compreender suas representações e as formas de apresentá-lo em sala de aula, além de compreender suas relações com outros conteúdos de sua área de conhecimento e com conteúdos de outras áreas. “Conhecer algo nos permite ensiná-lo; e conhecer um conteúdo com profundidade significa estar

²⁸ refers to a blind spot with respect to content that now characterizes most research on teaching and, as a consequence, most of our state level programs of teacher evaluation and teacher certification. (SHULMAN, 1986, p. 7).

mentalmente organizado e bem preparado para ensiná-lo de modo geral.” (BUCHMANN, 1984, p. 37 apud GARCÍA, 1992, p. 5, tradução nossa)²⁹. Para isso,

O professor não precisa apenas entender que algo é assim; o professor deve compreender porque é assim, por que razão a sua justificativa pode ser válida, e em que circunstâncias nossa crença nessa justificativa pode ser enfraquecida e, até mesmo, negada. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa)³⁰.

Diante disso, por conhecimento do conteúdo para o ensino de taxa de variação entendemos a gama de conhecimentos matemáticos específicos para o ensino deste objeto matemático, que compreende as noções de razão e proporção, os conceitos de função, de taxas de variação média e instantânea e as noções de limite e continuidade em consonância com suas possíveis organizações e interações intra e extramatemáticas.

Todavia, ter um amplo conhecimento do conteúdo que é objeto de ensino é necessário, mas não é suficiente para desenvolver uma boa aula, “o que faz de um instrutor um Professor (com P maiúsculo!) é uma rede mais complexa de relações, a qual se estende para além do domínio do conteúdo a ser ensinado (embora não possa dele prescindir).” (SZTAJN, 2002, p. 18).

Nessa direção, o professor também deve compreender os motivos que o levam a priorizar um determinado tópico de uma disciplina em detrimento de outros. Esse poder de discernimento é de suma importância nos julgamentos pedagógicos relacionados à ênfase curricular, e é daí que emerge a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, definida por Shulman (1986) como um tipo de conhecimento que transcende os conhecimentos específicos da disciplina, que é construído e reconstruído constantemente pelo professor, que o enriquece, aperfeiçoa e modifica a partir de suas relações com os demais conhecimentos da base de conhecimentos para o ensino. É uma forma particular do conhecimento do conteúdo que relaciona o conteúdo específico que se pretende ensinar com as

²⁹ Conocer algo nos permite enseñarlo; y conocer un contenido con profundidad significa estar mentalmente organizado y bien preparado para enseñarlo de una forma general. (BUCHMANN, 1984, p. 37 apud GARCÍA, 1992, p. 5).

³⁰ The teacher need not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied. (SHULMAN, 1986, p. 9).

competências e habilidades necessárias para tal ensino, ou seja, com os conhecimentos pedagógicos gerais.

Nas palavras de Ponte (2012, p. 2), a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo “se mostra extremamente apelativa para todos aqueles que dentro da Educação Matemática pretendem valorizar tanto os aspectos ligados ao conteúdo (matemático) como ao seu ensino (pedagogia).” Para Moreira e David (2005, p. 39),

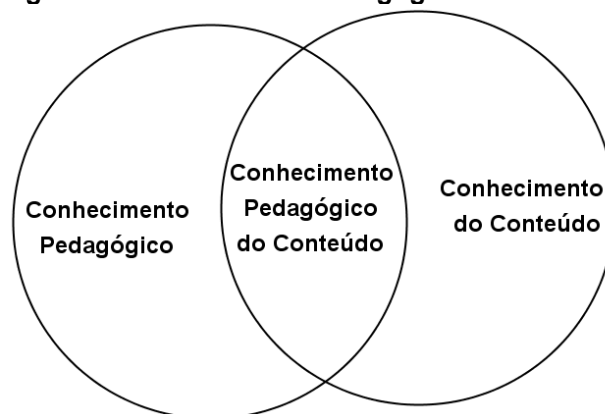
O conhecimento pedagógico do conteúdo não é algo que é produzido e regulado a partir do exterior da escola e que deva ser transladado para ela. Ao contrário, trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas.

Para Shulman (1987), o conhecimento pedagógico do conteúdo é a categoria de conhecimento que além diferenciar conhecimentos específicos para o ensino, auxilia na distinção/diferenciação entre o entendimento do conteúdo por um professor especialista e por um pedagogo, uma vez que esses profissionais têm formações distintas e, muitas vezes, lidam com o mesmo objeto de conhecimento, como é o caso do ensino de Matemática. A essência desse tipo de conhecimento está no modo como um conteúdo é transformado para o ensino e nas escolhas que são feitas para torná-lo compreensível para os estudantes.

Para Mishra e Koehler (2006, p. 1021, tradução nossa)³¹, o “conhecimento pedagógico do conteúdo representa a mistura de conteúdo e pedagogia com a compreensão de como os aspectos particulares desses assuntos são organizados, adaptados e representados para a instrução.” Para representar essa “mistura”, entendida pelos autores como um marco epistemológico que serviu para combinar os conhecimentos do conteúdo com os pedagógicos, eles utilizaram um diagrama de Venn, figura 2, que evidencia a intersecção entre os dois tipos de conhecimentos.

³¹ PCK represents the blending of content and pedagogy into an understanding of how particular aspects of subject matter are organized, adapted, and represented for instruction. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1021).

Figura 2. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo



Fonte: Mishra e Koehler (2006, p.1022, tradução nossa)

De acordo com Shulman (1986, p. 9, tradução nossa)³², essa intersecção contém

[...] os tópicos e assuntos regularmente ensinados em uma área, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, em outras palavras, as formas de representar e formular o assunto para torná-lo compreensível para os outros. [...] Inclui também a compreensão do que faz a aprendizagem de tópicos específicos ser fácil ou difícil, as concepções e preconcepções que estudantes de diferentes idades e experiências trazem consigo para a aprendizagem daqueles tópicos e lições mais frequentemente ensinadas.

Nas palavras do autor, a chave para estabelecer uma base de conhecimentos para o ensino reside nessa intersecção, especificamente, “na capacidade do professor em transformar o seu conhecimento do conteúdo em formas que sejam pedagogicamente poderosas e adaptáveis às variações de habilidades e experiências apresentadas pelos alunos.” (SHULMAN, 1987, p. 15, tradução nossa)³³.

No contexto brasileiro, em que “a formação de professores é considerada atividade de categoria inferior e quem a ela se dedica é pouco valorizado” (GATTI

³² the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful forms of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations- in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others. [...]also includes an understanding of what makes the learning of specific topics easy or difficult: the conceptions and preconceptions that students of different ages and backgrounds bring with them to the learning of those most frequently taught topics and lessons. (SHULMAN, 1986, p. 9).

³³ The key to distinguishing the knowledge base of teaching lies at the intersection of content and pedagogy, in the capacity of teacher to transform the content knowledge he or she possesses into forms that are pedagogically powerful and yet adaptive to the variations in ability and background presented by the students. (SHULMAN, 1987, p. 15).

et al., 2008, *on-line*), essa capacidade não é devidamente explorada na formação inicial docente, é tratada de modo superficial, conforme constatou Gatti et al. (2008, *on-line*) ao analisar os currículos e ementas de 165 licenciaturas para formação de professores. De acordo com a autora, o foco dessas licenciaturas é direcionado, quase que exclusivamente, para os conhecimentos específicos da área, “na maior parte dos ementários analisados não foi observada uma articulação entre as disciplinas de formação específica (conteúdos da área disciplinar) e a formação pedagógica (conteúdos da docência).” (GATTI et al., 2008, *on-line*).

No que tange as licenciaturas em Matemática, a autora analisou 31 cursos e verificou que apesar de um aparente equilíbrio entre a quantidade de disciplinas específicas da área e aquelas ditas “pedagógicas”, na prática a maior quantidade de horas/aula é voltada às disciplinas específicas, deixando as disciplinas pedagógicas em segundo plano. Segundo a autora, uma das maiores fragilidades das licenciaturas em Matemática “é o desequilíbrio entre formação na área específica e formação para a docência, com quase ausência de formação integradora” (GATTI et al., 2008, *on-line*). Diante disso, temos subsídios suficientes para inferir que a formação inicial de professores de Matemática no Brasil não propicia meios para que eles construam relações entre conhecimentos do conteúdo e pedagógicos, ou seja, para que eles construam o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Concordamos com Mizukami (2004, p. 5), para quem, o conhecimento pedagógico do conteúdo não é construído apenas na formação inicial docente. Para nós, sua construção é iniciada na licenciatura e perpassa por cursos de formação continuada, estudos teóricos e pelo exercício profissional, por meio de experiências profissionais vivenciadas dentro ou fora da sala de aula. Assim, as diversas representações de um objeto de ensino derivam tanto da formação inicial, da pesquisa e da formação continuada, quanto da própria prática docente.

Nessa mesma direção, Lima e Silva (2015, p. 2) afirmam que “nem todas as categorias ou dimensões de conhecimentos docentes podem ser desenvolvidas na formação inicial do professor; pelo contrário, muitas serão construídas na prática e em formações continuadas.” Desse modo, se faz importante refletirmos a respeito da complementariedade entre os conhecimentos construídos na formação inicial

docente e aqueles oriundos de formações continuadas, estudos teóricos e da prática profissional que, de acordo com Moreira e David (2005), não estão explícitos na proposição de Shulman, mas que, para nós, são de vital importância para a construção de uma base de conhecimentos para o ensino.

Concordamos com Ponte (2012, p. 3), ao proferir que “o conhecimento profissional do professor é, assim, acima de tudo, orientado para uma atividade prática (ensinar Matemática a grupos de alunos).” Nesse sentido, a prática docente assume, então, uma grande relevância em relação a base de conhecimentos para o ensino quando o professor adapta suas experiências (positivas ou negativas) aos processos de ensino e de aprendizagem, eliminando o que não é conveniente e agregando o que convém.

Desse modo, o conhecimento pedagógico do conteúdo não deve ser entendido como uma mera forma de cumprir bem as prescrições curriculares referentes ao ensino de um determinado conteúdo, mas sim, como a categoria da base de conhecimentos para o ensino que vai articular conhecimentos do conteúdo específicos para o ensino, com aqueles conhecimentos que têm por finalidade orientar os processos, práticas e métodos de ensino de modo geral, adquiridos tanto na formação inicial, quanto na prática docente e em formações continuadas.

Por conhecimento pedagógico do conteúdo para o ensino de taxa de variação, entendemos o tipo de conhecimento oriundo da interação entre os conhecimentos matemáticos específicos para o ensino deste objeto matemático com aqueles conhecimentos que compreendem as competências e habilidades docentes necessárias para gerir os processos, métodos e práticas de gestão e organização de sala de aula de modo geral. É o tipo de conhecimento mobilizado quando o professor faz escolhas pedagógicas para o ensino deste objeto matemático.

A propósito do conhecimento do currículo, Shulman (1986) adverte que esse tipo de conhecimento engloba a compreensão dos programas educacionais, o conhecimento dos materiais instrucionais disponíveis para o ensino de uma disciplina e a gama de características que viabilizam, ou não, o uso de um determinado currículo ou material instrucional em circunstâncias específicas.

Complementando esses atributos, o autor apresenta dois aspectos particulares do conhecimento do currículo: o conhecimento curricular lateral, que relaciona o conteúdo a ser ensinado com os conteúdos que estão sendo ensinados simultaneamente em outras disciplinas, indo ao encontro da ideia de interdisciplinaridade, e o conhecimento curricular vertical, que relaciona o conteúdo a ser ensinado com os conteúdos que foram e serão ministrados na mesma disciplina, bem como os materiais que o incorporam.

Por conhecimento do currículo para o ensino de taxa de variação entendemos os conhecimentos referentes ao currículo de Matemática e aos materiais associados a ele que orientam e direcionam o processo de ensino desse objeto matemático, a partir dos quais o professor irá tomar as melhores decisões, ou as mais convenientes, referentes a este processo. Esse tipo de conhecimento compreende as possíveis interações entre a noção de taxa de variação com outras noções matemáticas que foram, ou que ainda serão exploradas na disciplina de Matemática, e com outros conteúdos explorados em outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, na Física e na Química.

Posto isso, e uma vez que Shulman parou de fazer pesquisas referentes a formação de professores em 1996, conforme ele afirmou na entrevista concedida para Gaia, Cesário e Tancredi (2007, p. 152), voltamos nossa atenção às pesquisas que apresentam novas perspectivas, discussões e compreensões a respeito da base de conhecimentos para o ensino, assim como detalhamentos e refinamentos para as categorias já propostas pelo autor, uma vez que, de acordo com Mizukami (2004, p. 5), a base de conhecimentos para o ensino não está pronta, vem sendo gradativamente construída a partir de diversas fontes.

Diante disso, no item seguinte, passamos a apresentar os trabalhos de Mishra, Koehler e seus colaboradores, que agregaram o conhecimento tecnológico à base de conhecimentos para o ensino proposta por Shulman (1986, 1987).

3.2.2 CONHECIMENTO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO

Ainda que o advento das tecnologias tenha modificado, direta ou indiretamente, o dia a dia da população e as práticas de trabalho de muitos profissionais, o mesmo não ocorreu com a educação. De acordo com Mishra e

Koehler (2006), a realidade educacional tem ficado muito aquém dos avanços tecnológicos. Para os autores, parte do problema está na tendência de voltarmos nossa atenção apenas às tecnologias, deixando de lado suas aplicações e usos em prol do ensino e da aprendizagem. Não basta usar a tecnologia por si mesma, isso não é suficiente para os processos de ensino e de aprendizagem, o professor precisa compreendê-la a fim de incorporá-la adequadamente a estes processos.

Nesse sentido, e convictos da ausência de uma fundamentação teórica para as pesquisas na área de tecnologia educacional, Mishra e Koehler (2006) estenderam os estudos iniciados por Shulman (1986, 1987) para o fenômeno da integração tecnológica à prática docente, com a finalidade de desenvolver uma estrutura conceitual para a tecnologia educacional que contemplasse uma compreensão detalhada das interações entre tecnologia, conteúdo, pedagogia e os contextos social, cultural e educacional.

Para os autores, a falta de discussões referentes ao conhecimento tecnológico para o ensino nos primeiros estudos da base de conhecimentos para o ensino é compreensível, pois, na época em que Shulman (1986, 1987) apresentou as primeiras ideias e relações entre as diferentes categorias de conhecimentos docentes, as questões tecnológicas não estavam em primeiro plano, diferente dos dias atuais, em que estão presentes e enraizadas no cotidiano de toda população.

Segundo Mishra e Koehler (2006), ainda que a abordagem de Shulman (1986, 1987) seja válida, o que mudou desde suas primeiras publicações até os dias atuais é que hoje as tecnologias encabeçam os discursos educacionais, principalmente por conta da disponibilidade, cada vez maior, de novas tecnologias, especialmente as digitais. Esse novo contexto tem, em primeiro plano, uma visão tecnológica que jamais poderia ter sido imaginada na época em que Shulman (1986, 1987) iniciou seus estudos e, de acordo com os autores, tornou-se um aspecto fundamental para a atual base de conhecimentos para o ensino.

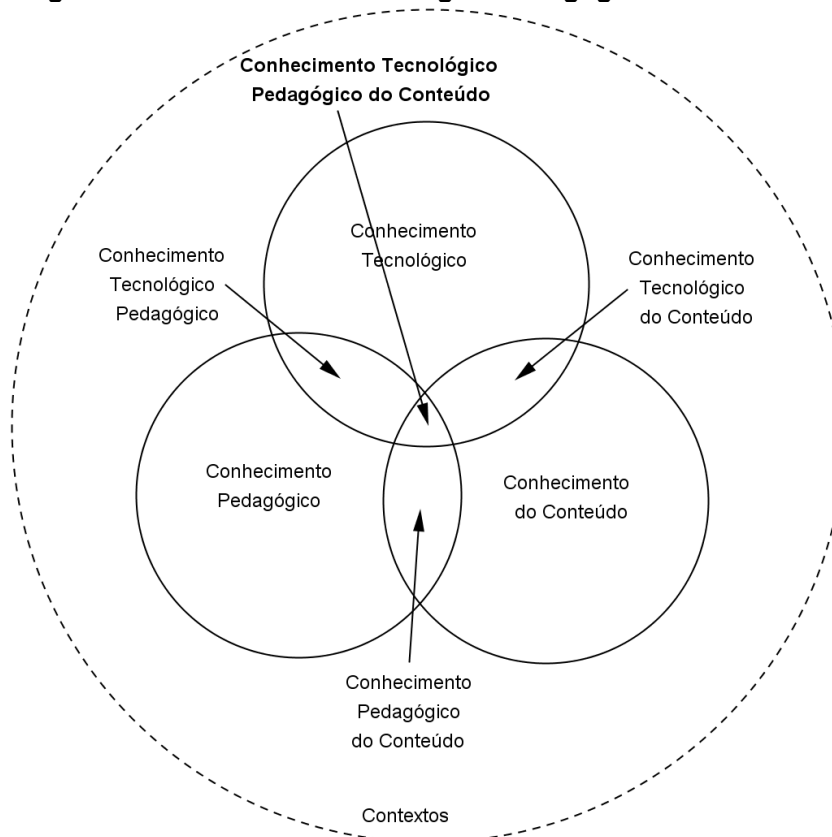
Para os pesquisadores, os requisitos de como utilizar novas tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem vêm crescendo cada vez mais rápido. Em suas palavras, essas novas tecnologias, se ainda não mudaram drasticamente a natureza das salas de aula, certamente têm o potencial necessário para fazê-lo.

Variando de desenhos em um quadro negro ou simulações de multimídias interativas para gravuras sobre uma tábua de argila ou baseados em hipertextos da Web para a metáfora da bomba do coração ou a metáfora

do computador do cérebro, as tecnologias têm forçado e proporcionado uma série de representações, analogias, exemplos, explicações e demonstrações que podem ajudar a fazer com que o assunto seja mais acessível para o aluno. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1023, tradução nossa)³⁴.

Nesse sentido, em contraste aos atuais discursos referentes a tecnologia educacional que, na maioria das vezes, separa a tecnologia dos conhecimentos do conteúdo e pedagógico, e inspirados nas ideias apresentadas por Shulman (1986, 1987), Mishra, Koehler e seus colaboradores propõem uma estrutura conceitual voltada à tecnologia educacional por meio de um diagrama de Venn, figura 3, em que ressaltam as conexões, relações, possibilidades, interações e restrições entre os conhecimentos do conteúdo, pedagógicos e tecnológicos inseridas em diferentes contextos: social, cultural e educacional.

Figura 3. Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo



Fonte: Harris, Mishra e Koehler (2009, p. 396, tradução nossa)

³⁴ Ranging from drawings on a blackboard or interactive multimedia simulations to etchings on a clay tablet or Web-based hypertexts to the pump metaphor of the heart or the computer metaphor of the brain, technologies have constrained and afforded a range of representations, analogies, examples, explanations, and demonstrations that can help make subject matter more accessible to the learner. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1023).

Nesse diagrama, os autores vão além de uma visão estanque e isolada de cada categoria de conhecimento, realizando um movimento similar ao de Shulman (1986, 1987), quando o autor estabeleceu a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo. As concepções de conhecimentos do conteúdo e pedagógicos são as mesmas propostas por Shulman (1986), e a atenção é voltada para todas as possíveis interações entre pedagogia, conteúdo e tecnologia, dando origem à noção de conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo.

Inicialmente, por conhecimento tecnológico, os autores assumem toda a gama de conhecimentos inerentes as tecnologias padrões, como lápis, papel, giz, lousa, etc., e as tecnologias digitais, como *softwares*, *internet*, calculadoras, aplicativos para *smartphones*, etc. Uma vez que as tecnologias estão em constante transformação, evoluindo cada vez mais rapidamente, a natureza do conhecimento tecnológico também precisa mudar (evoluir). Nesse sentido, Harris, Mishra e Koehler (2009), ressaltam que o conhecimento tecnológico também está em constante evolução, e isso faz com que as tarefas de compreender, definir e o construir tornem-se cada vez mais difíceis, além de dar margem ao fato que qualquer definição de tecnologia educacional corre o risco de tornar obsoleta no momento em que é publicada. Apesar disso, ressaltam os autores, há diferentes maneiras de pensar sobre e como se trabalhar com tecnologias em prol dos processos de ensino e de aprendizagem, independentemente do tipo de ferramenta utilizada ou do seu surgimento.

Por conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação entendemos a gama de conhecimentos referentes as tecnologias padrões utilizadas em sala de aula em consonância com as tecnologias digitais disponíveis para o ensino desse objeto matemático ou que podem ser adaptadas para essa finalidade como, por exemplo, *softwares* dinâmicos de Matemática, calculadoras gráficas, aplicativos para *tablets* e *smartphones* etc.

Já o conhecimento tecnológico do conteúdo, é o tipo de conhecimento mobilizado quando se utiliza tecnologia para se ensinar determinado conteúdo, ou seja, é o conhecimento que relaciona conteúdo e tecnologia mutuamente. De

acordo com Mishra e Koehler (2006, p. 1028, tradução nossa)³⁵, “os professores não precisam saber apenas o conteúdo que ensinam, mas também a maneira pela qual este conteúdo pode ser alterado por meio da aplicação da tecnologia.” Nesse sentido, cabe ao professor realizar as escolhas tecnológicas apropriadas ao ensino de cada conteúdo, uma vez que estas influenciarão diretamente no aprendizado dos estudantes.

Para o ensino de taxa de variação, entendemos por conhecimento tecnológico do conteúdo, a gama de conhecimentos provenientes da interação entre o conhecimento do conteúdo para o ensino deste objeto matemático com os conhecimentos tecnológicos que podem ser utilizados/mobilizados em prol deste ensino. Todas as pesquisas analisadas que desenvolveram sequências de ensino utilizaram *softwares* dinâmicos de Matemática, confirmando que o uso de tecnologias em consonância com a mobilização dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação pode auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático.

Por conhecimento tecnológico pedagógico os autores esclarecem que é o tipo de conhecimento que envolve a compreensão de como os processos de ensino e de aprendizagem podem mudar a partir da utilização de determinadas tecnologias. É o tipo de conhecimento que se mobiliza ao integrar a tecnologia às estratégias pedagógicas. Inclui o entendimento de que existem diferentes ferramentas tecnológicas mobilizáveis para uma determinada tarefa e a capacidade de escolhê-las de acordo com suas características. Para Mishra e Koehler (2006, p. 1028, tradução nossa)³⁶, o conhecimento tecnológico pedagógico

é o conhecimento da existência dos elementos que a compõem e dos recursos de várias tecnologias e, de como estas podem ser utilizadas no ensino e na aprendizagem e, reciprocamente, saber como o ensino pode mudar a partir do uso de novas tecnologias.

³⁵ Teachers need to know not just the subject matter they teach but also the manner in which the subject matter can be changed by the application of technology. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1028).

³⁶ is knowledge of the existence, components, and capabilities of various technologies as they are used in teaching and learning settings, and conversely, knowing how teaching might change as the result of using particular technologies. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1028).

Esse tipo de conhecimento compreende não somente a mobilização do conhecimento pedagógico para escolher a ferramenta tecnológica mais adequada para resolver uma determinada tarefa, como, também, a capacidade de vislumbrar possíveis resultados para os processos de ensino e de aprendizagem a partir do uso de uma ferramenta tecnológica escolhida *a priori*.

Para o ensino de taxa de variação, o conhecimento tecnológico pedagógico é o tipo de conhecimento que o professor mobiliza ao escolher determinada ferramenta tecnológica em detrimento de outra, ao prever os possíveis resultados dos processos de ensino e de aprendizagem a partir do recurso tecnológico escolhido *a priori*, ao organizar e instruir os alunos para o uso da tecnologia escolhida etc.

Já o conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo, nas palavras de Mishra e Koehler (2006, p. 1029, tradução nossa)³⁷, “representa uma classe de conhecimento que é fundamental para o trabalho dos professores com a tecnologia” indo além das três principais fontes de conhecimento docente (conteúdo, pedagogia e tecnologia), e diferindo de conhecimentos exclusivos do professor especialista, do tecnólogo e do pedagogo.

De acordo com Harris, Mishra e Koehler (2009), o conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo surge das múltiplas interações entre conteúdo, pedagogia, tecnologia e conhecimento contextual. Engloba, por exemplo, compreender diferentes representações por meio de recursos tecnológicos, as técnicas pedagógicas para o ensino com tecnologias, como as tecnologias podem ajudar a superar obstáculos de ensino e de aprendizagem e como podem ser usadas em prol do desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Por conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino da noção de taxa de variação entendemos o tipo de conhecimento que deve ser mobilizado para ensinar essa noção com o auxílio de recursos tecnológicos, que requer, além de uma compreensão acerca deste conteúdo, compreender/vislumbrar as potencialidades das tecnologias em prol deste ensino

³⁷ represents a class of knowledge that is central to teachers' work with technology. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1029).

em consonância com a mobilização de conhecimentos pedagógicos tanto na escolha do recurso tecnológico, quanto na organização e gestão da sala de aula.

Desse modo, o modelo estrutural para a tecnologia educacional proposto por Mishra e Koehler (2006) requer um pensamento entrelaçado por três vertentes fundamentais da base de conhecimento para o ensino: conteúdo, pedagogia e tecnologia. “A integração produtiva da tecnologia ao ensino precisa considerar as três vertentes não isoladamente, mas sim dentro das complexas relações no sistema definido pelos três elementos-chaves” (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1029, tradução nossa)³⁸, configurando uma construção educacional complexa que, de certo modo, não é fácil de ser compreendida, ensinada ou posta em prática.

Além disso, os autores também ressaltam que cada situação de ensino é única; é o resultado do entrelaçamento entre os conhecimentos do conteúdo, pedagógico e tecnológico. Mas isso não quer dizer que há uma única solução tecnológica que dará certo em todas as situações de ensino, pelo contrário, o sucesso de uma solução tecnológica reside na capacidade do professor de perpassar pelos espaços delimitados pelo conteúdo, pedagogia e tecnologia, e por suas complexas interações. Nas palavras dos autores, a mobilização do conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo pode ser feita em qualquer momento dos processos de ensino e de aprendizagem, exigindo, constantemente, que o docente reconfigure não apenas sua compreensão referente a tecnologia, como também das outras vertentes da base de conhecimentos para o ensino, reconfigurando suas estruturas cognitivas.

Ante ao exposto, e no contexto brasileiro, em que os “saberes relacionados as tecnologias no ensino estão praticamente ausentes” das licenciaturas para formação de professores (GATTI, 2014, p. 1374), a construção do conhecimento tecnológico para o ensino e das demais categorias que o têm em sua composição só é feita pelo professor em formações continuadas, em estudos teóricos e na prática docente. De acordo com Gatti (2014), as licenciaturas para formação de professores dedicam poucas horas/aula aos conhecimentos tecnológicos e não

³⁸ Productive technology integration in teaching needs to consider all three issues not in isolation, but rather within the complex relationships in the system defined by the three key elements. (MISHRA; KOEHLER, 2006, p. 1029).

exploram suas possíveis relações com os conhecimentos específicos da área nem com os conhecimentos pedagógicos, o que inviabiliza a construção, na graduação, do conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo pelo futuro professor.

Uma vez que o conhecimento tecnológico foi agregado à base de conhecimentos para o ensino, no item seguinte passamos a discutir o conhecimento didático para o ensino e suas possíveis interações com os conhecimentos já apresentados. Para isso, apresentamos uma concepção de Didática da Matemática fundamentada nas teorias da Educação Matemática e a relacionamos com os trabalhos de Lima e Silva (2015) que, a partir das concepções de Shulman (1986, 1987) e de Mishra e Koehler (2006), acrescentam o conhecimento didático a base de conhecimentos para o ensino.

3.2.3 CONHECIMENTO DIDÁTICO PARA O ENSINO

A didática “clássica” de Comenius (1657, p. 13), que consiste em “um método universal de ensinar tudo a todos. E de ensinar com tal certeza, que seja impossível não conseguir bons resultados”, perdurou por séculos, até se definir que as didáticas poderiam ser, e são específicas.

Foi no contexto alemão da metade do século XIX que emergiu a distinção entre didática geral e didática das disciplinas escolares, entendida como uma aplicação metodológica dos princípios da didática geral a uma disciplina escolar (denominada tradicionalmente de didática específica). Duas razões emergiram, em um primeiro momento, para defender a concepção de didática específica em detrimento da tradicional noção de didática geral:

Uma primeira, de caráter mais corporativo, é que – frente a dependência da didática especial da didática geral – falar de ‘didáticas específicas’ é contribuir para o desprendimento e independência progressiva de campos que tradicionalmente dependiam organicamente da Didática geral.

Aceitando a possível legitimidade das didáticas específicas em nível de formação de professores da escola básica, e em outros níveis educativos, o componente ‘conteúdo’ se apresenta de outro modo, tanto em sua aquisição como em seu uso. (BOLÍVAR, 2005, p. 11, tradução nossa)³⁹.

³⁹ (a) Una primera, de carácter más corporativo, y es que – frente a la dependencia de la didáctica especial de la didáctica general – hablar de “didácticas específicas” es contribuir al desprendimiento

Nota-se, com isso, em paralelo a distinção entre didática e conteúdo, que o interesse nas didáticas específicas superou as didáticas gerais, valorizando-se não somente o que se ensina, mas também como ensinar.

Nessa direção, D'Amore (2007) define a didática específica de um conhecimento como um projeto social com a finalidade de levar um organismo a construir esse conhecimento por meio de fundamentos epistemológicos, metodológicos e teóricos. No caso específico da Didática da Matemática, uma vertente da Educação Matemática, o autor a define como “a disciplina científica e o campo de pesquisa cujo objetivo é o de identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e os processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática.” (D'AMORE, 2007, p. 97).

As primeiras pesquisas em Didática da Matemática surgiram na França, a partir da década de 1970, em um contexto marcado pelo movimento que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Fundamentados em alguns aspectos do construtivismo piagetiano como, por exemplo, na noção de desenvolvimento cognitivo e no papel central da ação no desenvolvimento, diversos pesquisadores franceses começaram a “estudar os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias do saber matemático” (ALMOULOU, 2007, p. 26), isto é, a didática específica da Matemática.

A didática como campo científico entra em pleno auge. Desenvolvem-se metodologias de investigação própria da tradição francesa. Este é o caso da engenharia didática que se encontra, particularmente, nos trabalhos de G. Brousseau, M. Artigue, R. Douady, M.R. Perrin e J. Robinet. (DOUADY, 1995, p. 5, tradução nossa)⁴⁰.

Nesse contexto, o Ministério da Educação Nacional Francês cria o IREM (Instituto de Investigação em Ensino das Matemáticas), cuja finalidade foi ofertar para professores com diferentes formações e que atuavam em diferentes níveis de

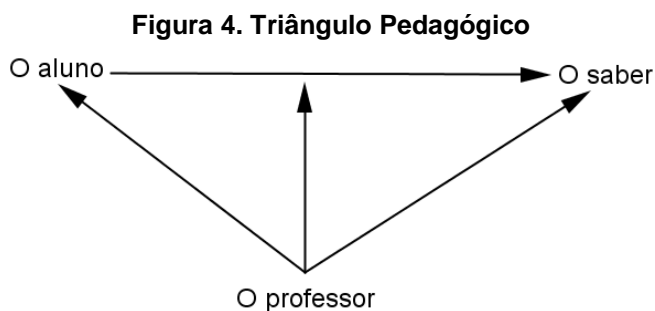
e independencia progresiva de campos que tradicionalmente dependían orgánicamente (como una segunda parte, en su apartado de “metodologías”) de la Didáctica general.

(b) Aceptando la posible legitimidad de didácticas específicas a nivel de formación de profesores de Secundaria, en otros niveles educativos el componente “contenido” se presenta de otro modo, tanto en su adquisición como en su uso. (BOLÍVAR, 2005, p. 11).

⁴⁰ La didáctica como campo científico entra en pleno auge. Se desarrollan metodologías de investigación propias de la tradición francesa. Este es el caso de la ingeniería didáctica que se encuentra particularmente en los trabajos de G. Brousseau, M. Artigue, R. Douady, M.R. Perrin y J. Robinet. (DOUADY, 1995, p. 5).

ensino (primário, secundário e universitário), a possibilidade de desenvolverem trabalhos conjuntamente, o que vai em direção às atuais ideias de interdisciplinaridade e transdisciplinaridade. Os professores/pesquisadores do IREM começam, então, a "preparar conjuntamente suas classes com uma determinada intenção de aprendizagem; fazer observações mútuas das classes; analisar as observações recorridas; e tomar novas decisões." (DOUADY, 1995, p. 5, tradução nossa)⁴¹.

Diante desse cenário, os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática foram representados, a princípio, por meio de um "triângulo pedagógico", que representa as interações entre o professor, o saber e o aluno, como mostra a figura 4.



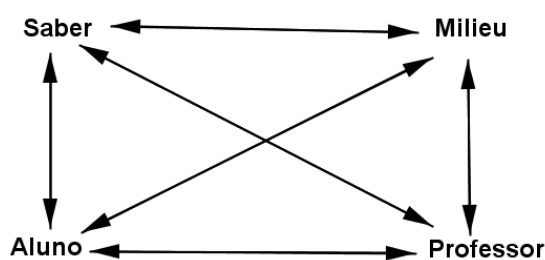
Fonte: Almouloud (2007, p. 26)

Neste esquema, "o papel do professor é analisado, prioritariamente, em relação ao conteúdo que deveria ensinar e à metodologia que deveria utilizar para disponibilizar esse conteúdo para o aluno" (ALMOULOUDO, 2007, p. 26), ou seja, o professor tem um papel central, o de "transmissor" do conhecimento.

Como se pode observar, esse esquema não contempla a noção de *milieu*, o que, de acordo com D'Amore (2008), revela sua insuficiência, e que motivou Brousseau (1986) a introduzir de um novo "vértice", passando a representação dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática para um "quadrilátero didático", como mostra a figura 5.

⁴¹ deciden preparar conjuntamente sus clases con una cierta intención de aprendizaje; hacer observaciones mutuas de clase; analizar las observaciones recogidas; y tomar nuevas decisiones. (DOUADY, 1995, p. 5).

Figura 5. Quadrilátero Didático



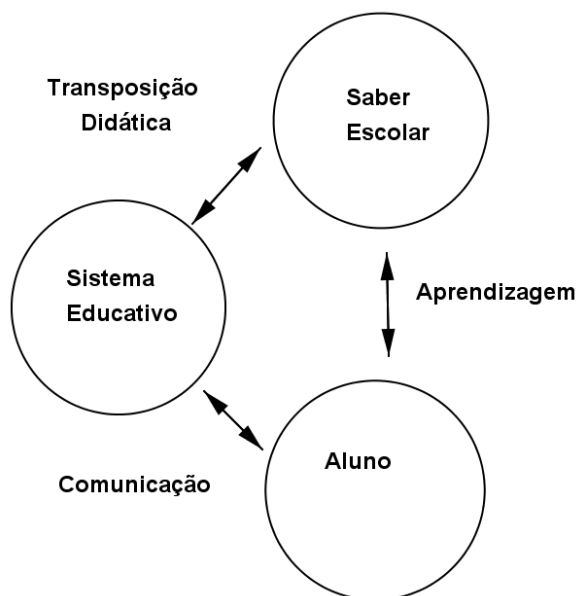
Fonte: Adaptado de D'Amore (2008, p. 6)

A partir deste esquema, Brousseau (1986, p. 2) definiu a Didática da Matemática como uma vertente da Educação Matemática, cujo objetivo primeiro era estudar as atividades didáticas que tinham como finalidade o ensino de Matemática.

D'Amore (2008) também chama a atenção para as fraquezas desse quadrilátero quando considera que nesse esquema não está evidente a diferença entre os saberes escolares a ensinar ou ensinados de fato e os conhecimentos dos estudantes, nem as diferentes características dos alunos. Daí a necessidade de reformulá-lo para um novo esquema, que Brousseau (2000) constituiu a partir de dois triângulos, um didático, que representa o processo de ensino (figura 6), e outro psicogenético, que representa o processo de aprendizagem (figura 7).

No esquema apresentado na figura 6 o processo de ensino é idealizado a partir de uma concepção empirista de conhecimento, se dá por meio da comunicação de informações entre o sistema educativo, mediado pelo professor e o aluno, ou seja, a partir da transmissão de conhecimentos do professor para o aluno. Nas palavras de Brousseau (2000, p. 3), esse esquema é geralmente associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento em jogo em uma série de mensagens para o aluno que exerce o papel de receptor. “O objetivo destas mensagens é, essencialmente, a aculturação do aluno pela instituição.”

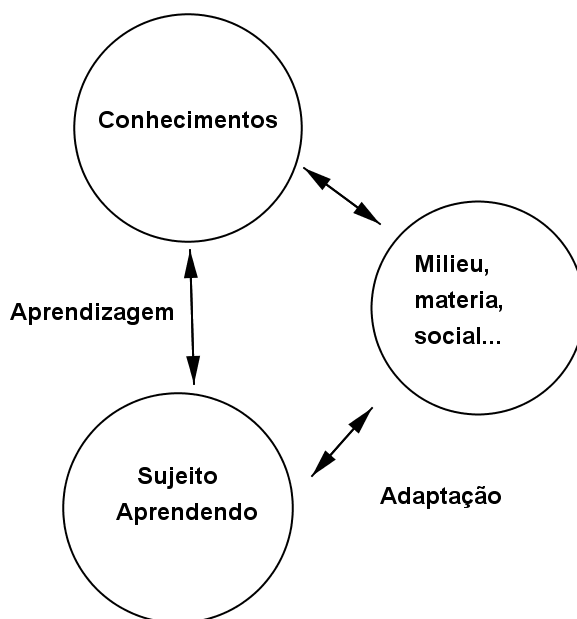
Figura 6. Triângulo didático



Fonte: Brousseau (2000, p. 8, tradução nossa)

Já o processo de aprendizagem (figura 7) Brousseau (2000) o fundamenta na psicogenética, especificamente, na tendência natural dos indivíduos (alunos) de adaptarem-se, de modo independente, ao *milieu* que, por sua vez, é um fator de resistência, dúvida, contradição, dificuldade e complexidade.

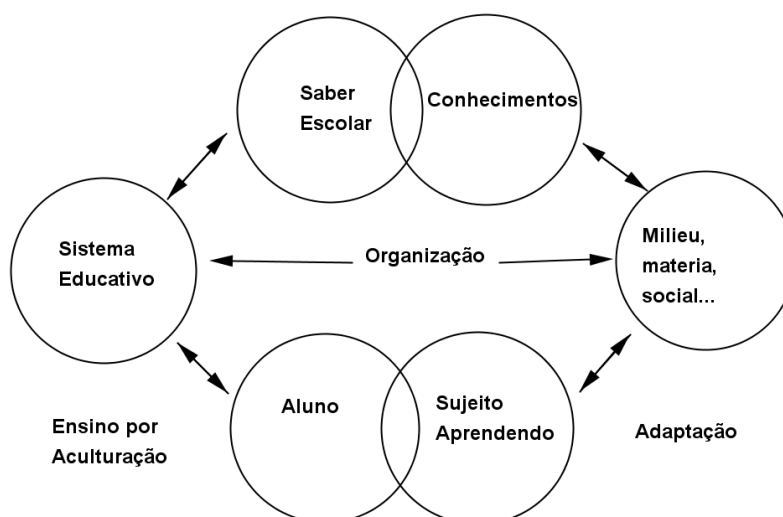
Figura 7. Triângulo da aprendizagem psicogenética



Fonte: Adaptado de Brousseau (2000, p. 8)

É a partir da identificação do conhecimento construído pelo sujeito aprendendo em contato com o *milieu* (figura 7) com o saber escolar (figura 6), e da identificação desse sujeito em aprendizagem (figura 7) com o aluno (figura 6), que se obtém um esquema de quatro polos para representar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, figura 8. Nesse esquema, Brousseau (2000, p. 3) ressalta que o ensino e a aprendizagem de Matemática se convertem em uma atividade que só pode conciliar dois processos, um de aculturação, em que o aluno se adapta ao sistema educativo, e outro de adaptação independente, em que o aluno se adapta ao *milieu* que é fator de dificuldades.

Figura 8. Hexágono Didático



Fonte: Adaptado de Brousseau (2000, p. 4)

Em paralelo a evolução dos esquemas de representação dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, as definições de Didática da Matemática também evoluíram. Brousseau, em 1995, refinou a definição apresentada em 1986, e concebeu a Didática da Matemática como a “ciência das condições de produção e de disseminação dos saberes relevantes às sociedades e às relações humanas.” (BROUSSEAU, 1995, p. 2, tradução nossa)⁴². Chevallard, Bosch e Gascón (1997), a luz dessa definição e fundamentados na Antropologia dos Saberes, definiram a Didática da Matemática como a ciência do estudo e da ajuda ao estudo de Matemática, e estabeleceram como objetivos dessa ciência,

⁴² science des conditions de la production et de la diffusion des savoirs utiles aux sociétés et aux affaires des hommes. (BROUSSEAU, 1995, p. 2).

[...] descrever e caracterizar os processos de estudo – ou processos didáticos – de modo a propor explicações e respostas sólidas para as dificuldades que encontram todos aqueles (alunos, professores, pais, profissionais, etc.) que são levados a estudar Matemática. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 60, tradução nossa)⁴³.

Nessa direção, Bosch (1997) pontua que a singularidade da Didática da Matemática não consiste em tomar como objeto primário de estudo o sujeito que aprende ou o que ensina, mas sim o saber matemático que eles estudam em conjunto, situando o objeto de estudo da Didática da Matemática no campo da Antropologia dos Saberes, em que a Didática da Matemática é uma vertente da Antropologia da Matemática.

Com isso, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), particularmente a noção de Transposição Didática, proposta por Chevallard na década de 1980, e mobilizada por Brousseau (2000) para caracterizar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática (Hexágono Didático), “alcança um sucesso inusitado, especialmente para dar uma base epistemológica própria, paralela a Shulman (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo), às didáticas específicas (neste caso, a Didática da Matemática).” (BOLÍVAR, 2005, p. 18, tradução nossa)⁴⁴.

Para D’Amore (2008), a maior contribuição da noção de Transposição Didática para a Didática da Matemática não foi apenas mostrar a distância entre o saber científico e o saber ensinado, mas também, evidenciar que o saber matemático está na origem de toda problemática didática, como propõe Bosch (1997). Todavia, este saber não é absoluto nem inquestionável, e as pesquisas em Didática da Matemática dependem do tipo de Modelização Matemática a que se recorre para realizá-las, visto que “toda atividade Matemática pode ser interpretada como uma atividade de Modelização.” (LUCAS, 2015, p. 23).

Foi nesse cenário, em que a Didática da Matemática é uma ciência autônoma de *status* próprio, que Lima e Silva (2015) acrescentaram o

⁴³ describir y caracterizar los procesos de estudio – o procesos didáticos – de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se ven llevados a estudiar matemáticas. (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, 1997, p. 60).

⁴⁴ alcanzando un inusitado éxito, especialmente para dar una base epistemológica propia, de modo paralelo al de Shulman (“Conocimiento Didáctico del Contenido”), a las didácticas específicas (en este caso, a partir de la Didáctica de la Matemática). (BOLÍVAR, 2005, p. 18).

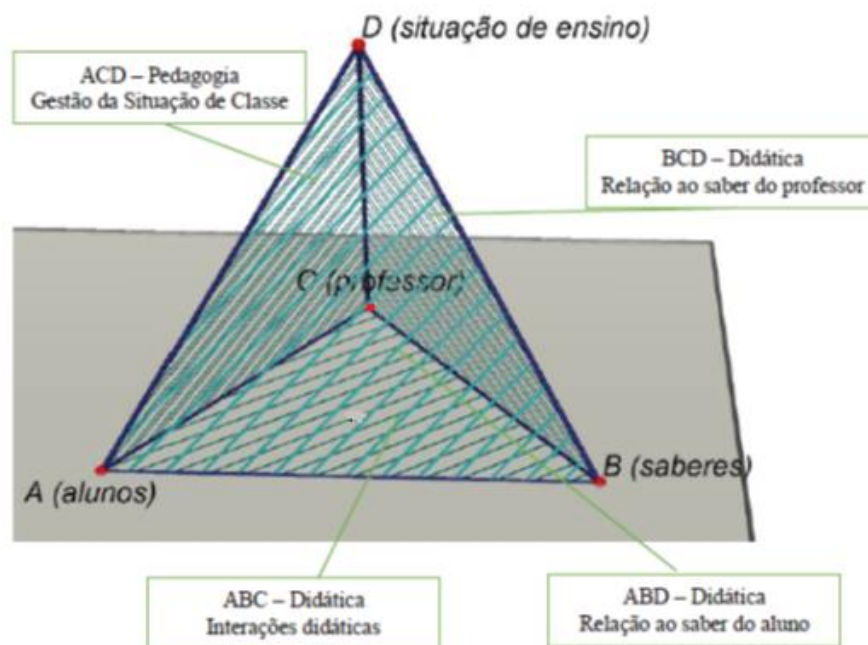
conhecimento didático à base de conhecimentos para o ensino como uma categoria de conhecimentos independente e de domínio próprio. Em resumo, a base de conhecimentos proposta pelos autores relaciona os conhecimentos inerentes a Didática da Matemática com os conhecimentos do conteúdo, pedagógicos e tecnológicos, já apresentados nos itens anteriores deste capítulo.

Ao fazer alusão ao conhecimento didático como uma categoria da base de conhecimentos para o ensino, os autores reportam-se as teorias, métodos, processos, práticas, competências e habilidades que dizem respeito, exclusivamente, ao ensino e a aprendizagem de Matemática, tendo como pano de fundo a Didática da Matemática.

De acordo com Lima e Silva (2015, p. 6), esse tipo de conhecimento “trata de reflexões didáticas relativas ao ensino de Matemática” e difere do conhecimento pedagógico em dois aspectos, primeiro por considerar sistematicamente os conteúdos específicos de Matemática e, em segundo lugar, por estar diretamente relacionado à Didática da Matemática.

De modo a evidenciar os conhecimentos didáticos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de um saber matemático, e para melhor diferenciá-los dos conhecimentos pedagógicos, Lima e Silva (2015) recorrem ao “tetraedro didático” de Bailleul e Bataille (2011), figura 9, cujas faces representam as interações alunos/saberes/professores (face ABC), alunos/saberes/situação de ensino (face ABD), saberes/professores/situação de ensino (face BCD) e alunos/professor/situação de ensino (face ACD).

Figura 9. Tetraedro didático



Fonte: Adaptado de Bailleul e Bataille (2011, p. 14)

Nas palavras de Bailleul e Bataille (2011), a face ACD, em que se pode observar as interações entre alunos, professor e uma determinada situação de ensino, refere-se, exclusivamente, ao conhecimento pedagógico, pois nela estão contidas as ideias inerentes a gestão de uma situação de ensino em sala de aula sem considerar o conteúdo específico a ser ensinado, ou seja, o saber em jogo. Neste esquema, o conhecimento pedagógico trata, especificamente, dos processos, práticas e métodos de ensino e de aprendizagem, indo ao encontro daqueles conhecimentos aos quais Shulman (1986) refere-se por *general pedagogical knowledge*, traduzido por nós como conhecimentos pedagógicos gerais.

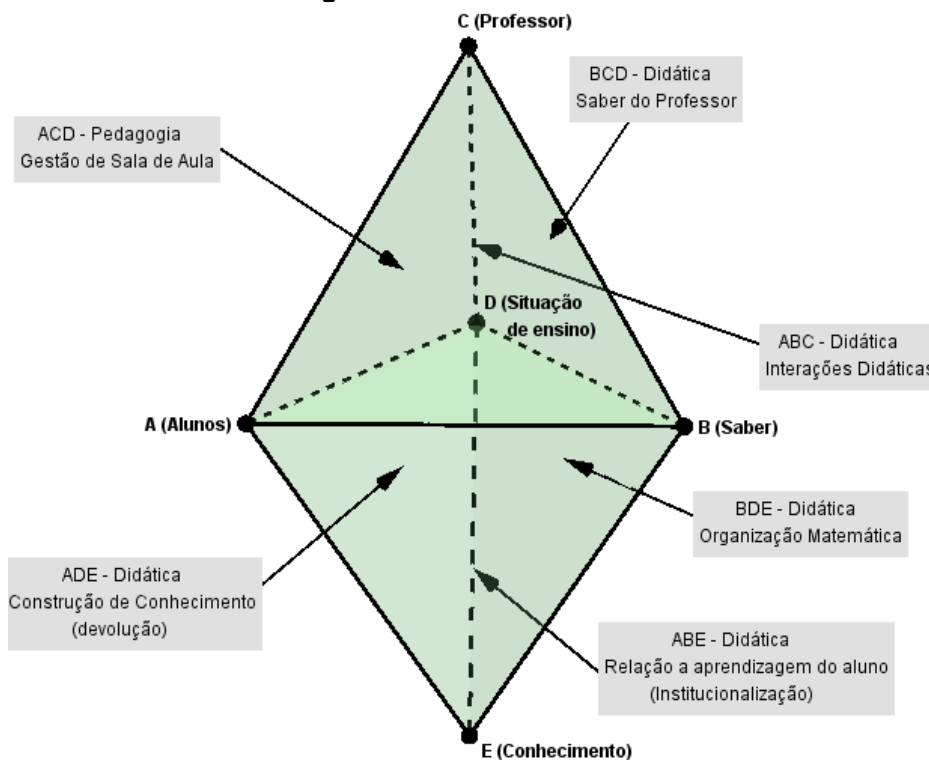
Já as demais faces apresentam interações didáticas que emergem quando se deseja ensinar um determinado conteúdo (saber matemático) para estudantes específicos, tratam das relações entre professor, alunos e o saber em jogo, que caracterizam interações didáticas, das relações entre situação de ensino, professor e o saber em jogo, que caracterizam as interações entre o saber docente e a situação de ensino e das relações entre situação de ensino, alunos e o saber, que caracterizam as relações entre os alunos e o saber mediadas pela situação de ensino.

Para nós, o fato de a construção dos conhecimentos inerentes ao saber em jogo estar implícita neste tetraedro e de não ser dado o devido destaque à distinção entre conhecimento e saber revela a necessidade de completa-lo para representar as relações didáticas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem desse saber. Concordamos com Chevallard, citado por Almouloud (2007, p. 113), para quem, o saber matemático é uma forma particular de organização do conhecimento, “um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento.”

Um sujeito pode mobilizar uma determinada técnica para resolver uma tarefa ou um tipo de tarefa, pode até ter os conhecimentos necessários para resolver essa tarefa com destreza, mas isso não quer dizer que ele faça, necessariamente, alguma relação entre estes conhecimentos e o saber que os fundamenta. Talvez ele apenas conheça, ou já tenha visto, alguma técnica de resolução que seja adequada à tarefa em questão, mas não a relaciona com um determinado saber matemático, daí a insuficiência deste tetraedro para representar a construção de conhecimentos referentes a um determinado saber matemático.

Diante disso, fundamentados na distinção entre conhecimento e saber já apresentada no item 3.1 desse capítulo, considerando as singularidades da Didática da Matemática e entendendo o aluno como um sujeito em aprendizagem, acreditamos que o acréscimo de um novo vértice (conhecimento), passando a representação dessas relações para um “hexaedro didático”, figura 10, contemple todas as possíveis interações didáticas inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem de um determinado conteúdo matemático, ou seja, de um saber matemático.

Figura 10. Hexaedro didático

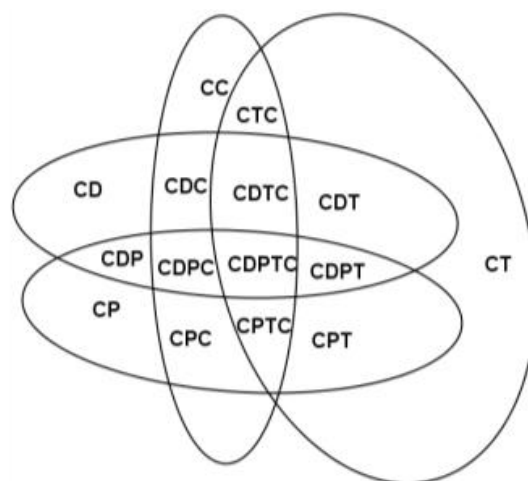


Fonte: Produção nossa

Nesse esquema, com exceção da face ACD que, conforme já foi dito, refere-se ao conhecimento pedagógico, todas as demais referem-se a interações didáticas presentes nos processos de ensino e de aprendizagem de um conteúdo matemático. A face BCD, referente ao saber do professor, compreende as interações didáticas entre o professor e o saber para a construção/elaboração de uma situação de ensino. A face ABC refere-se, exclusivamente, as interações didáticas entre o professor e os alunos condicionadas pelo saber matemático em jogo. A face BDE contém as interações didáticas em que o saber em jogo está na origem de uma Organização Matemática específica que, de acordo com Bosch (1997), funciona como um dispositivo gerador de conhecimentos. A face ADE contempla as interações entre os alunos e a situação de ensino na construção de conhecimentos, é condicionada ao processo de devolução, momento em que os alunos aceitam para si as responsabilidades referentes à própria aprendizagem. A face ABE, refere-se, exclusivamente, ao aprendizado do aluno, é condicionada ao processo de institucionalização, momento em que é fixado o estatuto cognitivo do saber em jogo e estabelecida uma relação entre o conhecimento construído e este saber.

Diante dessas interações, o conhecimento didático se torna uma categoria fundamental à base de conhecimentos para o ensino. Nessa direção, Lima e Silva (2015), assim como fizeram Mishra e Koehler (2006), utilizam um diagrama de Venn para representar uma base de conhecimento para o ensino de forma geral, como mostra a figura 11, em que podemos observar as quatro categorias de conhecimentos fundamentais⁴⁵ e suas possíveis relações por meio de todas as intersecções.

Figura 11. As diferentes categorias de conhecimentos docentes



Fonte: Lima e Silva (2015, p. 4)

A partir desse esquema, e com base nas definições já apresentadas por Shulman (1986, 1987) e Mishra e Koehler (2006), Lima e Silva (2015) definiram quinze categorias de conhecimentos para o ensino, das quais, nos deteremos nas que contemplam o conhecimento didático, visto que os conhecimentos do conteúdo, pedagógicos, tecnológicos, pedagógico do conteúdo, tecnológico do conteúdo, pedagógico tecnológico e pedagógico tecnológico do conteúdo já foram delineados por Shulman (1986, 1987) e Mishra e Koehler (2006). Dessa forma, voltaremos nossa atenção ao conhecimento didático do conteúdo (CDC), ao conhecimento didático pedagógico (CDP), ao conhecimento didático tecnológico (CDT), ao conhecimento didático tecnológico do conteúdo (CDTC), ao conhecimento didático pedagógico do conteúdo (CDPC), ao conhecimento didático

⁴⁵ Conhecimento didático, conhecimento pedagógico, conhecimento do conteúdo e conhecimento tecnológico.

pedagógico tecnológico (CDPT) e ao conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo (CDPTC).

O conhecimento didático do conteúdo (CDC), de acordo com Lima e Silva (2015), compreende a capacidade do professor de levantar os conhecimentos prévios dos estudantes, de representar e formular hipóteses, conjecturas, noções e técnicas didáticas inerentes a conteúdos específicos de Matemática. Envolve também a capacidade de mobilizar ferramentas e teorias específicas da Didática da Matemática em prol da aprendizagem dos estudantes. Para os autores, somente o conhecimento didático do conteúdo pode propiciar ao professor

[...] condições de refletir a respeito daquilo que faz determinado conceito ser mais ou menos difícil de ser compreendido pelo aluno, quais são os exemplos, ilustrações e explicações que podem trazer discussões mais ricas para o trabalho com determinado conteúdo matemático, como enfrentar as dificuldades encontradas pelo aluno se estas aparecerem, os obstáculos que os alunos trazem ou não consigo para aquela situação de aprendizagem, os possíveis erros na mobilização de conhecimentos prévios por parte dos alunos, etc. (LIMA; SILVA, 2015, p. 6).

Para o ensino de taxa de variação esse tipo de conhecimento é mobilizado quando, em consonância com o levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, o professor relaciona o conhecimento do conteúdo de taxa de variação com conhecimentos específicos da Didática da Matemática que podem auxiliá-lo no ensino desse objeto matemático como, por exemplo, com a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau ou com a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, como fez Silva, E. (2012).

Já o conhecimento didático pedagógico (CDP) relaciona-se com as reflexões inerentes a Educação em geral, com viés voltado especificamente às aulas de Matemática. É por meio da mobilização desse tipo de conhecimento que o professor reflete a respeito do planejamento de uma aula de Matemática, da gestão de sua sala de aula, dos métodos de avaliação, etc.

Para o ensino de taxa de variação, o conhecimento didático pedagógico é mobilizado quando o professor relaciona conhecimentos específicos da Didática da Matemática com aqueles conhecimentos voltados à gestão e organização de sala de aula. Este tipo de conhecimento é mobilizado na elaboração e aplicação de Organizações Didáticas voltadas ao ensino deste objeto matemático.

O conhecimento didático tecnológico (CDT) é aquele que permite ao professor analisar, com base em teorias da Didática da Matemática, as ferramentas tecnológicas disponíveis para o ensino e a aprendizagem de Matemática, enquanto o conhecimento didático tecnológico do conteúdo (CDTC), união do conhecimento didático tecnológico com o conhecimento do conteúdo, permite ao professor, escolher, dentre as diversas ferramentas tecnológicas disponíveis, as mais adequadas para o ensino e a aprendizagem de um conteúdo matemático específico.

Por conhecimento didático tecnológico do conteúdo para o ensino de taxa de variação entendemos o tipo de conhecimento que permite ao professor vislumbrar, fundamentado em teorias da Didática da Matemática, diferentes possibilidades para a inserção de tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático.

Já o conhecimento didático pedagógico do conteúdo (CDPC), nas palavras de Lima e Silva (2015), é o tipo de conhecimento que permite ao professor, com base nas teorias da Didática da Matemática e em seus conhecimentos pedagógicos, refletir, julgar e escolher, dentre os diversos aspectos que influenciam os processos de ensino e de aprendizagem de um conteúdo matemático, aquele que melhor se adequa a realidade de seus educandos.

Por conhecimento didático pedagógico do conteúdo para o ensino de taxa de variação, entendemos a gama de conhecimentos e concepções que o professor mobiliza, fundamentado em teorias da Didática da Matemática, para construir/estudar Organizações Matemáticas e Didáticas específicas para o ensino deste conteúdo.

Também embasado em conhecimentos pedagógicos e em conhecimentos específicos da Didática da Matemática, o conhecimento didático pedagógico tecnológico (CDPT) é aquele que permite ao professor, analisar e compreender como o uso de diferentes tecnologias pode influenciar positivamente os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, enquanto o conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo (CDPTC), segundo Lima e Silva (2015, p. 8), permite ao docente, com base em seus conhecimentos pedagógicos, tecnológicos,

do conteúdo e referentes as teorias da Didática da Matemática, “buscar a melhor maneira para o ensino e à aprendizagem de determinado conteúdo” matemático.

Por conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo para o ensino de taxa de variação, entendemos o tipo de conhecimento que relaciona os conhecimentos do conteúdo de taxa de variação com conhecimentos específicos da Didática da Matemática, de gestão e organização de sala de aula e com aqueles conhecimentos referentes as tecnologias (digitais). Pereira (2009), Silva, E. (2012), Silva e Silva (2015) e Lucas (2015) mobilizaram esse tipo de conhecimento na construção, aplicação, análise e validação das sequências de ensino exploradas em suas pesquisas, evidenciando que esse tipo de conhecimento é fundamental em processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação.

Ante ao exposto, entendendo o conhecimento didático como uma categoria de conhecimento fundamental da base de conhecimentos para o ensino, no item seguinte apresentamos as pesquisas de Deborah Ball e seus colaboradores que, a partir das noções de conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo propostas por Shulman (1986), propõem a noção de conhecimento matemático para o ensino, evidenciando um tipo de conhecimento específico para o ensino de Matemática que, em última instância, nos auxiliará na identificação de um tipo de conhecimento específico para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

3.2.4 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

Convictos de que o professor precisa conhecer, além dos conteúdos de ensino, as diversas formas de torná-los compreensíveis para seus alunos e de relacioná-los com os conteúdos que já foram ou que ainda serão estudados, Ball, Thames e Phelps (2008) aprofundaram os estudos iniciados por Shulman (1986, 1987) e estabeleceram a noção de conhecimento matemático para o ensino⁴⁶.

De acordo com os autores, apesar da ampla disseminação das ideias apresentadas por Shulman (1986, 1987), principalmente as referentes ao

⁴⁶ Por “ensino”, os autores referem-se a tudo que o professor pode fazer para favorecer a aprendizagem de seus alunos. Vai além do trabalho desenvolvido em sala de aula, implica no planejamento das tarefas, nas avaliações, nos feedbacks, na gestão das tarefas extraclasse, etc.

conhecimento pedagógico do conteúdo, seu potencial ainda tem sido pouco explorado. Segundo eles, o campo de pesquisa referente aos conhecimentos docentes tem feito pouco progresso, “as ideias parecem teoricamente dispersas, sem definição clara” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 394, tradução nossa)⁴⁷, pois muitos pesquisadores assumem que sua natureza e seu conteúdo são triviais. Nas palavras dos autores, o que se entende por conhecimento pedagógico do conteúdo ainda é pouco especificado, não existe uma definição coesa e uma fundamentação teórica para esta noção,

[...] quase um terço dos artigos que citam conhecimento pedagógico do conteúdo o fazem sem direcionar a atenção para uma área de conteúdo específico, em vez disso fazem afirmações gerais do conhecimento dos professores, formação de professores, ou política. Estudiosos têm utilizado o conhecimento pedagógico do conteúdo, como se seus fundamentos teóricos, distinções conceituais e testes empíricos estivessem já bem definidos e universalmente compreendidos. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 394, tradução nossa)⁴⁸.

Para os autores, o conhecimento pedagógico do conteúdo, na maioria das vezes, não é distinguido de outras formas de conhecimento docente. Por vezes, pesquisadores utilizam-no em alusão ao que é “puramente” conhecimento do conteúdo e, outras vezes, utilizam-no em referência ao conhecimento pedagógico geral. Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), é evidente a falta de definição dos conceitos base da noção conhecimento pedagógico do conteúdo, a maioria das definições são superficiais e, muitas vezes, amplamente concebidas.

Dentre as diversas definições para o conhecimento pedagógico do conteúdo, Ball, Thames e Phelps (2008) comentam que há algumas muito sucintas, que, apesar de contemplar a ideia geral desta noção como um domínio do conhecimento que relaciona o conteúdo a ser ensinado com o seu ensino, são amplas o suficiente para contemplar qualquer outro conhecimento ou crença docente. E outras mais cuidadosas, que, apesar dos pormenores explorados, também não distinguem o conhecimento pedagógico do conteúdo de outras formas

⁴⁷ The ideas remain theoretically scattered, lacking clear definition. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 394).

⁴⁸ [...] nearly one third of the articles that cite pedagogical content knowledge do so without direct attention to a specific content area, instead making general claims about teacher knowledge, teacher education, or policy. Scholars have used the concept of pedagogical content knowledge as though its theoretical foundations, conceptual distinctions, and empirical testing were already well defined and universally understood. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 394).

de conhecimento docente, pois, quando detalhadas, o conhecimento pedagógico do conteúdo passa a incluir quase tudo que um professor deve conhecer para o ensino de um determinado conteúdo, obscurecendo as distinções entre crenças, ações, raciocínios e outros conhecimentos do professor.

Diante disso, os autores sugerem uma mudança no foco das pesquisas referentes a base de conhecimentos para o ensino, tirando-o do que os professores precisam saber para ensinar, e voltando-o para o que os professores precisam conhecer e serem capazes de fazer para desenvolver a aprendizagem em seus alunos ou, ainda, para as necessidades, em termos de compreensão do conteúdo, de um ensino eficiente e significativo.

Assim, em detrimento da análise dos currículos vigentes, dos exames de avaliação docente ou das regras e normas de aprendizado discente, como fez Shulman (1986), Ball, Thames e Phelps (2008) focaram seus estudos no ensino de Matemática, especificamente, no que os professores precisam conhecer referente à Matemática, e em como e onde esses professores podem usar esse conhecimento matemático efetivamente para, ao final, estabelecer uma teoria voltada ao conhecimento matemático para o ensino, ou seja, aos

conhecimentos matemáticos necessários para realizar o trabalho de ensinar Matemática. É importante notar aqui, que a nossa definição começa com o ensino, não com os professores. Esse tipo de conhecimento preocupa-se com as tarefas envolvidas no ensino e com as exigências Matemáticas dessas tarefas. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa)⁴⁹.

Nota-se, com isso, que o foco dos autores não incide sobre os conteúdos que o professor deve ensinar, nem na busca por fontes de conhecimento docente, ou no que o professor sabe ou não, como fez Shulman (1986), mas, precisamente, sobre o que o professor deve conhecer e ser capaz de fazer para ensinar

⁴⁹ By “mathematical knowledge for teaching,” we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics. Important to note here is that our definition begins with teaching, not teachers. It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395).

Matemática para seus alunos. Nesse sentido, alguns questionamentos nortearam os trabalhos de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 395, tradução nossa)⁵⁰:

Quais são as tarefas e problemas recorrentes no ensino de Matemática? O que os professores fazem quando ensinam Matemática? Quais conhecimentos matemáticos, habilidades e sensibilidades são necessários para gerir essas tarefas?

As respostas para esses questionamentos emergiram dos projetos de pesquisa “*Mathematics Teaching and Learning to Teach Project*” e “*Learning Mathematics for Teaching Project*”⁵¹, desenvolvidos pelo grupo de estudos de Debora Ball e seus colaboradores, cujo foco de trabalho era voltado ao estudo e análise da prática docente frente aos conhecimentos do conteúdo para o ensino de Matemática. Nestes projetos, o que mais chamou a atenção dos pesquisadores foi o fato de o ensino de Matemática necessitar de um domínio particular do conhecimento do conteúdo que não está contido no conhecimento pedagógico do conteúdo, mas que, segundo eles, é fundamental para um ensino eficaz – o conhecimento especializado do conteúdo.

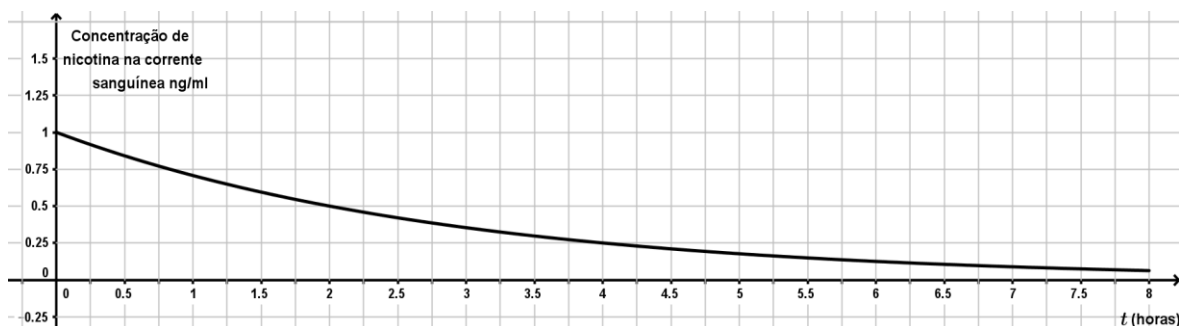
A análise da prática docente nesses projetos evidenciou que as exigências Matemáticas para o ensino são substanciais. De acordo com os autores, o conhecimento matemático para o ensino não deve ser menor do que aquele requerido por um adulto ou por outros profissionais que utilizam a Matemática em seu dia a dia. O professor precisa saber mais, e de diferentes modos a Matemática que ensina, não menos. Para ilustrar essa afirmação, confeccionamos o gráfico 1, que representa a meia vida da nicotina na corrente sanguínea de um fumante regular ou passivo⁵².

⁵⁰ What are the recurrent tasks and problems of teaching mathematics? What do teachers do as they teach mathematics? What mathematical knowledge, skills, and sensibilities are required to manage these tasks? (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395).

⁵¹ Disponível em: http://www.soe.umich.edu/research/groups_and_centers/. Acesso em 02/08/2016.

⁵² A presença da cotinina ou nicotina nos materiais orgânicos não diferencia se é de fumante regular ou fumante passivo. Nos dois casos seus níveis de concentração em qualquer material são lineares com as quantidades de tabaco consumidas pelos tabagistas e com o grau de exposição à poluição tabágica ambiental pelos fumantes passivos. (ROSEMBERG, 2003, p. 9).

Gráfico 1. Concentração de nicotina na corrente sanguínea



Fonte: Produção nossa.

Certamente, a maioria dos leitores consegue perceber que essa representação gráfica é decrescente. Os conhecimentos necessários para chegar a essa conclusão são comuns à maioria da população, pois são utilizados em diversos contextos, e ser capaz de mobilizá-los é condição necessária, mas não suficiente para ensiná-los.

Para qualificar o comportamento desse gráfico, ou seja, para interpretar que esse gráfico representa uma função decrescente a taxas decrescentes de domínio $D = [0, 8]$, se faz necessário a mobilização da ideia de taxa de variação, cujo ensino requer um conhecimento especializado desse conteúdo, além da mobilização de conhecimentos oriundos das ciências da saúde, visto que para compreender o domínio dessa função se faz necessário saber que “a nicotina se acumula, num fumante regular, a níveis significantes sanguíneos, por pelo menos de 6 a 8 horas depois de cessado de fumar” (ROSEMBERG, 2003, p. 10). É o professor quem deve possuir um amplo conhecimento a respeito dessas ideias e fazer as devidas relações com o saber matemático que as fundamenta, ele que deve compreender, relacionar, articular e mobilizá-las de diferentes modos em prol de um ensino eficiente.

Também cabe ao professor identificar erros comuns que são cometidos pelos alunos ao trabalharem com situações-problema que exploram ideias e/ou conceitos matemáticos como, por exemplo, a noção de taxa de variação. Todavia, apenas perceber erros e/ou entraves na resolução de uma situação-problema não é uma tarefa que demanda, necessariamente, a mobilização de conhecimentos específicos para o ensino, ou que implica em ensinar “bem” Matemática. O ato de ensinar Matemática vai além da resolução correta de uma atividade, interpretação ou da percepção de algum erro em seu percurso, requer as capacidades de

dimensionar e analisar a fonte do erro e de relacionar o conteúdo em questão com um determinado saber matemático que o justifica e fundamenta, e isso exige um conhecimento matemático que vai além do conhecimento de um adulto ou de um profissional que utiliza a Matemática em seu cotidiano, requer um tipo de conhecimento matemático exclusivo do professor.

Além disso, é comum, no ensino de Matemática, os estudantes mobilizarem estratégias de resolução diferentes das esperadas *a priori*, produzidas, muitas vezes, por meio de raciocínios dedutivos ou pela mobilização de determinados conhecimentos não previstos pelo docente. Nesses casos, cabe ao professor reconhecer e interpretar as estratégias de resolução desenvolvidas, validando-as ou não. Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008, p. 395, tradução nossa)⁵³ apontam que o reconhecimento de diferentes estratégias de resolução levanta questionamentos do tipo: “É legítimo fazer isso? Por quê? Isto funciona em geral? Isto é mais fácil para algumas situações e mais difícil para outras? Como descrever o método de resolução usado pelo aluno e como justificá-lo matematicamente?” As respostas para essas questões também provêm de um tipo de conhecimento matemático que é exclusivo do professor, mobilizado, especificamente, em processos de ensino e de aprendizagem.

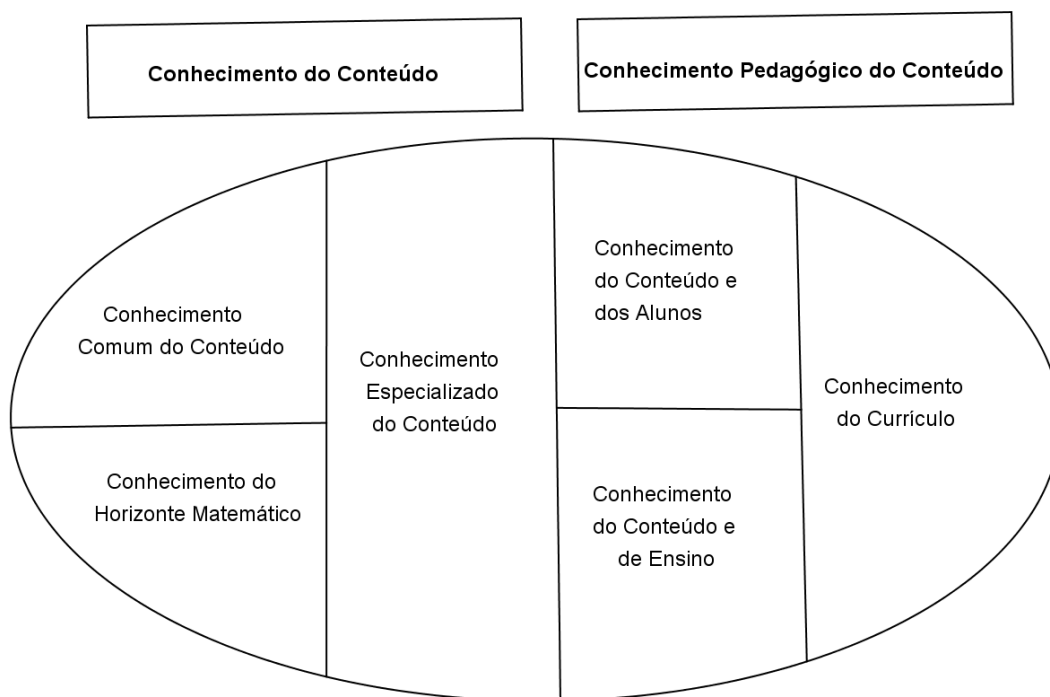
Todavia, interpretar erros e avaliar estratégias de resolução fora de um padrão pré-estabelecido não são as únicas tarefas laborais de um professor, ele deve estar engajado com uma espécie de “discurso interno da Matemática”, fundamental para determinar os melhores métodos e estratégias para um ensino eficaz.

Nessa direção, Ball, Thames e Phelps (2008) sinalizam para a importância de uma gama de conhecimentos crucial para o ensino de Matemática, que vai além do conhecimento pedagógico do conteúdo proposto por Shulman (1986), que precisa ser descoberta, mapeada, organizada e inserida em cursos de formação de professores, o conhecimento matemático para o ensino, figura 12, que contempla a distinção entre aqueles conhecimentos que se referem, exclusivamente, ao

⁵³ Is it legitimate to do this? Why? Would it work in general? Is it easier for some numbers and harder for others? How might you describe the method the student is using and how would you justify it mathematically? (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395).

domínio do conteúdo e aqueles que se relacionam com o domínio pedagógico. No esquema proposto, os conhecimentos, comum do conteúdo, especializado do conteúdo e do horizonte matemático derivam, exclusivamente, do conhecimento do conteúdo, enquanto os conhecimentos do conteúdo e de estudantes, do currículo e do conteúdo e de ensino, derivam da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo.

Figura 12. Domínios do Conhecimento Matemático Para o Ensino



Fonte: Ball e Bass (2009, p. 5, tradução nossa)

Por conhecimento comum do conteúdo, os pesquisadores entendem um tipo de conhecimento matemático vital para o processo de ensino que, embora não seja exclusivo para o ensino de Matemática, o professor deve mobilizar com eficácia, uma vez que ele deve ser capaz de desenvolver as tarefas que atribui para seus alunos. Fazer as escolhas de material, reconhecer e interpretar soluções erradas, identificar quando os materiais didáticos apresentam definições imprecisas, dominar a linguagem Matemática, por exemplo, são atribuições desse tipo de conhecimento que, embora seja denominado de “comum”, não quer dizer que toda a população o tenha. Ball e Bass (2009) esclarecem que o termo “comum” se refere ao conhecimento que há “em comum” com profissionais de outras áreas, que não são professores, mas que recorrem a Matemática em seu trabalho.

No que se refere ao ensino de taxa de variação, por exemplo, entendemos por conhecimento comum do conteúdo os conhecimentos necessários para compreender e mobilizar este objeto matemático em situações de ensino, de aprendizagem e/ou do cotidiano. Esse tipo de conhecimento compreende desde a ideia de proporcionalidade até as ideias referentes ao estudo e caracterização de funções. No caso do gráfico 1, que representa a variação da concentração de nicotina na corrente sanguínea de um fumante (ativo ou passivo) em função do tempo, o conhecimento comum do conteúdo de taxa de variação compreende desde o estudo do comportamento da curva até a obtenção da lei $f(x)$ que a representa algebricamente.

Já o conhecimento especializado do conteúdo, compreende os conhecimentos e habilidades exclusivas para o ensino de Matemática; é o tipo de conhecimento que não é necessário para outras finalidades, a não ser ensinar Matemática. Nas palavras de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 401, tradução nossa), “as exigências do trabalho de ensino de Matemática criam a necessidade de um corpo de conhecimento matemático especializado para o ensino”⁵⁴. De acordo com Ball e Bass (2009), esse tipo de conhecimento é complementar ao conhecimento comum do conteúdo, e exige um conhecimento para além daquele que está sendo explorado em sala de aula, exige a compreensão, por parte do professor, das interações entre os conhecimentos inerentes ao objeto de ensino e o saber matemático que o fundamenta.

No caso do ensino de taxa de variação, entendemos por conhecimento especializado do conteúdo a gama de conhecimentos matemáticos específicos para este ensino. São os conhecimentos que transcendem aqueles referentes as ideias de taxa de variação média e instantânea, compreendem o entendimento do professor acerca das ideias de proporcionalidade, função, limites e continuidade, além de compreender as relações entre estes conhecimentos e os saberes matemáticos que os justificam.

⁵⁴ The demands of the work of teaching mathematics create the need for such a body of mathematical knowledge specialized to teaching. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 401).

O conhecimento do conteúdo e dos alunos, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), é aquele que combina o conhecimento que o professor possui a respeito de seus alunos com o conhecimento do conteúdo. Esse tipo de conhecimento comporta a ação de antecipar os comportamentos dos estudantes, ou seja, inclui prever possíveis obstáculos que possam surgir no percurso do ensino, antever em quais pontos, tarefas, atividades e conceitos os alunos irão apresentar mais, ou menos, dificuldades e, também, inclui ouvir e interpretar as inferências e conjecturas levantadas pelos alunos. Segundo os autores, conhecer as concepções dos estudantes sobre determinados conteúdos, ter familiaridade com seus erros comuns, compreender quais, dentre os vários erros, os alunos são mais propensos a cometer, são bons exemplos do conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Esse tipo de conhecimento vai ao encontro da noção de conhecimento didático do conteúdo proposta por Lima e Silva (2015), e contempla algumas particularidades da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo proposta por Shulman (1986), visto que ambas incluem a capacidade docente de prever possíveis comportamentos dos estudantes, de levantar seus conhecimentos prévios e de compreender os motivos pelos quais o aprendizado de um determinado conteúdo é mais, ou menos, complexo.

No contexto brasileiro, a construção desse tipo de conhecimento deveria ocorrer na formação inicial docente, durante a realização do estágio curricular supervisionado⁵⁵, que tem por finalidade proporcionar ao futuro professor um contato autêntico e consistente com a realidade da Educação Básica de modo organizado, planejado e orientado por um professor-supervisor, mas que, na prática, não ocorre.

A maior parte dos estágios envolve atividades de observação, os estudantes procuram por conta própria as escolas, sem planos de trabalho e sem articulação entre instituição de ensino superior e escolas, e sua supervisão acaba tendo um caráter mais genérico, ou apenas burocrático, [...]. Esses estágios acabam não se constituindo em práticas efetivas e

⁵⁵ De acordo com resolução CNE/CP 2, de 19 de fevereiro de 2002, a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, deve contemplar, no mínimo, 400 (quatrocentas) horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso.

fontes de reflexão sobre ações pedagógicas para os estagiários. (GATTI, 2014, p. 40).

Nesse cenário, e sem a intenção de levantar um debate acerca do papel dos estágios obrigatórios na formação inicial do professor da Educação Básica, inferimos que, no Brasil, a construção do conhecimento do conteúdo e dos alunos pode até ser iniciada na licenciatura, mas sua consolidação se dá apenas no exercício docente. Não há como o professor construir e mobilizar todas as relações, reflexões e interações entre conhecimentos do conteúdo e dos estudantes se este não conhecer seus alunos, a realidade educacional em que estão inseridos e suas características e particularidades.

Nessa direção, por conhecimento do conteúdo e dos alunos para o ensino de taxa de variação entendemos o tipo de conhecimento que combina conhecimentos matemáticos específicos para o ensino deste objeto matemático com a gama de conhecimentos referentes aos alunos, especialmente, aqueles que emergem da prática e da vivência em sala de aula.

Já o conhecimento do conteúdo e de ensino, nas palavras dos autores, é como “uma amálgama, envolvendo uma determinada ideia Matemática ou procedimento e uma família de princípios pedagógicos para o ensino desse conteúdo específico.” (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 402, tradução nossa)⁵⁶. Segundo esses pesquisadores, o professor mobiliza esse tipo de conhecimento ao preparar sua aula, ao escolher e avaliar o melhor método para ensinar determinado conteúdo, ao decidir quais conjecturas dos estudantes devem ser discutidas, ignoradas, ou deixadas para outro momento, ao decidir qual o melhor momento para realizar uma intervenção para esclarecer possíveis dúvidas etc. Cada uma dessas tarefas requer, por parte do professor, uma interação entre a compreensão dos conteúdos matemáticos e uma compreensão acerca das questões pedagógicas que interferem diretamente no aprendizado dos estudantes. Além disso, essas tarefas também demandam, por parte do professor, a compreensão de questionamentos didáticos que podem influenciar positivamente os processos de ensino e de aprendizagem do conteúdo em jogo.

⁵⁶ is an amalgam, involving a particular mathematical idea or procedure and familiarity with pedagogical principles for teaching that particular content. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 402)

Esse tipo de conhecimento vai ao encontro da noção de conhecimento didático pedagógico do conteúdo, proposta por Lima e Silva (2015), e também contempla algumas características da noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, proposta por Shulman (1986), visto que a essência dessas noções reside nas interações entre o conhecimento do conteúdo e aqueles conhecimentos que regulam e direcionam os processos de ensino e de aprendizagem de um conteúdo matemático. Além disso, se considerarmos que o professor pode optar pelo uso de algum recurso tecnológico (digital) para auxiliar/favorecer o processo de ensino deste conteúdo, esse tipo de conhecimento também vai em direção a noção de conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo, proposta por Mishra e Koehler (2006), e da noção de conhecimento didático pedagógico tecnológico do conteúdo, proposta por Lima e Silva (2015).

Por conhecimento do conteúdo e de ensino de taxa de variação, entendemos o tipo de conhecimento que se mobiliza ao preparar e aplicar, por exemplo, uma sequência de atividades para o ensino deste objeto matemático, como fizeram André (2008), Pereira (2009), Matos (2013), Silva, E. (2012), Silva e Silva (2015), Villa-Ochoa, Jaramillo e Esteban (2011) e Villa-Ochoa (2012). Este tipo de conhecimento é mobilizado quando o professor deve decidir, dentre os diversos métodos e referenciais teóricos disponíveis para o ensino de taxa de variação, os que são mais adequados às suas necessidades e às demandas dos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático. Considerando que dentre as opções de escolha do professor estão os referenciais teóricos e metodológicos oriundos da Didática da Matemática, é evidente que este tipo de conhecimento vai ao encontro da noção de conhecimento didático pedagógico do conteúdo, proposta por Lima e Silva (2015).

Quanto ao conhecimento do Currículo, definido por Shulman (1986), Ball e Bass (2009) chamam a atenção para a alocação “provisória” dessa categoria dentro do conhecimento pedagógico do conteúdo por não terem certeza se esse conhecimento pode, ou não, integrar o conhecimento do conteúdo e de ensino, ou se pode permear as várias categorias ou, ainda, se é uma categoria de domínio próprio, independente. Para eles, o conhecimento do currículo é um tipo de conhecimento que contempla a compreensão dos objetivos educacionais, dos

padrões de ensino, das avaliações e dos níveis de ensino em que determinados tópicos são tipicamente abordados.

Ball, Thames e Phelps (2008) também incluem dentro do conhecimento do conteúdo, o conhecimento do horizonte matemático que, segundo eles, é um tipo de conhecimento que não é nem comum nem especializado. Esse tipo de conhecimento comporta uma espécie de consciência de como os conteúdos matemáticos estão relacionados entre si ao longo de todo o processo de escolaridade e de como estes conteúdos estão relacionados com diferentes conteúdos curriculares, sendo desenvolvido continuamente e não especificamente no momento de ensino. Para os autores, esse tipo de conhecimento envolve diversos aspectos da Matemática que, apesar de algumas vezes não estarem explícitos no currículo, não deixam de ser úteis para promover a aprendizagem dos estudantes, pois, mesmo que suas ideias se revelem apenas parcialmente no momento de ensino, certamente auxiliarão e darão suporte à aprendizagem atual e/ou terão relevância em aprendizagens futuras. Referindo-se ao conhecimento do horizonte matemático, Ball e Bass (2009, p. 11, tradução nossa)⁵⁷ afirmam que

ainda há muito a ser feito. Pensamos, no entanto, que o ensino pode ser mais hábil quando os professores têm perspectiva Matemática sobre o que se encontra em todas as direções, por trás, bem como à frente, para os seus alunos, o que pode servir para orientar sua navegação no território.

Embora essa categoria de conhecimento pareça, em um primeiro momento, ir ao encontro dos dois aspectos particulares do conhecimento do currículo eleitos por Shulman (1986), o conhecimento curricular lateral e o conhecimento curricular vertical, que, em resumo, relacionam os conteúdos abordados em uma determinada disciplina tanto com os conteúdos de outras disciplinas, quanto com os conteúdos que foram ou que ainda serão explorados nesta disciplina ao longo de todo o processo de escolaridade, Ball e Bass (2009, p. 6, tradução nossa)⁵⁸ definem “o conhecimento do horizonte matemático como uma consciência – mais como um turista experiente e apreciativo do que como um guia

⁵⁷ Much remains to be done. We think, however, that teaching can be more skillful when teachers have mathematical perspective on what lies in all directions, behind as well as ahead, for their pupils, that can serve to orient their navigation of the territory. (BALL; BASS, 2009, p. 11).

⁵⁸ We define horizon knowledge as an awareness – more as an experienced and appreciative tourist than as a tour guide – of the large mathematical landscape in which the present experience and instruction is situated. (BALL; BASS, 2009, p. 6).

turístico – da grande paisagem Matemática na qual a experiência e instrução estão contidas.”

Diante disso, entendemos que a construção desse tipo de conhecimento perpassa, necessariamente, pelos conhecimentos da prática docente, isto é, por aqueles conhecimentos que são adquiridos no cotidiano e na vivência do professor em sala de aula. No caso do ensino de taxa de variação, o conhecimento do horizonte compreende os conteúdos matemáticos que, direta ou indiretamente, estão relacionados com o ensino deste objeto matemático. Além disso, também comporta a compreensão de como este processo de ensino pode interferir em processos de ensino de outras áreas do conhecimento e a consciência de que a ideia de taxa de variação pode ser explorada com a finalidade de auxiliar em aprendizagens futuras tanto na própria Matemática, quanto na Física ou na Química, por exemplo.

Ante estas reflexões, convém ressaltar que embora Ball, Thames e Phelps (2008) não estejam certos quanto a locação de algumas categorias de conhecimentos docente no esquema proposto, e não tenham evidências de que tais perspectivas Matemáticas geram melhorias no trabalho docente e/ou na aprendizagem dos estudantes, os autores destacam que os resultados obtidos nos projetos já citados sugerem que o conhecimento matemático necessário para o ensino é multidimensional, isto é, comporta várias dimensões da base de conhecimento para o ensino. Contudo, nem sempre é fácil discernir o que separa uma categoria de outra, o que, conseqüentemente, afeta a exatidão, ou a falta dela, em suas definições.

Nas palavras dos autores, apesar de suas reflexões teóricas serem estruturadas em relação à prática, a identificação dos conhecimentos em jogo no ensino de um determinado conteúdo matemático pode provocar uma “confusão natural”, pois, uma situação de ensino que exija a mobilização de conhecimentos matemáticos pode ser interpretada e analisada por meio de diferentes categorias de conhecimentos, isto é, por diferentes perspectivas. Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o seguinte exemplo: na análise de um erro cometido por um aluno, enquanto um professor poderá descobrir o que deu errado por meio de uma análise puramente matemática, outro poderá chegar a mesma conclusão

por meio de uma análise subjetiva, a partir de sua convivência com o aluno (talvez por tê-lo visto cometer erros similares em outros momentos). Desse modo, enquanto o primeiro professor utiliza o conhecimento especializado do conteúdo, o segundo utiliza o conhecimento do conteúdo e dos alunos.

De um modo, ou de outro; indiferente da exatidão, ou da falta dela, nas definições apresentadas por Ball, Thames e Phelps (2008), é fundamental que o professor detenha os conhecimentos inerentes a Matemática enquanto disciplina de ensino. A razão é trivial, pois, se o professor não compreende o assunto em jogo (objeto de ensino), ele não está apto para auxiliar os estudantes a aprendê-lo. Concordamos com Shulman (1986, p. 14, tradução nossa)⁵⁹, que fundamentado no pensamento aristotélico profere que o ato de compreender repousa na habilidade de transformar o conhecimento em ensino. "Aqueles que podem, fazem. Aqueles que compreendem, ensinam."

Diante do exposto até aqui, no próximo item, passamos a delinear um esquema que, para nós, representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral que, em última instância, fundamentará a construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

3.2.5 UM ESQUEMA QUE REPRESENTA UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Sempre que se fala em conhecimento do professor para o ensino de Matemática ou de um determinado conteúdo matemático, todos – educadores matemáticos, matemáticos e até pedagogos – concordam que este precisa ter um conhecimento consistente e profundo deste conteúdo por um simples motivo: não se pode ensinar aquilo que não se domina.

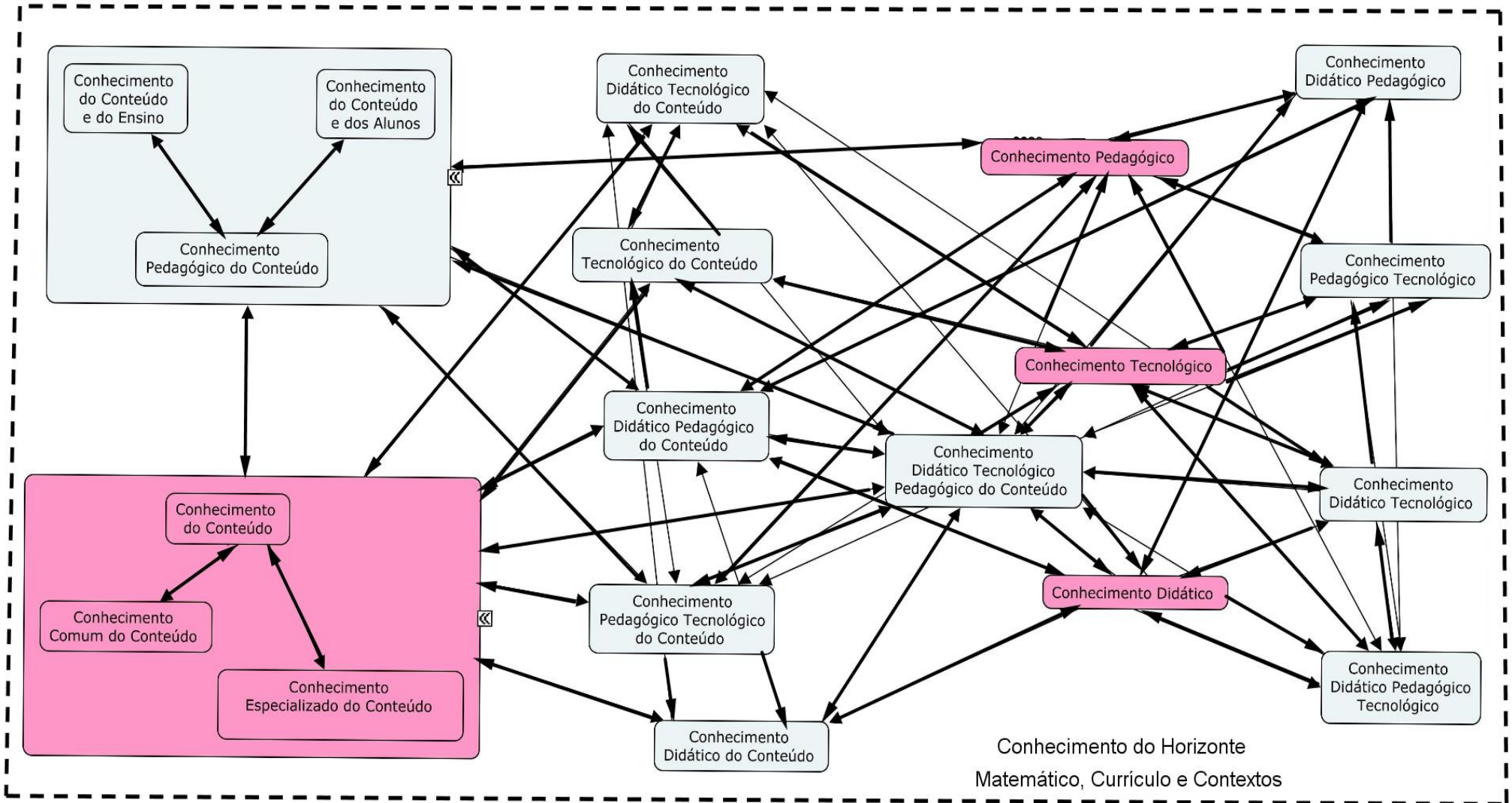
Todavia, como se pôde observar nos estudos já realizados neste capítulo, ter um conhecimento sólido e profundo do conteúdo de ensino é imprescindível, mas não suficiente para ensiná-lo. Não basta o professor ter um amplo domínio do conteúdo, os estudos realizados por Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler

⁵⁹ Those who can, do. Those who understand, teach. (SHULMAN, 1986, p. 14).

(2006), Ball, Thames e Phelps (2008) e por Lima e Silva (2015), evidenciaram outros conhecimentos que subjazem a compreensão que o docente precisa ter para ensinar Matemática.

Diante dessa gama de conhecimentos, e entendendo que a mobilização destes, assim como de suas possíveis interações, é crucial para o processo de ensino de Matemática, propomos o esquema da figura 13 para representar uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral, em que confeccionamos um modelo estrutural que relaciona os conhecimentos docentes que subjazem o processo de ensino dessa disciplina. Os aspectos característicos desse esquema vão ao encontro da concepção de conhecimentos como uma rede de significados. Ele é formado por uma pluralidade de pontos (nós-significativos) ligados por uma pluralidade de ramificações (possíveis caminhos entre tais pontos), em que cada ponto representa uma categoria de conhecimento docente, e cada ramificação é representativa de uma a ligação (relação) entre duas ou mais categorias. No esquema, quatro categorias de conhecimentos docentes são destacadas em relação as demais, são as categorias fundamentais da base de conhecimentos para o ensino, eleitas por Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006) e Lima e Silva (2015).

Figura 13. Um esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática



Fonte: Desenvolvido pelos autores.

Nesse esquema, é importante observar os diferentes “caminhos” que o professor pode percorrer para construir os conhecimentos necessários para o ensino de Matemática, a multiplicidade de interações entre dois ou mais conhecimentos, a dualidade entre as categorias de conhecimentos docentes e a possibilidade de se construir um determinado conhecimento a partir de outros já construídos ou de seccionar um conhecimento em outros que o constituem. Trata-se de um esquema irregular, em que uma categoria de conhecimentos pode ser vista como a interação entre duas ou mais categorias e cada “caminho” pode ser entendido como a determinação constituída a partir da correspondência entre duas ou mais categorias de conhecimentos já concebidas.

Também é importante destacar, na totalidade deste esquema, quatro subcategorias de conhecimentos restritas, localmente organizadas e agrupadas, que têm ligações particulares, formando uma família bem definida e bem delineada de conhecimentos docentes específicos para o ensino de Matemática. São os Conhecimentos Comum do Conteúdo, Especializado do Conteúdo, do Conteúdo e de Ensino e do Conteúdo e dos Alunos, propostos por Ball, Thames e Phelps (2008), que derivam dos Conhecimentos do Conteúdo e Pedagógico do Conteúdo, propostos por Shulman (1986).

Além disso, é igualmente importante observar a alocação do Conhecimento do Horizonte Matemático como uma categoria de conhecimento independente, autônoma e de domínio próprio que, em consonância com os Conhecimentos do Currículo e dos Contextos Social, Cultural e Educacional, regulam fortemente as demais categorias. Para nós, o Conhecimento do Horizonte Matemático comporta além de uma compreensão curricular, a compreensão não apenas de como os conteúdos matemáticos estão relacionados entre si ao longo de todo o processo de escolarização, tal como propõe Ball, Thames e Phelps (2008), mas também, de como os processos de ensino desses conteúdos estão relacionados com outros processos de ensino, sejam intra ou extramatemáticos. Concordamos com

Fernández et. al (2011, p. 6, tradução nossa)⁶⁰, para quem, o Conhecimento do Horizonte Matemático

não é apenas uma consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo do currículo de Matemática, mas também se refere ao conhecimento global da evolução do conteúdo matemático e a relação entre as diferentes áreas necessárias para a prática de ensino.

A inexistência de um único “caminho” para se construir uma determinada categoria de conhecimento, a pluralidade de conhecimentos passíveis de serem construídos e a multiplicidade de ligações entre duas ou mais categorias de conhecimentos docentes evidencia as características estruturais desse esquema, que contrapõe as ideias de encadeamento lógico, organização, hierarquização e linearidade em sua construção. Sob essa perspectiva, o percurso de construção de uma Base de Conhecimento para o Ensino de Matemática é individual, cada professor relaciona os conhecimentos que a constituem da melhor forma possível, adequando-os as suas necessidades frente aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, construindo e reconstruindo-os constantemente, a partir de diversas fontes, em diferentes contextos.

São nessas fontes que estão contidos os saberes matemáticos que devem ser estudados pelo professor, e é somente a partir deste estudo que o professor constrói e organiza os conhecimentos que constituem uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática nos moldes do esquema proposto. Dentre as várias fontes de uma base de conhecimentos para o ensino, Shulman (1987, p. 8, tradução nossa)⁶¹ chama a atenção para quatro principais,

(1) a formação acadêmica na disciplina de ensino, (2) os materiais e as definições do processo educacional institucionalizado (por exemplo, os currículos, os livros didáticos, a organização escolar e financeira, e a estrutura da profissão docente), (3) as investigações sobre a escolarização, as organizações sociais, a aprendizagem humana, o ensino e o desenvolvimento, e os demais fenômenos sociais e culturais que interverem no trabalho do professor e, por fim, (4) a sabedoria da própria prática.

⁶⁰ HCK is not only an awareness of how mathematical topics are related over the span of mathematics included in the curriculum but also refers to the global knowledge of the evolution of the mathematical content and the relationship among its different areas needed for the teaching practice. (FERNÁNDEZ, et. al., 2011, p. 6).

⁶¹ (1) Scholarship in content disciplines, (2) the materials and settings of the institutionalized educational process (for example, curricula, textbooks, school organizations and finance, and the structure of the teaching profession), (3) research on schooling, social organizations, human learning, teaching and development, and the other social and cultural phenomena that affect what teacher can do, and (4) the wisdom of practice itself. (SHULMAN, 1987, p. 8).

A primeira fonte, a formação acadêmica na disciplina de ensino, ou seja, a formação inicial docente, nas palavras do autor, se apoia em duas bases, na bibliografia explorada durante a formação inicial e nos estudos acumulados em cada disciplina cursada. Nós acrescentamos uma terceira base a essa fonte, a formação básica do professor que, direta ou indiretamente, interfere na construção dos conhecimentos explorados em sua formação inicial.

Já a segunda fonte, os materiais e as estruturas do processo educacional, constituem, de acordo com o autor, as ferramentas de ofício docente e as circunstâncias que facilitam, ou não, o processo de ensino. Incluem desde a compreensão dos currículos prescritos com suas sequências de conteúdos, até as avaliações e os materiais didáticos utilizados em sua implementação. Inclui também compreender as regras de organização institucional, os mecanismos gerais de gestão e financiamento escolar, as organizações docentes com suas funções de negociação, etc.

A terceira fonte compreende o que denominamos de estudos teóricos, é constituída pela bibliografia acadêmica referente aos processos de ensino e de aprendizagem, inclui as teorias, conclusões e metodologias de investigação empíricas referentes à docência, a aprendizagem e ao desenvolvimento humano. Para Shulman (1987), os aspectos mais importantes dessa fonte são as normas, teorias e reflexões oriundas dos conhecimentos acadêmicos sobre o ensino.

A última fonte eleita pelo autor é a prática docente, a menos codificada de todas, que se refere a sabedoria proveniente da prática de ensino, da vivência e das experiências educacionais. Concordamos com Franco (2005, p. 11), para quem,

a realidade da prática educativa se faz através de ações artesanais, espontâneas, intuitivas, criativas, que vão se amalgamando, em cada momento de decisão, em ações refletidas, apoiadas em teorias, organizadas através de críticas, autocríticas, de expectativas de papel. Neste sentido, no exercício da prática educativa, convivem dimensões artísticas e científicas, expressas pela dinâmica entre o ser e o fazer; entre o pensar e realizar; entre o poder e querer realizar.

Ampliando a intencionalidade destas reflexões, acrescentamos a formação continuada como uma das principais fontes de uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática, pois, no contexto brasileiro, em que a formação inicial docente não auxilia o futuro professor na construção de uma série de

conhecimentos, conforme já destacamos neste capítulo, é somente em processos de formação continuada que o professor constrói determinados conhecimentos que, em última instância, têm um papel fundamental na construção de uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática nos moldes do esquema proposto.

É por meio de processos de formação continuada que o professor pode construir relações entre as diversas categorias de uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática com aqueles conhecimentos oriundos de sua prática, aperfeiçoando-as e/ou modificando-as de acordo com suas necessidades. Para nós, somente a formação continuada pode conduzir o professor a uma ação reflexiva sobre sua prática letiva. Concordamos com Behrens (1996, p.135), para quem, “a essência da formação continuada é a construção coletiva do saber e a discussão crítica reflexiva do saber fazer.” Nesse sentido, entendemos a formação continuada como um trabalho coletivo de reflexão sobre a prática docente, que tem um papel fundamental na construção de uma base de conhecimentos própria para o ensino de Matemática, podendo ser modificada e ampliada constantemente pelo professor, a partir de trabalhos coletivos, da própria prática letiva e de estudos teóricos.

Diante destas ou de quaisquer outras fontes que possam subsidiar a construção de conhecimentos docentes, se faz importante ressaltar que a construção das categorias de conhecimentos que constituem uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática não é linear nem ordenada, e que não há uma fonte única e exclusiva para a construção de uma determinada categoria de conhecimento. Mas é possível eleger quais, possivelmente, podem ser as fontes das quatro categorias de conhecimentos fundamentais dessa base.

No contexto brasileiro, em que

a formação de professores para a Educação Básica é feita, em todos os tipos de licenciatura, de modo fragmentado entre as áreas disciplinares e níveis de ensino, não contando o Brasil, nas instituições de ensino superior, com uma faculdade ou instituto próprio, formador desses profissionais, com uma base comum formativa, como observado em outros países, onde há centros de formação de professores englobando todas as especialidades, com estudos, pesquisas e extensão relativos à atividade didática e às reflexões e teorias a ela associadas. (GATTI, 2010, p. 1358).

Fica claro que a formação inicial docente não dá conta de subsidiar o futuro professor na construção de todos os conhecimentos que compõem uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática nos moldes do esquema proposto. De acordo com Gatti e Barreto (2009, p. 145), as licenciaturas em Matemática

estão formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação Matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática, forçando o licenciado a encontrar as inter-relações entre esses tipos de formação.

Diante dessa realidade, inferimos que os cursos de licenciatura em Matemática, que parecem mais um bacharelado do que uma licenciatura, reflexo de uma longa tradição “bacharelesca”, auxiliam, ou ao menos deveriam auxiliar, o futuro professor na construção dos conhecimentos do conteúdo, o que, de acordo com Lima e Silva (2015), não é suficiente para auxiliá-lo no processo de ensino de Matemática. Para os autores, é necessário que as licenciaturas em Matemática propiciem meios para que os futuros professores possam construir as diversas relações entre os diferentes conhecimentos docentes; o que não ocorre.

No que se refere a construção do conhecimento pedagógico, conforme já ressaltamos neste capítulo, os cursos de formação inicial de professores de Matemática deixam a desejar; esse tipo de conhecimento não é devidamente explorado e não são exploradas suas possíveis interações com os conhecimentos específicos da área, o que inviabiliza a construção, por exemplo, do conhecimento pedagógico do conteúdo pelo futuro professor. Para nós, a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo, como já dissemos, é apenas iniciada na formação inicial docente e consolidada em cursos de formação continuada e na prática docente.

Já o conhecimento tecnológico para o ensino, de acordo com Gatti e Barreto (2009), é praticamente inexplorado nos cursos de licenciatura para formação de professores no Brasil e, quando explorado, são feitas discussões superficiais referentes a utilização de tecnologias (digitais) nos processos de ensino e de aprendizagem em detrimento de suas possíveis aplicações. Esse fato, nas palavras da autora, dá margem a questionamentos do tipo: “a forma como esse conhecimento vem sendo ministrado favorece a utilização das novas tecnologias nas práticas de ensino dos futuros professores?” (GATTI; BARRETO, 2009, p. 144).

Uma resposta para esse questionamento pode ser encontrada na tese de doutorado de Alvarenga (2011), que aponta que 85% de uma amostra de 253 professores de Ensino Médio de escolas públicas não se consideram capazes de utilizar tecnologias (computadores e seus recursos) em prol dos processos de ensino e de aprendizagem, ou seja, 85% desses professores não possuem os conhecimentos tecnológicos necessários para utilizar tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem.

Reforçando estes resultados, Brandão (2005), em sua dissertação de mestrado, constatou que menos de 5% dos professores de licenciaturas em Matemática do Estado de Mato Grosso do Sul têm o hábito de utilizar o laboratório de informática em suas aulas. Isso ocorre, talvez, pelo fato de que

os alunos de licenciatura passam por todo seu curso sem terem estudado auxiliado pela informática, apesar de que isso poderia ter contribuído com sua aprendizagem. O paradoxo aparece ao final do seu curso, quando ele deverá compreender que é importante usar tecnologia com seu aluno, pois essa contribui com a aprendizagem matemática. (BITAR, 2006, p. 6).

Diante disso, inferimos que a formação inicial docente não dá conta de auxiliar o futuro professor na construção do conhecimento tecnológico para o ensino. A construção desse tipo de conhecimento só poderá ser feita pelo professor em formações continuadas e em sua prática letiva, momento em que o docente vislumbra e experimenta a utilização desses recursos em sala de aula, de modo perceber os entraves e potencialidades da integração tecnológica aos processos de ensino e de aprendizagem de um objeto de ensino. Conseqüentemente, os conhecimentos docentes que têm o conhecimento tecnológico em sua estrutura também só podem ser construídos após a formação inicial, em formações continuadas, estudos teóricos e por meio de experiências oriundas da prática docente.

Por sua vez, o Conhecimento Didático para o Ensino é praticamente ignorado em cursos de formação inicial de professores de Matemática e, quando explorado, é feito no âmbito da didática geral, que, em termos de carga horária, ocupa apenas 1,6% do tempo da licenciatura, conforme constataram Gatti e Barreto (2009, p. 140). Nesse contexto, e considerando que as licenciaturas em Matemática têm uma quantidade reduzida de disciplinas teóricas voltadas à área da Educação, a construção do Conhecimento Didático para o Ensino só pode ser feita pelo

professor em momentos específicos, em cursos de formação continuada ou em estudos teóricos voltados à Didática da Matemática.

Diante destas possíveis fontes de conhecimentos docentes, estamos cientes de que podem surgir, no percurso da presente pesquisa, outras fontes que, de uma forma ou de outra, podem auxiliar o professor na construção de conhecimentos específicos para o ensino de Matemática, também estamos convictos que o modelo estrutural do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído nesse item não é suficiente para nos auxiliar na construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação, visto que este modelo compreende apenas conhecimentos docentes e não contempla os saberes matemáticos que os fundamentam. Por essas duas razões, recorreremos a Teoria Antropológica do Didático para nos auxiliar na identificação de um conjunto de Organizações Matemáticas que vão permitir o desenvolvimento dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

Desse modo, no item seguinte, apresentamos a Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico para evidenciar os saberes que fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

3.3 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Frente à necessidade de se estudar as condições de criação e difusão do saber matemático que emerge nas diferentes instituições, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), uma evolução da noção de transposição didática, situa a atividade matemática no campo da antropologia geral das práticas e atividades humanas. Segundo Chevallard (1999), o conceito chave da TAD pressupõe que toda atividade humana realizada regularmente pode ser descrita a partir de dois componentes, um saber-fazer (práxis) e um discurso (logos), cuja união dá origem a noção de Praxeologia, entendida pelo autor como uma unidade básica de análise

da atividade humana em geral. Referindo-se a esta noção, Chevallard (2006, p. 3, tradução nossa)⁶² salienta que

Podemos confiar na etimologia para nos guiar - pode-se analisar qualquer ser humano por meio de dois componentes principais inter-relacionados: práxis, isto é, a parte prática, por um lado, e o logos, por outro lado. "Logos" é uma palavra grega que, desde os tempos pré-socráticos, tem sido usada de forma constante para se referir ao raciocínio e pensamento humano – particularmente sobre o cosmos. [...] A práxis implica, assim, em logos que, por sua vez, sustenta a práxis. A práxis precisa de apoio - apenas porque, a longo prazo, nenhum ser humano é inquestionável. Naturalmente, uma praxeologia pode ser ruim, com a sua parte "práxis" sendo feita de uma técnica ineficiente - "técnica" é aqui a palavra oficial para um "modo de fazer" –, e seu componente "logos", composto quase que inteiramente de puro absurdo – ao menos do ponto de vista do praxeológico.

Não existe práxis sem logos, tampouco existe logos sem práxis. É a união destes dois componentes da atividade matemática que condiciona a noção de Praxeologia que, no âmbito da TAD, constitui uma ferramenta fundamental para modelizar a atividade matemática como uma atividade humana e para estudar as condições de possibilidades e de funcionamento de sistemas didáticos. Nesse sentido, uma Praxeologia surge como uma resposta para um conjunto de questionamentos e indagações e como um meio para realizar, em uma determinada instituição, tarefas específicas.

Segundo Chevallard (1999), a raiz da noção de Praxeologia encontra-se nas noções de tarefa t e de tipos de tarefas T . Um tipo de tarefa T , demanda ações com finalidades bem definidas, normalmente expressas por verbos de ação como, por exemplo, determinar, calcular, verificar etc. A noção de tarefa t , supõe a especificidade do conteúdo em jogo, determinar o ponto de máximo da função de lei $f(x) = -3x^2 + 2x$ é uma tarefa, mas o verbo determinar, simplesmente, é um gênero de tarefa que demanda de um conteúdo específico para formar uma tarefa.

⁶² We can rely on etymology to guide us here – one can analyze any human doing into two main, interrelated components: praxis, i.e. the practical part, on the one hand, and logos, on the other hand. "Logos" is a Greek word which, from pre-Socratic times, has been used steadily to refer to human thinking and reasoning – particularly about the cosmos. [...] Praxis thus entails logos which in turn backs up praxis. For praxis needs support – just because, in the long run, no human doing goes unquestioned. Of course, a praxeology may be a bad one, with its "praxis" part being made of an inefficient technique – "technique" is here the official word for a "way of doing" –, and its "logos" component consisting almost entirely of sheer nonsense – at least from the praxeologist's point of view. (CHEVALLARD, 2006, p. 3).

Seja T um tipo de tarefa, uma Praxeologia para T requer um modo de resolver as tarefas t que formam T , denominado de técnica. Assim, uma Praxeologia para um tipo de tarefa T contém, necessariamente, uma técnica τ para resolver as tarefas t que constituem T . Os tipos de tarefas T e as respectivas técnicas de resolução τ das tarefas t que formam T constituem o bloco denominado por Chevallard (1999) de “prático-técnico”, comumente identificado por um “saber-fazer”. Em uma determinada instituição I , em relação a certo tipo de tarefa T , existe, em geral, uma única técnica privilegiada (canônica) ou uma pequena quantidade de técnicas reconhecidas institucionalmente para sua resolução, com exceção de técnicas alternativas que possam existir em outras instituições.

A existência de uma técnica, ou de uma pequena quantidade de técnicas, para resolver determinados tipos de tarefas pressupõe um discurso interpretativo e racional (o *logos*) que as justifiquem, denominado por Chevallard (1999) de *tecnologia*, que além de justificar, esclarecer e torná-las inteligíveis, também as modifica, potencializando seu alcance e poder, e propicia meios de superação que possibilitam a criação de novas técnicas.

A tecnologia associada a uma técnica, ou a uma pequena quantidade de técnicas, além de comportar as possíveis interações entre estas, requer, por sua vez, uma interpretação e justificação institucional, proporcionada por um discurso teórico. De acordo com Chevallard (1999), o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas que, por conta de gerar dúvidas e questionamentos quanto a sua validade e veracidade, demandam de esclarecimentos e justificativas. É nesse sentido que a teoria assume seu papel, ocupando, em relação a tecnologia, o mesmo papel que a tecnologia ocupa em relação a técnica. A teoria, então, tem por finalidade justificar, esclarecer e tornar o discurso tecnológico inteligível. A tecnologia associada a teoria que a justifica forma o “bloco teórico-tecnológico” que, em consonância com o “bloco prático-técnico”, constituem a noção de Praxeologia.

Segundo Chevallard (1999), uma Praxeologia é Pontual quando é voltada a um único tipo de tarefa T . A interação entre várias Praxeologias Pontuais em torno de uma determinada tecnologia da origem a noção de Praxeologia Local que, por sua vez, quando combinada com outras Praxeologias Locais ao redor de uma

teoria, forma uma Praxeologia Regional, e esta, quando agregada a outras Praxeologias Regionais correspondentes a outras teorias, dá origem à noção de Praxeologia Global. “Falamos de Praxeologia Matemática – ou de Organização Matemática - quando os tipos de tarefas T são voltados para a Matemática.” (ALMOULOU, 2015, p. 16).

Diante disso, para dar significado às Organizações Matemáticas (OM) envolvidas no processo de ensino de um determinado objeto matemático, no caso da presente pesquisa para dar significado às OM envolvidas no processo de ensino de taxa de variação, e de modo a se estabelecer condições mínimas para desenvolvê-lo, a TAD propõe a construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) alternativo ao Modelo Epistemológico Dominante (MED) que condiciona este processo de ensino.

A TAD dá o nome de Modelo Epistemológico de Referência (doravante MER), à forma de organizar o saber matemático antes de transformá-lo em saber a ser ensinado. O MER representa uma base firme para analisar as Organizações Matemáticas e Didáticas, assim como para propor organizações alternativas. (NAVARRO, 2007 apud COTA, 2010, p. 2, tradução nossa)⁶³.

Nas palavras de Fonseca, Gascón e Lucas (2014), a estrutura de um MER construído no âmbito da TAD sustenta-se em uma rede de Organizações Matemáticas, isto é, em uma rede de perguntas e respostas estruturadas praxeologicamente. É a partir dessas organizações que os conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação são evidenciados, uma vez que, conforme destaca Lucas (2015), uma das principais funções de um MER é de servir de sistema de referência para descrever, analisar e interpretar o modo como a instituição docente interpreta o domínio do objeto matemático em jogo.

De acordo com Gascón (2014), essa construção permite que a Didática da Matemática se liberte dos Modelos Epistemológicos Dominantes nas diversas instituições que fazem parte de seu objeto de estudo, e é imprescindível no estudo do processo de transposição didática, pois somente a partir de um MER se pode descrever e interpretar os saberes matemáticos envolvidos em determinados

⁶³ La TAD le da el nombre de Modelo Epistemológico de Referencia (en adelante MER), a la manera de organizar el saber matemático antes de transformarlo en saber a enseñar. El MER representa una base firme para analizar las organizaciones matemáticas y didácticas así como para proponer una organización alternativa. (NAVARRO, 2007 apud COTA, 2010, p. 2).

processos de ensino e de aprendizagem, assim como compreender os motivos pelos quais alguns objetos matemáticos são priorizados em detrimento de outros. Segundo o autor, para se tomar o processo de transposição didática como objeto de estudo, “o professor necessita analisar criticamente os modelos epistemológicos da Matemática dominantes nas instituições envolvidas e, assim, libertar-se do pressuposto acrítico desses modelos.” (GASCÓN, 2014, p. 100, tradução nossa)⁶⁴. Nesse sentido, um MER “constitui um instrumento de emancipação do professor e da ciência didática, visto que permite questionar o modo como as instituições envolvidas na problemática didática interpretam o saber matemático” em jogo. (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 5, tradução nossa)⁶⁵.

Não há um MER único e definitivo para descrever, analisar e interpretar determinada problemática, pelo contrário, todo MER pode ser interpretado como uma tentativa de resposta para um problema de investigação, como uma hipótese científica que deve ser contestada empiricamente. Segundo Licera (2017, p. 78, tradução nossa)⁶⁶, um MER “não constitui um modelo no sentido normativo do termo – o que deveria ser –, mas é uma ferramenta de trabalho teórico-experimental e, como tal, é sempre provisório, sendo permanentemente posto à prova a partir do seu contraste com a realidade que se investiga.”

Nas palavras de Gascón (2014), se um MER não cumpre sua função fenomenotécnica (no sentido de “fabricar” objetos de conhecimento), ele deverá ser revisado e modificado. Segundo o autor, o objetivo primeiro de um MER é proporcionar e evidenciar os elementos necessários para a formulação de problemas didáticos cujo estudo permite melhorar o conhecimento do objeto matemático em jogo, como é o caso da noção de taxa de variação.

⁶⁴ para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. (GASCÓN, 2014, p. 100).

⁶⁵ constituye un instrumento de emancipación del didacta y de la ciencia didáctica puesto que permite cuestionar la forma como las instituciones involucradas en la problemática didáctica interpretan el saber matemático. (FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 5).

⁶⁶ no constituye un modelo en el sentido normativo del término –aquello que debería ser– sino que es una herramienta del trabajo teórico-experimental y, como tal, es siempre provisional, permanentemente puesto a prueba a partir de su contraste con la realidad que se investiga. (LICERA, 2017, p. 78).

Na esfera da TAD, a explicitação de um MER é essencial para formular um problema didático como um autêntico problema científico, cuja resolução deriva basicamente de sua dimensão epistemológica. De acordo com Gascón (2014), é a formulação das dimensões fundamentais que compõem um problema didático, assim como suas possíveis interações, que condiciona a estruturação e construção de um MER da atividade matemática em jogo. Segundo o autor, todo problema didático no âmbito da TAD contempla, essencialmente, três dimensões fundamentais:

- *A dimensão epistemológica*, considerada como o núcleo do problema didático, pois regula e afeta fortemente as demais dimensões;
- *A dimensão econômica*, que despersionaliza o problema didático e delimita uma unidade mínima de análise mais econômica e eficaz possível;
- *A dimensão ecológica*, que ressalta as condições necessárias para que seja possível desenvolver o estudo do objeto matemático em jogo e as restrições que incidem sobre este estudo.

Com base em nosso problema de investigação e nos estudos já realizados, temos elementos suficientes para formular algumas questões no âmbito dessas três dimensões. Para isso, antes de qualquer coisa, e conforme ressalta Lucas (2015), é importante destacar que as questões contidas nas dimensões ecológica e econômica são condicionadas a construção do MER, e este, por sua vez, pode ser considerado como uma tentativa de resposta para as questões que constituem a dimensão epistemológica. Desse modo, a dimensão epistemológica de nosso problema de investigação será interpretada como uma dimensão nuclear que condiciona fortemente as demais dimensões, e as respostas que apontaremos para as questões desta dimensão emergirão, necessariamente, do Modelo Epistemológico de Referência (MER) em construção neste capítulo.

No âmbito da dimensão epistemológica elegemos, então, as seguintes questões: Como se interpretam e se descrevem os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do MER

proposto? Qual razão de ser alternativa para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do MER proposto?

As questões relativas à dimensão econômica referem-se aos resultados do processo de transposição didática que condiciona a construção, organização e exploração das OM e OD envolvidas em um determinado problema didático. Nas palavras de Gascón (2011, p. 213, tradução nossa)⁶⁷,

a dimensão econômica de um problema didático contém as questões que giram em torno da pergunta: como são as coisas (as OM e as OD) na contingência institucional? Isso abrange as questões relativas ao sistema de regras e princípios que regulam – em uma determinada instituição – a organização e o funcionamento das OM e das OD envolvidas no problema didático.

Nesta dimensão elegemos as seguintes questões: Como é explorada atualmente a ideia de taxa de variação na Educação Básica? Qual é a razão de ser que a Educação Básica impõe para o ensino de taxa de variação? Que tipo de OM (e OD associadas) atualmente é explorado para fundamentar o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Qual é o MED que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Quais são os conteúdos que estão direta, ou indiretamente, relacionados com o ensino de taxa de taxa de variação na Educação Básica?

No que se refere a dimensão ecológica, esta, por sua vez, tem por finalidade investigar as condições de funcionamento e restrições que incidem sobre os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático. Essa dimensão relaciona-se diretamente com as dimensões epistemológica e econômica, o que, do ponto de vista da TAD, nos leva a inferir que todo problema didático é, em essência, um problema de ecologia praxeológica. Para Gascón (2011, p. 217, tradução nossa)⁶⁸,

⁶⁷ la dimensión económica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a la pregunta: « ¿cómo son las cosas (las OM y las OD) en la contingencia institucional?». Con ello, abarca las cuestiones relativas al sistema de reglas y principios (nomos) que regulan –en una institución determinada– la organización y el funcionamiento de las OM y las OD involucradas en el problema didáctico. (GASCÓN, 2011, p. 213).

⁶⁸ De forma muy simplificada, podría decirse que la dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a la siguiente pregunta: ¿por qué las cosas (las OM y las OD) son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible? (GASCÓN, 2011, p. 217).

De uma maneira muito simplificada, pode-se dizer que a dimensão ecológica de um problema didático contém as questões que giram em torno da seguinte pergunta: por que as coisas (as OM e as OD) são como são na contingência institucional e quais condições seriam necessárias para que fossem de outra forma na medida do possível?

Em nosso caso, elegemos a seguinte questão referente a essa dimensão: Quais são as principais restrições que dificultam ou que impedem que OM escolares em torno da ideia de taxa de variação compreendam elementos teórico-tecnológicos capazes de produzir e justificar técnicas que possam ser amplamente utilizadas na resolução de problemas?

É a busca por respostas para as questões que giram em torno dessas três dimensões que condiciona a construção de um MER para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Mas este não é único nem definitivo, conforme já mencionamos, trata-se de uma hipótese científica que necessita ser conferida empiricamente. De acordo com Bosch (1997), cada pesquisador deve construir seu próprio MER no âmbito da atividade científica envolvida no fenômeno que deseja estudar. E este MER, por sua vez, deve ser compatível, a princípio, com um Modelo Epistemológico Geral da Atividade Matemática que, de acordo com Gascón (2014), é um tipo de Modelo Epistemológico ideal, tal como propõe Lakatos (1978), para quem, um Modelo Epistemológico ideal pode ser considerado como um programa de pesquisa que consiste em arquitetar conjecturas e provas que tenham maior valor empírico do que suas predecessoras.

A TAD propõe um Modelo Epistemológico Geral da Atividade Matemática em que o conceito-chave é a noção de Praxeologia, de modo que os MER construídos no campo da atividade matemática sejam compatíveis com este Modelo Geral. Nas palavras de Chevallard (1999 apud GASCÓN, 2014, p. 107, tradução nossa)⁶⁹, “o Modelo Epistemológico Geral da Atividade Matemática proposto pela TAD evoluiu. Agora é formulado em termos da estrutura e da dinâmica das Praxeologias Matemáticas.”

Posto isso, a busca por respostas para as questões levantadas no âmbito das três dimensões de nosso problema de investigação consiste, em um primeiro

⁶⁹ El modelo epistemológico general de las matemáticas que propone la TAD ha ido evolucionando. En estos momentos se formula en términos de la estructura y la dinámica de las praxeologías matemáticas. (CHEVALLARD, 1999 apud GASCÓN, 2014, p. 107).

momento, em um estudo ecológico, composto pela análise das pesquisas já apresentadas em nossa revisão de literatura, das leis e documentos oficiais que organizam e direcionam o ensino de Matemática no Brasil, dos materiais didáticos das décadas de 1930, 1940, 1960, 1970, 1980 e 1990 e dos materiais didáticos aprovados no último PNLD, em 2015. Esta análise é organizada em torno de dois conceitos fundamentais propostos na TAD, o *habitat* “que significa o lugar onde o objeto vive e o ambiente conceitual desse objeto de saber”, e o *nicho* “que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.” (ALMOULOUD, 2015, p. 15).

A partir destes estudos, esperamos identificar e interpretar o MED que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica, as OM impostas por este modelo e a razão de ser oficial deste ensino. Em seguida, almejamos propor um conjunto de OM que possibilitem evidenciar um MER alternativo que contemple os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em consonância com uma razão de ser alternativa à imposta pelo MED.

Para isso, fundamentados no esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática proposto neste capítulo e indo ao encontro das palavras de Cota (2010), para quem, a estruturação de um MER deve ser iniciada a partir da construção de um conjunto de OM, descritas em termos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, seguido da construção de um conjunto de OD, que descrevem todo o processo estudo das OM estabelecidas a princípio, no capítulo seguinte passamos a delinear os conhecimentos fundamentais para o ensino de taxa de variação em consonância com suas possíveis interações em termos de Organizações Matemáticas e Didáticas que, em última instância, fundamentarão a construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, respondendo nossa questão de pesquisa.

4 UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Com base nas discussões já levantadas no percurso do presente trabalho, neste capítulo pretendemos compor um cenário que evidencie uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, assumimos o esquema construído no capítulo precedente como uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral e nos fundamentamos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) para identificar os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação.

4.1 CONHECIMENTO DO CONTEÚDO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO

Fundamentados nos questionamentos levantados nas três dimensões do nosso problema didático, os estudos acerca dos conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação na Educação Básica consistiram, em um primeiro momento, e conforme já mencionamos, em uma investigação ecológica que evidenciou uma rede de perguntas e respostas organizadas praxeologicamente para o ensino desse objeto matemático, o MED que regula este processo de ensino, sua razão de ser oficial e nos forneceu subsídios para construir um MER em consonância com uma razão de ser alternativa para este ensino.

Na análise ecológica constatamos que apesar de a maioria dos documentos oficiais apresentarem propostas inerentes ao ensino de taxa de variação na Educação Básica, os materiais didáticos que atualmente são utilizados em sala de aula, aprovados no último PNLD, em 2015, vão na contramão destas propostas. Enquanto estes documentos propõem que a ideia de taxa de variação seja explorada no contexto do estudo de funções para favorecer o entendimento do estudante acerca deste conceito, para auxiliá-lo em uma possível continuidade dos estudos e para favorecer o exercício pleno de sua cidadania, os livros didáticos que atualmente são utilizados em sala de aula ou não exploram este conteúdo, ou o

fazem superficialmente, sem auxiliar o estudante na construção de significado para essa ideia e sem relacioná-la com outros conteúdos já explorados, ou que ainda serão explorados, tanto em Matemática quanto em outras disciplinas.

Conforme já mencionamos em nossa problemática, das seis coleções de Matemática aprovadas no PNLD 2015, cinco fazem menção ao estudo de taxa de variação, o que, a princípio, é um bom sinal. Todavia, ao analisar o modo como este conteúdo é distribuído no percurso destas obras, constatamos que quatro delas, Dante (2014), Iezzi et al. (2013), Paiva (2013) e Leonardo (2013), disponibilizam, em média, apenas uma página do primeiro volume para definir e explorar a ideia de taxa de variação média, enquanto a coleção de Smole e Diniz (2013) disponibiliza, como um tópico opcional, o último capítulo do terceiro volume para o estudo de taxas de variação média e instantânea, função derivada, do sinal e dos pontos de máximo e mínimo de uma função.

A análise das Organizações Matemáticas (e Didáticas associadas) propostas por esses materiais para o ensino de Matemática evidenciou que apesar da enorme atenção voltada ao estudo de funções no primeiro volume de todas as coleções, com “mais de 60% de seus textos didáticos destinados a esse campo” (BRASIL, 2015, p. 86), a ideia de taxa de variação é pouco explorada. Além de ser estudada de forma estanque e isolada, não são exploradas suas possíveis relações com temas já abordados ou que ainda serão abordados no percurso das coleções, o que contrapõe a ideia de conhecimento do horizonte matemático, proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).

No primeiro volume da obra de Paiva (2013, p. 141), por exemplo, o autor define a taxa de variação média de y em relação a x , para uma função representada graficamente por uma curva qualquer, como “a razão entre a variação de valores y e a correspondente variação de valores de x ”, e explora um único tipo de Organização Matemática para ensinar este conteúdo. Neste caso os tipos de tarefas remetem, exclusivamente, ao cálculo da taxa de variação média de y em relação a x por meio de uma única técnica de resolução, que consiste no cálculo da razão entre a variação de y e a variação correspondente de x , justificadas por um discurso teórico-tecnológico imerso no conceito de função.

Estas ideias são retomadas nesse mesmo capítulo, no estudo de algumas propriedades da função afim, em que a taxa de variação é, então, definida como o coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$ que representa graficamente funções do tipo $f(x) = ax + b$, mas fica apenas nisso. Posteriormente, no estudo das propriedades da reta, no volume três, o coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$, que representa graficamente funções do tipo $f(x) = ax + b$, é explorado como a tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas, mas não é explorada nenhuma relação com o estudo de taxa de variação já apresentado no primeiro volume.

Já o tratamento dado à ideia de taxa de variação na obra de Dante (2014), a coleção de Matemática mais adotada nas escolas públicas brasileiras, com 2.564.520 unidades distribuídas pelo PNLD 2015⁷⁰, não é muito diferente do que é dado por Paiva (2013), é fragmentado, estanque e atomizado. A ideia de taxa de variação média é explorada no contexto do estudo de funções, também no primeiro volume, em que é definida, para uma função f , como a razão entre a variação dos valores de $f(x)$ e a correspondente variação dos valores de x , sendo, a princípio, apresentada apenas como uma técnica para estudar a “rapidez” que uma função f varia em um determinado intervalo do seu domínio.

Essa ideia é, então, retomada no estudo da função afim, por meio de uma Organização Matemática que estabelece, para uma função f definida por $f(x) = ax + b$, que a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a , em que o valor de a corresponde a tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta que representa graficamente f e o eixo das abscissas, denominado de coeficiente angular ou coeficiente de inclinação da reta. Nesse contexto, a ideia de taxa de variação é explorada pelo autor como uma possível técnica para resolução de tarefas que demandam o estudo do crescimento/decrescimento de uma função afim; se o valor de a é positivo, f é crescente, se a é negativo, f é decrescente e quando $a = 0$, f é constante, todavia, nenhum tipo de tarefa que admite essa técnica de resolução é explorado no percurso da obra.

⁷⁰ Informações retiradas de <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos>. Acesso em 12/10/2016.

No terceiro volume da coleção, o estudo do coeficiente angular de uma reta de equação $y = ax + b$ é explorado no contexto da Geometria Analítica, como a tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas, indo ao encontro da definição de coeficiente angular apresentada no primeiro volume. No entanto, não é feita nenhuma relação com a ideia de taxa de variação média, também definida no primeiro volume como o coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$. É explorado um único tipo de Organização Matemática composto por tarefas cujas técnicas de resolução consistem no cálculo do coeficiente angular de uma reta de equação $y = ax + b$ a partir de dois de seus pontos, ou no cálculo da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas, ambas justificadas por um discurso teórico-tecnológico imerso na Geometria Analítica, sem relação com o conceito de função explorado no primeiro volume.

Na coleção de Leonardo (2013, p. 23), a ideia de taxa de variação também é explorada apenas no primeiro volume, por meio de uma única tarefa (resolvida) que analisa o comportamento de uma função f de lei de formação $f(x) = ax + b$, em que a técnica de resolução consiste em atribuir alguns valores consecutivos para a variável x e comparar “a variação entre as imagens obtidas com a variação dos respectivos elementos do domínio”, justificada por um discurso teórico-tecnológico imerso no estudo de funções.

Diferente do que é feito por Dante (2014) e Paiva (2013), Leonardo (2013) não define a taxa de variação de $f(x)$ em relação à x para uma função f do tipo $f(x) = ax + b$ como o coeficiente angular da reta que é a representação gráfica de f , apenas estabelece que “a taxa de variação de uma função afim é constante para qualquer intervalo do seu domínio.” Nas palavras do autor, é possível estudar o comportamento de uma função f , particularmente de uma função afim, a partir da “relação entre a variação das imagens (Δy) e a variação dos respectivos elementos do domínio que as determinam (Δx)” (LEONARDO, 2013, p. 94), ou seja, a partir da taxa de variação de $f(x)$ em relação a x . Contudo, isso não é feito no percurso da obra, pois, no estudo do crescimento/decrescimento de uma função essa ideia é apenas apresentada em um quadro ilustrativo, como uma simples observação.

No terceiro volume da coleção, como também fizeram Dante (2014) e Paiva (2013), o autor apenas define o coeficiente angular de uma reta de equação $y = ax + b$ como o valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas, mas não faz nenhuma relação com o estudo de taxa de variação explorado no primeiro volume.

Já o tratamento dado por Iezzi et al. (2013) à ideia de taxa de variação, embora mais detalhado, não difere muito do que é feito nas coleções já apresentadas. Em sua coleção, o autor também explora este conteúdo apenas no primeiro volume, no estudo de funções, quando apresenta a ideia de taxa de variação média de uma função f em um intervalo $[x_1; x_2]$ do seu domínio como o quociente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, com $x_2 \neq x_1$ e para valores de x variando de x_1 até x_2 . Nesse contexto, são explorados tipos de tarefas cuja técnica privilegiada de resolução consiste em substituir determinados valores de x_1 e x_2 na razão $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, também justificada por um discurso teórico-tecnológico imerso no conceito de função.

Frente a essa OM, e com a finalidade de “relacionar o estudo da taxa média de variação de uma função aos conceitos de velocidade e aceleração escalar médias” (IEZZI et al., 2013, p. 356), são propostos tipos de tarefas que exploram algumas aplicações da ideia de taxa de variação no estudo dos movimentos uniforme e uniformemente variado. Para isso, as tarefas propostas exploram situações-problema do cotidiano dos estudantes, em que a técnica de resolução mais eficaz e econômica provém da mobilização da ideia de taxa de variação média. Nesse contexto, o autor adverte que “a taxa média de variação de uma função nos dá apenas uma ideia geral sobre a variação de uma grandeza em relação à variação de outra grandeza relacionada, em um determinado intervalo” (IEZZI et al., 2013, p. 64), mas nada é dito referente a variação de uma grandeza em relação à variação de outra em um determinado instante, isto é, a taxa de variação instantânea.

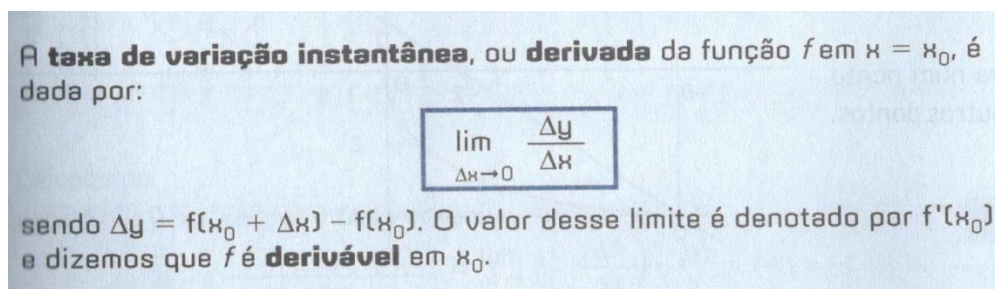
Já a coleção de Smole e Diniz (2013, p. 334), diferente das coleções já citadas, propõe que o estudo de taxa de variação seja explorado em caráter opcional, por conta de as autoras entenderem que este conteúdo “não é relevante para a formação básica dos estudantes do Ensino Médio”, o que, claramente, vai

na contramão do que é proposto nos documentos oficiais e dos resultados das pesquisas analisadas em nossa revisão de literatura. Na obra, a ideia de taxa de variação é explorada no último capítulo do volume destinado à terceira série, com um objetivo que contraria o discurso excludente das autoras, pois apesar delas não considerarem a ideia de taxa de variação relevante para o aluno do Ensino Médio, esta ideia é explorada com o objetivo de “fechar” a coleção com um conceito que possibilite aos estudantes “avançar no estudo de funções, aperfeiçoando instrumentos algébricos para a construção de gráficos e análise do comportamento desses gráficos.” (SMOLE; DINIZ, 2013, p. 268). Para as autoras, a ideia de taxa de variação é a base do estudo de funções e representa a “rapidez” com uma função f cresce/decrece em um intervalo ou em todo seu domínio.

Diante disso, o estudo de taxa de variação é explorado a partir da ideia de taxa de variação média de uma função f em um intervalo $[x_1, x_2]$, definida como a razão $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, com $x_2 \neq x_1$, e interpretada geometricamente como o coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$. Os tipos de tarefas propostos consistem no cálculo da taxa de variação média de uma função f em um intervalo do seu domínio, no cálculo da velocidade média de um móvel e na interpretação da “rapidez” como que f cresce/decrece em um intervalo do seu domínio.

O estudo da ideia de taxa de variação instantânea (derivada) é fundamentado na noção de limite de uma função, em que a OM explorada consiste, a princípio, em ressaltar que a velocidade média de um móvel, em um determinado percurso, não coincide, em geral, com sua velocidade em um instante. Para obter a velocidade desse móvel em um instante t , é proposto que sejam considerados intervalos de tempo entre t e $t + \Delta t$ cada vez menores, e que seja calculado o limite dessa velocidade média quanto Δt se aproxima cada vez mais de zero, isto é, quando Δt tende a zero. Feito isso, as autoras definem a derivada de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ do seguinte modo, figura 14.

Figura 14. Definição de derivada de uma função f



Fonte: Smole e Diniz (2013, p. 273)

Ante essa definição, são exploradas tarefas que demandam a interpretação geométrica da derivada de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ para, então, se interpretar a derivada de f em $(x_0, f(x_0))$ como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$. As técnicas que devem ser mobilizadas para resolver as tarefas propostas fundamentam-se, unicamente, na ideia de limite, justificadas pela definição formal de limite de uma função $f: R \rightarrow R$.

As autoras exploram, ainda, algumas situações de ensino interdisciplinares, em que os conceitos de velocidade e aceleração escalar de um móvel são definidos como a taxa de variação instantânea da posição s em função do tempo t , $s(t)$, e da velocidade v em função do tempo t , $v(t)$, respectivamente. Por fim, são apresentadas as derivadas de algumas funções, definida a Função Derivada de uma função $f: R \rightarrow R$ e são explorados o estudo do sinal da derivada de f e de seus pontos de máximo e de mínimo local. Nesse contexto, a ideia de derivada é explorada como uma técnica de resolução de tarefas que demandam o estudo do crescimento/decrescimento e dos pontos de máximo e de mínimo local de uma função f .

Diante dessas análises, temos elementos suficientes para descrever e interpretar a razão de ser oficial do ensino de taxa de variação na Educação Básica imposta por estes materiais didáticos. Com exceção da coleção de Smole e Diniz (2013), que explora a ideia de taxa de variação como uma ferramenta de auxílio no estudo de funções e na resolução de situações-problema, os materiais didáticos atualmente disponibilizados à rede pública de ensino, e também disponíveis à rede privada, exploram essa ideia como um fim e não como um meio, estuda-se taxa de variação pela taxa de variação enquanto conteúdo e não como uma ferramenta para auxiliar o estudante na leitura, interpretação e resolução de situações-

problema, ou como um conteúdo que o auxiliará em estudos posteriores ou, ainda, como uma ideia fundamental para o exercício de sua cidadania.

O estudo de taxa de variação é rígido, atomizado e descontínuo, as OM (e OD associadas) propostas na maioria desses materiais exploram apenas a ideia de taxa de variação média, não exploram a ideia de taxa de variação instantânea nem seus respectivos detalhes, também não são feitas relações entre este estudo e o de outras noções matemáticas como, por exemplo, a noção de proporcionalidade, que é de suma importância na construção de significado para o conceito de função e, conseqüentemente, para a ideia de taxa de variação. Concordamos com Lima (2013, p. 173), que ao dissertar a respeito da relação entre a noção de proporcionalidade e o conceito de função profere que,

Por incrível que possa parecer, esta ligação básica entre dois conceitos matemáticos tão importantes é, na maior parte das vezes, negligenciada nos livros didáticos. [...] Como ocorre em muitas outras situações, a abordagem da noção de proporcionalidade representa uma importante oportunidade para estabelecer relações entre diferentes campos da Matemática, como aritmética, geometria e funções.

Além disso, com exceção das obras de Iezzi et al. (2013) e Smole e Diniz (2013), não são exploradas possíveis interações entre o estudo da noção de taxa de variação com o estudo de conteúdos das demais disciplinas que compõem a grade curricular da Educação Básica, o que prejudica o desenvolvimento de uma abordagem interdisciplinar que relaciona a ideia de taxa de variação com conteúdos estudados na Química ou na Física, por exemplo, e contrapõe as ideias de conhecimento curricular lateral, proposta por Shulman (1986), e a noção de conhecimento do horizonte matemático, proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).

Em suma, nossa análise evidenciou OM (e OD associadas) pouco articuladas, em que seus elementos teórico-tecnológicos cumprem somente um papel decorativo, servem apenas como adornos que não são explorados em processos de ensino e de aprendizagem futuros, intra ou extramatemáticos, e que não têm o potencial necessário à construção dos conhecimentos referentes a noção de taxa de variação.

Diante disso, e cientes que o livro didático tem sido, tradicionalmente, o principal mediador dos processos de ensino e de aprendizagem promovidos na

instituição escolar, sendo, quase que exclusivamente, a principal fonte didática utilizada pelo professor, para quem, o livro didático é tido como uma espécie de “dogma de fé”, inquestionável, imutável e definitivo, onde a verdade está contida; buscamos outros livros didáticos para subsidiar nosso estudo ecológico, visto que, para o ensino de taxa de variação, o professor costuma se apoiar em livros (antigos) que apresentam este conteúdo com seus respectivos detalhes.

Concordamos com Shulman (1987, p. 14, tradução nossa)⁷¹, ao afirmar que “a maioria dos ensinamentos se inicia mediante alguma forma de texto: um livro didático, um programa de estudos ou um material concreto que o professor ou o aluno deseja entender.” Assim, também analisamos os materiais didáticos de Roxo (1931), Bethlem (1935), Maeder (1938), Roxo, Souza e Thiré (1940), Sangiorgi (1967), lezzi et al. (1976), Castrucci et al. (1977), Boulos e Watanabe (1979), lezzi et al. (1981), Lapa e Cavallante (1983), Machado (1988), Giovanni e Bonjorno (1987, 1992), Paiva (1995) e Smole e Kiyukawa (1998), em que pudemos constatar um tipo padrão de OM (e OD associadas) para explorar a ideia de taxa de variação na Educação Básica, comum a todos esses materiais.

Nessa análise constatamos que, em geral, esses materiais didáticos iniciam o estudo de taxa de variação por meio da definição de limite de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$, seguido do estudo das propriedades operatórias dos limites e da apresentação de alguns limites “fundamentais”, justificados por um discurso teórico-tecnológico fundamentado na definição formal de limite de uma função $f: R \rightarrow R$.

Os tipos de tarefas propostos requerem que sejam encontrados os valores de determinados limites e realizadas algumas operações com limites “fundamentais”, em que as técnicas de resolução baseiam-se, exclusivamente, em repetir alguns procedimentos já apresentados em exemplos ou atividades resolvidas. A figura 15, por exemplo, apresenta um tipo de tarefa mobilizada para explorar a ideia de limite.

⁷¹ That most teaching is initiated by some form of “text”: a textbook, a syllabus, or an actual piece of material the teacher or student wishes to have understood. (SHULMAN, 1987, p. 14).

Figura 15. Tipo de tarefa que explora a ideia de limite

P.217 Para a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$, dar, quando existir, o valor do limite:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$	b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$	c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$	e) $\lim_{x \rightarrow 1/9} f(x)$	f) $\lim_{x \rightarrow -1/9} f(x)$
g) $\lim_{x \rightarrow 0,01} f(x)$	h) $\lim_{x \rightarrow -0,001} f(x)$	i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Fonte: lezzi et al. (1976, p. 143)

A técnica privilegiada para resolver esse tipo tarefa consiste em substituir em $f(x)$ os valores dos quais x se aproxima. No item a, por exemplo, quando x se aproxima de 5, o $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x|}{x} = \frac{|5|}{5} = 1$.

A ideia de limite é, então, mobilizada como precursora do estudo de continuidade, em que é utilizado apenas o registro de representação gráfica para explorar suas características fundamentais, de modo a levar o estudante a perceber que “uma função f é contínua no ponto x_0 do seu domínio se o seu gráfico nesse ponto não sofre ruptura” (BOULOS; WATANABE, 1979, p. 157). Corroborando essa escolha metodológica, o PNLD 2015 ressalta que,

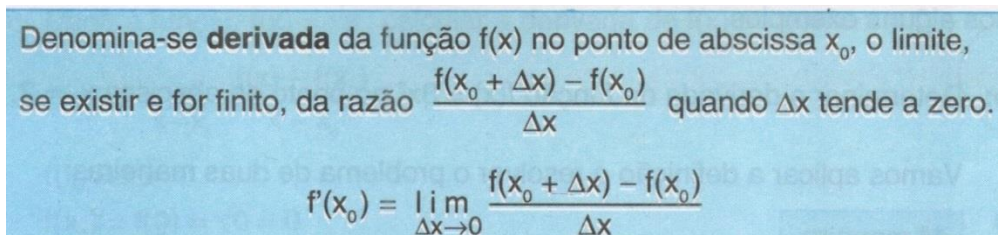
Inegavelmente, o ensino na escola básica do conceito de continuidade de uma função do tipo $x = x(t)$, definida em um subconjunto D dos números reais, carrega dificuldades inerentes ao próprio conceito. Por isso, ao ensiná-lo, em um livro didático ou em sala de aula, têm sido frequentemente usados recursos que apelam para a visualização. O gráfico cartesiano é um dos mais empregados. (BRASIL, 2014, p. 87).

Em seguida, é definido que uma a função é contínua em um ponto $(x_0, f(x_0))$ se existir o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, e se esse limite for igual a $f(x_0)$, e são apresentadas algumas propriedades desse tipo de função. Os tipos de tarefas propostos têm como única técnica de resolução o cálculo do $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, também fundamentada na definição formal de limite de uma função $f: R \rightarrow R$.

Segue-se então, com a apresentação da ideia de derivada de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ como taxa de variação instantânea de $f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$, cuja definição também é fundamentada na ideia de limite, especificamente como o limite da razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando Δx tende a 0. Não são exploradas as interações entre a derivada e a noção de taxa de variação média

de uma função f em um intervalo do seu domínio. A figura 16, por exemplo, apresenta a definição que predomina nos livros didáticos analisados.

Figura 16. Definição de derivada



Fonte: Gionvanni e Bonjorno (1992, p. 253)

Os tipos de tarefas propostos para explorar a ideia de derivada são mecanicistas, requerem apenas que sejam realizadas determinadas manipulações algébricas fundamentadas no estudo de limites (já apresentado), associando o cálculo de derivadas a uma técnica privilegiada, que consiste em determinar a derivada de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ partir do cálculo do $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Não são exploradas tarefas que evidenciam o uso da derivada como uma técnica para construir e/ou estudar um modelo matemático, nem são exploradas as relações entre a derivada e outros conceitos matemáticos que foram, ou que ainda serão estudados na Educação Básica, contrapondo a ideia de conhecimento do horizonte matemático proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).

Quanto a interpretação geométrica da derivada de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$, as obras analisadas a delimitam como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 . Nas palavras de Giovanni e Bonjorno (1992, p. 268), “a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0 , quando existe, é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico cartesiano da função $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0 .”

Nessa direção, os tipos de tarefas propostos consistem, basicamente, em determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ e, em alguns casos, em determinar também a equação dessa reta. Não são exploradas tarefas em que há relações entre o cálculo do coeficiente angular dessa reta com um determinado modelo de variação.

Na sequência do que é trabalhado nos livros didáticos, surge, então, a necessidade de se explorar a Função Derivada f' , dada por $f'(x)$, como um

discurso teórico-tecnológico para justificar o uso de algumas propriedades operatórias das derivadas no estudo do comportamento de uma função f . Os tipos de tarefas propostos privilegiam o uso do registro de representação algébrica em detrimento de outros registros, e não são exploradas as possíveis relações entre a Função Derivada e o estudo da derivada via registro de representação gráfica (já apresentado).

A Função Derivada passa, então, a ser utilizada como uma nova e única técnica para resolver tarefas que demandam o estudo do comportamento de uma função f , obtendo um status “auto tecnológico”, o que quer dizer, segundo Chevallard (1999), que ao atuar como a única técnica reconhecida e empregada para resolver determinados tipos de tarefas em uma instituição, ela não exige justificção, pois, nessa instituição, essa seria a melhor maneira de agir. Diante disso, os tipos de tarefas que demandam o estudo do comportamento de uma função f em que o uso da Função Derivada é a técnica privilegiada de resolução consistem, basicamente, no estudo do sinal de $f'(x)$. Quando $f'(x) > 0$ em um intervalo do domínio de f , a função é crescente nesse intervalo, quando $f'(x) < 0$ a função é decrescente nesse intervalo e quando $f'(x) = 0$, f é constante nesse intervalo. Não há tarefas que requerem o estudo de $f'(x)$ como uma técnica para construir/identificar uma possível representação gráfica de uma função f .

Já a derivada de segunda ordem é explorada somente para estudar os pontos críticos de uma função, em que os tipos de tarefas propostos requerem apenas a mobilização de determinadas técnicas de derivação (já apresentadas), sem relacioná-las com o estudo da concavidade de uma função, por exemplo. Não é comum a exploração de tipos de tarefas que requerem o uso das derivadas de primeira e segunda ordem para esboçar o gráfico de uma função ou para identificar, entre alguns gráficos, aquele que melhor representa uma determinada função f .

Ante estas análises, temos subsídios para afirmar que as OM (e OD associadas) predominantes no ensino de taxa de variação na Educação Básica são fundamentadas, essencialmente, na noção de limite, em que primeiro são exploradas as ideias de limite e continuidade para, em seguida, se definir a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto qualquer do seu domínio como o limite da razão $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando Δx tende a 0. Tal abordagem gera uma falsa

ideia de linearidade, como se os saberes matemáticos que fundamentam a noção de taxa de variação fossem entrelaçados hierarquicamente, partindo-se de um conceito mais simples para se chegar a um mais complexo, tal como propõe o modelo cartesiano de conhecimento.

Para nós, é dessa abordagem ordenada e linear, imposta pelo MED para o ensino de taxa de variação, que emerge a primeira grande dificuldade, e porque não dizer o primeiro obstáculo epistemológico quando se explora este objeto matemático na Educação Básica, visto que os saberes matemáticos que fundamentam a ideia de taxa de variação não foram desenvolvidos de modo ordenado e hierárquico. O conceito de função, por exemplo, que atualmente antecede o estudo de taxa de variação, “só foi introduzido na Matemática após o aprimoramento das técnicas diferenciais efetuado por Leibniz e Newton. [...] Fosse assim não poderíamos aprender funções, no nono ano, sem algumas noções básicas sobre derivadas e integrais.” (ROQUE, 2012, p. 344). Esse é apenas um exemplo de que os conteúdos matemáticos que estão diretamente relacionados com o estudo de taxa de variação não foram, necessariamente, desenvolvidos de modo ordenado, tal como propõe o MED para o ensino deste objeto matemático.

Além das OM (e OD associadas) propostas pelos materiais didáticos para o estudo de taxa de variação na Educação Básica, a análise ecológica também permitiu identificar as escolhas metodológicas feitas pelos autores desses materiais para explorar este conteúdo. São disponibilizados, em geral, apenas os últimos tópicos (capítulos, unidades ou seções) do volume destinado à atual terceira série do Ensino Médio para o estudo de taxa de variação e, como também observamos nas coleções aprovadas no PNL 2015, não são exploradas as relações entre este conteúdo e outros conteúdos já explorados no percurso das obras, contrariando as ideias de conhecimento curricular vertical e conhecimento do horizonte matemático, propostas por Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008), respectivamente.

Assim, diante do exposto até aqui, temos os elementos para afirmar que o Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica é composto, exclusivamente, pela tríade de conteúdos: Limite, Continuidade e Derivada (taxa de variação instantânea), necessariamente nessa ordem, e considerando que a noção de função já faça parte do conhecimento

matemático dos estudantes. Este Modelo não difere do Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino superior de Cálculo que, de acordo com Barufi (1999, p. 52), consiste em apresentar as ideias do Cálculo por meio do estudo de funções, limites, derivadas e integrais, ordenadamente, cujo “tratamento metodológico obedece, em muitos casos, a ideia de fornecer uma revelação do Cálculo.”

Ratificando as palavras de Barufi (1999), Rezende (2003, p. 8), ao dissertar a respeito da “normalidade do ensino de Cálculo”, afirma que a sequência de conteúdos: limite, continuidade, derivada e integral “é, com muito mais propriedade, a sequência didática da maioria dos textos de Análise.” De acordo com o autor, no ensino superior de Cálculo, primeiro se define a noção de limite, seguido das definições de continuidade, derivada e integral, necessariamente nessa ordem, tal como identificamos em nossa análise ecológica.

Diante disso, podemos afirmar que o Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica é apenas uma antecipação do Modelo Epistemológico Dominante que condiciona o ensino superior de Cálculo, o que, claramente, vai na contramão dos resultados das pesquisas analisadas em nossa revisão de literatura e contrapõe as sugestões dos documentos oficiais analisados que fazem menção ao estudo de taxa de variação. Concordamos com Silva, E. (2012, p. 15), para quem, “a problemática do estudo do Cálculo Diferencial e Integral na escola básica está em focar o processo de ensino e aprendizagem nas ideias que o fundamentam e não em antecipar os conteúdos e metodologias dos cursos universitários.”

Desse modo, o MER que pretendemos construir, alternativo a este Modelo Dominante, será composto, a princípio, por um conjunto de OM pontuais que evidencia tipos de tarefas e técnicas, bem como um discurso teórico-tecnológico referente a noção de taxa de variação, aproximando-nos do conhecimento especializado do conteúdo de taxa de variação no sentido proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

Em nosso MER, a definição de limite deixa de ser protagonista no ensino de taxa de variação e passa a ser explorada intuitivamente, pois, conforme afirma Machado (1988), o ensino de taxa de variação fundamentado no conceito formal

de limite, tal como propõe o Modelo Epistemológico Dominante, revelou-se problemático na Educação Básica. Nas palavras do autor, “as dificuldades enfrentadas para uma efetiva compreensão do conceito de limite, são seguramente maiores do que as que devem ser superadas na apresentação direta das noções de derivada e integral.” (MACHADO, 1988, p. 4). Indo ao encontro dessas palavras, Lucas (2015, p. 144, tradução nossa)⁷² profere que “a noção de limite de uma função (tal como aparece e tal como se trabalha na escola secundária) não pode fundamentar, nem conceitualmente nem tecnicamente, a continuidade de uma função nem tampouco a noção de derivada de uma função”, como é imposto pelo Modelo Epistemológico Dominante.

Nesse sentido, nosso MER, fundamentado em conhecimentos inerentes a Didática da Matemática e nas questões que giram em torno das três dimensões do nosso problema didático (já apresentadas), contempla o Cálculo em construção, contrapondo-se a ideia de “fornecer uma revelação para o Cálculo” imposta pelo Modelo Epistemológico Dominante, conforme constatou Barufi (1999).

Assim, a luz do Modelo Epistemológico Geral da Atividade Matemática e da Teoria Antropológica do Didático, elegemos algumas Organizações Matemáticas Pontuais que contemplam os saberes matemáticos que devem ser estudados para se construir os conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, em que apresentamos tipos de tarefas e algumas possíveis técnicas de resolução que são justificadas por um discurso teórico-tecnológico imerso no conceito de taxa de variação. Não temos a ambição de esgotar a quantidade de técnicas disponíveis para resolver um determinado tipo de tarefa, pois suas variações podem se tornar possíveis a partir de outras técnicas mais ou menos complexas e da manipulação de mais de uma técnica simultaneamente.

Nas OM desenvolvidas, mobilizamos a ideia de taxa de variação média como precursora da noção de taxa de variação instantânea. Para isso, recorreremos à noção de conhecimento do horizonte matemático, proposta por Ball, Thames e

⁷² la noción de límite de una función (tal como aparece y tal como se trabaja en la enseñanza secundaria) no puede fundamentar, ni conceptualmente ni técnicamente, la continuidad de funciones ni tampoco la noción de derivada de una función. (LUCAS, 2015, p. 144).

Phelps (2008), e aos dois aspectos particulares do conhecimento do currículo, o conhecimento curricular lateral e o conhecimento curricular vertical, propostos por Shulman (1986), de modo a evidenciar como o objeto matemático taxa de variação se relaciona com outros conteúdos matemáticos já explorados, ou que ainda serão explorados ao longo do processo de escolaridade, aproximando-nos do conhecimento especializado de taxa de variação.

Dentre os conteúdos que precedem o estudo de taxa de variação, se faz importante destacar a ideia de proporcionalidade, uma ideia central que envolve tanto os conhecimentos inerentes ao conceito de razão quanto aqueles relativos a noção de multiplicação. É uma ideia que, nas palavras de Nunes (2003, p.1), é muito simples em sua origem, “está presente em todas as ciências e faz parte do dia a dia de qualquer pessoa, seja no trabalho ou em casa”, e para estudá-lo basta comparar duas grandezas por meio de processos multiplicativos, o que, de acordo com a autora, não é feito na escola básica.

Tal comparação fundamenta-se no conceito de razão, definido por Trajano (1944, p. 149) como o quociente que mostra a relação entre duas grandezas quando comparadas entre si. Segundo o autor, o conceito de razão consiste, basicamente, em “achar quantas vezes uma quantidade contém a outra.” A ideia realmente é simples, se comprarmos o número 20 com o número 5, por exemplo, verificaremos que o número 20 contém quatro vezes o número 5, pois $20 \div 5 = 4$. É este resultado que é denominado por razão, cuja nomenclatura é $20 : 5 = 4$. Generalizando este caso para duas grandezas a e b não nulas, tem-se que $a : b = c$, isso significa que a grandeza a contém c vezes a grandeza b , ou seja, que a razão de a para b é c .

A partir do conceito de razão, Trajano (1944) define proporção como a igualdade entre duas razões, cuja notação simbólica que representa essa igualdade é $::$. Desse modo, $20 : 5 :: 8 : 2$ é uma proporção, em que vinte está para cinco, assim como oito está para dois, pois, $20 : 5 = 4$ e $8 : 2 = 4$.

Para quaisquer razões $a : b = c$ e $d : e = c$, tem-se a proporção $a : b :: d : e$, em que, a está para b , assim como d está para e . Para esse tipo de proporção são válidas algumas propriedades que, apesar de serem tratadas na escola básica sem seus devidos detalhamentos e de forma negligenciada tanto

pelos materiais didáticos quanto pelos professores, são de suma importância na construção de significado para a ideia de taxa de variação. São elas:

1ª: “Em toda proporção, o produto dos meios é igual o produto dos extremos.” (TRAJANO, 1944, p. 151).

De fato, para a proporção $a : b :: d : e$ é válida essa propriedade, e pode ser verificada:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{d}{e} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} &= \frac{d}{e} \times \frac{b}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= \frac{db}{ea} \Rightarrow \\ \Rightarrow ea \times 1 &= \frac{db}{ea} \times ea \Rightarrow \\ \Rightarrow ea &= db \end{aligned}$$

2ª: “Se o produto dos extremos for dividido por um meio, o quociente será o outro meio; e se o produto dos meios for dividido por um extremo, o quociente será o outro extremo.” (TRAJANO, 1944, p. 151).

De acordo com a 1ª propriedade tem-se que:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{e} \Rightarrow ea = db$$

Ao dividir o produto dos extremos, ea , por qualquer um dos meios, d ou b , tem-se:

Divisão por d	Divisão por b
$ea = db (\div d) \Rightarrow$	$ea = db (\div b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{ea}{d} = \frac{db}{d} \Rightarrow$	$\Rightarrow \frac{ea}{b} = \frac{db}{b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{ea}{d} = b \times \frac{d}{d} \Rightarrow$	$\Rightarrow \frac{ea}{b} = d \times \frac{b}{b} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{ea}{d} = b$	$\Rightarrow \frac{ea}{b} = d$

Ao dividir o produto dos meios, db , por qualquer um dos extremos, e ou a , o processo é análogo.

3ª: “Dividindo ou multiplicando os dois termos de uma razão, ou os quatro termos da proporção por um mesmo número, continua a haver proporção.” (TRAJANO, 1944, p. 152). Para a proporção $a : b :: d : e$ é possível verificar essa propriedade.

Multiplicando-se os dois termos de uma das razões por k , pode-se verificar que o produto dos meios é igual o produto dos extremos.

$$\begin{aligned} \frac{a(k)}{b(k)} &= \frac{d}{e} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a(k)}{b(k)} \times \frac{b(k)}{a(k)} &= \frac{d}{e} \times \frac{b(k)}{a(k)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 &= \frac{db(k)}{ea(k)} \Rightarrow \\ \Rightarrow ea(k) \times 1 &= \frac{db(k)}{ea(k)} \times ea(k) \Rightarrow \\ \Rightarrow ea(k) &= db(k) \end{aligned}$$

Ao multiplicar a razão $\frac{d}{e}$, ou os quatro termos da proporção $a : b :: d : e$ por k , o resultado é análogo.

4ª: “Podemos alterar, inverter e transpor os termos de uma proporção, fazendo-lhe sete alterações diversas sem destruir as suas propriedades.” (TRAJANO, 1944, p. 152). Para a proporção $a : b :: d : e$, fazendo as sete alterações seguintes, o produto dos meios será sempre igual ao produto dos extremos, e a primeira razão igual a segunda.

1ª alteração $a : d :: b : e$

5ª alteração $d : a :: e : b$

2ª alteração $b : a :: e : d$

6ª alteração $e : d :: b : a$

3ª alteração $b : e :: a : d$

7ª alteração $e : b :: d : a$

4ª alteração $d : e :: a : b$

Uma vez compreendida a ideia de proporção e suas propriedades, o estudo de proporcionalidade, “provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios” (LIMA et al., 2012, p. 92), é fundamental na construção de significado para a ideia de taxa de variação. De acordo com Lima et al. (2012), a ideia de proporcionalidade é definida, de maneira absolutamente correta, por Trajano (1883), para quem,

duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (TRAJANO, 1883 apud LIMA et al., 2012, p. 93).

Nas palavras de Lima et al. (2012), tal definição pode ser interpretada para uma função $f: R \rightarrow R$ do seguinte modo:

Para quaisquer números reais k e x , tem-se $f(kx) = k \cdot f(x)$ quando a proporcionalidade é direta, ou $f(kx) = \frac{f(x)}{k}$, com $k \neq 0$, quando a proporcionalidade é inversa. Nessa interpretação, as grandezas são os números reais x e $f(x)$, e a correspondência a qual Trajano (1883 apud LIMA et al., 2012) se refere é a função $f: R \rightarrow R$.

Na proporcionalidade $f(kx) = k \cdot f(x)$, tomando $x = 1$ e admitindo que $f(1) = a$, tem-se $f(k \cdot 1) = k \cdot f(1) \Rightarrow f(k) = k \cdot a$, para todo e qualquer k real, o que corresponde a função linear $f(k) = ak$. Desse modo, pode-se concluir que o valor de $f(k)$ é diretamente proporcional ao valor de k quando há um número a tal que $f(k) = ak$, para todo e qualquer k real.

No caso de a proporcionalidade ser inversa as grandezas em questão não podem ser nulas e o modelo matemático que a representa é a função $f: R^* \rightarrow R^*$ tal que, tomando-se quaisquer números reais k e x , tem-se $f(kx) = \frac{f(x)}{k}$, para todo e qualquer $k \in R^*$. O raciocínio, então, é análogo ao desenvolvido para a proporcionalidade direta, em que para todo e qualquer $k \in R^*$, tem-se $f(kx) = \frac{f(x)}{k}$, tomando $x = 1$ e admitindo que $f(1) = a$, tem-se que $f(k \cdot 1) = \frac{f(1)}{k} = \frac{a}{k}$.

É a partir dos saberes inerentes a ideia proporcionalidade direta que fundamentamos o estudo dos saberes que condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, nos baseamos na definição de proporcionalidade de Trajano (1883 apud LIMA et al., 2012, p. 93) que, quando interpretada para a função $f: R \rightarrow R$, tem-se que esta correspondência será uma proporcionalidade direta se, e somente se, for verdadeira a igualdade $f(kx) = k \cdot f(x)$, para todo k e x reais.

Constatar a veracidade dessa igualdade, nas palavras de Lima et al. (2012, p. 95), é uma tarefa trivial quando $k \in Z$. Em outros casos, quando k não é inteiro, basta verificar a monotonicidade de f , o que, na prática, também é uma tarefa simples, basta verificar, para a correspondência $f: R \rightarrow R$, a validade, ou não, do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que comporta três afirmações equivalentes para que uma função $f: R \rightarrow R$ seja crescente:

1. $f(kx) = k \cdot f(x)$ para todo $k \in Z$ e todo $x \in R$.
2. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in R$.
3. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in R$

Além disso, para a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino da ideia de taxa de variação, se faz necessário mobilizar os saberes inerentes as ideias de crescimento e decrescimento de uma função qualquer f .

Uma função f , de domínio D , é crescente em A , $A \subset D$ se, e somente se, para todo x_1 e $x_2 \in A$, ocorrer $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. É decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, e é constante quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Em suma, pode-se dizer que, se uma função é crescente em A , aumentando-se os valores de x , $x \in A$, aumentam os valores correspondentes de $f(x)$; se for decrescente em A , aumentando-se os valores de x , $x \in A$, diminuem os valores correspondentes de $f(x)$; e se for constante em A , aumentando-se os valores de x , $x \in A$, os valores correspondentes de $f(x)$ são sempre os mesmos.

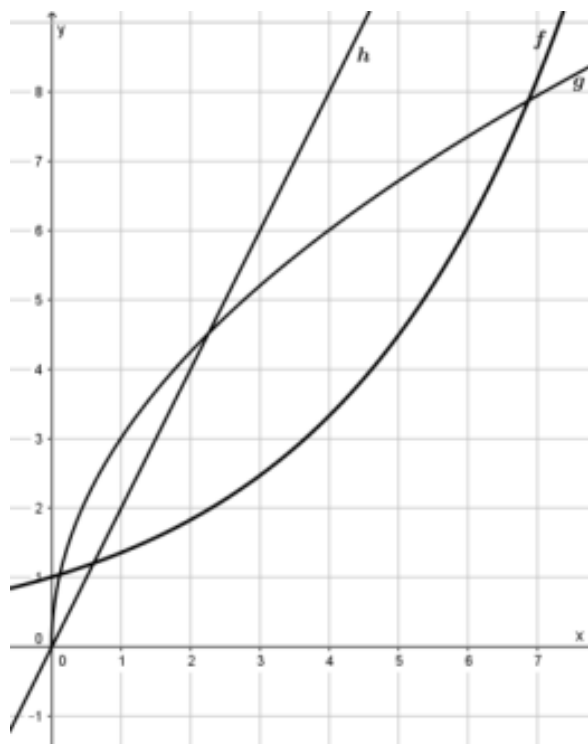
Uma vez que estes saberes estejam claros, deve-se ter consciência de que existem diferentes formas de crescimento e/ou decrescimento de uma função. Uma função f é crescente a taxas crescentes quando os valores de x aumentam e os

valores correspondentes de $f(x)$ aumentam cada vez mais rapidamente. É crescente a taxas decrescentes, quando os valores de x aumentam e os valores correspondentes de $f(x)$ aumentam cada vez mais lentamente ou, ainda, é crescente a taxas constantes, quando os valores de x aumentam e os valores correspondentes de $f(x)$ aumentam a taxas constantes.

Analogamente, uma função f pode decrescer de três formas diferentes. Decrescer a taxas crescentes, quando os valores de x aumentam e os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem cada vez mais rapidamente. Decrescer a taxas decrescentes, quando os valores de x aumentam e os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem cada vez mais lentamente e, ainda, decrescer a taxas constantes, quando os valores de x aumentam, e os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem a taxas constantes.

Caracterizar o crescimento das funções definidas por $f(x) = e^{0,3x}$, $g(x) = 3x^{0,5}$ e $h(x) = 2x$ no intervalo $A = [0, 7]$, é um exemplo de tarefa em que estes saberes estão presentes. Uma possível técnica de resolução dessa tarefa, que emerge de um tipo de conhecimento comum do conteúdo, no sentido proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), consiste em construir e analisar as representações gráficas de f , g e h , como mostra o gráfico 2, em que se pode perceber, quase que instantaneamente, que quando os valores de x se tornam cada vez maiores, f cresce cada vez mais rapidamente, g cresce cada vez mais lentamente e h cresce a uma taxa constante.

Gráfico 2. Gráficos de funções crescentes em um intervalo $A = [0, 7]$



Fonte: Produção nossa.

Mas para caracterizar o comportamento de uma função qualquer f em um intervalo do seu domínio, ou em um ponto específico $(x_0, f(x_0))$ e, conseqüentemente, ensinar tais noções, não basta se valer do conhecimento comum do conteúdo, ou do modo intuitivo. Para isso, é necessário um conhecimento especializado de taxa de variação no sentido proposto por Ball, Thames e Phelps (2008); esse é o tipo de conhecimento específico para o ensino de taxa de variação, que compreende competências e habilidades únicas e exclusivas para o ensino deste objeto matemático. Concordamos com Lucas (2015, p. 191, tradução nossa)⁷³, para quem,

a melhor maneira para caracterizar uma função dada é, precisamente, em termos do tipo de variação que a função apresenta. Mas existem, também, razões intrínsecas a certos fenômenos que permitem afirmar que a melhor maneira de caracterizar sua evolução se obtém trabalhando com a taxa de variação média relativa.

⁷³ la mejor forma de caracterizar una función viene dada precisamente en términos del tipo de variación que la función define. Pero existen, además, razones intrínsecas a ciertos fenómenos que permiten afirmar que la mejor forma de caracterizar su evolución se obtiene trabajando con la tasa de variación media relativa. (LUCAS, 2015, p. 191).

Nessa direção, deve-se compreender, a princípio, os saberes referentes a ideia de taxa de variação de funções definidas por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, pois se $a = 0$, $f(x) = b$ (constante), ou seja, não há variação.

A função f definida por $f(x) = ax + b$ pode crescer a taxas constantes, quando $a > 0$, ou decrescer a taxas constantes, quando $a < 0$. Esse tipo de função traduz relações de interdependências que envolvem grandezas diretamente proporcionais, logo, os saberes referentes a ideia de proporcionalidade, já apresentados, são pré-requisitos para explorar a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x , o que vai ao encontro da noção de conhecimento do horizonte matemático, proposta por Ball, Thames e Phelps (2008).

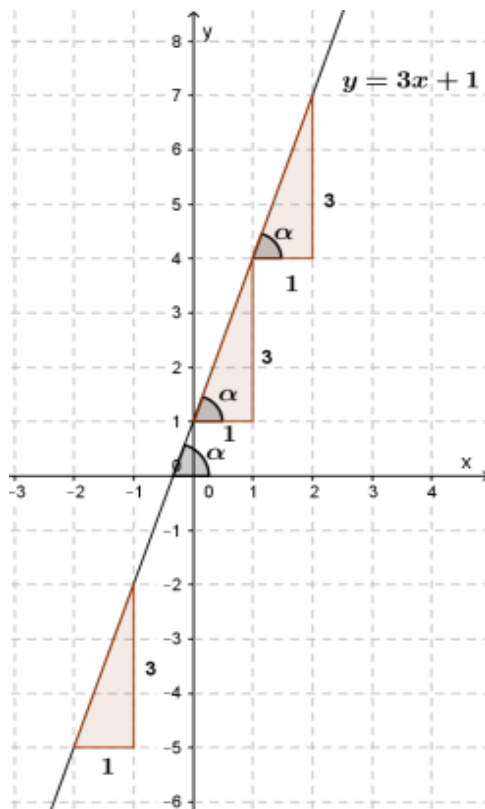
Uma tarefa em que uma pequena quantidade de técnicas de resolução emerge da mobilização destes saberes é a caracterização do comportamento da função f definida por $f(x) = 3x + 1$, em que uma primeira técnica de resolução provém, quase que instantaneamente, da mobilização de conhecimentos do conteúdo de Geometria Analítica, que indicam que quando o coeficiente angular da reta que representa graficamente f é positivo ($a > 0$), a função f é crescente. Todavia, somente perceber que f é crescente não é suficiente, se faz necessário caracterizar esse crescimento, e é nesse momento que emergem os saberes de taxa de variação.

Assim, outra possível técnica de resolução provém da construção e análise da representação gráfica de f , a reta de equação $y = 3x + 1$, gráfico 3, em que é possível perceber que quando os valores de x aumentam uma unidade, a variação correspondente em y é de três unidades, isto é, se pode perceber que y varia a uma taxa constante e igual a três unidades em relação a x , o que permite dizer que f cresce a uma taxa constante e igual a três.

Ainda dos conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, sabe-se que o coeficiente angular dessa reta é 3, e que esse coeficiente determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, podendo ser determinado pela tangente trigonométrica do menor ângulo α formado entre a reta e o eixo das abscissas no sentido anti-horário, como também podemos observar no gráfico 3,

em que $0 < \alpha < 90^\circ$, e o coeficiente angular $a = \frac{3}{1} = 3$ corresponde a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x .

Gráfico 3. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = 3x + 1$



Fonte: Produção nossa.

Outra técnica de resolução dessa tarefa provém da utilização da representação tabular de f , tabela 1, em que se pode perceber o comportamento de f a partir do estudo da variação de $f(x)$ em relação a x . Por meio dessa representação, é possível perceber que quando os valores de x aumentam uma unidade, a variação correspondente de $f(x)$ é constante e igual a três, o que caracteriza uma função crescente a uma taxa constante e igual a 3.

Tabela 1. Representação tabular da função f definida por $f(x) = 3x + 1$

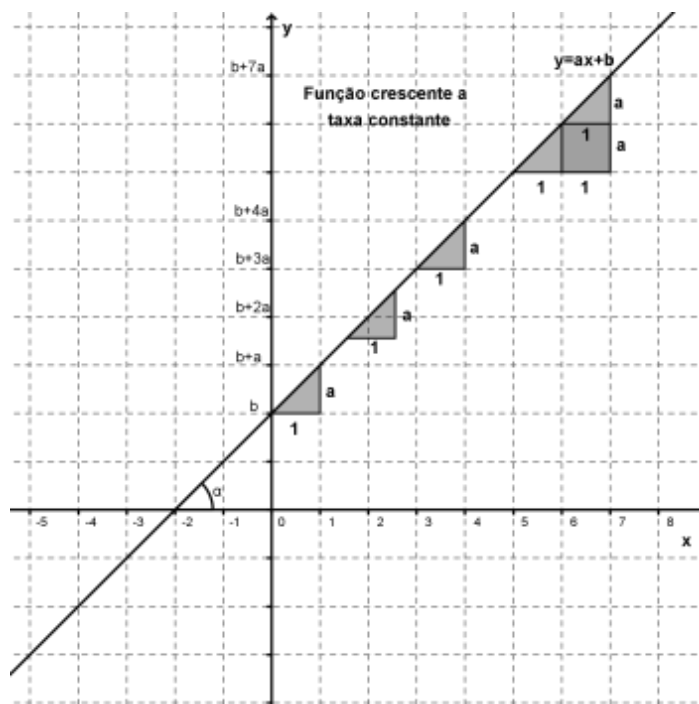
x	$f(x) = 3x + 1$
-2	-5
-1	-2
0	1
1	4
2	7

Fonte: Produção nossa.

Generalizando este caso para qualquer tipo de tarefa que demande a caracterização do comportamento de uma função f definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a > 0$, pode-se, em um primeiro momento, recorrer aos conhecimentos do conteúdo oriundos da Geometria Analítica para afirmar que f é crescente, visto que o coeficiente angular da reta que representa graficamente f é positivo. Todavia, apenas afirmar que f é crescente não é suficiente, para caracterizar seu comportamento pode-se recorrer à construção e análise da representação gráfica de f , gráfico 4, em que é possível observar que a medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de y aumentam a unidades, ou seja, pode-se perceber que y varia a uma taxa constante e igual a a unidades em relação a x , o que caracteriza uma função crescente a uma taxa constante e igual a a .

Ainda dos conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, sabe-se que as retas de equação $y = ax + b$, com a e b reais e $a > 0$, que representam graficamente funções do tipo que está sendo considerado, têm coeficiente angular a que determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas, e que o valor de a coincide com o valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas. Com base nesses conhecimentos, outra técnica de resolução remete ao estudo da inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, como $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, esse coeficiente angular é determinado pelo quociente da variação de y , pela variação de x , que corresponde a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a$, caracterizando uma função crescente a uma taxa constante e igual a a .

Gráfico 4. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$



Fonte: Produção nossa.

Outra possível técnica para resolver esse tipo de tarefa é a construção e análise da representação tabular de f , tabela 2, em que se pode observar que quando os valores de x aumentam uma unidade, a variação correspondente de $f(x)$ é constante e igual a a unidades, o que caracteriza uma função crescente a uma taxa constante e igual a a .

Tabela 2. Representação tabular da função f definida por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$

x	$f(x) = ax + b$
-2	$b - 2a$
-1	$b - a$
0	b
1	$b + a$
2	$b + 2a$

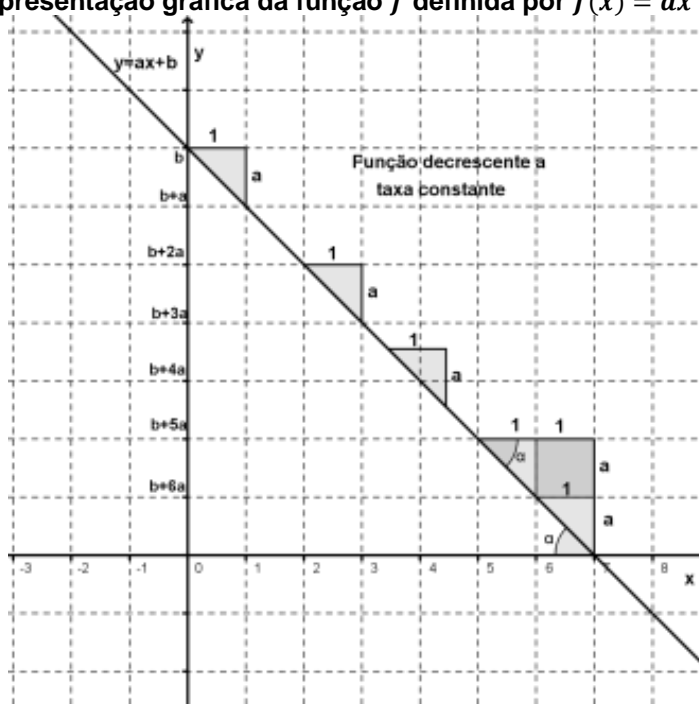
Fonte: Produção nossa.

De forma análoga, pode-se caracterizar o comportamento de uma função f definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a < 0$. Uma primeira técnica de resolução, que pode ser mobilizada quase que instantaneamente, provém dos conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, que indicam que quando $a < 0$, f é decrescente. Todavia, apenas afirmar que f é decrescente não é suficiente

para caracterizar seu comportamento. Para isso, uma possível técnica de resolução compreende a construção e análise da representação gráfica de f , gráfico 5, em que se pode perceber que a medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de y diminuem a uma taxa constante e igual a a unidades, o que caracteriza uma função decrescente a uma taxa constante e igual a a .

Ainda dos conhecimentos do conteúdo oriundos da Geometria Analítica, sabe-se que as retas de equação $y = ax + b$, com a e b reais e $a < 0$, que representam graficamente funções cujas leis de formação são desse tipo, têm coeficiente angular a que determina sua inclinação em relação ao eixo das abscissas. Também se sabe que esse coeficiente angular coincide com o valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas. Assim, com base nesses conhecimentos, outra possível técnica de resolução provém do estudo da inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, como $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, esse coeficiente angular é determinado pelo quociente da variação de y , pela variação de x , que corresponde a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a$, caracterizando uma função decrescente a uma taxa constante e igual a a .

Gráfico 5. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = ax + b$, com $a < 0$



Fonte: Produção nossa.

Outra técnica para resolução desse tipo de tarefa provém da construção e análise da representação tabular de f , tabela 3, em que se pode perceber que a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a , pois, a medida que os valores de x aumentam uma unidade, os valores correspondentes de $f(x)$ diminuem a uma taxa constante e igual a a , o que caracteriza uma função decrescente a uma taxa constante e igual a a .

Tabela 3. Representação tabular da função f definida por $f(x) = ax + b$, com $a < 0$

x	$f(x) = ax + b$
-2	$b - 2a$
-1	$b - a$
0	b
1	$b + a$
2	$b + 2a$

Fonte: Produção nossa.

Em consonância ao estudo da taxa de variação de $f(x)$ em relação a x de funções definidas por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, isto é, de funções cuja lei de formação expressa uma relação de interdependência entre grandezas diretamente proporcionais, deve-se ter consciência de que quando as grandezas em jogo não têm variações diretamente proporcionais, a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x , para uma função qualquer f , não é constante. Assim, a “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação à x depende do ponto de f considerado, e os tipos de técnicas mobilizadas no estudo do comportamento de f requerem um discurso teórico-tecnológico fundamentado, essencialmente, na noção de taxa de variação.

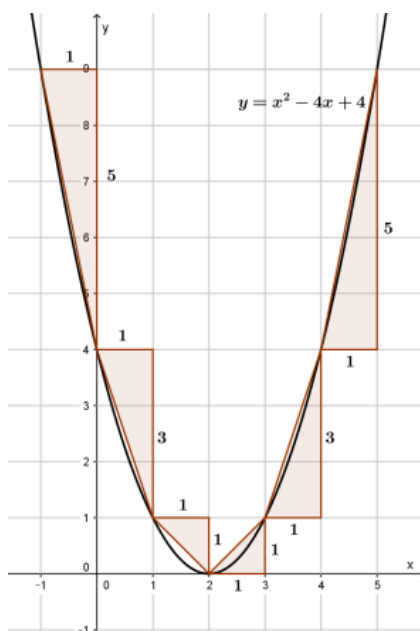
A função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c reais e $a \neq 0$, é um exemplo de função em que as grandezas em jogo não têm variações diretamente proporcionais. Nesse caso, para resolver tarefas que demandam a caracterização do comportamento desse tipo de função, isto é, que solicitam a caracterização da “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação a x , deve-se recorrer aos conhecimentos do conteúdo construídos a partir do estudo dos saberes referentes a taxa de variação de funções definidas por $f(x) = ax + b$, como a e b reais e $a \neq 0$.

Estudar a “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação à x para a função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$ é uma tarefa cujas possíveis técnicas de resolução provém da mobilização de conhecimentos do conteúdo de variações proporcionais. Sabe-se que a curva de equação $y = x^2 - 4x + 4$, que representa graficamente a função f , é uma parábola de concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

Uma possível técnica para resolver essa tarefa consiste, em um primeiro momento, em estudar a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x a partir de intervalos específicos do domínio de f como, por exemplo, para $[2, 3]$, $[3, 4]$ e $[4, 5]$. Para isso, pode-se recorrer à construção e análise da representação gráfica de f , gráfico 6, em que se pode observar no intervalo $[2, 3]$, que quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y aumenta uma unidade, no intervalo $[3, 4]$, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y aumenta três unidades, enquanto no intervalo $[4, 5]$, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor correspondente de y aumenta cinco unidades. Nota-se, com isso, que quando os valores de x aumentam uma unidade a partir de diferentes pontos, a variação correspondente de y não é sempre a mesma, ou seja, não é constante. Desse modo, a variação de y por unidade a mais de x corresponde a taxa de variação y em relação a x em média.

Por meio da análise da representação gráfica de f , em que se pode observar a variação de y por unidade a mais de x , também é possível perceber que no intervalo $(-\infty, 2]$, a medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem cada vez mais lentamente, caracterizando um intervalo em que f decresce a taxas decrescentes, enquanto no intervalo $[2, \infty)$, quando os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y crescem cada vez mais rapidamente, caracterizando um intervalo em que f cresce a taxas crescentes.

Gráfico 6. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$



Fonte: Produção nossa.

Por meio da representação tabular de f , tabela 4, também é possível estudar a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x a partir de pontos específicos do domínio de f , e perceber seus intervalos de crescimento e decrescimento. A análise dessa representação evidencia que a medida que os valores de x aumentam uma unidade, a variação correspondente de $f(x)$ não é sempre a mesma, ou seja, não é constante. Também é possível perceber que a medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de $f(x)$ ora diminuem cada vez mais lentamente, ora aumentam cada vez mais rapidamente, caracterizando um intervalo em que f decresce a taxas decrescentes e outro em que f cresce cada vez mais rapidamente, ou seja, a taxas crescentes.

Tabela 4. Representação tabular da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$

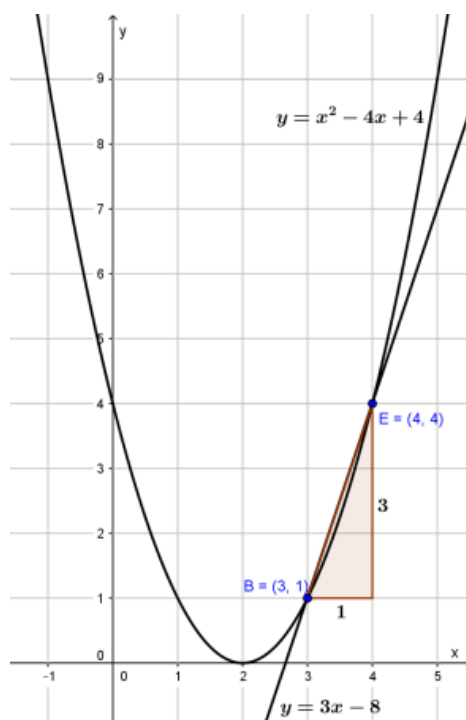
x	$f(x) = x^2 - 4x + 4$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9

Fonte: Produção nossa.

Como se pôde observar por meio das diferentes representações de f , a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x a partir de diferentes pontos do domínio de f não é sempre a mesma. Logo, não é possível tirar conclusões precisas quanto ao comportamento de f em todo seu domínio. Mas é possível estudar a “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação a x em um ponto específico do domínio de f como, por exemplo, no ponto $x = 3$. Para isso, uma possível técnica de resolução consiste, em um primeiro momento, em estudar a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x quando o valor de x aumenta uma unidade a partir do ponto $x = 3$, caracterizando o intervalo $[3, 4]$.

O gráfico 7 evidencia que a taxa de variação de $f(x)$ por unidade a mais de x , no intervalo $[3, 4]$, corresponde a taxa de variação da função representada graficamente pela reta secante ao gráfico de f nos pontos $B = (3, 1)$ e $E = (4, 4)$, cuja equação $y = 3x - 8$ pode ser obtida a partir destes pontos, por meio da mobilização de conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica. Assim, com base nos conhecimentos do conteúdo referentes às variações proporcionais, pode-se concluir que o coeficiente angular dessa reta, $a = 3$, corresponde à taxa de variação média de $f(x)$ por unidade a mais de x no intervalo $[3, 4]$.

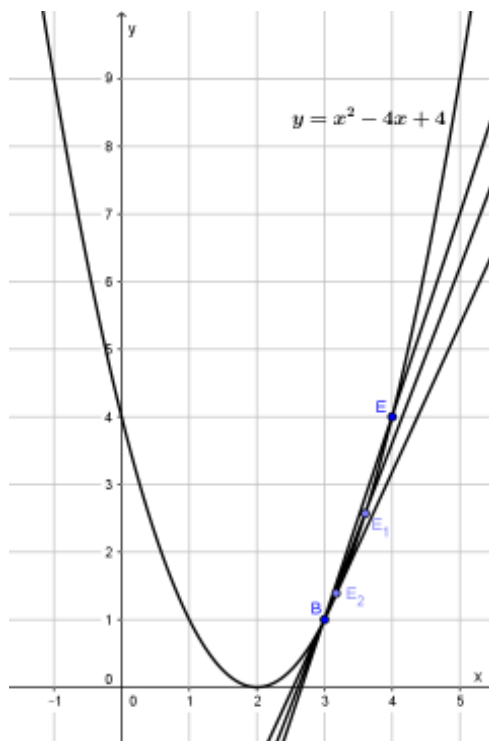
Gráfico 7. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$



Fonte: Produção nossa.

Mas, como o interesse está na taxa de variação de $f(x)$ em relação a x exatamente no ponto de abscissa $x = 3$, uma possível técnica de resolução consiste em tomar o ponto E cada vez mais próximo de B , fazendo “ E tender a B ”, gráfico 8.

Gráfico 8. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$



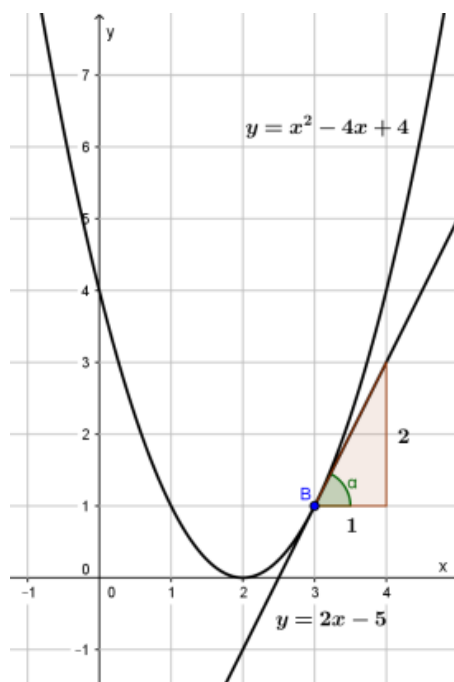
Fonte: Produção nossa.

Como se pode notar, à medida que o ponto E se aproxima de B , a reta secante \overline{BE} aproxima-se da reta tangente ao gráfico de f no ponto B , gráfico 9. É importante ter ciência de que o ponto E nunca irá coincidir com B , pois, caso isso ocorra, não há variação. Desse modo, se pode interpretar a reta tangente ao gráfico de f no ponto B como a reta formada pelos pontos B e E quando E se aproxima o máximo possível de B .

Por meio da análise do gráfico 9, e fundamentados nos conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, é possível afirmar que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto B , $a = 2$, corresponde ao valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas. Como $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, esse coeficiente angular é determinado pelo quociente da variação de y , pela variação de x , que corresponde a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1} = 2$. Supondo que essa reta tangente exista, sua equação é $y = 2x - 5$, e a taxa

de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto de abscissa $x = 3$ é igual a 2. De maneira análoga, é possível estudar a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em qualquer ponto do domínio de f .

Gráfico 9. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$

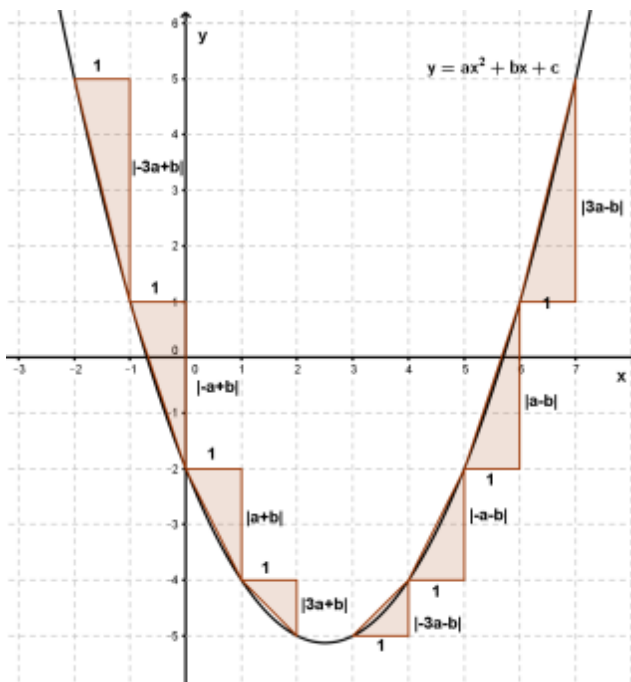


Fonte: Produção nossa.

Generalizando este caso para qualquer tipo de tarefa que demande o estudo da “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação a x para uma função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a , b e c reais e $a > 0$, sabe-se, dos conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, que f é representada graficamente por uma parábola que tem concavidade para cima, pois $a > 0$. Como técnica de resolução, pode-se recorrer à representação gráfica de f , em que é possível observar a variação de $f(x)$ em relação a x a partir de determinados intervalos do domínio de f , caracterizando a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x nestes intervalos, gráfico 10.

Por meio da análise da representação gráfica de f , também é possível observar que quando os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y ora diminuem cada vez mais lentamente, ora aumentam cada vez mais rapidamente, caracterizando intervalos em que f decresce a taxas decrescentes e cresce a taxas crescentes, respectivamente.

Gráfico 10. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$



Fonte: Produção nossa.

Outra técnica para se estudar a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x para uma função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a > 0$ consiste na mobilização da representação tabular de f , tabela 5, em que é possível observar a taxa de variação média de $f(x)$ em relação a x quando os valores de x aumentam uma unidade em determinados pontos do domínio de f .

Tabela 5. Representação tabular da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$

x	$f(x) = ax^2 + bx + c$	
-2	$4a - 2b + c$	} $-3a + b$
-1	$a - b + c$	
0	c	} $a + b$
1	$a + b + c$	
2	$4a + 2b + c$	} $3a + b$

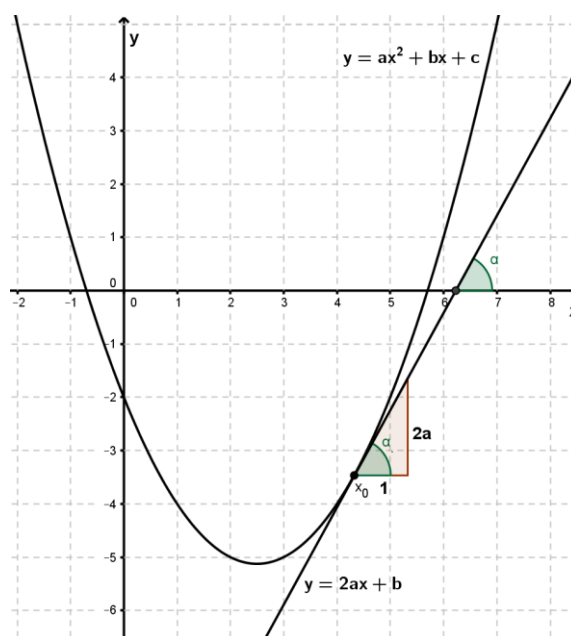
Fonte: Produção nossa.

Para os tipos de tarefas que demandam o estudo da variação de $f(x)$ em relação à x em um ponto $(x_0, f(x_0))$ via representação gráfica, uma possível técnica de resolução consiste em obter a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$,

gráfico 11, cuja equação, $y = 2ax + b$, pode ser obtida por meio de diferentes técnicas como, por exemplo, a partir do valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas e um ponto qualquer dessa reta.

Por meio da análise da representação gráfica de f , e a partir da mobilização de conhecimentos do conteúdo da Geometria Analítica, também é possível observar que o coeficiente angular dessa reta tangente corresponde ao valor da tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta e o eixo das abscissas. Como $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, esse coeficiente angular é determinado pelo quociente da variação de y , pela variação de x , que corresponde a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{1} = a$. Analogamente, pode-se determinar a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em qualquer ponto do domínio de f .

Gráfico 11. Representação gráfica da função f definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$



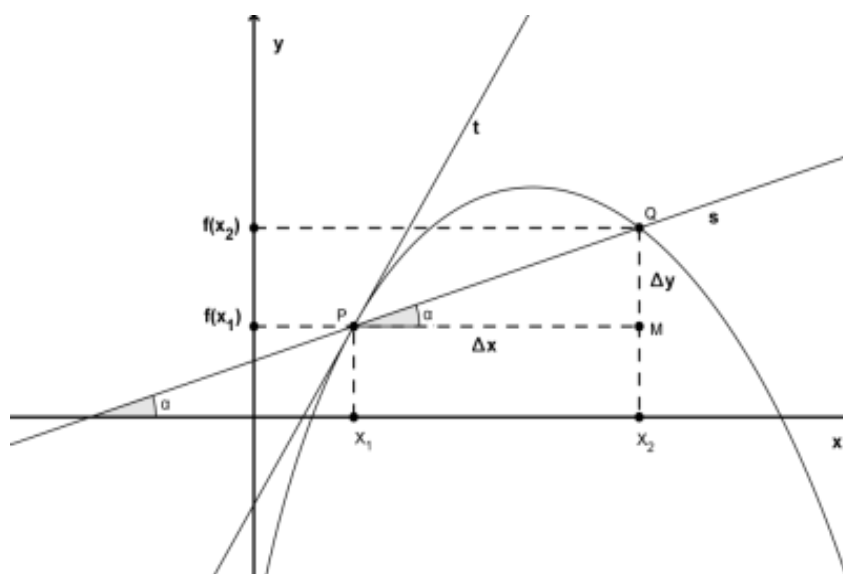
Fonte: Produção nossa.

Assim, a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto $(x_0, f(x_0))$, também denominada de derivada de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto, em que uma possível técnica para obtê-lo consiste em calcular a tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta tangente e o eixo das abscissas.

Desse modo, dentre as possíveis técnicas para se obter/estudar a derivada de uma função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ e, conseqüentemente, para construir os conhecimentos acerca dessa noção, consideramos mais eficaz e econômica aquela que consiste em determinar o coeficiente angular a_t da reta t que em P é tangente à curva que representa graficamente f . Para isso, deve-se escolher um ponto qualquer $Q(x_2, f(x_2))$ para se determinar uma reta secante s à curva que representa graficamente f , formada por P e Q de coeficiente angular a_s , como mostra o gráfico 12.

Por meio dos conhecimentos do conteúdo inerentes as variações proporcionais, sabe-se, com base no triângulo PMQ , retângulo em M , que $a_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Fazendo Q se aproximar de P o máximo possível, a_s será uma aproximação de a_t , e se espera que essa aproximação melhore a cada vez que Q se aproxime mais de P , com $P \neq Q$, de modo que o coeficiente angular da reta tangente seja o limite dos coeficientes angulares das retas secantes que são formadas quando Q se aproxima cada vez mais de P . Isso pode ser feito de várias maneiras: Q tendendo a P tomando pontos pela direita, tomando pontos pela esquerda ou tomando pontos alternadamente, pela esquerda e pela direita de P .

Gráfico 12. Representação gráfica de uma função f com uma reta tangente a f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$



Fonte: Produção nossa.

Uma vez que o coeficiente angular a_t tem um valor limite, isto é, se aproxima cada vez mais de a_s quando Q se aproxima de P , com $Q \neq P$, pode-se definir para uma função qualquer f , representada graficamente por uma curva qualquer, com um ponto $P(x_1, f(x_1))$ pertencente a essa curva, que o coeficiente angular da reta tangente a curva em P é o limite do quociente da variação de $f(x)$ pela variação de x quando Q tende a P , quando este limite existir.

Em linguagem simbólica temos:
$$a_t = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Considerando $\Delta x = x_2 - x_1$, ou $x_2 = x_1 + \Delta x$, e se $x_2 \rightarrow x_1$, então $\Delta x \rightarrow 0$, assim, tem-se:
$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

É importante notar, que as ideias de “uma reta secante tender à tangente”, “um ponto Q se aproximar o máximo possível de um ponto P ” ou de “o coeficiente angular da reta tangente ser uma aproximação dos coeficientes angulares das retas secantes quando Q tende a P ”, são todas representadas pelo conceito de limite, quando este existe, visto que é possível aproximar Q de P o quanto se desejar desde que P e Q não coincidam.

Uma vez que, a partir do estudo dos saberes referentes à ideia de taxa de variação de uma função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$, sejam construídos os conhecimentos do conteúdo inerentes a esta noção, estes, por sua vez, poderão ser mobilizados como técnicas de resolução mais econômicas e eficazes de alguns tipos de tarefas. Como exemplo, aquelas que demandam o estudo do crescimento e/ou decréscimo de uma função, que requerem os intervalos em que a representação gráfica de uma função tem concavidade voltada para baixo ou para cima, que solicitam os pontos em que ocorre uma “mudança de concavidade” (ponto de inflexão) ou que demandam o estudo dos pontos de máximo e mínimo local de uma função.

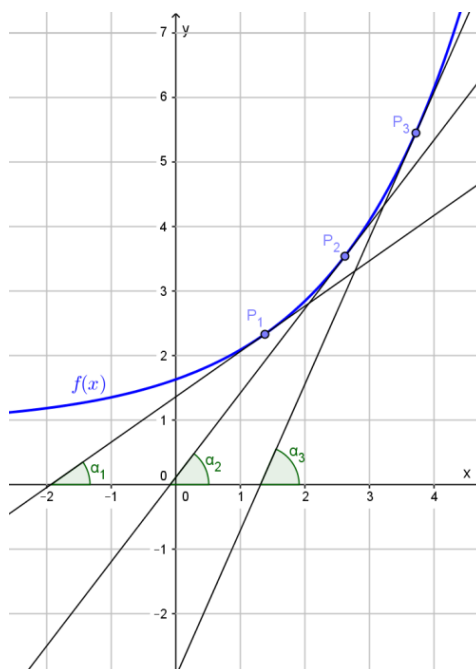
Determinar se uma função f é crescente, decrescente ou constante em um intervalo do seu domínio, é um tipo de tarefa em que uma técnica de resolução econômica e eficaz provém da mobilização dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação no ponto (derivada).

Para a função f cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, definida em um intervalo I , as relações entre a ideia de taxa de variação no ponto (derivada) e seu comportamento são muito simples:

- Se a derivada f é positiva ($a > 0$) em I , então f é crescente em I ;
- Se a derivada f é negativa ($a < 0$) em I , então f é decrescente em I ;
- Se a derivada f é nula ($a = 0$) em I , então f é constante em I .

Para uma função qualquer f , definida em um intervalo I , as relações são análogas, todavia, deve-se ter consciência de que a derivada em cada ponto de f corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f neste ponto. Então, apenas indicar o valor da derivada de f em um único ponto pode não ser suficiente para estabelecer conclusões válidas em todo o intervalo considerado, daí a necessidade de se estudar a vizinhança desse ponto. Se uma função f admite derivada positiva em todos os pontos de um intervalo I , por exemplo, no intervalo $(1, 4)$, gráfico 13, então ela é crescente em I .

Gráfico 13. Representação gráfica de uma função f crescente em um intervalo I



Fonte: Produção nossa.

De forma análoga, se uma função f admite derivada negativa em todos os pontos de um intervalo I , por exemplo, no intervalo $(0, 4)$, então ela é decrescente em I , como se pode observar no gráfico 14.

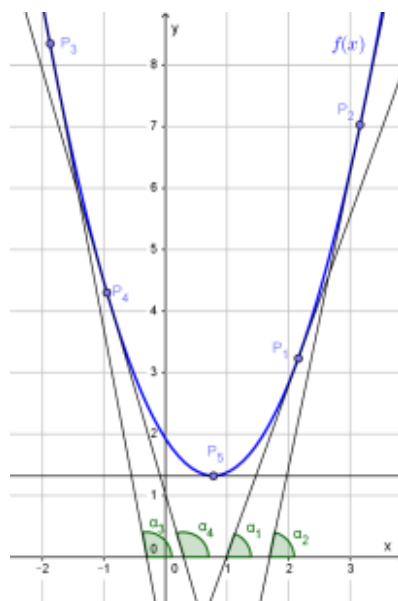
Gráfico 14. Representação gráfica de uma função f decrescente em um intervalo I



Fonte: Produção nossa.

E se uma função f admite derivada nula em todos os pontos de um intervalo I , então ela é constante em I . Entretanto, se essa função admite derivada nula em apenas um ponto de I , pode-se dizer que nesse ponto ela não cresce nem decresce, como é possível observar no gráfico 15, em que apenas no ponto P_5 a derivada de f é nula.

Gráfico 15. Representação gráfica de uma função f que admite derivada nula em um ponto P_5 do seu domínio



Fonte: Produção nossa.

Com base nessas relações, pode-se concluir que se uma função f é crescente em um intervalo I , então sua derivada nos pontos pertencentes a I é

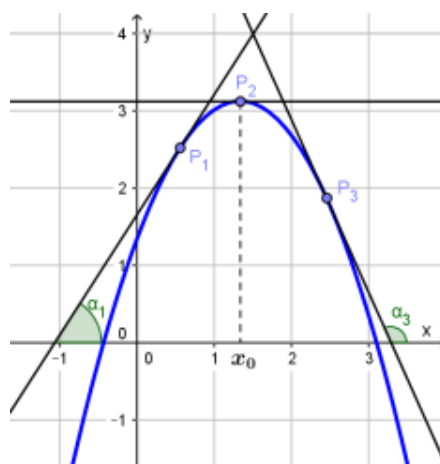
positiva ou nula em alguns pontos de I . Se f é decrescente em I , sua derivada nos pontos pertencentes a I é negativa ou nula em alguns pontos de I , e se f é constante em I , sua derivada nos pontos pertencentes a I é sempre nula.

Há pontos do domínio de uma função f nos quais sua derivada é nula ou não existe, denominados de pontos críticos de f . Nestes pontos pode-se ter um máximo local, um mínimo local, um ponto de inflexão ou nenhuma dessas situações.

Tipos de tarefas em que se deve determinar os valores da variável independente para os quais uma determinada função f assume seu valor mínimo ou máximo podem ser resolvidas por meio da mobilização dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação. Para isso, como técnica de resolução, deve-se identificar e estudar os pontos críticos de f , possíveis candidatos a máximo ou mínimo local.

Inicialmente, pode-se dizer, para uma função f definida em um intervalo I , que o ponto $(x_0, f(x_0))$ é um ponto de máximo local de f em I se, e somente se, $f(x) \leq f(x_0)$ para todo e qualquer $x \in I$. Sendo o ponto $(x_0, f(x_0))$ um ponto de máximo local de f em I , então f deve passar de crescente, antes do ponto $(x_0, f(x_0))$, para decrescente após $(x_0, f(x_0))$, considerando que o gráfico de f não seja “anguloso” neste ponto. Desse modo, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo das abscissas e, portanto, tem coeficiente angular igual a 0, como se pode observar no gráfico 16.

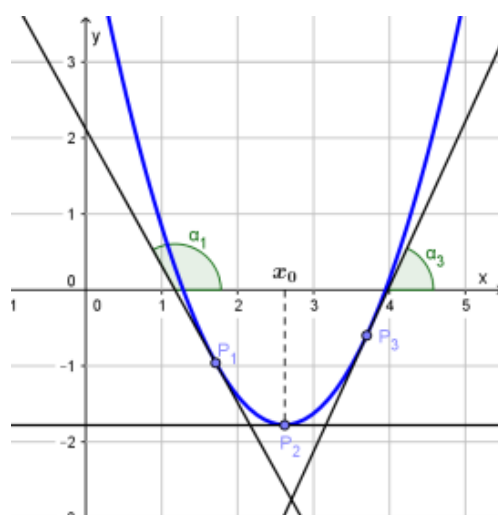
Gráfico 16. Representação gráfica de uma função f com ponto de máximo local em P_2



Fonte: Produção nossa.

Analogamente, para uma função f definida em um intervalo I , pode-se dizer que $(x_0, f(x_0))$ é um ponto de mínimo local de f em I se, e somente se, $f(x) \geq f(x_0)$ para todo e qualquer $x \in I$. Sendo o ponto $(x_0, f(x_0))$ um ponto de mínimo local de f em I , então f deve passar de decrescente antes de $(x_0, f(x_0))$, para crescente depois de $(x_0, f(x_0))$, considerando que o gráfico de f não seja "anguloso" neste ponto. Assim, a reta tangente à representação gráfica de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é paralela ao eixo das abscissas e, portanto, tem coeficiente angular igual 0, como mostra o gráfico 17.

Gráfico 17. Representação gráfica de uma função f com ponto de mínimo local em P_2



Fonte: Produção nossa.

Generalizando estes casos para tipos de tarefa em que se deve determinar os pontos de máximo ou de mínimo local de uma função qualquer f , sendo $(x_0, f(x_0))$ um ponto interior de um intervalo I em que f está definida, utilizando a ideia de derivada como uma técnica de resolução deve-se, primeiro, verificar se f é derivável em $(x_0, f(x_0))$, sendo f derivável em $(x_0, f(x_0))$, este ponto é um ponto de máximo ou de mínimo local se a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x em $(x_0, f(x_0))$ for nula, ou seja, se o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ for igual a zero.

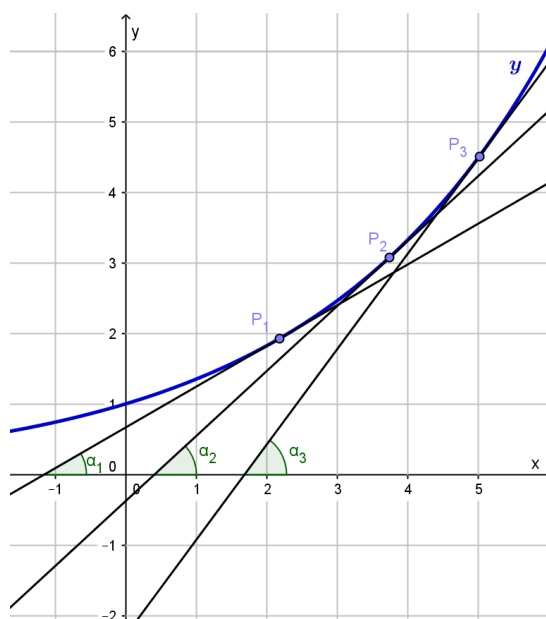
É importante observar que as noções de máximo local e mínimo local referem-se a uma vizinhança do ponto $(x_0, f(x_0))$ em um intervalo I em que f está definida. É possível, por exemplo, que um ponto de máximo local em I seja menor do que um ponto de mínimo local do domínio de f . Para designar os pontos de

máximo e mínimo de f em um intervalo I ou no domínio de f , deve-se recorrer as ideias de máximo absoluto e mínimo absoluto, que correspondem ao maior valor que f assume em I ou em seu domínio e ao menor valor que f assume em I ou em seu domínio, respectivamente.

Além do estudo do crescimento/decrescimento e dos pontos críticos de uma função não linear, os conhecimentos do conteúdo de taxa de variação também podem ser mobilizados na Educação Básica como ferramentas para auxiliar no estudo da concavidade do gráfico desse tipo de função, em que os tipos de tarefas explorados remetem à caracterização da concavidade da representação gráfica de uma função f , se é voltada para baixo ou para cima.

Para utilizar a noção de derivada como uma técnica de resolução desse tipo de tarefa deve-se, a princípio, estudar as relações entre o sinal da derivada de f em um intervalo I e seu crescimento/decrescimento nesse intervalo. A representação gráfica de uma função f tem concavidade para cima quando, em um intervalo I em que f está definida, a medida que os valores de x aumentam os valores da derivada de f também aumentam, como se pode observar no gráfico 18.

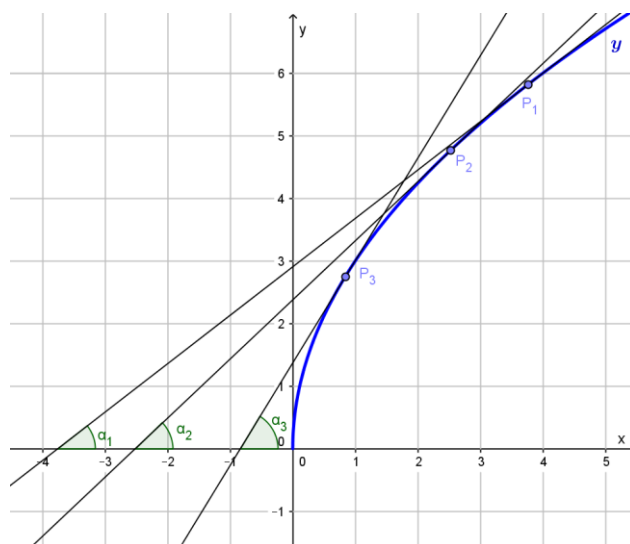
Gráfico 18. Representação gráfica de uma função f com concavidade para cima



Fonte: Produção nossa.

Quando, no entanto, a medida que os valores de x aumentam os valores da derivada de f diminuem, a representação gráfica de f tem concavidade para baixo no intervalo considerado, como se pode observar no gráfico 19.

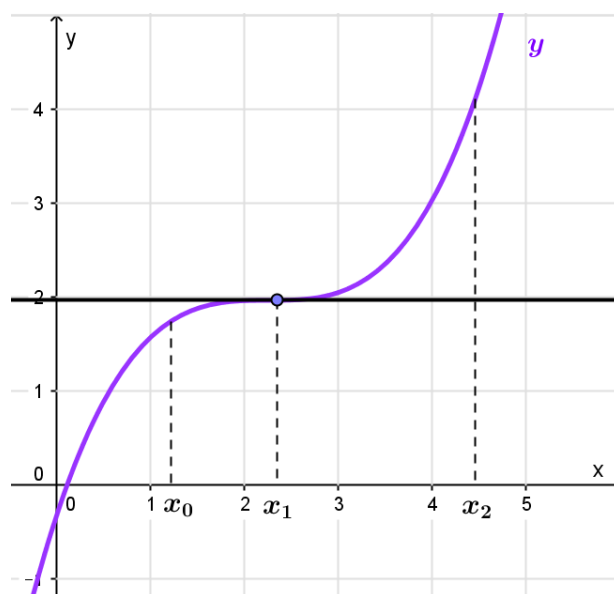
Gráfico 19. Representação gráfica de uma função f com concavidade para baixo



Fonte: Produção nossa.

Além destes dois casos, pode ocorrer que o valor da derivada de f mude, por exemplo, de positiva em um intervalo (x_0, x_1) , para negativa em um intervalo adjacente (x_1, x_2) . Neste caso, ocorre uma mudança de concavidade no ponto de abscissa x_1 , que é denominado de ponto de inflexão, gráfico 20.

Gráfico 20. Representação gráfica de uma função f com ponto de inflexão em $(x_1, f(x_1))$

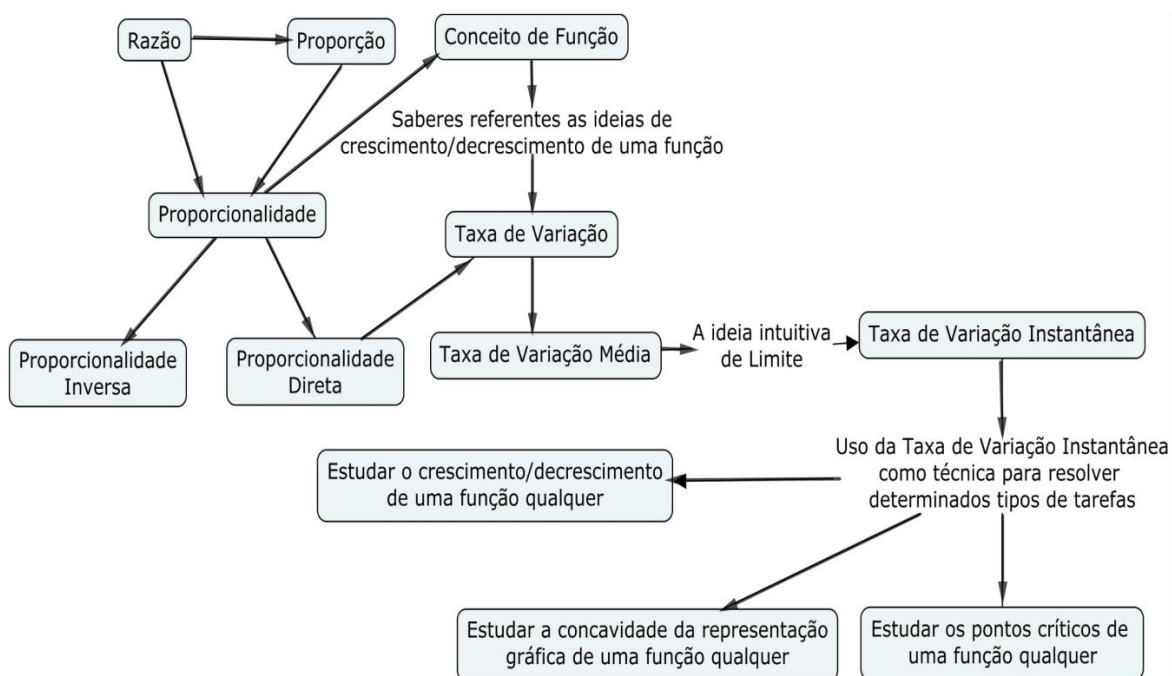


Fonte: Produção nossa.

A derivada de f no ponto de inflexão $(x_1, f(x_1))$ é nula, então se pode dizer que $(x_1, f(x_1))$ é um ponto de inflexão com reta tangente horizontal, mas isso nem sempre ocorre, há representações gráficas cuja reta tangente a curva no ponto de inflexão não é paralela ao eixo das abscissas.

Diante do exposto até aqui, a caráter de síntese, construímos um esquema, figura 17, que contempla os saberes que estão diretamente relacionados com o objeto matemático taxa de variação em termos do MER proposto. No esquema, as setas indicam um possível “caminho” a ser percorrido no processo de estudo dos saberes que fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação na Educação Básica e o uso da noção de taxa de variação instantânea como uma técnica mais econômica e eficaz para resolver determinados tipos de tarefas.

Figura 17. Esquema que relaciona os saberes que fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação



Fonte: Produção nossa.

Posto isso, em termos de conhecimentos do conteúdo para o ensino de taxa de variação, são os conhecimentos construídos a partir do estudo dos saberes contidos nas Organizações Matemáticas Pontuais exploradas neste item que consideramos necessários (ideais) para o ensino desse objeto matemático na Educação Básica. É a partir das possíveis interações entre essas OM pontuais em

torno de um discurso tecnológico fundamentado na ideia de taxa de variação que emerge uma OM local para o ensino de taxa de variação nesse nível de escolaridade que, em termos de conteúdo, estrutura nosso MER.

São estes conhecimentos que, para nós, formam o conhecimento do conteúdo para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, tal como propõe o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática elaborado em nosso referencial teórico. Sua construção é, ou ao menos deveria ser feita pelo professor em sua formação inicial, a partir da bibliografia explorada, dos estudos realizados em cada disciplina que, direta ou indiretamente, exploram os saberes referentes a ideia de taxa de variação e dos conhecimentos oriundos de sua formação básica, visto que a ideia de taxa de variação também é explorada na disciplina de Matemática da Educação Básica.

Uma vez eleita uma OM local que compreende os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo que consideramos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica e identificado uma possível fonte dos mesmos, no próximo item passamos a explorar os conhecimentos didáticos que consideramos necessários para este ensino. Para isso, nos fundamentamos no esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática elaborado no capítulo anterior e na noção de Conhecimento Didático para o Ensino proposta por Lima e Silva (2015).

4.2 CONHECIMENTO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO

No desenvolvimento e análise da atividade matemática necessária para o ensino de taxa de variação na Educação Básica há um aspecto indissociável da OM construída no item anterior, uma Organização Didática (OD) que compreende a organização/gestão do processo de estudo dessa OM.

Segundo Chevallard (1999), uma OD compreende o processo de construção de conhecimentos a partir do estudo dos saberes contidos em uma OM estabelecida *a priori* ou em construção. De acordo com o autor, não é possível construir uma OD sem um processo de estudo que a gere nem, tampouco, é

possível construir conhecimentos a partir de um processo de estudo sem uma OM construída *a priori* ou em construção, trata-se de dois aspectos intrínsecos e complementares da atividade matemática.

Diante disso, se faz necessário delinear uma OD para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Desse modo, e ainda fundamentados na TAD, a construção de OD que consideramos ideais para este ensino consiste em estudar os saberes matemáticos apresentados na OM construída no item anterior a partir de conhecimentos específicos da Didática da Matemática.

Este processo de construção não é organizado de modo homogêneo, linear ou hierarquicamente, mas para qualquer que seja seu percurso, determinadas situações necessariamente estão presentes. Estas situações são denominadas por Chevallard (1999) de momentos didáticos ou momentos de estudo, são momentos específicos do processo de estudo referentes a uma dimensão ou aspecto da atividade matemática, são atemporais, sem uma ordem cronológica pré-estabelecida, “estão distribuídos de forma dispersa ao longo do processo de estudo e não podem ser vividos ‘de uma vez por todas’ (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 275, tradução nossa)⁷⁴. Segundo Chevallard (1999, p. 22, tradução nossa)⁷⁵,

uma boa gestão do estudo exige que cada um dos momentos de estudo seja realizado no momento ideal ou, mais precisamente, nos melhores momentos: pois um momento de estudo se realiza, geralmente, em várias vezes, sob a forma de uma multiplicidade de episódios que se irrompem com o tempo. Esta visão indica que a ordem, desde então, dos vários momentos de estudo é, de fato, amplamente arbitrária, porque os momentos de estudo são, em primeiro lugar, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica.

Então, não é a ordem em que se realiza cada momento de estudo que importa, mas sim, a função específica que cada momento tem nos processos de

⁷⁴ están distribuidos de una forma dispersa a lo largo del proceso de estudio y no pueden ser vividos ‘de una vez por todas’. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 275).

⁷⁵ una sana gestión del estudio exige que cada uno de los momentos didácticos se realice en el buen momento, o más exactamente, en los buenos momentos: pues un momento de estudio se realiza generalmente en varias veces, bajo la forma de una multiplicidad de episodios que prorrumpen en el tiempo. En esta visión, se indicará que el orden puesto, después, sobre los diferentes momentos didácticos es de hecho ampliamente arbitrario, porque los momentos didácticos son en primer lugar una realidad funcional del estudio, antes de ser una realidad cronológica. (CHEVALLARD, 1999, p. 22).

ensino e de aprendizagem e as interações que devem ser estabelecidas entre eles. São seis momentos de estudo definidos por Chevallard (1999), o momento do primeiro encontro, o exploratório, o teórico-tecnológico, o do trabalho com a técnica, o da institucionalização e o da evolução.

O momento do primeiro encontro faz referência aos objetos matemáticos que constituem a atividade matemática em jogo. É precisamente o momento em que o sujeito se defronta pela primeira vez com os tipos de tarefas, ou ao menos um tipo de tarefa T , pertencente a OM em jogo. Esse momento pode ocorrer de diferentes maneiras, pode até ser um reencontro que, em última instância, tem a função de guiar o desenvolvimento das relações institucionais e pessoais com a atividade matemática em jogo.

O segundo momento é o de exploração do tipo de tarefa T por meio da construção de uma técnica τ que permite resolver este tipo de tarefa. Nesse momento dá-se início a um processo de estudo que conduz à construção, ao menos parcial, de uma técnica τ , ou de uma pequena quantidade de técnicas, para resolver os tipos de tarefas pertencentes a OM em jogo. Este momento de estudo, posteriormente, também deve possibilitar o aprimoramento da técnica τ construída *a priori* e a construção de outras técnicas mais eficazes e poderosas que podem emergir da mobilização de mais de uma técnica simultaneamente. De acordo com Chevallard (1999, p. 23, tradução nossa)⁷⁶,

O que está no coração da atividade matemática é o desenvolvimento de técnicas e não a resolução de problemas isolados. [...] o estudo de um problema particular, amostra de um tipo estudado, aparece assim, não como um fim em si mesmo, mas sim como um meio para estabelecer uma técnica de resolução. Enreda-se assim, uma dialética fundamental: estudar problemas é um meio que permite criar e implementar uma técnica relativa aos problemas do mesmo tipo, técnica que será a continuação do meio para resolver, de modo quase rotineiro, os problemas deste tipo.

O terceiro momento refere-se à construção do entorno teórico-tecnológico que, em linhas gerais, tem uma estreita relação com cada um dos demais

⁷⁶ lo que está en el corazón de la actividad matemática es más la *elaboración de técnicas* que no la resolución de problemas aislados. [...] el estudio de un problema *particular*, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas del mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de este tipo. (CHEVALLARD, 1999, p. 23).

momentos, “estabelecendo um processo dinâmico e atemporal na evolução do processo desencadeado pela Organização Matemática e que é foco do estudo da Organização Didática.” (ALMOULOU, 2007, p. 125). Desse modo, conforme ressalta Chevallard (1999), desde o primeiro encontro com o tipo de tarefa T , há, geralmente, uma relação com um entorno teórico-tecnológico anteriormente elaborado.

No quarto momento ocorre a consolidação e o trabalho efetivo com a técnica τ para resolver o tipo de tarefa T . Tal técnica, cuja construção foi iniciada no momento de exploração, pode, por sua vez, ser modificada e/ou aperfeiçoada a partir do seu uso na resolução de uma pequena quantidade de tarefas adequadas tanto qualitativamente, quanto quantitativamente, pela OM em jogo, ou a partir do uso de outras técnicas simultaneamente.

O quinto momento, o da institucionalização, tem por finalidade definir a OM em jogo. É nesse momento que o estatuto cognitivo do saber matemático em jogo é fixado, de modo a se construir um novo conhecimento matemático inerente a ele, tornando-o assim, disponível para utilização em situações de ensino e de aprendizagem posteriores. Aqui, alguns elementos que fizeram parte do processo de estudo nos momentos anteriores “podem ser descartados e outros integrados definitivamente a partir da explicitação oficial desses elementos pelo professor ou pelo aluno, tornando-se parte integrante da cultura da instituição ou da classe.” (ALMOULOU, 2007, p. 125).

O sexto momento de estudo, o da evolução, está diretamente relacionado com a institucionalização, é quando se deve realizar um movimento de avaliação acerca dos estudos já realizados sob dois pontos de vista, o das relações pessoais e o das relações institucionais, ambas em relação a técnica construída, ao ambiente teórico-tecnológico construído e ao conhecimento efetivamente construído.

Na prática, se chega a um momento em que se deve “fazer um balanço”: porque é neste momento de reflexão onde, qualquer que seja o julgamento e o juiz, se olha para o que vale a pena, o que foi aprendido, este momento de verificação, apesar das memórias de infância, não é de todo uma

invenção da escola, compreende, de fato, toda a atividade humana. (CHEVALLARD, 1999, p. 25, tradução nossa)⁷⁷.

Segundo Chevallard (1999), o modelo dos momentos de estudo compreende dois grandes tipos de emprego para o professor, como um instrumento de análise dos processos didáticos e como um instrumento que permite evidenciar/caracterizar, com precisão, a realização das diferentes etapas de estudo. Em suma, o modelo dos momentos de estudo proposto pelo autor evidencia a atenção que deve ser dada à construção de uma OD que tenha por finalidade a construção de conhecimentos a partir do estudo dos saberes contidos em uma OM estabelecida *a priori* ou em construção.

Diante disso, uma OD que compreenda a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica a partir do estudo dos saberes explorados na OM construída no item anterior deve ser estruturada em termos dos diferentes momentos de estudo propostos por Chevallard (1999) e contemplar, necessariamente, conhecimentos específicos para o ensino de Matemática, constituídos pelas teorias, metodologias e práticas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem dessa ciência, tendo como pano de fundo a Didática da Matemática, tal como propõem Lima e Silva (2015).

Dentre as teorias e metodologias que forjam a Didática da Matemática, consideramos crucial para o ensino de Matemática e, conseqüentemente, para o ensino de taxa de variação, que o professor tenha, minimamente, conhecimentos referentes a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria Antropológica do Didático, a Engenharia Didática, a noção de Contrato Didático e a noção de Obstáculo, que são apresentadas resumidamente nos próximos subitens.

De modo a evitar momentos demasiadamente repetitivos, não apresentamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD) neste capítulo, visto que

⁷⁷ En la práctica, se llega a un momento en el que se debe “hacer balance”: porque este momento de reflexividad donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que vale lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la “respiración” misma de toda actividad humana. (CHEVALLARD, 1999, p. 25).

seus elementos e principais características já foram apresentados e discutidos no item 3.3 do capítulo precedente.

Temos ciência de que há outros referenciais teóricos e metodológicos que podem dar suporte ao ensino de taxa de variação na Educação Básica, conforme constatamos em nossa revisão de literatura, todavia, como o objetivo deste item é identificar uma gama de conhecimentos didáticos para o ensino deste objeto matemático a partir do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática elaborado por nós e da definição de Conhecimento Didático para o Ensino proposta por Lima e Silva (2015), atemos nosso estudo em teorias específicas da Didática da Matemática.

4.2.1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi criada por Guy Brousseau para modelar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Seu objetivo primeiro consiste em caracterizar estes processos por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas pelo autor de situações didáticas, que, em última instância, regulam fortemente as modificações comportamentais dos estudantes frente ao processo de aprendizagem. As situações didáticas em que são identificadas as interações entre o professor, o aluno, o saber e o meio assumem, então, um papel central nessa teoria em detrimento ao sujeito cognitivo. Nas palavras de Brousseau (1986, p. 11, tradução nossa)⁷⁸, em uma situação didática,

O aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se com as novas respostas que são prova da aprendizagem. [...] O aluno sabe que o problema foi escolhido para que ele adquira um novo conhecimento, mas deve também saber que este conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode ser construído sem recorrer para razões didáticas.

⁷⁸ El alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. [...] El alumno sabe bien que el problema ha sido escogido para hacerle adquirir un nuevo conocimiento, pero debe también saber que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin invocar razones didácticas. (BROUSSEAU, 1986, p. 11).

Na TSD, os momentos em que o estudante tem a maior independência quanto ao processo de aprendizagem são as situações adidáticas, parte fundamental da situação didática. São situações em que as finalidades de ensino não são reveladas ao estudante, mas foram devidamente planejadas para levá-lo a construção de um novo conhecimento por meio de situações-problema previamente escolhidas, de modo que ele fale, atue, reflita e evolua perante os processos de ensino e de aprendizagem que está inserido.

É o professor que estruturou o ambiente de modo oportuno, com instrumentos oportunos, com o objetivo de chegar, ao final da atividade, a um conhecimento específico. Tudo acontece, por assim dizer, à luz do sol, em um ambiente declarado:

- o aluno sabe que está aprendendo, que o professor está ensinando;
- o professor é consciente do seu papel e de como a situação está se desenvolvendo. (D'AMORE, 2007, p. 235).

Uma situação didática se caracteriza, assim, pelo jogo de interações entre o estudante, o saber, o meio e os problemas propostos pelo professor para levá-lo à construção de conhecimentos e à assimilação desse saber. O modo de propor esses problemas é denominado por Brousseau (1986) de devolução, que consiste no “conjunto de condições que permitem que o aluno se aproprie da situação. Quando os alunos se apropriam da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa, e, a partir daí, fica caracterizada a situação adidática” (FREITAS, 2012, p. 85). Todavia, para que isso ocorra, é necessário que “o professor aceite a responsabilidade pelos resultados e garanta ao aluno os meios efetivos de aquisição de conhecimentos.” (BROUSSEAU, 1986, p. 13, tradução nossa)⁷⁹. Isso pressupõe, também, a existência de um contrato didático que permite fazer a devolução para o bom andamento da situação didática.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação fundamentada na TSD as tarefas propostas devem ser situações adidáticas que, quando amalgamadas, formam situações didáticas para o ensino desse objeto matemático. Estas tarefas devem ser planejadas/estruturadas pelo professor de modo a levar o estudante a defrontar-se com dificuldades, contradições, entraves, contratempos e etc., cuja superação emerge, necessariamente, da construção e mobilização dos conhecimentos de taxa de variação, tal como foi feito nas investigações de Silva,

⁷⁹ El profesor acepte la responsabilidad de los resultados y que asegure al alumno los medios efectivos para la adquisición de los conocimientos. (BROUSSEAU, 1986, p. 52).

E. (2012) e Silva e Silva (2015) que, embora não tenham sido fundamentadas na TAD, evidenciaram que a TSD e a Teoria de Registros de Representação Semiótica apresentam elementos suficientes para auxiliar/fomentar os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica.

Para descrever e analisar as interações do aluno frente aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, Brousseau (1986) desenvolveu uma tipologia específica de classificação de situações, caracterizada por quatro tipos de interações fundamentais do aluno com o meio e com os diferentes problemas propostos, que envolvem diferentes relações com o saber em jogo, em que o aluno não tem a mesma relação com este saber e que não ocorrem de modo ordenado ou hierárquico; são as dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização.

A dialética de ação consiste em colocar o educando frente a uma situação de ação em que lhe é apresentado um problema cuja melhor solução consiste na necessidade de construir e manipular um conhecimento de natureza mais operacional, o qual se pretende que o aluno assimile. Nesse momento o aluno encontra-se ativamente empenhado na busca por soluções para um problema e realiza ações de caráter experimental, em que o essencial é o professor não intervir e não explicitar nenhum argumento de natureza teórica. É o aluno que irá fornecer a solução. A explicitação de argumentos e justificativas para as ações realizadas não precisa, necessariamente, ser feita pelo estudante, cabe ao docente, ao estruturar a situação didática, escolher alguns elementos convenientes para que o aluno tenha condições de chegar a solução almejada.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação fundamentada na TSD, as tarefas propostas devem ser estruturadas de modo a colocar o estudante em situações de ação, levando-o a agir, pensar e refletir para mobilizar e/ou criar técnicas a partir de outras já conhecidas para resolvê-las. É de responsabilidade do professor, a partir de seus conhecimentos do conteúdo e dos alunos e didático do conteúdo, estruturar as tarefas de modo a “prever” o comportamento do estudante na busca pelas técnicas que poderão auxiliá-lo na resolução do problema em jogo. Somente o docente conhece seus alunos suficientemente para “prever” as possíveis técnicas que poderão emergir na busca pela resolução da tarefa

proposta e os possíveis erros e contratempos que, possivelmente, os alunos se defrontarão enquanto percorrem a dialética de ação.

Na dialética de formulação, o estudante já utiliza, na busca pela solução do problema estudado, alguns argumentos de natureza teórica já explícitos, sendo o momento em que o aluno tenta explicitar seus argumentos e justificar suas ações. Brousseau (1986) salienta que nesse momento o aprendiz troca ideias e informações com seus pares, de modo a explicitar suas conjecturas, hipóteses, inferências, as ferramentas utilizadas e as soluções encontradas por meio da troca de mensagens escritas ou orais. Para o autor, esse momento consiste em

desenvolver progressivamente uma linguagem compreensível por todos e que leva em conta os objetos e as relações pertinentes da situação de forma adequada (isto é, permitindo raciocínios úteis e ações). A cada instante esta linguagem construída será testada do ponto de vista de sua inteligibilidade, da facilidade de construção, do tamanho das mensagens que se pode trocar. A construção ou código (repertório, vocabulário, algumas vezes a sintaxe) em língua natural ou linguagem formal torna possível à explicitação das ações e dos modelos de ação. (BROUSSEAU, 1998, p. 36 apud ALMOULOU, 2007, p. 39).

Em uma OD para o ensino de taxa de variação, esse momento ocorre quando o estudante já mobiliza, ainda que de modo intuitivo, pressupostos de um discurso teórico-tecnológico para justificar a mobilização/construção de uma determinada técnica em detrimento de outras para resolver as tarefas propostas. Nesse momento, ocorrem interações entre os estudantes e entre eles, as tarefas em jogo e o meio, de modo a explicitar, por meio de mensagens escritas ou orais, as diferentes técnicas utilizadas e as conjecturas, hipóteses e inferências levantadas na busca pela técnica mais econômica e eficaz para resolver as tarefas propostas.

Cabe ao docente, fundamentado em seus conhecimentos do conteúdo e de ensino e didáticos do conteúdo, planejar este momento de modo oportuno, para que ocorra da maneira mais natural possível, respeitando o tempo cognitivo dos estudantes e, se necessário, mediando os diálogos e discussões acerca das ações tomadas, visto serem essas ações que, em um primeiro momento, irão fundamentar a construção de um discurso teórico-tecnológico referente a noção de taxa de variação.

Quanto à dialética de validação, Freitas (2012) ressalta que essa é a etapa em que o estudante já utiliza determinados mecanismos de prova, em que o saber matemático em jogo é mobilizado com essa finalidade. Nesse momento ocorre um debate acerca das asserções obtidas durante os processos de ensino e de aprendizagem. Espera-se que o aprendiz prove ou refute a exatidão daquilo que já se afirmou, de modo que se possa as corrigir e/ou ir adiante em suas produções. Almouloud (2007) destaca que no caso de rejeição das afirmações apresentadas por parte do receptor, se faz necessário que o mesmo apresente uma justificativa para tal. Para Brousseau (1986, p. 52, tradução nossa)⁸⁰,

as situações de validação podem ajudar o professor a fazer aparecer em uma sala de aula, uma autêntica e pequena sociedade matemática. [...] Uma situação de validação não é, a priori, a melhor situação de aprendizagem de saberes institucionalizados. Ela pode gerar obstáculos didáticos e gerar obstáculos epistemológicos.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação, a validação ocorre quando o estudante já mobiliza, ainda que implicitamente, determinados conhecimentos acerca deste objeto matemático para construir um discurso teórico-tecnológico que possa validar, ou não, a técnica mobilizada/construída para resolver as tarefas em jogo. Esse momento também deve ser previsto pelo professor, pois cabe a ele, fundamentado em seus conhecimentos do conteúdo e de ensino e didáticos do conteúdo, organizar as tarefas propostas de modo que a validação das técnicas construídas/mobilizadas ocorra no momento “ideal”, quando os estudantes já têm elementos suficientes para realizar um debate acerca de suas asserções, defendendo e/ou as criticando, quando necessário.

O momento de institucionalização tem por finalidade estabelecer formalmente o saber matemático em jogo. Segundo Almouloud (2007, p. 40), “depois da institucionalização, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.” Esse momento exige, necessariamente, adaptações do contrato didático, pois deve ser negociado em um processo de dialética, em ocasião oportuna, pois se feito muito cedo, prejudicará a construção

⁸⁰ Las situaciones de validación pueden ayudar al profesor, hacer vívida en una clase una auténtica pequeña sociedad matemática. [...] Una situación de validación no es, a priori, la mejor de las situaciones de aprendizaje de saberes institucionalizados. Ella puede hasta suscitar obstáculos didáticos y resucitar obstáculos epistemológicos molestos. (BROUSSEAU, 1986, p. 52)

do sentido e a construção do conhecimento, originando dificuldades tanto para o professor quanto para o aluno, e se feito muito tarde, reforça interpretações errôneas.

No âmbito da TSD, é o aluno quem deve gerir sua relação com o saber em jogo nas dialéticas de ação, formulação e validação, cabendo ao professor a institucionalização, momento em que ele estabelece o estatuto cognitivo do saber e o relaciona com o conhecimento em construção pelos alunos. Quando o estudante percorre um processo de aprendizagem nesse sentido, espera-se que ele seja capaz de construir novos conhecimentos a partir de suas relações pessoais e de suas interações com o meio e com seus pares.

O momento de institucionalização de uma OD para o ensino de taxa de variação é de inteira responsabilidade do professor. Cabe ao docente definir os conceitos imersos na noção de taxa de variação bem como desenvolver um discurso teórico-tecnológico que justifique as técnicas mobilizadas na resolução das tarefas propostas, de modo que os estudantes possam compreender e agregar esta noção a sua gama de conhecimentos matemáticos, para que possam utilizá-la em aprendizagens futuras, na resolução de problemas ou, até mesmo, no cotidiano, no exercício de sua cidadania.

A institucionalização dos saberes referentes a noção de taxa de variação requer a mobilização de um conhecimento especializado do conteúdo para o ensino deste objeto matemático, conforme elencado na OM construída no item anterior, em consonância com a mobilização de conhecimentos pedagógicos, didáticos (conhecimentos específicos da TSD), do conteúdo e de ensino e do conteúdo e dos alunos, conforme o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no capítulo anterior.

4.2.2 A TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A teoria de Registros de Representação Semiótica enfatiza a importância da diversidade de registros de representação, da articulação entre os mesmos nas diversas atividades matemáticas e fornece um referencial teórico estruturado de análise do funcionamento cognitivo e epistemológico da compreensão em

Matemática. Para Duval (2011, p. 104), “os registros são as ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou de aprendizagem.” Segundo ele, em Matemática, os registros de representação semiótica, além de imprescindíveis para fins de comunicação, são fundamentais para o desenvolvimento da atividade matemática.

Nas palavras do autor, a atividade cognitiva requerida pela Matemática é diferente daquela requerida por outras áreas do conhecimento, seus objetos são abstratos, o que a conduz a se apoiar em representações para ser compreendida, de modo que o acesso a tais objetos se dá, necessariamente, por meio dessas representações. Para que a Matemática seja realmente compreendida, Duval (2011) adverte que é necessário distinguir o objeto matemático de sua representação, uma vez que um mesmo objeto pode ser representado de formas distintas.

Na Teoria de Registros de Representação Semiótica, a análise da construção de conhecimentos e dos diversos obstáculos defrontados no estudo de objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação confronta três fenômenos intrinsecamente ligados: o da diversificação dos registros de representação semiótica, que refere-se a pluralidade de registros de representação que um mesmo objeto matemático possa ter, o da diferenciação entre representante e representado, que remete à necessidade de compreender o que está sendo representado por determinado registro e a possibilidade de associá-lo a outro registro de representação e de integrá-lo em procedimentos de tratamento e o da coordenação entre diferentes registros de representação semiótica disponíveis, pois “é tomando simultaneamente dois registros de representação, e não cada registro isoladamente, que se pode determinar o funcionamento da representação própria de um registro.” (DUVAL, 1995 apud ALMOULOU, 2007, p. 75).

Na construção de uma OD para o ensino de taxa de variação fundamentada na Teoria de Registros de Representação Semiótica, o professor deve, em um primeiro momento, fundamentado em seus conhecimentos do conteúdo e dos alunos, didático do conteúdo e do conteúdo e de ensino, considerar os diferentes

registros de representação semiótica desse objeto matemático, a possibilidade de associar a ideia de taxa de variação a outros registros de representação, a distinção entre o objeto matemático taxa de variação e suas representações e, principalmente, a coordenação/associação entre os diferentes registros de representação desse objeto matemático em prol dos processos de ensino e de aprendizagem.

O professor deve ter clareza de que é se tomando, concomitantemente, dois ou mais registros de representação do objeto matemático taxa de variação que os processos de ensino e de aprendizagem dessa noção poderão ter êxito. As investigações de Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015) evidenciam esse fato, visto que em ambas, os autores afirmam que a construção de significado para a noção de taxa de variação instantânea por alunos da Educação Básica deu-se somente por meio da mobilização, concomitante, dos registros de representação gráfica, tabular e algébrica.

Assim, uma OD proposta para o ensino de taxa de variação deve ser estruturada de modo a contemplar a mobilização simultânea dos diferentes registros de representação semiótica desse objeto matemático, e a possibilidade de associar a ideia de taxa de variação a outros registros de representação, intra ou extramatemáticos como, por exemplo, foi feito por Silva, E. (2012), em que a OD proposta pelo autor para o ensino de taxa de variação compreendeu a mobilização dos registros de representação gráfica, algébrica e tabular concomitantemente.

De acordo com Almouloud (2007, p. 72), “em qualquer atividade intelectual, na elaboração e na transformação de representações semióticas, é necessário distinguir dois tipos heterogêneos de transformação das representações: o tratamento e a conversão”, cujas atividades que permitem mobiliza-las de modo consciente, jamais podem ser confundidas com sequências de ensino que objetivam explorar um conceito matemático específico.

Para Duval (2009, p. 58) converter é:

transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] A conversão é então uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida.

Para se entender o processo de conversão, Almouloud (2007) acrescenta que se faz necessário compreender dois aspectos da atividade matemática: primeiro é que em toda conversão deve-se considerar um sentido, ou seja, deve-se indicar o registro de partida e o de chegada, e o fato de que efetuar a conversão em um sentido não implica, necessariamente, na possibilidade de efetuar a conversão no sentido contrário, o segundo aspecto é que o processo de conversão de uma representação implica, obrigatoriamente, em uma mudança de conteúdo e não somente de forma, o conteúdo de representação é diferente do objeto representado.

Duval (2003) adverte que é comum considerar a conversão como uma operação simples e local, ou seja, reduzida a uma simples “codificação”, em que o ato de “converter” consiste apenas em aplicar determinadas regras de correspondência de modo a se obter uma espécie de “tradução”. Dessa forma, por exemplo, o processo de passar da representação algébrica de uma função para seu registro de representação gráfica consistiria apenas em aplicar uma regra, na qual um ponto está associado a um par de números em um plano cartesiano.

Uma tal visão é superficial e enganadora não somente nos fatos concernentes às aprendizagens (DUVAL, 1988), mas igualmente do ponto de vista teórico, pois a regra de codificação permite somente uma leitura das representações gráficas. Essa regra não permite uma apreensão global e qualitativa. (DUVAL, 2003, p. 17).

Ainda se referindo ao registro de representação gráfica, Duval (2011) observa que sua compreensão se dá, necessariamente, por meio da coordenação cognitiva entre este registro e o registro das escritas algébricas. Segundo o autor,

Entre a operação de construção de um gráfico, que não pode ir nunca além da identificação de uma sequência de pontos, e a operação não matemática que consiste em ligar os consecutivos assim obtidos pelos segmentos, existe um salto dimensional contínuo visual de retas e curvas. É em virtude desse salto dimensional que os gráficos cartesianos tornam-se um sistema semiótico produtor, ou criador, de novas representações, e não em virtude da regra de codificação que associa um par de números e um ponto. (DUVAL, 2011, p. 108).

Quanto a noção de tratamento, Duval (2003, p. 16) a define como o processo de

transformação de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar cálculos ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

Há dois tipos de tratamentos, os quase-instantâneos e os intencionais. Os quase-instantâneos não se apoiam sobre os dados fornecidos pelo estatuto do objeto matemático em jogo, são aqueles em que o sujeito tem imediata consciência do que está fazendo, ou seja, ele age de acordo com sua intuição, com sua experiência. Já os intencionais, requerem do sujeito ao menos certo tempo de análise consciente para que possam ser postos em prática, se apoiam nos dados fornecidos pelo objeto matemático, estão claros, são evidentes e visíveis ao sujeito.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação fundamentada na Teoria de Registros de Representação Semiótica, as tarefas propostas devem ser estruturadas de modo a permitir, em consonância com a construção/manipulação de representações nos diferentes registros, a realização, consciente, de transformações internas e externas inerentes a estes registros. Essas tarefas devem ser planejadas de modo que as estratégias mais econômicas e eficazes de resolução privilegiem as conversões entre os registros de representação gráfica, algébrica e tabular em consonância com os tratamentos impostos pelas técnicas mobilizadas para resolvê-las, conforme fizeram Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015).

Para Duval (2009), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação. Todavia, deve-se ter consciência de que mudar de um registro de representação para outro não é somente realizar uma “transformação”, mas é também explicar as propriedades e/ou os diferentes aspectos de um mesmo objeto matemático. Segundo o autor, “a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação.” (DUVAL, 2009, p. 81). E é a articulação entre diferentes registros de representação que constitui uma condição de acesso à compreensão Matemática, e o reconhecimento de um objeto matemático por meio de suas múltiplas representações é condição fundamental para que um estudante possa, por si só, compreender, transferir e modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de uma situação-problema.

Em entrevista concedida para Freitas e Rezende (2013), Duval ressalta que o uso da Teoria de Registros de Representação Semiótica em sala de aula demanda uma completa mudança de perspectiva sobre a atividade matemática. Tal mudança, segundo ele, sustenta-se em dois pilares, no uso de quadros para gerir e organizar os dados identificados e coletados nos processos de trabalho e de exploração da atividade matemática, e na resolução de problemas, cujo estudo deve preparar os estudantes para resolver diversos problemas, tanto intra quanto extramatemáticos.

4.2.3 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A teoria dos Campos Conceituais, embora desenvolvida no âmbito da Matemática, também oferece um referencial teórico voltado aos processos de ensino e de aprendizagem de outras áreas do conhecimento. Apesar de sua concepção e seus fundamentos estarem diretamente relacionados com a Didática da Matemática, não se trata apenas de uma teoria didática, de acordo com Vergnaud (1989), trata-se também de uma teoria cognitivista, que estuda o funcionamento cognitivo do “sujeito em ação”. Segundo o autor, duas teses fundamentaram a construção dessa teoria:

- 1) Precisamos de uma teoria de referência, tanto para analisar a conduta e os procedimentos utilizados por um estudante em uma dada situação, quanto para compreender os diferentes significados de um conceito.
- 2) Devemos analisar e classificar as situações em relação umas às outras de modo a identificar filiações e rupturas entre conhecimentos. (VERGNAUD, 1989, p. 48, grifo do autor, tradução nossa)⁸¹.

A partir dessas teses, e apoiando-se nos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas da Matemática, a Teoria dos Campos Conceituais

se propõe a fornecer um quadro coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, sobretudo aquelas que dizem respeito às ciências e às técnicas. [...] O seu objetivo principal consiste em fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos nas crianças e nos adolescentes, entendendo por ‘conhecimento’ tanto o

⁸¹ 1) Il faut une théorie de la référence, à la fois pour analyser les conduites et les procédures utilisées par un élève dans une situation donnée, et pour comprendre les différents sens d'un concept.

2) Il faut analyser et classer les situations les unes par rapport aux autres pour identifier les filiations et les ruptures entre connaissances. (VERGNAUD, 1989, p. 48).

saber-fazer quanto o saber explícito. (VERGNAUD, 1990, p. 135, tradução nossa)⁸².

A premissa fundamental da Teoria dos Campos Conceituais pressupõe que a construção de conhecimentos por parte de um sujeito ocorre ao longo de um amplo período de tempo (vários anos ou décadas), por meio de experiências e aprendizagens oriundas de suas interações com determinadas situações que, aqui, não têm o mesmo significado da noção de situação proposta por Brousseau (1986) na TSD. Vergnaud (1990, p. 150) limita a ideia de situação ao sentido atribuído usualmente na Psicologia, em que os processos cognitivos e as respostas dos sujeitos emergem das situações com as quais ele se defronta em seu dia a dia.

De acordo com Moreira (2002), na Teoria dos Campos Conceituais a atenção é voltada aos aspectos conceituais dos esquemas e à análise das situações com as quais os estudantes interagem para desenvolver estes esquemas, tanto na escola quanto fora dela. Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais “visa a construção de princípios que permitem articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem.” (FRANCHI, 2012, p. 199).

No centro destas ideias encontram-se os conceitos-chave da Teoria dos Campos Conceituais, que compreendem além da noção de campo conceitual, as noções de esquema, situação, invariante operatório (teorema-em-ação e conceito-em-ação) e a própria concepção de conceito proposta por Vergnaud.

Vergnaud, em várias ocasiões, apresentou definições diferentes e complementares para a noção de campo conceitual, o que, de acordo com D’Amore (2007, p. 366), “mostra como, com o passar dos anos, a ideia se aperfeiçoa e se torna cada vez mais precisa.” Para Moreira (2002, p. 9), a definição mais abrangente para esta noção foi apresentada por Vergnaud em 1982, quando o autor definiu campo conceitual como “um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de

⁸² vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. [...] Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette la compréhension des filiations et les ruptures entre les connaissances, chez les enfants et les adolescents, en entendant par « connaissance » aussi bien les savoir-faire que les savoirs exprimés. (VERGNAUD, 1990, p. 135).

pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição.”

Há três motivos que, segundo Vergnaud (1983), nos colocam em um campo conceitual, em detrimento de apenas nos colocar diante de um conceito. Primeiro, porque um conceito não se forma no âmbito de um só tipo de situação; de acordo com D’Amore (2007), constitui um desvio de objetivos estudar um conceito por si só como uma técnica para resolver determinadas situações, pois há diversos conceitos que são matematicamente interdependentes e que estão presentes ao mesmo tempo no estudo de um tipo de situação. Em segundo lugar, porque a análise de uma situação não pode ser fundamentada em apenas um conceito, é necessário mobilizar uma gama de conceitos para poder estudar e analisá-la. E, terceiro, porque a construção de significado para um conceito ou para os aspectos de um determinado tipo de situação é um processo árduo e muitas vezes vagaroso, que perdura por um longo período de tempo, em que são construídas e reconstruídas relações entre diferentes tipos de situações, concepções, procedimentos e eventuais erros cometidos.

No que se refere ao ensino de taxa de variação, a construção de uma OD fundamentada na Teoria dos Campos conceituais deve ser estruturada em torno de um campo conceitual composto pelo conceito de taxa de variação, pelos conceitos e propriedades matemáticas que estão direta ou indiretamente relacionadas com a noção de taxa de variação e pelas relações, estruturas e operações cognitivas do sujeito frente às tarefas propostas que, por sua vez, devem ser situações que têm por finalidade levar o sujeito à construção de conhecimentos.

O professor deve ter clareza, ao estruturar uma OD para o ensino de taxa de variação, fundamentado em seu conhecimento do horizonte matemático, que as técnicas que podem ser mobilizadas na resolução das tarefas propostas podem ser justificadas por discursos teórico-tecnológicos fundamentados em outros conceitos, que precedem o estudo de taxa de variação como, por exemplo, pelos conceitos de razão, proporção, proporcionalidade e função, conforme destacamos na OM construída no item 4.1.

Na Teoria dos Campos Conceituais, o desenvolvimento cognitivo do sujeito em aprendizagem fundamenta-se, essencialmente, na conceitualização do real,

isto é, na “passagem dos conceitos-como-instrumentos para os conceitos-como-objetos” (D’AMORE, 2007, p. 209).

Diante disso, Vergnaud (1990) define conceito como uma terna de conjuntos, $C = (S, I, R)$ em que,

- S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito em jogo (o referente);
- I é o conjunto de invariantes que compreende as propriedades, relações e procedimentos necessários para definir este conceito (o significado);
- R é o conjunto de representações simbólicas que permitem relacionar o significado do conceito em jogo com suas respectivas propriedades (o significante).

Segundo o autor, para se estudar a construção e o modo como se utiliza um conceito em processos de ensino e de aprendizagem, se faz necessário considerar esses três conjuntos tanto de forma isolada, quanto simultaneamente. “Não há, em geral, uma correspondência biunívoca entre significante e significado, nem entre invariantes e situação. Não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações.” (VERGNAUD, 1990, p. 146, tradução nossa)⁸³.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação, o conceito de taxa de variação deve ser estruturado em termos destes três conjuntos, em que as situações que dão sentido ao conceito em jogo devem ser tarefas, ou tipos de tarefas, cujas técnicas de resolução irão emergir, em um primeiro momento, do conjunto de invariantes operatórios do sujeito em aprendizagem que, por sua vez, se tornam explícitos quando são exploradas as diferentes representações que compreendem as propriedades deste conceito, algébrica, tabular e gráfica.

Diante disso, e do fato de que são as situações que dão “sentido” ao conceito, sendo elas, e não o conceito, a principal entrada de um campo conceitual, e entendendo que este “sentido” emerge das relações do sujeito em aprendizagem com as situações e com os significantes, isto é, dos esquemas evocados no sujeito

⁸³ Il n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations. (VERGNAUD, 1990, p. 146).

por uma situação ou por um significante, Vergnaud (1990, p. 136, tradução nossa)⁸⁴ define um esquema como uma “organização invariante de comportamentos para um determinado tipo de situação.” Segundo o autor, são nos esquemas que estão contidos os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito frente a determinadas situações seja operatória.

Um esquema não é um todo organizado, e sim uma função temporizada de argumentos que permite ao sujeito tomar atitudes e decisões frente a situação em jogo. Mas isso só é possível porque um esquema comporta quatro componentes fundamentais:

Invariantes operatórios (conceito-em-ação e teorema-em-ação) que guiam o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação, e a apreensão da informação sobre a situação a tratar;

Antecipações dos objetivos almejados, dos efeitos a considerar e das eventuais etapas intermediárias;

Regras de ação do tipo se... então... que permitem gerar a sequência de ações do sujeito;

Inferências (ou raciocínios) que permitem ‘calcular’ as regras e antecipações a partir de informações e do sistema de invariantes operatórios que dispõe o sujeito. (VERGNAUD, 1990, p. 159, tradução nossa)⁸⁵.

Desses quatro componentes, são os invariantes operatórios (teorema-em-ação e conceito-em-ação) que, de acordo com o autor, fundamentam a abordagem de uma situação. As expressões conceito-em-ação e teorema-em-ação referem-se aos conhecimentos contidos nos esquemas do sujeito, “um conceito-em-ação não é um conceito, nem um teorema-em-ação é um teorema, uma vez que são necessariamente explícitos” (FRANCHI, 2012, p. 208).

⁸⁴ appelons 'schème' l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée. (VERGNAUD, 1990, p. 136).

⁸⁵ Des invariants opératoires (concepts-em-acte et théorèmes-em-acte) qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation, et la prise d'information sur la situation à traiter ;

Des anticipations du but à atteindre, des effets à attendre et des étapes intermédiaires éventuelles ;

Des règles d'action de type si... alors... qui permettent de générer la suite des actions du sujet ;

Des inférences (ou raisonnements) qui permettent de ‘calculer’ les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet. (VERGNAUD, 1990, p. 159).

A noção de conceito-em-ação, tal como propõe Vergnaud (1990), refere-se a um objeto, um predicado, uma condição, uma categoria de pensamento tida como relevante. No âmbito da gama de conceitos disponíveis no repertório de conhecimentos do sujeito, ele elege uma pequena quantidade, ou apenas um, para cada ação, daí emerge um conceito-em-ação que, por sua vez, pode ser adequado, ou não, para a situação em jogo.

Os conceitos-em-ação se articulam por meio de teoremas-em-ação, que são proposições tidas como verdadeiras sobre o real. Segundo Vergnaud (1990), há uma relação dialética entre essas duas noções, visto que os conceitos são os ingredientes dos teoremas e os teoremas são propriedades que dão significado aos conceitos. De modo análogo a noção de conceito-em-ação, os teoremas-em-ação também estão implícitos nas ações do sujeito, podendo se tornar explícitos na medida com que ele avança no processo de aprendizagem.

É comum os estudantes mobilizarem conceitos e teoremas-em-ação na abordagem de uma determinada situação sem uma justificativa plausível para fazê-lo. Na maioria das vezes, eles não são capazes de explicitar, justificar ou expressá-los em linguagem natural, condicionando-os a permanecer totalmente implícitos. Todavia, são estes invariantes operatórios que condicionam, em um primeiro momento, a abordagem de uma determinada situação e que, na medida em que os processos de ensino e de aprendizagem avançam, podem se tornar explícitos. É a partir daí que os conceitos e teoremas-em-ação podem ser validados ou não como verdadeiros conceitos e teoremas científicos. Mas isso, conforme já mencionamos, ocorre ao longo de um amplo período de tempo, que pode perdurar por vários anos ou décadas.

São os esquemas, onde estão contidos os conceitos e teoremas-em-ação, que permitem que os atos de um sujeito inserido no processo de aprendizagem de taxa de variação sejam operacionais, visto que ele os mobiliza na construção e no manuseio de técnicas mais econômicas e eficazes para resolução das tarefas em jogo. Uma vez que os conceitos e teoremas-em-ação referentes a ideia de taxa de variação tornam-se explícitos, cabe ao professor mediar o processo de construção de conhecimentos acerca desta ideia, de modo que as diferentes interações entre

os conceitos e teoremas-em-ação mobilizadas pelo sujeito possam fundamentar a conceitualização da noção de taxa de variação.

Na Teoria dos Campos Conceituais o professor é o principal mediador do processo de construção de conhecimentos. Cabe a ele prover situações “ricas” e “fecundas” aos estudantes, auxiliando-os na construção de seus invariantes operatórios, esquemas e representações. Um teorema, um conceito ou uma proposição; tornam-se significativos para o aluno por meio de uma variedade de situações propostas pelo docente que, em última instância, tem o papel de mediar a construção desses significados.

4.2.4 A NOÇÃO DE CONTRATO DIDÁTICO

Também introduzida por Guy Brousseau, a noção de contrato didático compreende as relações que se estabelecem, implícita ou explicitamente, entre o professor e seus alunos mediante os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Por contrato didático, o autor entende o conjunto de comportamentos do professor esperado pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos esperado pelo professor.

Para resolver uma tarefa, os estudantes não somente buscam interpretar o que é pedido por escrito ou oralmente. Eles também levam em conta o modo de ensinar do educador que, por sua vez, espera certos comportamentos da turma. Essa tensão de expectativas, impalpável, invisível e não verbalizada, é o chamado contrato didático, um vínculo entre quem leciona e os que estudam, para o planejamento e a execução de situações de ensino e de aprendizagem. (BROUSSEAU, 2013, p. 5).

Essa noção, a princípio, refere-se a uma determinada situação, é específica da atividade matemática em jogo, e pode ser modificada em função dos conhecimentos e dos saberes que a justificam, visto que estes podem evoluir e se transformar. Além disso, um contrato didático compreende as relações entre um conjunto de situações, é um meio para gerir o tempo didático em sala de aula que depende, veementemente, da estratégia de ensino adotada, adaptando-se aos diferentes contextos que perpassam pelas escolhas pedagógicas feitas pelo professor, pelos objetivos do processo de ensino, pelos problemas propostos aos alunos, pelos métodos de avaliação empregados, etc.

Nas palavras de Brousseau (2013), um contrato didático para ser firmado deve estar fundamentado em protocolos bem definidos e envolver o professor e os estudantes simultaneamente. O comprometimento de ambos é fundamental para um bom andamento dos processos de ensino e de aprendizagem. Contudo, esse contrato não é rígido nem imutável, e em muitos casos é necessário que ocorram rupturas e momentos de renegociação contratual para que aconteça o aprendizado, em que o conhecimento em construção se mostra o meio mais eficiente para resolver as crises provocadas por essas rupturas, que não são previstas nem descritas com antecedência.

O momento dessas rupturas ocorre como em um contrato implícito que relaciona o educador e o educando: o aluno se surpreende quando não consegue resolver um problema e se revolta porque o professor não foi capaz de capacitá-lo, o professor se surpreende por estimar serem razoavelmente suficientes seus ensinamentos... revolta, negociação, investigação de um novo contrato do novo 'estado' de conhecimentos... adquiridos e considerados. (BROUSSEAU, 1986, p. 13, tradução nossa)⁸⁶.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação, independente do referencial teórico adotado, seja a TSD, a TAD, a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria dos Campos Conceituais, ou qualquer outra teoria, o professor deve ter clareza da existência de um contrato didático que compreende suas expectativas em relação aos alunos e vice-versa, e que regula o tempo didático em sala de aula. Cabe ao docente estruturar as situações de ensino para que as quebras de contrato (rupturas) ocorram da maneira mais natural possível, de modo que os momentos de renegociação contratual fundamentem/condicionem o bom andamento dos processos de ensino e de aprendizagem, em que a construção dos conhecimentos acerca da noção de taxa de variação é condição necessária para superar as crises provocadas por tais quebras.

O contrato didático, segundo Silva, B. (2012), existe, necessariamente, em função do aprendizado dos estudantes, e a cada nova fase do processo de construção de conhecimento este contrato é negociado e renegociado

⁸⁶ Por lo tanto, al momento de esas rupturas todo sucede como si un contrato implícito ligara a enseñante y enseñado: sorpresa del alumno que no sabe resolver un problema y que se subleva de que el maestro no haya sabido capacitarlo, sorpresa del maestro que estimaba razonablemente suficientes sus prestaciones... revuelta, negociación, investigación de un nuevo contrato que depende del nuevo « estado », de conocimientos... adquiridos y considerados. (BROUSSEAU, 1986, p. 13).

inconscientemente pelos parceiros da relação dialética (professor e alunos). Esses momentos de negociação e renegociação contratual “tem por consciência, às vezes, a descaracterização dos conteúdos matemáticos e dos objetivos de aprendizagem, pois o professor, querendo que seus alunos acertem, tende a facilitar a tarefa de diferentes maneiras.” (ALMOULOUD, 2007, p. 93). Tal prática do professor é o que Brousseau (1986) designa por “efeito de contrato”, que compreende verdadeiras rupturas de contrato, gerando grande parte das dificuldades dos alunos, uma vez que impedem a autêntica aprendizagem.

Os “efeitos de contrato”, em essência, trazem em seu bojo o que os psicólogos denominam de fenômeno das expectativas, que corresponde as expectativas do professor em relação a classe ou até mesmo a um aluno. De acordo com Brousseau (1986), esse fenômeno não pode ser evitado, corresponde a uma espécie de acordo tácito entre o professor e a classe, ou um aluno, em que o docente limita suas exigências em relação a imagem que faz da classe, ou desse aluno, e este, por sua vez, limita-se à imagem que o professor fez a seu respeito. Os principais efeitos de contrato analisados por Brousseau (1986) são o efeito Topázio, o Jourdain, o deslize metacognitivo, o uso abusivo da analogia e o envelhecimento das situações de ensino.

O efeito Topázio ocorre quando, ao perceber que o estudante tem dificuldades na resolução da situação em jogo, o professor propicia condições para que ele as supere sem muito esforço, ou seja, o professor “facilita” a situação para que o aluno alcance o objetivo almejado *a priori*, o que minimiza o engajamento do estudante frente ao processo de aprendizagem. Essa atitude docente, embora muitas vezes inconsciente, muda drasticamente os objetivos de aprendizagem da situação proposta, visto que, conforme destaca Brousseau (1997, p. 35), os conhecimentos necessários para produzir tais respostas mudam, assim como sua significação. Ao facilitar, cada vez mais, os problemas propostos de modo a obter significação máxima para o máximo de alunos possível, os objetivos anteriormente visados desaparecem por completo.

O efeito Jourdain, que pode ser entendido como uma variação do efeito Topázio, caracteriza-se quando o professor interpreta um comportamento trivial do estudante como uma autêntica manifestação de um saber científico, evitando o

debate de conhecimentos com o estudante e, eventualmente, o fracasso no ensino e a não aprendizagem. Em termos de sala de aula, cada membro da relação dialética (estudante e professor) se dá por satisfeito ao resolver a situação sem grandes entraves, o que termina por desvirtuar a construção do conhecimento em jogo. Esse efeito é condicionado a uma ruptura de contrato ocasionada, exclusivamente, pelo professor.

O deslize metacognitivo ocorre quando, ao se defrontar com o iminente fracasso de uma situação, o professor se põe a apresentar justificativas para continuá-la e a tomar suas próprias explicações e métodos heurísticos como objetos de estudo em detrimento do verdadeiro conhecimento a ser construído. Segundo Brousseau (1997, p. 36, tradução nossa)⁸⁷, “a substituição de um objeto de ensino por outro é comum. O professor que embarca em um percurso lógico para ‘explicar’ um erro de raciocínio, dando início a este processo.” Nas palavras do autor, este efeito, embora causado exclusivamente pelo professor, ocorre de forma ingênua e incontrolável, visto que cabe ao docente ensinar a todo custo, e quanto mais os estudantes estão envolvidos na extensa relação dialética, o processo de ensino fica, cada vez mais, fora de controle.

Quanto as analogias, Brousseau (1986) salienta que é sempre bom utilizá-las para auxiliar no entendimento, compreensão e na construção de um conhecimento em jogo, mas seu uso abusivo pode descaracterizá-lo, tornando-as um potencial produtor de “efeito Topázio”. Segundo Almouloud (2007), processos de ensino e de aprendizagem por analogias correspondem a um método de apresentação do saber e construção do conhecimento que só favorece a memorização.

Para Brousseau (1986), essa é uma prática comum; se existem alunos que fracassam em sua aprendizagem, é natural que o professor lhes dê outra oportunidade de aprendizagem do mesmo assunto, por meio de um novo problema que se assemelha ao antigo. Todavia, a busca por soluções para este novo problema quando feita por meio de analogias, consiste, comumente, na mobilização

⁸⁷ Ce remplacement d'un objet d'enseignement par un autre est fréquent. Le professeur qui se lance dans un cours de logique pour “expliquer ” une erreur de raisonnement commence ce processus. (BROUSSEAU, 1997, p. 36).

da solução do problema antigo em detrimento de uma releitura do problema atual, o que, segundo o autor, não remete ao aprendizado, implica unicamente no reconhecimento de “pistas” ou “caminhos” que conduzem à solução, talvez completamente exógenos e descontrolados, mas que é a solução que o professor espera que os alunos produzam.

Quanto ao envelhecimento das situações de ensino, Brousseau (1986) salienta que esse efeito ocorre quando o professor se defronta com dificuldades para reproduzir uma situação já explorada, mesmo no caso de turmas diferentes ou de alunos novos. De acordo com o autor, a reprodução exata do que foi feito anteriormente nem sempre produz os mesmos efeitos ou resultados, e nem sempre o que foi feito antes é o mais adequado para o atual contexto. Diante disso, emerge a necessidade, por parte do docente, de reformular a situação anterior, seja de modo estrutural ou apenas localmente, gerando uma renegociação do contrato didático. “A atividade de ensino em si, requer um intenso investimento pessoal por parte do professor, e este investimento não pode ser mantido, a menos que seja renovado.” (BROUSSEAU, 1997, p. 39, tradução nossa)⁸⁸.

É de responsabilidade do professor, ao explorar uma OD para o ensino de taxa de variação, evitar, ao máximo, ajudar ou explicitar estratégias para auxiliar os estudantes quando estes se defrontam com dificuldades para resolver a tarefa em jogo. Cabe aos alunos o empenho para “caminhar com seus próprios pés”, e cabe ao docente mediar esses “passos”. O professor também deve propiciar momentos em que ocorram debates entre ele e os estudantes acerca dos conhecimentos em construção, de modo a evitar que determinados comportamentos dos alunos sejam interpretados como verdadeiras manifestações do saber que fundamenta a ideia de taxa de variação.

É oportuno o uso de analogias como estratégias didáticas para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação. Todavia, o professor deve ter clareza de que o uso abusivo dessas estratégias pode descaracterizar os conhecimentos em jogo, e que a reprodução de uma situação-problema ou de uma

⁸⁸ l'activité d'enseignement elle-même réclame un investissement personnel intense de la part du professeur et cet investissement ne peut se maintenir que s'il est renouvelé. (BROUSSEAU, 1997, p. 39).

sequência didática já aplicada e validada nem sempre gera os mesmos efeitos ou resultados, pois mesmo que o contexto, o meio ou até os sujeitos não sejam os mesmos, os efeitos e resultados dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação são subjetivos.

Mas e se por acaso o estudante não entrar no jogo ou, mesmo entrando, não conseguir construir/mobilizar as técnicas adequadas para resolver as tarefas propostas? Nesse momento, conforme ressaltam Chevallard, Bosch e Gascón (1997), emerge um sistema de obrigações recíprocas referente ao conhecimento matemático que se pretende construir, denominado por Brousseau (1986) de paradoxos do contrato didático, que remete ao fato de que, embora o contrato didático se assemelhe a um “contrato jurídico”, na realidade, não é um verdadeiro contrato por três razões, a saber:

Primeiro, porque o contrato didático não pode ser totalmente explícito, uma vez que se refere, exclusivamente, aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. A natureza de um conhecimento, ou mesmo sua aquisição/construção, não podem ser objeto de acordo entre dois protagonistas, esse tipo de acordo não é passível de ser explicitado, não há cláusulas de ruptura e possíveis momentos de renegociação que podem ser previstas.

Segundo, porque caso o contrato seja firmado sobre regras comportamentais do professor e dos alunos previamente estabelecidas, o fato de segui-las rigorosamente condenaria os processos de ensino e de aprendizagem ao fracasso.

Na verdade, o contrato oferece aos professores e alunos um paradoxo: deve-se aceitar que, como indicado por uma cláusula no contrato, o professor "ensine" os resultados para o estudante, então este não pode estabelecê-los por si só e, portanto, não aprende Matemática. O aprendizado não descansa, na realidade, sobre o bom funcionamento do contrato, mas em suas rupturas. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 220, tradução nossa)⁸⁹.

⁸⁹ De hecho el contrato pone a profesor y alumno ante una paradoja: si aceptan que, como indica una cláusula del contrato, el profesor "enseñe" los resultados al alumno, entonces éste no puede establecerlos por sí mismo y, por tanto, no aprende matemáticas. El aprendizaje no descansa, en realidad, sobre el buen funcionamiento del contrato sino sobre sus rupturas. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 1997, p. 220).

Terceiro, porque tanto o professor quanto os alunos aceitam, ainda que implicitamente, determinadas cláusulas contratuais referentes a ações e procedimentos que não estão ao seu alcance, que não podem ser controladas, o que implica em um caso de “quebra de contrato” ou “irresponsabilidade jurídica”.

Em suma, Brousseau (1986) sugere que, em detrimento de se falar em um contrato didático previamente estabelecido, com suas cláusulas, parágrafos e responsabilidades definidas *a priori*, deve-se falar no processo de busca de um contrato hipotético. É esse processo que, nas palavras do autor, representa as observações e o que deve ser modelizado, elucidado e explicitado em relação aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Segundo o autor,

A ilusão de que existe um contrato é indispensável para que a relação se dê e, eventualmente, tenha êxito. Cada um, o professor e o aluno, tem uma ideia do que o outro espera dele e do que cada um pensa a respeito do que o outro pensa... e esta ideia cria a possibilidade de intervenção, de devolução da parte didática das situações e de institucionalização. (BROUSSEAU, 1999, p. 25, tradução nossa)⁹⁰.

É esta ilusão que, segundo o autor, permite que o professor ensine e que os alunos aprendam um saber definitivo, de modo que possam mobilizá-lo em situações posteriores. O contrato didático não depende de uma escolha docente, ele está presente e é necessário para o “bom” andamento dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática e, em particular, no caso da presente pesquisa, para o “êxito” nos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação.

4.2.5 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO

A noção de obstáculo foi introduzida no âmbito da Didática da Matemática por Brousseau em 1976, e sistematizada e consolidada como uma noção fundamental dessa ciência nos anos seguintes. Segundo o autor, um obstáculo se manifesta por erros que não são cometidos ao acaso, que são fugazes, aleatórios, reproduzíveis e persistentes. Nas palavras do autor,

Um erro não é somente um efeito da ignorância, da incerteza, da crença nas teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem, mas sim o efeito

⁹⁰ la ilusión de que hay un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él y de lo que cada uno piensa de lo que el otro piensa... y esta idea crea las posibilidades de intervención, de devolución de la parte a-didáctica de las situaciones y de la institucionalización. (BROUSSEAU, 1999, p. 25).

do conhecimento prévio, que teve seu interesse, seu êxito, mas que, agora, se revela falso, ou simplesmente inadequado. Erros desse tipo não são erráticos e imprevisíveis, são constituídos de obstáculos. Tanto na ação do professor quanto na do aluno, o erro é constitutivo do senso de conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1976, p. 104, tradução nossa)⁹¹

Nessa direção, a noção de obstáculo assume um papel crucial no escopo da Didática da Matemática porque trata da construção de um conhecimento que perpassa, necessariamente, por conhecimentos prévios.

D'Amore (2007, p. 211), fundamentado nas ideias de Brousseau, sintetiza esta noção da seguinte maneira:

- é preciso sempre ter presente que um obstáculo não é uma falta de conhecimento, mas é um conhecimento;
- o aluno utiliza esse conhecimento para responder adequadamente, em um contexto conhecido, já encontrado;
- se o aluno tentar usar esse conhecimento fora do contexto conhecido, já encontrado, fracassa, gerando respostas incorretas; percebe-se então que necessita de pontos de vista diferentes;
- o obstáculo produz contradições, mas o estudante resiste a elas; parece necessitar então de um conhecimento mais geral, maior, mais profundo, que generalize a situação conhecida e a resolva, e que inclua a nova, na qual fracassou; é preciso que esse ponto se torne explícito e que o estudante seja consciente disso;
- mesmo depois de superado, esporadicamente, o obstáculo reaparece.

Dentre as diversas origens para os obstáculos defrontados em um sistema didático, Brousseau (1976) distingue três principais, caracterizando-as em epistemológicas, didáticas e ontogênicas.

Obstáculos de origem epistemológica são aqueles dos quais não se pode nem se deve escapar, se referem a natureza do conhecimento em jogo. Podem ser estudados “no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação. Em ambos os casos, esse estudo não é fácil.” (BACHELARD, 1996, p. 21). Esse tipo de obstáculo é inerente ao saber em jogo, e pode ser identificado na história de sua evolução no campo da Matemática, nas possíveis dificuldades que foram defrontadas tanto em sua compreensão quanto em sua utilização.

⁹¹ L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fautive, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (BROUSSEAU, 1976, p. 104).

De acordo com Almouloud (2007, p. 139), diferentes campos de pesquisa (epistemológico, didático e histórico) identificam as origens de diversos obstáculos de caráter epistemológico, sendo a maioria deles, ainda hoje, recorrentes e típicos nos processos de ensino e de aprendizagem, sendo estáveis no passar do tempo.

No que tange os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, Rezende (2003, p. 282) adverte que os conceitos de variável e função, “tal como são apresentados no Ensino Médio de Matemática, constituem verdadeiras fontes de obstáculos” para a compreensão e construção de significado para esta noção. Segundo o autor, entender o papel desses dois conceitos na tecedura das ideias fundamentais do Cálculo auxilia, em um primeiro momento, a compreender tais obstáculos para, em seguida, se procurar meios de superá-los.

Nas palavras do pesquisador, o fato de não se explorar a noção de derivada como uma taxa de variação instantânea, tanto na Educação Básica quanto na superior, é um dos principais obstáculos epistemológicos à resolução de problemas de otimização e de taxas relacionadas. O fato de as noções de velocidade e de coeficiente angular não participarem efetivamente da construção de significado para o conceito de derivada como taxa de variação instantânea, segundo ele, também é gerador de obstáculos epistemológicos.

Com efeito, a definição formal de derivada, por exemplo, não terá sentido algum para o aluno, se não for consubstanciada com as redes de significações deste conceito com a geometria e com a física. Não são as ideias de velocidade e coeficiente angular, interpretações do conceito de derivada, mas, ao contrário, são elas, efetivamente, as ideias geradoras e construtoras do campo semântico da noção de derivada. (REZENDE, 2003. p. 391).

Já os obstáculos de origem didática são aqueles que parecem depender de uma escolha docente, de um currículo, de uma metodologia ou de uma determinada estratégia de ensino. Estes, são provocados por uma transposição didática, em que o docente “compra” essa escolha ou proposta de ensino e a coloca em prática, negligenciando os momentos de renegociação contratual, tal como propõe a noção de contrato didático. Obstáculos desse tipo “são, em sua maior parte, inevitáveis e inerentes à necessidade da transposição didática, embora seu reconhecimento permita ao professor rever a introdução escolhida para um determinado conceito.” (ALMOULOU, 2007, p. 142).

Em um OD para o ensino de taxa de variação o professor deve ter clareza de que os efeitos de transposição didática provocados por suas escolhas podem ocasionar obstáculos de origem didática nos processos de ensino e de aprendizagem. Cabe ao docente evitar, sempre que possível, que determinados efeitos de contrato se tornem obstáculos didáticos impeditivos à construção de significado para a noção de taxa de variação.

Os obstáculos de origem ontogênica, de acordo com Brousseau (1976, p. 108, tradução nossa)⁹², “são aqueles que ocorrem por causa de limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em algum momento de seu desenvolvimento: desenvolve-se conhecimentos adequados aos seus meios e objetivos.” Cada sujeito em aprendizagem desenvolve capacidades e constrói conhecimentos adequados a sua “idade mental”. Assim, as competências e habilidades assimiladas são adequadas a essa “idade”, então, em relação a determinados conhecimentos, essa “idade” pode ser insuficiente para sua construção e assimilação, o que a torna um obstáculo de origem ontogênica, por exemplo.

Além disso, ainda há a ocorrência de obstáculos técnicos que, de acordo com Almouloud (2007, p, 145), “se apresentam, também, como causa de erros ou da incapacidade de compreender certos tipos de problemas, surgem quando a complexidade da tarefa está acima da capacidade de atenção do aluno.”

Cabe ao professor, ao elaborar uma OD para o ensino de taxa de variação, fundamentado em seus conhecimentos do conteúdo e dos alunos, do horizonte matemático e do currículo, propor tarefas que sejam adequadas ao repertório de conhecimentos matemáticos de seus alunos, de modo a evitar a ocorrência de obstáculos ontogênicos ou técnicos, como os que ocorreram nas pesquisas de Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015) em que os autores não previram que seus sujeitos de pesquisa não possuíam determinados conhecimentos matemáticos para resolver as tarefas propostas, ocasionando obstáculos técnicos que requereram intervenções locais.

⁹² sont ceux qui surviennent du fait des limitations (néurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement: il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts. (BROUSSEAU, 1976, p. 108).

Ante estas, e outras possíveis origens para os obstáculos presentes em um sistema didático, há um consenso entre educadores matemáticos e matemáticos, de que em processos de ensino e de aprendizagem de Matemática as dificuldades e obstáculos são múltiplos, e tentar evitá-los apenas os reforça. É crucial identificar e estudar os obstáculos e suas origens, de modo que se possa, sempre que possível, superá-los. É de vital importância, principalmente, encontrar e estudar aqueles que são de origem epistemológica, visto que são eles que estão na gênese da construção do conhecimento em jogo.

Diante disso, em um OD para o ensino de taxa de variação é de suma importância identificar e estudar os diferentes obstáculos que possam surgir em consonância com suas origens, de modo que o ato de superá-los condicione o bom andamento dos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático. Concordamos com Rezende (2003, p. 325), para quem “os obstáculos epistemológicos originados em determinados conceitos do Cálculo antecipam, de certo modo, algumas das dificuldades encontradas pelos nossos estudantes.” Então, identificar e estudá-los é crucial para obter “êxito” nos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação e, conseqüentemente, da própria Matemática.

De acordo com Brousseau (1976), o estudo dos obstáculos presentes em um sistema didático perpassa, necessariamente, por duas vertentes, uma análise histórica e uma análise dos erros dos estudantes. Na análise histórica, é a identificação, na “evolução” do saber em jogo, de uma ruptura, de uma descontinuidade, de uma mudança de concepção etc., que fundamenta a suposição de que este saber possui, em seu interior, um obstáculo epistemológico. Já a análise dos erros dos alunos, além de auxiliar a identificação de obstáculos epistemológicos, propicia a identificação de obstáculos de outras origens, visto que existem obstáculos para os estudantes que não tem, necessariamente, vestígios na “evolução” do saber em jogo.

Uma vez identificados estes obstáculos, cabe ao professor propor tarefas e mediar, com base em seus conhecimentos do conteúdo e do ensino, a construção/mobilização de técnicas de resolução que constituam meios de superá-los, em que a construção e utilização do conhecimento matemático em jogo é a

estratégia mais econômica e eficaz para isso, tal como proposto por Brousseau (1986) ao dissertar acerca da noção de contrato didático.

4.2.6 METODOLOGIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática, no âmbito da Didática da Matemática, tem dupla funcionalidade, atua com uma metodologia de ensino, fundamentada em resultados de investigações externas a sala de aula, e como uma metodologia específica de pesquisa. Nas palavras de Artigue (2009, p. 5, tradução nossa)⁹³ “de um ponto de vista teórico, [...] a Engenharia Didática tem combinado produtivamente a Teoria das Situações Didáticas com outras abordagens teóricas desenvolvidas em estreita conexão com ela”, e tem por finalidade a análise dos objetos de estudo da Didática da Matemática.

Como metodologia de ensino, a Engenharia Didática se caracteriza pela concepção, realização e análise de sequências de ensino, isto é, pelas interações didáticas que emergem quando se elabora uma sequência de didática para o ensino de determinado objeto matemático.

A Engenharia Didática se caracteriza também, em comparação com outros tipos de investigações baseadas na experimentação em sala de aula, pelo registro no qual se encontra e pelas formas de validação para as quais esta associada. De fato, as investigações que recorrem a experimentos em sala de aula se situam, geralmente, dentro de uma abordagem comparativa, com validação externa fundamentada na comparação estatística do desempenho de grupos experimentais e grupos de controle. Este não é o caso da Engenharia Didática, que se encontra, no entanto, no registro de estudos de caso cuja validação interna é essencialmente baseada na comparação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. (ARTIGUE, 1995, p. 37, tradução nossa)⁹⁴.

No processo da Engenharia Didática, Artigue (1995) delimita quatro fases fundamentais: a primeira é constituída pelas análises preliminares, a segunda pela

⁹³ From a theoretical point of view, [...] didactical engineering has productively combined affordances from the TDS with those of other theoretical approaches developed in close connection to it. (ARTIGUE, 2009, p. 5).

⁹⁴ La metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada. De hecho, las investigaciones que recurren a la experimentación en clase se sitúan por lo general dentro de un enfoque comparativo con validación externa, basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control. Este no es el caso de la ingeniería didáctica que se ubica, por el contrario, en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*. (ARTIGUE, 1995, p. 37).

concepção e análise *a priori* da sequência didática, a terceira é o momento de experimentação e a última compreende a análise *a posteriori* e validação da sequência didática.

As análises preliminares constituem a fase de concepção da Engenharia, que se passa não somente em um quadro teórico geral e nos conhecimentos didáticos previamente estabelecidos, mas também em um determinado número de análises iniciais que compreendem alguns momentos específicos como, por exemplo, a análise da Organização Matemática em jogo, a análise epistemológica acerca do objeto matemático, a análise ecológica referente ao ensino desse objeto matemático e seus efeitos, a análise dos conhecimentos prévios dos estudantes, de suas concepções e dos possíveis obstáculos que possam surgir nos processos de ensino e de aprendizagem, a análise do meio em que será aplicada a sequência didática etc. Tudo isso, levando em consideração os objetivos específicos dos processos de ensino e de aprendizagem, visto que são esses objetivos que determinam o grau de profundidade dessas análises.

O ato de realizar estas análises, indiferente do referencial teórico adotado, compreende a mobilização dos diferentes conhecimentos constitutivos do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática. Nas análises preliminares das pesquisas de Pereira (2009), Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015), por exemplo, é possível perceber, ainda que implicitamente, a mobilização das quatro componentes fundamentais do esquema da Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática em consonância com suas possíveis interações e a mobilização dos conhecimentos do horizonte matemático, dos contextos e do currículo.

Segundo Almouloud (2007), a expressão “análises preliminares” não remete, exclusivamente, as análises que antecedem a concepção e a análise *a priori* da sequência, a temporalidade estabelecida pelo verbo “preliminar” é relativa, no percurso das fases seguintes é possível retomá-las. Segundo o autor, estas análises permitem a identificação das variáveis didáticas que serão explicitadas, mobilizadas e manipuladas nas próximas fases.

A fase de concepção e análise *a priori* da sequência didática é o momento em que, com base nas análises preliminares, é confeccionada e analisada a

sequência didática a partir de variáveis pertinentes ao sistema sobre o qual ocorrem os processos de ensino e de aprendizagem.

Nessa fase, destacam-se, além dos conhecimentos do conteúdo, didáticos, pedagógicos e tecnológicos (caso o professor opte pelo uso de alguma tecnologia digital) com suas possíveis interações, aqueles voltados aos alunos e suas características. Somente o professor conhece seus alunos e suas peculiaridades para “prever” e “descrever” seus possíveis comportamentos frente a sequência didática proposta, seus conhecimentos prévios, os obstáculos que possam, ou não, surgir nos processos de ensino e de aprendizagem e somente ele pode gerenciar, ainda que implicitamente, um contrato didático entre as partes (professor e alunos).

A fase de experimentação, é o momento de realização do experimento, é quando se aplica a sequência didática construída, seguindo com o planejado *a priori* e, caso necessário, corrigindo e/ou adaptando-a a realidade dos processos de ensino e de aprendizagem por meio de análises e intervenções locais. Essa fase é seguida pela fase de análise *a posteriori*, que se baseia nos dados obtidos durante a experimentação, nas observações realizadas durante a aplicação da sequência didática e nas produções dos estudantes.

A análise *a posteriori* compreende o conjunto de resultados que constam da seleção dos dados coletados que, muitas vezes, são complementados por dados obtidos por meio de outras metodologias, internas ou externas, como, por exemplo, questionários ou entrevistas.

A análise dos protocolos obtidos na análise *a posteriori* confrontada com a análise *a priori* fundamenta a fase de validação, momento em que se validam ou refutam as hipóteses levantadas no início da Engenharia. “O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados.” (ALMOULOU, 2007, p. 177).

De modo a auxiliar na compreensão e análise de uma Engenharia, Artigue (1995, p. 42) distingue dois tipos de variáveis referentes ao sistema didático em que ocorrem os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto matemático: as variáveis macrodidáticas ou globais, referentes a organização global da

engenharia, e as variáveis microdidáticas ou locais, referentes a organização local da Engenharia, ou seja, a organização de uma fase ou seção da Engenharia.

Dependendo do conteúdo matemático em jogo, estes dois tipos de variáveis podem ser tanto de ordem geral quanto específicas, e suas análises serão realizadas em três dimensões: a epistemológica, que se refere ao saber em jogo, a cognitiva, relacionada a aprendizagem dos estudantes, e a didática, que se refere ao processo de ensino.

Em uma OD para o ensino de taxa de variação, as análises realizadas na dimensão epistemológica compreendem a essência dos processos de ensino e de aprendizagem, e condicionam o estudo da OM construída *a priori* ou em construção, enquanto as análises na dimensão cognitiva compreendem, especificamente, o processo de aprendizagem dos estudantes e as análises didáticas referem-se ao processo de ensino, são voltadas ao professor e fundamentam-se em conhecimentos específicos para o ensino de taxa de variação.

Conforme já referido, a originalidade da Engenharia Didática constitui-se no fato de seu processo de validação ser essencialmente interno, e esse processo, por sua vez, se instaura desde a análise *a priori* das situações didáticas, que deve ser concebida no sentido de uma análise de controle, cuja finalidade “é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar o comportamento dos alunos e seu significado” (ARTIGUE, 1995, p. 45, tradução nossa)⁹⁵, baseando-se, essencialmente, em um conjunto de hipóteses, em que a validação está diretamente relacionada com o confronto que ocorre na quarta fase, entre análise *a priori* e análise *a posteriori*.

4.2.7 NOSSAS CONSIDERAÇÕES

São essas teorias, noções e metodologias que, quando amalgamadas, constituem, em um primeiro momento, os conhecimentos didáticos para o ensino de taxa de variação nos moldes propostos por Lima e Silva (2015) e que vão ao

⁹⁵ es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. (ARTIGUE, 1995, p. 45).

encontro do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática confeccionado no capítulo anterior.

Temos ciência de que há conhecimentos específicos da Didática da Matemática que não foram contemplados na presente pesquisa. Para nós, os conhecimentos explorados nesse item são indispensáveis à prática docente, o professor deve conhecer, minimamente, as teorias, noções e metodologias aqui apresentadas, para elaborar e explorar uma OD para o ensino de taxa de variação ou de qualquer outro objeto matemático.

É evidente que, dentre as teorias apresentadas, o professor utilizará, intencionalmente, aquela na qual foi formado, ou aquela que ele tem maior familiaridade, para elaborar e explorar uma OD para o ensino de taxa de variação. Todavia, é de suma importância para o exercício pleno da docência que o professor não se limite, como também não restrinja sua prática docente à utilização de apenas um ou outro referencial teórico. Ele deve se libertar do pressuposto acrítico de sua formação e buscar conhecer outros referenciais teóricos e suas ferramentas, por meio de formações continuadas e/ou de estudos teóricos.

Cabe ao professor, fundamentado em seu conhecimento didático e nas interações deste com os demais conhecimentos que compõem o esquema da Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática, escolher o referencial teórico que melhor se adequa aos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, considerando o meio em que está inserido, os recursos disponíveis, o alunado e suas características, o currículo vigente, etc.

Somente o docente, embasado em seu conhecimento didático, pode estruturar uma OD para o ensino de taxa de variação que compreenda as teorias apresentadas e/ou suas possíveis articulações, de modo que o processo de estudo da OM construída no item anterior perpasse, necessariamente, pelos diferentes momentos de estudo definidos por Chevallard (1999).

Nas pesquisas de Silva, E. (2012) e Silva e Silva (2015), por exemplo, as OD construídas pelos autores, oriundas de processos de estudos de OM locais, foram fundamentadas na TSD, na Teoria de Registros de Representação Semiótica e em pressupostos da Engenharia Didática. Nas duas investigações os autores se propuseram a articular os referenciais teóricos em jogo em prol dos processos de

ensino e de aprendizagem de taxa de variação e concluíram que estes processos só obtiveram sucesso devido a autonomia que a TSD propiciou aos estudantes frente as situações propostas e por conta da mobilização simultânea de mais de um registro de representação, conforme propõe a Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Além disso, embora não fosse o foco do estudo dos pesquisadores, no decorrer dos experimentos sugeriram alguns obstáculos cuja origem poderia ter sido identificada a partir da análise dos erros dos estudantes ou, até, por meio de uma análise histórico/epistemológica acerca da evolução, constituição e utilização da noção de taxa de variação.

Outra pesquisa em que foi possível perceber a mobilização de conhecimentos didáticos para o ensino de taxa de variação nos moldes propostos por Lima e Silva (2015) foi a de Pereira (2009), que apesar de não ter sido fundamentada em referenciais teóricos específicos da Didática da Matemática, utilizou como aporte metodológico a Engenharia Didática para explorar os processos de ensino e de aprendizagem das noções de taxa de variação média e instantânea, cuja validação interna forneceu “indícios de que os estudantes de Ensino Médio são plenamente capazes de apropriarem-se desses conceitos tão importantes, tanto na Matemática quanto no Cálculo.” (PEREIRA, 2009, p. 166).

A OD elaborada por Lucas (2015), também fundamentada em teorias e metodologias da Didática da Matemática, compreendeu o processo de construção de conhecimentos acerca de noções fundamentais do Cálculo a partir o estudo de OM locais em torno da TAD, o que deu origem a uma OM regional, em que os saberes explorados perpassaram aqueles contemplados na OM construída no item anterior. A OD elaborada pela autora contemplou o significado da ideia de variação (taxa de variação média e instantânea), o estudo de equações de diferenças finitas, a construção e interpretação de modelos de variação discretos e contínuos, o significado da ideia de integral e a utilização do Teorema Fundamental do Cálculo.

Em todas as pesquisas apresentadas em nossa revisão de literatura que realizaram investigações com estudantes, indiferente dos referenciais teóricos e metodológicos adotados, foi possível perceber, ainda que implicitamente, vestígios de um contrato didático que regulou o tempo didático e as interações entre os

pesquisadores e os sujeitos de pesquisa. Na pesquisa de Matos (2013, p. 40), por exemplo, o autor relata que

ocorreu algumas vezes a sensação de que os alunos estavam preocupados em descrever o que o professor desejava como resposta. Estavam preocupados em saber se o exercício estava resolvido corretamente ou não. Em alguns momentos chegavam a perguntar “como” ou “o que” o professor gostaria que respondesse na atividade.

A relação dialética processo de ensino e processo de aprendizagem é, essencialmente, condicionada aos elementos e protocolos de um contrato didático estabelecido entre seus atores, professor e alunos. O professor, ao elaborar uma OD para o ensino de taxa de variação ou de um determinado objeto matemático, indiferente do referencial teórico adotado, cria certas expectativas em relação aos alunos, e estes, por sua vez, ao se defrontem com as tarefas que compõe a OD criam certas expectativas em relação ao professor e procuram resolvê-las de modo a atingir tanto as expectativas do professor quanto as suas.

Embora não tenhamos encontrado pesquisas que exploraram a ideia de taxa de variação na Educação Básica a partir da Teoria dos Campos Conceituais, é de suma importância, na elaboração e exploração de uma OD para o ensino deste objeto matemático, que o professor compreenda a necessidade de se colocar no campo conceitual dessa noção em detrimento de apenas se colocar diante do conceito de taxa de variação. O professor deve compreender que a construção e o modo como se deve mobilizar o conceito de taxa de variação em processos de ensino e de aprendizagem perpassa, necessariamente, por um conjunto de situações (o representante), por um conjunto de invariantes operatórios (o significado) e por um conjunto de representações (o significante).

Ante ao exposto até aqui, e uma vez apresentadas as teorias, noções e metodologias da Didática da Matemática que, quando estudadas, formam o conhecimento didático para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, no item seguinte passamos a estudar os conhecimentos tecnológicos para o ensino de taxa de variação nesse nível de escolaridade. Para isso, nos fundamentamos na noção de conhecimento tecnológico para o ensino proposta por Mishra e Koehler (2006) e no esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no capítulo anterior.

4.3 CONHECIMENTO TECNOLÓGICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO

Duval, em entrevista concedida para Freitas e Rezende (2013), quando questionado a respeito dos progressos no ensino e na aprendizagem de Matemática nas últimas décadas, enfatiza que estes foram irrisórios, enquanto as mudanças foram significativas.

Segundo o autor, a mudança mais significativa concerne aos ambientes informatizados, ao “tsunami de telas de computadores em todos os campos de atividade, sejam eles lúdicos, científicos, profissionais ou simplesmente domésticos.” (FREITAS; REZENDE, 2013, p. 27).

De acordo com o professor Jaime de Carvalho e Silva,

O Ensino da Matemática mudou por causa das ferramentas tecnológicas hoje disponíveis. A própria Matemática mudou. A sociedade também é imensamente diferente por causa da tecnologia. Significa que tudo então é mais fácil, eficaz e rápido? Não, a tecnologia não é o paraíso. (SILVA, J., 2011).

Tal mudança, para nós, embora tenha potencial para fazê-lo, ainda não provocou o “progresso desejável” nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática que, por sua vez, estão muito aquém dos progressos provocados em outras áreas do conhecimento, no dia a dia da população, nas práticas laborais, etc.

O fato desse “progresso” nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática não ocorrer como acontece em outras áreas do conhecimento e na sociedade em geral remete, em grande parte, à “tendência de olhar apenas para a tecnologia e não como ela é usada. Apenas a introdução de tecnologia no processo educativo não é suficiente” (MISHRA; KOEHLER 2006, p. 1018, tradução nossa)⁹⁶, se faz necessário compreender e estudar os impactos do uso dessa tecnologia em prol dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

Isto significa que somente a incorporação do recurso tecnológico como ferramenta didática é insuficiente para produzir melhoras na aprendizagem, sendo necessário transformá-lo em um verdadeiro

⁹⁶ a tendency to only look at the technology and not how it is used. Merely introducing technology to the educational process is not enough. (MISHRA; KOEHLER 2006, p. 1018).

dispositivo didático sob o controle do projeto das atividades. (LUCAS, 2015, p. 40, tradução nossa)⁹⁷.

O ato de transformar os recursos tecnológicos incorporados aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática em “verdadeiros dispositivos didáticos”, tal como propõe Lucas (2015), requer, necessariamente, por parte do professor, a mobilização de conhecimentos tecnológicos específicos, que vão além das tecnologias padrões, que compreendem, especificamente, as tecnologias digitais, tais como *softwares* dinâmicos de Matemática ou *softwares* que podem ser adaptados para o ensino e à aprendizagem dessa ciência, *internet*, calculadoras, aplicativos para celulares e *tablets*, etc.

No que se refere a noção de taxa de variação, há diversos *softwares* que podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem dessa noção. De acordo com Tall, Smith e Piez (2008), de todas as áreas da Matemática escolar, o Cálculo é a que tem recebido maior interesse e investimento tecnológico. Segundo os autores, “iniciativas em todo o mundo introduziram uma série de abordagens inovadoras de programação de algoritmos numéricos em várias línguas, para o uso de *softwares* gráficos para explorar conceitos de cálculo.” (TALL; SMITH; PIEZ, 2008, p. 1, tradução nossa)⁹⁸.

Tais iniciativas, de acordo com os autores, surgiram por diversos motivos como, por exemplo, pelo fato de o “ensino tradicional” de Cálculo não atingir os resultados esperados, pelo alto índice de reprovação nessa disciplina, pela falta de interesse dos estudantes ou, simplesmente, pela disponibilidade, cada vez maior, de tecnologias digitais.

Indiferente dos motivos que influenciaram estas iniciativas, há de convir que os recursos tecnológicos trazem em seu bojo inúmeros benefícios para os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo e, sobretudo, de Matemática.

⁹⁷ Esto significa que sólo la incorporación del recurso tecnológico como medio didáctico es insuficiente para producir mejoras en el aprendizaje, siendo necesario transformarlo en un verdadero dispositivo didáctico bajo el control del diseño de las actividades. (LUCAS, 2015, p. 40).

⁹⁸ Initiatives around the world have introduced a range of innovative approaches from programming numerical algorithms in various languages, to use of graphic *software* to explore calculus concepts. (TALL; SMITH; PIEZ, 2008, p. 1).

Na pesquisa de Villa-Ochoa (2012, p. 175, tradução nossa)⁹⁹, por exemplo, “a visualização proporcionada pelos *softwares Geogebra e Modellus* se converteu em um grande promotor da compreensão da noção de taxa de variação”, sem a qual, seria árduo a percepção/compreensão, por parte dos estudantes, dos fenômenos de variação explorados.

As demais pesquisas apresentadas em nossa revisão de literatura que exploraram os processos de ensino e de aprendizagem da noção de taxa de variação também utilizaram *softwares* dinâmicos de Matemática como ferramentas de auxílio para o estudo e construção de significado para essa noção.

Dentre os diferentes *softwares* utilizados, o uso do *Geogebra* se sobressaiu em relação aos demais. Silva, E. (2012), Villa-Ochoa, Jaramillo e Esteban (2011), Silva e Silva (2015) e Lucas (2015) utilizaram apenas o *Geogebra* como aporte tecnológico em suas pesquisas, enquanto Matos (2013) e Villa-Ochoa (2012) o combinaram com o *WolframAlpha* e com o *Modellus*, respectivamente.

Em nossa revisão bibliográfica, também verificamos a possibilidade do uso de outros *softwares* em favor dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação. André (2008), por exemplo, utilizou o *Graphmatica* como um organizador genérico para conceituar a ideia de taxa de variação a partir da noção de retidão local. Segundo a autora, a opção pelo uso do *Graphmatica* remete ao fato de que o *software* permite ao usuário realizar modificações na janela de entrada de modo que as mudanças correspondentes nos gráficos das funções estudadas sejam observadas instantaneamente.

Pereira (2009) utilizou como recurso tecnológico para auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação os organizadores genéricos *Mathlets*¹⁰⁰, enquanto Spina (2002) utilizou o Excel para construir as representações gráficas a partir dos dados coletados durante o experimento de modelagem.

⁹⁹ la visualización proporcionada por los softwares *GeoGebra* y *Modellus* se convirtió en un agente promotor de la comprensión de la noción de tasa de variación. (VILLA-OCHOA, 2012, p. 175).

¹⁰⁰ Um mathlet, de acordo com o Journal Online of Mathematics and its Applications (JOMA), é "uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática." Disponível em <https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/the-joma-mathlet-project-joma-mathlets-review-criteria>. Acesso em 28/05/2017.

Além destes, ainda há diversos *softwares* dinâmicos de Matemática que podem ser utilizados para auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação. Tall, Smith e Piez (2008) apresentam como exemplos o Mathematica, o Maple, o Derive, o Livemath e o Mathcad. Também há o Cabri-géomètre, considerado por Duval o mais emblemático, por conta de ter sido um dos primeiros *softwares* construídos com a finalidade de auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Há também o Winplot, o Matlab, o Scilab e outros *softwares* que podem ser utilizados em prol dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação.

São os conhecimentos acerca da interface, funcionalidade e características dos *softwares* aqui citados em consonância com os conhecimentos referentes ao uso de calculadoras gráficas, *internet*, aplicativos para celulares e *tablets* etc. que, para nós, estruturam o conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação.

É claro que o uso de um *software* ou de um determinado recurso tecnológico em detrimento de outro, ou o uso combinado de mais de um *software* não implica, necessariamente, em um bom andamento dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação ou de qualquer outro conteúdo matemático. Cabe ao professor, fundamentado em seu conhecimento tecnológico, escolher os recursos tecnológicos que melhor se adequam aos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, levando em conta os contextos social, cultural e educacional em que está inserido e as características do seu alunado.

Concordamos com Bitar (2006, p. 3), ao ressaltar que

Um *software* deve ser escolhido em função dos objetivos do professor, e não o contrário. Muitos professores nos perguntam: Qual o melhor *software* para a aprendizagem da Geometria na quinta série, por exemplo? Esse melhor *software* não existe, pois tudo dependerá das atividades realizadas com o material escolhido. Um *software*, considerado *a priori* bom pelas possibilidades que oferece, pode ser usado de forma a não contribuir com a construção do conhecimento. A escolha crítica de um material a ser utilizado com os alunos não pode ser feita separada da discussão sobre os objetivos da disciplina, as escolhas do professor e as crenças que esse tem acerca de como o aluno aprende.

Nessa perspectiva, o uso ingênuo de um *software*, sem relação com os objetivos dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, pode gerar determinados obstáculos didáticos que, em última instância, podem levar os

estudantes a levantar/formular hipóteses, conjecturas e propriedades errôneas a respeito do objeto matemático em jogo.

Cabe ao professor, então, adotar uma postura crítica em relação aos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação mediados por recursos tecnológicos, de modo que estes sejam adequados/ideais para fomentar tais processos. Para isso, e uma vez que a formação inicial docente não dá conta de subsidiar a construção do conhecimento tecnológico para o ensino, conforme já mencionamos na presente pesquisa, consideramos de suma importância a realização de formações continuadas com a finalidade de explorar as ferramentas e recursos disponíveis nos diferentes *softwares* aqui citados.

A análise da experiência em cursos de formação continuada, de diversos formatos, e da participação em cursos de formação inicial nos indica que a verdadeira integração da tecnologia somente acontecerá quando o professor vivenciar o processo, ou seja, quando a tecnologia representar um instrumento importante de aprendizagem para todos, inclusive, e, sobretudo, para o professor, afinal somos reflexo de nossas experiências. (BITAR, 2006, p. 11).

Convém também ressaltar que o professor não tem a obrigação de saber programar, e não cabe a ele conhecer e/ou dominar diferentes linguagens de programação. Os *softwares* aqui mencionados possuem uma linguagem de programação de alto nível, requerendo do docente apenas conhecimentos básicos acerca de técnicas de programação, estruturação e de análise de dados.

É evidente que o uso desses *softwares* em prol dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação demanda, necessariamente, a mobilização de outros conhecimentos do esquema da Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática, que perpassam pelos conhecimentos do conteúdo, didáticos e pedagógicos, e por todas suas interações. Assim, e uma vez que os conhecimentos do conteúdo e didáticos já foram eleitos, no item seguinte passamos a apresentar os conhecimentos pedagógicos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica. Para isso, nos fundamentamos na noção de conhecimento pedagógico para o ensino proposta por Shulman (1986) e no esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no capítulo anterior.

4.4 CONHECIMENTO PEDAGÓGICO PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO

Apesar da ampla disseminação das ideias propostas por Shulman (1986, 1987), a atenção voltada ao conhecimento pedagógico geral no âmbito da pesquisa em Educação Matemática ficou muito aquém daquela voltada, por exemplo, à noção de conhecimento pedagógico do conteúdo. Concordamos com König e Kramer (2015) ao afirmarem que faltam estudos empíricos acerca do conhecimento pedagógico geral dos professores, especialmente, dos de Matemática.

Há um consenso referente a interpretação da noção de conhecimento pedagógico geral proposta por Shulman (1986), que compreende a gama de conhecimentos que o professor precisa mobilizar para preparar, estruturar e avaliar tarefas, motivar e apoiar a autonomia dos estudantes, organizar os diferentes materiais disponíveis, gerenciar a sala de aula, lidar com a subjetividade e a heterogeneidade em sala de aula, com o tempo cognitivo de cada aluno, com grupos diversificados, etc.

Indiferente da área do conhecimento em jogo, o conhecimento pedagógico geral constitui um elemento cognitivo crucial para a prática docente, necessário para um ensino eficaz que, em última instância, leve os estudantes à aprendizagem.

No caso da noção de taxa de variação, apesar desse tipo de conhecimento não ser específico para o ensino desta, ou de qualquer outra noção matemática, sua mobilização é crucial para o bom andamento dos processos de ensino e de aprendizagem. Nas pesquisas analisadas em nossa revisão de literatura que desenvolveram trabalhos com estudantes, é possível perceber, explicitamente, a mobilização de conhecimentos pedagógicos em favor dos processos de ensino e de aprendizagem dessa noção.

Na pesquisa de André (2008), por exemplo, é possível perceber a mobilização de conhecimentos pedagógicos quando a autora opta por dispor seus alunos individualmente, de modo a acompanhar a “evolução” e o desempenho de cada indivíduo frente às atividades propostas, quando ela adequa os encontros de acordo com a necessidade dos sujeitos de sua pesquisa, quando ela opta em

realizá-los em dois momentos, na sala de aula “tradicional” e na sala de informática, quando ela prevê, no cronograma de desenvolvimento das atividades, momentos voltados às avaliações inicial e final, quando, ao surgir uma dúvida de um estudante, ela opta por esclarecê-la para todos, etc.

Na pesquisa de Pereira (2009), a mobilização desse tipo de conhecimento ocorre quando o autor opta por realizar todo o experimento no laboratório de informática da escola e em uma plataforma de Educação a Distância, quando ele organiza o laboratório de informática de modo que cada aluno resolva as atividades propostas individualmente, sem interagir com seus pares e quando ele cria um projeto extraclasse para realizar o experimento.

Nos trabalhos de Silva, E. (2012), Matos (2013) e Silva e Silva (2015), estes conhecimentos são evidenciados quando os autores optam, por exemplo, em realizar seus experimentos exclusivamente em ambientes computacionais, quando eles optam em dispor seus sujeitos de pesquisa em duplas, por julgarem que tal disposição favorece/auxilia os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, visto que, segundo eles, tal disposição propicia a troca de informações, experiências, discussões, análises e comentários entre os componentes. Nas palavras de Silva, E. (2012), o ato de colocar os estudantes para trabalhar de modo coletivo e colaborativo vai ao encontro das orientações dos PCN+, de que “a aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta.” (BRASIL, 2002, p.120).

Outra evidência da mobilização de conhecimentos pedagógicos em favor dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na pesquisa de Silva, E. (2012, p. 77), está no fato de o autor optar

por não manter a mesma formação das duplas durante os encontros, para que houvesse uma troca de experiências e conhecimentos entre todos os estudantes, assim, a cada encontro foram formadas novas duplas, de modo a não repetir qualquer formação anterior.

Na pesquisa de Matos (2013, p. 41), a opção pelo uso de um caderno de notas “para registrar qualquer ideia, imagem ou opinião durante o experimento de ensino” e as diversas modificações e adaptações no cronograma de aplicação das

atividades devido as peculiaridades dos estudantes também são indícios da mobilização de conhecimentos pedagógicos gerais em consonância com a mobilização do conhecimento dos estudantes e suas características, tal como propõe Shulman (1987).

No experimento realizado por Spina (2002, p. 23), é possível perceber a mobilização de conhecimentos pedagógicos quando, após a escolha do tema de pesquisa, a autora opta por explorar o filme “Cidade das Abelhas”, de modo a “capturar as ideias iniciais, envolvendo e fazendo com que o grupo se familiarizasse com o tema” e quando ela opta por construir, junto aos estudantes, um modelo “ideal” de alvéolo com materiais concretos (varetas de bambu, barbante, régua, compasso (construído pelos alunos) e papel celofane) em detrimento de usar algum recurso tecnológico para realizar tais construções.

Já na pesquisa de Villa-Ochoa (2012), é possível perceber a mobilização de conhecimentos pedagógicos quando o pesquisador opta, por exemplo, em realizar uma seção de trabalho grupal para discutir as respostas que os estudantes apresentaram em um questionário inicial, quando ele escolhe usar um diário de campo para anotar as observações realizadas durante os encontros, como fez Matos (2013), quando ele adequa a duração das seções de trabalho ao tempo cognitivo dos estudantes e quando ele permite e incentiva as interações entre os estudantes e entre eles e o professor/pesquisador.

Como se pode notar, embora todas as pesquisas aqui citadas tenham explorado os processos de ensino e de aprendizagem do mesmo objeto matemático, as escolhas pedagógicas dos professores/pesquisadores não foram, necessariamente, as mesmas. Indiferente do tipo de recurso utilizado, do método de organização e gestão de sala de aula, ou de qualquer outra escolha pedagógica feita pelos professores/pesquisadores, todas, quando amalgamadas, constituem o conhecimento pedagógico geral para o ensino de taxa de variação no sentido proposto no esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática, construído no capítulo anterior.

A mobilização de conhecimentos pedagógicos para o ensino de taxa de variação é evidente quando, por exemplo, o professor, ao preparar e estruturar uma OD para o ensino desse objeto matemático, opta por dispor seus alunos em duplas,

individualmente ou em grupos maiores, quando ele escolhe por realizar uma aula expositiva “tradicional”, em um laboratório de informática, em uma plataforma de Educação a Distância ou, ainda, por meio de experimentos empíricos realizados em laboratório ou em campo, quando ele cria um diário de campo para registrar os “avanços” e/ou entraves nos processos de ensino e de aprendizagem, quando ele lida com o tempo cognitivo de cada estudante, com a subjetividade e com a heterogeneidade em sala de aula, quando ele avalia as tarefas propostas e apresenta as devolutivas necessárias, etc.

Cabe ao professor, então, recorrer a essa gama de características do conhecimento pedagógico geral para fomentar o processo de ensino de taxa de variação de modo a oportunizar aos estudantes os melhores “caminhos” para o aprendizado desse objeto matemático. Para tanto, e conforme já mencionamos no capítulo precedente, é somente por meio de formações continuadas e da prática letiva que o professor poderá compreender tais características e construir seu conhecimento pedagógico para o ensino de taxa de variação.

Embora o conhecimento pedagógico geral não seja específico do sujeito ou para o ensino de um determinado objeto matemático, esse tipo de conhecimento constitui um elemento cognitivo de suma importância para a prática docente, sem o qual não seria possível obter êxito em processos de ensino e de aprendizagem de Matemática ou de qualquer outra ciência.

4.5 INTERAÇÕES ENTRE AS CATEGORIAS DE CONHECIMENTOS FUNDAMENTAIS DE UMA BASE DE CONHECIMENTOS PARA O ENSINO DE TAXA DE VARIAÇÃO

Uma vez que os conhecimentos do conteúdo, didáticos, tecnológicos e pedagógicos para o ensino da noção de taxa de variação façam parte da gama de conhecimentos do professor, cabe a ele, então, os organizar e mobilizar adequadamente em prol dos processos de ensino e de aprendizagem dessa noção. A mobilização individual, de modo estanque e atomizado destes conhecimentos, é condição necessária, mas não suficiente para o ensino desse objeto matemático.

Não basta o professor possuir estes conhecimentos isoladamente, o processo de ensino da noção de taxa de variação requer, necessariamente, as

interações e a mobilização simultânea desses componentes, tal como propõe o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no capítulo anterior.

Em essência, o ato de mobilizar simultaneamente as quatro categorias de conhecimentos fundamentais para o ensino de taxa de variação compreende a construção/mobilização do conhecimento didático tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino desse objeto matemático. É a construção e mobilização deste conhecimento que fundamenta a confecção e estruturação de uma OD para o ensino de taxa de variação a partir do estudo dos saberes contidos na OM construída em nosso MER, desde que se opte pelo uso de algum recurso tecnológico (digital).

É incontestável que para elaborar e estruturar uma OD para o ensino de taxa de variação a partir do estudo da OM construída em nosso MER se faz necessário, em um primeiro momento, mobilizar um tipo de conhecimento especializado do conteúdo, específico para o ensino desse objeto matemático, tal como propõem Ball, Thames e Phelps (2008). Todavia, conforme já foi dito, ter um amplo conhecimento do conteúdo para o ensino de taxa de variação é condição necessária, mas não suficiente para uma boa gestão dos processos de ensino e de aprendizagem. É imprescindível que o docente tenha clareza de que o processo de estudo dessa OM deve ser estruturado, necessariamente, em termos dos diferentes momentos de estudo propostos por Chevallard (1999), e que estes momentos devem ser fundamentados em referenciais teóricos e metodológicos específicos da Didática da Matemática.

Assim, é a interação entre os conhecimentos do conteúdo e aqueles específicos da Didática da Matemática, ou seja, a mobilização do conhecimento didático do conteúdo, que condiciona, em um primeiro momento, a elaboração e estruturação de uma OD para o ensino de taxa de variação.

Além disso, é evidente que no processo de construção de uma OD para o ensino de taxa de variação, ou de qualquer outro objeto matemático, o docente deve mobilizar seu conhecimento pedagógico geral em consonância com os conhecimentos dos estudantes e de suas características, no sentido proposto por Shulman (1987), do conteúdo e do ensino e do conteúdo e dos alunos, no sentido

proposto por Ball, Thames e Phelps (2008), visto que apenas o professor conhece seus alunos suficientemente para “prever” suas reações, comportamentos e atitudes frente às tarefas propostas, de modo a escolher a “melhor” estratégia pedagógica para um ensino eficaz, que os leve à aprendizagem.

Desse modo, na confecção e estruturação de uma OD para o ensino de taxa de variação o professor deve, então, mobilizar seu conhecimento pedagógico em consonância com seu conhecimento didático do conteúdo, cuja interação forma o conhecimento didático pedagógico do conteúdo para o ensino desse objeto matemático.

E caso o docente opte pelo uso de algum recurso tecnológico, particularmente de um *software* dinâmico de Matemática, ele deve, também, mobilizar seu conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação, cuja interação com os conhecimentos já mobilizados condiciona a construção do conhecimento didático tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino desse objeto matemático.

Uma vez que o professor opte por utilizar algum recurso tecnológico em favor dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, ou de qualquer outro objeto matemático, ele deve ter ciência de que a inserção/mobilização desse recurso implica, necessariamente, em reconfigurações de seus conhecimentos pedagógicos e didáticos, reconfigurações do ponto de vista do processo de ensino, e cabe a ele estudar, compreender e levá-las em consideração na elaboração e estruturação de OD para o ensino do objeto matemático em jogo.

Indo ao encontro do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática, a construção e mobilização do conhecimento didático tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino de taxa de variação perpassam, direta ou indiretamente, por todas as categorias de conhecimentos que devem ser mobilizadas/construídas para o ensino desse objeto matemático. E, em contrapartida, uma vez que o docente já tenha construído esse tipo de conhecimento, a mobilização dos demais conhecimentos que constituem uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação ocorre de forma natural, por meio de processos de desmembramento.

Sob essa perspectiva, o percurso de construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica é individual, cabe ao docente “escolher” o melhor caminho, ou aquele que “melhor” se adequa a sua realidade profissional, para construir as interações entre os conhecimentos que a compõem e que, em última instância, condicionam a construção do conhecimento didático tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino de taxa de variação.

Entretanto, por mais que caiba ao docente escolher este “caminho”, essa escolha não é totalmente arbitrária, ela é condicionada à mobilização de conhecimentos específicos, que regulam os processos de ensino e de aprendizagem da noção de taxa de variação. Tais conhecimentos compreendem o entendimento dos conteúdos programáticos de Matemática, dos contextos social, cultural e educacional e do horizonte matemático, indo ao encontro do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática.

São os diferentes “caminhos” que o docente percorre para construir o conhecimento didático tecnológico pedagógico do conteúdo para o ensino de taxa de variação que condicionam a construção de uma base de conhecimentos para o ensino desse objeto matemático na Educação Básica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao encerrar este trabalho, retomamos a questão de pesquisa, os objetivos almejados e os aspectos que consideramos relevantes na presente investigação. Assim, destacamos a problemática que orientou nossos estudos, os aspectos metodológicos, o referencial teórico construído e os estudos que fundamentaram a construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, respondendo nossa questão de investigação. Também destacamos as principais contribuições do presente trabalho para a Educação Matemática e finalizamos apontando algumas sugestões para estudos futuros.

Nossa revisão de literatura e a análise dos documentos oficiais que direcionam e organizam o ensino de Matemática no Brasil e na maioria¹⁰¹ dos estados brasileiros, evidenciaram que o ensino de taxa de variação pode e deve ser explorado na Educação Básica por diferentes motivos: para auxiliar os estudantes no entendimento do conceito de função, para dar maior significado às ideias que deverão ser mobilizadas em aprendizagem futuras, para uma melhora no ensino superior de Cálculo, para o exercício pleno da cidadania ou por conta de uma melhora no próprio ensino de Matemática.

Diante disso, nos surgiu o questionamento do porquê a noção de taxa de variação não é devidamente explorada na Educação Básica, pois, quando feito, seu estudo é rígido e atomizado, apenas uma ideia superficial é apresentada, sem seus detalhes que, para nós, são imprescindíveis para se construir um conhecimento de significado próprio e eficaz, não apenas propedêutico.

Uma possível resposta para esse questionamento foi encontrada, em um primeiro momento, nas orientações para o ensino de Matemática do Currículo de São Paulo, que embora oriente que o estudo de taxa de variação possa ser explorado na Educação Básica como precursor do Cálculo, não o faz por considerar as ideias do Cálculo Diferencial e Integral distanciadas da prática docente. Diante disso, nos surgiu um novo questionamento, do porque estas ideias são distantes

¹⁰¹ Não estão disponibilizados, ou não encontramos, os Currículos Oficiais de Matemática do Amazonas, Bahia, Rio Grande do Norte e Roraima.

da prática docente, visto que o professor estudou e foi aprovado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, obrigatória em todas licenciaturas em Matemática, e que este professor considera que o ensino de rudimentos de Cálculo na Educação Básica é importante para seus alunos, conforme constataram Guedes e Assis (2009).

Uma resposta para esse novo questionamento foi encontrada, inicialmente, na investigação de Rossini (2006), que ao analisar a formação inicial do professor de Matemática com viés voltado ao exercício da docência, especificamente ao ensino de taxa de variação, constatou que as ideias de taxa de variação e de derivada, exploradas nos cursos de Cálculo de toda licenciatura em Matemática, não se articulam com o que é feito em sala de aula. Para a autora, a formação inicial do professor de Matemática não tem espaço suficiente para explorar, junto ao futuro professor, a Matemática que ele irá ensinar em sala de aula.

Para nós, a falta de articulação entre os saberes explorados em um curso de Cálculo de uma licenciatura em Matemática e aqueles saberes que efetivamente podem ser explorados no âmbito da Educação Básica não é oriunda, exclusivamente, de uma “má formação” docente ou da “falta de tempo” nos cursos de formação de professores. Não basta o licenciando estudar Cálculo Diferencial e Integral na graduação para que ele perceba que determinados elementos dessa área da Matemática escolar podem ser explorados na Educação Básica sob um enfoque adequado para esse nível de escolaridade. Se faz necessário que o Cálculo Diferencial e Integral explorado nas licenciaturas seja diferente daquele Cálculo explorado nos cursos de bacharelado, e que as licenciaturas para formação de professores de Matemática se desvinculem da longa tradição “bacharelesca” ainda viva nos cursos de formação docente, em que é predominante o formato (3+1), havendo, muitas vezes, uma valorização demasiada de teorias e conteúdos em detrimento em voltar a atenção à prática docente e à Matemática que efetivamente deverá ser explorada em sala de aula.

É preciso uma reflexão de caráter teórico-prático, por parte do professor, acerca dos aspectos que aproximam os saberes do Cálculo Diferencial e Integral explorados em sua formação com a Matemática da escola básica, de modo que ele possa fazer uso de determinados conhecimentos e saberes referentes a essa área

da Matemática escolar em um contexto concreto, apropriado e específico de trabalho. Cabe à licenciatura subsidiar este processo de reflexão, pois somente quando o professor se conscientizar a respeito da real função do Cálculo em sua formação e para a formação matemática de seu aluno, que ele poderá delinear objetivos, escolher conteúdos e metodologias para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

Diante desse cenário, em que as pesquisas apresentadas em nossa revisão de literatura indicam que estudantes da Educação Básica têm condições de compreender e de construir significado para a ideia de taxa de variação, em que a maioria dos documentos oficiais faz menção ao ensino de taxa de variação, onde os professores da Educação Básica consideram que o ensino de noções fundamentais do Cálculo é importante para seus alunos, embora se considerem despreparados para fazê-lo e em que é evidente a falta de articulação entre os saberes explorados na formação inicial docente e aqueles que efetivamente devem ser ensinados na Educação Básica, nos propomos a responder a seguinte questão de investigação: Qual base de conhecimentos é necessária para o ensino de taxa de variação na Educação Básica?

Foi a busca por respostas para essa questão que orientou os estudos referentes a construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, de modo a alcançarmos o objetivo primeiro da presente pesquisa.

Tais estudos consistiram, em um primeiro momento, no delineamento de um referencial teórico que subsidiasse a construção de um esquema para representar uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral. Este referencial foi fundamentado nos estudos de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006), Lima e Silva (2015) e Ball, Thames e Phelps (2008), que evidenciaram uma gama de conhecimentos necessários para o ensino de Matemática que, em essência, compreendem as diferentes interações entre quatro componentes fundamentais do conhecimento docente, os conhecimentos do conteúdo, didáticos, pedagógicos e tecnológicos, todos regulados pelos conhecimentos do horizonte matemático, do currículo e dos contextos social, cultural e educacional.

Diante dessa gama de conhecimentos e de todas suas possíveis interações, construímos um esquema que, para nós, representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática de forma geral, em que seus aspectos característicos e estruturais vão ao encontro da concepção de conhecimento como uma rede de significados, em que cada categoria de conhecimento docente pode ser interpretada como um nó-significativo e cada ramificação em dupla-implicação pode ser interpretada com uma ligação entre duas ou mais categorias de conhecimentos. É esse esquema que, para nós, contribui para o avanço da Teoria da Base de Conhecimentos para o Ensino e, conseqüentemente, para área de Educação Matemática.

Foi a partir desse esquema, e fundamentados na TAD, que iniciamos o processo de construção de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

Na TAD encontramos os elementos necessários para identificar, estudar e modelizar os saberes que condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do esquema da Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática.

Essa teoria nos permitiu, em um primeiro momento, compreender nosso problema didático como um autêntico problema científico, cuja resolução foi condicionada a construção de um MER para o ensino de taxa de variação na Educação Básica alternativo ao atual MED.

Tal construção derivou, basicamente, da busca por respostas para questões levantadas no âmbito das três dimensões fundamentais do nosso problema didático, epistemológica, ecológica e econômica, em consonância com suas possíveis interações.

Na dimensão epistemológica, a dimensão nuclear do nosso problema didático, elegemos as seguintes questões: Como se interpreta e se descreve os saberes que, quando estudados, condicionam a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do MER proposto? Qual razão de ser alternativa para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do MER proposto?

Na dimensão econômica, que se refere aos resultados do processo de transposição didática da noção de taxa de variação, elegemos as seguintes questões: Como é explorada atualmente a ideia de taxa de variação na Educação Básica? Qual é a razão de ser que a Educação Básica impõe para o ensino de taxa de variação? Que tipo de OM (e OD associadas) atualmente é explorado para fundamentar o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Qual é o MED que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica? Quais são os conteúdos que estão direta, ou indiretamente, relacionados com o ensino de taxa de taxa de variação na Educação Básica?

E na dimensão ecológica que, de acordo com Gascón (2011), compreende as condições de funcionamento e as restrições que incidem sobre o estudo de um determinado objeto matemático, elegemos a seguinte questão: Quais são as principais restrições que dificultam ou que impedem que OM escolares em torno da ideia de taxa de variação compreendam elementos teórico-tecnológicos capazes de produzir e justificar técnicas que possam ser amplamente utilizadas na resolução de problemas?

A busca por respostas para essas questões consistiu, em um primeiro momento, em um estudo ecológico que nos permitiu identificar o MED que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica, a razão de ser oficial deste ensino e os tipos de OM (e OD associadas) impostas pelo MED.

Em suma, o MED que condiciona o ensino de taxa de variação na Educação Básica é apenas uma antecipação do MED que condiciona o ensino de taxa de variação na educação superior, composto, exclusivamente, pela tríade de conteúdos: Limite, Continuidade e Derivada (taxa de variação instantânea), ordenadamente, em que há um tipo padrão de OM (e OD associadas) explorado, comum a todos os materiais didáticos analisados, que compreende tipos de tarefas que privilegiam uma única técnica de resolução justificada por um discurso teórico-tecnológico fundamentado na definição formal de limite de uma função $f: R \rightarrow R$.

A razão de ser oficial para o ensino de taxa de variação na Educação Básica imposta pelo MED é conteudista, estuda-se taxa de variação pela taxa de variação enquanto conteúdo, não são feitas relações entre a ideia de taxa de variação e outros objetos matemáticos que precedem ou que sucedem seu estudo,

tampouco são exploradas tarefas em que os conhecimentos referentes a noção de taxa de variação devem ser mobilizados na construção de técnicas mais eficazes, econômicas e poderosas para resolvê-las.

Uma vez identificado o MED, a razão de ser oficial, um tipo padrão de OM (e OD associadas) para o ensino de taxa de variação na Educação Básica e interpretando esse MED como a principal ameaça à sobrevivência da ideia de taxa de variação na Educação Básica, construímos um MER, alternativo ao MED, que se sustenta em uma rede de OM para o ensino desse objeto matemático.

Nosso MER, entendido por nós como uma tentativa de resposta para o problema de investigação levantado na presente pesquisa, compreende os saberes inerentes ao objeto matemático taxa de variação, produzidos em uma instituição, em termos dos diferentes tipos de tarefas que devem ser cumpridas, das técnicas que podem ser mobilizadas para resolver essas tarefas, das tecnologias que justificam tais técnicas e das teorias que justificam as tecnologias, evidenciando OM pontuais que, quando amalgamadas em torno de um discurso tecnológico inerente a noção de taxa de variação, formam uma OM local cujo estudo condiciona a construção dos conhecimentos do conteúdo que consideramos necessários para o ensino desse objeto matemático na Educação Básica, aproximando-nos de um tipo de conhecimento especializado do conteúdo, no sentido proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).

A construção dessa OM foi fundamentada, em um primeiro momento, na noção de conhecimento do horizonte matemático, proposta por Ball, Thames e Phelps (2008), e nas noções de conhecimento curricular vertical e conhecimento curricular lateral, propostas por Shulman (1986), uma vez que buscamos identificar os conhecimentos matemáticos que precedem e fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação.

São os conhecimentos referentes as noções de razão, proporção e proporcionalidade que, a princípio, fundamentam a construção dos conhecimentos do conteúdo de taxa de variação. Além destes conhecimentos, a noção de função em consonância com as noções de crescimento e decrescimento de uma função f qualquer, são imprescindíveis para a construção dos conhecimentos do conteúdo acerca da noção de taxa de variação.

Uma vez que estes conhecimentos façam parte da gama de conhecimentos matemáticos do professor, a construção dos conhecimentos do conteúdo referentes a noção de taxa de variação compreende, a princípio, o estudo dos saberes referentes a variação de funções que traduzem relações de interdependência que envolvem grandezas diretamente proporcionais, definidas por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, em que a taxa variação de $f(x)$ em relação a x é constante e igual a a .

São os conhecimentos referentes à variação de funções definidas por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, que fundamentam o estudo da taxa de variação de funções que traduzem relações de interdependência em que as grandezas em jogo não são diretamente proporcionais.

A construção dos conhecimentos referentes a variação de funções desse tipo consiste em estudar os saberes referentes a dois tipos de taxa de variação, a taxa de variação média, que corresponde a variação de $f(x)$ em relação a x , em média, em um intervalo qualquer do domínio de f , e a taxa de variação instantânea, que corresponde a “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação a x em um ponto específico do domínio de f .

No que se refere a taxa de variação média, nosso MER evidenciou, para uma função f qualquer, que a taxa de variação média entre dois pontos de abscissa x_1 e x_2 pertencentes ao domínio de f , com $x_2 > x_1$, corresponde a taxa de variação da função definida por $g(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, determinada pelo coeficiente angular da reta que representa graficamente g e que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Pode-se dizer, que a taxa de variação média corresponde, então, a variação de $f(x)$ por unidade a mais de x , em média, entre os pontos de abscissa x_1 e x_2 , com $x_2 > x_1$.

Quanto à noção de taxa de variação instantânea, que caracteriza a “rapidez” com que uma função f qualquer varia em um ponto $(x_0, f(x_0))$, nosso MER evidenciou que a ideia fundamental dessa noção é a de que a curva que representa graficamente f pode ser aproximada o máximo possível por uma reta de equação $y = ax + b$ nas proximidades de $(x_0, f(x_0))$, de modo que a “rapidez” com que $f(x)$ varia em relação a x no ponto $(x_0, f(x_0))$ corresponde a taxa de

variação da função $g(x) = ax + b$, representada graficamente pela reta de equação $y = ax + b$ que melhor se aproxima de f em $(x_0, f(x_0))$.

Dentre as infinitas retas que passam por $(x_0, f(x_0))$, aquela que melhor se aproxima da representação gráfica de f para valores de x cada vez mais próximos de x_0 é a reta tangente à curva nesse ponto. Assim, a taxa de variação de $f(x)$ em relação a x no ponto $(x_0, f(x_0))$ corresponde, então, ao coeficiente angular dessa reta tangente, em que uma possível técnica para determiná-lo consiste em calcular a tangente trigonométrica do menor ângulo α formado, no sentido anti-horário, entre a reta tangente e o eixo das abscissas.

É evidente que o ato de se obter a reta tangente a curva que representa graficamente a função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ está fundamentado no conceito de limite, quando este existe, visto que é possível aproximar x de x_0 o quanto se queira, desde que x e x_0 nunca coincidam. Então, os conhecimentos do conteúdo acerca da noção de limite, embora tratados intuitivamente em nosso MER, também são fundamentais para a construção dos conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica.

É o processo de estudo dos saberes referentes a noção de taxa de variação contidos na OM local construída em nosso MER que, para nós, fundamenta a construção dos conhecimentos do conteúdo necessários para o ensino desse objeto matemático na Educação Básica. Este processo, por sua vez, é regulado, organizado e gerido por uma OD que, em essência, compreende o processo de construção de conhecimentos a partir do estudo dos saberes contidos em uma OM.

A OD que consideramos ideal para o ensino de taxa de variação na Educação Básica compreende o estudo dos saberes contidos na OM construída em nosso MER a partir de conhecimentos específicos da Didática da Matemática, ou seja, a partir de conhecimentos didáticos para o ensino de Matemática, tal como propõe o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática.

Em relação aos conhecimentos didáticos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, nosso MER evidenciou que uma OD para este ensino deve ser estruturada em termos dos diferentes momentos de estudo propostos por Chevallard (1999) e fundamentada, necessariamente, em conhecimentos da

Didática da Matemática, especificamente nas teorias, metodologias e práticas de ensino e de aprendizagem de Matemática orientadas por esta ciência, tal como propõem Lima e Silva (2015).

Dentre as teorias e metodologias que urdem a Didática da Matemática, nosso MER evidenciou que para o ensino de taxa de variação na Educação Básica o professor deve possuir conhecimentos mínimos referentes a Teoria das Situações Didáticas, a Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria de Registros de Representação Semiótica, a Teoria Antropológica do Didático, a Engenharia Didática e as noções de Obstáculo e de Contrato Didático.

É o estudo dessas teorias, noções e metodologias que, para nós, fundamenta a construção do conhecimento didático para o ensino de taxa de variação na Educação Básica em termos do MER construído no presente trabalho.

No que tange a gama de recursos tecnológicos cujo estudo fundamenta a construção do conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, nossos estudos evidenciaram diversos mecanismos para essa finalidade, que vão além das tecnologias padrões, que compreendem *softwares* dinâmicos de Matemática e *softwares* que podem ser adaptados e/ou utilizados em prol dos processos de ensino e de aprendizagem dessa ciência.

Dentre os diferentes *softwares* voltados ao ensino e à aprendizagem de Matemática ou que podem ser adaptados para essas finalidades, nossos estudos elencaram quinze que podem ser utilizados em favor dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica. Essa grande quantidade de *softwares*, apesar de nem todos serem específicos para auxiliar os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação, remete ao fato de que de todas as áreas da Matemática escolar, o Cálculo foi a que recebeu maior atenção e investimento tecnológico nos últimos anos, conforme afirmam Tall, Smith e Piez (2008).

Diante disso, em nossa base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação, os conhecimentos tecnológicos compreendem o entendimento da interface, funcionalidade e características destes *softwares* em consonância com os conhecimentos acerca do uso de aplicativos para celulares e *tablets*, calculadoras gráficas, *internet* etc.

Embora não tenha sido o foco dos nossos estudos analisar as potencialidades e limitações dos *softwares* listados, nossa pesquisa evidenciou que o uso de *softwares* em favor dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica é crucial para auxiliar/promover a construção de significado para esse objeto matemático. Entretanto, há de convir que o professor não precisa “dominar” todos esses *softwares*, muito menos conhecer todas suas linguagens e ferramentas, o conhecimento tecnológico para o ensino de taxa de variação e, conseqüentemente, para o ensino de Matemática, requer do professor a mobilização de habilidades e competências exclusivas para o ensino com tecnologias, cuja construção/aquisição só é feita em formações continuadas, na prática docente e em estudos teóricos, conforme constatamos em nossos estudos.

Quanto ao conhecimento pedagógico para o ensino de taxa de variação na Educação Básica, nossos estudos evidenciaram que esse tipo de conhecimento é composto pelas diferentes escolhas inerentes a gestão e organização de sala de aula que o professor pode fazer em favor dos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático.

Estas escolhas são evidenciadas quando, por exemplo, o professor opta por dispor seus alunos em duplas, grupos ou individualmente, quando ele opta por realizar um experimento em campo para explorar a ideia de velocidade média de um móvel em detrimento de apresentar este conceito em uma aula “tradicional”, quando ele prepara, estrutura e avalia as tarefas propostas em uma OD para o ensino de taxa de variação, quando ele lida com a heterogeneidade e a subjetividade em sala de aula, com o tempo cognitivo de cada estudante, etc.

São os conhecimentos construídos a partir do estudo dos saberes elencados em nosso MER em consonância com suas possíveis interações com os conhecimentos tecnológicos, didáticos e pedagógicos que, para nós, constituem uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação na Educação Básica nos moldes do esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática confeccionado no item 3.2.5 e que respondem nossa questão de pesquisa.

É claro que não existe um único caminho para se construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação, nem, tampouco, existe um

caminho regular, contínuo e sem entraves para o ensino desse objeto matemático na Educação Básica. Essa construção é subjetiva, cabe ao professor, e somente a ele, “escolher” o melhor caminho, ou aquele mais conveniente à realidade educacional em que esteja inserido, para construir as interações entre os quatro componentes fundamentais de uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação.

Entendemos que o modo como o conhecimento do conteúdo de taxa de variação é contemplado em nosso MER, como uma técnica mais econômica, poderosa e operacionalizável para resolver determinados tipos de tarefas que comumente são exploradas na Educação Básica, constitui uma razão de ser alternativa para o ensino desse objeto matemático nesse nível de escolaridade; desde que o professor disponha dos conhecimentos constitutivos da base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação para ensinar e mediar o uso, por seus alunos, da noção de taxa de variação para essa finalidade.

Ante ao exposto até aqui, entendemos que os resultados de nossa investigação implicam novas reflexões, inquietações e desdobramentos que, seguramente, podem se constituir em novos problemas de investigação e que corroboram as palavras de Popper (1978, p. 14 apud OLIVEIRA, 2012, p. 276), para quem, uma investigação científica começa, avança e termina com problemas, “o conhecimento não começa de percepções ou observações ou de coleção de fatos ou números, porém, começa, mais propriamente, de problemas.”

Desse modo, apoiados nos resultados do nosso estudo bibliográfico e cientes de algumas lacunas que surgiram no percurso da presente investigação, levantamos algumas inquietações acerca dos processos de ensino de aprendizagem de Matemática e, especificamente, de taxa de variação na Educação Básica.

Consideramos pertinente o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no item 3.2.5 da presente pesquisa, mas temos consciência de que este esquema não é definitivo, nossa construção é apenas um esboço do que, para nós, constitui uma base de conhecimentos para o ensino de Matemática de forma geral.

Sabemos que uma base de conhecimentos sólida e definitiva para o ensino de Matemática não está posta, e que provavelmente nunca estará, visto que, embora a passos de lentos, o ensino se transforma e evolui, de modo que os conhecimentos constituintes dessa base estão, direta ou indiretamente, condicionados a estas transformações e evoluções. Assim, e a partir do esquema construído na presente pesquisa, novos estudos podem ser realizados com a finalidade de aprimorar, modificar ou acrescentar novos conhecimentos docentes necessários para o ensino de Matemática.

No que se refere, especificamente, a base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação, sentimos a necessidade de realizar estudos de replicação da presente pesquisa com professores, de modo a responder as seguintes questões: Como os professores mobilizam os conhecimentos constitutivos da base de conhecimentos para ensino de taxa de variação? Quais são os “caminhos” que eles percorrem para construir uma base de conhecimentos para o ensino de taxa de variação?

Um, dentre os possíveis “caminhos” para responder essas questões, seria propor uma formação continuada para um grupo de professores de Matemática em exercício, em que, a partir do estudo dos saberes contidos na OM construída em nosso MER, fosse solicitado que eles elaborassem uma OD para o ensino de taxa de variação fundamentada em teorias e metodologias da Didática da Matemática e apoiada em recursos tecnológicos.

Acreditamos que essa formação permitiria identificar, em um primeiro momento, os conhecimentos didáticos, do conteúdo e tecnológicos para o ensino de taxa de variação, assim como suas possíveis interações, enquanto o estudo da prática letiva dos professores, isto é, o estudo e a observação dos professores em sala de aula, permitiria identificar as características do conhecimento pedagógico para o ensino de taxa de variação que, quando amalgamado com os demais conhecimentos, permitiria identificar os “possíveis caminhos” que eles percorrem para construir uma base de conhecimentos para ensino de taxa de variação.

É importante, nesse tipo de formação, que o professor não seja passivo, nem tratado com um mero aprendiz que não possui os conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação, ele deve ser tratado como um adulto em

aprendizagem, capaz de atuar e refletir sobre sua prática letiva, de modo a compreender e aprimorá-la em prol dos processos de ensino e de aprendizagem desse objeto matemático.

Outro questionamento que emergiu de nosso estudo bibliográfico se refere ao Modelo Epistemológico Docente que condiciona a prática do professor perante os processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação na Educação Básica. Qual é esse modelo? Como, e quando, ele é construído?

Embora nossa pesquisa não tenha nos fornecido subsídios para responder estas questões, em nossos estudos nos defrontamos com indícios de que este modelo é conteudista, de que o professor apenas cumpre com o que é imposto pelo MED para o ensino de taxa de variação. Mas isso só pode ser aferido em um estudo de campo, em sala de aula, quando é possível estudar e analisar a prática docente diante dos processos de ensino e de aprendizagem de taxa de variação.

Outra perspectiva de estudos futuros que vemos a partir dos resultados da presente investigação, seria expandir o esquema que representa uma Base de Conhecimentos para o Ensino de Matemática construído no item 3.2.5 para a construção de bases de conhecimentos para o ensino de outros objetos matemáticos.

Por fim, concluindo nossos estudos, acreditamos que este trabalho além de contribuir para evidenciar uma gama de conhecimentos necessários para o ensino de taxa de variação na Educação Básica que, quando amalgamados, formam uma base de conhecimentos para o ensino desse objeto matemático, abre um leque de possibilidades para novas pesquisas fundamentadas na Teoria da Base de Conhecimentos para o Ensino com foco nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

REFERÊNCIAS

ACRE (Estado). Secretaria de Estado de Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Caderno 1- Matemática. Rio Branco, 2010. 69 p.

ALMEIDA, P. C. A.; BIAJONE, J. Saberes docentes e formação inicial de professores: implicações e desafios para as propostas de formação. **Educação e Pesquisa**, v. 33, n. 2, p. 281-295, 2007.

ALMEIDA, T. C. S. **A base de conhecimento para o ensino de sólidos arquimedianos**. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

_____. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Union**, n. 42, p. 9-34, 2015.

ALVARENGA, C. E. A. **Autoeficácia de professores para utilizarem tecnologias de informática no ensino**. 2011. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2011.

ANDRÉ, S. L. da C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, L.GÓMEZ, P. (Editor). **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, p. 33-59, 1995.

ARTIGUE, M. Didactical Design in Mathematics Education. **Nordic Research in Mathematics Education**. France, 2009.

ÁVILA, G. S. de S. O ensino de cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n. 18, p. 1-10, 1991.

_____. Limites e Derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, n. 60, p. 30-38, 2006.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Trad. ABREU, E. S. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BAILLEUL, M., BATAILLE, P. Les adaptations pédagogiques: quelle réalité? **Cahiers de la Recherche de l'Université de la Région de Moscou**. Université de Kolomna, Moscou, n. 2, 2011.

BALL, D. L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. **Jahrestagung für Didaktik der Mathematik**. Germany, 2009.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 1999.

BECKER, F. Epistemologia e ação docente. **Em Aberto**. Brasília, Ano 12. n. 58, 1993.

_____. Modelos Pedagógicos e Modelos Epistemológicos. In: SILVA, L. H.; AZEVEDO, C. J. **Paixão de aprender II**. Petrópolis: Vozes, 1995.

BEHRENS, M. A. **Formação continuada dos professores e a prática pedagógica**. Curitiba: Champagnat, 1996.

BELTRAN, M. H. R. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2014.

BETHLEM, A. **Curso de Matemática**. Porto Alegre: Livraria O Globo, 1935.

BITAR, M. Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de *softwares* na aprendizagem da matemática - Um estudo de um caso: o *software* aplusix. In: **III SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Águas de Lindóia, São Paulo, 2006.

BOLÍVAR, A. Conocimiento didáctico do conteúdo e didácticas específicas. **Profesorado Revista de currículum y formación del profesorado**. Granada-España, n. 2, p. 1-39, 2005.

BOSCH, M. Modelisations mathematiques en didactique: la modelisation anthropologique de l'activé mathématique. In: **ACTES DE LA IX ECOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**, p. 351-356, 1997.

BOULOS, P. WATANABE, R. **Matemática 2, para o segundo grau**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979.

BRANDÃO, P. C. R. **O uso de software educacional na formação inicial do professor de Matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em Matemática do Estado de Mato Grosso do Sul**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEMT, 2002.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEMT, 2000.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

_____. Diário Oficial da União. Brasília. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Brasília, 1996.

_____. Ministério da Educação e Saúde. **Portaria no 1.054**, de 14 de dezembro de 1951. Brasília, 1951.

_____. Diário Oficial da União. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática: Bacharelado e Licenciatura.** Brasília: MEC/CNE, 2002.

_____. Diário Oficial da União. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/CNE, 2013.

_____. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2014.

_____. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: 2ª versão revisada.** Brasília: MEC/CONSED, 2016.

BROUSSEAU, G. Fondaments et méthodes de la didactique de la mathématiques. **Recherches en didactiques de mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

_____. La théorie des situations didactiques. In: **COURS DONNE LORS DE L'ATTRIBUTION A GUY BROUSSEAU DU TITRE DE DOCTEUR HONORIS CAUSA DE L'UNIVERSITE DE MONTREAL A PARAITRE DANS "INTERACTIONS DIDACTIQUES"**. Genève, 1997.

_____. La théorie des situations didactiques. In: **TEXTES RESSEMBLES ET PREPARES PAR NICOLAS BALACHEFF, MARTIN COOPER, ROSAMUND SUTHERLAND, VIRGINIA WARFIELD. RECHERCHES EN DIDACTIQUES DES MATHEMATIQUES.** Genoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1998.

_____. L'enseignant dans la theorie des situations didactiques. In: **ÉCOLE D'ETE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES - COURS B**, 1995.

_____. Education et didactique des mathématiques. **Educacion y didactica de las matemáticas**. México, 1999.

_____. Les obstacles épistémologiques et les probl`emes en math´ematiques. In : Vanhamme, W.; Vanhamme, J. **La problématique et l'enseignement de la mathématique**. Louvain-la-neuve, p.101-117, 1976.

_____. Education et Didactique des mathématiques. In: **Educacion matematica**. Vol 12 n°1, México, p 5-39, 2000.

_____. Contrato didático: o "não dito" é essencial. **Nova Escola**, Ed. 264, 2013.

BUCHMAN, M. The Priority of Knowledge and Understanding. In: **Teaching. En L. Katz and J. Raths (Eds.): Advances in Teacher Education**. v. 1., Norwood, Ablex, p. 29-50, 1984.

CASTRUCCI, B. et al. **Matemática para o 2º grau**. São Paulo: FTD, 1977.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

_____. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 19, n° 2, 1999.

_____. Steps towards a new epistemology in mathematics education. In: **4ª CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION (CERME 4)**. Sant Feliu de Guíxols, 2006.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas**. I.C.E. Universitat Barcelona, 1997.

COMENIUS, J. A. **Didáctica magna**. Amsterdam, 1657.

COTA, G. S. M. **Reconstrucción de una organización matemática para articular la semejanza con la trigonometría**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ciências com Especialidades em Educação Matemática). Universidade de Sonora, Sonora, México, 2010.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto, Trad. ROCHA, L. O. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

D'AMORE, B. Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**. v.7, p. 1-22, 2008.

_____. **Elementos da Didática da Matemática**. Trad. BONOMI, M. C. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ed. Ática, 2014.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. Trad. GALVÃO, M. E. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

DOUADY, R. Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. In: ARTIGUE, M. DOUADY, R. MORENO, L. GÓMEZ, P. (Editor). **Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, p. 1-5, 1995.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica**. Org. MACHADO, S. D. A. p 11-33, São Paulo, 2003.

_____. **Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Peter Lang, 1995.

_____. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. 1ª ed. Trad. de LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. A. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma - entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Org. CAMPOS, T. M. M. trad. DIAS, M. A. São Paulo, 2011.

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educ. Matem. Pesq.** São Paulo, v.15, n.1, p.1-28, 2013.

FERNÁNDEZ, S. FIGUEIRAS, L. DEULOFEU, J. MARTÍNEZ, M. Re-defining hck to approach transition. In: **CERME 7**, Rzeszow-Polonia, 2011.

FONSECA, C. GASCÓN, J. LUCAS, C. O. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. In: **RELIME**, v. 17, 2014.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: **Educação Matemática: uma nova introdução**. Org. MACHADO, S. D. A. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012.

FRANCO, M. A. S. A práxis pedagógica como instrumento de transformação da prática docente. In: **28ª REUNIÃO DA ANPED**. Caxambu, 2005.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: **Educação Matemática: uma nova introdução**. Org. MACHADO, S. D. A. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012.

FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. **Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. RPEM, Campo Mourão, v.2, n.3, jul-dez. 2013

GAIA, S., CESÁRIO, M., TANCREDI, R. M. S. P. Formação profissional e pessoal: a trajetória de vida de Shulman e suas contribuições para o campo educacional. **Revista Eletrônica de Educação**. v. 1, n. 1, p. 142-155, 2007.

GARCÍA, C. M. Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido. In: **Las didácticas específicas en la formación del profesorado**. Santiago, 1992.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.

_____. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. **Educación Matemática**, p. 99-123, 2014.

_____. From the cognitive to the epistemological program in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programs. **For the learning of mathematics**. p.44-55, 2003.

GATTI, B. A.; NUNES, M. M. R.; GIMENES, N. A. S.; TARTUCE, G. L. B. P.; UNBEHAUM, S. G. **A formação de professores no Brasil**. 2008. Disponível em <http://www.fvc.org.br/estudos-e-pesquisas/avulsas/estudos1-3-formacao-professores.shtml> acesso em 29/11/2016.

GATTI, B. A.; BARRETO, E. S. S. **Professores do Brasil: impasses e desafios**. Brasília: UNESCO, 2009.

_____. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educ. Soc.**, Campinas, v. 31, 2010.

_____. A formação inicial de professores para a Educação Básica: as licenciaturas. **Revista USP**, São Paulo, nº 100, 2014.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

_____. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática 2º grau**. São Paulo: FTD, 1987.

_____. **Matemática 3**. São Paulo: FTD, 1992.

GUEDES, A. G.; ASSIS, M. M. A. Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: uma análise nas escolas de Ensino Médio da cidade do Natal/RN. **Anais do II EREM**, Natal, 2009.

HARRIS, J.; MISHRA, P.; KOEHLER, M. Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge and Learning Activity Types: Curriculum-based Technology Integration Reframed. **Journal of Research on Technology in Education**, p. 393-416, 2009.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: 3ª série. São Paulo: Atual, 1976.

IEZZI, G. et al. **Aulas de Matemática**. São Paulo: Atual, 1981.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciências e aplicações**: 3ª série. São Paulo: Atual, 2013.

JUNQUEIRA, S. M. S; MANRIQUE, A. L. Reformas curriculares em cursos de licenciatura de Matemática: intenções necessárias e insuficientes. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 21, n. 3, p. 623-635, 2015

KÖCHE, J.C. **Fundamentos de metodologia da pesquisa**. v. 14. Petrópolis: Vozes, 1997.

KÖNIG, J.; KRAMER, C. Teacher professional knowledge and classroom management: on the relation of general pedagogical knowledge (GPK) and classroom management expertise (CME). **ZDM Mathematics Education**, Cologne, Germany, p. 139-151 2015.

LAKATOS, E. M. de A.; MARCONI, M. de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LAKATOS, I. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LAPA, N.; CAVALLANTE, S. L. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1983.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LICERA, R. M. **Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado**. 2017. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, 2017.

LIMA, G. L.; SILVA, M. J. F. Conhecimentos docentes para o ensino de geometria em um curso de licenciatura em matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 159-177, 2015.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**: coleção profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- LIMA, E. L.; et al. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- LOCKE, J. **Ensaio acerca do entendimento humano**. São Paulo: Nova Cultura, 1999.
- LUCAS, C. O. **Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. 2015. Tese (Doutorado em Técnicas Matemáticas Avançadas e suas Aplicações). Universidade de Vigo, Vigo, 2015.
- MACHADO, N. J. **Matemática por assunto: noções de cálculo**. São Paulo: ed. Scipione, 1988.
- _____. **Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente**. 7ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- MAEDER, A. **Lições de Matemática**. São Paulo: Melhoramentos, 1938.
- MARGOLINAS, G. ¿Saberes en la escuela infantil? Sí, pero ¿cuáles? **Educación Matemática en la Infancia**, pp 1-20, 2014.
- MATO GROSSO (Estado). Secretaria do Estado de Educação. **Orientações Curriculares: Área de Ciências da Natureza e Matemática**. Cuiabá, 2010.
- MATOS, L. S. **Compreensões sobre derivada e integral com o uso de um caso on line: um estudo com alunos do terceiro ano do Ensino Médio**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.
- MINAS GERAIS (Estado). Secretaria de Educação. **Proposta Curricular de Matemática: Ensinos Fundamental e Médio**. Belo Horizonte, 2010.
- MISHRA, P., KOEHLER, M. Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n. 6, p. 1017–1054, 2006.
- MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. **Educação**, v. 29, n. 2, p. 33-50, 2004.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**. v. 7, p.7-29, 2002.
- MORSE, J. M. Approaches to qualitative-quantitative methodological triangulation. **Nursing Research**, p.120-123, 1991.

NAVARRO, P. **Un estudio sobre la articulación de la semejanza y la trigonometría en el bachillerato**. 2007. Dissertação de Mestrado. Universidad de Sonora, México, 2007.

NUNES, T. É hora de ensinar proporção. **Nova escola**, 2003. Disponível em <https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao>. Acesso em 07/02/2017.

OLIVEIRA, P. E. **Ensaio sobre o pensamento de Karl Popper**. Curitiba: Círculo de Estudos Bandeirantes, 2012.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: **Educação Matemática: uma nova introdução**. Org. MACHADO, S. D. A. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1995.

_____. **Matemática Paiva**. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.

PERNAMBUCO (Estado). Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife, 2012.

PIAUI (Estado). Secretaria de Educação. **Matrizes Curriculares do Ensino Médio**. Teresina, 2013.

PIRES, C. M. C. **Currículos de matemática: da organização linear à ideia de rede**. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, J. P. Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: Investigar e formar em educação: **ANAIIS DO IV CONGRESSO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO**, p. 59-72, Porto, 1999.

_____. Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. In: **Educación matemática: Teoría, crítica y práctica**. Barcelona: Graó, 2012.

POPPER, K. A Lógica das Ciências Sociais. In: POPPER, K. **Lógica das Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro/Brasília, p. 13-34, 1978.

PUNTES, R. V.; AQUINO, O. F.; NETO, A. Q. Profissionalização dos professores: conhecimentos, saberes e competências necessários à docência. **Educar**, n. 34, p. 169-184, 2009.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

REIS, F. da. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. 2001. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2001.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSEMBERG, J. **Nicotina: Droga Universal**. São Paulo: SES/CVE, 2003.

ROSSINI, R. **Saberes Docente Sobre o Tema Função: Uma Investigação das Praxeologias**. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

ROXO, E. **Curso de Matemática elementar: 3ª série**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1931.

ROXO, E.; SOUZA, M.; THIRÉ, C. **Curso de Matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1940.

SANGIORGI, O. **Matemática: curso moderno**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias**. São Paulo, 2010.

SEGALL, A. Revisiting pedagogical content knowledge: the pedagogy of content/the content of pedagogy. In: **Teaching and Teacher Education**. v. 20, 2004.

SERRES, M. **A comunicação**. Portugal: Rés Editora, 1967.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

_____. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, n. 57, p. 1-22, 1987.

SILVA, E. R. **Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2012.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: **Educação Matemática: uma nova introdução**. Org. MACHADO, S. D. A. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012.

SILVA, E. R.; SILVA, M. J. F. Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do Ensino Médio. **ANAIS DA XIV CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Chiapas, México, 2015.

_____. Taxa de variação na escola básica: um levantamento bibliográfico. In: Investigaciones en educación matemática. In: **Investigaciones en Educación Matemática**. Org. SALAZAR, J. F.; GERRA, F. U. Lima: Fondo Editorial, 2016.

SILVA, J. C. **As TIC no Ensino da Matemática, Hoje**. Conferência online em 08/06/2011 produzida pela DGIDC/ERTE, acesso em 01/07/2017. Disponível em <https://webinars.dge.mec.pt/webinar/tic-no-ensino-da-matematica-hoje>. Acesso em 08/06/2017.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Trad. SEIJI HARIKI. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

SMOLE, K. C. S.; KIYUKAWA, R. **Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1998.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. **Matemática: Ensino Médio**. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Da prática do matemática para a prática do professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciado. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, nº 7, p.25-36, 1997.

SPINA, C. de. O. C. **Modelagem Matemática no Processo Ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. **Educação Matemática em Revista**, n. 11. Edição Especial, 2002.

TALL, D.; SMITH, D.; PIEZ, C. Technology and Calculus. In: Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. **Research Syntheses**, v. 1, p. 207-258, 2008.

TRAJANO, A. **Aritmética Progressiva**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1883.

_____. **Aritmética Progressiva**. 75ª ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1944.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. **Atelier International d'Eté: Recherche en Didactique de la Physique**. La Londe les Maures, França, 1983.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes**. p. 47-50, 1989.

_____. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. p.133-170, 1990.

VILLA-OCHOA, J. A. **La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren**. . 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Univesidade de Antioquia. Medellín, 2012.

VILLA-OCHOA, J. A.; JARAMILLO, C. M. L.; ESTEBAN, P. V. D. Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación. **ANAIS DA XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Recife, Brasil, 2011.