

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA

**MATERIAL PARA O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
REFERÊNCIAS DE TALL, GUEUDET E TROUCHE**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2017**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA

**MATERIAL PARA O ENSINO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
REFERÊNCIAS DE TALL, GUEUDET E TROUCHE**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia
Universidade Católica de São Paulo, como exigência
parcial para obtenção do título de **Doutor em
Educação Matemática**, sob a orientação da
Professora Doutora **Sonia Barbosa Camargo Igliori**.*

**SÃO PAULO
2017**

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglori pela dedicação em suas orientações prestadas na elaboração deste trabalho, sempre demonstrando profissionalismo e extrema competência, incentivando e colaborando com o desenvolvimento de minhas ideias que resultaram neste trabalho. Além disso, também agradeço a professora por todo o carinho, hospitalidade e companheirismo demonstrados durante toda a minha formação dentro do Programa e em outras atividades complementares que realizamos durante esse período.

Aos professores Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Dr. Frederico da Silva Reis, Dr. Gabriel Loureiro de Lima e Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto, membros da banca examinadora desta tese, que contribuíram de modo significativo, com sugestões e apontamentos pertinentes e bem colocados, para o direcionamento final da pesquisa.

Ao meu pai, Antônio de Almeida, e à minha mãe, Maria Marly Vieira de Almeida, por todo o apoio, carinho, dedicação e paciência em todos os momentos desta jornada.

Ao meu irmão, Marco Antônio de Almeida, e a sua esposa, Mariana Salatino Zago de Almeida, pela força e apoio em diversos momentos desta jornada. Também a minha querida sobrinha Isabela Zago de Almeida, que com seu sorriso, carinho e brincadeiras, contribuiu com momentos de descontração tão necessários durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu tio e padrinho Elias de Almeida que sempre me incentivou a continuar os estudos e ensinou-me que é necessário valorizar cada momento da nossa jornada de vida.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pela solidez do corpo docente, cujo objetivo comum é

a transformação dos discentes do Programa em pesquisadores reflexivos e competentes.

A meus amigos do Programa, pelos momentos de amizade e compartilhamento, tanto de angústias quanto de alegrias, durante o Doutorado. Um agradecimento especial a meu amigo Jayme do Carmo Macedo Leme pela amizade e disponibilidade tanto para conselhos quanto para discussão de pontos da tese. Também agradeço ao amigo Felipe de Almeida Costa pelas inúmeras caronas dadas e pelas conversas relativas aos estudos do Programa e futebol.

As minhas amigas, Érika Olímpia Arena Rosa e Stella Christina Cajueiro Camargo por todo o apoio, carinho e compreensão que demonstram para comigo desde que nos conhecemos e que me auxiliaram tanto no Mestrado quanto no Doutorado.

À Suzanne Lima de Freitas, secretária do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, pela eficiência, dedicação e amizade durante a minha permanência no Programa.

Ao professor Alexander Koenraad Carvalho Dejonghe pelo pronto atendimento na revisão do *abstract*.

À professora Fabrícia Carpinelli Romaniv pela cuidadosa revisão gramatical deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro fundamental para a realização do trabalho.

RESUMO

Esta tese apresenta um material para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral composto por sete atividades que foram embasadas em referenciais teóricos da Educação Matemática. Nelas, foram abordados os conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências. Pretendeu-se defender que uma das formas de se estabelecer o estreitamento da relação teoria e prática nessa área de investigação é feita por meio de elaboração de materiais para o ensino com essa finalidade. Foram utilizadas as noções de organizador genérico, raiz cognitiva e Três Mundos da Matemática de Tall e colaboradores, e a noção de recurso da Gênese Documental de Gueudet e Trouche. O uso do computador e a construção de ferramentas no GeoGebra foram procedimentos férteis para se obter um material com as competências planejadas. A pesquisa, que teve por resultado o material para o ensino, seguiu orientação metodológica de uma do tipo pesquisa fundamental, na qual se objetiva o preenchimento de lacunas no conhecimento relativo à solução de problemas advindos da prática. Adotou-se uma postura teórica exploratória, a da construção de argumentos com rigor e coerência lógica para validar os resultados obtidos. Nesse âmbito de referenciais teórico- metodológicos, foram elaboradas sete atividades para o ensino de Cálculo, organizadas em três componentes, as quais compõem um recurso (matemática, material e didática) na concepção da Gênese Documental, incorporando noções cognitivistas de Tall e seus associados. A utilização das componentes (matemática, material e didática) possibilita que o material possa se configurar em um elemento do conjunto de recursos, conforme a Gênese Documental, de um professor de Cálculo, para o desenvolvimento de uma aula. Como resultado pode-se demonstrar que o modo de elaboração proposto para um material para o ensino, em que se incorporam teorias da Educação Matemática e se utiliza um *software* adequado, pode ser um meio potente para favorecer a integração teoria e prática, almejada e necessária pela Educação Matemática, além de contribuir com a aprendizagem.

Palavras-chave: Recurso. Gênese Documental. Raiz Cognitiva. Organizador Genérico. Três Mundos da Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Material para o Ensino.

ABSTRACT

This thesis presents a material for the teaching of Differential and Integral Calculus, composed by seven activities, which were based on theoretical references of Mathematical Education. The concepts of function, continuity, differentiability, solution of a differential equation, integral and limit of sequences were approached in these activities. The intention was to defend that one of the ways to establish the narrowing of the relation of theory and practice in this area of investigation is done through the elaboration of materials for teaching with this goal. The concepts of generic organizer, cognitive root, and Three Worlds of Mathematics by Tall and collaborators and the idea of resource of Documental Genesis of Gueudet and Trouche were used. The use of the computer and the construction of tools on GeoGebra were productive procedures to obtain a material with the planned qualities. The research, which had as a result the material for teaching, followed the methodological orientation of a type of fundamental research, in which the goal is the filling of gaps in knowledge related to the solution of problems through practice. An explanatory, theoretical posture was adopted, the construction of considerations with rigor and logical coherence to validate the obtained results. In the scope of theoretic-methodological references seven activities were elaborated for the teaching of Calculus organized in three components which, compose a resource (mathematics, material and didactics) in the conception of Documental Genesis, incorporating cognitivist ideas of Tall and his associates. Using the components (mathematics, material and didactics) allows that the material may configure itself as an element of the set of resources, according to the Documental Genesis, which a teacher of Calculus can use for the development of a class. As a result it is possible to demonstrate that the way of elaboration proposed for a material for teaching, in which theories of Mathematical Education are elaborated and adequate software is used, may be a powerful way to favor the integration of theory and practice, pursued and necessary for Mathematic Education, besides contributing with learning.

Key words: Resource. Documentational Geneses. Cognitive Root. Generic Organizer. Three Worlds of Mathematics. Differential and Integral Calculus. Teaching material.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – A influência da teoria na prática segundo Malara e Zan.	25
Figura 2 – A influência mútua entre a teoria na prática segundo Malara e Zan.	26
Figura 3 – A relação linear entre pesquisador, professor e estudante.	27
Figura 4 – Um modelo de relação entre a teoria e a prática, adaptado de Steinbring.	28
Figura 5 – Representação esquemática da Gênese Documental.	48
Figura 6 – Representação da relação dialética entre recurso/documento.	49
Figura 7 – Reprodução da atividade proposta por Marie-Pierre.	50
Figura 8 – Uma pequena parte da curva se assemelha a um segmento de reta.	62
Figura 9 – Um exemplo de utilização do organizador genérico <i>Magnify</i>	63
Figura 10 – O gráfico da função $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em uma vizinhança de $x=0$	63
Figura 11 – Exemplo de <i>software</i> que explora a solução de uma equação diferencial.	65
Figura 12 – A introdução do conceito de continuidade por meio da continuidade perceptiva.	67
Figura 13 – A interpretação da continuidade perceptiva que resulta na definição formal de continuidade.	68
Figura 14 – $\int_a^b f(x)dx = A$, sendo A a medida da área da região hachurada. ...	68
Figura 15 – Representação de um acréscimo de área dA	69
Figura 16 – Esticando horizontalmente o acréscimo de área dx e a percepção que a área é aproximadamente igual a um retângulo.	70
Figura 17 – Gráfico de $f(x) = x - \text{int}(x)$ em $[-1, 1]$	71
Figura 18 – A representação gráfica da função real A , junto com o gráfico da função f	72
Figura 19 – O Cálculo e a Análise Matemática segundo o referencial teórico dos Três Mundos da Matemática.	78

Figura 20 – Os números reais como uma combinação de elementos dos Três Mundos da Matemática.	80
Figura 21 – Mapa da Literatura da Pesquisa Bibliográfica	89
Figura 22 – Objeto de aprendizagem “Números Reais”	109
Figura 23 – Objeto de Aprendizagem E2D e o ciclo de Kolb.....	111
Figura 24 – Uma atividade do Objeto de Aprendizagem E ₂ D.....	112
Figura 25 – Tela de apresentação do objeto de aprendizagem Números reais.....	113
Figura 26 – Aplicação da propriedade distributiva ao cálculo mental.....	114
Figura 27 – Aplicação da propriedade distributiva produzida em Müller (2015)	114
Figura 28 – A representação gráfica da função f	129
Figura 29 – A representação gráfica da função $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela sentença $g(x) = (x - 2)^2$	130
Figura 30 – A representação gráfica da função h	131
Figura 31 – A representação gráfica da função $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	132
Figura 32 – Uso da ‘MagnifyG’ para a função $y = x^2$	136
Figura 33 – Construção de uma Janela de Visualização com dimensões iguais ao quadrado ABCD.	138
Figura 34 – Aplicação da ‘MagnifyG’ para a função $f(x) = \text{sen}(x) $ e uma vizinhança de $x = \pi$	146
Figura 35 – A representação dos trinta primeiros termos da função $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $g_n(x) = x^n$	147
Figura 36 – A caixa de diálogo utilizada para a configuração de um controle deslizante.....	148
Figura 37 – Os dez primeiros termos da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$	149
Figura 38 – A representação da soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$, sendo que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funções apresentada em 4.1.3.....	150
Figura 39 – A aplicação ‘ManjarBrancoG’.	151
Figura 40 – Caixa de diálogo do GeoGebra para a criação de uma nova ferramenta.....	159

Figura 41 – Segmentos construídos com a ferramenta ‘EquaçãoDiferencial’.....	161
Figura 42 – Um campo de direções de uma equação diferencial construído com a ‘CampoDeDireçõesG’.....	162
Figura 43 – O campo de direções associado à equação diferencial $y' = y$	164
Figura 44 – O campo de direções associado à equação diferencial $y' = y^3 - x^3$	164
Figura 45 – O campo de direções associados à equação diferencial $y' = 9,8 - \frac{y}{5}$	168
Figura 46 – O campo de direções e duas soluções particulares da equação diferencial $y' = 9,8 - \frac{y}{5}$	169
Figura 47 – ‘ContinuidadeG’ proposta para a introdução do conceito formal de continuidade.....	173
Figura 48 – Representação ampliada do acréscimo de área dA	178
Figura 49 – Aplicação ‘IntegralG’ para a introdução do conceito de integral.....	178
Figura 50 – Sequência e rastro da ‘IntegralG’ para a introdução do conceito de integral.	180
Figura 51 – Elemento de área dA	183
Figura 52 – Primeiro caso da soma das áreas dA	183
Figura 53 – Segundo caso da soma das áreas dA	184
Figura 54 – Aplicação ‘SequênciaG’ para o estudo da definição de limite de sequência.....	189
Figura 55 – Representação da sequência para $n = 80$ e $\varepsilon = 0,01$	190

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Lista dos trabalhos considerados na Revisão de Literatura	86
Quadro 2 – Atividade 8 desenvolvida por Alves (2010).....	91
Quadro 3 – “Atividade 1 – Construindo um tanque cilíndrico” adaptada por Gonçalves (2012)	92
Quadro 4 – Funções utilizadas para o desenvolvimento da Atividade 3	93
Quadro 5 – Roteiro utilizado o desenvolvimento da Atividade 3 desenvolvida por Ricaldoni (2014).....	93
Quadro 6 – Lista de atividades desenvolvidas por Rocha (2010)	95
Quadro 7 – Primeira parte da Atividade 5 de Rocha (2010).....	96
Quadro 8 – Construção proposta por Mazzi (2014) na Atividade 1	98
Quadro 9 – Sequência didática para apresentação do conceito de derivada.....	100
Quadro 10 – Atividade 4, do Bloco 1, da sequência de Assumpção	101
Quadro 11 – Conjunto de perguntas relacionado a atividade para abordar o conceito de função quadrática.....	103
Quadro 12 – Atividade apresentada em Miranda, Laudares, Guimarães (2013).....	103
Quadro 13 – Atividade desenvolvida por Moraes (2013)	116
Quadro 14 – Atividade desenvolvida por Grande e Vazquez (2014).....	116
Quadro 15 – Conceitos de Cálculo abordados nas pesquisas desta Revisão.....	118
Quadro 16 – Atividades relacionadas à exploração da noção de retidão local	139
Quadro 17 – Atividade relacionada à aplicação da noção de tangente prática.....	142
Quadro 18 – Atividades relacionadas à ‘ManjarBrancoG’	152
Quadro 19 – Atividades relacionadas à utilização da ferramenta ‘Equação Diferencial’.....	166
Quadro 20 – Atividades relacionadas à utilização da ‘ContinuidadeG’	175

Quadro 21 – Estudo inicial para o desenvolvimento do conceito de integral.....	181
Quadro 22 – Atividades para o estudo da função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$	184
Quadro 23 – Atividades para a verificação da hipótese de continuidade de f para a definição de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$	185
Quadro 24 – Atividades relacionadas ao conceito de limite de sequência.....	191

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	15
CAPÍTULO 1	
PROBLEMÁTICA	21
1.1. A problemática de uma pesquisa	21
1.1.1. A constituição da problemática desta pesquisa.....	22
1.1.2. A necessidade de produzir materiais e abordagens de ensino baseadas em resultados do campo da Educação Matemática para o ensino superior	34
1.1.3. O uso do computador no ensino da Matemática	36
1.2. Objetivos e Problema de pesquisa.....	37
CAPÍTULO 2	
QUADRO TEÓRICO	41
2.1. O papel do Quadro Teórico em uma pesquisa.....	41
2.2. Quadros Teóricos para esta tese	43
2.2.1. A Gênese Documental	43
2.2.2. Constructos teóricos de Tall	53
2.2.2.1. A utilização do computador no ensino da Matemática	53
2.2.2.2. Organizadores Genéricos e raízes cognitivas	57
2.2.2.3. Os três mundos da Matemática.....	73
CAPÍTULO 3	
REVISÃO DA LITERATURA	85
3.1. Mapa da literatura	88
3.1.1 Atividades exploratórias	90
3.1.2. Sequências didáticas	98
3.1.3. Produção de Objetos de Aprendizagem.....	106
3.1.4. Resolução de problemas utilizando o GeoGebra	115
3.2. Análises das pesquisas consultadas	118
CAPÍTULO 4	
MATERIAL PARA O ENSINO DE CÁLCULO	125
4.1. Atividades para o ensino de conceito do Cálculo	126
4.1.1. O conceito de função.....	126
4.1.2. O conceito de derivada.....	135
4.1.3. A relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade	145
4.1.4. O conceito de solução de uma equação diferencial	157

4.1.5. O conceito de continuidade	171
4.1.6. O conceito de integral.....	177
4.1.7. O conceito de limite de sequência.....	187
CONSIDERAÇÕES FINAIS	193
REFERÊNCIAS.....	207
ANEXO A – Resultados obtidos com a pesquisa no Google Acadêmico.....	219

APRESENTAÇÃO

Esta tese de doutorado foi desenvolvida no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. A concepção de seu desenvolvimento tomou por base os escritos de Severino (2000), para a modalidade de trabalho científico monográfico, qual seja aquele que aborda

[...] um único tema, que exige pesquisa própria da área científica em que se situa, com os instrumentos metodológicos específicos. Essa pesquisa pode ser teórica, de campo, documental, experimental, histórica ou filosófica, mas sempre versando sobre um tema único, específico, delimitado e restrito (SEVERINO, 2000, p. 150).

A temática subjacente a esta tese é o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral¹. Iglioni (2009, p. 13) destaca que as noções de número real, infinito, continuidade, limite e função, formam o cerne da Matemática e possuem uma constituição privilegiada no desenvolvimento do pensamento avançado dessa área de conhecimento.

O interesse por tal temática surgiu durante a minha graduação, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, no curso de Licenciatura em Matemática. Meu primeiro contato com os conceitos do Cálculo incluiu números reais, limites, derivadas e integrais definidas e indefinidas. E já no decorrer do semestre, em que uma disciplina de Cálculo foi cursada, tive interesse em entender por quais motivos eu e meus colegas de curso apresentávamos dificuldades na aprendizagem desses conceitos.

A preocupação de alguns professores com o ensino e a aprendizagem dos alunos chamou minha atenção e desenvolvi curiosidade por atividades de pesquisa relacionadas ao ensino e aprendizagem da Matemática em nível superior.

Em um projeto de Iniciação Científica com objetivo de analisar o impacto da utilização de um novo livro texto como bibliografia básica de um curso de Álgebra Linear, moldou-se a minha atenção no seguinte objeto de estudo: o ensino e aprendizagem de tópicos avançados da Matemática. Nesse projeto (MONTEIRO;

¹ Ao longo deste texto, poderemos nos referir ao Cálculo Diferencial e Integral por apenas Cálculo.

ALMEIDA, 2007) foi desenvolvido um estudo comparativo entre dois livros, que eram utilizados como bibliografia básica da disciplina, com outra publicação proposta pela orientadora. Esse estudo tomou por base cinco recomendações desenvolvidas pelo Grupo de Estudos Curriculares em Álgebra Linear² (CARLSON et al., 1993). Essas recomendações visavam promover discussões para a realização de um trabalho criativo para essa disciplina. A partir daí procurou-se detectar nos livros selecionados quais dessas recomendações estavam presentes e de que forma elas poderiam contribuir para a aprendizagem dos alunos. Ainda no âmbito desse projeto, tive a oportunidade de ser monitor de uma disciplina que introduzia conceitos da Álgebra Linear para alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Essa última atividade foi uma experiência que acrescentou muito em minha formação como educador, pois trabalhei com dois temas de meu interesse: o estudo de tópicos avançados de Matemática e a preocupação com a aprendizagem dos alunos com relação a esses tópicos.

Durante a graduação percebi que os objetos de estudo de meus professores, em geral, não eram a investigação sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, mas chamou-me atenção a maneira com que a professora Roseli Fernandez, da disciplina “Funções Analíticas”, uma matéria optativa que cursei no final do meu curso de graduação, explicava determinados conceitos dessa disciplina. Quando ela ia demonstrar um teorema ou resultado importante do assunto, sempre era proposto um “rascunho” daquela demonstração, com o objetivo de expor o motivo pelo qual aquele resultado era aceitável. Naquele momento, eu ainda não podia perceber, mas estavam presentes características das pesquisas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem no ensino superior:

[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (IGLIORI, 2009, p. 12).

A partir desses episódios pude perceber a importância e a necessidade do professor que ministra aulas de tópicos avançados da Matemática preocupar-se com

² Tradução utilizada para denominar o grupo de estudos americano Linear Algebra Curriculum Study Group. Esse grupo foi constituído em janeiro de 1990 com o intuito de aperfeiçoar o currículo de Álgebra Linear em cursos de graduação nos Estados Unidos.

a maneira que seus alunos estão desenvolvendo determinados conceitos da mesma e a necessidade de buscar abordagens de ensino que favoreçam a apreensão desses conceitos.

Entendo que, durante a minha graduação, meus temas de interesse de pesquisa surgiram, porém, não possuía conhecimentos, tanto de natureza teórica quanto de natureza prática, para abordar questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de tópicos avançados da Matemática. Por esse motivo, busquei, por meio de um curso de pós-graduação, ampliar minha formação.

Ao ingressar no Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, em virtude dos temas de meu interesse, fui conduzido ao grupo de pesquisa 'O Elementar e o Superior em Matemática' (GPES). Esse grupo tem, atualmente, como pesquisador líder, a Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Iglori. As pesquisas produzidas pelo grupo, relacionadas aos conteúdos abordados e ao nível de ensino considerados, são bem diversificadas, atuando desde o ensino básico até o ensino superior. Estimulado pelas discussões fomentadas nos encontros de orientação com a Profa. Dra. Sonia Barbosa Iglori, tomei ciência do campo da Educação Matemática do ensino superior, no qual a temática de meu interesse tem sido amplamente discutida e estudada.

Com o objetivo de inserir-me no campo de pesquisa da Educação Matemática no ensino superior, e por não ter tido ainda experiência significativa na docência durante o Mestrado, desenvolvi pesquisa de natureza teórica.

A pesquisa de mestrado (ALMEIDA, 2013) teve caráter bibliográfico e objetivou a organização de um panorama de artigos com autoria de David Tall, relacionados à aprendizagem do Cálculo. Nessa pesquisa, foi possível destacar informações sobre origens de dificuldades para a aprendizagem das noções do Cálculo e contribuições para o desenvolvimento de abordagens de ensino dessas noções com vistas a auxiliar a aprendizagem.

Imediatamente após o término do Mestrado Acadêmico, iniciei o Doutorado com vistas a aprofundar os conhecimentos e produzir conhecimentos novos para a área de pesquisa da Educação Matemática no ensino superior.

A gênese para esta pesquisa de doutorado deu-se durante o desenvolvimento de minha dissertação (ALMEIDA, 2013), pelas suposições de abordagens de ensino

para os conceitos: números reais, limite, continuidade, derivada, integral e equações diferenciais destacadas.

Um dos objetivos da pesquisa de Doutorado é desenvolver material de ensino, no sentido proposto anteriormente, baseado em constructos teóricos de David Tall para os seguintes conceitos do Cálculo: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de seqüências.

Para a elaboração desta pesquisa, visei também a necessidade de uma tese de doutorado trazer uma “contribuição suficientemente original a respeito do tema pesquisado” (SEVERINO, 2000, p. 151). Considero que o desenvolvimento de material de ensino propicie a referida originalidade. Isso porque em um levantamento realizado no banco de teses e dissertações da Capes, exposto em Almeida (2013), pude constatar que os constructos teóricos concebidos por David Tall e seus associados têm sido utilizados em pesquisa, porém, senti a ausência de elementos relacionados às indicações de abordagens de ensino propostas pelo pesquisador inglês. Ademais, como será detalhado no capítulo “Problemática” deste relatório de pesquisa, há necessidade de produzir materiais baseados em constructos teóricos e resultados de pesquisas desenvolvidos na Educação Matemática.

Destacando os elementos que compõem este relatório de pesquisa.

O Capítulo 1 é destinado ao estudo da problemática da pesquisa, ou seja, aquela voltada às questões de integração entre a teoria que dá suporte ao desenvolvimento científico da Educação Matemática e a prática docente. Essa problemática reúne muitos problemas de pesquisa, entre os quais delimitamos um relacionado aos objetivos pretendidos.

No Capítulo 2 é apresentado o Quadro Teórico utilizado nesta pesquisa. Esses constructos teóricos são utilizados para o desenvolvimento do material de ensino objetivado, sejam aqueles desenvolvidos por Gueudet e Trouche (2009) e aqueles de autoria de Tall e seus associados, têm uma função dupla: são tanto bases teóricas quanto conduzirão à maneira pela qual o material será produzido.

O Capítulo 3 é dedicado à exposição da revisão da literatura. Nesta foram trazidas pesquisas nacionais, obtidas a partir de pesquisa no Google Acadêmico. As pesquisas selecionadas abordaram problemas relacionados ao ensino e/ou

aprendizagem de conceitos do Cálculo e utilizaram o GeoGebra como recurso computacional. O período escolhido foi de 2010 até 2015, sendo este o comumente considerado por agências de fomento em geral.

No Capítulo 4 é apresentado o material desenvolvido para o ensino de Cálculo objetivado nesta tese.

Este relatório termina com considerações finais relativas ao trabalho apresentado e indicações para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

Neste capítulo são expostos a problemática e o problema desta pesquisa, os quais definem seus objetivos. A escolha dos referenciais teóricos e metodológicos se apoia no desenvolvimento epistemológico da Educação Matemática no ensino superior e tem por base as dificuldades que o Cálculo tem causado aos estudantes dos cursos de Exatas, além da necessidade de contribuir com a interlocução da teoria e prática.

1.1. A problemática de uma pesquisa

Para delimitarmos a problemática da pesquisa, nos orientamos na conceituação proposta por alguns autores, como Fiorentini e Lorenzato: um “conjunto de saberes factuais, conceituais ou teóricos e de valores que ajudam a discutir e a abordar com profundidade um problema ou objeto de estudo” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 225).

Laville e Dionne (1999) definem problemática como um conjunto de fatores que fazem com que o pesquisador se conscientize de um determinado problema e de sua eventual solução. Para o pesquisador, desvendar a problemática é uma operação essencial.

O processo de desvendamento da problemática de uma pesquisa, para esses autores, tem o objetivo de

[...] jogar o [máximo] possível de luz sobre as origens do problema e as interrogações iniciais que concernem a ele, sobre sua natureza e sobre as vantagens que se teria em resolvê-lo, sobre o que se pode prever [com a] solução proposta e sobre o modo de chegar aí (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 98, adaptado).

A delimitação de uma problemática, para Laville e Dionne, tem importância porque uma pesquisa parte de um problema e se inscreve em uma problemática. Logo, é fundamental, no desenvolvimento de uma pesquisa, uma fase preliminar na

qual o pesquisador busca estabelecer e delinear tanto a problemática quanto o próprio problema. Por meio de um problema é possível promover “a busca de um maior entendimento de questões postas pelo real, ou ainda a busca de soluções para problemas nele existentes, tendo em vista a sua modificação para melhor” (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 85). Para buscar tal entendimento, a pesquisa seria um meio. Em virtude das motivações de um pesquisador e da escala na qual o problema pode ser considerado, esses autores delimitaram duas categorias de pesquisa: a fundamental e a aplicada. Na primeira objetiva-se preencher lacunas no conhecimento e, em princípio, a aumentar a soma dos saberes disponíveis, mas que poderão, em algum momento, ser utilizados com a finalidade de contribuir para a solução de problemas postos por uma comunidade de pesquisa. Na outra categoria inserem-se pesquisas que podem tanto contribuir para a solução quanto com a ampliação da compreensão de um dado problema e tem “como característica principal a aplicação de conhecimentos já disponíveis para a solução de problemas” (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 86).

Esta tese de doutorado se insere na categoria de pesquisa fundamental, conforme Laville e Dionne. Corroborando com a visão desses autores, nas próximas seções deste capítulo serão apresentados elementos que compõem a problemática desta pesquisa, quais sejam: necessidade de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática, produzir pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo que a favoreça, produzir materiais e abordagens de ensino baseados em resultados do campo da Educação Matemática para o ensino superior e de incorporar o computador no ensino da Matemática em nível superior.

1.1.1. A constituição da problemática desta pesquisa

Concebendo então problemática, conforme os autores citados em 1.1, apresentamos nas próximas subseções deste capítulo um conjunto de fatores que acarretam na conscientização de um determinado problema. Esse conjunto de saberes factuais, conceituais ou teóricos e de valores, estão na exigida relação teoria e prática no campo da Educação Matemática, no âmbito da especificidade do ensino e aprendizagem do Cálculo. Entre os pesquisadores da Educação Matemática, há a proposição de que é vital para essa área a produção de resultados

de pesquisa que tragam luzes às dificuldades recorrentes dos estudantes de cursos de Exatas, ou seja, que haja estreitamento dos dois polos dessa área de investigação, a teoria e a prática.

Para pontuar a necessidade de integrar a teoria e a prática no campo da Educação Matemática, trazemos a posição da pesquisadora Barbara Jaworski, que possui o título de *Professor*³ em Educação Matemática pela Loughborough University, do Reino Unido, com relação ao que tem sido feito no campo da Educação Matemática.

O campo da Educação Matemática

[...] tem se tornado maduro em tais considerações teóricas. Entretanto, a posição do ensino da Matemática permanece anômala e subdesenvolvida teoricamente. Enquanto teorias proveem-nos lentes para analisar o ensino (LERMAN, 2001), as “grandes teorias” não parecem oferecer percepções claras para o ensino e maneiras nas quais o ensino vise à promoção da aprendizagem na Matemática⁴ (JAWORSKI, 2006, p. 188, tradução nossa).

Malara e Zan (2002) trazem três concepções relativas ao campo da Educação Matemática, as quais abordam a relação teoria e prática.

A primeira apresenta a Educação Matemática como uma ciência que é autônoma e norteadas em teorias que se sustentam em um sistema conceitual e em métodos originais de investigação. Nesse caso, os métodos não são aqueles tomados de outras áreas do conhecimento, e esse sistema e métodos visam a auxiliar no estudo de fenômenos do ensino da Matemática em sua complexidade, além de analisá-los em seu contexto. Essa concepção tem sido assumida especialmente na França após os estudos de Brousseau em 1986 e o desenvolvimento da Didática da Matemática.

A segunda concepção trata do seguinte:

Educação Matemática como uma disciplina científica inclui teoria, desenvolvimento e prática que interage com o sistema social da escola (formação de professores, desenvolvimento de currículo,

³ O termo inglês *Professor* possui a seguinte definição, segundo o dicionário eletrônico Cambridge Dictionaries Online (<http://dictionary.cambridge.org/>): “um professor que possui o maior grau de uma universidade britânica, ou um professor de alto escalão em uma universidade ou faculdade americana”.

⁴ [...] has become mature in such theoretical considerations. However, the position of mathematics teaching remains theoretically anomalous and underdeveloped. While theory provides us with lenses for analyzing learning (Lerman, 2001), the big theories do not seem to offer clear insights to teaching and ways in which teaching addresses the promotion of mathematics learning.

aulas de matemática, livros didáticos e materiais de apoio, avaliações); com campos relacionados (não apenas com matemática e sua história e epistemologia, mas também com psicologia, ciências da educação, sociologia, etc.) e com uma função de ligação entre matemática e sociedade⁵ (MALARA; ZAN, 2002, p. 553, tradução nossa).

Na terceira concepção, a Educação Matemática é uma ciência aplicada ou ciência de *design*, de um modo geral, como a ciência da prática que estuda ações concretas de ensino pela execução de uma mediação entre Pedagogia, Matemática (com sua história e epistemologia) e outras disciplinas (Psicologia, Antropologia, Sociologia, etc.). A partir dessa integração, a Educação Matemática adquire sua própria singularidade e autenticidade.

Essas concepções são assumidas diferentemente no interior da comunidade da Educação Matemática. Para Malara e Zan (2002), os adeptos da primeira concepção consideram a Educação Matemática como uma disciplina puramente científica, sem conexões com a realidade e com as necessidades mais urgentes dos professores; então, para esse grupo de pesquisadores, não teria sentido discutir a relação entre a teoria e a prática.

Se considerarmos que dentre os integrantes da Educação Matemática estão professores, podemos admitir que neste grupo há pessoas cujo objetivo principal é a melhoria e renovação do ensino, portanto pertencentes à terceira categoria. Esses autores pontuam que, segundo estudos, esses membros são céticos e desinteressados em teorizações (MARGOLINAS, 1998; SILVER, 1997; VERSTAPPEN, 1994 apud MALARA; ZAN, 2002, p. 554).

Nesta tese adotamos elementos da segunda concepção da Educação Matemática, exposta em Malara e Zan (2002), ou seja, aquela que se refere à necessidade de integrar desenvolvimentos e resultados teóricos com o sistema social da escola e de outros campos.

A partir dessa concepção emerge um problema importante proposto por Malara e Zan, que é “a distância entre teoria – um *corpus* de conhecimento sobre a

⁵ Mathematics education as a scientific discipline including theory, development, and practice interacting with the social school system (teacher training, development of curriculum, mathematics classroom, textbooks and teaching aids, assessment) and with related fields (not only with mathematics and its history and epistemology but also with psychology, science education, sociology, etc.) and with a linking function between mathematics and society.

Educação Matemática nas mãos de pesquisadores – e a prática – o ensino real realizado pelos professores”⁶ (MALARA; ZAN, 2002, p. 555, tradução nossa).

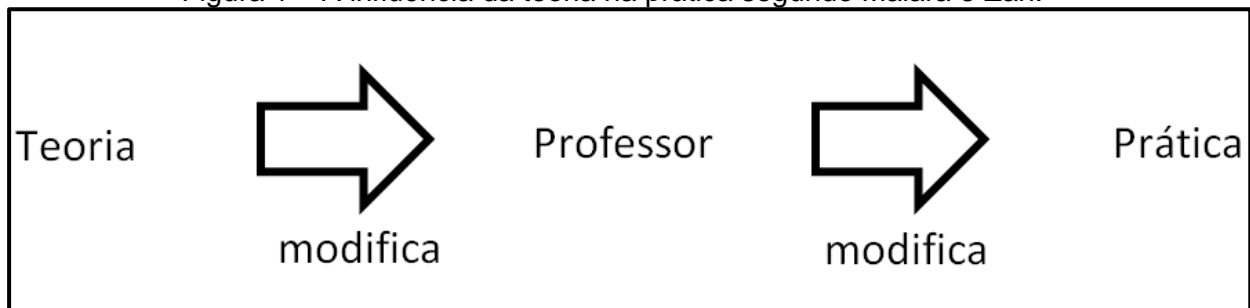
Para Malara e Zan, a integração entre a teoria e a prática é aquela que indica a maneira pela qual a prática deve ser encarada: ensino como uma tomada de decisão e o professor como seu agente. Isso não envolve apenas encontrar soluções para problemas que surgem na sala, mas também na identificação de problemas. Segundo as autoras, ao considerar

[...] o professor como aquele que decide ou soluciona problemas, e não como aquele que executa procedimentos, tem uma forte influência sobre a relação teoria e prática, bem como em teoria em si⁷ (MALARA; ZAN, 2002, p. 562, tradução nossa).

Nesta pesquisa, mesmo que não se tenha proposto uma ação na prática, o alvo principal é o trabalho do professor nas perspectivas indicadas aqui, em que a teoria modifica os processos de tomada de decisão de um professor e, conseqüentemente, sua prática é modificada.

A Figura 1 representa o que é proposto pelas autoras:

Figura 1 – A influência da teoria na prática segundo Malara e Zan.



Fonte: MALARA; ZAN (2002, p. 556).

A mudança é descrita pela ocorrência de “um aumento progressivo da consciência do professor induzido por uma teoria e por uma reflexão sobre ela”⁸ (MALARA; ZAN, 2002, p. 566, tradução nossa).

Malara e Zan (2002) pontuam que os objetivos do pesquisador e do professor em suas atividades são distintos, mas que há uma ligação entre eles, que é a

⁶ [...] the distance between theory — a *corpus* of knowledge on mathematics education in the hands of researchers — and practice — the actual teaching carried out by teachers.

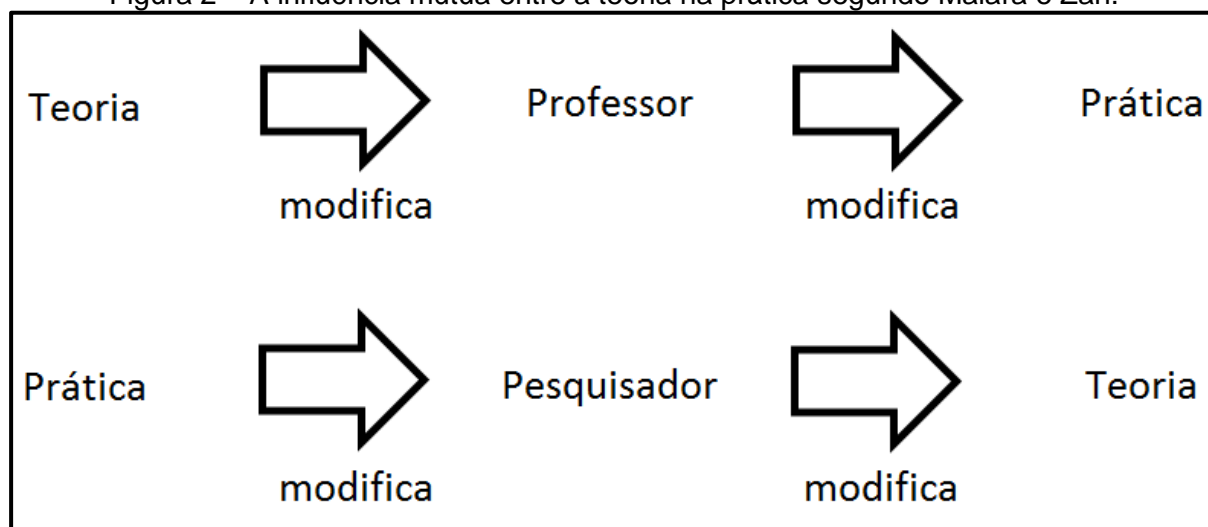
⁷ [...] the teacher as decision maker or problem solver, rather than as executor of procedures, has a strong influence on the theory–practice relationship, as well as on theory itself.

⁸ a progressive increase in teachers’ awareness inducted by a theory and by the reflection on it.

melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática para a qual a teoria e a prática se entrelaçam.

Além disso, essas autoras descrevem a possibilidade de ocorrer mudanças tanto no professor quanto no pesquisador quando estes têm contato com a prática. Essa possibilidade é representada pelo esquema da Figura 2:

Figura 2 – A influência mútua entre a teoria na prática segundo Malara e Zan.



Fonte: Adaptado de Malara e Zan (2002, p. 574).

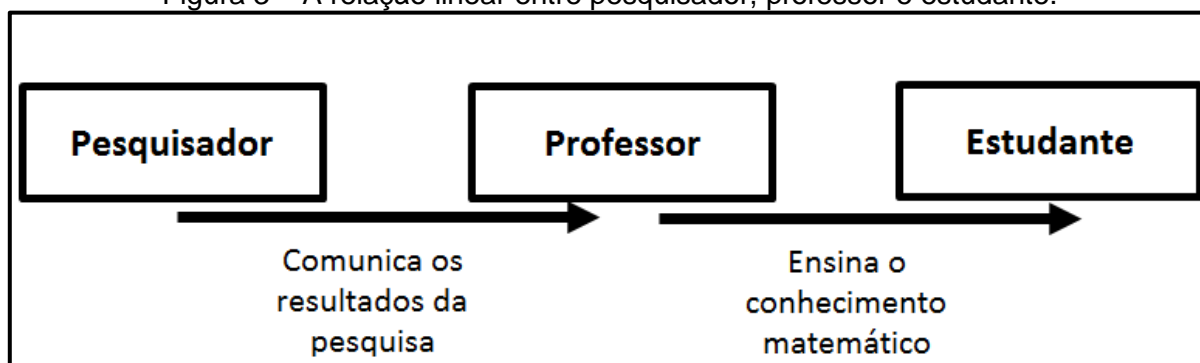
Steinbring afirma que a Educação Matemática deve “contribuir de maneira, mais ou menos direta, para a melhoria da prática de ensino da Matemática e resolver problemas de ensino”⁹ (STEINBRING, 1994, p. 89, tradução nossa). Ele expôs uma expectativa de muitos professores de Matemática e pesquisadores para determinar quando é possível descrever se uma pesquisa pode ser considerada útil. Essa “é caracterizada por uma aplicabilidade direta dos resultados da investigação para os problemas da prática docente. Essa deveria ocasionar melhorias diretas para a prática”¹⁰ (STEINBRING, 1994, p. 89, tradução nossa).

Esse pesquisador também propõe uma relação linear, que apresenta similaridades com a proposta de Malara e Zan (2002, p. 556), entre a teoria e a prática, na qual a teoria forneceria resultados que possuísem acesso direto à prática, com vista a desenvolvê-la. Na Figura 3 segue o esquema proposto por Steinbring:

⁹ [...] to contribute in a more or less direct manner to improving the practice of teaching mathematics and to solve teaching problems.

¹⁰ [...] is characterized by a straightforward applicability of research findings to the problems of teaching practice. This ought to bring about direct improvements of practice.

Figura 3 – A relação linear entre pesquisador, professor e estudante.



Fonte: STEINBRING (1994, p. 91).

De acordo com o modelo apresentado na Figura 3, a “pesquisa, na melhor das hipóteses, teria que determinar conteúdos e formas de novos tópicos da Matemática para o ensino da Matemática”¹¹ (STEINBRING, 1994, p. 90, tradução nossa).

Contudo, Steinbring propõe um modelo complementar ao linear. Esse possui uma característica dialética que conduz as seguintes conclusões:

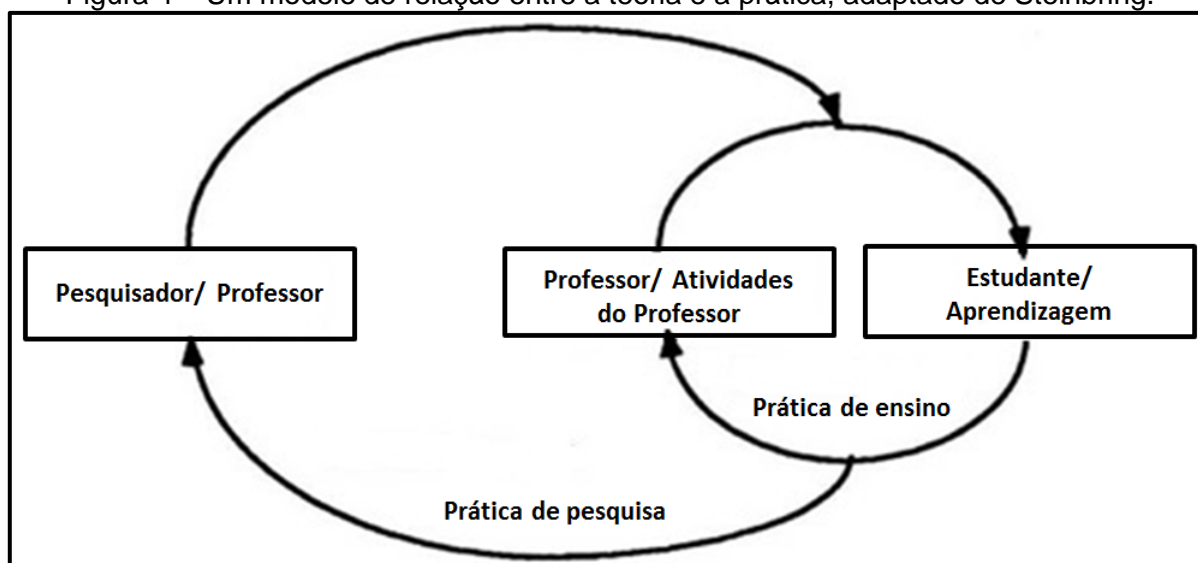
[A] Ciência Didática não tem possibilidade direta de controlar a prática diária do professor de Matemática, e o professor não tem possibilidade direta de controlar os processos de aprendizagem e de compreensão dos estudantes. Os parceiros que participam deste processo de mediação (necessariamente) atuam de modo relativamente autônomo no âmbito das condições sócio institucionais, fato devido ao difícil caráter epistemológico do conhecimento em discussão, que só pode ser entendido, em última análise, por meio de reconstruções pessoais¹² (STEINBRING, 1994, p. 90, tradução nossa, adaptado).

O sistema linear não seria adequado para representar a interação entre a teoria e a prática. Para esse pesquisador é necessário considerar as reconstruções pessoais porque essas são interpretações necessárias dos papéis e perspectivas das teorias didáticas em relação à prática. E isso é expresso pela Figura 4:

¹¹ [...] research, at best, has to determine content and form of new mathematical subject matter for mathematics teaching.

¹² Didactical science has no direct possibility of controlling the everyday practice of the mathematics teacher, and the teacher has no straightforward possibility of controlling the students' process of either learning or comprehension. The partners participating in this process of mediation (necessarily) act relatively autonomously within the framework of the socioinstitutional conditions, a fact due to the difficult epistemological character of the knowledge under discussion, which can ultimately only be understood by means of personal reconstructions.

Figura 4 – Um modelo de relação entre a teoria e a prática, adaptado de Steinbring.



Fonte: STEINBRING (1994, p. 91).

A nova e fundamental mudança de paradigma na relação entre a teoria e a prática, proposta por Steinbring, é a não existência de influências diretas ou dependências hierárquicas, mas trocas e *feedbacks* entre dois domínios sociais, os professores de Matemática e os pesquisadores da Educação Matemática, com vistas a propiciar a reflexão e mediação sobre o conhecimento matemático.

Jaworski corrobora com a interação entre a teoria e a prática e a interação ente professores e pesquisadores, pois uma determinada teoria

[...] não é capaz de mostrar para nós o que o ensino *deve* envolver, mas professores e educadores podem buscá-las para compreender mais claramente o que o ensino *poderia* envolver; então nós aprendemos sobre o ensino com a possibilidade de desenvolver o ensino¹³ (JAWORSKI, 2006, p. 189, tradução nossa, grifo da autora).

De maneira complementar, Jaworski afirma que as teorias auxiliam na análise, ou exemplificam, mas elas não provêm formas de agir e, raramente, dispõem de um guia para a prática. É possível analisar ou explicar a aprendizagem da Matemática a partir de uma perspectiva teórica, “mas é ingênuo supor ou postular teoricamente modelos ou métodos pelos quais seja suposto que a aprendizagem ocorra”¹⁴ (JAWORSKI, 2006, p. 188). Concordamos com Jaworski na medida em

¹³ [...] cannot show us what teaching *should* involve, but teachers and educators can search for clearer understandings of what teaching *might* involve; thus we learn about teaching with the possibility to develop teaching.

¹⁴ [...] but it is naive to assume or postulate theoretically derivative models or methods through which learning is supposed to happen.

que temos clareza de que o material produzido nesta tese não apresenta um modelo para promoção da aprendizagem, mas sim mune o professor de condições para seu favorecimento.

É fato que uma teoria, quando é elaborada, não tem nenhum compromisso de que ela resulte em uma aplicação direta para a prática. No entanto, as referências (JAWORSKI, 2006; STEINBRING, 1994; MALARA; ZAN, 2002) ressaltam a necessidade da integração entre a teoria e a prática, ou seja, entre professores e pesquisadores do campo da Educação Matemática.

Conforme visto nas referências dos parágrafos anteriores, é indicado que haja a integração entre a teoria e a prática, então, o professor cumpre um papel importante. No entanto Robert, Lattuati e Penninckx (1999) destacam diferenças entre as produções dos pesquisadores e a expectativa dos professores, que reforçam os propósitos desta pesquisa: a necessidade de os pesquisadores produzirem materiais de ensino, com vistas a auxiliar na integração entre resultados teóricos e práticas de ensino.

As diferenças indicadas são: os objetivos de pesquisa e de publicação dos pesquisadores não coincidem com os objetivos dos professores em sala de aula; as validações dos pesquisadores podem não ser aquelas que interessam a muitos professores; as escalas de tempo de professores e pesquisadores não são as mesmas; resultados de pesquisas não necessariamente explicitam como as atividades propostas podem ser utilizadas em sala de aula; pesquisa educacional não é prescritiva.

Essas diferenças ressaltam que são necessários cuidados na adaptação de determinada atividade, desenvolvida em uma pesquisa, para o uso em sala de aula. Robert, Lattuati e Penninckx pontuam como elementos teóricos podem nortear as práticas de sala de aula dos professores. Segundo as autoras,

[...] elementos advindos de teorias cognitivas e que servem como base para o trabalho de pesquisadores da didática, também permitem aos professores aprofundar suas reflexões, enriquecer suas compreensões da complexidade da classe, ajudar a fazer a escolha de conteúdo e de gestão e identificar determinados contornos da paisagem matemática que eles têm feito seus alunos

percorrerem¹⁵ (ROBERT; LATTUATI; PENNINGCKX, 1999, p. 143 tradução nossa).

Jaworski (2006) sugere que os professores utilizem investigação no ensino da Matemática para explorar o desenvolvimento e a realização de tarefas, problemas e atividades em sala de aula, e que os pesquisadores utilizem a investigação como uma ferramenta de capacitação dos professores com vistas ao desenvolvimento do ensino.

As diferenças indicadas por Robert, Lattuari e Penninckx, e por Jaworski, nos levam a concluir que o desenvolvimento de materiais, baseados em elementos teóricos, possa ser uma das tarefas dos pesquisadores em Educação Matemática que podem contribuir com a integração entre a teoria e a prática no campo da Educação Matemática.

Com relação à necessidade de produzir pesquisas que procurem articular a teoria e a prática no ensino e aprendizagem do Cálculo, Rasmussen, Marrangelle e Borba ressaltam que “é fundamentalmente importante que o corpo de pesquisa em ensino, aprendizagem e entendimento do Cálculo contribua com a prática educacional de estudantes que estão matriculados em cursos de Cálculo a cada ano”¹⁶ (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014, p. 507, tradução nossa).

Em Schoenfeld (1994) é afirmado que uma pesquisa da Educação Matemática no ensino superior pode ser considerada como bem executada se essa prover com base em teorias, “maneiras eficientes de reforçar nosso entendimento do pensamento, do ensino e da aprendizagem da Matemática”¹⁷ (SCHOENFELD, 1994, p. 4, tradução nossa).

Com relação às pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo, Rasmussen, Marrangelle e Borba entendem que os resultados das mesmas, apesar de trazerem contribuições sobre o ensino e aprendizagem dos conceitos de limite,

¹⁵ [...] éléments, empruntés aux théories cognitives et servant de fondements aux travaux des chercheurs en didactique, permettent aussi aux enseignants d’approfondir leur réflexion, d’enrichir leur connaissance de la complexité de la classe, d’aider aux choix de contenus et de gestion, et de représer certains reliefs du paysage mathématique qu’ils ont à faire parcourir à leurs élèves.

¹⁶ [...] it is fundamentally important that the body of research on calculus learning, teaching, and understanding coherently contribute to the practice of educating the millions of students who enroll in calculus courses each year.

¹⁷ [...] disciplined ways of enhancing our understanding of mathematical thinking, learning, and teaching.

derivada e integral, ainda permanecem isolados e não coordenados (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014).

A importância dessa temática é levada em conta pela *ZDM*¹⁸, uma das publicações mais antigas que apresentam artigos relacionados ao campo da Educação Matemática. Em seu volume 46, nº 4, de agosto de 2014, dedica um número especial em homenagem ao influente educador matemático alemão Arnold Kirsch (1922-2013) e apresenta resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo. Destacamos desse número o artigo *Research on calculus: what do we know and where do we need to go?* (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014).

Rasmussen, Marrangelle e Borba revelam que pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo têm apresentado quatro padrões: em que foi objetivado identificar e estudar dificuldades e obstáculos cognitivos dos estudantes; em que foram investigados processos pelos quais os estudantes aprendem um conceito particular; estudos empíricos que incluem os efeitos de inovações curriculares e pedagógicas na aprendizagem dos estudantes, e mais recentemente, o último padrão identificado é composto por pesquisas relacionadas à busca dos conhecimentos, crenças e práticas docentes.

Considerando esses padrões de pesquisa, Rasmussen, Marrangelle e Borba (2014) entendem que em vista da profundidade do que é conhecido sobre a aprendizagem dos alunos, a partir de pesquisas anteriores, especialmente, daquelas conduzidas nas décadas de 80 e 90, é necessário que os pesquisadores do campo da Educação Matemática no ensino superior se engajem no desenvolvimento de projetos de pesquisa abrangentes, nos quais se busque que matemáticos e educadores matemáticos trabalhem em conjunto com vistas a abordarem questões relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo tanto de natureza teórica quanto de natureza pragmática.

Em Robert e Speer (2001) é reforçada a necessidade da integração teoria e prática em pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo. Esse trabalho configura um dos capítulos do livro *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*, organizado por Derek Holton, que trouxe resultados de um estudo encomendado

¹⁸ Endereço eletrônico da publicação: <https://link.springer.com/journal/11858>

pela Comissão Internacional de Instrução em Matemática (ICMI¹⁹) no final da década de 90, sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, em nível universitário, em todo o mundo (SILVA, 2011).

No trabalho dessas autoras foram destacadas duas categorias de pesquisa para o ensino e aprendizagem do Cálculo e Análise. A primeira incluía pesquisas guiadas por teorias, e a outra por pesquisas guiadas pela prática. Essa categorização não implicava em dizer separação, uma vez que Robert e Speer entendem que essas duas categorias são complementares e que o campo da Educação Matemática “fará progressos efetivos no ensino e na aprendizagem somente se tratar de forma eficaz questões teóricas e pragmáticas simultaneamente”²⁰ (ROBERT; SPEER, 2001, p. 297, tradução nossa).

Com isso, podemos afirmar que nos dois trabalhos analisados nos parágrafos anteriores (ROBERT; SPEER, 2001; RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014) é feita a mesma constatação: a necessidade de desenvolver pesquisas sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo que visem à melhoria da prática.

Outro ponto de destaque do artigo de Rasmussen, Marrangelle e Borba (2014) é a identificação de lacunas nas pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo. A primeira refere-se ao fato de que as investigações publicadas no volume 46, nº 4, da *ZDM*, apresentaram só pesquisas cujos temas abordados foram os conceitos de limite, derivada e integral, e não outros tópicos avançados do Cálculo. Uma constatação similar foi exposta no trabalho de Britton e Henderson (2013), em que foram revisados os anais das conferências Delta²¹ no período de 1997, ano da primeira conferência, até o ano de 2011 e foi revelado que poucos artigos abordavam outros tópicos do Cálculo, como, por exemplo, as equações diferenciais e o cálculo de funções de duas (ou mais) variáveis.

Outra reflexão sobre as lacunas foi posta a partir da comparação dos artigos de Kouropatov e Dreyfus (2014) e Swidan e Yerushalmy (2014). Nos dois trabalhos foi abordado o conceito de integral (seja o de integral definida quanto indefinida) de

¹⁹ *International Commission on Mathematical Instruction.*

²⁰ [...] will make progress on effective teaching and learning only if it deals meaningfully with theoretical and pragmatic issues simultaneously.

²¹ A conferência Delta é um evento bienal que teve início em 1997, em Brisbane, Austrália. Essa conferência atrai um público amplo, oriundo de várias nacionalidades que inclui matemáticos, educadores e pesquisadores empenhados em discutir questões relacionadas ao ensino da Matemática e da Estatística no ensino superior.

maneiras distintas: o primeiro trouxe uma abordagem baseada na função acumulação²², sendo que os processos de aprendizagem dos estudantes foram analisados segundo o referencial teórico-metodológico da Abstração em Contexto, sendo esse um referencial teórico em que é objetivado analisar a construção do conhecimento matemático abstrato durante o processo de aprendizagem. No segundo estudo (SWIDAN; YERUSHALMY, 2014) foi utilizado um ambiente tecnológico dinâmico, em que eram exibidos gráficos de uma função e de uma de suas primitivas. Com as atividades desenvolvidas visou-se que os sujeitos percebessem as relações entre esses dois gráficos. O referencial teórico desse estudo é aquele que considera a aprendizagem com um processo de objetificação. A partir desses dois estudos, que abordaram os mesmos conceitos matemáticos, porém, com quadros teóricos distintos, Rasmussen, Marrangelle e Borba lançam a seguinte questão para os pesquisadores do campo da Educação Matemática e interessados: “Como, então, poderia o campo de pesquisa coordenar tais avanços?”²³ (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014, p. 512, tradução nossa). O segundo objetivo proposto pelos autores: uma tentativa de coordenar e conectar diferentes perspectivas teóricas e os seus respectivos achados. Segundo esses autores, tal objetivo vem sendo buscado, contudo, ainda há necessidade de ampliar os esforços nesse trabalho de coordenação.

Nesta pesquisa pretendemos coordenar elementos teóricos propostos por David Tall e seus associados, com vistas ao desenvolvimento de material de ensino para o Cálculo. Ademais, quando consideramos os padrões de pesquisa propostos em Rasmussen, Marrangelle e Borba (2014), percebemos que os materiais desta tese pertencem à interface de três dos padrões de pesquisa por eles apresentados: das pesquisas em que foram investigados processos pelos quais os estudantes aprendem um conceito particular; estudos empíricos que incluem os efeitos de inovações curriculares e pedagógicas na aprendizagem dos estudantes; e pesquisas que buscam identificar os conhecimentos, crenças e práticas de professores.

²² Essa função é definida do seguinte modo: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e considere a função $F_{\Delta x, a}$, dada pela sentença $F_{\Delta x, a}(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{x-a}{\Delta x} \rfloor} f(a + i\Delta x)\Delta x$, $a \leq x \leq b$. A função acumulação, a partir de a , é aquela dada pela sentença $F_a(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F_{\Delta x, a}(x)$, $a \leq x \leq b$.

²³ How then, should the research field coordinate such advances?

1.1.2. A necessidade de produzir materiais e abordagens de ensino baseadas em resultados do campo da Educação Matemática para o ensino superior

Neste item abordamos o que é apontado na problemática: a necessidade de produzir materiais e propostas de abordagens de ensino de tópicos da Matemática no ensino superior.

Um fator que deve ser levado em conta na produção de materiais é o entendimento de que é necessário considerar diferenças na maneira pela qual cursos de Matemática em nível superior são ministrados e nas expectativas dos professores em relação à aprendizagem dos alunos.

Tomando por base entrevistas feitas com estudantes Mamona-Downs e Downs (2002), evidencia-se que há diferenças entre o ensino de Matemática do nível básico e do superior. A primeira é que as práticas de ensino de nível superior exigem uma participação independente do estudante em sua aprendizagem, com a qual muitos estudantes não estão acostumados. Nesse aspecto, os autores relatam o seguinte sentimento dos estudantes:

Eles sentem que a própria natureza do que está sendo ensinado mudou radicalmente, e eles não entendem completamente como, por que e de que forma lidar com essa mudança²⁴ (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002, p. 98, tradução nossa).

Mamona-Downs e Downs (2002) apontam três aspectos de dificuldade, por parte dos estudantes, que podem ser relacionados ao currículo escolar: (a) reclamação dos estudantes de que a Matemática é ‘muito abstrata’ sendo que eles, “frequentemente, carecem no nível avançado, do sentido da *razão* pela qual a abstração foi feita”²⁵ (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002, p. 168, tradução nossa, grifo do autor); (b) o caráter de rigor exigido no processo de produção de argumentos utilizados no ensino superior em contraposição à escola básica em que esse processo acontece por meio de afirmações matemáticas com um nível menor de rigor simbólico-formal; (c) a diferença é que na Matemática avançada a conceitualização de um objeto matemático tende a ser feita a partir da exposição de sua definição formal.

²⁴ They fell that the very character of the material taught has radically changed, and they don't understand fully how, why and how to cope with this change.

²⁵ [...] often lack at the advanced level lies the sense of *why* the abstraction was made.

Igliori (2009) reforça tais diferenças na maneira como a aprendizagem, no ensino superior, é concebida e pontua duas mudanças: uma na forma como os conteúdos curriculares são tratados e outra na atitude dos estudantes. Os conteúdos são considerados como “objetos de ensino”, ao invés de “objetos de aprendizagem”, os quais devem ser compartilhados entre professores e estudantes. No primeiro caso, a pesquisadora se refere ao fato dos estudantes do ensino superior passarem a ter maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem, diferentemente do segundo, em que esse está primordialmente nas mãos dos professores.

As reflexões, indicadas nos itens anteriores deste texto, Relatório da tese, sobre as diferenças entre as abordagens da Matemática do ensino básico e do superior e da necessidade de considerar aspectos teóricos e práticos nas investigações apoiam nossa decisão de considerar como elemento de pesquisa a criação de material de ensino, fundamentado teoricamente e que leve em consideração elementos da transição entre a Matemática básica e a Matemática superior.

É com o desenvolvimento de tal material que vislumbramos uma maneira de tornar acessível a professores o que foi produzido por pesquisadores. Essa preocupação encontra respaldo no que foi discutido por Fey (1994) sobre a implicação dos estudos psicológicos para o ensino e aprendizagem da Matemática escolar, ao dizer que:

No entanto, longe de fornecer uma orientação clara para a construção de estratégias de ensino e ambientes de aprendizagem adequados, os resultados são mais sugestivos do que prescritivos – incompletos e muitas vezes contraditórios. Um desenvolvedor de currículo ou professor que se volta para a Psicologia para *percepções* sobre o ensino de ideias matemáticas e métodos fundamentais de raciocínio vai encontrar teorias provocativas, mas também um grande desafio para traduzir essas teorias em práticas de sala de aula praticáveis²⁶ (FEY, 1994, p. 20).

²⁶ However, far from providing clear guidance to construction of optimal teaching strategies and learning environments, the results are more suggestive than prescriptive – incomplete and often contradictory. A curriculum developer or teacher who turns to psychology for insight into the teaching of key mathematical ideas and reasoning methods will find provocative theories, but also a substantial challenge to translate those theories into practical classroom practices.

Nesta pesquisa assumimos que, apesar de desafiante, uma maneira de traduzir as teorias em práticas de sala de aula é elaborando material de ensino por meio de um processo de produção fundamentado em teorias.

1.1.3. O uso do computador no ensino da Matemática

O computador, munido com determinado *software*, tem sido utilizado no desenvolvimento de pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo. Um exemplo de *software* que tem sido utilizado é o GeoGebra. Ele é gratuito e une a Geometria, a Álgebra e o Cálculo em uma mesma aplicação²⁷. Foi desenvolvido em linguagem Java e possui uma interface considerada simples. Com esse *software* é possível desenvolver e elaborar *applets* que podem ser utilizados tanto em computadores nos quais o GeoGebra não está instalado, quanto em sítios da Internet. Ademais, possui ferramentas e comandos específicos que podem ser utilizados para a introdução e desenvolvimento de materiais que visem à introdução de conceitos do Cálculo.

Pela integração da Álgebra com a Geometria, possibilitada pelo *software*, é possível que o professor trabalhe aspectos relacionados à representação dos conceitos matemáticos em diversos registros semióticos. O primeiro aspecto relativo às representações é que o sujeito pode operar em um registro e pode ver as consequências de suas modificações em outros.

Fey (1994) destaca um aspecto considerado importante para o ensino e aprendizagem da Matemática em determinadas teorias cognitivas. Trata-se da representação do conhecimento na memória. Por esse motivo, pesquisadores da Educação Matemática têm se interessado pelas pesquisas psicológicas relacionadas ao entendimento das representações. Em alguns casos, o computador pode ser utilizado porque com ele é possível exibir simultaneamente representações gráficas, numéricas, simbólicas e verbais. Ademais, Fey destaca um dos benefícios da utilização das representações produzidas pelo computador:

²⁷ O termo aplicação, no âmbito da Ciência da Computação, é utilizado para denominar um programa de computador que tem por objetivo ajudar o seu usuário a desempenhar uma tarefa específica. Um exemplo desse tipo de programa de computador são os navegadores da Web, como o Internet Explorer, o Firefox e o Chrome.

[...] as representações computacionais tornaram ideias profundas e problemas difíceis acessíveis aos estudantes de diferentes maneiras – alterando pressupostos curriculares tradicionais sobre o escopo e a sequência. Por exemplo, com o uso de calculadoras gráficas de baixo custo, os alunos em álgebra elementar são capazes de resolver equações difíceis, desigualdades e problemas de otimização, com métodos de aproximação sucessivas, visuais e numéricos, muito antes de adquirir as habilidades de manipulação simbólica que têm sido um dos pré-requisitos tradicionais para esse trabalho²⁸ (FEY, 1994, p. 20, tradução nossa).

Segundo Tall, qualquer material para o ensino que utilize *software* para a aprendizagem da Matemática precisa levar em consideração o desenvolvimento cognitivo do aprendiz. Assim, a partir do material e das atividades desenvolvidas é possível que o sujeito formule conclusões que podem diferir significativamente da estrutura lógica formal da Matemática (TALL, 1994). Segundo Giraldo (2004), esse fenômeno denomina-se conflito teórico computacional.

Além disso, o computador pode ser programado para responder de maneira predefinida, ele possibilita a criação de um ambiente no qual o aprendiz pode explorar determinados elementos da teoria que são pretendidos pelo professor (TALL, 1994).

Além disso, o computador, munido de determinado *software*, possibilita omitir em uma dada atividade de ensino determinados “procedimentos internos, permitindo que o aprendiz se concentre em outros aspectos importantes para o desenvolvimento cognitivo do seu conhecimento matemático”²⁹ (TALL, 1994, p. 198, tradução nossa).

1.2. Objetivos e Problema de pesquisa

A partir da problemática desta pesquisa, apresentamos o objetivo e a questão norteadora.

²⁸ [...] the computer representations have made deep ideas and difficult problems accessible to students in new ways – altering traditional curriculum assumptions about scope and sequence. For example, with the use of inexpensive graphing calculators, students in elementary algebra can solve difficult equations, inequalities, and optimization problems with visual and numerical successive approximation methods, long before they acquire the symbol manipulation skills that have been the traditional prerequisites for such work.

²⁹ [...] carry out internal procedures, allowing the learner to focus on other facets of importance in the cognitive growth of mathematical knowledge.

Segundo Laville e Dionne, um “problema de pesquisa é um problema que se pode ‘resolver’ com conhecimentos e dados já disponíveis ou com aqueles factíveis de serem produzidos” (LAVILLE, DIONNE, 1999, p. 87). Além disso, para um problema de pesquisa é suposto que seja possível coletar informações complementares com o objetivo de cercá-lo, compreendê-lo, resolvê-lo ou eventualmente contribuir para a sua resolução. Outra característica é que um problema de pesquisa deve “fornecer novos conhecimentos para o tratamento de questões a eles relacionadas” (LAVILLE, DIONNE, 1999, p. 88) e contribuir com a bagagem de conhecimentos coletados com vistas a auxiliar a compreensão de um dado fenômeno e ao seu equacionamento por uma comunidade de pesquisadores.

Creswell conceitua um problema de pesquisa como uma “questão ou uma preocupação que precisa ser tratada” (CRESWELL, 2010, p. 43) e que conduz à necessidade de um estudo.

A partir dos elementos apresentados na problemática desta pesquisa que ressaltaram a necessidade de buscar alternativas que possibilitem integrar a teoria e a prática no campo da Educação Matemática (JAWORSKI, 2006; MALARA; ZAN, 2002; STEINBRING, 1994), em pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo (RASMUSSEN; MARRANGELLE; BORBA, 2014), da necessidade de produzir materiais e abordagens de ensino baseados em resultados do campo da Educação Matemática, assumimos como objetivo desta tese: elaborar material para o ensino de conceitos do Cálculo como um dos meios de promover integração entre teoria e prática.

Em função do objetivo anunciado, entende-se que esta pesquisa está inserida na modalidade estudo teórico. Para Fiorentini e Lorezato (2009), esse tipo de estudo tem por objetivo a (re)construção ou desenvolvimento de teorias, conceitos e ideias, tendo em vista, em termos imediatos, o aprimoramento de fundamentos teóricos ou desenvolvimento de quadro de referência. Nesse tipo de estudo, o pesquisador deve assumir uma postura teórica exploratória, segundo proposição de Fiorentini e Lorenzato (2009), quando dizem que

O pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 67).

Ou, ainda, conforme Gil (2008), quando diz que estudos que adotam tal postura têm

[...] como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou *hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores* (GIL, 2008, p. 27, grifo nosso).

Pesquisas com postura teórica exploratória podem ser desenvolvidas por meio de levantamentos bibliográficos, com vistas a proporcionar uma visão geral sobre um determinado problema de pesquisa, sendo utilizado quando o tema é pouco explorado. Gil ressalta ainda que “muitas vezes, as pesquisas exploratórias constituem a primeira etapa de uma investigação mais ampla” (GIL, 2008, p. 27), como o caso desta pesquisa que objetiva a elaboração de materiais para o ensino de conceitos do Cálculo, com vistas a promover uma integração entre resultados teóricos e a prática, que poderá servir de base a novas pesquisas de natureza empírica, seja tanto com a utilização desses por parte de estudantes quanto à observação de um professor utilizando esse material em sala de aula.

Quanto aos procedimentos de coleta de dados que são empregados nesta pesquisa, eles são classificados com uma pesquisa bibliográfica, a qual é realizada a partir de levantamento de referências teóricas publicadas em meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, sítios da Internet e outros. Sendo assim, foi feito um levantamento de construtos teóricos desenvolvidos por Tall e daqueles advindos da Gênese Documental para o desenvolvimento de materiais de ensino para conceitos do Cálculo.

O problema desta pesquisa é enunciado a partir das seguintes questões:

Como a Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche, pode subsidiar a proposição e o desenvolvimento de material para o ensino dos conteúdos: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências? Como constructos teóricos de Tall e seus colaboradores podem ser incorporados na elaboração do material de modo a levar em conta dificuldades de estudantes de Cálculo apontadas em pesquisa?

A resposta a essas questões visa a contribuir com o desenvolvimento do ensino e aprendizagem do Cálculo.

CAPÍTULO 2

QUADRO TEÓRICO

Neste capítulo analisamos o papel de um quadro teórico em uma pesquisa e apresentamos os quadros teóricos para esta tese.

2.1. O papel do Quadro Teórico em uma pesquisa

Em uma perspectiva mais geral, tomamos por base o que diz Severino sobre um quadro teórico, ou seja, “o universo de princípios, categorias e conceitos, formando sistematicamente um conjunto logicamente coerente, dentro do qual o trabalho do pesquisador se fundamenta e se desenvolve” (SEVERINO, 2000, p. 162). O quadro teórico possui a função de servir como diretriz e orientação do percurso da pesquisa, e não de subjugar, de maneira mecânica e formal, o pensamento criativo do pesquisador. Na constituição do quadro teórico de uma pesquisa é necessário escolher elementos consistentes e coerentes com o problema abordado, como alerta:

Não se pode agregar, em um único quadro, elementos teóricos incompatíveis entre si, ainda quando modelos diferentes pudessem ser mais úteis para a solução de diferentes processamentos de raciocínio ou de diferentes aspectos do problema. Fusões artificiais de modelos teóricos incoerentes levam necessariamente ao sincretismo lógico-filosófico, de pouca validade para o trabalho científico (SEVERINO, 2000, p. 162).

No que se relaciona à Educação Matemática, é importante levar em conta o que dizem Sriraman e English (2010) quando destacam o reconhecimento da teoria nesse campo de pesquisa e quando distinguem os papéis de uma teoria como uma ferramenta ou como um objeto. Como uma ferramenta destacam:

(a) conceber maneiras para melhorar o ambiente de ensino/aprendizagem incluindo o currículo, (b) desenvolver metodologias, (c) descrever, interpretar, explicar e justificar observações, em sala de aula, de estudantes e de atividades do professor (d) transformar problemas práticos em problemas de pesquisa, (e) definir diferentes passos no estudo de um problema de

pesquisa, e (f) gerar conhecimento³⁰ (SRIRAMAN; ENGLISH, 2010, p. 13, tradução nossa).

Ou, como objeto:

[...] um de seus objetivos pode ser o avanço da teoria em si. Isso pode incluir o teste de uma teoria ou algumas ideias ou relações da teoria (por exemplo, em outro contexto ou) como um meio para produzir novos desenvolvimentos teóricos³¹ (SRIRAMAN; ENGLISH, 2010, p. 13, tradução nossa).

Assude e outros (ASSUDE et al., 2008) dizem que a utilização da teoria em pesquisas que lidam com o ensino e aprendizagem da Matemática tem sido efetivada a partir de duas perspectivas, nomeadas por estrutural e funcional. Na primeira perspectiva a teoria é um sistema coerente e organizado de conceitos e noções do campo da Educação Matemática. Na perspectiva funcional, a teoria é considerada como um sistema de ferramentas que permite uma especulação sobre determinada realidade. E de forma “ativa porque essas ferramentas podem permitir a observação, análise, interpretação de uma realidade de ensino e aprendizagem (ou práticas), e podem produzir novos conhecimentos sobre essa realidade”³² (ASSUDE et al., 2008, p. 342, tradução nossa).

Silver e Herbst (2007) propõem a noção de teoria como mediadora entre problemas, práticas e pesquisa. Esses autores destacam que a teoria pode atuar como um mediador entre a pesquisa e a prática, pois é possível, por meio da teoria, produzir normas pelas quais sejam possíveis fornecer uma conduta que possibilita a avaliação de práticas de sala de aula, bem como servir como uma ferramenta para o pesquisador compreender (no sentido de descrever e explicar) essas práticas.

Nesta pesquisa, os quadros teóricos auxiliam a escolha dos elementos utilizados e a organização do material para o ensino. Conforme Sriraman e English (2010), essa utilização tem o papel de uma ferramenta, na medida em que a pesquisa envolve concepção de material para o ensino de Cálculo de maneira a contribuir com melhora do ambiente de ensino/aprendizagem. Também assumimos

³⁰ (a) to conceive of ways to improve the teaching/learning environment including the curriculum, (b) to develop methodology, (c) to describe, interpret, explain, and justify classroom observations of student and teacher activity, (d) to transform practical problems into research problems, (e) to define different steps in the study of a research problem, and (f) to generate knowledge.

³¹ [...] as an *object*, one of its goals can be the advancement of theory itself. This can include testing a theory or some ideas or relations in the theory (e.g., in another context or) as a means to produce new theoretical developments.

³² [...] active one because these tools can allow to observe, analyse, interpret a teaching and learning reality (or practices), and can produce new knowledge about this reality.

a perspectiva funcional de uma teoria proposta por Assude e outros (ASSUDE et al., 2008) quando fazemos uma proposição de integrar elementos teóricos às práticas de ensino do Cálculo por meio da produção de material.

Na leitura primeira dos quadros teóricos desta pesquisa pode-se assumir que os elementos que os compõem iluminam a busca dos dados a serem obtidos do seguinte modo: a Gênese Documental traz elementos que podem auxiliar a organização e desenvolvimento do material para o ensino pretendido, de modo a possibilitar sua inclusão no conjunto de recursos de um professor para suas aulas; e os constructos teóricos desenvolvidos por Tall refletem questões cognitivistas relacionadas às dificuldades, permitindo que o material produzido contribua com o favorecimento da aprendizagem de conceitos do Cálculo. Desse modo, esses quadros teóricos possibilitam a conjunção de teorias em uma tentativa de conectar diferentes perspectivas teóricas e os seus respectivos achados, seguindo o alerta de Severino (2000), na medida em que a integração entre a teoria e a prática é defendida em Rasmussen, Marrangelle e Borba (2014) e Silver e Herbst (2007).

2.2. Quadros Teóricos para esta tese

2.2.1. A Gênese Documental

A Gênese Documental é uma teoria elaborada por Gueudet e Trouche que toma como ponto de partida o trabalho de documentação elaborado pelo professor para preparar sua aula, considerando essa documentação como o cerne tanto das atividades por ele desenvolvidas quanto ao desenvolvimento profissional do mesmo (GUEUDET; TROUCHE, 2009). Esses autores definem trabalho de documentação como: a busca por recursos; a seleção e criação de tarefas matemáticas; o planejamento de sequências de atividades; o gerenciamento do tempo disponível e a administração dos artefatos disponíveis.

Na teoria da Gênese Documental são introduzidas as noções ‘documento’ e ‘recurso’, complementares e distintas. Essas noções se assemelham às noções ‘artefato’ e ‘instrumento’ propostas por Rabardel. Antes de pontuar a distinção entre recurso e documento, vamos apresentar definições sobre artefato e instrumento.

Um artefato é qualquer coisa, com um determinado objetivo, que sofre uma transformação pelo homem. Essa definição não restringe, no entanto, o significado às coisas materiais (do mundo físico), pois possibilita incluir, sem dificuldade, os sistemas simbólicos.

Ou ainda, segundo Rabardel,

No entanto, nós lhe daremos um conteúdo mais preciso que aquele de “coisa tendo sofrido uma transformação de origem humana”. De fato, o que nos interessa é a coisa suscetível de um uso, elaborada para se inscrever nas atividades finalizadas.

A finalização é constitutiva da concepção do artefato, ou ao menos da classe de artefatos [...] Cada artefato foi concebido para produzir uma classe de efeitos. [...] Ou em outras palavras, a cada artefato corresponde possibilidades de transformação dos objetos das atividades, que foram antecipadas, deliberadamente pesquisadas e que são suscetíveis de se atualizar no uso³³ (RABARDEL, 1995, p. 49, tradução nossa).

E o termo instrumento é utilizado

[...] para designar o artefato em situação, inscrito ao uso, em uma relação instrumental à ação do sujeito, como um meio dele. É somente uma primeira definição correspondente a uma abordagem minimal da noção psicológica de instrumento que corresponderá a um dos usos, o mais fraco, que nós teremos da noção de instrumento³⁴ (RABARDEL, 1995, p. 49, tradução nossa).

Segundo Rabardel e Verillon (1995): “o instrumento não existe por si só, ele se transforma em um instrumento quando o sujeito se torna hábil em apropriar-se dele e quando o tiver integrado a suas atividades”³⁵ (p. 80, adaptado).

Para determinado sujeito, um artefato passa a ser um instrumento quando adquire significado, e esse processo, também definido por Rabardel, é chamado de Gênese Instrumental. Essa gênese ocorre quando um “*instrumento* resulta de um

³³ Cependant nous lui donnerons un contenu plus précis que celui de “chose ayant subi une transformation d’origine humaine”. En effet, ce qui nous intéresse, c’est la chose susceptible d’un usage, élaborée pour s’inscrire dans des activités finalisées.

La finalisation est constitutive de la conception de l’artefact, ou du moins de la classe d’artefacts [...] Chaque artefact a été conçu pour produire une classe d’effets [...] Autrement dit, à chaque artefact correspondent des possibilités de transformations des objets de l’activité, qui ont été anticipées, délibérément recherchées et qui sont susceptibles de s’actualiser dans l’usage.

³⁴ [...] pour désigner l’artefact en situation, inscrit dans un usage, dans un rapport instrumental à l’action du sujet, en tant que moyen de celle-ci. Ce n’est là qu’une première définition correspondant à une approche minimale de la notion psychologique d’instrument qui correspondra à l’un des usages, le plus faible, que nous aurons de la notion d’instrument.

³⁵ [...] the instrument does not exist in itself, it becomes an instrument when the subject has been able to appropriate it for himself and has integrated it with his activity.

*processo, denominado Gênese Instrumental, por meio do qual o sujeito constrói esquemas de utilização para o artefato em uma dada classe de situações*³⁶ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 204, tradução nossa, grifo dos autores).

Para Rabardel (1995), a Gênese Instrumental inclui dois processos: a instrumentação e a instrumentalização, conceituados da seguinte forma:

O processo de instrumentalização diz respeito ao surgimento e evolução de componentes relativas aos artefatos do instrumento: seleção, agregação produção e instituição de funções, desvios e catacrese, atribuição de propriedades, transformação dos artefatos (sua estrutura, seu funcionamento, etc.) que se estendem às realizações e criações de artefatos cujos limites são, portanto, difícil de determinar;

O processo de instrumentação está relacionado ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução para acomodação, coordenação combinada, inclusão e assimilação recíproca, assimilação de novos artefatos aos esquemas já constituídos etc.³⁷ (RABARDEL, 1995, p. 110, tradução nossa).

Em Alencar (2012) encontra-se um exemplo da Gênese Instrumental para o qual o *software* GeoGebra é um artefato para professores. À medida que eles começam a desvendar as ferramentas básicas e a descobrir a maneira pela qual o *software* funciona, por meio das oficinas oferecidas, foi possibilitado aos professores a elaboração de situações de uso do *software*, e eles começaram desenvolver e agregar ao artefato esquemas de utilização e, então, o artefato transforma-se em um instrumento para esses professores. À medida que o *software* for sendo utilizado, vão sendo agregados e desenvolvidos outros esquemas de utilização e, então, o artefato é transformado em um novo instrumento para os professores.

Trouche se insere nesse estudo da relação artefato/instrumento considerando que: ademais, “um instrumento pode ser considerado como uma extensão do corpo, um órgão funcional construído de uma componente de um artefato (um artefato, ou a

³⁶ [...] *instrument* results from a *process*, named *instrumental genesis*, through which the subject builds a *scheme* of utilization of the *artifact*, for a given class of situation.

³⁷ Les processus d'instrumentalisation concernent l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses, attribution de propriétés, transformation de l'artefact (structure, fonctionnement etc.) qui prolongent les créations et réalisations d'artefacts dont les limites sont de ce fait difficiles à déterminer;

Les processus d'instrumentation sont relatifs à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur fonctionnement, leur coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués etc.

parte de um artefato mobilizado em uma atividade) e uma componente psicológica”³⁸ (TROUCHE, 2004, p. 285, tradução nossa).

Trouche exemplifica o processo de instrumentação como sendo aquele

[...] processo por meio do qual o artefato *imprime sua marca* no sujeito, ou seja, permite que ele/ela desenvolva uma atividade dentro de algumas limitações (as restrições do artefato). Pode-se dizer, por exemplo, que o bisturi *instrumenta* um cirurgião”³⁹ (TROUCHE, 2004, p. 290, tradução nossa, grifo do autor).

A instrumentalização passa por diferentes estágios, descritos por Trouche:

[...] um estágio de descoberta e seleção das funções pertinentes, um estágio de personalização (alguém encaixa o artefato em sua mão) e um estágio de transformação do artefato, às vezes, em direções não planejadas pelo criador, por exemplo: modificações na barra de tarefas, a criação de atalhos de teclado, armazenamento de programas de jogos, a execução automática de algumas tarefas (sítios de fabricantes de calculadoras e sítios pessoais de usuários particularmente ativos que, muitas vezes oferecem programas para determinadas funções, métodos e formas de resolver determinadas classes de equações, etc.). Instrumentalização é um processo de diferenciação dirigido aos próprios artefatos⁴⁰ (TROUCHE, 2004, p. 293, tradução nossa).

De maneira complementar, Gueudet e Trouche (2009) destacam esses dois processos do seguinte modo:

Por um lado, o sujeito guia a maneira que o artefato é utilizado e, nesse sentido, *molda* o artefato: esse processo é chamado de *instrumentalização*. Por outro lado, as *affordances*⁴¹ e restrições do artefato influenciam a atividade do sujeito: esse processo é chamado

³⁸ [...] an instrument can be considered as an extension of the body, a functional organ made up of an artifact component (an artifact, or the part of an artifact mobilized in the activity) and a psychological component.

³⁹ [...] process by which the artifact *prints its mark* on the subject, i.e., allows him/her to develop an activity within some boundaries (the constraints of the artifact). One might say, for example, that the scalpel *instruments* a surgeon.

⁴⁰ [...] a stage of discovery and selection of the relevant functions, a stage of personalization (one fits the artifact to one's hand) and a stage of reformation of the artifact, sometimes in directions unplanned by the designer: modification of the task bar, creation of keyboard shortcuts, storage of game programs, automatic execution of some tasks (calculator manufacturers' websites and personal websites of particularly active users often offer programs for certain functions, methods and ways of solving particular classes of equations, etc.). Instrumentalization is a differentiation process directed towards the artifacts themselves.

⁴¹ 'Affordance' é um termo oriundo do inglês, sem tradução atualmente no português. Esse termo possui a seguinte definição, segundo o dicionário eletrônico Cambridge Dictionaries Online (<http://dictionary.cambridge.org/>): “uma utilização ou propósito que um objeto pode ter, que um grupo de pessoas percebe como parte da forma como eles veem ou experimentam esse objeto”.

de *instrumentação*⁴² (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 204, tradução nossa, grifo dos autores).

É no bojo do estudo de Rabardel, da Gênese Instrumental, que é constituída a Gênese Documental de Gueudet e Trouche para o ensino da Matemática. Os termos artefato e instrumento correspondem aos termos recurso e documento. É nessas bases que esta tese tem uma de suas sustentações.

Para Gueudet e Trouche, o termo recurso é utilizado para descrever uma variedade de elementos que podem ser utilizados por um professor para o desenvolvimento de uma aula ou um conjunto de aulas. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro-texto, uma aplicação⁴³ produzida em um *software*, uma lista de exercícios que será resolvida pelos alunos. Na perspectiva da Gênese Documental, um recurso não é a mesma coisa que um artefato, isto é:

[...] um recurso pode ser um artefato, ou seja, o resultado da atividade humana, elaborada por uma atividade humana com um objetivo preciso. Mas os recursos vão além dos artefatos: a reação de um estudante, uma vara de madeira no chão também pode constituir-se como recursos, por um professor que os adote em sua atividade⁴⁴ (GUEUDET; TROUCHE, 2012, p. 24, tradução nossa).

Um recurso nunca é isolado, mas sim um conjunto de recursos. O professor esboça em um conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

O que é objetivado nesta pesquisa é desenvolver material para o ensino do Cálculo considerando-se constructos teóricos produzidos por Tall. O que estamos propondo é que materiais elaborados no âmbito de pesquisas da Educação Matemática possam ser inseridos no repertório de recursos de um professor, no seu processo de documentação para a preparação de suas aulas no ensino do Cálculo. Isso porque consideramos que essa ação é uma das formas de contribuir com o estreitamento da relação teoria e prática.

Um documento é, para Gueudet e Trouche, o resultado de um processo chamado Gênese Documental, podendo ser representado por:

⁴² On one hand, the subject guides the way the artifact is used and, in a sense, *shapes* the artifact: this process is called *instrumentalization*. On the other hand, the affordances and constraints of the artifact influences the subject's activity: this process is called *instrumentation*.

⁴³ Neste contexto, o termo aplicação é utilizado para denominar uma atividade ou uma ferramenta construídas em um *software* que objetiva a realização de uma tarefa específica, nesse caso a tarefa está relacionada ao ensino da Matemática.

⁴⁴ [...] a resource can be an *artefact*, i.e. an outcome of human activity, elaborated for a human activity with a precise aim. But resources exceed artefacts: the reaction of a student, a wooden stick on the floor can also constitute resources, for a teacher who draws on them in her activity.

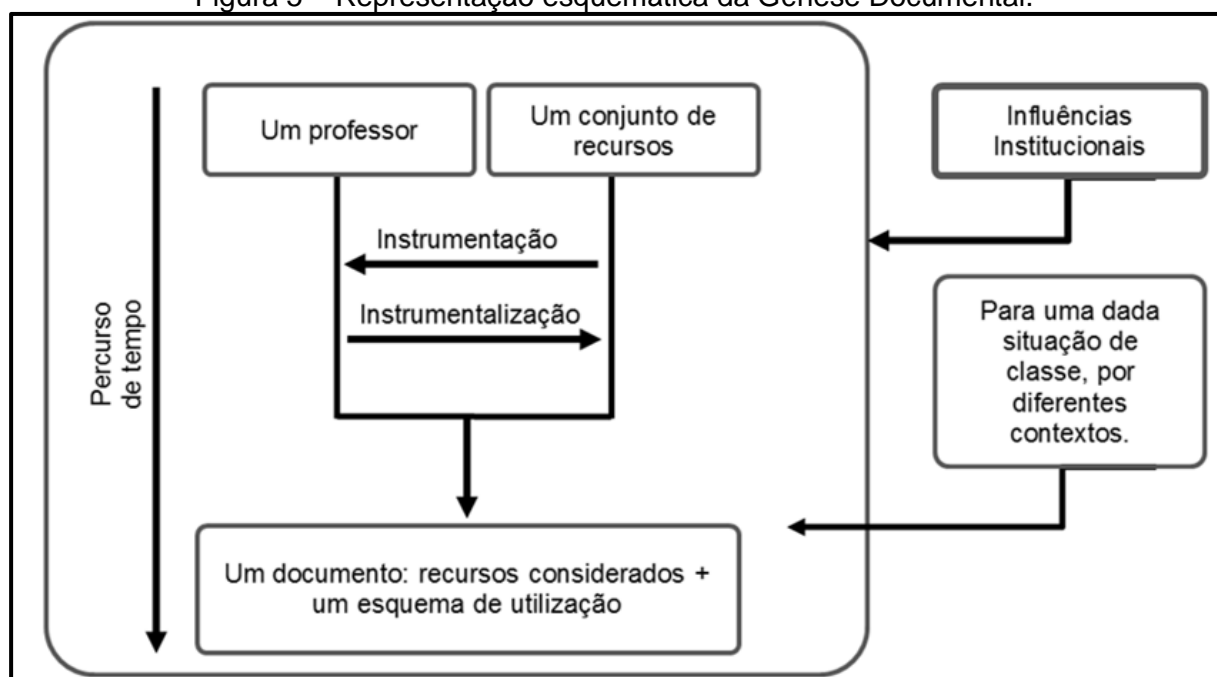
Documento = Recursos + Esquema de utilização

E ser considerado assim:

[...] documento é mais do que uma lista de exercícios; é saturado com as experiências do professor, como uma palavra para uma pessoa é saturada de sentido, em uma perspectiva Vigotskiana⁴⁵ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, tradução nossa).

O processo de Gênese Documental é representado na Figura 5:

Figura 5 – Representação esquemática da Gênese Documental.



Fonte: Adaptado de Gueudet e Trouche (2009, p. 206, tradução nossa).

As dimensões da instrumentação e da instrumentalização, segundo Gueudet e Trouche (2009):

A dimensão da instrumentalização conceitua os processos de apropriação e moldagem, bem conhecidos por pesquisadores que estudam o desenvolvimento e difusão de sequências de ensino: “uma sequência de ensino desenvolvida por um grupo é necessariamente moldada e transformada enquanto outros a utilizam” (COBB et al., 2008, p. 117). A dimensão da instrumentação conceitua a influência sobre a atividade do professor dos recursos

⁴⁵ [...] document is much more than a list of exercises; it is saturated with the teachers' experience, just as a word, for a given person, is saturated with sense in a Vygotskian perspective.

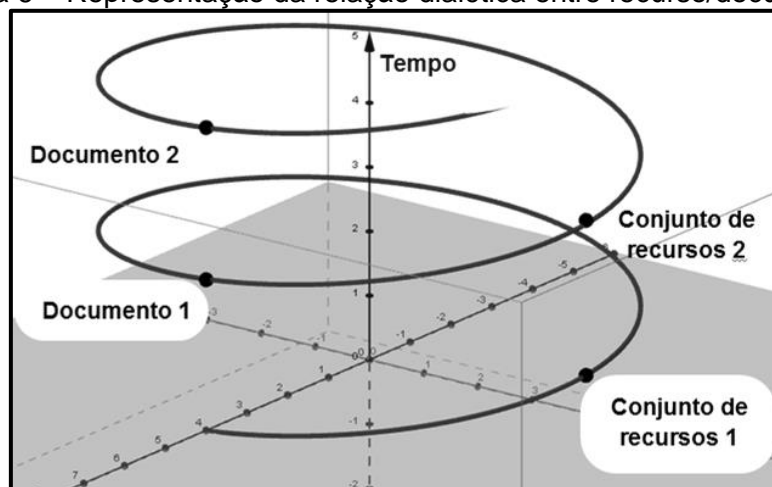
que ele desenvolve⁴⁶ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, tradução nossa).

A Gênese Documental é processo contínuo, como definido por Rabardel e Bourmaud (2005), cujo desenvolvimento ocorre durante a utilização de determinado documento. Gueudet e Trouche (2009) defendem a existência de uma relação dialética entre os recursos e os documentos, e que a elaboração de documentos ocorre em longo prazo.

Para representar a Gênese Documental como um processo contínuo que é, em que um documento se transforma com o passar do tempo, foi utilizada uma espiral tridimensional, sendo o eixo z o eixo do tempo, conforme Figura 6:

O eixo do tempo da hélice é uma questão importante. Os recursos evoluem, são modificados, de forma combinada, documentos são elaborados em consonância ao processo de gênese e nutrem novos recursos..., evoluções em longo prazo, mas também eventos mais limitados, devem ser levados em conta⁴⁷ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

Figura 6 – Representação da relação dialética entre recurso/documento.



Fonte: Adaptado de Gueudet e Trouche (2009, p. 206, tradução nossa).

Em um conjunto de recursos ou em um documento podem-se distinguir três componentes, entrelaçadas, mas distintas. São elas: material; matemática e a didática.

⁴⁶ The instrumentalization dimension conceptualizes the appropriation and reshaping processes, well known by researchers studying the design and diffusion of instructional sequences: “an instructional sequence developed by one group is necessarily reshaped and transformed while others use it” (Cobb et al. 2008, p. 117). The instrumentation dimension conceptualizes the influence on the teacher’s activity of the resources she draws on.

⁴⁷ The time axis of the helix is an important matter. The resources evolve, are modified combined; documents develop according to the processes of genesis and bear new resources..., Long-term evolutions, but also more limited events, must be taken into account.

A componente material é constituída por materiais que são utilizados para o desenvolvimento de uma atividade, como por exemplo, papel, computador, fichários, etc.

As noções matemáticas, as tarefas e as técnicas matemáticas necessárias constituem a componente matemática.

A componente didática inclui os aspectos institucionais que influenciam o trabalho do professor em sala de aula. Para Gueudet e Trouche (2009), essa componente é constituída de “elementos organizacionais, que vão desde mapeamento do ano todo até o planejamento de uma única sessão de uma hora”⁴⁸ (p. 207).

A Figura 7 traz um exemplo de como as componentes aparecem em uma atividade desenvolvida pela professora Marie-Pierre. Essa atividade compunha uma aula para o 7º grau (equivalente ao 7º ano do Ensino Fundamental II do Brasil)⁴⁹, de introdução à fórmula da área de um paralelogramo.

Figura 7 – Reprodução da atividade proposta por Marie-Pierre⁵⁰

I. Aire d'un parallélogramme :

Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on multiplie la longueur d'un côté par la hauteur relative à ce côté :

$$A = b \times h$$

Application : calculer l'aire de ce parallélogramme

On repère la longueur d'un côté.
On repère la hauteur relative à ce côté.
On multiplie la longueur du côté repéré par la hauteur relative à ce côté :
 $A = 12 \times 5 = 60$
L'aire du parallélogramme vaut 60 cm².

À toi de jouer
Détermine l'aire des parallélogrammes MNOP et ABCD ci-contre :

Diagram 1: Parallelogram MNOP with base MN = 15 cm and height h.

Diagram 2: Parallelogram ABCD with base AB = 9 cm and height h = 3 cm.

Handwritten calculations:
 $A_{MNOP} = 15 \times 8 = 120 \text{ cm}^2$
 $A_{ABCD} = 9 \times 3 = 27 \text{ cm}^2$

Fonte: GUEUDET; TROUCHE (2009, p. 208).

⁴⁸ [...] organizational elements, ranging from mapping over the whole year to planning a single one-hour session.

⁴⁹ O termo original utilizado pelos autores para indicar o nível no qual essa atividade foi desenvolvida foi “grade 7” e, pelo texto estar em inglês, traduzimos esse termo de acordo com a equivalência entre o sistema de ensino brasileiro e americano.

⁵⁰ Transcrição da atividade proposta na Figura 7: 1. Área do paralelogramo. Para calcular a área do paralelogramo, nós multiplicamos o comprimento de um dos lados pela altura relativa a esse lado. Aplicação: calcular a área desse paralelogramo. Nós identificamos a altura de um dos lados. Nós multiplicamos o comprimento do lado pela altura: $A = 12 \times 5 = 60$. A área do paralelogramo é 60 cm². É a sua vez de fazer. Calcule a área dos paralelogramos MNOP e ABCD.

Cada uma das componentes da atividade de Marie-Pierre é identificada por Gueudet e Trouche do seguinte modo: a componente material é composta por um *software* processador de texto, sítios da Internet, o livro-texto digital, uma lousa interativa e um formulário de papel para ser preenchido pelos estudantes. A componente matemática compreende propriedades e tarefas matemáticas relacionadas à área de um paralelogramo: a fórmula da área, o cálculo de áreas em alguns casos, a identificação da altura de um paralelogramo, etc. A maneira pela qual a aula foi planejada pertence à componente didática e pode ser evidenciada pelo documento elaborado pela professora:

[...] ela escreverá os elementos que faltam na lousa interativa, enquanto os estudantes fazem o mesmo em seu formulário de papel. Esses elementos provavelmente serão determinados durante a discussão em sala de aula. Então, os estudantes devem aplicar a fórmula em exercícios de aplicação direta [Figura 7], e então em outros mais complicados⁵¹ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 208, tradução nossa, adaptado).

O esquema de utilização de um documento possui invariantes relacionados ou à componente didática ou à matemática. Esses dois tipos de invariantes podem ser observados no exemplo de Frédéric, apresentado em Gueudet e Trouche (2009), no qual um documento é elaborado para a seguinte classe de situações: introduzir a noção de raiz quadrada no 9º ano (equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental II no Brasil)⁵². Os dois pesquisadores destacam que foram tomados como recursos uma parte do livro-texto; uma folha de atividades contendo dados do ano anterior; diapositivos e também a calculadora. O esquema de utilização de Frédéric, para esse conjunto de recursos, abrangeu os seguintes invariantes operatórios:

[...] ‘uma nova noção precisa ser introduzida por meio de uma tarefa matemática que produza significado à essa noção’; e *invariantes atrelados ao conteúdo matemático*: ‘procura da medida do lado de um quadrado para uma dada área torna evidente o significado da raiz quadrada’; ‘a raiz quadrada é o processo inverso de elevar ao quadrado’; ‘a tecla raiz quadrada da calculadora dá suporte à

⁵¹ [...] she will write the missing elements of the formula on the whiteboard, while students do the same on their paper form. These missing elements will probably be determined during a class discussion. Then the student must apply the formula in direct application exercises [Figure 7], and then in more complicated ones.

⁵² O termo original utilizado pelos autores para indicar o nível no qual essa atividade foi desenvolvida foi “grade 9” e, pelo texto estar em inglês, traduzimos esse termo de acordo com a equivalência entre o sistema de ensino brasileiro e americano.

introdução do símbolo'⁵³ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa, grifo nosso).

Outro exemplo de documento foi aquele para propor uma tarefa de casa para a adição de números positivos e negativos, para o qual:

[...] uma dada professora reúne os seguintes recursos: livros-textos de seu próprio curso, uma folha de exercícios dada em anos anteriores. Ela seleciona entre esses recursos e constitui uma lista de exercícios para uma determinada classe. Essa lista pode ser modificada, de acordo com o que acontece com os estudantes, antes de utilizá-la com outra classe no mesmo ano, ou no próximo ano, ou mesmo mais tarde. O documento desenvolve ao longo dessa variedade de contextos. Os invariantes operatórios podem ser gerais, como "a lição de casa deve ser extraída do livro", ou *interligados ao conteúdo matemático, como: "as adições propostas devem incluir os casos em que são misturados números positivos e negativos, e de casos com apenas números negativos", etc.*⁵⁴ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, tradução nossa, grifo nosso).

Os exemplos de documentos apresentados pelos pesquisadores são advindos da observação que eles fizeram da prática de um dado professor e da iteração dele com um conjunto de recursos na produção de uma atividade específica.

Para finalizar, declaramos de maneira precisa que o objetivo desta pesquisa é produzir material para o ensino norteado pelos constructos teóricos cognitivistas de Tall, pelo uso do computador que toma como constructo organizador a noção de recurso da Gênese Documental. Essa ação visa oferecer no material elementos que possam compor um repertório de recursos para um professor que ensina Cálculo.

⁵³ [...] 'a new notion must be introduced through a mathematical task that yields evidence of the meaning of this notion'; and invariants linked with the mathematical content: 'searching for the side-length of a square for a given area gives evidence of the meaning of square root'; 'the square root is the reverse process of squaring'; 'the calculator square root key supports the introduction of the symbol'.

⁵⁴ [...] a given teacher gathers resources: textbooks, her own course, a previously given sheet of exercises... She chooses among these resources to constitute a list of exercises, which is given to a class. It can then be modified, according to what happens with the students, before using it with another class during the same year, or the next year, or even later. The document develops throughout this variety of contexts. The operational invariants can be very general, like 'the homework must be extracted from the textbook', or more precisely linked with the mathematical content, like: 'the additions proposed must include the cases of mixed positive and negative numbers, and of only negative numbers, etc.

2.2.2. Constructos teóricos de Tall

2.2.2.1. A utilização do computador no ensino da Matemática

Na perspectiva de Tall (1994), ao construirmos materiais de ensino com a utilização do computador é necessário considerar que:

Software para a aprendizagem da matemática, que é diferente de um software para fazer matemática, precisa ser projetado levando em consideração o desenvolvimento cognitivo do aprendiz, que pode diferir significativamente da estrutura lógica do conceito formal. Por isso, é valioso começar considerando aspectos cognitivos relevantes para a utilização da tecnologia computacional antes da tarefa principal que é se concentrar em ambientes computacionais e qual é o seu papel na aprendizagem da matemática⁵⁵ (TALL, 1994, p. 189, tradução nossa, grifo do autor).

Esse pesquisador alerta para um perigo existente na utilização inadequada de determinados *software* que plotam gráficos, por exemplo. Isso porque, dependendo da forma em que o *software* é utilizado, pode-se levar sujeitos a desenvolverem conceito imagem⁵⁶ limitado, visto que esse tipo de *software* pode ser utilizado apenas para desenhar gráficos quase suaves expressos por fórmulas (TALL, 1993).

Nesse sentido, reflexões são aprofundadas com respeito à maneira que determinados ambientes computacionais podem ser utilizados para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos, dizendo que esses ambientes são poderosos, pois por meio deles é possível

[...] executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente e o resultado final em uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados *visualmente* e manipulados *fisicamente*. Utilizando um *mouse* para habilitar o estudante a construir relações corporificadas que fazem parte de

⁵⁵ Computer software for the *learning* of mathematics, as distinct from software for *doing* mathematics, needs to be designed to take account of the cognitive growth of the learner, which may differ significantly from the logical structure of the formal subject. It is therefore of value to begin by considering cognitive aspects relevant to the use of computer technology before the main task of focusing on computer environments and their role in the learning of mathematics.

⁵⁶ Neste trabalho será considerada a tradução do termo original *concept image* por conceito imagem. Segundo Vinner e Tall (1981), o termo conceito imagem é utilizado para "descrever a estrutura cognitiva total que é associada a um conceito, a qual inclui todas as figuras mentais e as propriedades e processos associados" (p. 151, tradução nossa).

uma estrutura conceitual mais rica e ampla⁵⁷ (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

Outro ponto a ser considerado é o modo de uso do computador, pois, apesar de ele reduzir o fardo das manipulações simbólicas ao sujeito, pode substituir um procedimento realizado com lápis e papel por um utilizando uma sequência de teclas digitadas (TALL, 2001).

Com o intuito de reduzir a tensão cognitiva do aprendiz em um currículo de Matemática que utiliza o computador, Tall formulou o Princípio da Construção Seletiva⁵⁸. Esse Princípio pode nortear o educador a elaborar um ambiente que possibilite ao aprendiz focar em determinada parte da teoria e que nessa parte estejam envolvidos processos subjacentes, que não são o objetivo do educador naquele momento, os quais sejam executados pelo computador (TALL, 2001). Um exemplo de utilização desse Princípio é relatado em Gray e Pitta (1997 apud TALL, 2001), cujo estudo tinha por foco o estabelecimento de relações numéricas, com um dos sujeitos com dificuldades em Aritmética. Nessa pesquisa, um *software* realizava os cálculos e o sujeito concentrava-se nas relações numéricas apresentadas e não nos processos de contagem que faziam parte de repertório de estratégias dele. Segundo os pesquisadores, por focar apenas nas relações foi possível “dar à Emily um sentido para relações numéricas, sendo que ela, anteriormente, não poderia ir além de procedimentos de contagem trabalhosos que preenchiam todo o trabalho de sua mente”⁵⁹ (TALL, 2001, p. 212, tradução nossa).

Outra característica valiosa dos ambientes computacionais é que eles possibilitam o desenvolvimento de atividades de experimentação. Por meio de atividades adequadas, o sujeito pode observar determinado fenômeno e atribuir sentido a ele. Esse ambiente pode auxiliá-lo no desenvolvimento das propriedades matemáticas envolvidas naquela atividade. Para exemplificar isso, o pesquisador inglês considera o exemplo do experimento de Feigenbaum, no qual a função $f(x) = \lambda x(1-x)$ foi iterada para vários valores de λ (TALL, 2001). Por meio dessa

⁵⁷ [...] carry out any algorithms quickly and efficiently and represent the final result in a range of different representations. For example, the results may be represented visually and manipulated physically using a mouse to enable the student to build up embodied relationships that are part of a wider richer conceptual structure.

⁵⁸ Tradução do termo original *The Principle of Selective Construction*.

⁵⁹ [...] to give their subject Emily a sense of number relationships where, before, she could not get beyond cumbersome counting procedures that filled the whole of her working mind.

investigação, a constante de Feigenbaum⁶⁰ foi descoberta. Naquele momento, Feigenbaum não foi capaz de formular a prova formal desse fato. Contudo, com a experimentação, ele pode ter a percepção de um fenômeno que foi posteriormente provado.

Tall chama atenção para um importante aspecto que deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada no ensino:

As experiências desenvolvem aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideais matemáticas atualmente convencionadas pelos especialistas⁶¹ (TALL, 2001, p. 230, tradução nossa).

Há elementos que Tall destaca e que outros pesquisadores do campo da Educação Matemática reforçam e que levamos em conta, como, por exemplo, a garantia da visualização de duas (ou mais) representações de conceitos matemáticos. Citamos Guzmán, que considera que a visualização auxilia

[...] não apenas no nascimento do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e também, certamente, em processos de transmissão e comunicação que são a própria atividade matemática⁶² (GUZMÁN, 2002, p. 2-3, tradução nossa).

Para ele, conceitos matemáticos, ideias, métodos possuem uma riqueza de relações visuais que são intuitivamente representáveis de várias maneiras e considera benéfico utilizar essas relações tanto na apresentação de um conceito matemático quanto na manipulação das mesmas enquanto um problema é resolvido, ou no ato de se fazer pesquisa.

Outro elemento considerado com relação à utilização do computador no ensino da Matemática é a sua capacidade de apresentar múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

⁶⁰ Essa constante é aproximadamente igual a 4,669201609 e é o limite da sequência das razões entre os comprimentos de dois intervalos consecutivos de bifurcação de determinada função recursiva.

⁶¹ The experience can have insightful aspects that support the theory, but it can also lead to a variety of other mental imagery that may differ from the mathematical ideals currently held by experts.

⁶² [...] not only in the birth of the mathematical thought but also in the discovery of new relations between mathematical objects and also, of course, in the transmission and communication processes which are proper to the mathematical activity.

Dreyfus (1991) indica que novos conceitos matemáticos podem ser entendidos se o estudante tiver condições de relacioná-los aos seus conhecimentos prévios e de desenvolver representações mentais ricas desse conceito. Segundo esse pesquisador

Para ter sucesso em Matemática, é desejável ter representações mentais ricas do conceito. Uma representação mental é rica se ela contém vários aspectos relacionados ao conceito. [...] Não se obtém o suporte necessário para gerenciar com êxito as informações usadas na solução de um problema, a menos que as várias representações estejam corretas e fortemente vinculadas. É preciso ter a possibilidade de transitar de uma representação para outra, sempre que a outra for mais eficiente para a próxima etapa que se quer tomar [...]. Ensinar e aprender esse processo de mudança não é fácil⁶³ (DREYFUS, 1991, p. 32, tradução nossa).

Tall (1989) defende mudanças nos currículos em virtude das possibilidades oferecidas pela inclusão de computadores no ensino da Matemática. Para ele:

O computador oferece novas possibilidades. Ao invés de construir do simples para o complexo, é possível construir, com determinado *software*, ambientes para que o aprendiz possa explorar ideias mais complexas desde o princípio. Essa forma de aprendizagem envolve a negociação de significados de conceitos matemáticos modelados pelo computador nos quais a organização do currículo e o papel do professor é crucial⁶⁴ (TALL, 1989, p. 37, tradução nossa).

Nessa perspectiva apresentada por Tall, o computador pode auxiliar no processo de formação de conceitos imagens ricas para o aluno que tem contato com esse tipo de ambiente elaborado de maneira cuidadosa.

Com relação à aprendizagem, pode-se inferir que se faz necessário apresentar ideias em um contexto mais amplo possível, porque quando ideias são apresentadas em um contexto restrito, o conceito imagem formado também será restrito e, possivelmente, incluirá características que são verdadeiras apenas

⁶³ To be successful in mathematics, it is desirable to have rich mental representations of concepts. A representation is rich if it contains many linked aspects of that concept. [...] One does not get the support that is needed to successfully manage the information used in solving a problem unless the various representations are correctly and strongly linked. One needs the possibility to switch from one representation to another one, whenever the other one is more efficient for the next step one wants to take [...]. Teaching and learning this process of switching is not easy.

⁶⁴ The computer offers new possibilities. Instead of building from simple to complex, it is possible to construct appropriate software environments for the learner to explore more complex ideas from the outset. This form of learning involves a negotiation of the meaning of the mathematical concepts modelled by the computer in which the organization of the curriculum and the role of the teacher is crucial.

naquele contexto específico, mas não em um contexto geral. Os constructos teóricos de Tall nos levam a considerar que o computador pode auxiliar na promoção de imagens conceituais amplas.

Para exemplificar, considere a noção de reta tangente a uma circunferência no contexto da Geometria: uma reta tangente a uma circunferência é a reta que a intercepta em um único ponto. Essa ideia geométrica, para a circunferência, pode levar muitos alunos, no contexto do Cálculo, a exigir essa unicidade de intersecção globalmente. Tall relata que, em um estudo conduzido por Vinner (1983), foi solicitado que estudantes traçassem a reta tangente à curva $y = x^3$ na origem. Essa tarefa causou conflito, pois não aceitavam que a tangente ‘cruzasse’ a curva e foi relatado que alguns traçaram uma semirreta que não ‘cruzava’ a curva. Tall sugere que tais conflitos possam ser considerados para ampliar as compreensões sobre um dado conceito e que o computador pode fornecer um rico contexto para a discussão dos mesmos.

2.2.2.2. Organizadores Genéricos⁶⁵ e raízes cognitivas⁶⁶

A noção de organizador genérico foi introduzida em Tall (1986) com a intenção de complementar a noção de organizador prévio de Ausubel.

Segundo Ausubel, um organizador prévio consiste

[...] no material introdutório a um nível mais elevado de abstração, generalidade e inclusão do que a própria tarefa de aprendizagem. A função do organizador é proporcionar um suporte (ancoragem) das ideias para a incorporação e retenção estáveis do material mais pormenorizado e diferenciado que resulta da situação de aprendizagem, bem como aumentar a capacidade de discriminação entre essa situação e as ideias ancoradas relevantes da estrutura cognitiva. O organizador deve não só estar explicitamente relacionado com a situação de aprendizagem mais específica resultante, como também (para ser apreensível e estável) estar relacionado com as ideias relevantes da estrutura cognitiva e levá-las em conta (AUSUBEL, 2003, p. 65 – 66).

A noção de organizador prévio é complementada da seguinte forma: essa noção exige que o sujeito tenha uma estrutura cognitiva superior apropriada à sua

⁶⁵ Tradução do termo original *generic organizer*.

⁶⁶ Tradução do termo original *cognitive roots*.

disposição, porém, em determinados casos, a referida estrutura não está presente na estrutura cognitiva do sujeito. Levando isso em conta, Tall propõe a noção de organizador genérico, que é definida como “um ambiente (ou micromundo⁶⁷) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados”⁶⁸ (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

Foi utilizado o termo ‘genérico’ para denotar que a atenção do aluno é dirigida a determinado aspecto dos exemplos considerados, o qual deve incorporar o conceito abstrato objetivado pelo professor/pesquisador (TALL, 1986). Exemplos de organizador genérico, dados por Tall, são: o material Cuisenaire e os Blocos de Dienes e também uma aplicação⁶⁹ construída em um *software* que dá um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário.

Em Tall (1986) é descrito como um organizador genérico pode ser utilizado na aprendizagem: (1) para fornecer um ambiente para o modo 1⁷⁰, com vistas a propiciar a construção e testes para apoiar o desenvolvimento da teoria formal nos modos 2, 3; (2) para chamar a atenção, em uma demonstração, sobre o tema expresso nos exemplos do organizador e distante de qualquer motivação externa; (3) para fomentar discussão entre o professor e os estudantes; (4) para promover, quando utilizado de modo colaborativo, discussão entre os próprios estudantes; (5) para explorar conceitos de modo intuitivo e genérico, antes de serem analisados e formalizados; (6) para enriquecer os conceitos imagens dos estudantes com vistas a fornecer uma percepção geral do conceito completo; (7) para promover atividades de investigação que podem ser realizadas individualmente ou em grupos; (8) para favorecer a resolução de problemas.

⁶⁷ Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 apud TALL, 1986) como “um mundo autossuficiente no qual certas questões são relevantes e outras não”.

⁶⁸ [...] an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate examples and (if possible) non-examples of a specific mathematical concept or a related system of concepts.

⁶⁹ Neste contexto, o termo aplicação é utilizado para denominar uma construção ou ferramenta construídos num *software* que é produzido pelo próprio o usuário e objetiva a realização de uma tarefa específica.

⁷⁰ Os modos 1, 2 e 3 referem-se aos três modos de construir e testar a realidade estruturas conceituais propostos por Skemp (1979 apud TALL, 1986). O modo 1 é denominado por experimento, sendo esse um momento em que é contrariada a expectativa de eventos da realidade; o modo 2 é denominado por discussão, momento em que é feita a comparação com outras realidades; e o modo 3 é denominado por consistência interna, momento em que é feita a comparação com o conhecimento existente.

Esse pesquisador alerta que um organizador genérico deve ser elaborado de maneira cuidadosa, pois no caso dele ser elaborado de modo impreciso ou utilizado indevidamente, pode ocorrer o seguinte:

Se um organizador genérico for utilizado em um ambiente que não é devidamente controlado, então o estudante pode abstrair propriedades dos exemplos estudados que não são parte do conceito que está sendo modelado. Como a mente humana é um poderoso aparato de detecção de padrões, podem ser encontrados padrões que não se pretende que sejam abstraídos⁷¹ (TALL, 1986, p. 83, tradução nossa).

É exemplificado um caso de utilização indevida de organizador genérico, um *software* que plota gráficos de funções reais. Essa utilização ocorre se for solicitado ao sujeito apenas o esboço de gráficos de funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, que são contínuas e diferenciáveis em todos os pontos do domínio. Nesse caso é possível que um sujeito, fazendo uma exploração sem a devida orientação, possa inferir que todas as funções são contínuas e diferenciáveis em todos os pontos de seus domínios. Por isso é necessário construir, quando utilizar um *software* que plota gráficos de funções, exemplos de funções cujas representações gráficas tenham 'bicos' e até mesmo, se possível, explorar outros exemplos como o de uma função que seja contínua e não diferenciável. Esses exemplos podem evitar a constituição de um conceito imagem de que só existem funções contínuas e diferenciáveis em todo domínio.

Nesse caso, é possível perceber que houve ocorrência de um princípio geral em determinado contexto e que não é válido em outro; o pesquisador nomeou essa ocorrência de Princípio de Extensão Genérica, que ocorre na seguinte situação:

Se um sujeito trabalha em um micromundo restrito no qual todos os exemplos considerados possuem determinada propriedade, então, na ausência de contraexemplos, a mente assume que a propriedade conhecida seja implícita em outros contextos⁷² (TALL, 1986, p. 84, tradução nossa).

⁷¹ If the generic organizer is used in an environment that is not properly controlled, then the student may abstract properties from the examples studied that are not part of the concept being modelled. As the human mind is a powerful pattern-detecting apparatus, patterns may be found that are not intended to be abstracted.

⁷² If an individual works in a restricted microworld in which all the examples considered have a certain property, then, in the absence of counterexamples, the mind assumes the known properties to be implicit in other contexts.

Um exemplo de ocorrência desse Princípio é quando um sujeito, familiarizado com determinadas experiências e propriedades válidas em contexto finito, acredita que essas mesmas propriedades são válidas em contexto infinito, como é o caso do conceito de limite de sequência de números reais. O estudante pode esperar que:

[...] se todos os objetos em um processo de limite possuem determinada propriedade, o objeto limite tem essa propriedade também. Se, $a_n = \frac{1}{n}$, então os termos da uma sequência decrescem, mas não são nunca zero, então o 'objeto limite' é considerado muito pequeno, porém, não nulo. Do mesmo modo, porque 0,999...9 é sempre menor do que 1, para um número finito de casas decimais, então 0,999...(repetidamente) é considerado menor do que um⁷³ (TALL, 1986, p. 84, tradução nossa).

E ainda

[...] um organizador genérico está devidamente concebido e o agente de organização atua de forma eficaz, a compreensão intuitiva das ideias oferecidas pelo organizador pode fornecer uma base sólida para o desenvolvimento posterior da teoria formal. Isso pode depender muito da ação do agente organizador que tenta garantir que as propriedades não-genéricas do organizador não atuem como distratores e causem obstáculos⁷⁴ (TALL, 1986, p. 85, tradução nossa).

Ou seja, ele está indicando que no desenvolvimento de um organizador genérico devem ser considerados elementos que visem ao desenvolvimento teórico formal da Matemática.

Para finalizarmos a apresentação dos organizadores genéricos, trazemos uma afirmação de Tall que visa explicar a maneira pela qual um organizador genérico atua. Segundo ele

[...] um organizador atua de uma maneira Piagetiana, primeiro em um ambiente onde o equilíbrio é possível, então uma propriedade destoante pode ser encontrada, causar conflito e requerer

⁷³ [...] if all the objects in a limiting process have a certain property, the limit object has that property. If $a_n = \frac{1}{n}$, then the terms a_n decrease but are never zero, so the "limiting object" is considered as a tiny non-zero-number. Likewise, because 0.999... 9 is always less than 1 for a finite number of places, 0.999... (recurring) is considered less than one.

⁷⁴ [...] a generic organizer is properly designed and the organizing agent acts effectively, the intuitive grasp of ideas offered by the organizer can provide a firm basis for the later development of the formal theory. This may depend heavily on the action of the organizing agent attempting to ensure that the non-generic properties of the organizer do not act as distractors and form obstacles.

reconstruções mentais que levam para um estado de equilíbrio novo e rico⁷⁵ (TALL, 1986, p. 86-87, tradução nossa).

A definição de organizador genérico acarreta a definição de outro conceito atrelado a ele. É o conceito denominado raiz cognitiva que tem como função compor um organizador genérico. Ele é definido “como uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento; no entanto, deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e para mais tarde desenvolvimento teórico”⁷⁶ (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa). Ou ainda, “é um conceito âncora que o aprendiz acha mais fácil para compreender, e ainda constitui-se em uma base na qual uma teoria pode ser construída”⁷⁷ (TALL, 1989, p. 9, tradução nossa).

Exemplos de raízes cognitivas advindas por conceitos do Cálculo são as noções de retidão local⁷⁸ (taxa de variação/diferenciação/equações diferenciais); a continuidade perceptiva⁷⁹ (conceito formal de continuidade); área abaixo do gráfico (integração).

A noção de retidão local é definida do seguinte modo: uma função é dita localmente reta em x_0 , pertencente ao seu domínio, se sua representação gráfica se assemelha a uma linha reta quando suficientemente ampliada. A retidão ocorre quando

[...] alguém amplia o gráfico [de uma função] e considera um pedaço cada vez menor sob [alto grau de] ampliação, a [representação] gráfica fica menos curvada e até que uma pequena porção, altamente ampliada, assemelha-se a uma linha reta. Um gráfico com essa propriedade é dito ser localmente reto⁸⁰ (TALL, 2013b, p. 299, tradução nossa adaptado).

A Figura 8 representa esse fenômeno.

⁷⁵ [...] an organiser acts in a Piagetian manner, first within an environment where equilibrium is possible, then a dissonant property may be encountered that causes conflict and requires mental reconstruction to move into a new and richer equilibrium state.

⁷⁶ [...] as a cognitive unit which is (potentially) meaningful to the student at the time, yet contain the seeds of cognitive expansion to formal definitions and later theoretical development.

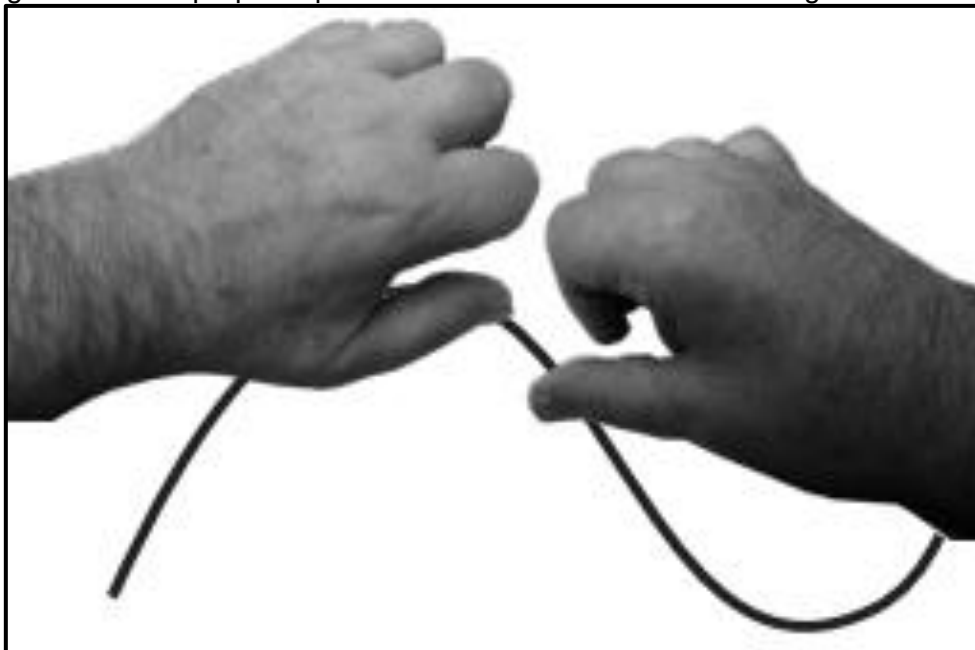
⁷⁷ [...] is an anchoring concept which the learner finds easy to comprehend, yet forms a basis on which a theory may be built.

⁷⁸ Tradução utilizada para o termo original *local straightness*.

⁷⁹ Tradução do termo original *perceptual continuity*.

⁸⁰ [...] one zooms in on the graph and looks at a smaller piece under higher magnification, the graph gets less and less curved until a small portion highly magnified looks like a straight line. A graph with this property is said to be locally straight.

Figura 8 – Uma pequena parte da curva se assemelha a um segmento de reta.



Fonte: TALL (2013a, p. 11).

Essa noção deve ser levada em conta no ensino de derivada por dois motivos: o primeiro é que por essa noção é possível, utilizando a “ampliação de gráficos produzida por um computador, permitir que o processo de limite esteja implícito na ampliação computacional ao invés de explícito no conceito de limite”⁸¹ (DUBINSKY, TALL, 1991, p. 238, tradução nossa); o outro seria porque ela permite que a *função derivada* possa ser vista como a função que associa cada ponto de seu gráfico a inclinação da reta tangente ao gráfico que passa pelo ponto”⁸² (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa, adaptado).

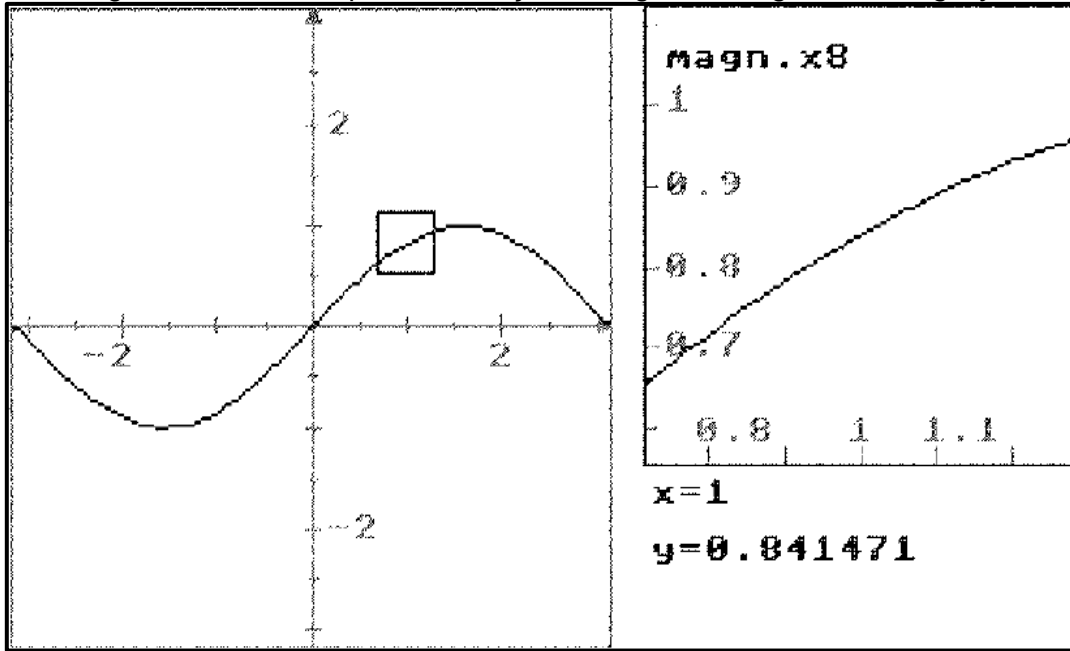
Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify*, que: “permite ao usuário focar sua atenção ao gráfico e traçar uma parte ampliada dele em uma segunda janela”⁸³ (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa). Na Figura 9 é utilizado esse *software* para a função real dada pela seguinte sentença $g(x) = \text{sen } x$:

⁸¹ [...] computer magnification of graphs allows the limiting process to be implicit in the computer magnification, rather than explicit in the limit concept.

⁸² [...] it allows the gradient function to be seen as the changing gradient of the graph itself.

⁸³ [...] allows the user to home in on a graph and draw a magnified portion in a second window.

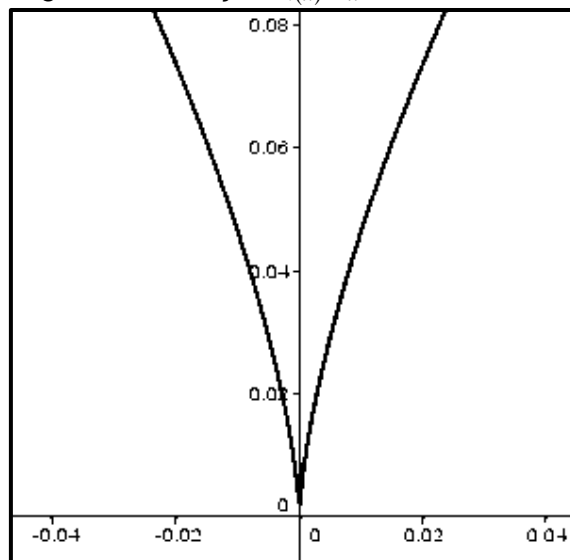
Figura 9 – Um exemplo de utilização do organizador genérico *Magnify*.



Fonte: TALL (2000, p. 12).

Pela retidão local é possível inferir que uma função que é contínua em um determinado ponto e não diferenciável nele, localmente, possui uma representação gráfica que não se assemelha a um segmento de reta para qualquer grau de ampliação que seja utilizado. Por exemplo, considere a representação gráfica da função real $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em uma vizinhança de $x = 0$, ampliada 200 vezes, apresentada na Figura 10.

Figura 10 – O gráfico da função $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$ em uma vizinhança de $x=0$.



Fonte: Elaboração nossa.

Para qualquer grau de ampliação de uma vizinhança de $x = 0$, a representação gráfica da função m não vai se assemelhar a um segmento de reta. Com isso, dizemos que a função não é localmente reta em zero.

A raiz cognitiva da retidão local também pode ser levada em conta no ensino das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, quando se utiliza a busca de solução a partir de um contexto gráfico. Nesse caso, Tall sugere que se

[...] considere o problema inverso da diferenciação (Não, esse não é a integração!). O problema é o seguinte – se eu conheço a derivada de uma função em qualquer ponto, como posso construir o gráfico [de uma outra função] que tem essa função como função derivada?⁸⁴ (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa adaptada).

E também propõe atribuir o significado corporificado ao conceito de solução de uma equação diferencial $y'(x) = F(x, y)$, pensando assim:

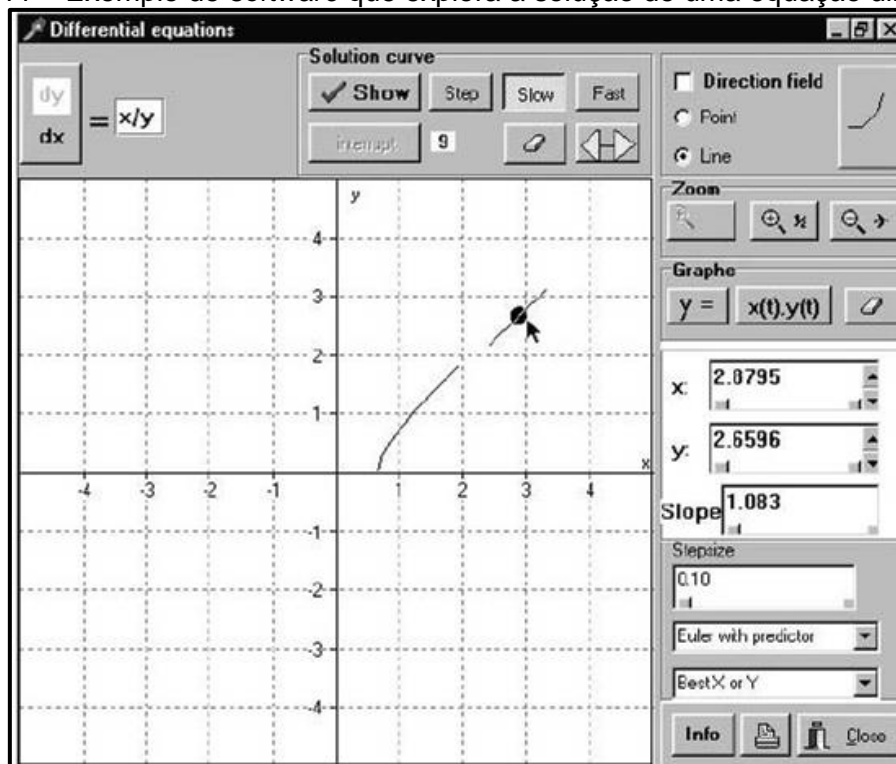
Se eu colocar meu dedo em algum ponto (x, y) do plano⁸⁵, então eu sou capaz de calcular a inclinação m da reta tangente à curva solução naquele ponto como $m = F(x, y)$ e traçar um pequeno segmento de reta com inclinação igual a m passando pelo ponto (x, y) (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

Para simular a situação que promove o significado corporificado, o pesquisador desenvolveu um *software* que constrói uma solução gráfica de uma equação diferencial de 1ª ordem. O usuário pode agir da seguinte forma: com um clique do mouse ele posiciona um segmento de linha reta. Em seguida, ele posiciona outros segmentos de modo a garantir a conexão com ‘proximidade’ entre eles. Assim, o usuário obtém um esboço de uma solução gráfica da equação diferencial (TALL, 2001). Na Figura 11 está representado esse *software*:

⁸⁴ [...] (No, this is not integration!) The problem is this — if I know the gradient of a function at any point, how can I build up the graph that has that gradient?

⁸⁵ Supondo que esse ponto pertença a uma região do plano em que as condições de existência de solução da equação diferencial estão garantidas em todos os pontos.

Figura 11 – Exemplo de *software* que explora a solução de uma equação diferencial.



Fonte: BLOKLAND, GIESSEN, TALL (2000 *apud* TALL, 2001, p. 211).

Tall diferencia a retidão local da noção de linearidade local, utilizada em cursos modernos de Cálculo, para a introdução do conceito de derivada, do seguinte modo:

A linearidade local é uma concepção simbólica, procura a fórmula para descrever a função inclinação da reta tangente de uma função em um dado ponto com um grau de precisão apropriado. A retidão local é uma corporificação primitiva que pode prover uma corporificação humana subjacente à função derivada. No meu original *Graphic Calculus*, utilizei a noção de retidão local para dar uma imagem mental sobre se uma função é diferenciável ou não, dependendo do que aconteceu sob uma grande ampliação (se ela se torna eventualmente localmente reta ou não). Isso deu uma primeira indicação da noção de diferenciabilidade e não-diferenciabilidade que não estão contemplados em cursos tradicionais. Além disso, a abordagem da retidão local desenvolve a habilidade de olhar para um gráfico que é imaginado para ser localmente reto e visualizar suas derivadas⁸⁶ (TALL, 2009, p. 487, tradução nossa).

⁸⁶ Local linearity is essentially a symbolic conception, seeking a formula to describe the slope function within an appropriate degree of accuracy. Local straightness is a more primitive embodiment that can provide a human embodiment underpinning the notion of slope function. In my original *Graphic Calculus*, I used the embodied notion of local straightness to give a mental picture of whether a function is differentiable or not, depending on what happened under increasing magnification (does it become eventually locally straight or not). This gave a first intimation of the notion of differentiability and non-differentiability that is not even contemplated in traditional courses. In addition, the locally

Para introduzir o conceito de continuidade de uma função real é levada em conta a noção de continuidade perceptiva. Essa noção, em um primeiro momento, “é baseada na ideia de traçar uma curva com um lápis em um lance sem tirar o lápis do papel”⁸⁷ (TALL, 2013a, p. 4, tradução nossa). Contudo, a utilização dessa noção no ensino merece atenção, pois, ao enunciá-la desse modo, é possível que contenha elementos que causem conflito à compreensão do conceito formal de continuidade, pois, por exemplo, a função contínua $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{1}{x}$, tem representação gráfica que não pode ser percorrida com lápis sem tirá-lo do papel.

Essa ideia pode ser expressa assim:

[...] nós podemos imaginar nosso dedo se deslocando ao longo de uma curva por um *curto período de tempo*. Sentimos isso de várias maneiras: visualmente olhando para a curva, de modo icônico, desenhando a curva ou traçando o percurso dela com o dedo, e mentalmente, imaginando o gráfico a ser desenhado em nossa mente⁸⁸ (TALL, 2013a, p. 4, tradução nossa, adaptado, grifo nosso).

Para a transformação dessas duas experiências em elementos que possuam uma contraparte formal, que pode auxiliar na compreensão da definição formal do conceito de continuidade, Tall propõe a seguinte ação: ‘esticar horizontalmente’ o eixo x e observar uma porção do gráfico na tela de um computador. Ele diz que um gráfico é “naturalmente contínuo”⁸⁹ quando, ao manter a mesma escala vertical e aumentando a escala horizontal, a parte visível do gráfico eventualmente parece-se com um segmento de reta. Em um computador é possível simular essa ação por meio de um processo que esboça o gráfico em uma janela e permite ao usuário selecionar uma faixa fina que poderá ser expandida para preencher totalmente outra janela. Isso acontece com a função manjar branco⁹⁰ em $x = 0,5$, a qual é mostrada na Figura 12.

straight approach gives the new facility of being able to look at a graph that is imagined to be locally straight and to visualise its derivative.

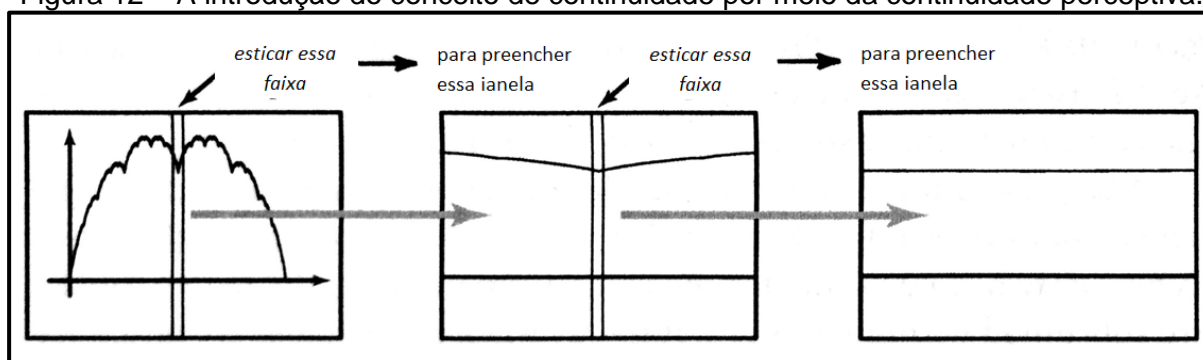
⁸⁷ [...] is based on the idea of drawing a curve with a pencil in a stroke of the hand without taking the pencil off the paper.

⁸⁸ [...] we can imagine our finger tracing along it over a short period of time. We sense this in several ways: visually as we look along the curve, enactively as we draw the curve, or trace along it with a finger, and mentally as we imagine the graph being drawn in our mind's eye.

⁸⁹ Tradução do termo original: *naturally continuous*.

⁹⁰ Tradução do termo inglês *blancmange function*, que segundo Tall (1982) foi cunhado por John Mills, em virtude da representação gráfica dessa função. A definição dessa função será apresentada em 4.1.3.

Figura 12 – A introdução do conceito de continuidade por meio da continuidade perceptiva.



Fonte: Adaptado de Tall (2013b, p. 318, tradução nossa).

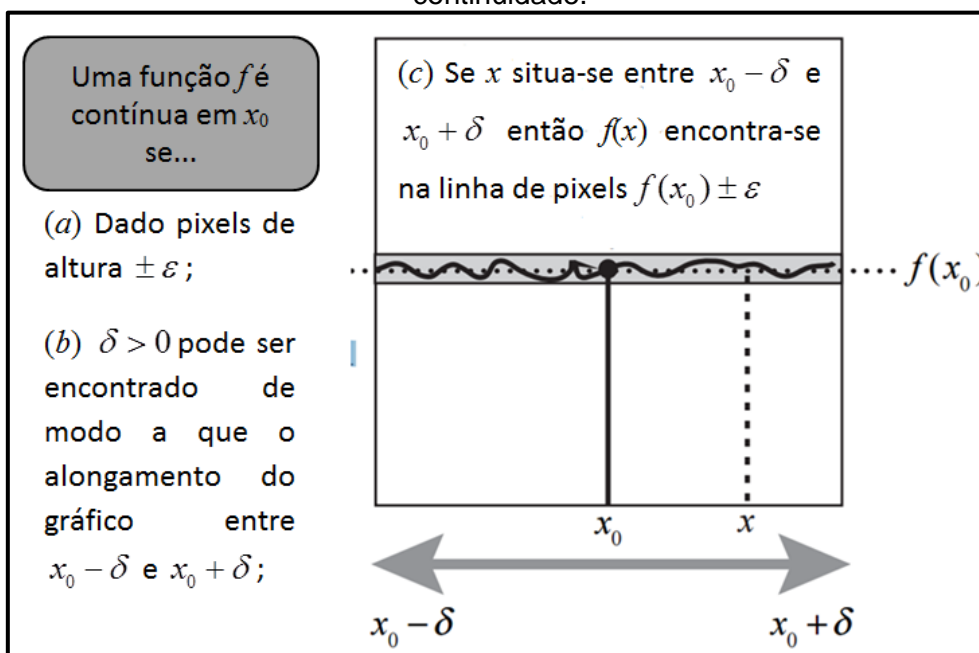
Tall introduz a definição de continuidade com vistas a noção formal utilizando a estratégia representada na Figura 12:

Imagine o desenho de um gráfico em uma tela de alta resolução e suponha que o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico seja central de uma faixa horizontal construída em torno dele, de largura 2ε , então para ‘manter o gráfico achatado’ (isto é, então que ele pertença a essa faixa horizontal), é necessário encontrar um valor $\delta > 0$ tal que para qualquer x entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ então $f(x)$ pertença à faixa horizontal, entre $f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_0) + \varepsilon$. Essa é precisamente a definição formal, em termos de ε e δ como segue: “Dada uma faixa de altura $\pm \varepsilon$, deve ser possível encontrar $\delta > 0$ de tal forma que, se x pertence ao intervalo de extremos $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$, para um dado x_0 , então $f(x)$ pertencerá ao intervalo de extremos $f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_0) + \varepsilon$ ”⁹¹ (TALL, 2013a, p. 5, tradução nossa, adaptado).

A referida introdução ao conceito formal de continuidade é representada pela Figura 13:

⁹¹ Imagine a picture of a graph on a high resolution screen, and suppose the middle point $(x_0, f(x_0))$ on the graph lies in a pixel of height $\pm \varepsilon$ in the picture, then to ‘pull the graph flat’ (that is so that it lies in the horizontal line of pixels) it is necessary to find a value $\delta > 0$ such that whenever x lies between $x_0 - \delta$ to $x_0 + \delta$ then $f(x)$ lies in the horizontal line of pixels between $f(x_0) - \varepsilon$ and $f(x_0) + \varepsilon$. This is precisely the formal epsilon-delta definition in the form: ‘Given a pixel height $\pm \varepsilon$, a $\delta > 0$ can be found so that, given x_0 , if x lies between $x_0 - \delta$ and $x_0 + \delta$, then $f(x)$ lies in the range $f(x_0) \pm \varepsilon$ ’.

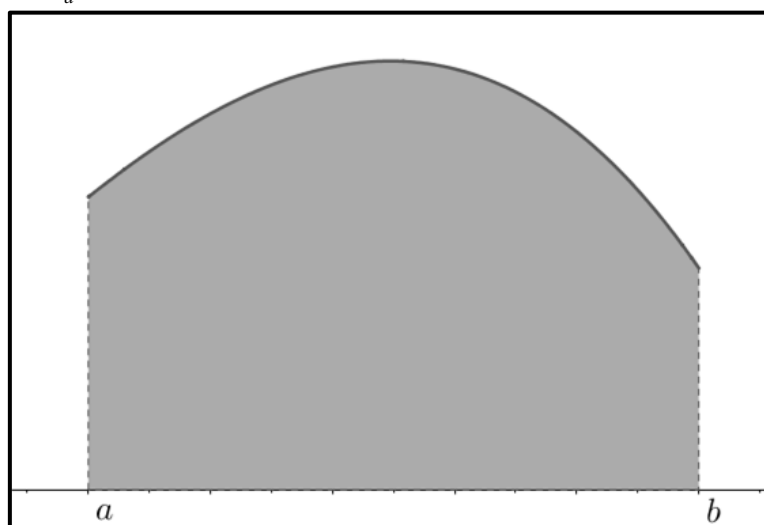
Figura 13 – A interpretação da continuidade perceptiva que resulta na definição formal de continuidade.



Fonte: TALL (2013a, p. 6, tradução nossa).

Para o conceito de integral, Tall toma como raiz cognitiva a área da região do plano abaixo do gráfico da função (isto é, região compreendida entre eixo x , o gráfico da função e as retas $x = a$ e $x = b$, com $[a, b]$ o intervalo de integração). O que justifica essa posição é o fato de que a noção de integral está associada ao cálculo de áreas, pois essa igualdade ocorre no caso em que a função integranda é positiva no intervalo de integração $[a, b]$ como o exemplo da Figura 14.

Figura 14 – $\int_a^b f(x)dx = A$, sendo A a medida da área da região hachurada.



Fonte: Elaboração nossa.

Se f é uma função integrável em $[a, b]$, se fixarmos o extremo inferior da integral, ou seja, o valor a , é possível definir para todo x em $[a, b]$ uma função F , tal

que $F(x) = \int_a^x f(x)dx$. No caso em que a função integranda f seja contínua, é

possível concluir que F é uma primitiva da função f , isto é $F'(x) = f$.

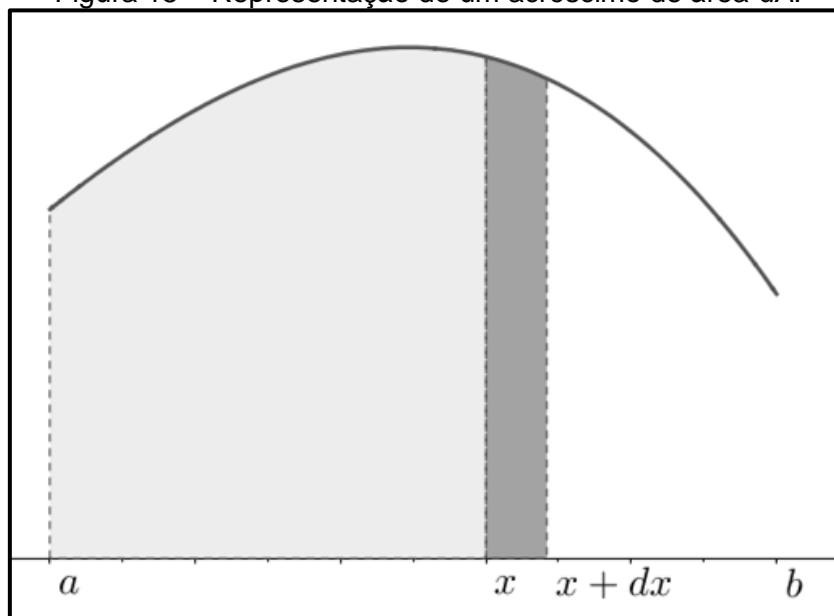
É possível exemplificar ao estudante com essa situação o motivo pelo qual a função F é uma das primitivas de f , quando f é contínua.

Leibniz (1646 – 1716):

[...] originalmente usava o símbolo ainda mais econômico $A = \int ydx$ para a área, que ele havia previsto como a soma de retângulos cada um com altura y e comprimento dx . Ele considerou que, quando x é aumentado por uma quantidade dx , a área A é aumentada pela quantidade dA que pode ser interpretada como uma área de uma faixa muito fina de largura dx e altura y ⁹² (TALL, 2013a, p. 22, tradução nossa).

Na Figura 15, destacamos a região que tem área igual a $F(x + dx) - F(x)$. Essa região é nomeada por acréscimo de área dA pela variação dx .

Figura 15 – Representação de um acréscimo de área dA .

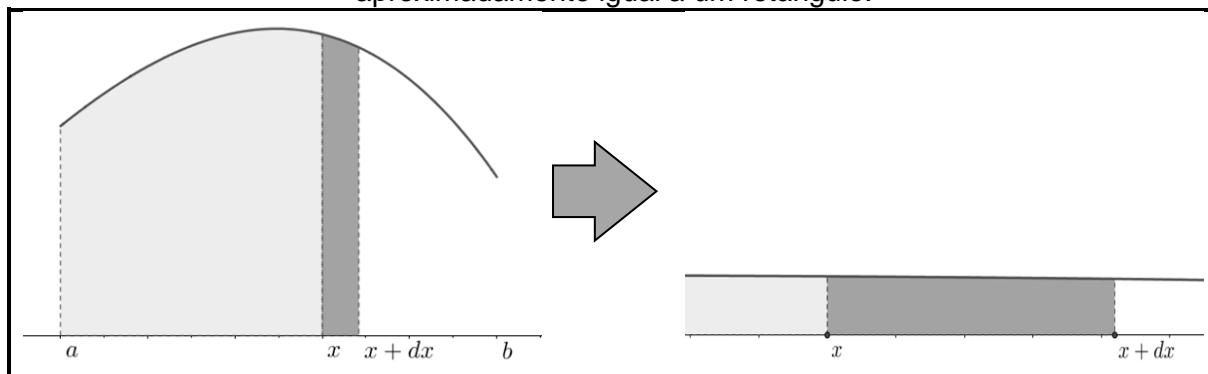


Fonte: Elaboração nossa.

⁹² [...] originally used the even more economical symbol $A = \int ydx$ for the area which he envisaged as the sum of strips height y , width dx . He considered that, when x is increased by a quantity dx , the area A is increased by a quantity dA which is the area of a very thin strip width dx , height y .

No GeoGebra, alterando-se a razão entre o Eixo X:Eixo Y de 1:1 para 1: 50 é obtida uma representação do acréscimo de área dA assemelhando-se a um retângulo, que pode ser vista na Figura 16:

Figura 16 – Esticando horizontalmente o acréscimo de área dx e a percepção que a área é aproximadamente igual a um retângulo.



Fonte: Elaboração nossa.

Tall diz que:

A superfície dA não é exatamente um retângulo, porque a parte superior dela é uma parte do gráfico, que é curvo. No entanto, para uma função contínua, a tira fina com comprimento dx pode ser tomada tão pequena que, quando a tira é alongada horizontalmente, então o gráfico é puxado horizontalmente e o aumento de área se assemelha com um retângulo de comprimento dx e altura y ⁹³ (TALL, 2013a, p. 22, tradução nossa, adaptada).

Com isso, $dA = y dx$ é uma boa aproximação da área de dA . Essa última relação pode ser expressa com a notação de Leibniz para derivada.

$$\frac{dA}{dx} = y$$

Logo, $A' = f$.

Sabemos que se pode fixar outro valor em $[a, b]$. Caso trocássemos o valor a

por outro, que denotaremos por c , a função $C(x) = \int_c^x f(x)dx$ também tem derivada

⁹³ The thin strip of area dA is not an exact rectangle as the top is part of the curved graph. However, for a continuous function, the final strip width dx can be taken so small that when the strip is stretched horizontally, then the graph will pull flat and the increase in area looks like a rectangle width dx , height y .

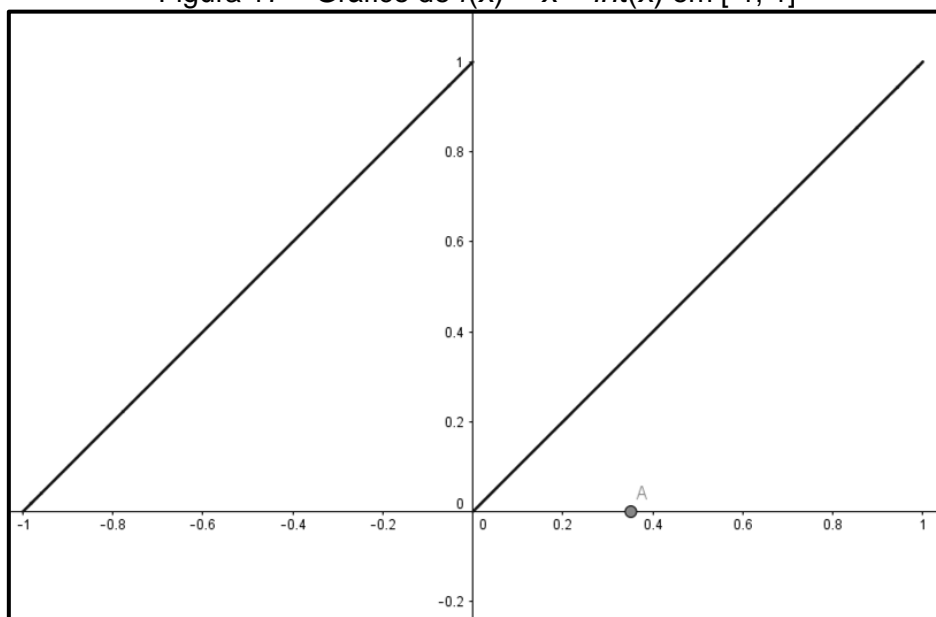
igual a f . E, por um Lema do Teorema do Valor Médio⁹⁴, se a derivada da função $(A - C)$ é nula, então as funções A e C diferem por uma constante, ou seja,

$$C(x) = \int_a^x f(x)dx + k \quad \text{com } k \in \mathbb{R}.$$

A continuidade da função no intervalo de integração não é necessária para a existência da integral. No caso em que f é descontínua em pontos pertencentes ao intervalo de integração, pode existir sua integral bastando para isso que o conjunto dos pontos de descontinuidade esteja sujeito a algumas condições. Contudo, sem a continuidade da função integrada em seu intervalo de integração, a existência de primitiva fica comprometida.

O exemplo explorado por Tall (2000) é o da função $f(x) = x - \text{int}(x)$ ⁹⁵. A função f é descontínua em todos os valores inteiros.

Figura 17 – Gráfico de $f(x) = x - \text{int}(x)$ em $[-1, 1]$



Fonte: Elaboração nossa.

O GeoGebra viabiliza a obtenção do gráfico da função

$$A(x) = \int_{-1}^x f(x)dx, \quad x \in [-1, 1],$$

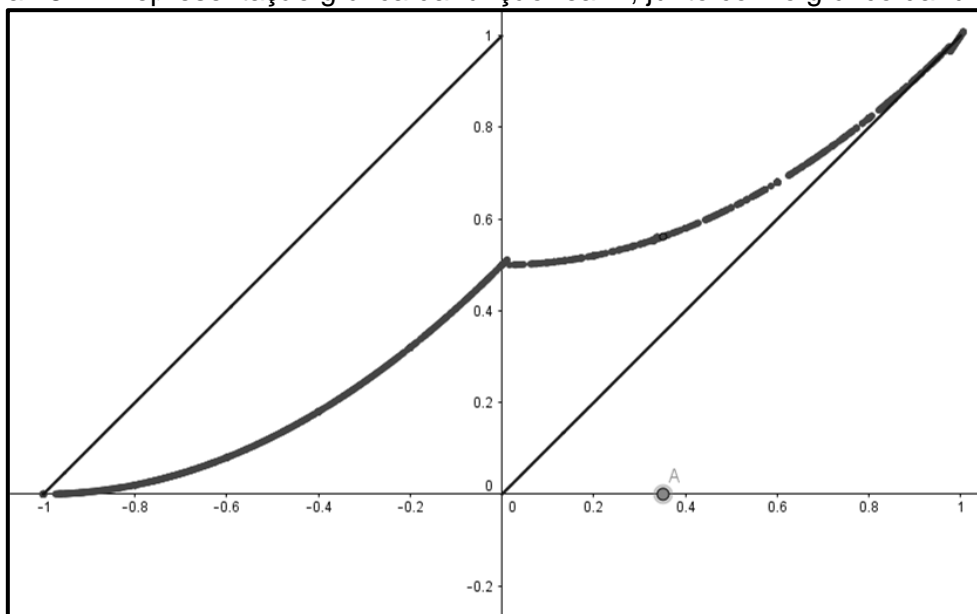
conjuntamente ao gráfico da função f , conforme a

Figura 18:

⁹⁴ Foi feita referência ao seguinte resultado: se a derivada de uma função for igual a zero num intervalo, então essa função é constante neste intervalo.

⁹⁵ O símbolo $\text{int}(x)$ refere-se à função inteiro de x , aquela que para cada valor de x associa o menor inteiro maior do que ou igual a x .

Figura 18 – A representação gráfica da função real A , junto com o gráfico da função f .



Fonte: Elaboração nossa.

A Figura 18 possibilita explorar o seguinte fato: uma função pode ser integrável em um determinado intervalo fechado da reta real e não admitir primitiva nesse intervalo. Isso porque aparece um ‘bico’ no gráfico da função A em um ponto em que a função f não é contínua, revelando que nesse ponto a derivada da função A não pode existir e, em consequência, a função f não pode possuir uma primitiva. O que garante esse resultado é o Teorema Fundamental do Cálculo, cujo enunciado apresenta como condição necessária a continuidade de f .

A utilização de um organizador genérico, baseado em uma raiz cognitiva adequada, deve visar ao desenvolvimento do sujeito em longo prazo, com vistas a prover uma base sólida para que, posteriormente, seja possível a ocorrência do desenvolvimento da teoria formal. Segundo Tall, “um organizador genérico bem delineado deve conter o potencial para a compreensão sobre a teoria posterior”⁹⁶ (TALL, 1986, p. 85). Sendo assim, cada uma das raízes cognitivas apresentadas deve fundamentar a construção de um organizador genérico que por sua vez tem o objetivo de proporcionar o desenvolvimento, no sujeito, da teoria formal da Matemática.

Tall (1986) exemplifica como o organizador genérico desenvolvido para o conceito de diferenciabilidade possui elementos que auxiliam no desenvolvimento

⁹⁶ [...] a well-designed generic organizer should contain the potential for insight into the later theory.

teórico posterior. O organizador genérico desenvolvido mostra que uma função diferenciável em um dado ponto assemelha-se “localmente a um segmento de reta”, em uma determinada vizinhança desse ponto. Segundo Tall, essas concepções “conduzem ao conceito de aproximação linear local e (nos anos seguintes) à ideia fundamental de que as variedades diferenciáveis são ‘localmente planas’”⁹⁷ (TALL, 1986, p. 86, tradução nossa). Da mesma forma, com base nesse organizador genérico, é possível conjecturar uma característica de uma função contínua e não diferenciável em nenhum ponto do domínio: ela não pode ser localmente reta em nenhum ponto do domínio. Assim é possível conjecturar e, posteriormente, provar a existência de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio.

2.2.2.3. Os três mundos da Matemática

Nesse referencial teórico é objetivada uma descrição para o desenvolvimento, em longo prazo, do pensamento matemático. Segundo Tall, esse referencial teórico inicia-se “a partir da visualização em Cálculo, para simbolização em Aritmética e Álgebra, e o pensamento matemático avançado por meio da definição de conceitos e provas”⁹⁸ (TALL, 2007, p. 145).

Nele são englobados três modos de operações mentais nomeados por mundos. Esses são o “conceitual-corporificado (baseado na percepção de – e reflexão sobre – objetos); o proceitual-simbólico (baseado em ações como contar que são simbolizadas em conceitos para prover proceitos flexíveis); e o axiomático-formal (baseado em definições formais e provas)”⁹⁹ (TALL, 2007, p. 146).

Tall relata que foram utilizados substantivos compostos para a descrição dos mundos porque a utilização de um substantivo simples poderia ocasionar falta de precisão na interpretação das ideias transmitidas, no caso em que os substantivos escolhidos já tivessem outros significados no contexto da Educação Matemática. No

⁹⁷ [...] leads naturally into the concept of local linear approximation and (years later) to the fundamental idea that differentiable manifolds are "locally flat".

⁹⁸ [...] went on from visualisation in Calculus, to symbolisation in arithmetic and algebra, and the advanced mathematical thinking through concept definition and proof.

⁹⁹ [...] the conceptual-embodied (based on perception of – and reflection on – objects); the proceptual-symbolic (basead on actions such as as counting that are symbolised as concepts to give flexible procepts); and the axiomatic-formal (based on formal definition and proofs).

processo de escolha dos termos apropriados para descrever os elementos dessa teoria, o pesquisador inglês

[...] [tinha] a visão de Richard Skemp para [guiá-lo]. Ele acreditava que as palavras deveriam ser utilizadas de maneira a evocar naturalmente o seu significado, e quando reunidas de determinada maneira deveriam provocar novas formas de pensar. Desse modo, o termo 'entendimento', por si só, tem um significado natural que tem sido difícil para os educadores categorizarem, mas 'compreensão instrumental' e 'compreensão relacional' possuem novas conotações que permitem, ao criador dos conceitos, chamar a atenção para os diferentes tipos de compreensão¹⁰⁰ (TALL, 2007, p. 148, tradução nossa, adaptado).

Por exemplo, o termo corporificado poderia se referir à utilização cotidiana da palavra, que é uma interpretação física de um conceito abstrato, ou ter o sentido técnico, utilizado por Lakoff (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000), no qual todo pensamento humano é corporificado. E o termo conceitual-corporificado possui outra conotação, que se baseia na percepção e reflexão de propriedades de um dado objeto, inicialmente visto e sentido.

Os Três Mundos da Matemática estão relacionados à ênfase dada a três aspectos da percepção, da ação e da reflexão. Segundo Tall, essas três ações configuram-se com maneiras pela qual objetos da Matemática podem ser conceitualizados. Para ele,

[...] a *corporificação* que se inicia representando mentalmente objetos físicos e ações e refletindo em conceitos mentais, o *simbolismo* se inicia representando ação como símbolos e manipulando-os como objetos mentais, e o *formalismo* que se inicia verbalizando propriedades e tornando-as bases de um sistema coerente de definição e dedução¹⁰¹ (TALL, 2007, p. 148, tradução nossa, grifo do autor).

A descrição de cada um dos Três Mundos da Matemática é a seguinte: o mundo conceitual-corporificado é baseado na ação e na percepção de propriedades

¹⁰⁰ [...] had the insight of my friend Richard Skemp to guide me. He believed that words should be used in ways that evoke natural meaning, yet put together in ways that provoke new ways of thinking. Thus 'understanding' by itself has a natural meaning that has proved hard for educators to categorise, but 'instrumental understanding' and 'relational understanding' have new connotations that enable the originator of the concepts to draw attention to different types of understanding.

¹⁰¹ [...] the *embodiment* that comes from mentally representing physical objects and actions and reflecting on the mental concepts, the *symbolism* that comes from representing action as symbols and manipulating them as mental objects, and the *formalism* that comes from verbalizing properties and making them the bases of a coherent system of definition and deduction

de objetos corporificados, tais como gráficos e diagramas que podem ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. O mundo simbólico-proceitual é, segundo Tall (2004),

[...] o mundo dos símbolos que nós utilizamos para cálculos e manipulações na aritmética, na álgebra e no cálculo, por exemplo. Essas se iniciam com ações (como apontar e contar) e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos [...] ¹⁰² (TALL, 2004, p. 3).

E o mundo axiomático-formal é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são utilizadas como axiomas para especificar determinado objeto matemático (por exemplo, 'espaço vetorial', 'subespaço vetorial', 'grupo', 'anel', 'espaço topológico' e assim por diante).

Nesse referencial teórico, dois elementos são considerados: *set-before* e *met-before*. Segundo Tall, esses elementos devem ser considerados porque verifica-se

[...] que esses três mundos constroem-se naturalmente de três habilidades fundamentais dos seres humanos, que eu denomino por *set-befores*, uma vez que elas são definidas antes do nosso nascimento em nossos genes e desenvolvem-se naturalmente por meio de nossas experiências sociais na vida: reconhecimento de semelhanças, diferenças e padrões; repetição de ações para torná-las rotineiras; linguagem para nomear fenômenos, para falar sobre eles e refinar o seu significado ¹⁰³ (TALL, 2009, p. 482-483, tradução nossa).

Em Tall (2008), um *set-before* é definido como a estrutura mental com a qual nascemos, que pode demorar um pouco de tempo para amadurecer à medida que nosso cérebro faz conexões no início da vida. Outros exemplos são: a estrutura visual do cérebro que incorpora sistemas que identificam cores e sombras, a percepção de mudanças, a identificação de fronteiras, a coordenação de fronteiras para ver objetos e controle de movimentos; o sistema que reconhece agrupamentos de objetos com um número pequeno de elementos (talvez um, dois ou três); estruturas mentais associadas aos conceitos de 'cima' e 'baixo' que estão

¹⁰² [...] is the world of symbols that we use for calculation and manipulation in arithmetic, algebra, calculus and so on. These begin with actions (such as pointing and counting) that are encapsulated as concepts by using symbol [...]

¹⁰³ [...] that these three worlds build naturally from three fundamental human abilities, which I term 'set-befores' as they are set before our birth in our genes and develop naturally through our social experiences in life: recognition of similarities, differences and patterns; repetition of actions to make them routine; language to name phenomena to talk about them and refine their meaning.

relacionados à força gravitacional, à postura e ao conceito de horizontal; “a sensação de peso que encontramos por meio da tração sobre os nossos músculos como levantar objetos”¹⁰⁴ (TALL, 2008, p. 5, tradução nossa).

Segundo Gray e Tall, um *set-before* pode ser associado ao reconhecimento, à repetição e à linguagem e conduz a maneiras distintas de desenvolvimento de determinado conceito:

Reconhecimento apoiado pela linguagem permite a categorização; Repetição torna a aprendizagem processual possível e, convenientemente apoiada pela linguagem, também permite ações a serem simbolizadas e consideradas como proceitos por meio do encapsulamento; Linguagem permite a definição, inicialmente por meio da descrição de fenômenos, e, em seguida, em termos de um conjunto formal de definições teóricas¹⁰⁵ (TALL, 2009, p. 483, tradução nossa).

O termo *met-before* refere-se a determinados aspectos do pensamento que foram encontrados em ocasiões anteriores e agora fazem parte da maneira pela qual o sujeito pensa, possivelmente, afetando a maneira pela qual novas ideias são desenvolvidas. Tall sugere que “um estudo do *met-before* dos estudantes pode auxiliar o professor a ganhar percepções com relação à fonte de algumas das dificuldades dos estudantes ao lidar com novas ideias”¹⁰⁶ (TALL, 2007, p. 151, tradução nossa).

Para exemplificar como determinadas experiências prévias, que podem constituir um *met-before*, apoiam e compõem experiências que auxiliam a aprendizagem enquanto que outras podem ser problemáticas e causar confusões, trazemos o seguinte trecho de Tall (2013b):

Um fato numérico, como $5 + 2 = 7$, estabelecido por meio da contagem, é um apoio para a aprendizagem posterior, que pode ser na aritmética decimal onde $35 + 2 = 37$ ou $50 + 20 = 70$, na medição onde 5 metros mais 2 metros é 7 metros, ou até nos números complexos onde $5i + 3 + 2i$ é $3 + 7i$. Mas outras experiências são problemáticas, tais como a ideia que ‘depois de um número sempre vem o sucessor’ ou ‘[o produto de dois números é maior que cada

¹⁰⁴ [...] the sense of weight that we encounter through the pull on our muscles as we lift objects.

¹⁰⁵ Recognition supported by language enables categorization; Repetition makes procedural learning possible and, suitably supported by language, it also allows actions to be symbolised and considered as procepts through encapsulation; Language enables definition, initially through description of phenomena, and then in terms of formal set theoretic definition.

¹⁰⁶ [...] a study of students’ *met-before* can help the teacher gain insight into the sources of some of their students’ difficulties in coping with new ideas.

parcela do produto]’, que são ambas verdadeiras para números naturais, mas não para números racionais¹⁰⁷ (TALL, 2013b, p. 88, tradução nossa, adaptado).

Tall identifica elementos do Cálculo e da Análise Matemática, com base no referencial teórico dos Três Mundos da Matemática, quando diz que os

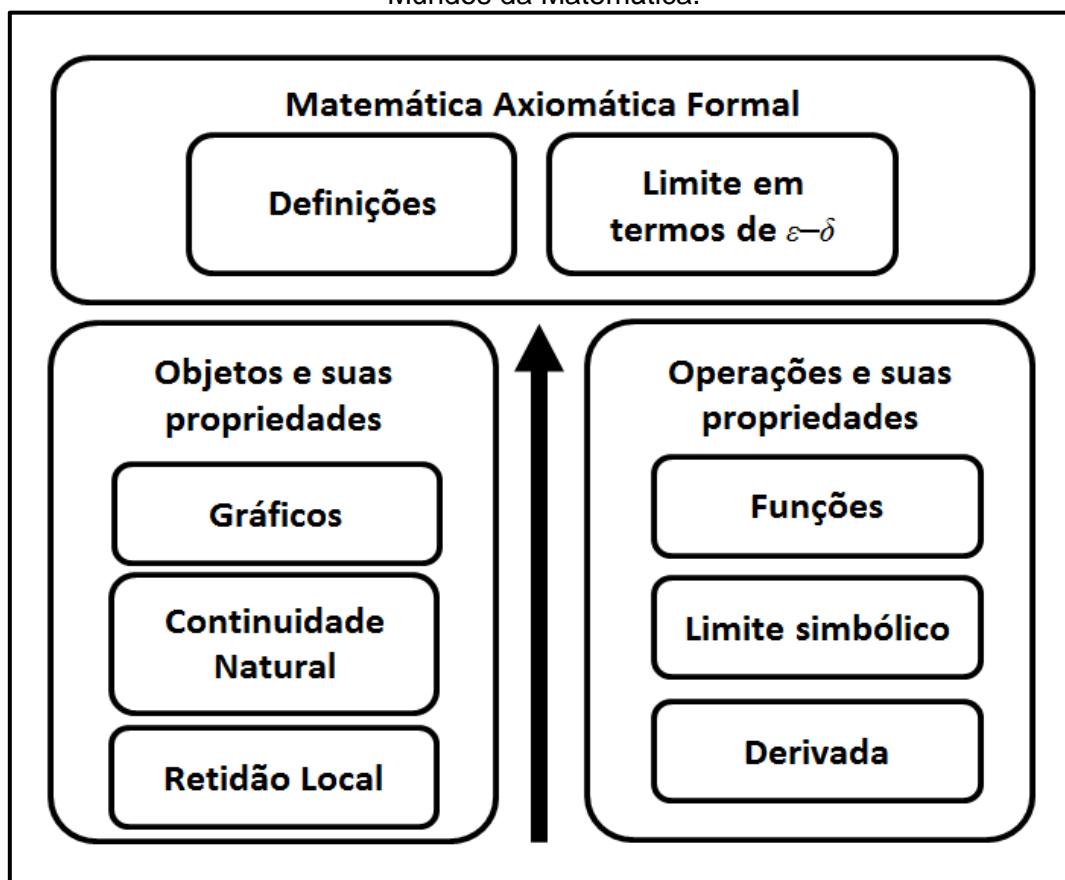
[...] gráficos e a noção de inclinação habitam o mundo conceitual-corporificado de objetos e suas propriedades em termos da continuidade natural e da retidão local. Os conceitos simbólicos de função e derivada residem no mundo simbólico-proceitual. O Cálculo Elementar desenvolve-se em uma mistura dos dois. Enquanto isso, a Análise Matemática habita o mundo axiomático-formal que envolve uma mudança substancial de significado com as definições formais incluindo a definição de limites, em termos de épsilon e delta¹⁰⁸ (TALL, 2013a, p. 24, tradução nossa).

Pela maneira pela qual os conceitos são trabalhados no mundo axiomático formal, a partir da apresentação das definições e provas formais, tal mundo, segundo Tall (2013a), não é um ambiente adequado para o Cálculo. O ambiente mais adequado para o desenvolvimento do Cálculo seriam os outros dois mundos. Contudo, Tall entende que o trabalho desenvolvido nesses dois mundos deve ser feito com vistas ao desenvolvimento dos conceitos no mundo axiomático-formal. Por isso, devem ser tomadas precauções necessárias para que o trabalho no contexto dos mundos conceitual-corporificado e proceitual-simbólico possa ser utilizado para o desenvolvimento formal da Matemática. Na Figura 19, segue um esquema da maneira pela qual conceitos tanto do Cálculo quanto da Análise podem ser referenciados pelos Três Mundos da Matemática:

¹⁰⁷ A number fact like $5 + 2 = 7$ established through counting supportive in subsequent learning, whether it be in decimal arithmetic where $35 + 2 = 37$ or $50 + 20 = 70$, in measurement where 5 metres plus 2 metres is 7 metres, or even in complex numbers where $5i + 3 + 2i$ is $3 + 7i$. But other experiences are problematic, such as the idea that ‘after one number comes the next’ or ‘multiplication makes bigger’, both of which are true for counting numbers but not for fractions.

¹⁰⁸ [...] graphs and the notion of slope inhabit the conceptual embodied world of objects and their properties in terms of natural continuity and local straightness. The symbolic concepts of function and the derivative lie in the world of proceptual symbolism. Elementary calculus develops as a blend of the two. Meanwhile, mathematical analysis inhabits the axiomatic formal world which involves a substantial change in meaning with formal definitions including the epsilon-delta definition of limit.

Figura 19 – O Cálculo e a Análise Matemática segundo o referencial teórico dos Três Mundos da Matemática.



Fonte: TALL (2013a, p. 24, tradução nossa).

Os Três Mundos da Matemática são um referencial que descreve o desenvolvimento cognitivo do sujeito em longo prazo. Como o desenvolvimento cognitivo do sujeito não é sequencial, existindo outros fatores que contribuem para tal desenvolvimento, deve ser levado em conta o seguinte: os Três Mundos da Matemática não devem ser considerados como estágios que devem ser percorridos, em uma sequência rígida e predeterminada, que se inicia no mundo conceitual-corporificado e termina no mundo axiomático formal. Sendo assim, cada indivíduo possui suas próprias experiências e sua jornada pelos Três Mundos da Matemática, desenvolvendo assim o seu pensamento matemático.

Tall ressalta que cada um dos mundos aborda três tipos diferentes de significado e compreensão:

- no mundo corporificado, o significado é dado por experimentos mentais confirmando relações e inferências;
- no mundo simbólico, o foco está sobre o efeito de procedimentos para fornecer proceitos pensáveis;

- no mundo formal, ideias [que são classificadas por] *met-before* conduzem à definição formal e dedução de propriedades para construir sistemas axiomáticos coerentes¹⁰⁹ (TALL, 2007, p. 153, tradução nossa, adaptado).

O motivo pelo qual esse referencial teórico foi utilizado nesta tese é porque, em Tall (2009), o pesquisador formulou, com base no referencial teórico dos Três Mundos da Matemática, a transição da Matemática do ensino básico para a Matemática do ensino superior, um ponto apresentado na problemática desta pesquisa. Segundo Tall, esse construto pode ser “utilizado para considerar como estudantes negociam a transição da Matemática básica para a superior quando corporificação e simbolismo são combinados ao formalismo”¹¹⁰ (TALL, 2009, p. 5, tradução nossa).

Para exemplificar como a corporificação e o simbolismo estão combinados ao formalismo em estudos avançados da Matemática, Tall considera o exemplo do sistema dos números reais. Segundo o pesquisador, a combinação da corporificação e simbolismo com o formalismo ocorre do seguinte modo no sistema dos números reais:

A reta real nos permite ver os números como pontos em uma linha horizontal ordenada da esquerda para a direita. Se nós apontarmos para o número zero e deslizarmos nosso dedo para o número um, podemos imaginar que estamos nos movendo continuamente por todos os números entre 0 e 1. Entretanto, se pensarmos o número como um decimal infinito, é impossível imaginar a expressão decimal percorrendo todos os possíveis decimais entre 0 e 1 em um tempo finito¹¹¹ (TALL, 2013b, p. 24).

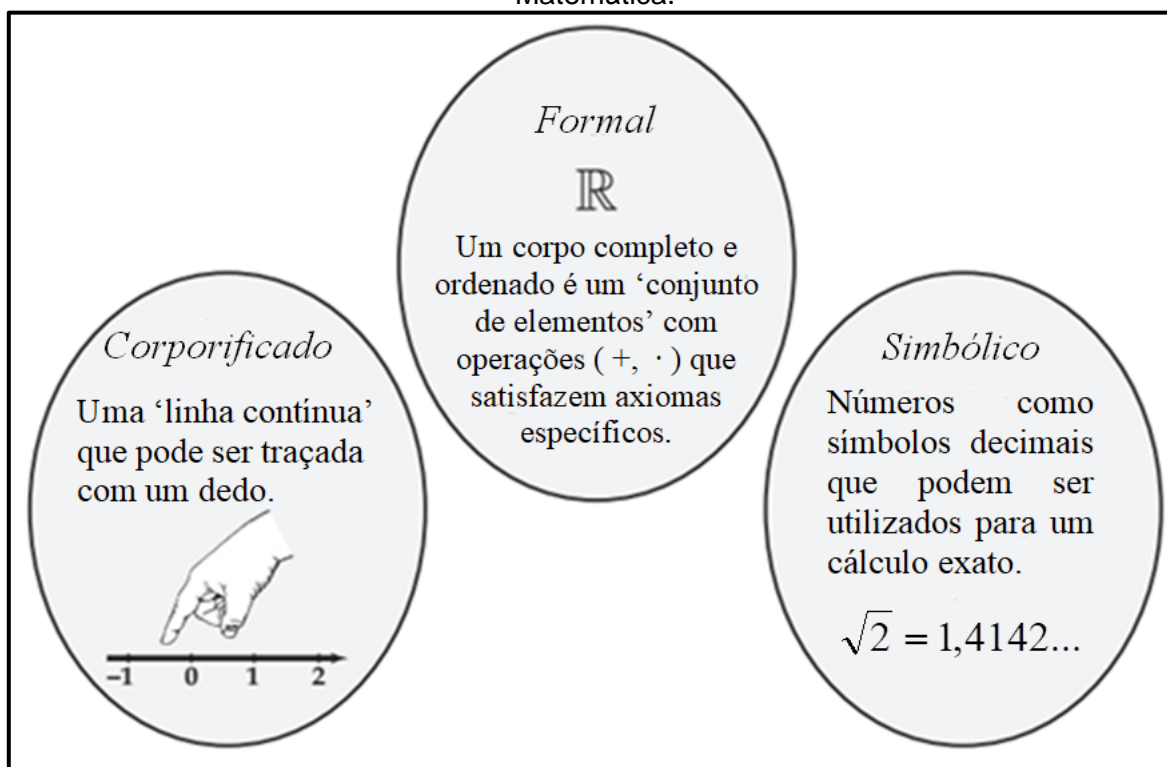
Essa combinação de corporificação e simbolismo com o formalismo, no caso dos números reais, contribui com seu entendimento, como é exemplificado por Tall no esquema representado na Figura 20.

¹⁰⁹ • in the embodied world meaning is given by thought experiments confirming relationships and inferences; • in the symbolic world it relates to the focus on the effect of procedures to give thinkable precepts; • in the formal world, ideas *met-before* lead to formal definition and deduction of properties to build coherent axiomatic systems.

¹¹⁰ [...] used to consider how students negotiate the transition from school to university mathematics as embodiment and symbolism are blended with formalism.

¹¹¹ The number line allows us to see numbers as points on a horizontal line in order from left to right. If we point at the number zero and slide a finger along to the number 1 we may imagine we are moving continuously through all the numbers from 0 to 1. However, if we think of a number as an infinite decimal, it is impossible to image the decimal expressions running through all the possible decimals between 0 and 1 in a finite time.

Figura 20 – Os números reais como uma combinação de elementos dos Três Mundos da Matemática.



Fonte: Adaptado de Tall (2013b, p. 25, tradução nossa).

Para o desenvolvimento de material baseado em elementos dos Três Mundos da Matemática, Tall enfatiza que o Cálculo deve ser abordado a partir da teoria dos números reais e não de aplicações. Para o pesquisador, quando o Cálculo é abordado em termos de números, e não de grandezas, as funções reais são corporificadas em gráficos; então, as corporificações relacionadas à mudança da inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função podem ser vistas como outra função, a observação da acumulação da área abaixo do gráfico de uma função também pode ser observada como sendo o gráfico de outra função. Sendo assim, Tall afirma que

[...] dessa maneira, uma abordagem gráfica do Cálculo pode ser corporificada por propriedades corporificadas de gráficos de funções reais ao invés de corporificações físicas vinculadas a dimensões específicas. Isso é visto nas diferentes ênfases dadas em diferentes currículos. Uma abordagem relacionada a aplicações fornece significado oriundo de diferentes contextos. Uma abordagem relacionada à retidão local utilizando funções reais permite que comprimento, inclinações, áreas tenham todos os valores numéricos. Agora a diferenciação pode ser repetida uma vez e outra vez, com funções aproximadas por polinômios tendo derivadas polinomiais,

podendo conduzir a extensões teóricas de funções analíticas como séries de potências¹¹² (TALL, 2009, p. 491, tradução nossa).

Entendemos que com o desenvolvimento de material para o ensino de conceitos do Cálculo seja possível auxiliar o trabalho docente por meio da redução de variáveis, que podem ser problemáticas e estar envolvidas no ensino de Cálculo, detectadas em pesquisas conduzidas por Tall e seus colaboradores.

Por meio do material desenvolvido com base no referencial teórico dos Três Mundos da Matemática, serão produzidos elementos para o desenvolvimento de uma abordagem sensível do Cálculo, sendo essa definida do seguinte modo:

Uma abordagem sensível do Cálculo é construída a partir da evidência de nossos sentidos humanos e utiliza essas percepções como base significativa para vários desenvolvimentos posteriores, do cálculo prático para aplicações, ao desenvolvimento teórico na análise matemática e até uma abordagem lógica utilizando infinitesimais¹¹³ (TALL, 2013a, p. 1, tradução nossa).

Para exemplificar essa situação, Tall (1989) apresenta duas abordagens para o desenvolvimento do conceito de derivada. Segundo o pesquisador, esse conceito requer o limite da expressão $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, quando h tende a zero, para um valor de x fixo. Uma sequência para desenvolver esse conceito consistiria de

- (a) uma abordagem “intuitiva” para limites;
- (b) fixar o valor de x para calcular o valor do limite $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quando h se torna pequeno e chamar o limite de $f'(x)$.
- (c) variar x em $f'(x)$ para obter a derivada como uma função.

Tall pontua que as pesquisas em Educação Matemática mostram que existem obstáculos cognitivos em cada estágio.

¹¹² [...] this way, a graphic approach to the calculus can be embodied by embodied properties of graphs of real functions rather than physical embodiments tied to specific dimensions. This is seen in the differing emphases in different curricula. An approach related to applications gives meaning derived from the different contexts. An approach relating to local straightness using real functions allows lengths, slopes, areas all to have numerical values. Now differentiation can be repeated again and again, with functions approximated by polynomials having polynomial derivatives, leading on to the theoretical extension of analytic functions as power series.

¹¹³ A sensible approach to the calculus builds on the evidence of our human senses and uses these insights as a meaningful basis for various later developments, from practical calculus for applications to theoretical developments in mathematical analysis and even to a logical approach in using infinitesimals.

Em primeiro lugar, a ideia geométrica de utilizar uma reta secante que se aproxima da reta tangente não é intuitiva do ponto de vista cognitivo, uma vez que ela não ocorre espontaneamente. Ela também produz inúmeros obstáculos cognitivos; por exemplo, muitos estudantes encapsulam o *processo* de ficar pequeno como um *objeto* que é arbitrariamente pequeno – um infinitesimal cognitivo [no sentido de Cornu (1981)]¹¹⁴ (TALL, 1989, p. 10, grifo do autor, tradução nossa, adaptado).

Em virtude do que foi pontuado por Tall (1989), é proposta uma sequência baseada na raiz cognitiva da retidão local que é dividida em quatro passos:

- (a) explorar a noção de retidão local;
- (b) visualizar a mudança do valor da inclinação da reta tangente de um gráfico como outro gráfico;
- (c) relacionar a imagem do gradiente a um algoritmo numérico para fornecer uma percepção do processo subjacente ao cálculo numérico;
- (d) relacionar essas experiências a outras representações, incluindo os processos de limite numérico e algébrico.

É vantajoso desenvolver uma abordagem sensível do Cálculo, segundo Tall, porque

[...] ela não precisa ser inicialmente baseada em conceitos que sabidamente causam dificuldades aos estudantes, mas permite com que ideias fundamentais do Cálculo sejam desenvolvidas naturalmente a partir de origens sensíveis, de tal forma a construir sentidos próprios para fins gerais, embasar intuições necessárias para aplicações, fornecer um significado para o conceito de limite para ser usado mais tarde na análise e, ainda, fornecer uma base sensível para conceitos infinitesimais em análise não-standard¹¹⁵ (TALL, 2013a, p. 1, tradução nossa).

Em virtude da adoção dos argumentos expostos na citação anterior, foi decidido nesta pesquisa utilizar as raízes cognitivas da retidão local, da continuidade perceptiva e da área abaixo do gráfico de uma função e elementos dos Três Mundos da Matemática para o desenvolvimento de material para o ensino dos conceitos de

¹¹⁴ In the first place, the geometric idea of using a secant approaching a tangent is not cognitively intuitive in the sense that it does not occur spontaneously. It also produces a number of cognitive obstacles, for example, that many students encapsulate the *process* of getting smaller as an *object* that *is* arbitrarily small - a cognitive infinitesimal (Cornu 1981).

¹¹⁵ [...] it need not be based initially on concepts known to cause student difficulty, but allows fundamental ideas of the calculus to develop naturally from sensible origins, in such a way as to make sense in its own right for general purposes, support the intuitions necessary for applications, provide a meaning for the limit concept to be used later in standard analysis and further, to provide a sensible basis for infinitesimal concepts in non-standard analysis.

função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências. Sendo que esse material é organizado levando-se em conta a noção de recurso da Gênese Documental.

CAPÍTULO 3

REVISÃO DA LITERATURA

Nossa postura frente à revisão de literatura é aquela indicada em Creswell (2010), segundo o qual, em uma pesquisa qualitativa, ela cumpre os seguintes papéis: compartilhar resultados de estudos relacionados àquele que está sendo realizado; dialogar de maneira ampla e contínua com a literatura relacionada visando preenchimento de lacunas e ampliando estudos anteriores; proporcionar uma estrutura que visa estabelecer a importância do estudo conduzido; além de uma referência com vistas a comparar resultados obtidos.

Com essa perspectiva fizemos a revisão da literatura a partir do banco de dados digital Google Acadêmico. Utilizamos essa plataforma, pois por meio dela é disponibilizado, segundo descrição de Creswell,

[...] um caminho para uma ampla busca de literatura em muitas disciplinas e fontes, como documentos revistos por colegas, teses, livros, resumos e artigos de editoras acadêmicas, sociedades profissionais, universidades e outras organizações acadêmicas. Os artigos identificados em uma busca no Google Acadêmico proporcionam links para resumos, artigos relacionados e versões eletrônicas de artigos afiliados a uma biblioteca que você especifique. A Internet busca informações sobre essa obra e as possibilidades de adquirir o texto integral do artigo (CRESWELL, 2010, p. 5).

Com essa busca pudemos detectar pesquisas nacionais relacionadas ao estudo apresentado neste Relatório. O tópico eleito para a produção desta Revisão foi a busca por pesquisas em que foi objetivada a produção e/ou a avaliação de uma proposta de ensino ou de atividades em que o GeoGebra fosse utilizado como uma mídia auxiliar e fossem objetivadas para o ensino de conceitos do Cálculo. Nossos procedimentos de busca foram:

Em primeiro lugar, acessamos o Google Acadêmico (<https://scholar.google.com.br/>) e na ferramenta de busca foi digitado: “Cálculo Diferencial e Integral” ou “GeoGebra”. As aspas foram utilizadas porque quando um termo ou frase estão entre aspas, os resultados obtidos incluem páginas com os termos ou frases procuradas, na ordem indicada, e não de modo isolado. Isso deve ser utilizado, como é o nosso caso, quando o usuário está procurando termos ou

frases precisos. A conjunção “ou” foi utilizada porque quando ela está presente em uma busca, o Google vai indicar as páginas em que um dos termos digitados está indexado na busca. No Google Acadêmico é possível fixar determinado período de tempo. Para esse levantamento foi considerado o período de 2010 até 2015, por conveniência do pesquisador.

A busca foi realizada em janeiro de 2016, na qual foram encontrados 313 resultados, os quais estão listados no Anexo A. Após esse levantamento foi feita uma seleção e o resultado é que consta da revisão da literatura desta tese.

Nela constam artigos científicos, trabalhos monográficos e capítulos de livros. Foram excluídas pesquisas que abordaram tópicos do Ensino Básico; notas de aula; diapositivos; trabalhos publicados em anais de evento. Esses últimos foram excluídos porque foram considerados inconclusos.

Os resultados da busca seletiva estão organizados no Quadro 1, catalogados em quatro colunas. Nas duas primeiras estão os dados descritivos (ano de publicação, nome do autor e título do trabalho). Na coluna ‘Fonte’ está a procedência quanto à instituição, no caso de trabalho monográfico, e quanto ao periódico, no caso de artigos. Na coluna ‘Tipo’: a natureza do trabalho, sendo convencionada a codificação: A (artigo), C (capítulo de livro), M (monografia), D (dissertação) e T (Tese).

Quadro 1 – Lista dos trabalhos considerados na Revisão de Literatura

ANO	AUTOR(ES) E TÍTULO DO TRABALHO	FONTE	TIPO
2010	ALVES, D. O. Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados : uma proposta para cursos de introdução ao Cálculo.	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)	D
2010	ROCHA, M. D. Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I : estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação.	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)	D
2011	ASSUMPÇÃO, P. G. S. Introdução ao Estudo de Derivada : uma sequência didática com o uso do <i>software</i> GeoGebra.	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	M

2011	PINTO, M. M. F. et al. Objetos de Aprendizagem de Matemática: uma experiência na iniciação científica de alunos de graduação.	Revista Docência do Ensino Superior	A
2012	AMARAL, E. M. H.; MÜLLER, T. J. Integração de Tecnologias para Construção de Objetos de Aprendizagem – O case E₂D Ensino de Derivadas a Distância.	Novas Tecnologias na Educação (Renote)	A
2013	GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra.	Boletim de Educação Matemática (Bolema)	A
2013	MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B.; GUIMARAIS, Y. P. B. Q.. Explorando um ambiente informatizado, com uma atividade didática, para o estudo de taxa de variação.	Educação Digital: a tecnologia a favor da inclusão.	C
2013	MORAES, H. L.. Utilização do software GeoGebra no estudo pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável.	Universidade Federal de Goiás (UFG)	D
2013	TRAMONTANO, A.; ALVES, M. J. G.; VEIGA, J. O GeoGebra como Recurso Facilitador nos Processos de Ensino-Aprendizagem da Derivada de Funções Polinomiais	Revista de Ensino de Ciências e Engenharia	A
2014	ALVES, M. J. G. Uma proposta para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral com a utilização do software GeoGebra.	Universidade Severino Sombra (USS)	D
2014	GRANDE, A. L.; VAZQUEZ, V. R. Resolução de problemas de otimização com o auxílio do software GeoGebra.	Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo	A
2014	MAZZI, L. C. Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real.	Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Rio Claro	D
2014	RICALDONI, M. A. G. Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de	Universidade Federal de Ouro	D

	cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas as derivadas de funções reais.	Preto (UFOP)	
2014	SILVA, A. P. <i>et al.</i> Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do software Geogebra.	Espacios	A
2015	CARGNIN, C.; BARROS, R. M. O. A Contribuição do GeoGebra para a Compreensão do Conceito de Convergência.	Revista Paranaense de Educação Matemática	A
2015	MARTINS JÚNIOR, J. C. Ensino de Derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra.	Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)	D
2015	MÜLLER, T. J. Objetos de Aprendizagem Multimodais e Ensino de Cálculo: uma proposta baseada em análise de erros.	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	T

Fonte: Elaboração nossa.

3.1. Mapa da literatura

Para organizar os dados do Quadro 1, utilizamos primeiramente o recurso denominado por Creswell de mapa da literatura. Esse recurso possibilitou a compreensão de como a tese, descrita neste Relatório, amplia as pesquisas consultadas. Isso porque o mapa da literatura é

[...] um recurso visual da pesquisa que já foi conduzida por outros e é tipicamente representado em uma figura. Os mapas são organizados de diferentes maneiras. Uma maneira pode ser uma estrutura hierárquica, com uma apresentação de cima para baixo da literatura, terminando na base o estudo proposto. Outra maneira pode ser similar a um fluxograma, em que o leitor entende a literatura como se desdobrando da esquerda para a direita, com a seção mais à direita sugerindo o estudo proposto. Um terceiro modo pode ser uma série de círculos, cada uma representando um corpo da literatura e, a intersecção dos círculos, o local em que a pesquisa futura está indicada (CRESWELL, 2010, p.61-62).

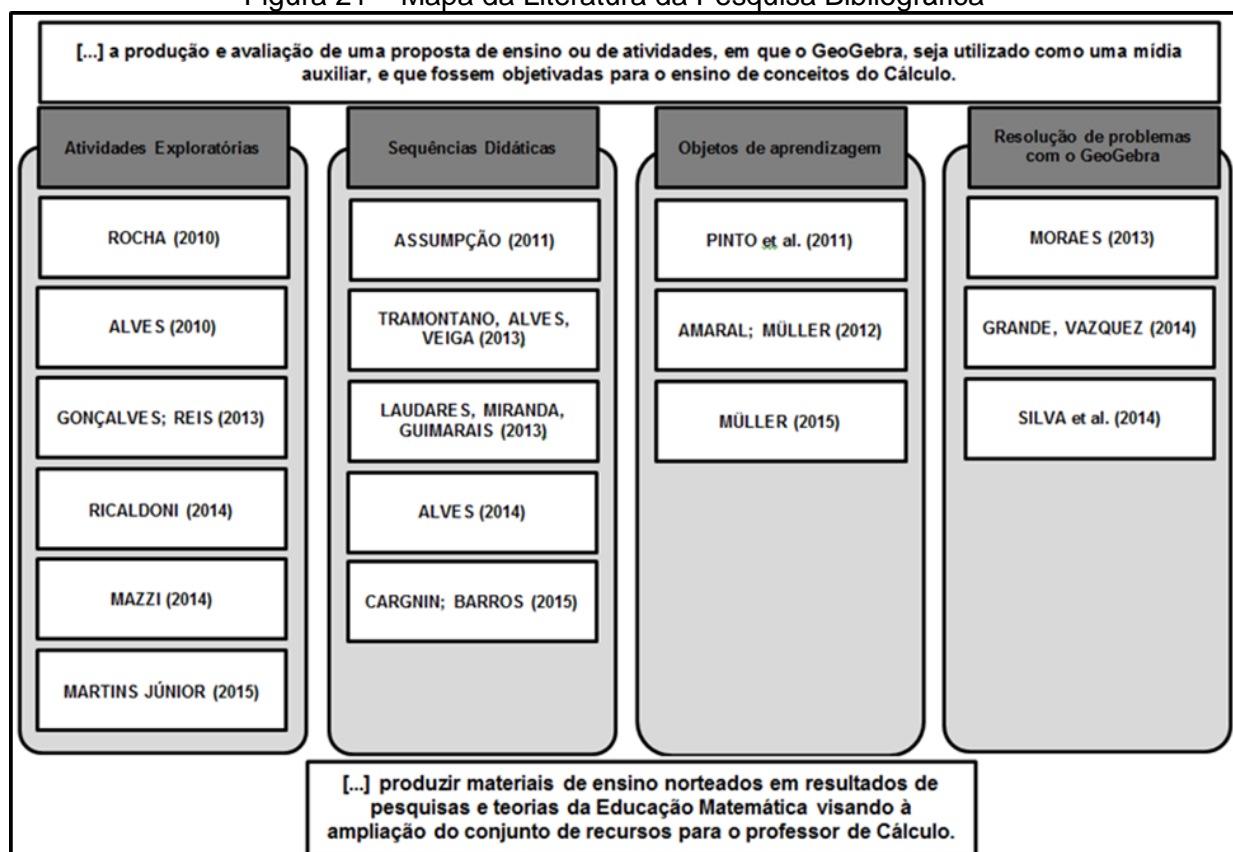
Nós escolhemos o modelo hierárquico, baseado nos seguintes princípios de organização: o tópico da revisão ocupa o topo da estrutura hierárquica; os dados selecionados, e apresentados no Quadro 1, se distribuíram em quatro categorias:

atividades exploratórias, sequências didáticas, objetos de aprendizagem e resolução de problemas utilizando o GeoGebra; os dados de cada categoria estão em caixas separadas. Na base inferior da estrutura hierárquica está indicado o objetivo desta pesquisa.

Como o objetivo desta pesquisa é produzir material para o ensino norteado pelos constructos teóricos cognitivistas de Tall, pelo uso do computador e que toma como constructo organizador do material, a noção de recurso da Gênese Documental foi eleito como tópico desta Revisão a busca por pesquisas em que foi objetivada a produção e/ou a avaliação de uma proposta de ensino ou de atividades, em que o GeoGebra seja utilizado como uma mídia auxiliar e que fossem objetivadas para o ensino de conceitos do Cálculo.

O mapa da literatura é apresentado na Figura 21.

Figura 21 – Mapa da Literatura da Pesquisa Bibliográfica



Fonte: Elaboração nossa.

Nas próximas subseções são apresentadas as categorias e todas as pesquisas que compõem cada categoria. Além disso, na descrição de cada

pesquisa, apresentamos exemplos de atividades desenvolvidas com vistas a efetuar comparações com o que é produzido nesta pesquisa.

3.1.1 Atividades exploratórias

Nesta categoria estão as pesquisas denominadas 'atividades exploratórias'. Elas são: Alves (2010), Rocha (2010), Gonçalves e Reis (2013), Mazzi (2014), Ricaldoni (2014) e Martins Júnior (2015). Esta categoria foi subdividida em dois conjuntos: um conjunto com as pesquisas (ALVES, 2010; GONÇALVES; REIS, 2013; MARTINS JÚNIOR, 2015; RICALDONI, 2014) que utilizaram o mesmo aporte teórico e o segundo com as outras duas (MAZZI, 2014; ROCHA, 2010) com aportes teóricos distintos das quatro pesquisas do primeiro conjunto.

As pesquisas do primeiro conjunto utilizam a noção de investigações matemáticas proposta em Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), segundo os quais: “as investigações matemáticas são um tipo de atividade que todos os alunos devem experimentar” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 25).

As atividades que visam promover a investigação são desenvolvidas visando à busca de “relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 13). Por meio dessas atividades é possível propiciar a análise de uma determinada situação-problema, a observação de regularidades, o estabelecimento de hipóteses e conjecturas e a validação (ou não) das conjecturas formuladas com vistas à busca por uma solução da situação-problema.

Alves (2010) desenvolveu atividades em que foram abordados os conceitos de função, limite e continuidade, por meio da noção de explorações guiadas. Ao utilizar essa noção para o desenvolvimento das atividades, o pesquisador entende que ao

[...] elaborar e propor atividades exploratórias guiadas, tendo em vista que, embora o elemento desencadeador da exploração seja mais dirigido, esse tipo de exploração leva à elaboração de conjecturas, o que já defendemos como fundamental no desenvolvimento do trabalho com TIC's (ALVES, 2010, p. 53-54).

Em Alves (2010) foram elaboradas dez atividades. No Quadro 2, apresentamos a “Atividade 8 – Existência de Limites e Limites Laterais: identificação algébrica e gráfica” atendendo a um dos objetivos da atividade: “identificar algebricamente e graficamente a existência dos limites”.

Quadro 2 – Atividade 8 desenvolvida por Alves (2010)

1º Objetivo: Identificar algébrica e graficamente a existência dos Limites:	
a)	$f(x) = x^2 - x + 2 \quad (x \rightarrow 2)$
b)	$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad (x \rightarrow 1)$
c)	$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \quad (x \rightarrow 0)$
d)	$f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad (x \rightarrow 0)$

Fonte: ALVES, 2010, p. 67.

Essa atividade tinha como objetivo geral trabalhar com o conceito de limite, de maneira intuitiva, do seguinte modo: os gráficos das funções eram esboçados; fazia-se um controle deslizante, nomeado por a , e um ponto $A(a, f(a))$ no GeoGebra. Solicitava-se que se movimentasse o controle deslizante com vistas a verificar, pelo comportamento da função em uma vizinhança de A , a existência do limite.

Em Gonçalves e Reis (2013) é apresentado o Produto Educacional, gerado a partir da dissertação de Gonçalves (2012), que abordou aplicações do conceito de derivada, por meio de atividades exploratórias com o *software* GeoGebra. Esse Produto foi criado com o objetivo de complementar e revitalizar exercícios, relacionados às aplicações de derivadas. Esses exercícios foram extraídos de livros textos constantes em bibliográfica básica de disciplinas introdutórias de conceitos de Cálculo, como Stewart (2013) e Thomas (2011).

Gonçalves e Reis (2013) pontuam que para elaborarem

[...] as atividades, inicialmente, analisamos a natureza dos exercícios propostos por cada autor, relacionados às aplicações das derivadas. Em seguida, selecionamos quatro exercícios que julgamos ter potencial para a investigação. Daí, adaptamos os textos introdutórios com o objetivo de contextualizar cada exercício e inserimos algumas orientações para a utilização do *software* GeoGebra, sempre com a finalidade de tornar os exercícios verdadeiras atividades investigativas, dentro da perspectiva adotada em nossa pesquisa (GONÇALVES; REIS, 2013, p. 428).

Em Gonçalves (2012) foram desenvolvidas quatro atividades: Atividade 1 – Construindo um tanque cilíndrico; Atividade 2 – Delimitando uma reserva; Atividade 3 – Projetando um tanque retangular; Atividade 4 – Projetando uma caixa. Essas atividades são aplicações do conceito de derivada para a resolução de problemas de otimização, seja da medida de determinado volume (Atividade 1) e da medida de uma determinada área (Atividades 2, 3 e 4).

Para exemplificar, apresentamos no Quadro 3 a Atividade 1 de Gonçalves (2012).

Quadro 3 – “Atividade 1 – Construindo um tanque cilíndrico” adaptada por Gonçalves (2012)

Sua empresa foi contratada para fazer um projeto para captação de água da chuva em uma residência. Para isso, deve ser construído um tanque cilíndrico para armazenar a água, com capacidade para 1.000 litros. Sua tarefa é determinar as dimensões que minimizarão o custo para construir esse reservatório.

a) Descreva, sucintamente, como você irá levar o custo em consideração para resolver o problema;

b) Escreva uma fórmula $S(x)$ para a área do tanque em função da medida x do raio da base;

c) Construa o gráfico dessa função no GeoGebra;

d) Na barra de ferramentas do GeoGebra, clique em “Novo ponto” e sobre um ponto qualquer da curva; a seguir, clique em “Tangentes” sobre o ponto marcado e sobre a curva; clique em “Mover” e movimente o ponto; determine, então o valor de x que torna a área mínima e o valor da área mínima, explicando suas conclusões;

e) Salve sua construção no GeoGebra, gravando-a como Atividade 1;

f) Verifique, utilizando derivadas, os valores de x e da área mínima obtidos no item anterior.

Fonte: GONÇALVES, 2012, p. 61 – 62.

E a maneira que essa atividade foi desenvolvida é descrito por Gonçalves:

[...] os participantes começaram a realização das tarefas propostas na própria folha de atividade, formulando conjecturas e discutindo as estratégias escolhidas [...]. Em relação à verificação da veracidade das hipóteses estabelecidas, a própria atividade os conduzia a buscar essa confirmação (GONÇALVES, 2012, p. 72).

Ricaldoni (2014) objetiva discutir que contribuições atividades exploratórias, de construção e interpretação de gráficos com uso do GeoGebra, trazem para o

desenvolvimento de imagens conceituais relacionadas aos conceitos: função, limite, continuidade, derivadas e aplicações (problemas de otimização).

Em função disso foi explorada a tecnologia por meio de cinco atividades nas quais o GeoGebra foi utilizado para favorecer aos estudantes o desenvolvimento de imagens conceituais ricas do conceito de derivada, utilizando também a exploração de diversas representações desse conceito.

Para exemplificar a maneira como a tecnologia foi utilizada, apresentamos a “Atividade 3: Construindo gráficos de Funções Polinomiais e movimentando Retas Tangentes” nos Quadros 4 e 5.

Quadro 4 – Funções utilizadas para o desenvolvimento da Atividade 3

- | |
|--|
| 1) $f(x) = x^2$
2) $f(x) = x^3$
3) $f(x) = x^3 - 3x$
4) $f(x) = 2x$ |
|--|

Fonte: RICALDONI, 2014, p. 104.

Essa atividade consistia na execução do seguinte roteiro apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 – Roteiro utilizado o desenvolvimento da Atividade 3 desenvolvida por Ricaldoni (2014)

- | |
|---|
| 1) Construa o gráfico de cada função no GeoGebra;
2) Marque um ponto sobre o gráfico construído, utilizando a ferramenta “Ponto em Objeto”;
3) Construa o gráfico da reta tangente no ponto selecionado, utilizando a ferramenta “Reta Tangente”;
4) Movimente o ponto selecionado, utilizando a ferramenta “Mover”;
5) Observe a equação da reta tangente na janela algébrica;
6) A partir dos gráficos construídos, descreva os valores de x para os quais a reta tangente é crescente, decrescente ou constante, discutindo com seu colega! |
|---|

Fonte: RICALDONI, 2014, p. 72.

Martins Júnior (2015) objetiva discutir que contribuições podem ser obtidas pela realização de atividades exploratórias relacionadas ao estudo da variação das funções pela análise de representações gráfica produzidas pelo GeoGebra.

No âmbito dessa pesquisa, as atividades exploratórias desenvolvidas são um

[...] conjunto de atividades didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades

livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e prática e o ensino para a aprendizagem (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

Para exemplificar, apresentamos a Atividade Exploratória 1a, em que era solicitado ao estudante que produzisse, com auxílio do GeoGebra, o esboço do gráfico da função real $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 30x + 10$ e formulavam-se questões nas quais eram solicitadas a identificação dos seguintes elementos: domínio, imagem, estimativa das raízes, pontos críticos, existência (ou não) de extremos, intervalos de crescimento e decréscimo, concavidade, identificar pontos de inflexão e discutir a existência (ou não) de assíntotas.

A partir desse ponto é apresentado o segundo conjunto de pesquisas integrantes dessa categoria, a saber, aquelas em que as atividades exploratórias são embasadas em aportes teóricos distintos.

Em Rocha (2010) foi objetivado

[...] criar e desenvolver – em uma turma de Cálculo – uma proposta de ensino na qual o ambiente informatizado ofereceu o contexto propício para a realização de atividades voltadas para a experimentação e a visualização (p. 18).

No contexto dessa pesquisa, o termo experimentação é entendido “como a possibilidade de manipular construções no *software*” (ROCHA, 2010, p. 52-53).

Rocha destaca que no processo de produção das atividades, elaboradas com a ajuda do *software* GeoGebra, foi objetivado

[...] promover questões nas quais a visualização e experimentação fossem bastante exploradas. Também procuramos seguir a “regra de quatro”¹¹⁶, buscando trazer atividades que utilizassem as representações tabular, analítica, geométrica e verbal, além de questões que exigissem dos alunos a capacidade de argumentar, questionar ou conjecturar (ROCHA, 2010, p. 73).

Para propiciar que a visualização e a experimentação fossem exploradas, Rocha utilizou a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLAREAL, 2005), na perspectiva de desenvolver atividades nas quais o laboratório de informática, em que foram realizadas as atividades, constituiu-se como um espaço que possibilitasse

¹¹⁶ A “regra de quatro” representações, apresentada em Rocha (2010), é aquela proposta em Stewart (2013) em que os tópicos matemáticos devem ser apresentados em quadro representações: a geométrica, a numérica, a algébrica e a verbal.

a iteração entre os sujeitos, o professor/pesquisador e as mídias disponíveis (papel, lápis, computador, calculadoras, etc.). Rocha relata que nas atividades propostas buscou-se acrescentar itens que fomentassem respostas dissertativas para as questões investigadas e possibilitassem o desenvolvimento de um ambiente em que o aluno tivesse liberdade para participar, experimentar, testar, questionar, interagir, conjecturar, errar, simular, enfim, ter um papel ativo no processo de aprendizagem.

No Quadro 6 é apresentado um resumo da proposta de ensino desenvolvida no âmbito da pesquisa de Rocha (2010):

Quadro 6 – Lista de atividades desenvolvidas por Rocha (2010)

Atividade – Duração	Tópicos considerados	Objetivos
Atividade 1 – 1 aula de 50 min.	– Ponto, Reta e Gráficos de Funções.	– Apresentação do <i>software</i> – Principais comandos
Atividade 2 – 1 aula de 50 min.	– Funções; – Derivadas;	– Aprender a criar seletores – Deslocamento de funções por meio de seletores – Visualizar retas tangentes
Atividade 3 – 1 aula de 50 min.	– Funções por partes;	– Aprender a utilizar o comando “Se” para construir gráficos de funções por partes
Atividade 4 – 1 aula de 50 min.	– Existência e unicidade de Limites; – Teorema do confronto;	– Visualizar o teorema do confronto – Discutir limitações do <i>software</i>
Atividade 5 – 1 aula de 50 min.	– Família de funções; – Derivadas e o gráfico;	– Trabalhar o conceito de família de funções – Estudar a relação entre o gráfico de uma função e as derivada da função
Atividade 6 – 3 aulas de 50 min.	– Derivadas de primeira e segunda ordem;	– Trabalhar com a relação entre os gráficos de uma função e o de suas derivadas primeira e segunda.
Atividade 7 – 1 aula de 50 min.	– Aplicações da derivada;	– Visualizar problemas que envolvem aplicações da derivada
Atividade 8 – 1 aula de 50 min.	– Teorema do confronto; – Aplicação da derivada;	– Atividade avaliativa em que foi cobrado o teorema do confronto e um problema de aplicação de derivadas.
Atividade 9 – 1 aula de 50 min.	– Antiderivação e integral;	– Introduzir o conceito de integral definida através da noção de área sobre uma curva.
Atividade 10 – 1 aula de 50 min.	– Integral;	– Visualizar a integral e calcular antiderivadas
Atividade 11 – 3 aulas de 50 min.	– Integral;	– Utilizar o GeoGebra para visualizar funções, áreas e aplicar o conceito de integral.

Fonte: ROCHA, 2010, p. 76-77.

Para exemplificar o tipo de atividade desenvolvida por Rocha, apresentamos a primeira parte da Atividade 5, em que foi objetivado trabalhar com o conceito de família de funções. Nessa atividade foram propostas questões que possibilitassem o desenvolvimento de conjecturas sobre intervalos de crescimento e decréscimo da família de funções de acordo com o parâmetro c .

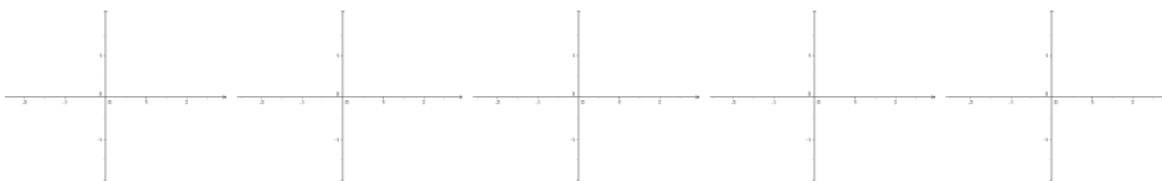
Quadro 7 – Primeira parte da Atividade 5 de Rocha (2010)

1ª parte:

“Família de funções (...) é um coleção de funções cujas equações estão relacionadas”¹¹⁷

Seja a família de funções $f(x) = x^3 + cx$.

Crie um seletor “ c ” no GeoGebra e defina a função $f(x) = x^3 + c \cdot x$. Arraste o seletor e observe o gráfico da família de funções $f(x)$ (se necessário aumente o intervalo do seletor modificando suas propriedades clicando nele com o botão direito do *mouse*). Esboce os gráficos de $f(x)$ para $c = 2$, $c = 1$, $c = 0$, $c = -1$ e $c = -2$.



O que acontece quando $c < 0$, $c = 0$ e $c > 0$ (com relação à concavidade, máximos e mínimos, crescimento, etc.)?

Escreva a equação da derivada primeira e calcule suas raízes (x_1 e x_2) em função de c .

Fonte: ROCHA, 2010, p. 158.

Na pesquisa de Mazzi (2014) o objetivo era identificar possibilidades de utilização do *software* GeoGebra para revisitar conceitos da disciplina Análise Real, por meio da proposição de quatro experimentos de ensino para os conceitos de convergência de sequências reais, sequências limitadas, sequências monótonas, além da investigação que pretendia a compreensão das hipóteses do Teorema do Valor Intermediário.

A noção de experimentação utilizada por Mazzi (2014) é aquela proposta por De Villiers (2003) e por Borba e Villareal (2005).

Para De Villiers (2003), a experimentação é utilizada quando:

¹¹⁷ Definição apresentada em Stewart (2013, p. 46).

(i) conjecturas matemáticas e/ou sentenças são numericamente ou visualmente validadas, por meios de casos especiais, construções geométricas precisas e medições, etc. (ii) Conjecturas, generalizações ou conclusões são feitas com base na intuição, analogia ou experiência obtida por meio de qualquer um dos métodos experimentais, etc.¹¹⁸ (DE VILLIERS, 2003, p. 174, tradução nossa).

Borba e Villarreal (2005) defendem que uma abordagem experimental em Educação Matemática implica na utilização de experimentos que auxiliem na criação de conjecturas matemáticas; na descoberta de resultados matemáticos previamente desconhecidos; na possibilidade de testar diferentes caminhos para alcançar determinado objetivo. Para os autores, a experimentação é um modo de aprender Matemática e que esse modo ganha uma nova dimensão e poder com o uso da tecnologia.

Mazzi (2014) desenvolveu atividades para que os alunos experimentassem e utilizassem o GeoGebra durante o fazer matemático. Nessa pesquisa foram produzidas três atividades, duas abordando as sequências numéricas e uma relacionada ao Teorema do Valor Intermediário, que possuíam momentos experimentais, nos quais era possível utilizar o GeoGebra para explorar conceitos da Análise Real.

Como exemplo de atividade desenvolvida por Mazzi (2014), apresentamos a “Atividade 1 – Convergência de Sequência”, em que foi objetivado “compreender a relação entre ε e n_0 na definição de convergência de sequências numéricas” (p. 47), por meio do esboço, no plano cartesiano, do gráfico da sequência a partir da criação de controles deslizantes e de uma faixa poligonal em torno dos pontos da sequência para fomentar a discussão da relação entre o ε e n_0 da definição.

No Quadro 8 é apresentado um exemplo de atividade proposta.

¹¹⁸ (i) Mathematical conjectures and/or statements are numerically or visually evaluated, by means of special cases, accurate geometric construction and measurement, etc. (ii) Conjectures, generalizations or conclusions are made on the basis of intuition, analogy or experience obtained through any of the proceeding experimental methods, etc.

Quadro 8 – Construção proposta por Mazzi (2014) na Atividade 1

1. Plote a sequência $x_n = \frac{7}{n} + 1$.
2. Para $n = 250$ e utilizando a ferramenta zoom, o que é possível observar sobre os pontos de x_n ?
3. Crie um comando deslizante n_0 no *software*.
4. Essa sequência converge? Justifique.
5. Calcule $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
6. Plote uma função $g(x) = L$ restrita ao intervalo $(0, \infty)$.
7. Crie um comando deslizante $\varepsilon > 0$.
8. Pela definição de convergência, temos que uma sequência x_n converge para L se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$.

Vamos programar o *software* para realizar o cálculo $|x_n - L|$.

Dado $\varepsilon = 0,5$, existe um valor de n_0 de forma que $|x_n - L|$ seja menor que ε ? E para $\varepsilon = 0,2$? E para $\varepsilon = 0,002$?
9. Crie uma faixa dependendo de ε em torno do ponto L .
10. Varie os valores de ε e analise a faixa e os pontos da sequência.

Fonte: MAZZI, 2014, p. 48.

Foram apresentadas seis pesquisas com atividades exploratórias. Nelas é feita a análise de determinada situação-problema; observação de regularidades; estabelecimento de hipóteses e conjecturas; validação (ou não) das hipóteses e conjecturas formuladas com vistas à busca de solução para a situação-problema. Essas atividades foram fundamentadas na noção de atividades investigativas, de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), na noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLAREAL, 2005) e na experimentação segundo De Villiers (2003).

3.1.2. Sequências didáticas

Na segunda categoria foram agrupadas pesquisas em que foi utilizado o termo 'sequência didática' para denominar as atividades desenvolvidas. Essas pesquisas foram de Assumpção (2011); Tramontano, Alves e Veiga (2013); Miranda, Laudares, Guimarães (2013); Alves (2014) e Cargnin e Barros (2015).

No âmbito dessas pesquisas emergiram duas descrições para o termo 'sequência didática'. A primeira é aquela devida à Teixeira e Passos, que descreve uma sequência didática como

[...] uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas. Devidamente estruturadas, essas situações têm como objetivo tornar possível a aquisição de saberes bastante claros, sem esgotar o assunto trabalhado (TEIXEIRA, PASSOS, 2013, p. 162).

A outra é aquela proposta por Zabala (2007), que define uma sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, quem tem um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 2007, p. 18).

A seguir são apresentados os trabalhos que compõem essa categoria.

Na pesquisa de Assumpção (2011) foi objetivado elaborar uma sequência didática embasada teoricamente na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. O conceito de derivada foi abordado

[...] a partir de atividades (situações) que englobam esse campo conceitual. Essas atividades foram criadas no *software* GeoGebra e seguem alguns enfoques apresentados pelos autores Stewart e Anton na noção de derivada de uma função. Espera-se que as atividades elaboradas possam servir de ferramentas para auxiliar os estudantes na construção do conceito de derivada. E ainda que eles encontrem nas atividades os elementos invariantes, isto é, o conhecimento em ação para chegar até os significantes que são as representações simbólicas, que neste estudo podem ser representados das seguintes formas: numérica, como taxa de variação instantânea; gráfica, como a inclinação da reta tangente e simbólica, como a notação matemática de derivada (ASSUMPÇÃO, 2011, p. 41).

Assumpção descreve como se deu a incorporação de elementos da Teoria dos Campos Conceituais no desenvolvimento da sequência didática. De acordo com essa teoria

[...] para compreender um conceito há necessidade de interligá-lo com outros formando uma rede complexa de conceitos, ou como Vergnaud denomina campos conceituais. Assim, essa teoria possibilitou observar que, ao estudar o conceito de derivada, esse requer o envolvimento de uma diversidade de outros conceitos e conteúdos, como, por exemplo: estudo de funções, algumas noções de geometria analítica (equação e inclinação de reta), também encontrou-se forte relação com outras áreas do conhecimento que se

utilizam da derivada como ferramenta para resolver problema sobre fenômenos que envolvem taxa de variação, tais como: na Biologia, a derivada pode ser utilizada em questões que se referem à taxa de crescimento de bactérias de uma cultura; na Economia para estudar a receita, o custo e o lucro e na Física o conceito de derivada está presente para definir velocidade instantânea como taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo (ASSUMPÇÃO, 2011, p. 40 – 41).

Tendo por base reflexões da Teoria dos Campos Conceituais, Assumpção objetivou elaborar atividades que possam favorecer a construção do conceito de derivada, de forma que esse conceito esteja relacionado a outros elementos do campo conceitual e possa ser percebido em diversos problemas. A sequência desenvolvida foi dividida em três blocos que abordam os seguintes elementos: a reta tangente, velocidade e função derivada. No Quadro 9 são apresentados os três blocos de atividades que compõem a sequência que visam ao desenvolvimento do campo conceitual relacionado a derivada:

Quadro 9 – Sequência didática para apresentação do conceito de derivada.

BLOCO 1	
Reta Tangente a uma Curva	
Atividades	Descrição
1	Explorar, em termos geométricos, a definição da reta tangente a uma circunferência em um ponto P.
2	Estender o conceito de reta tangente a uma função qualquer.
3	Discutir a definição intuitiva de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado.
4	Obter para diferentes funções a inclinação de reta secante, a inclinação da reta tangente e encontrar suas respectivas equações.
5	Visualizar a reta tangente a uma curva e obter sua equação para diferentes funções quadráticas.
BLOCO 2	
Velocidade	
1	A partir da variação da posição de uma partícula em função do tempo em movimento retilíneo uniforme será determinado o deslocamento, a variação de tempo e velocidade média.
2	Analisar o comportamento e velocidade média a cada segundo da trajetória de uma bola que foi arremessada para cima seguindo o comportamento da função quadrática.
3	Partindo-se da atividade anterior, será feita uma análise sobre a velocidade instantânea da bola quando o tempo é de 2 segundos.
4	Constar que a interpretação geométrica da velocidade média em um intervalo de tempo é representada pela inclinação da reta secante que passa pelos extremos deste intervalo de tempo.
5	Determinar a velocidade instantânea no tempo t_0 e a inclinação da reta

	tangente à curva no ponto $(t_0, f(t_0))$, verificando-se que ambas possuem o mesmo valor.
6	A partir dos valores da inclinação das retas secante e tangente, obter a velocidade média e instantânea em diferentes momentos de uma trajetória.
7	A partir do gráfico que mostra uma curva que representa a posição <i>versus</i> tempo para certa partícula que se move ao longo de uma linha reta, pretende-se encontrar o valor da velocidade instantânea para diferentes instantes.
BLOCO 3 Função derivada	
1	Construir o gráfico da função derivada de f em relação à x para diferentes funções quadráticas.
2	Construir o gráfico da derivada de f em relação à x para diferentes funções cúbicas.
3	Construir o gráfico da derivada de f em relação a x na função trigonométrica $f(x) = \text{sen}(ax)$.

Fonte: ASSUMPÇÃO, 2011, p. 42.

Para exemplificar, apresentamos a Atividade 4, do Bloco 1, da sequência didática:

Quadro 10 – Atividade 4, do Bloco 1, da sequência de Assumpção

Objetivo: Obter para diferentes funções a inclinação da reta secante, a inclinação da reta tangente e encontrar suas respectivas equações.

Descrição: As funções que serão apresentadas na atividade¹¹⁹ são: $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{2}{x}$ e

$h(x) = \sqrt{x}$. Cada uma delas contém o respectivo gráfico, dois pontos distintos P e Q pertencentes a elas, sendo P o ponto de tangência. O aluno deverá movimentar o ponto Q sobre a função de tal forma que se aproxime de P tanto pelo lado esquerdo quanto pelo lado direito. Em ambos os lados obterá o valor da inclinação e a correspondente equação da reta secante que passa por P e Q. Chegará um momento na manipulação do ponto Q sobre as funções em que este irá coincidir com o ponto P, daí sugerimos ao professor explorar a indeterminação que ocorre em termos algébricos e questionar o desaparecimento da reta secante. Também durante a execução desta atividade pode-se propor outros questionamentos relativos à reta secante:

- Qual a relação existente entre sua inclinação e o coeficiente angular?
- Qual a relação existente entre a interseção com o eixo das ordenadas e o seu coeficiente linear?
- Qual o comportamento do coeficiente angular da reta quando o ponto Q aproxima do ponto P?

E, em seguida, finalizar a atividade. O aluno poderá visualizar a inclinação e a equação da reta tangente à curva em P. E também pode ser discutido se os itens anteriores são válidos para o ponto de tangência P.

Fonte: ASSUMPÇÃO, 2011, p. 48.

¹¹⁹ No contexto da pesquisa de Assumpção (2011), cada atividade era composta por um *applet* do Geogebra, que esboça os gráficos das funções que serão estudadas, e um conjunto de questões.

Nas outras pesquisas, as sequências didáticas desenvolvidas foram embasadas na noção de situação didática de Brousseau. Na Teoria das Situações Didáticas (TSD), Brousseau (1986) indica que uma situação didática é

[...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, em um certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (BROUSSEAU, 1986, p. 8 apud FREITAS, 2010, p. 80).

Sendo que uma forma de utilizar a Teoria das Situações Didáticas para o desenvolvimento de determinada sequência didática é descrita por Teixeira e Passos do seguinte modo:

A Teoria das Situações Didáticas discute as formas de apresentação de determinado conteúdo matemático – ou parte dele – para os alunos, sempre que houver uma intenção clara do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem (aquisição de saberes), por meio da sequência didática planejada. Nessa situação, diz-se que há uma situação didática envolvida, regulamentada pelo que Brousseau (1986) chama de “contrato didático”, ou seja, uma série de acordos bilaterais entre professor e aluno, alguns explícitos e outros não, com os quais estão pautadas as relações que vigoram na relação didática entre eles, as quais permitam a ambos, mas não necessariamente, condições favoráveis para que a aprendizagem ocorra (TEIXEIRA, PASSOS, 2013, p. 163).

A seguir apresentamos as pesquisas referenciadas por esse constructo teórico.

Em Tramontano, Alves e Veiga (2013) foi objetivado apresentar uma proposta pedagógica, desenvolvida no *software* GeoGebra, envolvendo atividades como: interpretação visual, esboço do gráfico e comparação de funções e suas derivadas.

A sequência didática apresentada aborda os conceitos de função afim e a função quadrática e procura estabelecer relações dessas funções com suas derivadas de primeira e segunda ordem. Para exemplificar, uma atividade dessa sequência era composta dos seguintes elementos: uma aplicação do GeoGebra, em que era dada a sentença da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo os coeficientes a , b e c controles deslizantes que variavam de -10 a 10 ; o coeficiente a restrito ao caso

$a > 0$. Em seguida, eram propostas as seguintes questões, apresentadas no Quadro 11:

Quadro 11 – Conjunto de perguntas relacionado a atividade para abordar o conceito de função quadrática.

- Quais são as características da primeira derivada da função f , ou seja, f' ?
- O que acontece com o gráfico de f' quando a tende a $+\infty$?
- Quais são as características da segunda derivada de f , ou seja, f'' ?
- E o que acontece com o gráfico de f'' quando a tende a $+\infty$?

Fonte: TRAMONTANO, ALVES, VEIGA, 2013, p. 43.

Uma sequência didática que objetiva a exploração do estudo da taxa de variação de uma função para o estudo da derivada, em um ambiente computacional, é apresentada em Miranda, Laudares e Guimarães (2013). Esse ambiente foi composto pelo GeoGebra, para propiciar uma exploração gráfica, e o Virtual Cálculo Numérico¹²⁰, para um tratamento numérico da taxa de variação.

A sequência foi elaborada em quatro etapas, baseadas nas tipologias de uma situação didática, definidas do seguinte modo:

Exploração e formulação de questões: apresentação de uma situação problemática para a turma.

Formulação de conjecturas: estímulo à exposição dos próprios pontos de vista.

Teste e reformulação: momento em que os alunos poderão colocar em prática o que foi firmado nas etapas anteriores.

Justificativa e avaliação: momento das explicações e da avaliação de resultados (MIRANDA, LAUDARES, GUIMARAIS, 2013, p. 177).

A atividade indicada no Quadro 12 é composta por um conjunto de dez questões em que o GeoGebra é utilizado para auxiliar na compreensão da ideia de reta tangente a uma curva qualquer e no segundo momento o papel dos coeficientes angular e linear da reta tangente.

Quadro 12 – Atividade apresentada em Miranda, Laudares, Guimarães (2013)

Vamos considerar a função $f(x) = -x^2 + 4x$, definida em seu domínio real.

- a) Faça a representação gráfica da função f .
- b) Agora, clique na ferramenta “novo ponto” e insira o ponto $P(1, 3)$. Depois, busque a

¹²⁰ Software livre voltado para o Cálculo Numérico, desenvolvido por um grupo de professores do Departamento de Matemática e Estatística da PUC Minas, disponível em:

<http://www.matematica.pucminas.br/lcn/vcn1.htm>

- ferramenta “Tangentes” e clique no ponto e na função para inserir a reta tangente.
- c) Observe a equação da reta na parte algébrica da tela. Escreva a equação dessa reta.
 - d) Quais são os coeficientes angular e linear dessa equação? Essa reta é crescente ou decrescente?
 - e) Qual relação pode ser observada entre o coeficiente linear da função e o gráfico da reta?
 - f) Qual é o limite dessa função quando $x \rightarrow 1$? Examine o gráfico e dê exemplificações.
 - g) Clique na ferramenta “mover” e, em seguida, no ponto P. Mova o ponto pelo gráfico da função e observe as mudanças na equação da reta tangente. Fixe a reta em outro ponto qualquer que esteja à direita do vértice, por exemplo, (3, 3) e escreva a equação dessa reta.
 - h) Quais são os coeficientes angular e linear da equação dessa nova reta? A função linear é crescente ou decrescente?
 - i) Agora, encontre uma equação da reta tangente à parábola de $f(x) = -x^2 + 4x$ no ponto (2, 4). Qual é a equação dessa reta tangente? Justifique a razão de não se poder afirmar que ela é crescente ou decrescente.
 - j) Formalize esta ideia: qual a relação entre o coeficiente angular da reta tangente e a posição dela no ponto cartesiano?

Fonte: MIRANDA; LAUDARES; GUIMARAIS, 2013, p. 178.

A sequência didática elaborada por Alves (2014) tem como objetivo “utilizar a tecnologia, em especial as ferramentas oferecidas pelo *software* GeoGebra, como principal recurso mediador dos processos de ensino e aprendizagem” (ALVES, 2014, p. 41).

No âmbito dessa pesquisa, a sequência foi concebida a partir das tipologias de uma situação didática, a saber, a situação adidática de ação, de formulação e de validação.

A situação adidática de ação é o momento em que

[...] os alunos poderão optar pela utilização de papel e caneta para resolver tais situações ou até mesmo, os que já o conhecem, optar pelo *software* GeoGebra com o mesmo intuito. Esse momento de tomada de decisões mostra os saberes adquiridos e como pensam em colocar em prática para solucionar situações problemas propostas (ALVES, 2014, p. 39).

A situação adidática de formulação inclui momentos em que o sujeito toma decisões sobre qual artefato vai utilizar e quando esse artefato será utilizado no desenvolvimento da atividade proposta.

A situação adidática de validação

[...] é o momento em que seu aluno defende sua proposta. É o momento em que o aluno mostra sua construção e explica porque é válida no contexto solicitado. Neste momento instigaremos a

verbalização, o pensamento crítico, a persuasão em um caminho lógico de acordo com a situação proposta (ALVES, 2014, p. 40).

A sequência didática desenvolvida é composta atividades que abordam os seguintes tópicos do Cálculo: funções polinomiais do 1º grau e do 2º grau e a relação de cada coeficiente da sentença dessas funções em seus gráficos; Limite de funções, por meio do estudo da representação gráfica; cálculo de derivadas de 1ª e 2ª ordens; exemplo de aplicação, em que é solicitado que se encontre a velocidade e a aceleração em que a equação do movimento é conhecida; integral indefinida e integral definida por meio do cálculo de áreas.

Uma sequência didática para a exploração do conceito de sequências e séries é apresentada em Cargnin e Barros (2015). Essa é elaborada considerando-se pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A seguir, são apresentados exemplos de sequências convergentes e divergentes; sequências crescentes, decrescentes e alternadas.

De maneira geral, nas tarefas relativas às sequências é solicitado aos estudantes que analisem a representação gráfica de uma determinada sequência numérica e escrevam o resultado da análise utilizando-se tanto da linguagem natural quanto da algébrica. Segundo Cargnin e Barros (2015), as tarefas da sequência foram desenvolvidas de modo que fossem

[...] organizadas, de forma que uma tarefa usava resultados de tarefas anteriores para ser concluída, ou, ainda, possibilitava rever conclusões anteriores. Por isso, os alunos foram orientados a terminarem completamente uma atividade antes de iniciar a resolução da tarefa seguinte (CARGNIN; BARROS, 2015, p. 219).

Descrevendo as tarefas apresentadas em Cargnin e Barros (2015).

Na primeira tarefa é objetivado promover uma investigação do comportamento dos termos de uma sequência no \mathbb{R}^2 , por meio da análise da representação algébrica da sequência e utilizar a representação gráfica para inferir conclusões sobre o valor do limite em língua natural. Na segunda tarefa é solicitado que aos alunos expressar uma conclusão sobre o comportamento da sequência usando a linguagem algébrica, como, por exemplo, a notação de limite. Por meio da terceira tarefa apresentada é promovida uma análise do comportamento de uma sequência representada sobre a reta real. A última tarefa apresentada objetiva analisar o comportamento de duas sequências convergentes em relação às retas

$y_1 = L - \varepsilon$ e $y_2 = L + \varepsilon$, sendo que era solicitado encontrar um valor n_0 a partir do qual todos os pontos do gráfico da sequência pertençam ao seguinte conjunto $\{(x, y) \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$ para valores de ε fixados e também era proposta a reflexão sobre possíveis diferenças que ocorrem na representação gráfica de uma sequência divergente.

Na segunda parte da sequência didática foi abordado o conceito de convergência de séries. Inicialmente, foi feita aos participantes uma questão relativa à possibilidade da seguinte sequência ser convergente: uma sequência construída de forma que cada termo seja a soma dos termos anteriores. Cargnin e Barros relatam que a resposta dos participantes foi unânime e eles apresentavam a seguinte concepção:

[...] que uma soma de infinitos termos não poderia convergir, pois, pela intuição, sempre que somamos alguma quantidade positiva a uma quantidade, aumentamos indefinidamente essa quantidade inicial (CARGNIN; BARROS, 2015, p. 226).

Com o GeoGebra foi possível observar o comportamento do valor das somas parciais de duas séries, dadas pelas sentenças $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i}\right)$ e $s_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i^2}\right)$, e verificar a possibilidade das séries serem convergentes. Na atividade, foi destacada “a importância da visualização gráfica da soma na reta numérica como apoio à observação e análise do comportamento da série” (CARGNIN; BARROS, 2015, p. 229).

Finalizamos esta subseção ressaltando que foram apresentadas as pesquisas que compõem a categoria sequência didática, as quais foram embasadas em elementos da Teoria das Situações Didáticas e autores que definem o termo ‘sequência didática’, como Teixeira e Passos (2013) e Zabala (2007).

3.1.3. Produção de Objetos de Aprendizagem

Nesta subseção destacamos trabalhos em que foram objetivadas a produção de Objetos de Aprendizagem. Inicialmente, definimos o termo Objeto de Aprendizagem na forma em que emergiu nas pesquisas; em seguida, apresentamos

as três pesquisas que compõem essa categoria e para cada uma um exemplo de atividade desenvolvida nos objetos de aprendizagem.

De acordo com o IEEE (2000) um Objeto de Aprendizagem é qualquer entidade que pode ser utilizada, reutilizada e referenciada durante o aprendizado com um computador. Esse pode ser composto por recursos variados, desde os mais simples, como um texto ou um vídeo, até os mais sofisticados, como um curso ou até mesmo uma animação com áudio.

Para Wiley (2000), um Objeto de Aprendizagem é “qualquer recurso digital que pode ser utilizado mais de uma vez para apoiar o ensino”¹²¹ (p. 7). Wiley reforça dizendo que um Objeto de Aprendizagem é um recurso que utiliza meios digitais, mas “não inclui pessoas reais, eventos históricos, livros (no sentido tradicional do termo), ou objetos discretos ou físicos”¹²² (WILEY, 2000, p. 8).

Para Audino e Nascimento (2010), Objetos de Aprendizagem são

[...] recursos digitais dinâmicos, interativos e reutilizáveis em diferentes ambientes de aprendizagem elaborados a partir de uma base tecnológica. Desenvolvidos com fins educacionais [...] devem reunir várias características, como durabilidade, facilidade para atualização, flexibilidade, interoperabilidade, modularidade, portabilidade, entre outras (AUDINO; NASCIMENTO, 2010, p. 141).

Outra característica de um Objeto de Aprendizagem que emergiu é o conceito de multimodalidade apresentado por Pavio (1986). Segundo esse conceito, um objeto é considerado multimodal quando aquele objeto, em sua estrutura, utiliza simultaneamente dois modos de apresentação: o verbal e o não verbal.

As pesquisas que se incluem nessa categoria são Pinto e outros (2011), Amaral e Müller (2012) e Müller (2015).

No artigo de Pinto e outros (2011) intitulado “Objetos de Aprendizagem de Matemática: uma experiência na iniciação científica de alunos de graduação” foi objetivado apresentar Objetos de Aprendizagem produzidos pelo GEPEMNT¹²³, durante a execução de um projeto de pesquisa¹²⁴. Os Objetos exploram seis temas da Matemática, a saber: números reais, limites de sequências, logaritmos e

¹²¹ [...] any digital resource that can be reused to support learning.

¹²² [...] does not include actual people, historical events, books (in the traditional sense of the term), or other discrete, physical objects.

¹²³ Sigla que denomina o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Novas Tecnologias do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

¹²⁴ No âmbito do projeto intitulado: Ambientes de Aprendizagem de Matemática a Distância: fundamentação, concepção e execução.

integrais, translação de gráficos e contração e expansão de curvas por meio de variação de parâmetros em equações e família de funções.

A concepção e desenvolvimento desses objetos incluíam atividades que foram propostas com

[...] a intenção de abordar os conceitos matemáticos utilizando múltiplas representações, em ambientes de aprendizagem com computadores que favorecessem cenários para investigação [...]. Ou seja, buscando formular questões como convites para constituir ambientes em que o aluno é levado a explorar, levantar conjecturas e buscar justificativas (PINTO et al., 2011, p. 100).

No artigo também os autores entendem que

[...] um ambiente de aprendizagem como aquele que envolve todos os atores, metodologia, conteúdo, atividades, materiais (que incluem os objetos de aprendizagem, fundamentação teórica, etc., em que ocorre uma situação de ensino aprendizagem (PINTO et al., 2010, p. 100 – 101).

Foi escolhido o GeoGebra para a elaboração de cada *applet* que compunha o conjunto de Objetos de Aprendizagem. O motivo dessa escolha é a não exigência de conhecimentos avançados em programação de computadores para o desenvolvimento de cada *applet* e permitir a criação de Objetos de Aprendizagem multiplataforma,

[...] ou seja, que funcionem de forma idêntica, independentemente do sistema operacional utilizado, e que, além disso, rodem diretamente no navegador de *Internet*, sem necessidade de instalação do aplicativo na máquina, possibilita reduzir as dificuldades técnicas de implementação desse tipo de objeto de aprendizagem, em especial na EaD (PINTO et al, 2011, p.101).

Os objetos de aprendizagem foram referenciados pelo estudo de Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) sobre as representações. Dentre as noções utilizadas por esses autores, a noção de representação dinâmica contínua é aquela que

[...] refere-se à possibilidade aberta pela tecnologia contemporânea de criar ou manipular de forma contínua uma representação matemática – como arrastar objetos pela tela ou traçar um gráfico em tempo real a partir de um sensor de movimento. Os *softwares* de geometria dinâmica são exemplos de ferramentas que possibilitam representações nesta categoria (PINTO et al, 2011, p.101 – 102).

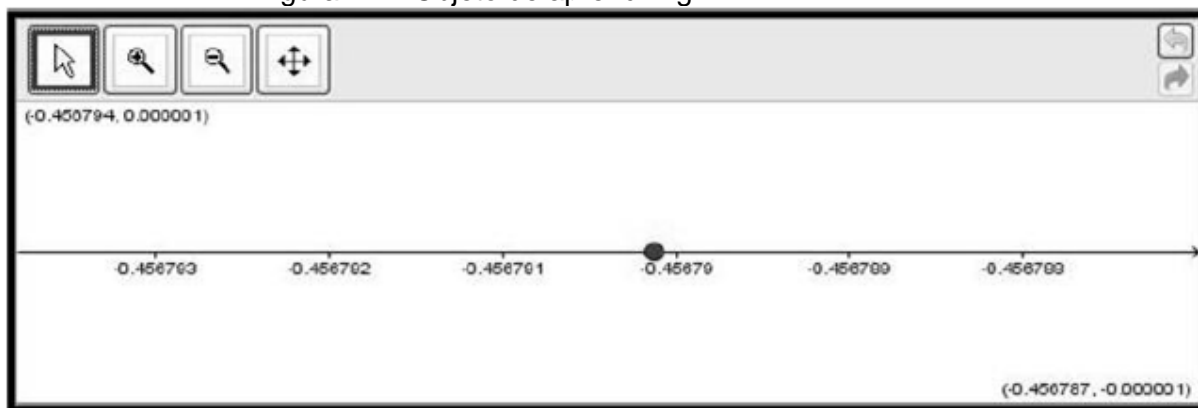
Essa noção foi utilizada porque ela

[...] possibilita ao aluno desenvolver uma relação pessoal com os objetos matemáticos, além de reestruturar os processos do pensamento simbólico-matemático, acrescentando novas formas de representação de um mesmo objeto/conceito matemático (PINTO et al., 2011, p. 102).

Sendo assim, os objetos foram desenvolvidos para que fosse possível que “potencializassem representações em estágios dinâmico discreto e dinâmico contínuo” (PINTO et al, 2011, p. 102).

Como exemplo, consideramos o Objeto de Aprendizagem ‘Números Reais’. Na Figura 22, segue uma tela do objeto.

Figura 22 – Objeto de aprendizagem “Números Reais”



Fonte: PINTO et al. (2011, p. 104).

Nesse exemplo, o Objeto de Aprendizagem é um *applet* do GeoGebra que permite a movimentação de um ponto sobre a reta numerada. Os botões disponibilizados permitem a movimentação do ponto sobre a reta, a ampliação e redução do *zoom* sobre uma região selecionada e a alteração dos limites de visualização da Janela de Visualização. É incluída uma proposta de roteiro de atividade para a utilização desse objeto e nele é incentivada a utilização de aproximações sucessivas para tentar descobrir a distância desse ponto à origem ou a melhor aproximação desse valor.

No artigo de Amaral e Müller (2012), é objetivado “promover um maior entendimento [sobre] Derivadas, por meio da integração de diferentes ferramentas, organizadas segundo critérios fundamentados por diferentes autores das áreas de matemática e informática na educação” (AMARAL; MÜLLER, 2012, p. 2, adaptado).

Para a referida integração, os autores desenvolveram o E₂D, que é uma ferramenta que reúne um conjunto de Objetos de Aprendizagem e exercícios virtuais que servem de guia de estudos, devido às devolutivas disponíveis para cada situação apresentada e possibilidade de auxiliá-lo na compreensão do conceito de derivada.

A produção desse conjunto de Objetos de Aprendizagem é referenciada teoricamente na Teoria da Carga Cognitiva de Sweller (2003), na teoria de aprendizagem multimídia de Mayer (2001) e no ciclo de aprendizagem de Kolb e outros (1986).

Em sua teoria, Sweller (2003) descreve uma forma em que uma aprendizagem pode ocorrer. Essa forma é possível por meio do alinhamento do processo de informação com o processo cognitivo humano de maneira que o volume de informações oferecidas seja compatível com a capacidade de compreensão do sujeito. Corroborando com essa teoria, o Objeto de Aprendizagem descrito

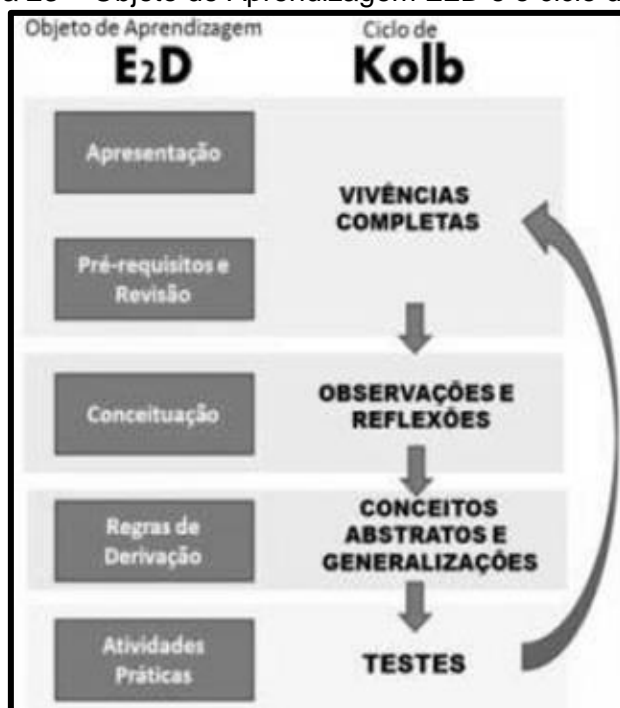
[...] procura seguir um processo linear de apresentação dos seus assuntos, fazendo com que o aluno crie uma base robusta de conhecimentos, os quais são necessários para o desenvolvimento das atividades propostas no ambiente em uma sequência cognitivamente estipulada (AMARAL; MÜLLER, 2012, p. 6).

Com relação à referência na teoria da aprendizagem multimídia de Mayer (2001), os objetos foram elaborados de modo a não gerar uma sobrecarga cognitiva no estudante, levando-se em conta:

[...] o princípio de representação múltipla, com a integração das diferentes tecnologias e mídias; o princípio de proximidade espacial, com os enunciados e rótulos próximos das imagens, vídeos e animações; o princípio das diferenças individuais, permitindo que os alunos de níveis diferentes possam avançar ou recuar dentro do objeto, de acordo com o seu potencial de aprendizagem e conhecimento; o princípio da coerência, com a simplificação dos conteúdos disponibilizados, a fim de que o aluno possa se focar nos assuntos pertinentes; e por último o princípio da redundância, com a integração de áudio, vídeo e animações no mesmo contexto em momentos diferentes de uma atividade específica no objeto estipulada (AMARAL; MÜLLER, 2012, p. 6).

A Figura 23 expressa a relação entre o ciclo de Kolb e o E₂D.

Figura 23 – Objeto de Aprendizagem E2D e o ciclo de Kolb



Fonte: AMARAL; MÜLLER (2012, p. 6).

O ciclo de Kolb se inicia quando o indivíduo é submetido a uma experiência denominada 'vivências completas'. Ele analisa o fenômeno e faz uma reflexão sobre tal experiência, passando para a etapa seguinte do ciclo 'observação e reflexões'. Com a finalidade de desenvolver conceitos que lhe permitam enfrentar situações semelhantes no futuro, o indivíduo abstrai esses conceitos passando a generalização de ideias que podem ser denominadas de conceitos 'abstratos e reflexões'. Esses conceitos, em formas de ideias, serão transformados em ações, que serão testados em situações reais, na etapa conhecida como 'testes'. Nela, o indivíduo analisa o grau de significância que aquele fato generalizado teve, e, conforme for esse grau, esse fato passará a fazer parte do seu conhecimento, concretizando a aprendizagem.

Um exemplo de atividade do E₂D trabalhada na pesquisa de Amaral e Müller (2012) é apresentada na Figura 24.

Figura 24 – Uma atividade do Objeto de Aprendizagem E₂D.



Fonte: AMARAL; MÜLLER (2012, p. 9).

Nessa atividade, em que uma aplicação do GeoGebra é utilizada, é permitido ao aluno, por meio da movimentação de um ponto D, pertencente ao gráfico de uma função f , observar o que acontece com o coeficiente da reta secante AD, quando o D se aproxima do ponto fixo A também pertencente ao gráfico de f e comparar com o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto A.

Na tese de Müller (2015) é desenvolvido um Objeto de Aprendizagem voltado para trabalhar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais. Nessa pesquisa, o objetivo é analisar erros e dificuldades de aprendizagem apresentados por alunos ingressantes em uma disciplina de Cálculo relacionados aos conteúdos de Matemática Básica e testar a possibilidade de superar tais dificuldades com os objetos de aprendizagem fornecidos. Nesse trabalho foram utilizados treze objetos, e nesta Revisão apresentaremos o objeto relacionado à propriedade distributiva.

Esse objeto foi concebido com base em duas fontes de informações: a análise de erros e a aplicação de um teste de Estilos de Aprendizagem¹²⁵. Quanto à análise de erros, a autora indicou que os mesmos se relacionavam à utilização da

¹²⁵ Esse teste foi desenvolvido por Felder e Soloman. A versão original do teste de estilos aplicado está disponível em: <http://www.engr.ncsu.edu/learningstyles/ilsweb.html> e a versão traduzida pela pesquisadora encontra-se no Apêndice C da tese de Müller (2015).

propriedade distributiva em uma questão com três itens que envolviam o cálculo de derivada de funções por meio de regras de derivação.

Müller (2015) considera que a maior dificuldade dos sujeitos da pesquisa está relacionada

[...] à propriedade distributiva: no item a, esse fato está indicado na própria análise; no item b, além da distributividade do fator (-1), pode-se considerar que há um equívoco ao ser criada uma “distributividade” da derivação em relação à operação de multiplicação de funções; no item c, da mesma forma, uma “distributividade” da potenciação em relação à adição ou multiplicação (MÜLLER, 2015, p. 59).

O teste de estilo de aprendizagem “foi feito com o objetivo de identificar as preferências dos alunos no momento da aprendizagem, o que auxiliou na construção de recursos adequados a esse público-alvo” (MÜLLER, 2015, p. 53).

Com relação ao Objeto de Aprendizagem, em que é explorada a propriedade distributiva, ele inicia abordando os números reais e suas operações para que a propriedade distributiva não apareça de forma isolada pelo fato dos “alunos terem se mostrado predominantemente sequenciais, isto é, demonstrarem preferências pelo aprendizado em pequenos passos, sequencialmente, ao invés de dar grandes saltos, tendo uma visão global do assunto” (MÜLLER, 2015, p. 70). Outro ponto desse objeto é o fato de que nele são explorados elementos visuais por meio da utilização de figuras, diagramas e gráficos em detrimento a utilização apenas de fórmulas e palavras. Na Figura 25, segue a tela inicial do objeto de aprendizagem que foi desenvolvido na plataforma *Adobe Flash CS 5.5*, para a criação das animações, e o *software Fireworks CS 5.5*, para a criação e manipulação de imagens utilizadas.

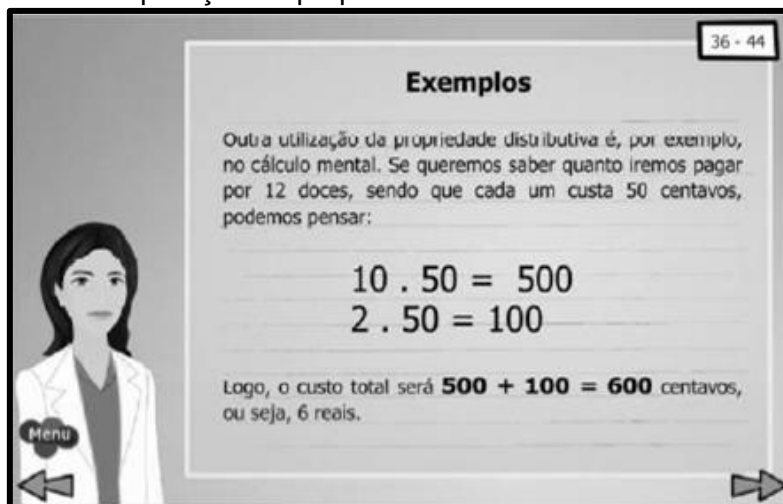
Figura 25 – Tela de apresentação do objeto de aprendizagem Números reais.



Fonte: MÜLLER (2015, p. 75).

Com relação à propriedade distributiva, seguem nas Figuras 26 e 27 os dois exemplos abordados no objeto de aprendizagem.

Figura 26 – Aplicação da propriedade distributiva ao cálculo mental.



36 - 44

Exemplos

Outra utilização da propriedade distributiva é, por exemplo, no cálculo mental. Se queremos saber quanto iremos pagar por 12 doces, sendo que cada um custa 50 centavos, podemos pensar:

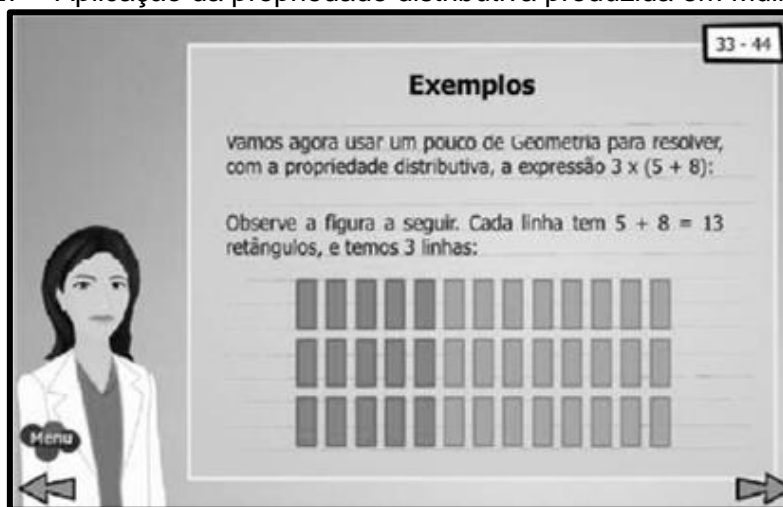
$$10 \cdot 50 = 500$$
$$2 \cdot 50 = 100$$

Logo, o custo total será $500 + 100 = 600$ centavos, ou seja, 6 reais.

Menu

Fonte: MÜLLER (2015, p. 76).

Figura 27 – Aplicação da propriedade distributiva produzida em Müller (2015)



33 - 44

Exemplos

vamos agora usar um pouco de Geometria para resolver, com a propriedade distributiva, a expressão $3 \times (5 + 8)$:

Observe a figura a seguir. Cada linha tem $5 + 8 = 13$ retângulos, e temos 3 linhas:

Menu

Fonte: MÜLLER (2015, p. 77).

Depois da aplicação de um teste exploratório, composto por dez questões, Müller relata que disponibilizou, na plataforma MOODLE, materiais de apoio para a revisão dos conceitos que os alunos mostraram dificuldades a partir da análise dos erros cometidos no teste. Os materiais eram compostos pelo objeto de aprendizagem detalhado nos parágrafos anteriores; dois materiais, construídos com auxílio de outros bolsistas, em que foram abordados os “módulos e inequações”¹²⁶ e

¹²⁶ Disponível no Apêndice G de Müller (2015).

“frações algébricas”¹²⁷; e outros materiais selecionados foram selecionados pela pesquisadora na Internet¹²⁸.

Por fim, nesta subseção foram apresentadas três pesquisas que objetivaram a produção de objetos de aprendizagem para o ensino de conceitos do Cálculo que emergiram nesta Revisão de literatura.

3.1.4. Resolução de problemas utilizando o GeoGebra

Nesta subseção destacamos trabalhos relacionados a resolução de problemas utilizando o GeoGebra tanto na proposição quanto na resolução. Nessa categoria estão os trabalhos de Moraes (2013), Grande e Vazquez (2014), Silva e outros (2014).

Moraes (2013) trata de problemas relacionados à determinação de pontos extremos de funções reais de uma variável real. Para Moraes (2013)

[...] utilizar o GeoGebra aliado ao conhecimento matemático previamente sistematizado, só tem a contribuir com o processo educacional. A possibilidade de construir, alterar, reconstruir e modificar as funções feitas na tela do computador permitem testar propriedades, resultados e fazer conjecturas sobre as mesmas. Essa interação gera discussão e, por consequência, o aprofundamento no conteúdo estudado. A dinâmica oportunizada pelo *software* permite muitas possibilidades de testes e análises, que no processo de construção à mão seria demorado, impreciso e as dificuldades seriam enormes, causando um fator desmotivador da aprendizagem e da investigação que está sendo estudado (p. 11).

Nesse trabalho foram apresentadas seis situações-problema em que é necessário determinar a sentença da função a ser otimizada; em seguida, encontrar os pontos críticos da função, utilizar os critérios para determinação de máximos e mínimos locais e, por fim, determinar qual é a solução do problema.

O trabalho, desenvolvido com o GeoGebra,

[...] contemplou o estudo de construções e análise de gráficos de funções, das derivadas das funções, das derivadas segundas e, principalmente, a análise e interpretação dos pontos críticos das funções, sendo alguns de mínimo e outros de máximo e outros que

¹²⁷ Disponível no Apêndice H de Müller (2015).

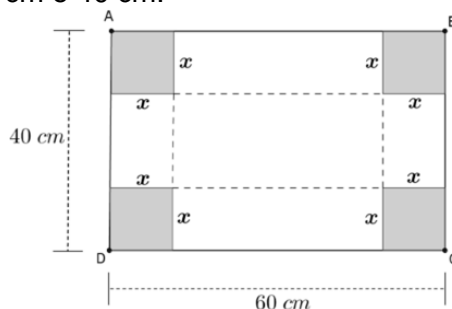
¹²⁸ A lista desses materiais está disponível no Apêndice A de Müller (2015).

não eram nem ponto de mínimo e nem de máximo (MORAES, 2013, p. 46).

No Quadro 13 é apresentada uma situação-problema desenvolvida por Moraes (2013).

Quadro 13 – Atividade desenvolvida por Moraes (2013)

Com uma folha retangular de papelão se quer construir uma caixa de máximo volume possível, cortando um quadrado em cada canto, conforme indica a figura abaixo. As dimensões da folha são 60 cm e 40 cm.



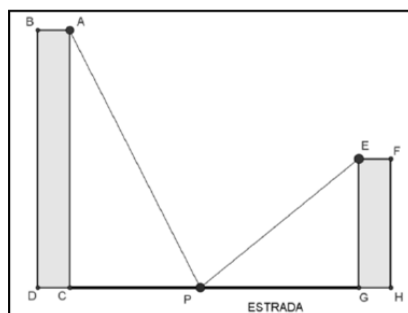
- a) Calcule o valor de x ;
- b) Determine do volume máximo da caixa.

Fonte: MORARES (2013, p. 34-35).

No trabalho de Grande e Vazquez (2014), foi proposto um problema de otimização relacionado ao cálculo de distâncias. Ele baseia-se no Princípio de Fermat, que pode ser enunciado do seguinte modo: o caminho percorrido pela luz entre dois pontos é aquele que minimiza o tempo de percurso dentre todos os possíveis caminhos que ligam esses pontos. No Quadro 12 é apresentada a situação-problema elaborada:

Quadro 14 – Atividade desenvolvida por Grande e Vazquez (2014)

Numa estrada com 9 km de comprimento será construída uma estação de tratamento de água (ETA), localizada no ponto P , para abastecer duas cidades A e E , localizadas ao norte dos pontos C e G cujas distâncias são 8 km e 4 km respectivamente da estrada, conforme a figura a seguir:



Determine a que distância x do ponto C deve ser instalada a estação de tratamento de modo que a soma das distâncias da estação às cidades $L = |AP| + |PE|$ seja mínima.

Fonte: GRANDE; VAZQUEZ (2014, p. 28-29).

O *software* GeoGebra foi utilizado no desenvolvimento de um modelo da situação-problema; na formulação de conjecturas; na criação do modelo matemático da situação; no processo de otimização e na resolução do problema.

Verificou-se que:

[...] o *software* permite, sem muitos pré-requisitos por parte dos usuários, manipular de forma dinâmica objetos geométricos auxiliando intuitivamente dessa forma a formulação de conjecturas por parte dos alunos e posteriormente as possíveis validações e refutações dessas conjecturas (GRANDE; VAZQUEZ, 2014, p. 34).

Silva e outros (2014) realizam análise qualitativa do uso do *software* GeoGebra em uma atividade de intervenção para introduzir a noção de soma de Riemann e cálculo de área de uma região plana limitada pelo gráfico de uma função, o eixo x e de duas retas perpendiculares a esse eixo.

Essa atividade teve por referência o ciclo de ações proposto por Valente (2002): descrição–execução–reflexão–depuração, que é o seguinte:

A primeira etapa compreende na maneira pela qual o aprendiz vai resolver um problema (descrição), depois deve inserir as estratégias no computador (execução). A máquina fará a ação que foi solicitada, mas não interage com o aprendiz, se houver algum erro simplesmente não conseguirá executar a ação pretendida. O aprendiz que deve analisar as ações executadas, independentemente dos resultados (reflexão), caso houver o erro precisa corrigi-lo (depuração). (SILVA et al, 2014, p. 2).

As atividades relacionadas ao conceito de área sob uma curva, à Soma de Riemann e à Integral Definida foram adaptadas às quatro ações do ciclo do seguinte modo:

(a) descrição: os comandos para execução do *software*: *Função* [<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]. Na atividade, o comando digitado foi *Função*[$x^2 + 4x$, 0, 4]; *SomaDeRiemannInferior*[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]. Na atividade, o comando digitado foi o seguinte: *SomaDeRiemannInferior*[f, 0, 4, n]; *SomaDeRiemannSuperior*[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]. Na atividade, o comando digitado foi o seguinte: *SomaDeRiemannSuperior*[f, 0, 4, n] e *Integral*[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]. Na atividade o comando digitado foi o seguinte: *Integral*[f, 0, 4]; **(b) execução:** plotagem do gráfico no *software* disponibilizando na tela do computador os resultados obtidos para as somas de Riemann

tanto inferior como superior e para a integral definida; **(c) reflexão:** análise da área sob a curva por retângulos (inferiores e superiores) em relação ao intervalo dado no eixo x e ao número de partições e o resultado obtido com a integral definida; **(d) depuração:** verificar a necessidade de refazer o ciclo depois da análise comparativa dos resultados obtidos por áreas dos retângulos superiores e áreas dos retângulos inferiores e pela integral definida (SILVA et al, 2014, p. 5).

Em seguida, era solicitado aos estudantes que observassem o valor da Soma de Riemann à esquerda, com uma variação de 1 e 100 partições do intervalo [0, 4], e verificassem qual era o valor da soma nestes dois casos. O mesmo foi feito com a Soma de Riemann à direita em outra atividade. Na última atividade era solicitado que fosse calculado o valor da integral considerada na atividade – $\int_0^4 (x^2 + 4x) dx$ – e comparado os resultados obtidos com as aproximações feitas nas atividades anteriores.

3.2. Análises das pesquisas consultadas

Nesta seção são apresentadas análises das pesquisas consultadas nesta Revisão.

Um primeiro ponto a ser destacado é com relação aos conceitos de Cálculo que emergiram nas pesquisas selecionadas. No Quadro 15, podem ser verificados esses conceitos e a quantidade de pesquisas que estavam relacionadas a cada um deles.

Quadro 15 – Conceitos de Cálculo abordados nas pesquisas desta Revisão

Conceito de Cálculo	Quantidade
Número real	1
Limite de seqüências	2
Derivada	8
Integral	1
Limite, Derivada e Integral	5
TOTAL	17

Fonte: Elaboração nossa.

As cinco pesquisas (ALVES, 2010; ROCHA, 2010; PINTO *et al.*, 2011; ALVES, 2014; RICALDONI, 2014) foram categorizadas como Limite, Derivada e Integral. Essa categoria inclui aquelas em que foram desenvolvidas atividades, sequências de ensino ou objetos de aprendizagem que abordaram esses três conceitos simultaneamente. Algo diferente das outras pesquisas consultadas que só focaram um desses conceitos. Destacamos que esta pesquisa compartilha essa característica, pois objetivamos desenvolver material para o ensino dos conceitos de limite, derivada, integral e outros que não emergiram nas pesquisas que constam nesta Revisão, como equação diferencial e continuidade, por exemplo.

Outro ponto destacado é que em oito pesquisas o foco foi o conceito de derivada. Foi possível observar que seis delas (ASSUMPÇÃO, 2011; GONÇALVES, REIS, 2013; MORAES, 2013; TRAMONTANO, ALVES, VEIGA, 2013; GRANDE, VASQUEZ, 2014; MARTINS JÚNIOR, 2015) abordaram aplicações do conceito de derivada por meio de problemas práticos ou o estudo da variação de funções reais. As pesquisas restantes (MIRANDA, LAUDARES, GUIMARAIS, 2013; AMARAL, MÜLLER, 2012), que abordaram o conceito de derivada, propuseram situações que possibilitassem o desenvolvimento formal desse conceito por meio do estudo da inclinação da reta secante para a obtenção da inclinação da reta tangente e em seguida foi apresentada a definição formal do conceito de derivada. Comparando com o material desenvolvido nesta pesquisa, entendemos que temos o mesmo objetivo das duas últimas pesquisas destacadas (MIRANDA, LAUDARES, GUIMARAIS, 2013; AMARAL, MÜLLER, 2012), a saber, desenvolver atividades que visem ao desenvolvimento formal de conceitos do Cálculo.

Além disso, com relação à utilização de aplicações de conceitos de Cálculo, Tall relata a seguinte restrição quando eles são utilizados no ensino: considere um exemplo em que a função f modela a distância de um ponto móvel em função do tempo, então a função f' representa a velocidade desse ponto. Como as dimensões das grandezas velocidade e distância são diferentes, os gráficos das funções f e f' não podem ser representados no mesmo sistema de eixos coordenados. Contudo, quando consideramos uma função real, sem apelo para aplicações, a função derivada também é uma função real e pode ser representada no mesmo eixo coordenado. Ademais, Tall afirma que quando é utilizada uma

[...] abordagem, que foca essencialmente em números ao invés de utilizar grandezas com dimensões, fornece a derivada de uma função como outra função real e o processo de derivação pode ser repetido uma vez, e outra vez, para obter as derivadas de ordem superior como funções reais¹²⁹ (TALL, 2009, p. 491, tradução nossa).

Isso não ocorre quando as variáveis consideradas possuem dimensões específicas, pois a cada derivada sucessiva é atribuído um novo significado, dependendo das grandezas consideradas, como é exemplificado:

Quando a função original representa a distância, em função do tempo, a derivada é a velocidade, a segunda derivada é a aceleração, a terceira derivada é a celeridade a quarta derivada é difícil de imaginar. Nesse caso, os significados do Cálculo são maculados com relações adequadas entre os significados das várias grandezas que por sua vez se referem a diferentes sensações corporais¹³⁰ (TALL, 2009, p. 491, tradução nossa).

Pelas indicações apresentadas por Tall, o material para o ensino desenvolvido nesta Tese não utilizará exemplos de aplicações de conceitos de Cálculo e terá por objetivo produzir atividades que visem o desenvolvimento formal de conceitos do Cálculo assim como feito, em certa medida por Miranda, Laudares e Guimarães (2013) e Amaral e Müller (2012).

No Quadro 15 é possível observar que a maior parte das pesquisas coletadas está relacionada às questões do ensino de derivada e, talvez, pelos termos utilizados na busca, não foi possível detectar pesquisas em que fosse abordado, por exemplo, o conceito de equação diferencial. Logo, outro ponto que esta pesquisa amplia com relação às pesquisas consultadas é o fato de desenvolvermos material para o ensino do conceito de equação diferencial.

Neste momento vamos comparar o material produzido no âmbito desta pesquisa com aqueles que apresentamos nas categorias apresentadas no Mapa da Literatura (Figura 21).

Um primeiro ponto: entendemos que o material produzido difere daqueles apresentados na categoria 'Objeto de Aprendizagem', os quais utilizaram apenas

¹²⁹ [...] approach focusing purely on number rather than using magnitudes with dimensions gives the derivative of a real function as another real function and the process of differentiation can be repeated again and again to give the higher derivatives as real functions.

¹³⁰ When the original function represents distance as a function of time, the derivative is a velocity, the second derivative is an acceleration, the third derivative is a jerk and the fourth derivative is difficult to imagine. In this case the meanings of the calculus are coloured with subtle relationships between the meanings of the various magnitudes which in turn relate to different bodily sensations.

uma mídia exclusivamente digital, conforme proposição de Wiley (2000). Entendemos que o material proposto necessita, além da mídia digital, de uma interferência do professor, concordando com Müller (2015) quando comenta que organizadores genéricos

[...] só podem ser potencialmente significativos. Pode ocorrer que um organizador seja mal utilizado e possa até distrair o aluno ou levar a obstáculos cognitivos. Assim, o aprendiz, em geral, necessita de um agente organizador externo, como a tutoria do professor, um livro-texto ou algum outro agente que possa apontar as características genéricas e evitar fatores dispersivos (MÜLLER, 2015, p. 29).

Sobre o processo de produção de Objetos de Aprendizagem, Nascimento (2007) defende que eles devem ser produzidos com o respaldo de estratégias didático-pedagógicas. Esse autor sugere que o processo de produção de um Objeto de Aprendizagem deve envolver o trabalho de uma equipe multidisciplinar composta de professores, com domínio do conteúdo a ser trabalhado; programadores ou profissionais da área tecnológica, para o desenvolvimento do objeto; além de profissionais da área pedagógica ou algum especialista, que compreenda processos de aprendizagem e métodos cognitivos. Corroboramos com Nascimento (2007) quando diz que é necessário que um material de ensino tenha respaldo em uma estratégia didático-pedagógica e de Müller que determinado material pode não atingir seus objetivos de maneira autônoma, exigindo assim a ação de um professor, como um elemento organizador da atividade didática. Esses fatos corroboram com as escolhas feitas no Quadro Teórico desta pesquisa. Pois escolhemos a teoria da Gênese Documental, com vistas propiciar indicações de cunho didático, para a organização do material, e dos elementos teóricos de Tall de cunho cognitivista para nortear o desenvolvimento das atividades.

O material para o ensino apresentado nesta Tese difere daqueles apresentados nas pesquisas categorizadas como 'Resolução de Problemas com o GeoGebra'. Como apresentado em 3.1.4, esses trabalhos apresentaram situações nas quais o computador foi utilizado como mídia auxiliar para resolução de determinada situação-problema. Dois desses trabalhos (MORAES, 2013; GRANDE; VAZQUEZ, 2014) apresentaram situações em que um conceito da Matemática era utilizado para resolver uma situação aplicada, não exclusivamente matemática. Já Silva e outros (2014) focaram a introdução da Soma de Riemann para o cálculo da

área da região plana limitada pelo gráfico de uma função, pelo eixo x e de duas retas perpendiculares a esse eixo.

Com relação ao material apresentado neste Relatório, foram desenvolvidas situações que possibilitem ao estudante o desenvolvimento de conjecturas e visando ao desenvolvimento formal do conceito matemático considerado, assim como foi feito, de certa maneira, por Silva e outros (2014). Por esse motivo, as situações produzidas no material não utilizaram exemplos e problemas de aplicação, como feito em trabalhos categorizados como 'Resolução de Problemas com o GeoGebra'.

Entendemos que o material proposto nesta pesquisa está relacionado às pesquisas apresentadas nas categorias 'Atividades Exploratórias' e 'Sequências Didáticas' que tinham por objetivo o desenvolvimento formal da atividade matemática. Esse tipo de desenvolvimento no ensino da Matemática é defendido como por exemplo por Frota (2001) quando diz que há

[...] haver um consenso que o ensino da Matemática precisa libertar-se das amarras de um ensino passo a passo, que conduz à aprendizagem de procedimentos e não incentiva ao conhecimento matemático relacional que leva o indivíduo a estabelecer, sempre mais, novas conexões entre os vários conceitos estudados (FROTA, 2001, p. 91).

Nesta Revisão, as pesquisas de Miranda, Laudares e Guimarães (2013), Mazzi (2014) e Cargin e Barros (2015) formularam atividades que focavam o desenvolvimento formal do conceito matemático considerado. Miranda, Laudares e Guimarães (2013) focaram o desenvolvimento do conceito de derivada por meio da sequência de ensino desenvolvida; Mazzi (2014) e Cargin e Barros (2015) prepararam atividades que focaram o desenvolvimento do conceito de limite de sequência de números reais por meio de atividades em que elementos (ϵ e δ) são manipulados com vistas a promover o entendimento do papel deles na definição.

Outro ponto de destaque das pesquisas desta Revisão é o surgimento de pesquisas que foram referenciadas em elementos teóricos de natureza didática e cognitiva. Por exemplo, Assumpção (2011), no desenvolvimento de sequência didática para a introdução do conceito de derivada, integrou elementos da Teoria das Situações Didática e da Teoria dos Campos Conceituais. No trabalho de Ricaldoni (2014), o conceito de atividades exploratórias de natureza didática foi utilizado em atividades que promoviam a construção e interpretação de gráficos com

foco no desenvolvimento de imagens conceituais ricas com relação ao conceito de função. Cargnin e Barros (2015) apresentaram uma sequência didática utilizando noções da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

O material para o ensino desenvolvido nesta pesquisa também se referencia em teorias de natureza didática e cognitiva. Seus referenciais teóricos são, no entanto, distintos das pesquisas citadas. Norteia-se na Gênese Documental e em construtos teóricos elaborados por David Tall e seus associados. Os elementos teóricos de Tall foram escolhidos para visar ao desenvolvimento formal do conhecimento matemático. Esses elementos possibilitam o desenvolvimento de uma abordagem cognitiva do Cálculo. Essa é aquela em que

[...] ideias fundamentais do Cálculo sejam desenvolvidas, naturalmente, a partir de origens sensíveis, de tal forma que faça sentido, para fins gerais, apoiar as intuições necessárias para aplicações, fornecer um significado para o conceito de limite para ser usado mais tarde na Análise padrão e, ainda, para fornecer uma base razoável para conceitos infinitesimais em Análise Não-Standard¹³¹ (TALL, 2013a, p. 1, tradução nossa).

Entendemos ser possível desenvolver tal abordagem por meio da utilização das raízes cognitivas apresentadas e elementos dos Três Mundos da Matemática para a produção de material para o ensino. Os elementos de natureza didática são aqueles sugeridos por Gueudet e Trouche, por elementos da Gênese Documental.

¹³¹ Its major advantage is that it need not be based initially on concepts known to cause student difficulty, but allows fundamental ideas of the calculus to develop naturally from sensible origins, in such a way as to make sense in its own right for general purposes, support the intuitions necessary for applications, provide a meaning for the limit concept to be used later in standard analysis and further, to provide a sensible basis for infinitesimal concepts in non-standard analysis.

CAPÍTULO 4

MATERIAL PARA O ENSINO DE CÁLCULO

Neste capítulo é descrito o material elaborado para o ensino de Cálculo. Utilizamos o termo material para denotar o conjunto de todas as atividades elaboradas, no âmbito desta tese, para abordar os seguintes conceitos do Cálculo: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequências.

Essas atividades foram produzidas tendo em vista os referenciais teóricos e metodológicos desta pesquisa. Entre os referenciais teóricos estão a noção de recurso no âmbito da Gênese Documental de Gueudet e Trouche, e outras noções propostas por Tall para o ensino e aprendizagem do Cálculo. As referências metodológicas incluem-se no âmbito da pesquisa qualitativa, mais especificamente no âmbito da pesquisa fundamental que assume uma postura teórica exploratória, conforme descrito no Capítulo 1.

Entendemos que as atividades elaboradas com base em teorias e pesquisas da Educação Matemática poderão vir a compor o conjunto de recursos para professores de Cálculo quando estes produzem seus documentos para suas aulas. Dessa forma, a pesquisa preenche a condição de pesquisa fundamental quando se considera aquela que pode “aumentar a soma dos saberes disponíveis, que poderão, em algum momento, ser utilizados com a finalidade de contribuir para a solução de problemas postos pelo meio social” (LAVILLE, DIONNE, 1999, p. 86). Ela pode ser considerada qualitativa na medida em que é descritiva e assume uma postura teórica exploratória que se respalda na proposição de Fiorentini e Lorenzato (2006), quando dizem que o

[...] pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.67).

Acompanhamos Gil quando ressalta que “muitas vezes, as pesquisas exploratórias constituem a primeira etapa de uma investigação mais ampla” (GIL, 2008, p. 27), pois esta pesquisa relaciona-se a uma das etapas da constituição de

um documento por um professor de Cálculo quando elabora sua aula, no sentido da Gênese Documental, além de apresentar condições de subsidiar pesquisas de natureza empírica na perspectiva da busca da relação teoria e prática.

Na tomada por base da noção de recurso, de Gueudet e Trouche (2009), consideram-se na elaboração das atividades, que compõem o material, as suas três componentes, a saber, a matemática, a didática e a material, e as noções propostas por Tall para o ensino e a aprendizagem do Cálculo constituem a componente didática das atividades elaboradas.

Para finalizar, anunciamos que o termo 'aplicação', que é utilizado, indica um applet ou ferramenta construído no *software* GeoGebra com o objetivo de realizar uma tarefa específica. As aplicações construídas constituem a componente material, segundo a noção de recurso.

4.1. Atividades para o ensino de conceito do Cálculo

4.1.1. O conceito de função

As atividades que constam em 4.1.1 são elaboradas para o ensino do conceito de função.

Considerando-se que essas atividades são elaboradas tendo por base a noção de recurso, é importante explicitar suas três componentes: a matemática, a didática e a material.

A componente matemática é a definição de função. Nessa definição estão envolvidas as noções de relação entre dois conjuntos não vazios; de relação que define uma função, as noções de domínio, contradomínio, imagem; representação gráfica, entre outras.

Uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B é qualquer subconjunto não vazio do produto cartesiano $A \times B$. Indicamos nesse caso $ARB \subset A \times B$

Uma relação entre dois conjuntos não vazios A e B é uma função se e somente se cada elemento de A corresponde a um e somente um elemento de B . Ou seja, ARB é função se e somente se (a, b) e $(a, b') \in ARB$ então $b = b'$; Se $x \in A$ então $\exists y \in B$ tal que $(x, y) \in ARB$. Nesse caso, dizemos que x corresponde a y .

Essa definição em linguagem mista (simbólica e língua natural) pode ser assim enunciada: uma função é uma terna (f, A, B) em que $f: A \rightarrow B$ define uma relação entre A e B de tal modo que para cada elemento x do conjunto A associa-se um único elemento $f(x)$ de B e indica-se essa relação por $y = f(x)$.

Essa relação representada graficamente em um plano cartesiano vai exigir que: o conjunto A é conjunto das abscissas dos pontos do gráfico. O conjunto das ordenadas está contido em B. A intersecção de uma reta perpendicular ao eixo das abscissas e o gráfico é um conjunto unitário.

A componente didática dessas atividades segue orientações de Tall para o ensino de função. Uma dessas orientações se refere ao fato de que no Ensino Básico são trabalhados apenas exemplos de funções em que a lei que define a relação entre A e B é dada por uma fórmula. Em Tall (2013b), ele diz:

As funções apresentadas no Ensino Básico têm várias características similares que afetam o significado do conceito de função. Por exemplo, uma função é dada geralmente por uma fórmula composta de polinômios, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos – todas que possuem aspectos reconhecíveis. Na transição da Escola para a Universidade, esses *met-befores* podem sugerir propriedades implícitas que uma função deve ter, por exemplo, uma única fórmula e estudantes raramente têm contato com funções que têm sentenças distintas em diferentes partes do domínio¹³² (TALL, 2013b, p. 257 – 258, tradução nossa).

Ou ainda quando esse pesquisador fala da importância de utilizar computadores no ensino da Matemática, ressaltando que eles, quando munidos de um determinado *software*, podem ser utilizados na visualização de representações de conceitos matemáticos. E que com tais representações é possível que os alunos desenvolvam de maneira significativa determinados conceitos da Matemática. Contudo, Tall alerta para um perigo existente na utilização de *software* que plota gráficos, pois ele pode levar o sujeito a desenvolver um conceito imagem limitado, visto que pode ser utilizado apenas para desenhar gráficos quase suaves dados por uma fórmula (TALL, 1993).

¹³² The functions met in school mathematics have various familiar features that affect the meaning of the function concept. For instance, a function is usually given by a formula made up of polynomials, trigonometric functions, exponentials and logarithms – all of which have recognizable shapes. In the transition from school to university, these *met-befores* may suggest implicit properties that a function must have, for instance, it is usually given by a single formula and students rarely have experience of a function having different formulae on different parts of the domain.

Dessas considerações de Tall inferimos que apresentar apenas exemplos de funções definidas para a totalidade do conjunto dos números reais pode omitir o papel que o domínio desempenha na definição formal do conceito de função. O que indica que é necessário apresentar exemplos de funções cujo domínio é um intervalo ou a reunião de intervalos. Tall também reforça a necessidade de se apresentar funções definidas por sentenças distintas em diferentes partes do domínio.

Outro elemento que é considerado na componente didática é apresentado em Tall (1986). Nesse trabalho é relatada uma utilização indevida de um *software* que plota gráficos de funções reais. Essa utilização ocorre quando são desenvolvidas apenas atividades em que seja solicitado o esboço de gráficos de funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, que são contínuas e diferenciáveis em todos os pontos do domínio. É possível que com esse tipo de atividade que um sujeito, fazendo uma exploração sem a devida orientação, possa inferir que todas as funções são contínuas e diferenciáveis em todos os pontos de seu domínio. Por isso, Tall defende que seja necessário construir exemplos de funções, cujas representações gráficas tenham ‘bicos’ e outras que sejam descontínuas em algum ponto do domínio.

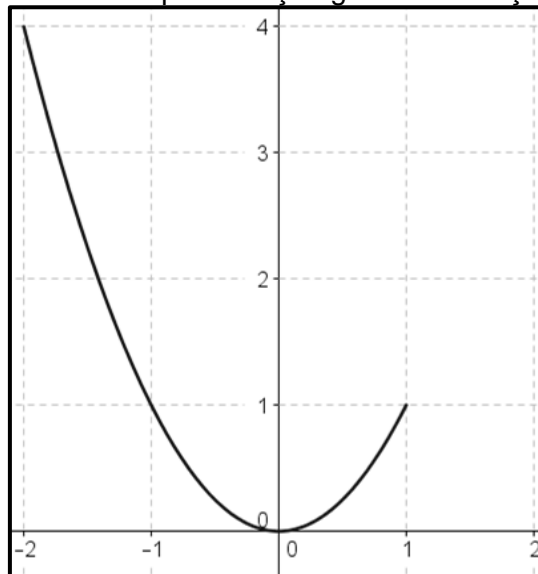
Nesse sentido, entendemos que uma contribuição para a introdução do conceito de função seria apresentar exemplos de funções que não sejam contínuas e que apresentem ‘bicos’ para que, em estudos posteriores, sejam abordadas questões relativas à continuidade e diferenciabilidade de uma função.

De posse dos elementos apresentados na componente didática, apresentamos a componente material em que são utilizados o *software* GeoGebra, comandos desse *software* que possibilitam o esboço do gráfico de funções reais cujo domínio são intervalos ou reunião de intervalos, funções reais definidas por mais de uma sentença em diferentes partes do domínio

Para o esboço de gráficos de funções definidas em um intervalo fechado é utilizado o comando ‘Função’. Esse comando é dado pela estrutura: ‘Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]’, sendo que cada parâmetro corresponde ao seguinte: <Função> corresponde à sentença que define a função; e os valores <Valor de x Inicial> e <Valor de x Final> são os extremos do intervalo fechado no qual a função é definida. Para exemplificar, considere a função

$f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela sentença $f(x) = x^2$. Para esboçar o gráfico dessa função é necessário digitar o seguinte no campo de Entrada: Função[x^2, -2, 1]. Na Figura 28, segue a representação gráfica da função f .

Figura 28 – A representação gráfica da função f .



Fonte: Elaboração nossa.

O outro comando considerado é o ‘Se’. Com esse comando é possível representar gráficos de funções cujo domínio é um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos e funções reais definidas por mais de uma sentença. O comando ‘Se’ possui as seguintes variações: ‘Se[<Condição>, <Então>]’ e ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’.

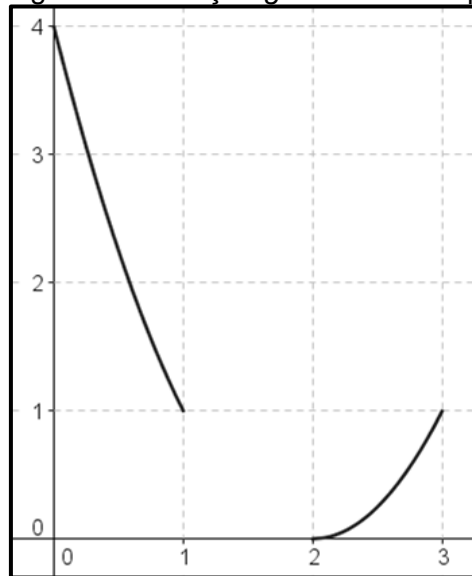
A primeira variação do comando, ‘Se[<Condição>, <Então>]’, possibilita o esboço do gráfico de uma função real cujo domínio é um intervalo aberto ou a reunião de intervalos. Para fazer isso é necessário preencher os dois parâmetros dessa variação do comando do seguinte modo: no <Condição> deve ser digitado o domínio da função e no <Então> deve ser definida a sentença da função.

Para exemplificar, vamos construir a representação gráfica de uma função cujo domínio é a reunião de dois intervalos. Considere a função $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, dada pela sentença $g(x) = (x - 2)^2$. Para escrever o conjunto X de maneira que seja uma entrada válida para o argumento <Condição>, será necessário utilizar os operadores booleanos, descritos em Hohenwarter e Hohenwarter (2009), sendo que o operador ‘&&’ representa o ‘e’ lógico, e o operador || (duas barras verticais) representa o ‘ou’ lógico. Com esses operadores lógicos o

conjunto X pode ser expresso por: $0 \leq x \leq 1 \parallel 2 \leq x \leq 3$. Para representar graficamente a função g , é necessário digitar os seguintes comandos no campo de Entrada: $g(x) = \text{Se } [0 \leq x \leq 1 \parallel 2 \leq x \leq 3, (x - 2)^2]$ ¹³³.

Pode-se observar a representação gráfica da função g na Figura 29.


Figura 29 – A representação gráfica da função $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela sentença $g(x) = (x - 2)^2$.



Fonte: Elaboração nossa.

A segunda variação ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’ possibilita o esboço do gráfico de uma função real definida por duas sentenças. Pela estrutura dessa variação, o esboço da função é obtido do seguinte modo: no parâmetro <Condição>, é definida a condição imposta pela primeira sentença da função; no parâmetro <Então>, é dada a sentença da função que satisfaz o que é dado no parâmetro <Condição>; no parâmetro <Senão>, é dada a sentença da função dos valores que não satisfazem a <Condição>. Para exemplificar, considera-se a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela seguinte sentença,

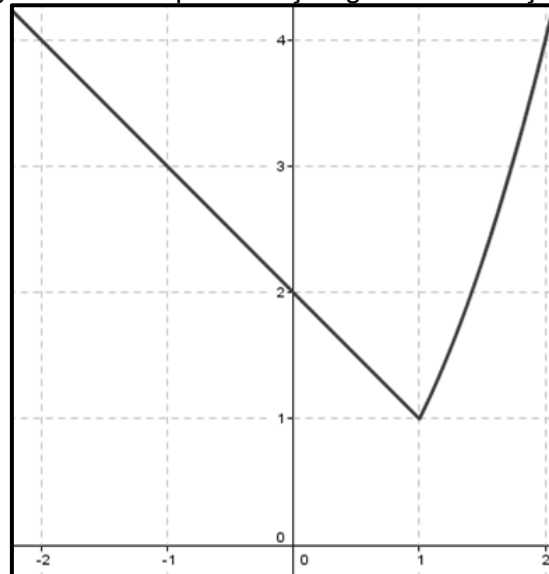
$$h(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

¹³³ No GeoGebra, para acrescentar o símbolo \leq (ou \geq), pode ser feito de duas maneiras: a primeira é digitar, no campo de Entrada, o seguinte: “<=” (ou “>=”) ; e a segunda é, com o cursor no campo de Entrada, clicar no botão , localizado no canto direito desse campo, e clicar no símbolo \leq (ou \geq).

Para representar graficamente essa função, é necessário digitar os seguintes comandos no campo de Entrada: $h(x) = \text{Se}[x \leq 1, 2 - x, x^2]$.

Pode-se observar a representação gráfica da função h na Figura 30.

Figura 30 – A representação gráfica da função h .



Fonte: Elaboração nossa.

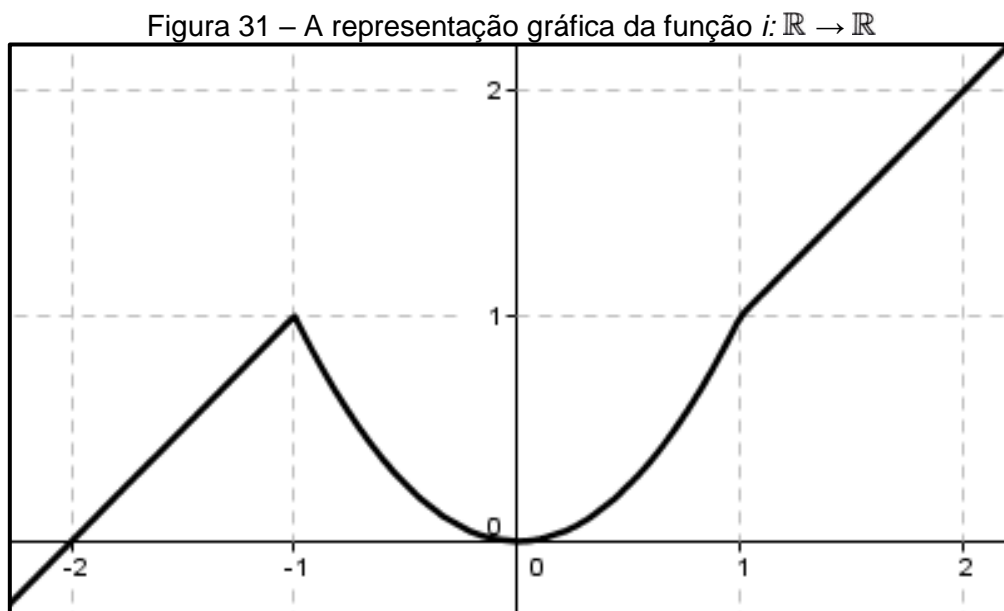
Com a variação ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’ desse comando é possível esboçar uma função definida por mais de duas sentenças. Para exemplificar é feito o esboço de uma função definida por três sentenças em partes distintas do domínio. Considere a função $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$i(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para representar graficamente essa função é necessário ‘encaixar’ dois comandos ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’. Essa construção é feita do seguinte modo: o primeiro comando ‘Se’ possui a primeira parte da sentença da função i , ou seja, o parâmetro <Condição> recebe ‘ $x < -1$ ’ e o parâmetro <Então> recebe ‘ $x + 2$ ’. A condição <Senão> será outro comando ‘Se’, na variação ‘Se[<Condição>, <Então>, <Senão>]’, recebe como <Condição> a restrição da segunda sentença da função, ‘ $-1 \leq x \leq 1$ ’, e o parâmetro <Então> recebe a segunda sentença ‘ x^2 ’ e o parâmetro <Senão> recebe a terceira sentença ‘ x ’. Deve ser

digitado o seguinte no campo de Entrada:
 $i(x) = \text{Se}[x < -1, x + 2, \text{Se}[-1 \leq x \leq 1, x^2, x]]$.

Na Figura 31, segue a representação gráfica da função i na Janela de Visualização¹³⁴:



Fonte: Elaboração nossa.

Para representar funções definidas por mais de duas sentenças é possível utilizar o mesmo processo de ‘encaixe’ descrito para representar a função i , sendo que o número de comandos ‘Se’ ‘encaixados’ será igual ao número de sentenças que definem a função considerada menos uma unidade.

A seguir, podemos ver as três atividades para ensino de função em que os comandos ‘Função’ e ‘Se’ são utilizados e que tratam de aspectos apontados por Tall como originários de dificuldade para a compreensão do conceito.

Na primeira dessas atividades objetiva-se discutir a questão do papel que as três componentes da terna (f, A, B) desempenham na definição de uma função. Ou seja, busca-se chamar a atenção para o fato de que a lei não é a única responsável pela definição da função, e se alterarmos o domínio, mesmo que se mantenha a lei, obtemos funções diferentes.

¹³⁴ Estamos considerando que o termo ‘Janela de Visualização’ conforme é utilizado no *software* GeoGebra, ou seja, esse termo é a Janela padrão do *software*. Neste capítulo também foi utilizado o termo ‘Janela de Visualização 2’, que se refere a Janela complementar do GeoGebra, que é ativada por meio da seleção da opção ‘Janela de Visualização 2’ contida no menu principal opção ‘Exibir’.

A1. Considere as funções $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_1(x) = x^2$ e $f_2: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_2(x) = x^2$ e $f_3: [-1, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f_3(x) = x^2$.

- (i) Essas funções são iguais?
- (ii) Explique sua resposta.

Em seguida, sugere-se que seja mostrado como podemos utilizar o GeoGebra para obter representações gráficas de funções f_1 , f_2 e f_3 . Essas podem ser obtidas digitando-se no campo de Entrada o seguinte: $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = \text{Função}[x^2, -2, 1]$ e $f_3(x) = \text{Se}[0 \leq x \leq 1 \ || \ 2 \leq x \leq 3, x^2]$.

A segunda atividade objetiva apresentar e discutir a organização da lei que define uma função. Ou seja, que essa lei não é necessariamente dada apenas por uma fórmula. Para exemplificar, é apresentada uma função cuja lei é expressa por duas sentenças.

A2. Considere a expressão dada por $h(x)$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- (i) A expressão dada por $h(x)$ representa uma função?
- (ii) Explique sua resposta.
- (iii) Produza a representação de h no GeoGebra digitando-se, no campo de Entrada, o seguinte: $h(x) = \text{Se}[x \leq 1, 1, x^2]$.
- (iv) O gráfico de h é representa o gráfico de uma função? Explique sua resposta.
- (v) Suas respostas nas questões (ii) e (iv) são compatíveis?

A terceira atividade ambiciona, conforme indicações de Tall, não apresentar apenas exemplos de funções contínuas quando o computador for utilizado para o estudo de funções. A função i tem uma descontinuidade em -1 .

A3. Considera-se a função $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$i(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para representar graficamente essa função é necessário ‘encaixar’ dois comandos ‘Se’. Observe o que deve ser digitado no campo de Entrada:
“ $i(x) = \text{Se}[x < -1, x + 1, \text{Se}[-1 \leq x \leq 1, x^2, x]]$ ”.

4.1.2. O conceito de derivada

As atividades que constam deste item foram elaboradas para o ensino do conceito de derivada.

Levando-se em consideração a noção de recurso da Gênese Documental, iniciamos o estudo declarando quais são as três componentes das atividades.

A primeira componente, a matemática, é a definição do conceito visado, qual seja a definição de derivada de uma função real a variáveis reais em um ponto x_0 interior de seu domínio. Mais detalhadamente, a componente matemática é constituída por noções como limite, razão incremental, taxa de variação instantânea, inclinação de uma curva e reta tangente ao gráfico de uma curva.

A componente didática é constituída pela noção de retidão local. Essa noção pode ser considerada como componente didática, pois, para Tall, ela pode ser levada em consideração no ensino do conceito de derivada. Ele dá dois motivos para isso com os quais concordamos: por essa noção é possível, utilizando a “ampliação de [uma porção do] gráfico produzida por um computador, permitir que o processo de limite esteja implícito na ampliação computacional ao invés de explícito no conceito de limite”¹³⁵ (DUBINSKY, TALL, 1991, p. 238, tradução nossa, adaptado) e, também, porque ela “permite que a *função derivada* possa ser vista como a função que associa cada ponto de seu gráfico à inclinação da reta tangente ao gráfico nesse ponto”¹³⁶ (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa, adaptado). Em outras palavras, a noção de retidão local favorece o reconhecimento, pelo exame do gráfico, da diferenciabilidade de uma função em um determinado ponto. Isso porque se a função é diferenciável em um ponto, quando se amplia parte desse gráfico em uma vizinhança desse ponto, com determinado grau de ampliação, essa parte ampliada ‘assemelhar-se-a’ a um segmento de reta.

Tall destaca que uma abordagem de ensino que se utiliza da noção da retidão local difere daquela em que, na introdução se apresenta a definição formal de derivada. Pois para esse autor essa abordagem:

¹³⁵ [...] computer magnification of graphs allows the limiting process to be implicit in the computer magnification, rather than explicit in the limit concept.

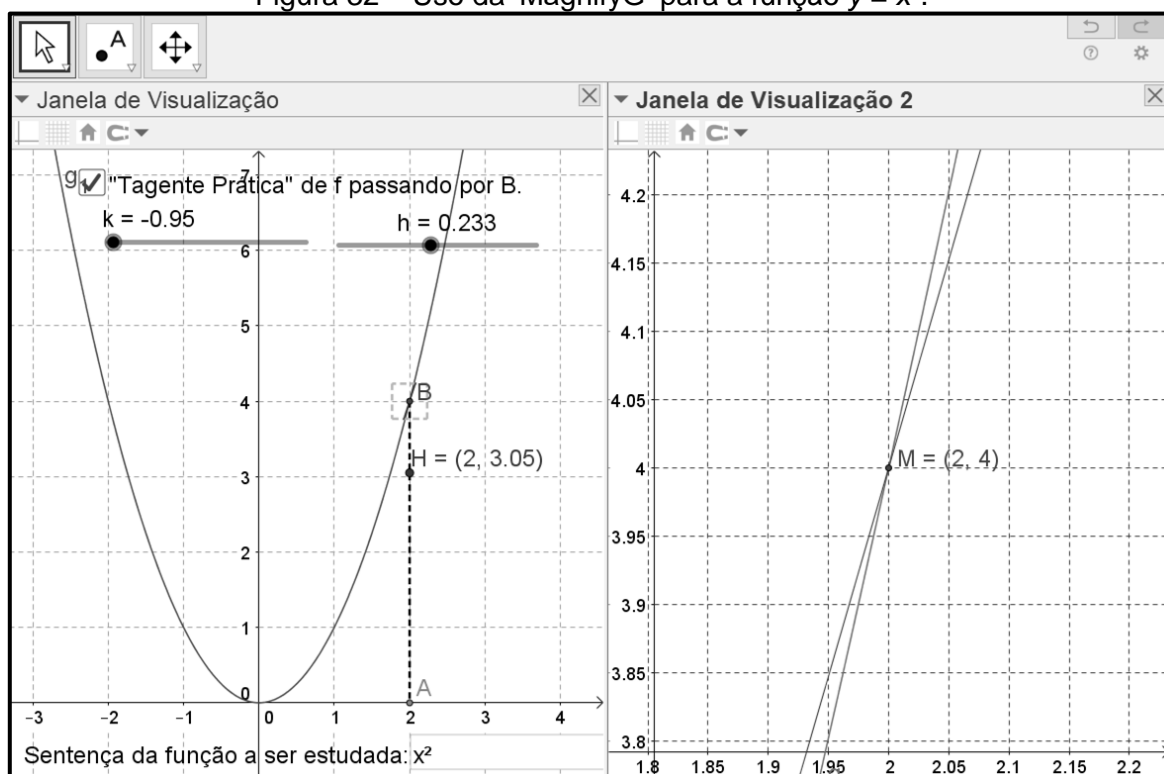
¹³⁶ [...] it allows the gradient function to be seen as the changing gradient of the graph itself.

Ao invés de uma *compressão simbólica* encapsulando um *processo* de limite em um *objeto* limite (a derivada), é uma *compressão corporificada* que opera sobre um *objeto* (o gráfico) para fornecer um novo *objeto* (o gráfico da função derivada). O estudante pode agora *ver* a derivada como a função que associa a cada ponto o valor da inclinação da reta tangente. A nova tarefa é simbolizar essa visão da função inclinação pelo cálculo de uma boa aproximação aritmética, ou ainda melhor, uma representação simbólica perfeita¹³⁷ (TALL, 2013b, p. 303, grifo do autor).

E, finalmente, apresentamos a componente material. Essa componente é uma aplicação no GeoGebra, cujas funções são similares ao organizador genérico *Magnify* elaborado por Tall e descrito em 2.2.2.2. Denominamos essa nova aplicação de 'MagnifyG'¹³⁸.

Com a Figura 32 nossa intenção é apresentar a 'MagnifyG' e seu funcionamento para análise da retidão local de uma função diferenciável em um ponto. O exemplo escolhido é da função $y = x^2$ em um dado ponto.

Figura 32 – Uso da 'MagnifyG' para a função $y = x^2$.



Fonte: Elaboração nossa.

¹³⁷ Instead of the *symbolic compression* encapsulating a limiting *process* into a limit *object* (the derivative), it is an *embodied compression* that operates on an *object* (the graph) to give a new *object* (the graph of the slope function). The student can now see the derivative as the changing slope function. The new task is to symbolize this vision of the slope function by calculating a good-enough arithmetic approximation, or better still, a perfect symbolic representation.

¹³⁸ Essa aplicação está disponível no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/AqX3VTJC>.

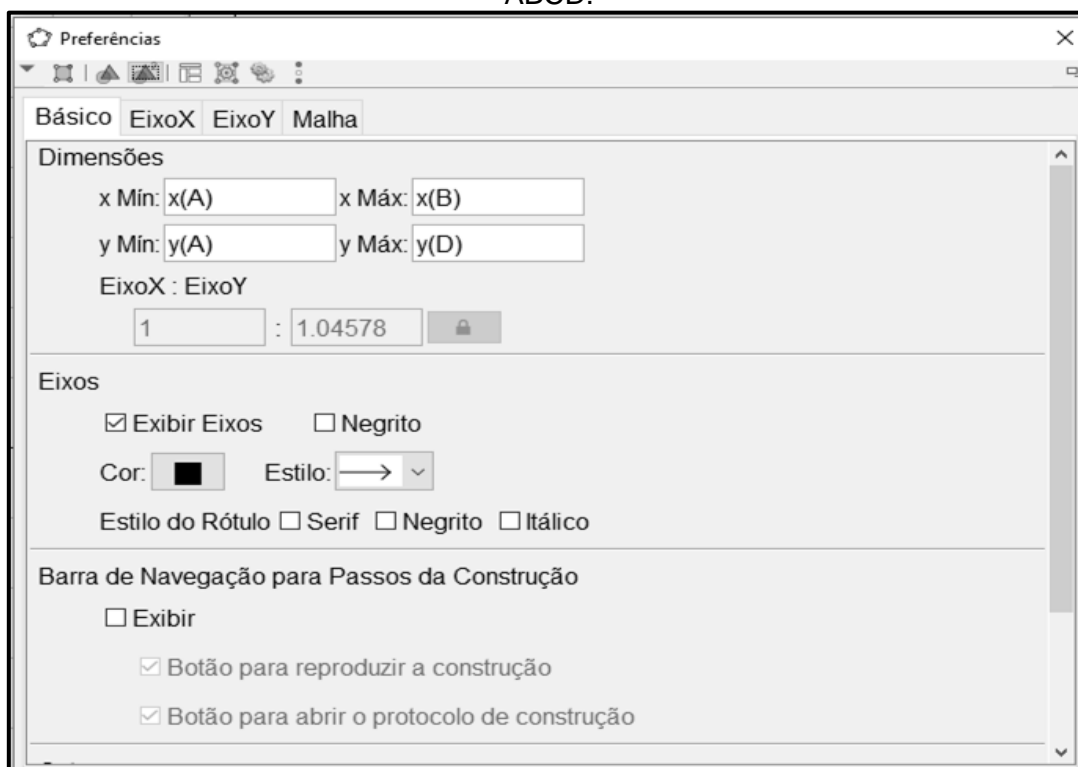
A 'MagnifyG' é composta de duas Janelas de Visualização. A primeira, à esquerda, possui um campo de texto, localizado em sua parte inferior, em que se digita a expressão de definição da função, $y = x^2$ (no caso); estão destacados dois pontos, A pertencente ao eixo das abcissas, e B pertencente ao gráfico da função. O ponto B tem a seguinte condição: tem mesma abscissa que A e tem como ordenada a imagem dessa abscissa pela f , ou seja, $(x(A), f(x(A)))$ ¹³⁹. De partida, apenas o ponto A é suscetível de movimentação com o *mouse*. Quando A é movimentado, B mantém a mesma abscissa que A e sua ordenada é imagem dessa abscissa pela f , ou seja, as coordenadas do ponto B mantêm as mesmas condições de antes; essa primeira Janela possui também um quadrado, sendo B o ponto de encontro de suas diagonais e a medida de seu lado é duas vezes o valor do controle deslizante h . A região do plano que aparece na Janela de Visualização 2 corresponde à ampliação desse quadrado; o controle deslizante h está atrelado ao quadrado.

Na Janela de Visualização 2 estão dois elementos: um ponto M (no caso) e um gráfico. O ponto M tem as mesmas coordenadas do ponto B e o gráfico representa a parte ampliada do gráfico da função indicada no campo de texto (no caso, $y = x^2$) no interior do quadrado. Os elementos da Janela de Visualização 2 não podem ser manipulados pelo usuário. Essa Janela possui as seguintes características: o ponto M está sempre localizado no 'centro' dessa Janela; os eixos x e y se ajustam à Janela de Visualização 2; essa Janela possui dimensões que estão associadas aos vértices do quadrado construído na Janela de Visualização, o que caracteriza a ampliação.

Na Figura 33 é demonstrado como é possível configurar uma Janela de Visualização qualquer no GeoGebra da forma como foi configurada a Janela de Visualização 2 da 'MagnifyG'. Para este exemplo é considerado o caso em que a Janela de Visualização terá dimensões iguais a de um quadrado genérico ABCD.

¹³⁹ No GeoGebra, para dado um ponto A, o comando $x(A)$ dá como resposta o valor da abscissa do ponto A. O comando $f(x(A))$ calcula o valor da imagem do valor $x(A)$ pela função f , definida no GeoGebra.

Figura 33 – Construção de uma Janela de Visualização com dimensões iguais ao quadrado ABCD.



Fonte: Elaboração nossa.

A seguir, serão vistos, nos Quadros 16 e 17, dois conjuntos de atividades, para o ensino de derivada, produzidos com base nos elementos apresentados nas três componentes: matemática, didática e material.

O primeiro conjunto é composto por atividades em que será utilizada a noção de retidão local com os seguintes objetivos: observar a existência de um valor h para o qual a porção ampliada do gráfico se assemelhe a um segmento de reta; calcular a taxa média de variação de uma função em dois pontos pertencentes à porção ampliada do gráfico, em que o gráfico se assemelhe a um segmento de reta.

O primeiro conjunto de atividades está expresso no Quadro 16:

Quadro 16 – Atividades relacionadas à exploração da noção de retidão local¹⁴⁰

1) Para os itens a) e b), após construir o gráfico da função dada, utilize a ‘MagnifyG’ para os valores de A dados e atribua para cada caso valores para o deslizante h . Por fim, analise a porção ampliada do gráfico esboçado na Janela de Visualização 2. Registre o que obteve.

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_1(x) = x^2$.

Valor de A	Valor de h	Observe a porção ampliada do gráfico e faça algum comentário sobre sua aparência.
2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
0	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
0	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
0	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)

b) $f_2: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

Valor de A	Valor de h	Observe a porção ampliada do gráfico e faça algum comentário sobre sua aparência.
-2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
-2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
-2	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
1	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
1	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)
1	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)

¹⁴⁰ Em todas as atividades que apresentamos neste capítulo, utilizamos o destaque em negrito, em cada quadro, para indicar os locais e o tipo de resposta esperada para cada atividade desenvolvida. Denominamos: ‘Escolha pessoal’ quando na questão é solicitada ao usuário a escolha de um objeto (seja um ponto ou um número); ‘Resposta pessoal’ quando na questão é esperada uma resposta dissertativa do usuário ou uma resposta que dependa de dado(s) escolhido(s) pelo usuário; ‘Resposta esperada’ quando é indicada a resposta correta.

2) Para as funções e valores dos parâmetros A e h fixados, crie um ponto na Janela de Visualização 2 no gráfico que consta nessa Janela. Em seguida, calcule a taxa de variação média da função indicada nos dois pontos escolhidos. Complete a tabela com esses valores.

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_1(x) = x^2$.

Valor de A	Valor de k	Coordenadas do ponto criado (B)	Diferença entre a abscissa de B e o valor de x_0 .	Taxa de variação média de f_1 nos pontos B e $(x_0, f(x_0))$
-1	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)
1	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)
2	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)

b) $f_2: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_2(x) = \frac{1}{x}$.

Valor de A	Valor de k	Coordenadas do ponto criado (B)	Diferença entre a abscissa de B e o valor de x_0 .	Taxa de variação média de f_2 nos pontos B e $(x_0, f(x_0))$
-2	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)
1	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)
2	0,001	(Escolha pessoal)	(Resposta pessoal)	(Resposta pessoal)

Fonte: Elaboração nossa.

Em função das respostas dadas aos itens da primeira Atividade 1), sugerimos que seja reforçado o fato de que existem valores de h para o qual a porção ampliada da função assemelha-se a um segmento de reta e para outros valores esse fenômeno pode não ocorrer.

No primeiro conjunto de atividades foi explorado o cálculo da taxa média de variação da uma função nos pontos da porção do gráfico em que ele se assemelha a um segmento de reta.

No segundo constam atividades em que é explorada a representação algébrica da reta que melhor se aproxima da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto de abscissa x_0 . Nessas atividades, é solicitado encontrar uma aproximação do tipo: $f(x_0 + k) \approx ak + f(x_0)$.

Para obter esse tipo de aproximação, Tall sugere a utilização de um *software* que trace um segmento com dois pontos pertencentes à reta definida pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + k, f(x_0 + k))$, sendo que os extremos desse segmento devem ser distintos de $(x_0, f(x_0))$ e de $(x_0 + k, f(x_0 + k))$. Esse segmento é denominado tangente prática. Em particular, quando uma função tem um gráfico localmente reto nas vizinhanças de x_0 e para k suficientemente pequeno “a tangente prática [em $(x_0, f(x_0))$] parece indistinguível da tangente teórica”¹⁴¹ (TALL, 2013b, p. 302, tradução nossa).

Segundo Tall, o trabalho com a tangente prática possibilita

[...] uma mudança da matemática prática da infância para a matemática teórica de uma corporificação conceitual de gráficos e o simbolismo operacional da álgebra que se misturam para desenvolver o Cálculo. Compreender os significados teórico e prático da variação de inclinação baseada na percepção humana e em ações que podem ser obtidas antes de olhar para a definição formal em termos de limite¹⁴² (TALL, 2013b, p. 302, tradução nossa).

Utilizando a ‘MagnifyG’ para traçar a tangente prática, basta ativar a caixa de seleção ‘Tangente prática de f passando por B’ localizada na parte superior da Janela de Visualização. Quando essa caixa de seleção for ativada, aparecerão três elementos na Janela de Visualização da ‘MagnifyG’: um novo controle deslizante k , um segmento que passa pelo ponto B e um ponto H, na cor vermelha. Esses três elementos estão relacionados com o traçado da tangente prática. O controle deslizante k está relacionado com os pontos escolhidos para a construção do segmento que contém os pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + k, f(x_0 + k))$, o valor k pode ser tanto positivo quanto negativo. O ponto H é um ponto que possui valor de abscissa igual à abscissa do ponto B e a ordenada é igual ao valor da taxa de variação da função f com relação aos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + k, f(x_0 + k))$. Na Janela de Visualização 2 aparece uma réplica do segmento construído na outra Janela.

No Quadro 17 é apresentado o conjunto de atividades relacionadas à noção de tangente prática.

¹⁴¹ [...] the practical tangent looks indistinguishable from the theoretical tangent.

¹⁴² [...] shifting from the practical mathematics of childhood to the theoretical mathematics of conceptual embodiment of graphs and operational symbolism of algebra blended together to give calculus. To grasp the practical and theoretical significance of the changing slope based on human perception and action can be achieved before looking at the formal definition of the limit.

Quadro 17 – Atividade relacionada à aplicação da noção de tangente prática

1) Com a 'MagnifyG', ative a caixa de seleção 'Tangente prática de f passando por B' e digite no campo 'Sentença da função a ser estudada' a sentença da função real $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $f_1(x) = x^2$. Siga o seguinte roteiro de ações descrito e, em seguida, responda as questões feitas:

Roteiro:

- Posicione o ponto A em $x = 2$ e observe o segmento na cor vermelha que aparece nas duas Janelas de Visualização.
- Movimente o controle deslizante k para valores próximos de zero. Atenção: esse controle deslizante admite valores negativos, por isso, valores próximos ao zero estarão próximos ao centro do controle deslizante.

Questões:

1) É possível distinguir o segmento de reta vermelho com o gráfico da função nas vizinhanças desse ponto para valores suficientemente pequenos de k ?

(Resposta pessoal) _____ .

2) O segmento vermelho é construído de modo a conter os pontos $(2, 4)$ e $(2 + k, (2 + k)^2)$. Sabendo disso, calcule a inclinação desse segmento. Para efeitos de cálculo, considere que $k \neq 2$.

Resposta esperada:

$$\frac{(2+k)^2 - 4}{(2+k) - 2} = \frac{4 + 4k + k^2 - 4}{k} = \frac{k \cdot (4+k)}{k} = 4 + k$$

3) O ponto H tem coordenadas definidas do seguinte modo: a abscissa tem o mesmo valor que a do ponto A e a ordenada é igual à inclinação de um segmento formado pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + k, f(x_0 + k))$. Clique com o botão direito sobre o ponto H e habilite o rastro desse ponto. Em seguida, movimente o ponto A sobre o eixo x e responda: com qual curva

o traço obtido a partir da movimentação do ponto H se assemelha?

(Resposta esperada – uma reta)

4) Para determinar a equação da curva gerada pelos valores das inclinações das tangentes práticas, no caso da função $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $f_1(x) = x^2$, considere dois pontos arbitrários (x_0, x_0^2) e $(x_0 + h, (x_0 + h)^2)$ que pertencem à tangente prática. Calcule a inclinação do segmento que contém esses dois pontos.

Reposta esperada:

$$\frac{(x_0 + k)^2 - x_0^2}{(x_0 + k) - x_0} = \frac{x_0^2 + 2x_0k + k^2 - x_0^2}{k} = \frac{k \cdot (2x_0 + k)}{k} = 2x_0 + k$$

Fonte: Elaboração nossa.

Na primeira atividade do Quadro 17 é objetivado verificar se é perceptível que a tangente prática confunde-se com o gráfico da função para valores de k próximos de zero e h em que a função é localmente reta. Em seguida, solicita-se a realização de cálculos algébricos para encontrar a inclinação da tangente prática que passa pelos pontos $(2, 4)$ e $(2 + k, (2 + k)^2)$. As atividades três e quatro, também do Quadro 17, objetivam apresentar o esboço da função que associa a cada valor de x o valor da inclinação da tangente prática, para o caso da função $y = x^2$, e depois obter a sua sentença algébrica.

Entendemos que a realização dessas atividades favorecerá a compreensão do conceito formal de derivada, pois com a resolução atividade 4 do Quadro 17 obtém-se uma expressão algébrica da função que associa a cada ponto x_0 o valor da inclinação da tangente prática que passa por esse ponto. Segundo Tall,

Essa função inclinação pode então ser relacionada com o simbolismo correspondente e a ideia formal de limite pode ser introduzida posteriormente, quando se torna aparente a necessidade de desenvolvimento de regras para calcular a derivada de combinações de funções¹⁴³ (TALL, 2013b, p. 303, tradução nossa).

¹⁴³ This slope function can then be linked to the corresponding symbolism and the formal idea of limit can be introduced later when the need for it becomes apparent in developing of standard rules for calculating the symbolic derivative for the combinations of functions.

Desse modo, a apresentação da definição formal do conceito de derivada pode ser realizada a partir da retomada do problema de encontrar a função que associada cada valor de x o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto e apresentar essa função em termos de limite.

4.1.3. A relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade

A componente matemática das atividades que objetivam o estudo da relação entre a continuidade e diferenciabilidade inclui as definições dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função de uma variável real, e a relação entre essas noções dadas pelo teorema: seja $f: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, se f é diferenciável em x_0 , então f é contínua em x_0 .

Esse teorema indica uma condição suficiente, entre a continuidade e a diferenciabilidade de uma função. A recíproca desse teorema, ou seja, a condição necessária é falsa pelo fato de existirem funções contínuas e não diferenciáveis em pontos interiores de seu domínio. Em geral, o exemplo de uma função contínua e não diferenciável em um ponto interior de seu domínio é a função modular $h(x) = |x|$ em $x = 0$. Objetivando favorecer a compreensão da relação entre a continuidade e a diferenciabilidade é pretendido promover o estudo de funções que sejam contínuas em algum ponto e não diferenciáveis no mesmo. Até trabalhar com um exemplo extremo que é uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio.

Na componente didática são consideradas indicações de Tall sobre o trabalho com função não diferenciáveis em determinado ponto interior do domínio. Para o pesquisador inglês é necessário trabalhar esse tipo de função porque em um

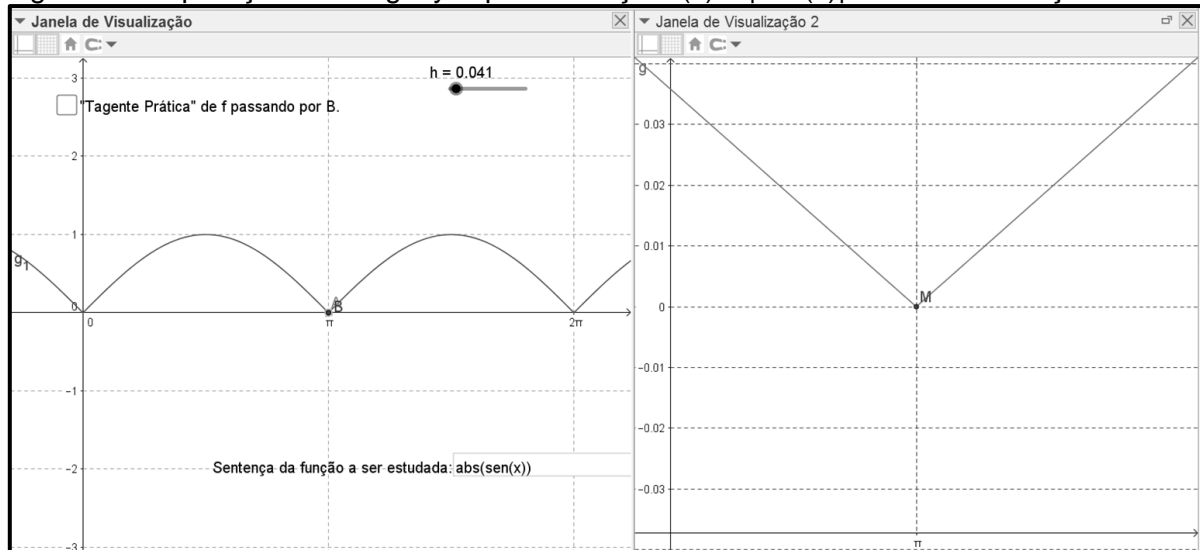
[...] curso introdutório de Cálculo geralmente é focado em funções regulares dadas por uma combinação de funções usuais. Isso necessariamente dá a impressão que funções são geralmente diferenciáveis, configurando um *met-before* para ideias posteriores da matemática avançada que pode ser monstruoso. Uma abordagem corporificada, entretanto, pode oferecer percepções sobre o que significa ser não diferenciável¹⁴⁴ (TALL, 2013b, p. 314).

Essa abordagem corporificada tem base na noção de retidão local. Por meio dessa noção é possível inferir quando uma função não é diferenciável em um dado ponto por meio da não ocorrência da retidão local, isto é, a representação gráfica da função, em uma vizinhança desse ponto, não se assemelha a uma reta para

¹⁴⁴ [...] first course in calculus usually focuses on the regular functions given by a combination of the standard functions. This necessarily gives the impression that functions are usually differentiable, setting up the met-before that later ideas in mathematical analysis can be monstrous. An embodied approach, however, can offer insights as to what it means to be non-differentiable.

qualquer grau de ampliação. Por exemplo, a função real $f(x) = |\text{sen}(x)|$ não é diferenciável em todo x da forma $x = k\pi$, sendo k um número inteiro qualquer. Na Figura 34 apresentamos a representação gráfica da função f à esquerda; tem-se à direita uma ampliação do gráfico de f em uma vizinhança de $x = \pi$, utilizando a 'MagnifyG'.

Figura 34 – Aplicação da 'MagnifyG' para a função $f(x) = |\text{sen}(x)|$ e uma vizinhança de $x = \pi$.



Fonte: Elaboração nossa.

A partir do estudo de funções contínuas e não diferenciáveis em um número infinito de pontos interiores do domínio seria possível conjecturar sobre a existência de uma função cuja representação gráfica possua bicos em qualquer ponto do domínio, implicando então a impossibilidade de se encontrar uma vizinhança na qual o gráfico dessa função se assemelhe a um segmento de reta. Uma função com essa propriedade seria uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio. Um exemplo desse tipo de função é a manjar branco.

A componente material dessas atividades é constituída por uma aplicação do *software* GeoGebra que constrói termos da sequência de funções cujo limite é a função manjar branco. Essa aplicação foi por nós elaborada e nomeada 'ManjarBrancoG'. No que segue apresentamos a definição da função manjar branco, o processo de sua construção no GeoGebra e, por fim, a aplicação 'ManjarBrancoG'.

A função manjar branco é definida em $[0,1]$, associa valores no conjunto \mathbb{R} e é definida como o limite da seguinte série de funções:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

Cada função $f_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela sentença $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$ com $f(x) = d(x, \mathbb{Z})^{145}$. Demonstraremos ao final de 4.1.3 que b é contínua e não diferenciável em $[0,1]$.

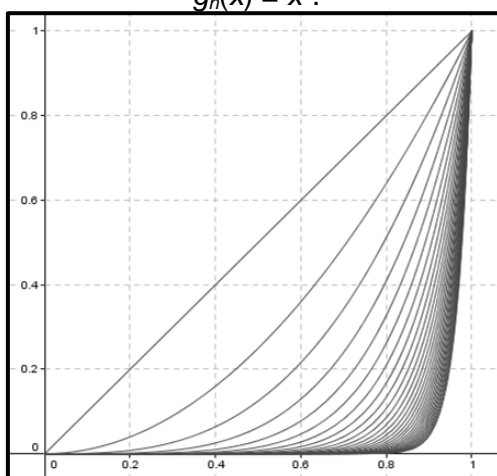
Na sequência, exibimos ferramentas utilizadas na construção da 'ManjarBrancoG'. Ressaltamos que essas ferramentas podem ser utilizadas para explorar sequências e séries numéricas e de funções.

Antes dessa fase vamos explicitar como representar termos de sequências de funções e soma parcial de uma série de funções no GeoGebra.

É possível representar os termos de uma sequência de funções por meio do comando 'Sequência'. Segundo o manual do GeoGebra (HOHENWARTER, HOHENWARTER, 2009, p. 60-61), esse comando possui uma variação que é composta pelos parâmetros: 'Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor inicial>, <Valor Final>]'. Esse comando fornece uma lista de objetos criados a partir da <Expressão> fornecida em função da <Variável> indicada e a variável indicada deve fazer parte da <Expressão> fornecida. A <Variável> está definida no intervalo que inicia no <Valor inicial> e termina em <Valor final>.

Para exemplificar, construiremos os trinta termos da sequência de funções $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g_n(x) = x^n$. Para isso, é preciso digitar os seguintes comandos no campo de Entrada: Sequência[Se[$0 \leq x \leq 1$, x^i], i , 1, 30].

Figura 35 – A representação dos trinta primeiros termos da função $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, sendo que $g_n(x) = x^n$.

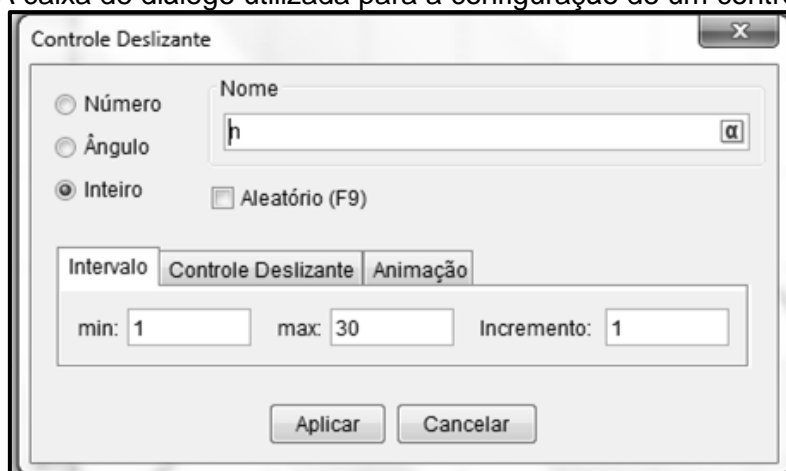


Fonte: Elaboração nossa.

¹⁴⁵ No espaço métrico $(\mathbb{R}, | \cdot |)$, a função $d: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, \mathbb{Z}) = \inf \{ |x - z|, \text{sendo que } z \text{ é um inteiro} \}$ é uma função que associa a cada x a distância entre x e o conjunto \mathbb{Z} .

Outra maneira de implementar a representação dos termos de uma sequência é utilizando a ferramenta ‘controle deslizante’¹⁴⁶ junto com o comando ‘Sequência’. Segundo o manual do *software* (HOHENWARTER, HOHENWARTER, 2009, p. 24-25), um controle deslizante é a representação gráfica de um parâmetro que pode ser número ou um ângulo e que ao ser modificado produz determinada alteração no elemento associado ao parâmetro. Com um controle deslizante é possível construir a representação dos n primeiros termos de uma sequência qualquer. Para isso é necessário, em primeiro lugar, clicar na ferramenta ‘controle deslizante’ e configurar o controle de acordo com as opções da caixa de diálogo que aparece após o clique na ferramenta. Primeiramente, deve ser atribuído um nome ao controle deslizante; em nosso caso, ele recebeu o nome de n . A opção ‘Inteiro’ é marcada e na aba ‘Intervalo’ deve constar o valor mínimo e o máximo do parâmetro. Para exemplificar, foram atribuídos como valor mínimo 1 e valor máximo 30 (Figura 36).


Figura 36 – A caixa de diálogo utilizada para a configuração de um controle deslizante.



Fonte: Elaboração nossa.

Com o controle deslizante já criado é possível construir os primeiros n termos da sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Para isso, devem ser digitados no campo de Entrada os seguintes comandos: Sequência[Se[$0 \leq x \leq 1$, x^n], i , 1, n] (lembrando que o ‘ n ’ que aparece nesse comando é o nome do controle deslizante construído).

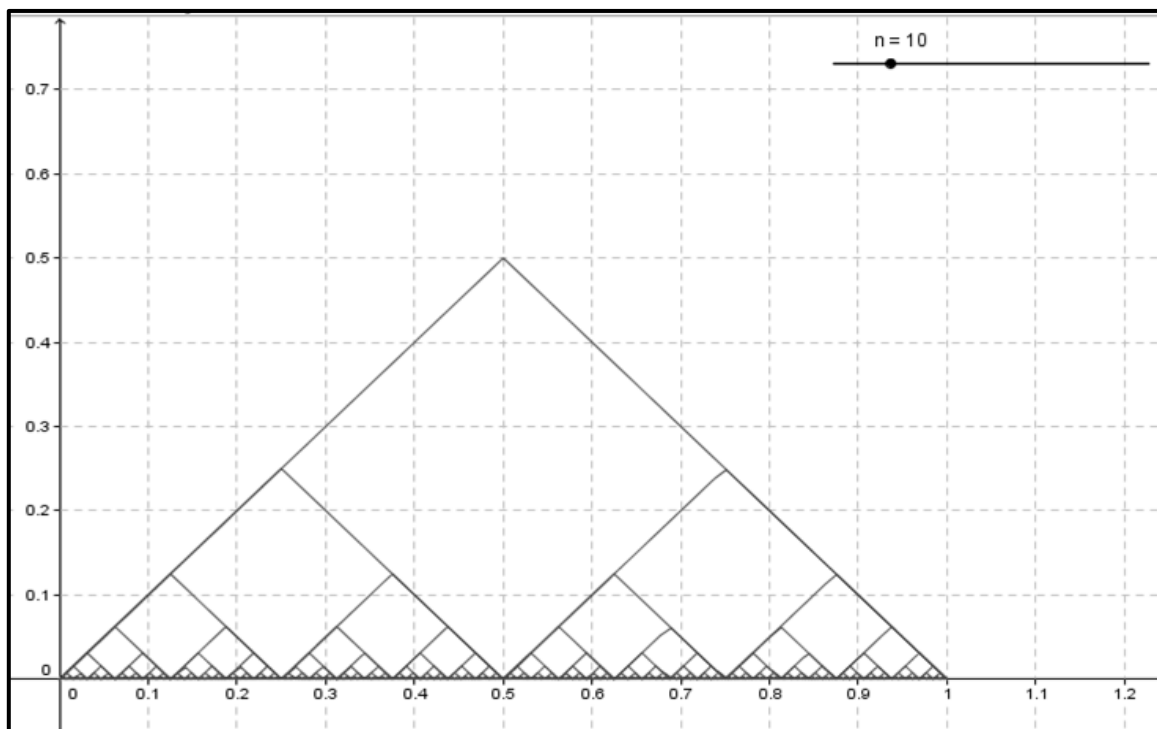
Assim, ao movimentar o controle deslizante, são exibidos os primeiros n termos da sequência de funções $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

¹⁴⁶ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

Para a construção da sequência de funções que resulta na série de funções, cujo limite é igual à função manjar branco b , devem ser digitados no campo de Entrada os seguintes comandos:
 Sequência[Se $[0 \leq x \leq 1, (f(2^{j-1} \cdot x)) / (2^{j-1})]$, $j, 1, n]$

Apresentando os parâmetros do comando digitado: o comando 'Se' é utilizado para determinar o domínio das funções que compõem a sequência estudada, ou seja, o intervalo $[0,1]$, a parte $(f(2^{j-1} \cdot x)) / (2^{j-1})$ representa a seguinte função $f_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela sentença $f_j(x) = \frac{1}{2^{j-1}} f(2^{j-1} \cdot x)$, sendo que f é a função real $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$. Para implementar a função $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ é necessário digitar os seguintes comandos no campo de Entrada: $\text{abs}(x - \text{round}(x))$. Repare que o comando que produz a sequência foi escrito em função de j , pois essa variável é escolhida para o desenvolvimento do comando 'Sequência'. O algarismo 1 é o valor mínimo da sequência e o valor máximo é o n , que é o controle deslizante, criado anteriormente. Na Figura 37, estão representados os 10 primeiros termos da sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Figura 37 – Os dez primeiros termos da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

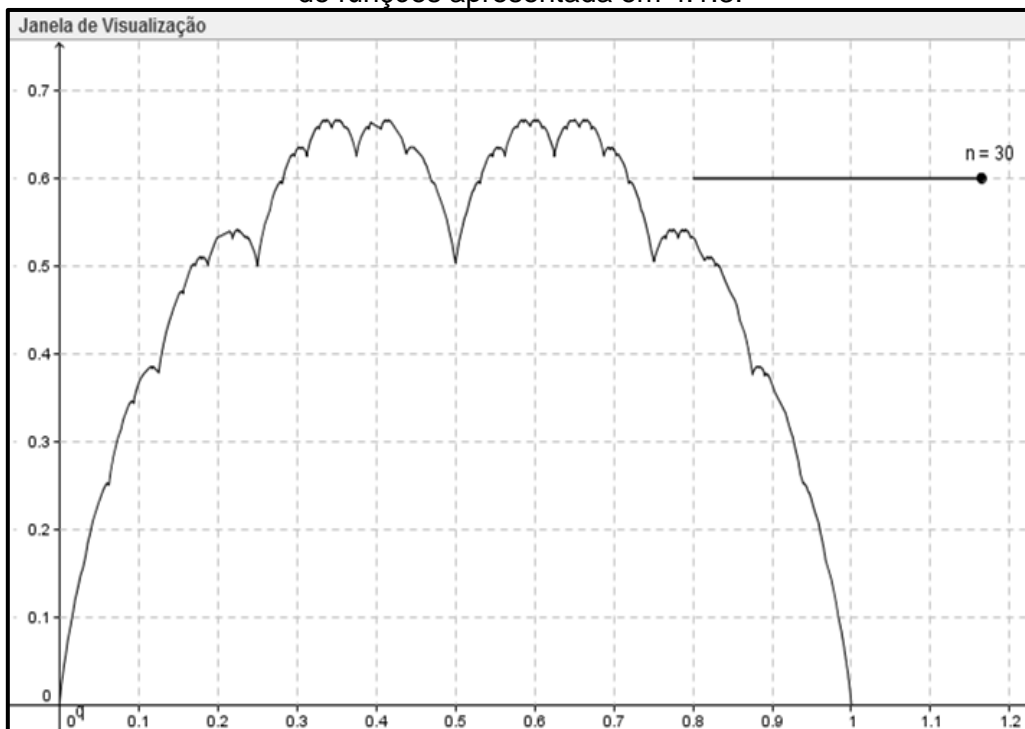


Fonte: Elaboração nossa.

Após a execução das indicações anteriores, a sequência construída recebe o nome de 'lista1'. Uma lista para o GeoGebra é um conjunto de objetos criados pelo usuário ou pelo comando 'Sequência'. Nesse caso, a 'lista1' é uma lista com os n primeiros termos da sequência de funções. O *software* possui comandos que servem para ordenar, comparar, adicionar elementos e realizar operações aritméticas com os elementos pertencentes a uma lista, conforme apresentado em Hohenwarter e Hohenwarter (2009). Para a construção da aplicação que permite o estudo da representação gráfica da soma parcial da série de funções que define a função b é necessário utilizar o comando 'Soma[<lista>]', pois com ele é possível somar os elementos de uma lista. Com isso, basta digitar, no campo de Entrada, o seguinte: Soma[lista1].

Como resultado, na Janela de Visualização é exibida a soma parcial da série de funções, como na Figura 38. Nela está representada a soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$.

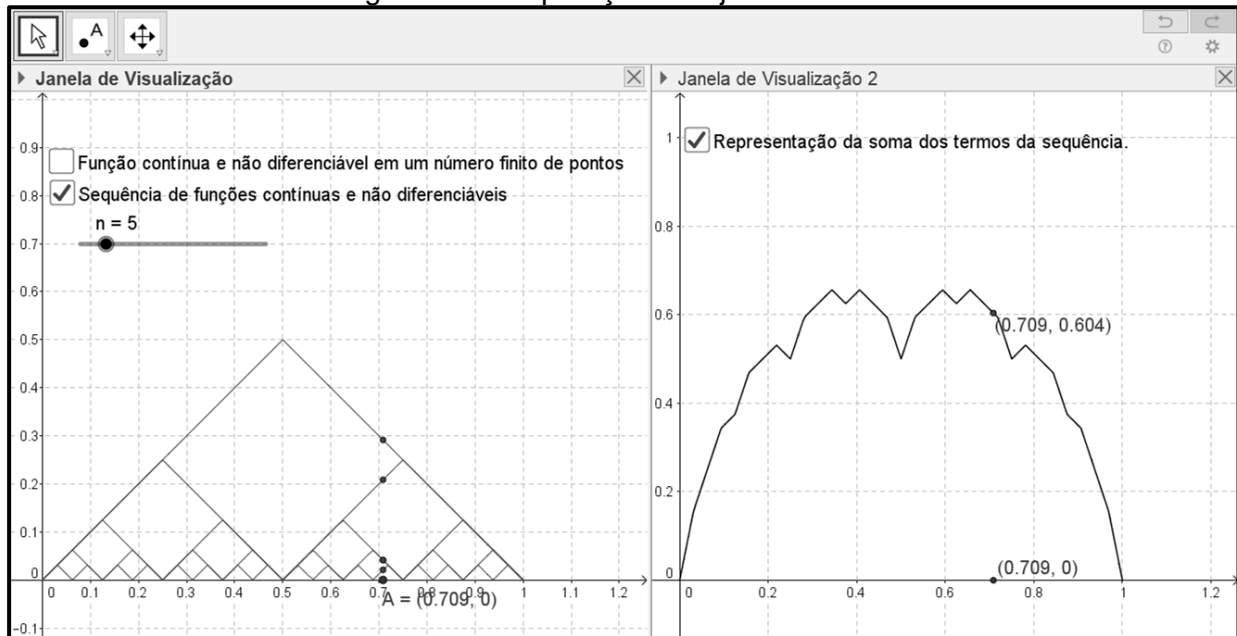
Figura 38 – A representação da soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$, sendo que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funções apresentada em 4.1.3.



Fonte: Elaboração nossa.

Após esses estudos sobre comandos do GeoGebra para o estudo de séries de funções é que apresentamos a construção da ‘ManjarBrancoG’¹⁴⁷, exposta na Figura 39.

Figura 39 – A aplicação ‘ManjarBrancoG’.



Fonte: Elaboração nossa.

A ‘ManjarBrancoG’ é composta por duas janelas de visualização do GeoGebra. Na Janela de Visualização está um controle deslizante, nomeado por n , com variação de 1 a 30, e duas caixas para exibir/esconder objetos. A primeira caixa, denominada por ‘Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos’, apresenta o n -ésimo termo da sequência de funções que têm limite igual à função manjar branco. A outra caixa, que denominamos ‘Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis’, exibe todos os n primeiros termos da sequência de funções.

A Janela de Visualização 2 possui uma caixa para exibir/esconder objetos, que nomeamos ‘Representação da soma dos termos da sequência de funções’.

Um elemento da ‘ManjarBrancoG’ que interfere nas duas Janelas de Visualização é o ponto A. Esse ponto pode ser movimentado apenas no eixo x e todos os outros pontos que serão plotados estão relacionados a esse ponto. Os

¹⁴⁷ Essa aplicação está disponível no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/tgqUPbMR>.

outros pontos, exibidos na Janela de Visualização, são os valores das funções f_i calculados na abscissa do ponto A.

Na Janela de Visualização 2 estão dois pontos: um no eixo x, que possui os mesmos valores de abscissa e ordenada do ponto A, e outro ponto que é igual à imagem da abscissa do ponto A pela função resultante pela soma parcial das n funções da sequência, sendo n o controle deslizante. Esses dois pontos foram colocados de modo a possibilitar que o usuário pudesse visualizar 'bicos' da função soma parcial.

Com base nos elementos apresentados nas componentes matemática, didática e material, produzimos um conjunto de atividades que pode ser visto no Quadro 18. Nesse conjunto é visado explorar a relação entre a continuidade e diferenciabilidade por meio do estudo da função manjar branco. Esse conjunto é composto por cinco atividades. Nas duas primeiras objetiva-se identificar pontos nos quais a função f_3 , da definição da função manjar branco, não seja diferenciável. Além disso, conjecturar o que acontece na medida em que o i aumenta, com a quantidade de pontos de f_i em que ela não seja diferenciável.

Nas atividades três e quatro o foco é o estudo da soma parcial da série cujo limite é igual à função manjar branco e os pontos nos quais essa soma parcial não seja diferenciável. Na última atividade mostra-se uma 'possível aparência' da função manjar branco feita pelo GeoGebra.

Quadro 18 – Atividades relacionadas à 'ManjarBrancoG'

Neste conjunto de atividades está mobilizado o estudo da função 'manjar branco', isto é, a função que o domínio é o intervalo fechado $[0,1]$ e assume valores no conjunto dos números reais. Essa função é definida como o limite da seguinte série de funções:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

sendo $f_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_i(x) = \frac{1}{2^{i-1}} f(2^{i-1} \cdot x)$, $i = 1, 2, \dots$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$. E a aplicação 'ManjarBrancoG'.

Propõe-se:

1) Selecionando-se apenas a opção 'Função contínua e não diferenciável em um número finito de pontos' e utilizando o *mouse*, faça o seguinte:

a) Mova o controle deslizante n para 3, observe o gráfico e responda: para quais valores do domínio a função f_3 não é diferenciável?

(Resposta esperada: 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875)

b) Movimente o controle deslizante para outros valores e conjecture o que acontece com a quantidade de valores do domínio de f_i , para qualquer i , para os quais a f_i não seja diferenciável?

(Resposta esperada: A quantidade de valores nos a função f_i aumenta à medida que n aumenta).

2) Selecionando-se apenas a opção 'Sequência de funções contínuas e não diferenciáveis', serão exibidos, na Janela de Visualização, n funções que são contínuas e não diferenciáveis. Movimente o ponto A e perceba que aparece um conjunto de pontos sobre os gráficos das f_i que têm a mesma abscissa de A.

a) Movimente o controle deslizante para o valor $n = 4$ e posicione o ponto A em $x = 0,5$. Analise o comportamento das f_i , $i = 1, 2, 3, 4$ quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: As funções f_i para $i = 1,2,3,4$ não são diferenciáveis em $x = 0,5$.)

b) Repita o processo do item anterior, porém, alterando o ponto A para $x = 0,625$. Analise o comportamento das f_i , $i = 1, 2, 3, 4$ quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis em $x = 0,625$ e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)

c) Repita o processo do item a), porém, alterando o ponto A para $x = 0,875$. E analise o comportamento das f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, quanto à diferenciabilidade nesse ponto.

(Resposta esperada: Existem duas funções que são diferenciáveis em $x = 0,875$ e outras duas que não são diferenciáveis nesse ponto.)

d) Conjecture o seguinte: se calcularmos $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, podemos afirmar que a função resultante será diferenciável em $x = 0,5$? E em $x = 0,625$? E em $x = 0,875$?

(Resposta pessoal)

3) Selecione a opção 'Representação da soma dos termos da sequência de funções' e observe o gráfico da função que surge na Janela de Visualização 2. Nessa Janela tem um ponto que não permite que seja movimentado, porém, ele é dependente do ponto A da Janela de Visualização. Responda as seguintes questões:

a) A função que é representada na Janela de Visualização 2 é diferenciável em $x = 0,5$?

(Resposta esperada: Não é diferenciável.)

b) E em $x = 0,625$?

(Resposta esperada: É diferenciável.)

c) E em $x = 0,875$?

(Resposta esperada: É diferenciável.)

4) Com todas as opções disponíveis selecionadas, observe todas as representações que aparecem nas duas Janelas.

a) Preencha a tabela de acordo com o que é observado.

Valor de "n"	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização	Quantidades de "bicos" que aparecem na representação gráfica da função, apresentada na Janela de Visualização 2
1	(Resposta esperada – 1)	(Resposta esperada – 1)
2	(Resposta esperada – 3)	(Resposta esperada – 2)
3	(Resposta esperada – 7)	(Resposta esperada – 5)
4	(Resposta esperada – 15)	(Resposta esperada – 11)

b) Se fizemos n tender a infinito, conjecture o que acontece com a quantidade de valores nos quais a função, representada na Janela de Visualização 2, não seja diferenciável?

(Resposta esperada: A quantidade de valores nos quais a função não é diferenciável tende ao infinito.)

5) Movimente o controle deslizante para $n = 30$ e espere um pouco. Essa é a representação máxima que o *software* suporta da sequência de funções cujo limite é uma função contínua e não diferenciável. O *software* tem uma restrição, ou seja, fica muito instável para essa quantidade de termos e não conseguimos utilizar a ferramenta zoom para observar com detalhes essa representação gráfica da função.

Fonte: Elaboração nossa.

Posteriormente, dependendo do nível de profundidade desejado, pode ser apresentada a demonstração formal da continuidade e não diferenciabilidade da função manjar branco.

Nesta tese nos propomos a realizar essas demonstrações, como a seguir.

1) Que a função manjar branco b é contínua.

$$b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

Sendo $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ e $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$.

Considere o fato que se uma função h satisfizer $|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ então a função h é contínua. Esse fato ocorre com a função f , pois sejam x e $y \in \mathbb{R}$ arbitrários, como $|f(x) - f(y)| = |d(x, \mathbb{Z}) - d(y, \mathbb{Z})| \leq |d(x, z) - d(y, z)|$ pela maneira como f é definida, é possível afirmar isso para qualquer z real e como d é uma norma de \mathbb{R} , temos que é válida a seguinte propriedade $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y) = |x - y|$. Logo, é possível concluir que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Logo f é contínua.

Então considere que $f_i = f \circ g_i$, sendo que $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(x) = 2^{i-1} \cdot x$. Como g_i e f são funções contínuas, então f_i é uma função contínua para $\forall i \in \mathbb{N}$.

Outro fato é que a série numérica $\left(\sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ é convergente. Como

$|f_i(x)| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1}$ para $\forall i \in \mathbb{N}$, é possível concluir que a série de funções $\left(\sum_{i=1}^n f_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$

converge uniformemente para a função b , e isso implica que a função b é contínua.

2) Que a função manjar branco b não é diferenciável.

Para mostrar que a função b não é diferenciável, será considerado o seguinte resultado:

Seja $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (u_n) e (v_n) , com $u_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $v_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, seqüências tais que $u_n \leq x \leq v_n$ (com $u_n < v_n$). Se h é uma função contínua e h' existe, então

$$\frac{h(v_n) - h(u_n)}{v_n - u_n} \rightarrow h'(x)$$

Considerando esse resultado para mostrar que uma função não é diferenciável, é necessário construir duas seqüências que contradizem esse resultado.

Seja x um número fixo, $b: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, a função manjar branco e, por absurdo, suponhamos que $b'(x)$ existe.

Seja $D = \{i \cdot 2^{-m} \mid i, m \text{ inteiros}\} \cap [0,1]$ e para cada número $i \cdot 2^{-m}$, para m e i inteiros, $2^k (i \cdot 2^{-m}) = i \cdot 2^{k-m}$ e $i \cdot 2^{k-m} \in \mathbb{Z}$ para todo $k \geq m$. Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por $f(x) = d(x, \mathbb{Z})$ e p um inteiro então $f(p) = 0$.

Seja u_m, v_m em D , sendo que $u_m = (i-1) \cdot 2^{-m}$, $v_m = i \cdot 2^{-m}$ e i é um inteiro que garanta a seguinte relação $u_m \leq x < v_m$. Nesse caso, $v_m - u_m = 2^{-m}$ e $v_m - u_m \rightarrow 0$.

É fato que a soma parcial da série é dada por

$$b_m(u_k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k-1}} \cdot f_k(u_k)$$

Se $x \in [2^k u_m, 2^k v_m]$ então $x \in \left[\frac{i-1}{2^{k-m}}, \frac{i}{2^{k-m}} \right]$, para $0 \leq k < m$

$$\frac{f_m(v_m) - f_m(u_m)}{v_m - u_m} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{f(2^k \cdot v_m) - f(2^k \cdot u_m)}{v_m - u_m} = \frac{\pm 2^{k-m}}{2^{k-m}} = \pm 1$$

Por essa razão,

$$b'(x) = \frac{b(v_n) - b(u_n)}{v_n - u_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \pm 1$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty} \pm 1$ é divergente. Esse fato contradiz a suposição que $b'(x)$ existe.

Desde que $x \in [0,1]$ é arbitrário, é possível concluir que a função b não é diferenciável em nenhum ponto do domínio.

4.1.4. O conceito de solução de uma equação diferencial

As atividades que constam nesta subseção foram elaboradas para o ensino do conceito de solução de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem.

Na distinção das componentes, evidenciamos que a componente matemática das atividades desenvolvidas é o conceito de solução de uma equação diferencial.

Ou seja: chama-se solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ uma função $y = y(x)$

tal que $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$.

A componente didática está embasada na noção de retidão local, pois levamos em conta o que Tall sugere para o ensino do conceito da solução de uma equação diferencial. Ele trata como um problema inverso da diferenciação “(não, isso não é integração!). O problema é o seguinte – se eu conheço a derivada de uma função em qualquer ponto, como posso construir o gráfico [de uma outra função] que tem essa função como função derivada?”¹⁴⁸ (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

Isto é, o pesquisador inglês diz que a conceituação de solução de uma equação diferencial

[...] pode ser realizada intuitivamente com pouco conhecimento da teoria das equações diferenciais. No entanto, ela já carrega em si sementes de ideias poderosas relacionadas a teoremas de existência (por exemplo, aquele no qual uma equação diferencial de primeira ordem terá uma única solução em cada ponto), e seguindo a mudança de direção é possível construir uma curva solução global. Por considerar exemplos selecionados, é possível observar de maneira ampla o que acontece com todo o conjunto de curvas solução e ver o seu comportamento. Dessa forma, uma interface intuitiva pode fornecer organizadores prévios para teoria formal, especialmente para aqueles indivíduos que, naturalmente, constroem imagens visuais¹⁴⁹ (TALL, 2001, p. 212, tradução nossa).

¹⁴⁸ [...] (No, this is not integration!) The problem is this — if I know the gradient of a function at any point, how can I build up the graph that has that gradient?

¹⁴⁹ [...] can be performed intuitively with little knowledge of the theory of differential equations. Yet it already carries in it the seeds of powerful ideas about possible existence theorems (that a typical first order differential equation will have a unique solution through each point), and following the changing direction will build up a global solution curve. By considering selected examples, it is possible to look at the wider view of what happens to a whole range of solution curves and to see their behaviour. In this way, an intuitive interface can provide advance organizers for formal theory, especially to those individuals who naturally build on visual imagery.

E atribui um significado corporificado para o esboço de uma solução de uma equação diferencial:

Se eu apontar meu dedo em um ponto (x, y) qualquer do plano, então eu posso calcular a inclinação da reta tangente à curva solução naquele ponto como $m = F(x, y)$ e traçar um segmento de reta pequeno com inclinação igual a m através do ponto (x, y) ¹⁵⁰ (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

O *software* desenvolvido para construir uma solução gráfica de uma equação diferencial de 1ª ordem foi apresentado em Blokland, Giessen, Tall (2000 apud TALL, 2001). Foi a partir dele que elaboramos um instrumento da componente material.

A componente material é constituída de uma ferramenta ('EquaçãoDiferencial') e uma aplicação do *software* GeoGebra ('CampoDeDireçõesG').

A ferramenta 'EquaçãoDiferencial' vai possibilitar a construção de um esboço de uma curva que é uma solução de uma equação diferencial. Esse esboço toma por base o significado corporificado, explorado por Tall, da noção de solução de uma equação diferencial. O esboço será traçado com o auxílio de segmentos construídos a partir de dois dados: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e o ponto P (fixado e interior ao domínio de f). O segmento construído tem P como ponto médio e $f(P)$ como inclinação.

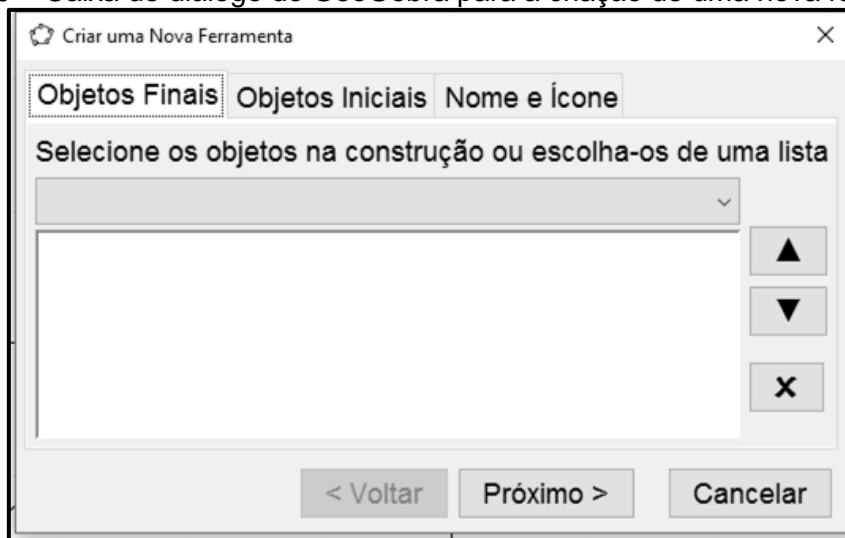
A seguir detalhamos tanto o processo de criação de uma ferramenta pelo próprio usuário no GeoGebra, como o da ferramenta específica 'EquaçãoDiferencial'.

A criação de uma ferramenta pelo próprio usuário é feita utilizando a opção 'Criar uma nova ferramenta', disponível no *menu* 'Ferramentas' do GeoGebra. Para isso é necessário criar os objetos que a nova ferramenta pretendida construa.

Em seguida, ao clicar na opção 'Criar uma nova ferramenta', é aberta uma caixa de diálogo com três abas que é exibida na Figura 40.

¹⁵⁰ If I point my finger at any point (x, y) in the plane, then I can calculate the gradient of the solution curve at that point as $m = F(x, y)$ and draw a short line segment of gradient m through the point (x, y) .

Figura 40 – Caixa de diálogo do GeoGebra para a criação de uma nova ferramenta.



Fonte: Elaboração nossa.

Na primeira aba, 'Objetos Finais', selecionam-se os objetos que serão construídos com a ferramenta. Na aba 'Objetos iniciais' é necessário selecionar os objetos que serão utilizados para a criação do objeto definido na aba 'Objetos Finais'. Na aba, 'Nome e ícone', é possível definir o nome, o ícone da nova e o texto de ajuda da ferramenta a ser criada.

Para a construção da ferramenta 'EquaçãoDiferencial' é necessário considerar uma equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ e um ponto P , referidos anteriormente.

Para tal é necessário construir o segmento que tem P como ponto médio e $f(P)$ como inclinação.

Apresentamos, a seguir, um roteiro estruturado em oito passos que apresenta a construção desse segmento e a produção da ferramenta 'EquaçãoDiferencial':

Passo 1. Digitar no campo de Entrada, a sentença de uma equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$;

Passo 2. Na Janela de Visualização, construir um ponto, que a título de exemplificar a construção da ferramenta é nomeado por P ;


Passo 3. Digitar no campo de Entrada $y - y(P) = f(x(P), y(P))(x - x(P))^{151}$. Com isso, é construída uma reta que passa por P, com inclinação igual a $f(P)$;

Passo 4. Construir um círculo com centro em P e raio igual a 0.5 (valor escolhido), com a ferramenta 'Círculo dados Centro e Raio'¹⁵²;

Passo 5. Com a ferramenta 'Interseção de Dois Objetos'¹⁵³, encontrar dois pontos que são interseção da reta, construída no Passo 3, com a circunferência, construída com o Passo 4.

Passo 6. A partir dos dois pontos construídos no Passo 5, selecionar a ferramenta 'Segmento'¹⁵⁴ e criar um segmento com extremos iguais aos pontos de interseção da reta com a circunferência.


Passo 7. Clicar no *menu* 'Ferramentas' e, depois, clique em 'Criar uma nova ferramenta'.


Passo 8. Abre-se uma caixa de diálogo com três abas: 'Objetos Finais', 'Objetos Iniciais' e 'Nome e Ícone' (Figura 40). Na aba 'Objetos Finais' deve ser selecionado o segmento construído no Passo 6. Em 'Objetos Iniciais' devem ser escolhidos a sentença da equação diferencial, definida no Passo 1, e o ponto P definido no Passo 2. Na aba 'Nome e Ícone' deve ser digitado 'EquaçãoDiferencial', nome escolhido da ferramenta; selecionada a imagem ¹⁵⁵; e o 'Texto de ajuda' é o seguinte: o usuário deve clicar na sentença da equação diferencial, na Janela de Álgebra, e em um ponto para construir o segmento.

Na Figura 41 é apresentada a ferramenta 'EquaçãoDiferencial'¹⁵⁶ e um conjunto de segmentos construído com ela. Esses segmentos possibilitam perceber qual será o esboço da curva solução da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ para a condição inicial (0, -0,5).

A escolha da condição inicial pode ser arbitrária para a função $F(x, y) = x^2 + y$ porque ela satisfaz as condições do teorema de existência de uma equação

¹⁵¹ No GeoGebra, para um ponto P o comando $x(P)$ dá como resposta a abscissa do ponto P e o comando $y(P)$ a ordenada do ponto P.

¹⁵² Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

¹⁵³ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

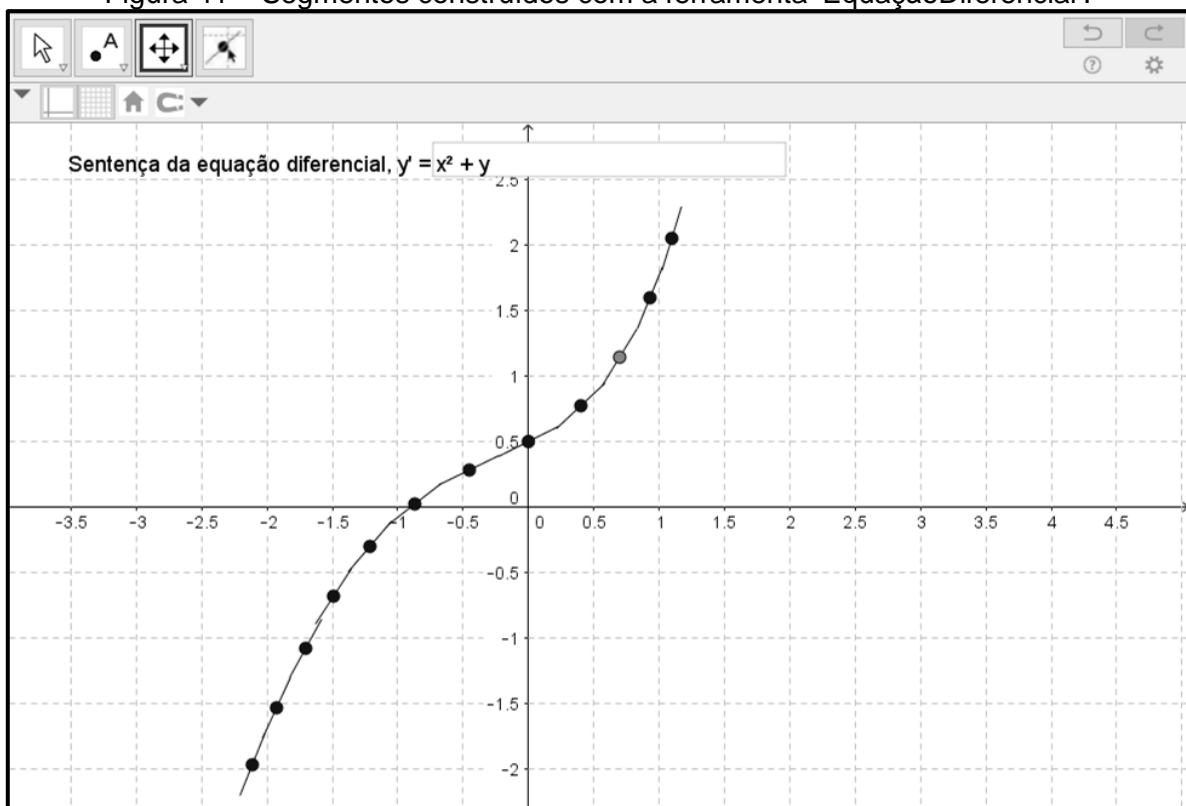
¹⁵⁴ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

¹⁵⁵ Esta imagem é a mesma utilizada por Tall no *software* desenvolvido por ele para abordar o conceito de equação diferencial e apresentado em Blokland, Giessen, Tall (2000 apud TALL, 2001).

¹⁵⁶ Disponibilizada no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/bKvVmbWS>.

diferencial em \mathbb{R}^2 (F e $\frac{dF}{dy}$ são contínuas). Nesse caso a construção do esboço da curva solução é realizada do seguinte modo: constrói-se um segmento m com a ferramenta EquaçãoDiferencial com os parâmetros F e a condição inicial $(0, -0,5)$. Na sequência constrói-se outro segmento s ‘próximo’ a m de forma que um dos extremos de s se conecte a um dos extremos de m . E repete-se esse processo para se obter outros segmentos e assim um esboço da curva solução, conforme Figura 41.

Figura 41 – Segmentos construídos com a ferramenta ‘EquaçãoDiferencial’.



Fonte: Elaboração nossa.

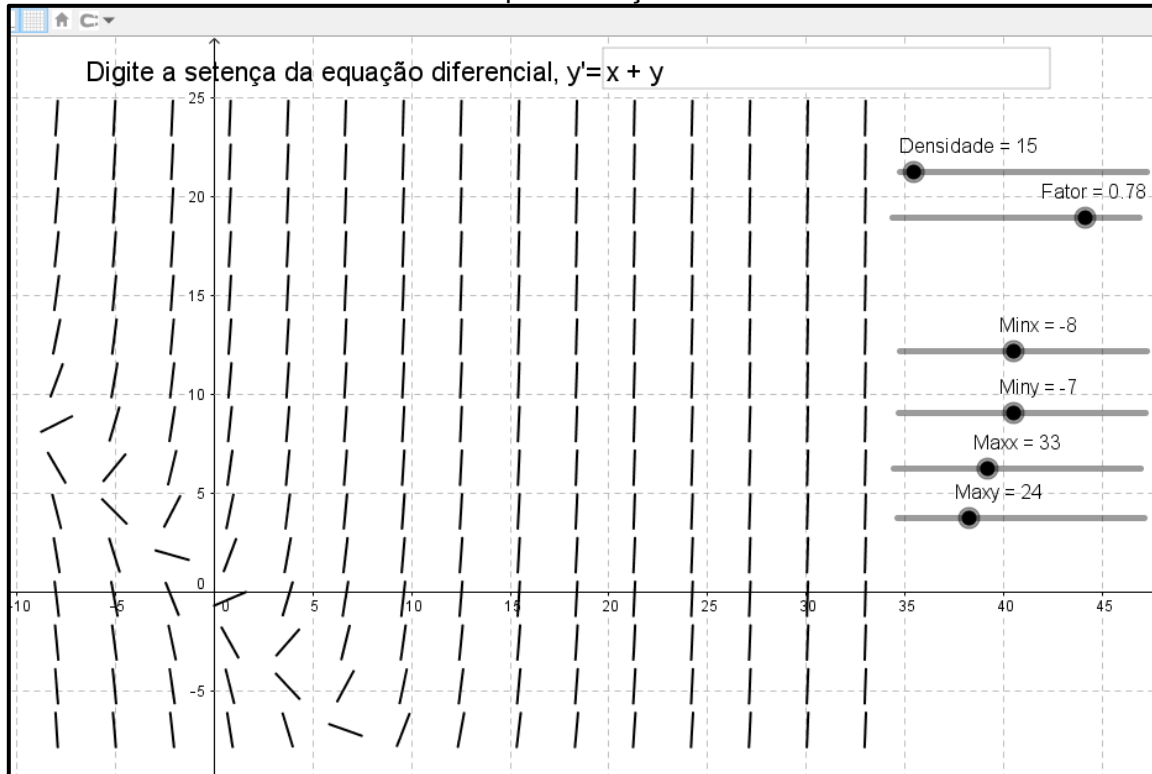
A segunda componente material, a aplicação no GeoGebra, denominada ‘CampoDeDireçõesG’¹⁵⁷, tem por alvo explorar o fato de que a solução de uma equação diferencial é formada por um conjunto de funções que satisfazem a equação.

A ‘CampoDeDireçõesG’ possibilita a construção do campo de direções associado a uma equação diferencial em um determinado subconjunto do plano

¹⁵⁷ Aplicação disponível no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/hb6WvdDk>.

cartesiano. Por exemplo, considere a equação diferencial $y' = x + y$. Na Figura 42 é esboçado o campo de direções associado a ela:

Figura 42 – Um campo de direções de uma equação diferencial construído com a ‘CampoDeDireçõesG’.



Fonte: Elaboração nossa.

A ‘CampoDeDireçõesG’ é desenvolvida a partir da seguinte variação do comando ‘CampoDeDireções’, preexistente no GeoGebra: CampoDeDireções[<f'(x, y)>, <Número n>, <Fator de Escala a>, <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y>].

Sendo que cada um dos parâmetros utilizados nessa variação do comando CampoDeDireções são: <f(x, y)> é a sentença da equação diferencial na forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; <Número n> indica a quantidade de segmentos que aparecerá em cada ‘linha’ do campo de direções, o padrão desse comando é 40 segmentos; <Fator de Escala a> é um número entre 0 e 1 que determina o tamanho que cada segmento do campo terá; <Min x>, <Min y>, <Max x>, <Max y> são os valores que determinam o subconjunto de $\mathbb{R}^2 \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Min } x \leq x \leq \text{Max } x \text{ e } \text{Min } y \leq y \leq \text{Max } y\}$, no qual o campo de direções será esboçado na Janela de Visualização.

Para construir a 'CampoDeDireçõesG', em primeiro lugar, devem ser construídos seis controles deslizantes, sendo que a cada um deles foram atribuídos os respectivos nomes, intervalos e incrementos:

Controle deslizante 1: Densidade – mínimo 10 e máximo 100 – incremento: 1;

Controle deslizante 2: Fator – mínimo 0 e máximo 1 – incremento: 0.01;

Controle deslizante 3: Minx – mínimo -100 e máximo 100 – incremento: 1;

Controle deslizante 4: Miny – mínimo -100 e máximo 100 – incremento: 1;

Controle deslizante 5: Maxy – mínimo Minx e máximo 100 – incremento: 1;

Controle deslizante 6: Maxx – mínimo Miny e máximo 100 – incremento: 1;

Em segundo lugar, deve ser digitada a sentença de uma função de duas variáveis, que será a sentença da equação diferencial que será atribuída ao campo de Entrada de texto por parte do usuário. Por exemplo, $f(x, y) = y - x^2$;

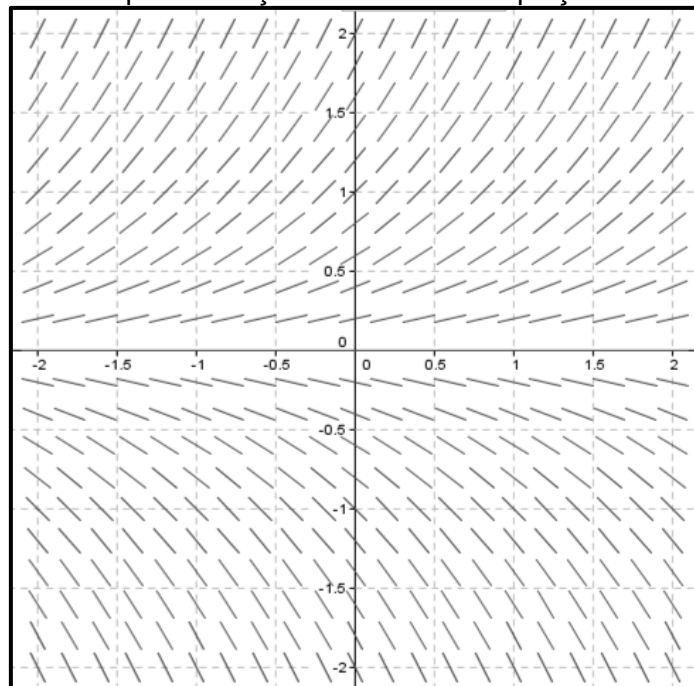
Criar um 'Campo de Entrada' e vincular a ele a sentença da função f . Na Legenda está indicado o seguinte: "Digite a equação associada à equação diferencial estudada".

Por fim, utilizar o comando 'CampoDeDireções' do GeoGebra digitando-se no campo de Entrada o seguinte: CampoDeDireções[f , Densidade, Fator, Minx, Miny, Maxx, Maxy], sendo que os parâmetros utilizados são: f é a sentença da função definida, e Densidade, Fator, Minx, Miny, Maxx e Maxy são os nomes dos controles deslizantes construídos anteriormente.

Com essa construção feita, a 'CampoDeDireçõesG' esboça o campo de direções, associado à equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ no seguinte subconjunto de \mathbb{R}^2 : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{Minx} \leq x \leq \text{Maxx} \text{ e } \text{Miny} \leq y \leq \text{Maxy}\}$, sendo que Minx, Miny, Maxy e Maxx são os valores dos controles deslizantes construídos.

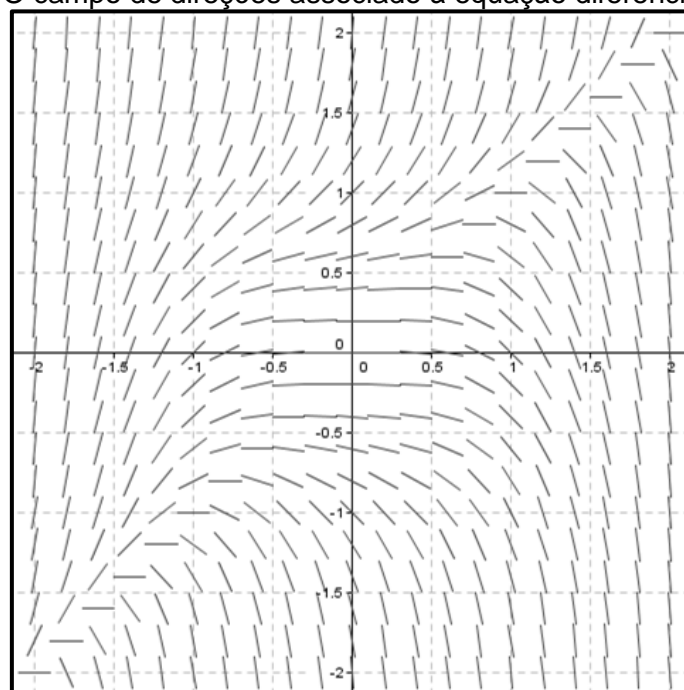
Nas figuras 43 e 44 são apresentados outros exemplos de campos de direção.

Figura 43 – O campo de direções associado à equação diferencial $y' = y$.



Fonte: Elaboração nossa.

Figura 44 – O campo de direções associado à equação diferencial $y' = y^3 - x^3$.



Fonte: Elaboração nossa.

A seguir, apresentamos um conjunto de atividades utilizando a ferramenta 'EquaçãoDiferencial' e uma sugestão para promover o estudo da solução de uma equação diferencial em que é utilizada 'CampoDeDireçõesG'.

O conjunto de atividades que utiliza a ferramenta 'Equação Diferencial'¹⁵⁸ é dividido em cinco atividades.

Na primeira e segunda atividades sugere-se o desenvolvimento de uma exploração do significado corporificado sugerido por Tall para a introdução do conceito de equação diferencial por meio da construção de segmentos que esboçam uma solução de três equações diferenciais. Nessas atividades foram escolhidas equações diferenciais cujas curvas soluções fossem curvas que, provavelmente, já tenham sido estudadas em algum momento da escolaridade, como uma reta (no item b); uma parábola (no item a); e uma hipérbole (no item c).

Na terceira atividade é objetivado mostrar que uma alteração na condição inicial de determinada equação diferencial não provoca uma alteração no tipo de curva esboçado em determinado tipo de equação diferencial.

Na quarta e quinta atividades foram propostas equações com o objetivo de levar os sujeitos a desenvolverem conceito imagem compatível com a informação de que uma alteração na condição inicial da equação diferencial não resulte apenas na translação da curva solução obtida nessa condição inicial antes da alteração.

Nessas atividades, o esboço da curva solução da equação diferencial muda de acordo com a condição inicial fixada. Para a equação $\frac{dy}{dx} = x + y$, que tem como solução geral a família de funções $\{y_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ dadas por $y_c(x) = C \cdot e^x - x - 1$, que para a condição inicial $(-1, 0)$ tem como solução a função $y_{-1}(x) = -x - 1$ e para a outra condição inicial (x_0, y_0) , em que não é satisfeita a relação $y_0 = -x_0 - 1$, a curva é uma função composta pela soma de uma função exponencial por uma função polinomial do 1º grau. Para a equação $\frac{dy}{dx} = 1 - y$, que tem como solução geral a família de funções $\{z_c\}_{c \in \mathbb{R}}$, dadas por $z_c(x) = 1 + C \cdot e^{-x}$, que para a condição inicial $(0, 1)$ tem como solução a função constante $z_0(x) = 1$. Para a outra condição inicial (x_0, y_0) , em que não é satisfeita a relação $y_0 = 1$, a curva é uma função composta pela soma de uma função exponencial por uma constante.

¹⁵⁸ Disponibilizada no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/bKvVmbWS>.

Quadro 19 – Atividades relacionadas à utilização da ferramenta ‘Equação Diferencial’.

1) Para as funções apresentadas em cada item, utilize a ferramenta ‘Equação Diferencial’ e construa dez segmentos, tomando (0, 1) o ponto inicial.

a) $\frac{dy}{dx} = x + 1$

b) $\frac{dy}{dx} = 2$

c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)^2}$

2) Observe o conjunto de segmentos obtidos em cada item da atividade 1) e responda: com qual curva esse conjunto de segmentos se assemelha?

a) **(Resposta esperada: uma parábola)** _____.

b) **(Resposta esperada: uma reta)** _____.

c) **(Resposta esperada: uma hipérbole)** _____.

3) Repita a construção feita na atividade 1), contudo altere o ponto inicial para (1, 3) e compare o tipo de curva que se assemelha ao conjunto dos segmentos resultantes com aquele da atividade 2. Explique suas respostas.

(Resposta esperada: As curvas são as mesmas que foram apresentadas na atividade 2) _____:

4) Considere a seguinte equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x + y$. Construa vinte segmentos como nas atividades anteriores, tomando como ponto inicial o definido em cada item. Observe o conjunto de segmentos obtidos em cada item e responda: com qual curva esse conjunto de segmentos se assemelha?

a) Condição inicial: (-1, 0) – curva: **(Resposta esperada: uma reta)** _____.

b) Condição inicial: (-1, 3) – curva: **(Resposta esperada: gráfico de uma função exponencial)** _____

c) Condição inicial: (-2, -3) – curva: **(Resposta esperada: gráfico de uma função exponencial)** _____

5) Considere a seguinte equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 - y$ e construa vinte segmentos, tomando como ponto inicial o definido em cada item. Observe o conjunto de

segmentos obtidos em cada item e responda: com qual curva esse conjunto de segmentos se assemelha?

a) Condição inicial: (0, 1) – curva: **(Resposta esperada: uma reta)** _____.

b) Condição inicial: (0, 3) – curva: **(Resposta esperada: gráfico de uma função exponencial)** _____

c) Condição inicial: (-2, -3) – curva: **(Resposta esperada: gráfico de uma função exponencial)** _____

Fonte: Elaboração nossa.

Após esse conjunto de atividades, apresentamos um estudo de resolução de uma equação diferencial utilizando a 'CampoDeDireçõesG'. Para isso, considera-se a equação diferencial:

$$5 \cdot \frac{dy}{dx} - y = 49 \quad (*)$$

A forma normal da equação diferencial é dada pela função real f de duas variáveis, dada pela sentença:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\text{Sendo que } f(x, y) = 9,8 - \frac{y}{5}.$$

Independente de não ser conhecida a curva solução da equação diferencial em um primeiro momento, é possível tirar conclusões, tais como: suponha que o ponto (x_0, y_0) pertença à curva solução; então, o valor da derivada de y no ponto x_0 é igual a $9,8 - \frac{y_0}{5}$. Isso é equivalente a dizer que a inclinação da reta tangente à curva

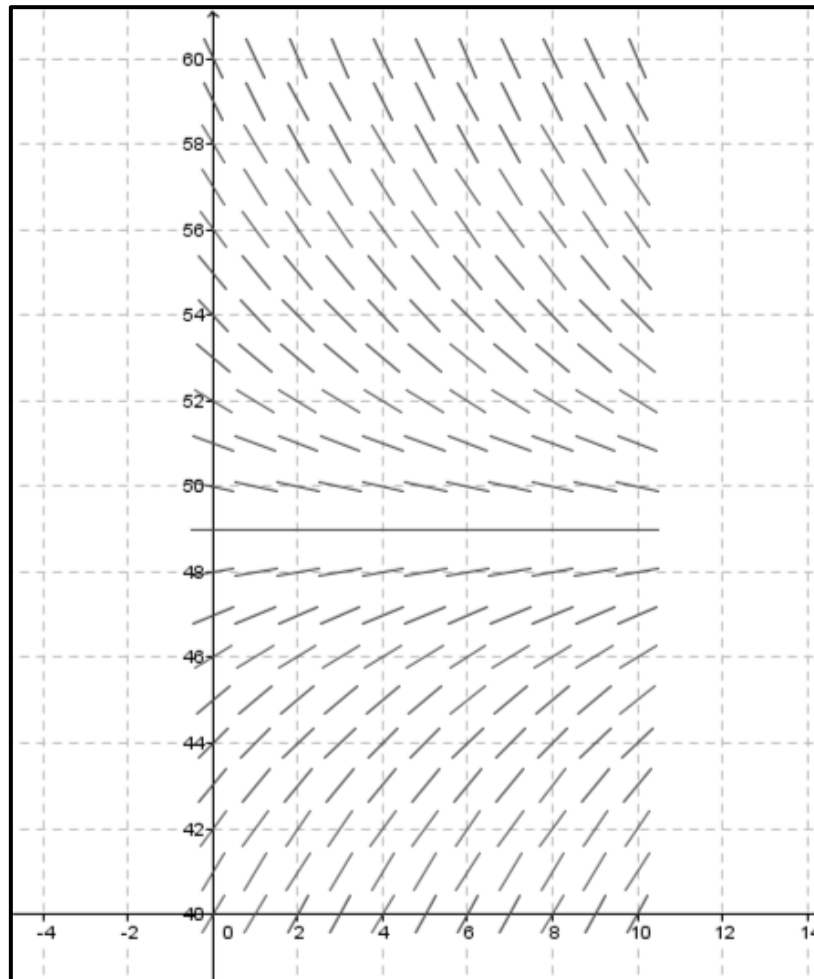
solução no ponto (x_0, y_0) é igual a $9,8 - \frac{y_0}{5}$. Com isso é possível inferir que, independentemente do valor de x_0 , o valor da inclinação no ponto (x, y_0) será o mesmo. Portanto, o campo de direções é composto por segmentos cujas inclinações são independentes da variação da abscissa dos pontos.

Estudando o sinal da função f é possível notar que $f(x, y) > 0$ para $y < 49$, e isso implica que o ângulo formado pelos segmentos que compõem o campo de

direções e o eixo x tem medida maior que 0 rd e menor que $\frac{\pi}{2}$ rd. Analogamente, para $y > 49$, o sinal de f é negativo e a medida desse ângulo tem medida maior que $\frac{\pi}{2}$ rd e menor que π rd. E é nulo para $y = 49$, logo os segmentos de reta que compõem o campo de direções serão paralelos ao eixo x .

Com auxílio da 'CampoDeDireçõesG', na Figura 45, é esboçado o campo de direções associado à equação diferencial (*) no conjunto : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 10 \text{ e } 40 \leq y \leq 60\}$. Com isso, é possível confirmar as inferências feitas a partir da análise da função f do segundo membro da equação diferencial.

Figura 45 – O campo de direções associados à equação diferencial $y' = 9,8 - \frac{y}{5}$.



Fonte: Elaboração nossa.

Observando o esboço do campo de direções, no valor para $y = 49$, verifica-se que o conjunto de segmentos se assemelha a uma reta paralela ao eixo x . A função $y(x) = 49$ é uma solução da equação diferencial, chamada de solução de equilíbrio, pois não apresenta variação. Além disso, é possível notar que todas as outras soluções dessa equação diferencial parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando x tende a infinito.

A continuidade desse estudo corporificado é o estudo analítico de se resolver uma equação diferencial linear de 1ª ordem.

A solução geral da equação considerada é a seguinte:

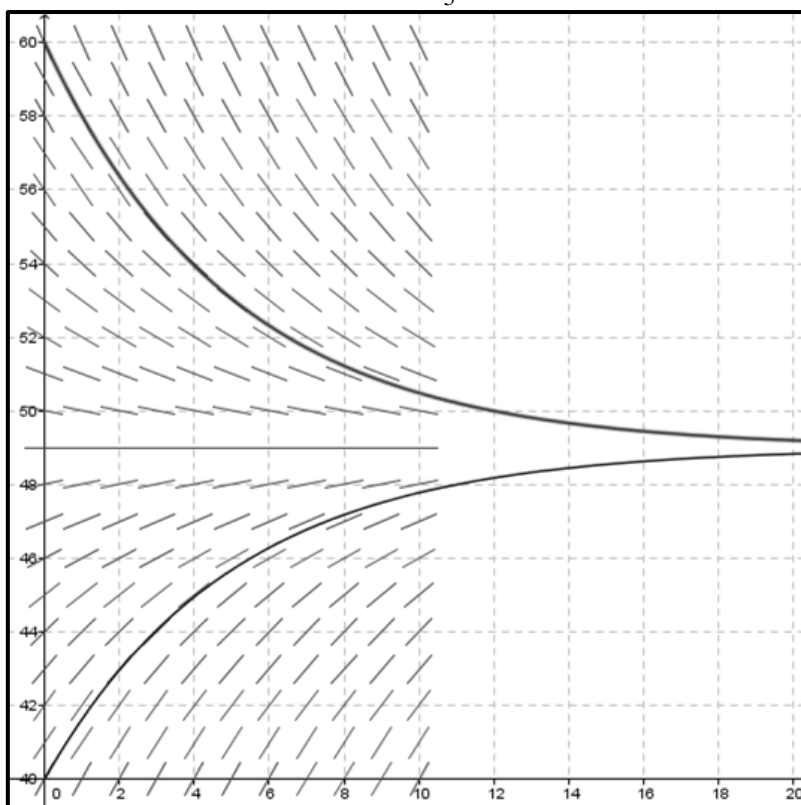
$$y(x) = 49 + k \cdot e^{-\frac{1}{5}x}, \text{ sendo que } k \in \mathbb{R}.$$

Definindo duas condições iniciais, esboçam-se duas curvas soluções da equação diferencial, as quais, conforme a Figura 46, demonstram a tendência ao equilíbrio quando x tende a infinito. Essas curvas soluções da equação são:

$$y_1(x) = 49 - 9 \cdot e^{-\frac{1}{5}x} \text{ e } y_2(x) = 49 + 11 \cdot e^{-\frac{1}{5}x}.$$

Figura 46 – O campo de direções e duas soluções particulares da equação diferencial

$$y' = 9,8 - \frac{y}{5}$$



Fonte: Elaboração nossa.

A 'CampoDeDireçõesG' constrói o campo de direções associado a uma equação diferencial em um conjunto do plano cartesiano com vistas a auxiliar o desenvolvimento de uma abordagem gráfica da solução para esse tipo de equação e complementar a abordagem algébrica, na qual esse conceito tem sido, comumente, apresentado. Além do mais, a abordagem gráfica auxilia o sujeito a interpretar possíveis relações existentes entre as equações diferenciais e as suas curvas soluções.

4.1.5. O conceito de continuidade

A componente matemática das atividades de ensino para o conceito de continuidade é constituída pelas definições de continuidade e de continuidade uniforme. Nesse contexto matemático leva-se em conta o seguinte resultado: seja $I = [a, b]$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f é uma função contínua em I , então f é uniformemente contínua em I .

A componente didática constitui-se da noção de continuidade perceptiva. Essa noção, em um primeiro momento, “é baseada na ideia de traçar uma curva com um lápis em um lance sem tirar o lápis do papel”¹⁵⁹ (TALL, 2013a, p. 4, tradução nossa). Contudo, a utilização dessa noção corporificada no ensino merece atenção, pois, ao enunciá-la desse modo, é possível que contenha elementos que causem conflito à compreensão do conceito formal de continuidade, pois, por exemplo, a função contínua $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{1}{x}$, tem representação gráfica que não pode ser percorrida com lápis sem tirá-lo do papel.

No ensino, para o refinamento necessário da utilização da noção de continuidade perceptiva, pode-se munir do fato de que o conceito de continuidade seja local. Tall descreve esse refinamento quando diz que

[...] nós podemos imaginar nosso dedo deslocando-se ao longo dela [curva] por um curto período de tempo. Sentimos isso de várias maneiras: visualmente como nós olhamos ao longo da curva, de modo icônico como nós desenhamos a curva, ou traçando o percurso dela com o dedo, e mentalmente como nós imaginamos o gráfico sendo desenhado em nosso olho da mente¹⁶⁰ (TALL, 2013a, p. 4, tradução nossa, adaptado, grifo nosso).

Esse refinamento indica a necessidade de um contexto apropriado para que a utilização da noção de continuidade perceptiva possibilite o desenvolvimento de elementos da noção formal de continuidade. Nas ações descritas na citação é percebido que o traçado do gráfico da função f inicia-se em um ponto $(a, f(a))$ e termina em outro ponto $(a + \Delta a, f(a + \Delta a))$, e isso sugere o estudo de uma função

¹⁵⁹ [...] is based on the idea of drawing a curve with a pencil in a stroke of the hand without taking the pencil off the paper.

¹⁶⁰ [...] we can imagine our finger tracing along it over a short period of time. We sense this in several ways: visually as we look along the curve, enactively as we draw the curve, or trace along it with a finger, and mentally as we imagine the graph being drawn in our mind's eye.

contínua em um intervalo fechado $[a, a + \Delta a]$, o que implica que essa função é uniformemente contínua em $[a, a + \Delta a]$.

Isso motiva a inserção na componente didática dessas atividades, o que Tall chama a atenção explorando a propriedade de continuidade uniforme da função em um intervalo fechado quando se realiza o estudo do conceito de continuidade com a utilização do computador: Tall afirma que um gráfico é ‘naturalmente contínuo’, querendo dizer com isso que ao se manter a escala vertical do eixo y aumenta-se e a escala horizontal no eixo x , e então a parte visível do gráfico se assemelha a um segmento de reta.

E também se inclui como componente didática outra recomendação de Tall, a de considerar possível introduzir a definição formal de continuidade, tendo por base alterações na escala dos eixos, do seguinte modo:

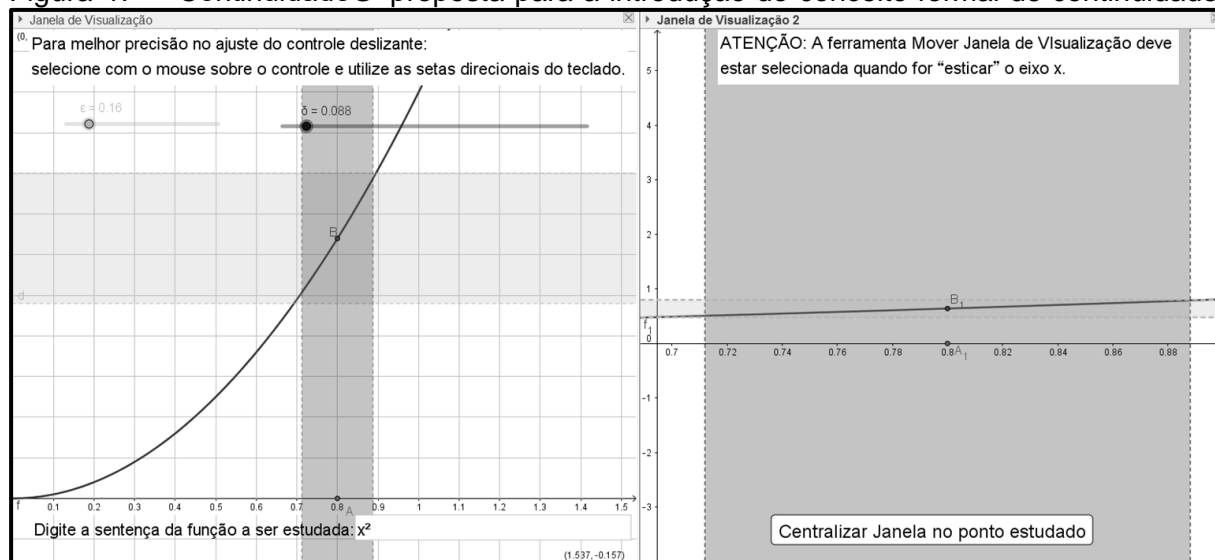
Imagine o desenho de um gráfico em uma tela de alta resolução, e suponha que o ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico seja central de uma faixa horizontal construída em torno dele, de largura 2ε , então para ‘manter o gráfico achatado’ (isto é, então que ele pertença a essa faixa horizontal) é necessário encontrar um valor $\delta > 0$ tal que se x situa-se entre $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ então $f(x)$ situa-se entre $f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_0) + \varepsilon$. Essa é precisamente a definição formal, em termos de ε e δ como segue: “Dada uma faixa de altura $\pm \varepsilon$, deve ser possível encontrar $\delta > 0$ para um dado x_0 de tal forma que, se x situa-se $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ então $f(x)$ se situará entre $f(x_0) - \varepsilon$ e $f(x_0) + \varepsilon$ ”¹⁶¹ (TALL, 2013a, p. 5, tradução nossa).

A terceira componente, a material, é constituída por uma aplicação elaborada com o Geogebra e apresentada na Figura 47, a qual denominamos ‘ContinuidadeG’¹⁶². Essa aplicação torna viável organizar atividades para o ensino de continuidade, cujas componentes matemática e didática sejam as indicadas neste item.

¹⁶¹ Imagine a picture of a graph on a high resolution screen, and suppose the middle point $(x_0, f(x_0))$ on the graph lies in a pixel of height $\pm \varepsilon$ in the picture, then to ‘pull the graph flat’ (that is so that it lies in the horizontal line of pixels) it is necessary to find a value $\delta > 0$ such that whenever x lies between $x_0 - \delta$ to $x_0 + \delta$ then $f(x)$ lies in the horizontal line of pixels between $f(x_0) - \varepsilon$ and $f(x_0) + \varepsilon$. This is precisely the formal epsilon-delta definition in the form: ‘Given a pixel height $\pm \varepsilon$, a $\delta > 0$ can be found so that, given x_0 , if x lies between $x_0 - \delta$ and $x_0 + \delta$, then $f(x)$ lies in the range $f(x_0) \pm \varepsilon$.

¹⁶² Aplicação disponível no endereço eletrônico: <https://ggbm.at/C3bdZaGc>.

Figura 47 – ‘ContinuidadeG’ proposta para a introdução do conceito formal de continuidade



Fonte: Elaboração nossa.

A seguir passamos a descrever a aplicação que denominamos ‘ContinuidadeG’

Ela é composta por duas Janelas de Visualização. A Janela de Visualização à esquerda, na Figura 46, contém uma função f e dois pontos A e B , sendo A ponto do eixo x e B do gráfico de f . O ponto A pode ser movimentado pelo usuário e o ponto B não. O ponto B é definido por: $(x(A), f(x(A)))$. Nessa Janela da esquerda existe um campo de entrada de texto associado à função f , ou seja, no qual o usuário pode digitar a sentença da função. E ainda ela conta com dois controles deslizantes, denominados ϵ e δ , valores que aparecem na definição de continuidade. A cada controle deslizante associa-se uma faixa. O controle deslizante ϵ está associado à faixa horizontal e o controle deslizante δ , a faixa vertical. Essas faixas são definidas no GeoGebra como o conjunto solução de uma desigualdade, cuja sentença é definida no campo de Entrada. Em nosso caso, a faixa associada ao controle deslizante ϵ é construída digitando-se os seguintes comandos no campo de Entrada: $y(B) - \epsilon < y < y(B) + \epsilon$; e a faixa vertical, associada ao controle deslizante δ , é definida por $x(A) - \delta < x < x(A) + \delta$.

A Janela de Visualização 2 possui uma função f_1 definida pela mesma sentença da função f ; dois pontos A_1 e B_1 que possuem as mesmas coordenadas do ponto A e B , mas não podem ser movimentados pelo usuário. Ao ponto B_1 e A_1 , respectivamente, estão associadas faixas de largura 2ϵ e 2δ , assemelhadas àquelas da Janela de Visualização. As mesmas inequações definem essas faixas.


Na Janela de Visualização 2 é possível alterar a ‘razão entre os eixos x e y’ de forma que seja possível simular a situação proposta por Tall. Para fazer isso é necessário selecionar a ferramenta ‘Mover Janela de Visualização’¹⁶³; o cursor do *mouse* vai se transformar em uma ‘mãozinha’, após isso posicione o cursor sobre eixo x, o eixo que vai ser ‘esticado’; quando isso for feito faz com que o cursor se transforme em uma seta; essa seta permite alterar a razão $x : y$; com o botão esquerdo do *mouse* pressionado movimente-o para a direita; assim será obtida, na Janela de Visualização 2, a representação gráfica da função f ‘esticada horizontalmente’.

Outro elemento criado na Janela de Visualização 2 é um botão nomeado por ‘Centralizar Janela no ponto estudado’, o qual é criado com a ferramenta ‘Botão’¹⁶⁴. Após clicar nessa ferramenta, é necessário digitar uma linha de programação: `CentralizarJanelaDeVisualização[B_1]`. Essa linha contém o comando ‘CentralizarJanelaDeVisualização’ que necessita que seja dado um ponto para que o comando centralize a Janela de Visualização naquele ponto. Nesse caso, o ponto escolhido foi o B_1 da Janela de Visualização 2.

A partir da explicitação dessas três componentes (matemática, didática e material) é que foi proposto o conjunto de atividades apresentado no Quadro 20.

Essas atividades têm por alvo o estudo da continuidade de funções reais a valores reais, ou seja, de tratamento de sua componente matemática. As funções foram escolhidas tendo por base as duas outras componentes. Didática (recomendações de Tall) e material (‘ContinuidadeG’) e o objetivo da atividade é fazer com que o usuário simule a situação proposta pela definição de continuidade: para um dado ε é possível encontrar um valor δ .

A primeira função escolhida na atividade é uma função afim. Com a atividade proposta pode ser conjecturada uma relação para entre ε e δ , nesse caso, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a}$. Contudo, as outras funções selecionadas na atividade foram escolhidas tendo por alvo apresentar outras funções para as quais a relação entre o ε e δ não sejam tão explícitas quanto aquela que é apresentada no item a). O importante em cada

¹⁶³ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

¹⁶⁴ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

atividade é perceber que dado um valor para ε sempre é possível encontrar um valor para δ , mesmo que em princípio não seja evidente a relação algébrica entre eles, para os quais a implicação da definição de continuidade se verifica.

Quadro 20 – Atividades relacionadas à utilização da ‘ContinuidadeG’

1) Em cada item constam uma função f_i , um ponto x_0 de seu domínio de definição, um valor de ε e de δ . Utilizando essas informações e a ‘ContinuidadeG’, observe o comportamento de cada função. Para tanto, movimente o controle deslizante δ de forma que valha a implicação: se x pertence ao intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então $f(x)$ deve pertencer ao intervalo $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Quando isso ocorrer, anote o valor de δ que satisfaz a relação. Utilize a Janela de Visualização 2 para confirmar se a relação foi estabelecida e use a ferramenta ‘Mover Janela de Visualização’¹⁶⁵ para esticar o eixo x e transformar a porção do gráfico assemelhada a uma linha reta.

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_1(x) = 2x - 1$

Valor de x_0	Valor de ε	Valor de δ
1	0,5	(Reposta esperada: 0,25)
1	0,1	(Reposta esperada: 0,05)
-1	0,3	(Reposta esperada: 0,15)
-1	0,15	(Reposta esperada: 0,075)

b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_2(x) = x^2$

Valor de x_0	Valor de ε	Valor de δ
1	0,35	(Reposta esperada: 0,16)
1	0,1	(Reposta esperada: 0,048)
-2	0,1	(Reposta esperada: 0,027)
-2	0,5	(Reposta esperada: 0,124)

¹⁶⁵ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_3(x) = \frac{1}{x}$

Valor de x_0	Valor de ε	Valor de δ
2	0,2	(Reposta esperada: 0,58)
2	0,4	(Reposta esperada: 0,89)
-0,5	0,5	(Reposta esperada: 0,1)
-0,5	0,1	(Reposta esperada: 0,025)

d) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sendo que $f_4(x) = \sqrt{x}$

Valor de x_0	Valor de ε	Valor de δ
0,5	0,1	(Reposta esperada: 0,13)
0,5	0,3	(Reposta esperada: 0,325)
4	0,2	(Reposta esperada: 0,725)
4	0,1	(Reposta esperada: 0,375)

Fonte: Elaboração nossa.

4.1.6. O conceito de integral

Iniciamos o estudo deste item indicando as três componentes das atividades que serão apresentadas.

A componente matemática inclui os conceitos de integral definida, indefinida e dois resultados relativos à integral definida:

a) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua em um ponto $c \in [a, b]$, então

a função $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é diferenciável em c

e $F'(c) = f(c)$.

b) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$,

então F é diferenciável em (a, b) e $F' = f$.

A componente didática para as atividades sobre o ensino de integral inclui a noção, apresentada por Tall, de raiz cognitiva associada à noção de área. Essa noção vai relacionar área e integral.

Assim, define-se uma função real $A = A(x)$ que associa a cada valor x_0 a área da região plana compreendida entre eixo x , o gráfico de uma função contínua definida em um intervalo $I = [a, b]$ e as retas $x = a$ e $x = x_0$ para o caso em que $f(x) \geq 0$, área essa obtida por acumulação de áreas de sub-regiões. $A(x)$ é denominada por área acumulada

Nossa intenção, no que segue, é fazer o estudante constatar que $A'(x) = f(x)$ e depois levá-lo a concluir que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

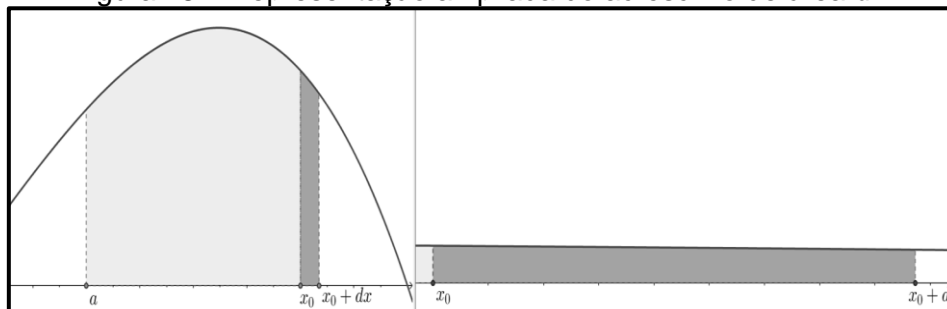
Segundo Tall, ao considerar a função área acumulada, é possível exemplificar ao estudante o motivo pelo qual a função A é uma das primitivas de f , quando f é contínua. Essa situação foi inspirada pela maneira como Leibniz (1646-1716), interpretou esse problema:

Leibniz originalmente usava o símbolo ainda mais econômico $A = \int ydx$ para a área, que ele havia previsto como a soma de retângulos cada um com altura y e comprimento dx . Ele considerou que, quando x é aumentado por uma quantidade dx , a área A é aumentada pela quantidade dA que pode ser interpretada como uma

área de uma faixa muito fina de largura dx e altura y ¹⁶⁶ (TALL, 2013a, p. 22, tradução nossa).

A seguir, apresentamos uma figura que expõe que há uma ‘boa aproximação’ de dA com a área de um retângulo de altura $y = f(x)$ e base dx

Figura 48 – Representação ampliada do acréscimo de área dA .



Fonte: Elaboração nossa.

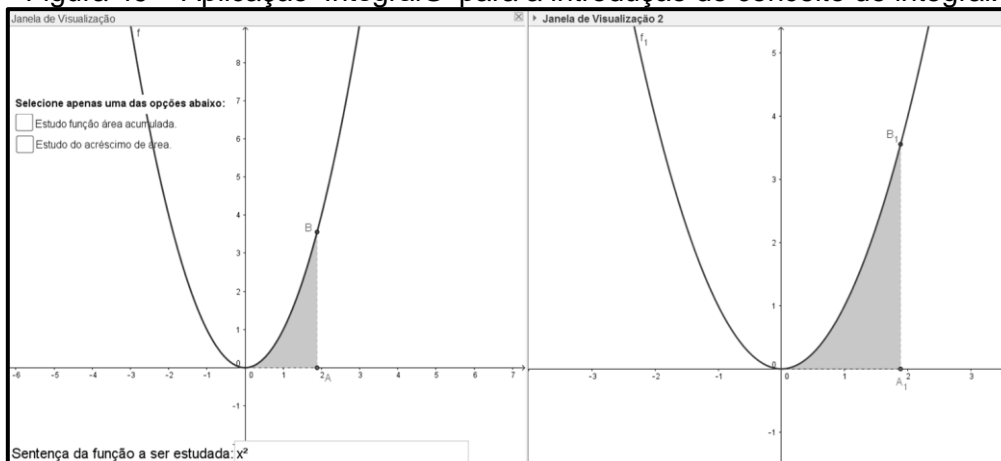
Essa representação gráfica de dA possibilita explorar visualmente o Teorema Fundamental do Cálculo, pois o estudante pode visualizar a igualdade $dA = f(x)dx$ e, assim, chegar à igualdade

$$\frac{dA}{dx} = f$$

Logo é possível concluir que $A' = f$.

A componente material inclui a aplicação do GeoGebra¹⁶⁷, que denominamos ‘IntegralG’.

Figura 49 – Aplicação ‘IntegralG’ para a introdução do conceito de integral.



Fonte: Elaboração nossa.

¹⁶⁶ Leibniz originally used the even more economical symbol $A = \int y dx$ for the area which he envisaged as the sum of strips height y , width dx . He considered that, when x is increased by a quantity dx , the area A is increased by a quantity dA which is the area of a very thin strip width dx , height y .

¹⁶⁷ Aplicação disponível no seguinte endereço eletrônico: <https://ggbm.at/PE9MNMJ5>.

A 'IntegralG' possui duas Janelas de Visualização. Na Janela de Visualização aparecem o gráfico de uma função f ; um campo de entrada de texto, no qual o usuário insere a sentença da função f ; dois pontos A e B, sendo que A está no eixo x e B no gráfico da função f ; a região R dos pontos do plano compreendida entre o eixo x , o gráfico de f , e as retas verticais $x = 0$ e $x = x(A)$ (abscissa do ponto A). Essa região é obtida no GeoGebra pelo comando 'Integral[f, 0, x(A)]'. Essa Janela também possui duas caixas de seleção que exibem e escondem elementos das duas Janelas de Visualização, caixas essas que serão descritas mais para frente.

Na Janela de Visualização 2 aparecem dois pontos, A_1 e B_1 , com as mesmas coordenadas dos pontos A e B, o gráfico da função f e a região R , cópias dos apresentados na Janela de Visualização.


Descrição de cada uma das caixas de seleção existente na 'IntegralG'.

A primeira caixa de seleção é nomeada por 'Estudo do acréscimo de área'. Quando essa caixa é selecionada na Janela de Visualização, podem ser vistos: um controle deslizante h ; os pontos $C = (x(A) + h, 0)$ e $D = (x(A) + h, f(x(A) + h))$ e uma porção de área da região compreendida entre eixo x , o gráfico da função f e as retas $x = x(A)$ e $x = x(C)$, definida pelo comando Integral[f, x(A), x(C)].

A Janela de Visualização 2 possui dois pontos C_1 e D_1 com as mesmas coordenadas dos pontos C e D, a mesma região do plano que corresponde à porção de área criada, e um botão nomeado por 'Centralizar Janela no acréscimo de área' que 'centraliza' no acréscimo de área o que é visualizado na Janela de Visualização 2.

Para a construção do botão 'Centralizar Janela no acréscimo de área' foi necessário criar um ponto auxiliar N , que não é exibido na versão final da aplicação. Esse ponto N possui as seguintes coordenadas: mesma abscissa que o ponto médio dos pontos A_1 e C_1 e ordenada igual à f calculada nessa abscissa. Para criar esse botão basta clicar na ferramenta 'Botão'¹⁶⁸ e digitar a linha de programação: CentralizarJanelaDeVisualização[N].

A segunda caixa de seleção é nomeada por 'Exibir função F'. Quando essa caixa é selecionada, aparece na Janela de Visualização um ponto

¹⁶⁸ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

$M = (x(A), \int_0^{x(A)} f(t)dt)$, criado no GeoGebra, digitando-se no campo de Entrada o seguinte: $(x(A), \text{Integral}[f, 0, x(A)])$.

A Janela de Visualização 2 contém um ponto M' , definido como o ponto M ; um controle deslizante, nomeado por j , associado à sequência dos seguintes pontos (x_i, y_i) com $i = 1, 2, \dots, 100$ e $x_i \in P = \{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$ uma partição do intervalo $[-j, j]$ em partes iguais e $y_i = \int_0^{x_i} f_1(t)dt$, sendo que o extremo superior x_i assume valores de

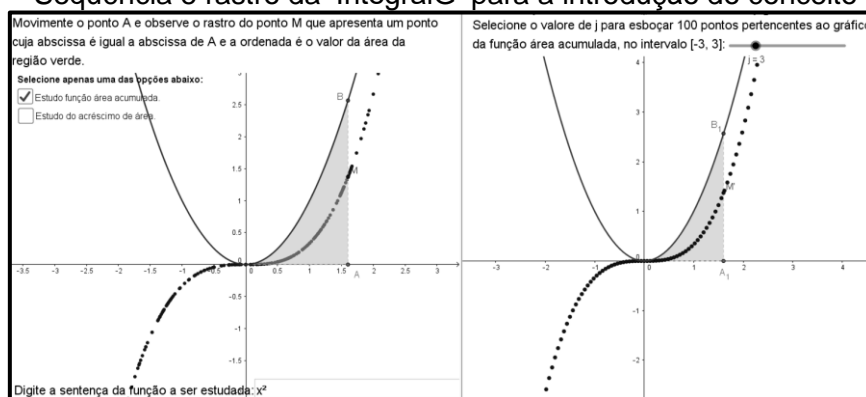
i entre 1 a 99. Os pontos dessa sequência pertencem ao gráfico da função $F(x) = \int_0^{x_i} f_1(t)dt$. Para construir essa sequência é necessário digitar no campo

Entrada: Sequência $(-j + (2*j*t)/100, \text{Integral}[f, 0, -j + (2*j*t)/100])$, $t, 0, 100$].

Essa sequência foi concebida porque a funcionalidade ‘Habilitar rastro’ tem uma restrição: qualquer movimentação, feita com a ferramenta ‘Mover Janela de Visualização’¹⁶⁹ em que o rastro foi esboçado, faz com que o rastro desapareça. Isso impede que seja feita uma inspeção do rastro produzido para a formulação de conjecturas sobre qual é a sentença da $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Por esse motivo, na

Janela de Visualização 2 foi criada a sequência de pontos descrita. Entendemos que essa sequência contorna a limitação da opção ‘Exibir rastro’, pois a sequência de pontos não desaparece quando a Janela de Visualização 2 é movimentada. Na Figura 50 são apresentados a sequência de pontos e o rastro do ponto M .

Figura 50 – Sequência e rastro da ‘IntegralG’ para a introdução do conceito de integral.



Fonte: Elaboração nossa.

¹⁶⁹ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: .

Mesmo indicando a restrição que a função rastro tem, entendemos que o seu uso pode favorecer o esboço do gráfico, pois ao se movimentar o ponto M pode-se observar o rastro desse ponto e assim procedendo esboçar uma parte do gráfico da função F . Esse ato de movimentar o ponto M para obter seu rastro configura-se como um conjunto de ações do mundo conceitual-corporificado (percepção de – e reflexão sobre – objetos).


As três componentes (material, matemática e didática) motivam três atividades apresentadas nos Quadros 21, 22 e 23.


No Quadro 21 é apresentado um estudo de uma função específica com o objetivo de indicar, graficamente e algebricamente, por meio da construção proposta no quadro, a relação $A'(x_0) = f(x_0)$, sendo A a função área acumulada da função f .

Quadro 21 – Estudo inicial para o desenvolvimento do conceito de integral

1) Nesta atividade, indicaremos uma relação entre uma função f contínua e a função área acumulada A . Para isso, considere a seguinte função real dada pela sentença $f(x) = x^2$. Efetue os seguintes passos descritos:

- Movimentar o ponto A até o 1 no eixo x;
- Posicionar o controle deslizante no valor $h = 0.05$;
- Na Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta ‘Ampliar’¹⁷⁰ e amplie a região do acréscimo de área (destacado na cor azul);
- Utilizando a Ferramenta ‘Mover Janela de Visualização’¹⁷¹, posicione o cursor sobre o eixo x do sistema de coordenada da Janela de Visualização 2;
- Com o cursor posicionado sobre o eixo x da Janela de Visualização 2, clique e segure o botão direito do *mouse* e arraste para a direita. Caso a região azul não esteja aparecendo na Janela de Visualização 2, clique no botão ‘Centralizar Janela no acréscimo estudado’. Continue esse processo até que a região destaca assemelhe-se a um retângulo.
- Caso a região azul esteja ocupando toda a Janela de Visualização 2, utilize a ferramenta ‘Reduzir’¹⁷² para posicionar a região no centro dessa Janela.

¹⁷⁰ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

¹⁷¹ Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

¹⁷² Essa ferramenta possui o seguinte ícone: 

A região azul é um acréscimo de área, a qual denominaremos por dA .

Note que quando foi feito o processo descrito anteriormente, na Janela de Visualização 2, foi possível verificar que uma aproximação do valor desse acréscimo é a área de um retângulo, sendo que a altura dele pode ser obtida pela imagem da função f pelo valor da abscissa do ponto A_1 , a qual denominaremos por a_1 , e a base pelo valor de dx escolhido.

Calculando a área desse retângulo: $dA = f(a_1) \cdot dx$

A última relação também pode ser interpretada assim: $\left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=a_1} = f(a_1)$.

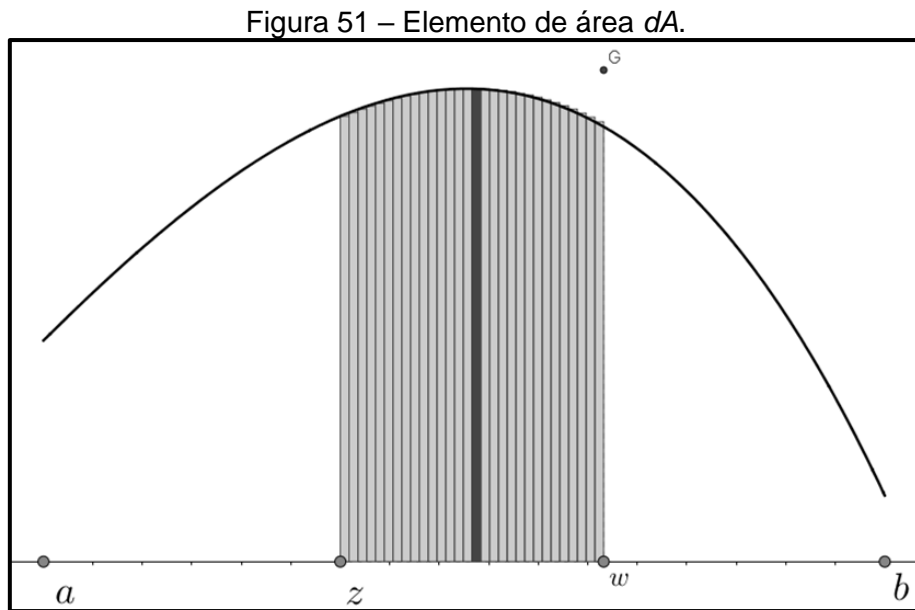
Fonte: Elaboração nossa.

No Quadro 22 são apresentadas atividades desenvolvidas com o intuito de generalizar percepções relacionadas à função área acumulada, conforme o primeiro estudo, para a definição da integral indefinida de uma função. Nesse contexto, a integral indefinida é a sentença da função área acumulada. E também com vistas a indicar a existência de correspondência entre a integral indefinida (primitiva) e a função f (integrand), pelo estudo da representação gráfica da função A . Essa correspondência só poderá ser evidenciada quando os métodos de integração forem apresentados. As funções selecionadas para as atividades, que visam a esboçar o gráfico de suas primitivas, foram aquelas usuais cujos gráficos são uma reta, uma parábola, uma senóide, etc.

A introdução da noção de integral por meio de sua identificação com a área de uma determinada região, como apresentada neste item, precisa ser acompanhada de cuidados, pois senão corre-se o risco de generalizar essa identificação para toda função. Essa preocupação pode ser contornada se no que segue se apresente a definição de integral por meio da soma de Riemann e só então se define a função: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. É esse o objetivo das atividades do Quadro 22.

Tall indica como justificar o motivo pelo qual a função F pode assumir valores negativos, com base em elementos gráficos. Essa justificativa encontra respaldo no fato de que o valor de uma Soma de Riemann geometricamente representa a soma das áreas de retângulos de base Δx e altura y equivalentes a cada elemento de área (dA).

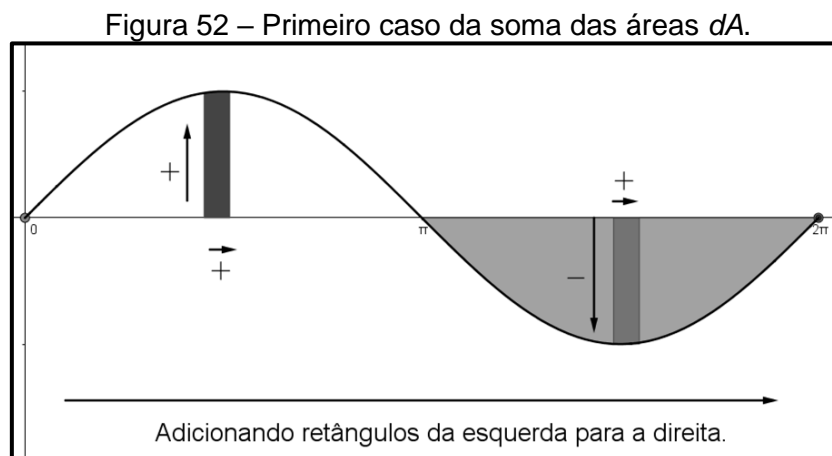
Na Figura 51 é destacado um elemento de área dA , no intervalo $[z, w]$, subdividido em 30 partes.



Fonte: Elaboração nossa.

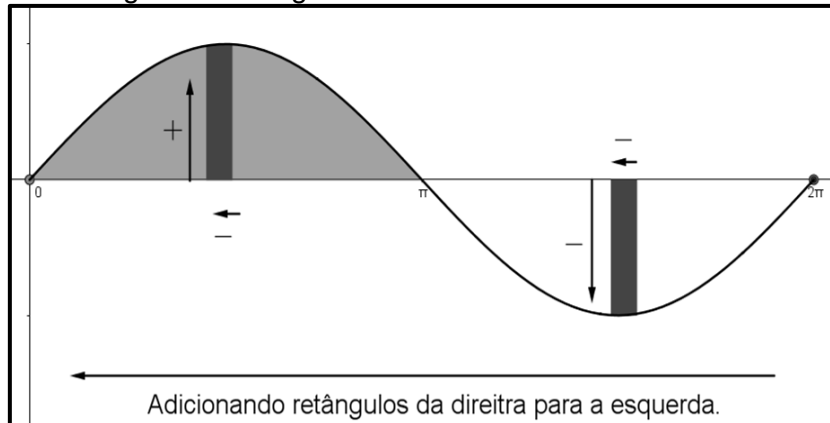
Os valores de Δx e de y podem ter o mesmo sinal ou sinais contrários. O sinal de y será negativo quando o gráfico da função estiver abaixo do eixo x . Outra situação é quando o valor de Δx é negativo, isso ocorre quando a Soma de Riemann é calculada de w para z (TALL, 2013b).

Nas Figuras 52 e 53 estão apresentadas as duas situações relacionadas aos sinais de cada elemento de área.



Fonte: Adaptado de Tall (2013b, p. 328).

Figura 53 – Segundo caso da soma das áreas dA .



Adicionando retângulos da direita para a esquerda.

Fonte: Adaptado de Tall (2013b, p. 328).

No Quadro 22 seguem as atividades que visam ao estudo da função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, objetivando o desenvolvimento do conceito de integral indefinida de uma função.

Quadro 22 – Atividades para o estudo da função $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) Com a 'IntergalG', selecione a opção *Exibir função F*. Digite no campo 'Sentença da função a ser estudada', as expressões de cada uma das funções indicadas no item dado. Movimente o ponto A na Janela de Visualização, observe o conjunto de pontos que apareceu na Janela de Visualização 2 e responda: Qual curva se assemelha a sequência de pontos formada pelo rastro do ponto A?

- a) $f_1(x) = 4$ curva: **(Resposta esperada: reta)** _____.
- b) $f_2(x) = 5$ curva: **(Resposta esperada: reta)** _____.
- c) $f_3(x) = x$ curva: **(Resposta esperada: parábola)** _____.
- d) $f_4(x) = x + 3$ curva: **(Resposta esperada: parábola)** _____.
- e) $f_5(x) = x^2$ curva: **Resposta esperada: gráfico de uma função polinomial do 3º grau)** _____.
- f) $f_6(x) = \cos(x)$ curva: **(Resposta esperada: senóide)** _____.
- g) $f_7(x) = e^x$ curva: **Resposta esperada: gráfico de uma função exponencial)** _____.

Fonte: Elaboração nossa.

Outro ponto a ser estudado no contexto da introdução da noção de integral é aquele relacionado à continuidade da função f para a existência da função

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt . \text{ Esse ponto é desenvolvido na terceira atividade, no Quadro 23.}$$

Nessa atividade foram selecionadas funções que não são contínuas e é sugerido o estudo do esboço da função F . É solicitado que seja analisado o esboço de cada função e perceba que, nos casos em que a função não é contínua, não existe a função F . De fato, aparece o esboço do gráfico de uma função com um bico, ou seja, uma função não diferenciável como a F pretendida.

Quadro 23 – Atividades para a verificação da hipótese de continuidade de f para a

definição de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) Com a aplicação produzida, primeiramente selecione a opção ‘Estudo da função F’. Digite no campo ‘Sentença da função a ser estudada’ as sentenças das funções listadas na coluna ‘Sentença da função’; movimente o ponto A na Janela de Visualização, observe o rastro do ponto M e o conjunto de pontos que aparece na Janela de Visualização 2. Responda à questão: Existem pontos nos quais o esboço da função área acumulada não é diferenciável? Em caso afirmativo, indique os valores de x para os quais a função área acumulada não é diferenciável.

Sentença da função	Código GeoGebra	Gi é diferenciável?	Justifique
a) $g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$	Se[-2 ≤ x < 1, 1, Se[1 ≤ x < 2, 3]]	(Resposta esperada – Não)	(Resposta pessoal)
b) $g_2(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$	Se[-2 ≤ x < 1, x^2, Se[1 ≤ x < 2, 1]]	(Resposta esperada – Sim)	(Resposta pessoal)
c) $g_3(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } -3 \leq x < 1 \\ x, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0,5, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$	Se[-3 ≤ x < 1, x^2, Se[1 ≤ x < 2, x, Se[2 ≤ x ≤ 3, 0.5]]]	(Resposta esperada – Não)	(Resposta pessoal)
d) $g_4(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 0,5x^2 + 0,5, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$	Se[-2 ≤ x < 1, x^3, Se[1 ≤ x < 2, 0.5x^2 +0.5]]	(Resposta esperada – Sim)	(Resposta pessoal)

2) Responda as questões a seguir:

a) Indique quais as funções g_i nas quais a função G_i não é diferenciável?

(Resposta esperada – As funções g_1 e g_3) _____

b) Esboce novamente os gráficos das funções g_i indicadas na resposta de 2 a). Analise esses gráficos.

(Resposta esperada - análise da continuidade da funções) _____

Fonte: Elaboração nossa.

4.1.7. O conceito de limite de sequência

O conjunto de atividades deste item teve seu processo de produção diferente dos demais. O motivo é que na concepção das atividades foram utilizadas referências de outros pesquisadores do campo da Educação Matemática. Além disso, esse conjunto de atividades foi apresentado em Iglioni e Almeida (2016).

A componente matemática desse conjunto de atividades é constituída pela definição formal de limite de sequência.

A componente didática constitui-se de constructos teóricos de Fischbein (1994) que ao considerar a Matemática como uma atividade humana, leva em conta em seu entendimento três componentes essenciais: o formal, o algorítmico e o intuitivo. A definição de limite de uma sequência real é um exemplo apresentado por Fischbein (1994) para revelar conflitos entre os componentes formal e intuitivo.

Fischbein revela que a relação entre os componentes intuitivo e formal pode provocar dificuldades na aprendizagem de limite de sequência. De acordo com esse pesquisador,

[...] nós não podemos ir diretamente da representação intuitiva para a formal, definição rigorosa. A definição formal reverte a ordem das ideias, contradiz a representação natural e dinâmica do processo. E isso torna a definição de limite, de fato, não intuitiva, difícil de ser acessada. Nós não iniciamos pela descrição do processo de aproximação de a por uma sequência de números a_n . Nós iniciamos mencionando, estranhamente, um número positivo ε “tão pequeno quanto se queria”, e *depois* nós introduzimos N e $n \geq N$. Isto é, não é ε que depende de N (como acontece na realidade) – o intervalo $|a_n - a|$ transforma-se pequeno à medida que N aumenta (respectivamente n) – mas, na definição formal, fazemos N “dependente de ε ”. Nós revertemos a ordem natural do processo de pensamento¹⁷³ (FISCHBEIN, 1994, p. 238, tradução nossa, grifo do autor).

Como componente didática também foram assumidos resultados de pesquisa de Vinner (1991) sobre obstáculos epistemológicos que aparecerem na

¹⁷³ [...] we cannot go directly from the intuitive representation to the formal, rigorous definition. The formal definition reverses the order of ideas, contradicts the natural, dynamic representation of the process. And this makes the definition of limit, as a matter of fact, counterintuitive, difficult to grasp. We do not start by describing the process of approaching a by a sequence of numbers a_n . We start by mentioning, strangely enough, a positive number ε "no matter how small," and *afterwards* we introduce N and $n \geq N$. That is, it is not ε that depends on N (as happens in reality) – the interval $|a_n - a|$ becomes smaller as we go on increasing N (respective n) – but, in the formal definition, we make N “dependent on ε ”. We reverse the natural order of the thinking process.

aprendizagem dessa noção. Em um trabalho em que Vinner solicitou a 15 estudantes que definissem o limite de uma sequência, ele obteve como resultado que apenas um dos estudantes deu uma formulação que pode ser aceita, embora incompleta. Os outros 14 estudantes apresentaram as seguintes concepções inadequadas: uma sequência não atinge o seu limite (para eles, a sequência constante $\{1, 1, 1, \dots\}$ não tem um limite); a sequência convergente deve ser monotonicamente crescente ou monotonicamente decrescente (para eles, a sequência $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ não é convergente);

Além disso, inserimos como componente didática as reflexões de Courant e Robbins (2000), quando sugerem a seguinte situação para ilustrar a definição de limite a de uma sequência (a_n) .

A definição sugere uma competição entre duas pessoas, A e B . A faz uma exigência de que a quantidade fixa a deve ser aproximada por a_n com um grau de precisão melhor do que uma margem escolhida $\varepsilon = \varepsilon_1$; B atende à exigência demonstrando que existe um certo inteiro $N = N_1$, tal que todos os a_n após o elemento a_{N_1} , satisfazem a exigência ε_1 . Então, A pode se tornar mais exigente e fixar uma nova margem, menor, $\varepsilon = \varepsilon_2$. B mais uma vez atende encontrando um inteiro maior (talvez maior) $N = N_2$. *Se B poder atender à exigência de A por menor que seja a margem estipulada por A , então a situação expressa por $a_n \rightarrow a$ (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 336, grifo do autor).*

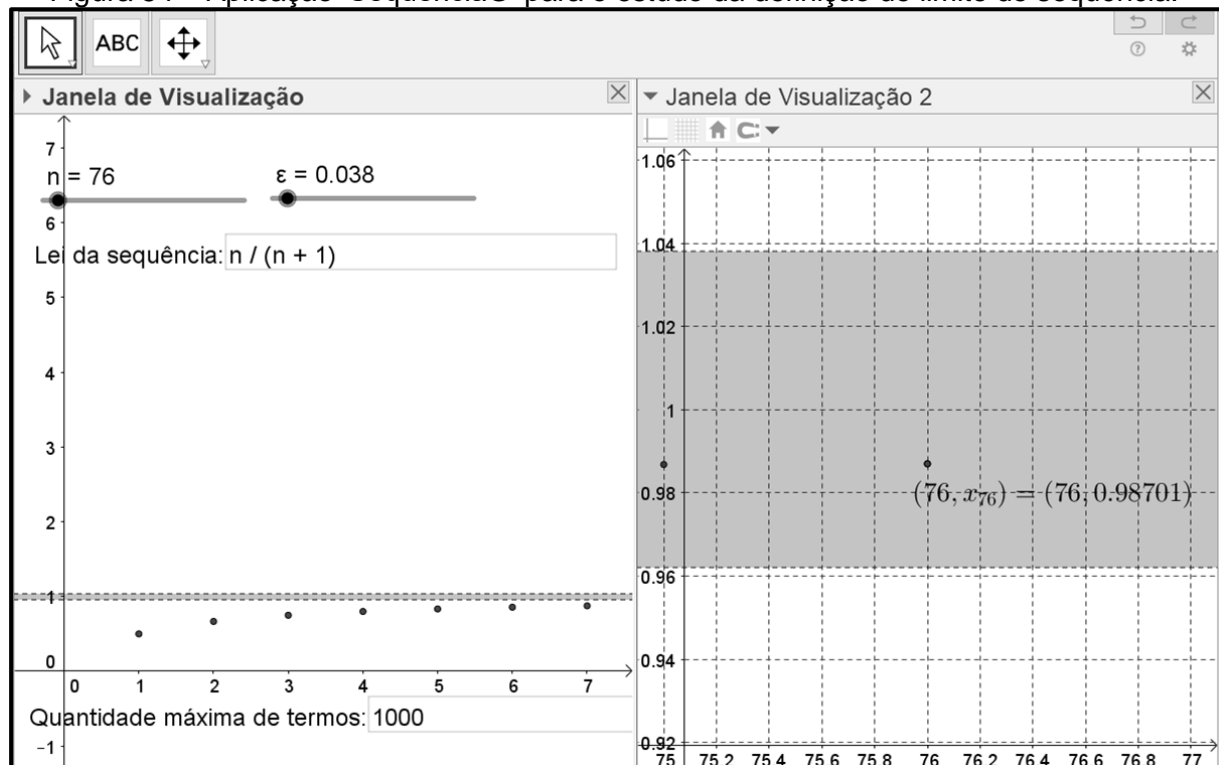
Em síntese, a componente didática do conjunto de atividades sobre limite de sequência incluiu as ideias de Fischbein (1994), quando é levado em conta que determinadas relações entre o intuitivo e formal podem provocar conflitos na aprendizagem; de Vinner (1991), quando é considerado o papel das definições no ensino e aprendizagem da Matemática e que na introdução de uma definição o professor “deve ter consciência dos efeitos que tal introdução deve ter na maneira de pensar do estudante”¹⁷⁴ (VINNER, 1991, p. 80, tradução nossa); e de Courant e Robbins (2000), com a proposição de uma situação que auxilia a compreensão dessa definição.

A componente material é uma aplicação inspirada nas ideias de jogos apresentadas em Courant e Robbins (2000) utilizando elementos que compõem a

¹⁷⁴ [...] should be aware of the effect that such introduction can have on the student's thinking.

definição formal de limite, a saber, ε e N . Na Figura 54 é observada a aplicação¹⁷⁵ utilizada para a exploração da definição do conceito de limite, denominada por ‘SequênciaG’.

Figura 54 – Aplicação ‘SequênciaG’ para o estudo da definição de limite de sequência.



Fonte: Elaboração nossa.

A ‘SequênciaG’ é composta por duas Janelas de Visualização. Na Janela de Visualização é esboçado o gráfico da sequência, cuja sentença é dada pelo usuário; a faixa do plano $\{(x, y) \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$ nomeada faixa ε , sendo L o limite da sequência¹⁷⁶ dois controles deslizantes, nomeados por n e ε , sendo que com o n altera-se a quantidade de termos da sequência esboçados no gráfico e com ε define-se o tamanho da faixa. Nessa Janela também estão dois campos de Entrada de texto: no campo, localizado na parte superior, digita-se a sentença da sequência que será estudada e, no outro, localizado na parte inferior, altera-se o valor máximo do controle deslizante n cujo valor inicial é 1.

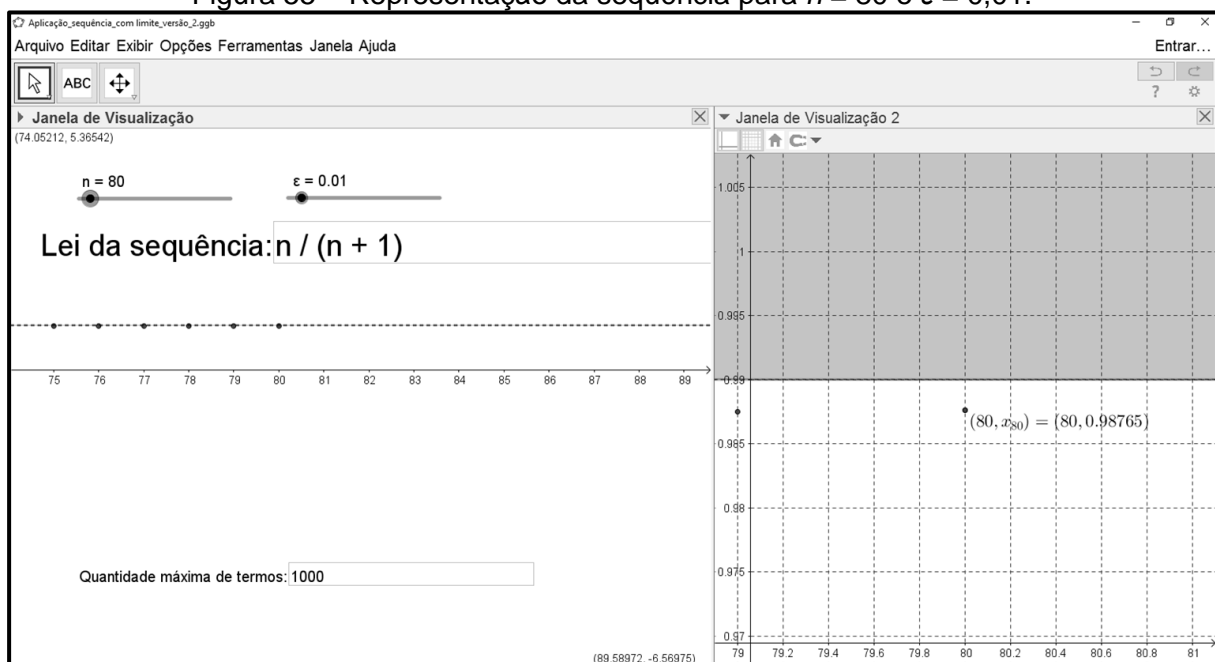
¹⁷⁵ Aplicação disponível em: <https://ggbm.at/rabEMkHK>.

¹⁷⁶ Note que nesta aplicação não é solicitado ao usuário que calcule o limite L . Esse é calculado pelo próprio GeoGebra, por meio do comando `Limite[<Função>, <Número>]`, sendo que `<Função>` é substituído pela sentença da sequência estudada e `<Número>` é substituído por ∞ . Sendo assim, por causa desse comando, a aplicação não funciona adequadamente se a sequência digitada não possuir limite.

Na Janela de Visualização 2 tem-se também uma faixa ε e um ponto de coordenadas (n_0, x_{n_0}) , sendo que n_0 é o valor indicado no controle deslizante n . Essa Janela apresenta uma ampliação da região do plano em uma vizinhança do ponto (n_0, x_{n_0}) . Com a ampliação dessa região entendemos que é possível observar quando o ponto (n_0, x_{n_0}) ‘entra’ na faixa ε , ou seja, quando é satisfeita a relação $L - \varepsilon < x_{n_0} < L + \varepsilon$.

A concepção da Janela de Visualização 2 se deu em razão do seguinte motivo: em determinadas situações, que envolvem o estudo de sequências, dependendo do valor de ε , apenas a observação do gráfico de uma sequência na Janela de Visualização pode não evidenciar se o ponto (n_0, x_{n_0}) pertence ou não ao interior da faixa ε fixada. Para ilustrar isso observe, a Figura 55.

Figura 55 – Representação da sequência para $n = 80$ e $\varepsilon = 0,01$.



Fonte: Elaboração nossa.

Na Janela de Visualização está o gráfico da sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Os controles deslizantes foram definidos nos seguintes valores: $n = 80$ e $\varepsilon = 0,01$. Com a observação da representação da Janela de Visualização não é possível distinguir se $(80, s_{80})$ pertence à faixa ε fixada, porém, com a representação ampliada, feita na Janela de Visualização 2, é possível concluir que $(80, s_{80})$ não pertence à faixa ε .

Para a utilização da ‘SequênciaG’ foram selecionadas três sequências:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } a_n = \frac{\text{sen}(n)}{n} ; (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \text{ e } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } c_n = 1 \text{ para todo } n.$$

Elas foram escolhidas para explorar os equívocos detectados por Vinner (1991): uma sequência não deve alcançar o seu limite; a sequência convergente deve ser monotonicamente crescente ou monotonicamente decrescente.

De posse dos elementos vistos nas três componentes é apresentado no Quadro 24 o conjunto de atividades que objetiva trabalhar com a definição de limite de sequência com base na ideia de jogo proposta por Courant e Robbins (2000), em que é fixado um valor de ε e procura-se um valor de N_0 com a aplicação ‘SequênciaG’.

Quadro 24 – Atividades relacionadas ao conceito de limite de sequência

1) Com a aplicação ‘SequênciaG’, esboce o gráfico da sequência indicada em cada item e atribua os valores do controle deslizante ε expressos na tabela. Com essas informações, movimente o controle deslizante n e observe o comportamento da sequência com auxílio da representação nas duas Janelas de Visualização. Responda: da sua observação, qual é o valor de N_0 para o qual os elementos da sequência estejam no interior da faixa ε . Em seguida, indique qual é o valor de limite da sequência.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $a_n = \frac{\text{sen}(n)}{n}$.

Valor de ε	Valor de N_0
0,25	(Resposta esperada: 3)
0,075	(Resposta esperada: 12)
0,01	(Resposta esperada: 100)
Valor do limite da sequência: (Resposta esperada: 1) _____.	

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

Valor de ε	Valor de N_0
0,5	(Resposta esperada: 2)

0,1	(Resposta esperada: 3)
0,001	(Resposta esperada: 5)
Valor do limite da sequência: (Resposta esperada: 1) _____.	

c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $c_n = 1$.

Valor de ε	Valor de N_0
0,5	(Resposta esperada: 1)
0,1	(Resposta esperada: 1)
0,001	(Resposta esperada: 1)
Valor do limite da sequência: (Resposta esperada: 1) _____.	

Fonte: Elaboração nossa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese desenvolvemos material para o ensino de conceitos do Cálculo baseados em constructos teóricos produzidos no âmbito da Educação Matemática, com vistas a ampliar o conjunto de recursos dos professores dessa disciplina e favorecer a integração teoria e prática.

Inicialmente, apresentamos um panorama deste Relatório de pesquisa em que ressaltamos momentos considerados fundamentais. Em seguida, fizemos considerações sobre o material apresentado, alvo da tese, e sobre como as atividades desenvolvidas estão relacionadas aos constructos teóricos escolhidos; seguimos respondendo à questão de pesquisa; e finalizamos o capítulo com indicações para futuras pesquisas vislumbradas com a pesquisa apresentada.

O Relatório inicia-se com uma apresentação da trajetória do pesquisador, relacionada ao tema estudado, suas experiências com o ensino de tópicos da Matemática no Ensino Superior e como foi sendo constituído o interesse pelo objeto de pesquisa: o ensino e aprendizagem do Cálculo.

Em seguida, são apresentados os elementos que compõem a problemática desta pesquisa. O primeiro elemento é aquele em que foi detectada uma necessidade de integrar teoria e prática no campo da Educação Matemática. Para abordar esse elemento, foram trazidas posições de pesquisadores do campo (JAWORSKI, 2006, MALARA; ZAN, 2002, STEINBRING, 1994), em que foi possível detectar a referida necessidade e que uma forma de possibilitar essa integração seria por meio da integração entre professores e pesquisadores do campo da Educação Matemática. Robert, Lattuati e Penninckx (1999) e Jaworski (2006) destacam diferenças entre o trabalho de professores e pesquisadores de forma que são necessárias adaptações para a utilização de resultados de pesquisas em sala de aula. Em nossa perspectiva, o desenvolvimento de material para o ensino, baseado em constructos teóricos, seria uma das tarefas de pesquisadores em Educação Matemática que pode contribuir com a integração teoria e prática.

Pelas posições de Robert, Speer (2001) e Rasmussen, Marrangelle e Borba (2014) foi possível destacar a necessidade de se valorizar, em pesquisas

relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo, a produção de conhecimento que contribuam com a prática.

O segundo elemento foi aquele em que se destaca a necessidade de produção de materiais para o ensino no âmbito do ensino superior. As justificativas para tal necessidade foram relacionadas às peculiaridades desse nível de ensino e à consideração de diferenças na maneira em que cursos de Matemática, em nível superior, são ministrados (MAMONA-DOWNS; DOWNS, 2002) e nas expectativas dos professores em relação à aprendizagem dos alunos (IGLIORI, 2009).

O último elemento da problemática é aquele que destaca a necessidade de utilizar o computador no ensino da Matemática. Uma forma de utilização é aquela em que, além do computador, devem ser considerados aspectos relativos ao desenvolvimento cognitivo do aprendiz.

Assim com a definição da problemática na qual esta pesquisa está inserida foi possível, delimitar o objetivo e enunciar as questões norteadoras desta pesquisa. Contamos para isso com contribuições dos membros da banca de qualificação. O objetivo foi delimitado assim: produzir material para o ensino dos conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de seqüências, norteados pelos constructos teóricos cognitivistas de Tall, pelo uso do computador e que tome como constructo organizador elementos da Gênese Documental com vistas a oferecer aos professores materiais que possam compor um repertório de recursos para o ensino de Cálculo.

As questões norteadoras desta pesquisa são as seguintes:

Como a Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche, pode subsidiar a proposição e o desenvolvimento de material para o ensino dos conteúdos: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de seqüências? Como constructos teóricos de Tall e seus colaboradores podem ser incorporados na elaboração do material de modo a levar em conta dificuldades de estudantes de Cálculo apontadas em pesquisa?

Em seguida é apresentado o quadro teórico desta pesquisa. Esse foi composto pela Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche, sendo que foi considerada a noção de recurso e suas componentes para a organização do material para o ensino produzido. Também foram utilizados os constructos teóricos,

desenvolvidos por Tall e seus associados: a noção de organizador genérico, a noção de raiz cognitiva e os Três Mundos da Matemática.

Na Revisão da literatura foram coletadas pesquisas, no banco de dados Google Acadêmico, que abordaram a produção e avaliação de uma proposta de ensino ou de atividades, em que o GeoGebra fosse utilizado como uma mídia auxiliar e que fossem objetivadas para o ensino de conceitos do Cálculo. Nessa Revisão foram consideradas 17 pesquisas, sendo essas compostas por artigos científicos, trabalhos monográficos e capítulos de livros. Um mapa da literatura, conforme Creswell (2010) foi elaborado com os dados coletados. Emergiram quatro categorias de análise: atividades exploratórias; sequências didáticas; produção de objetos de aprendizagem e resolução de problemas utilizando o computador. Após a exposição de cada pesquisa foi feita uma comparação do material para o ensino proposto neste relatório e aqueles apresentados nas pesquisas selecionadas. Foi possível notar que se faz necessária a produção de material para ensino, como aquele proposto nesta pesquisa, visando ampliar o conjunto de recursos para o professor de Cálculo.

Em seguida, foram apresentados os referenciais metodológicos que nortearam o desenvolvimento do material para o ensino apresentado neste Relatório. Como resultado do estudo dos elementos teóricos desenvolvidos por Tall, foram organizados, segundo a noção de recurso, da Gênese Documental, um material para o ensino composto de atividades relacionadas aos conceitos de função, continuidade, derivada, solução de uma equação diferencial, integral e limite de sequência.

Neste momento, apresentamos considerações sobre o material produzido. Entendemos que as aplicações do GeoGebra desenvolvidas estão em conformidade com o que Tall denomina que são características de um *software* para a aprendizagem da Matemática, pois quando consideramos as raízes cognitivas da retidão local, área abaixo do gráfico e continuidade perceptiva, na produção das aplicações do GeoGebra, entendemos que elas atuam como elementos que favorecem “o desenvolvimento cognitivo do aprendiz, que pode diferir

significativamente da estrutura lógica do tópico formal”¹⁷⁷ (TALL, 1994, p. 189, tradução nossa).

Também destacamos que o material para o ensino produzido possui atividades que propiciam o desenvolvimento de um ambiente no qual o aprendiz pode focar em uma parte da teoria, estando, portanto, de acordo com o Princípio da Construção Seletiva, proposto em Tall (2001). Isso pôde ser evidenciado no conjunto de atividades desenvolvido para abordar a relação entre continuidade e diferenciabilidade de uma função de uma variável (apresentado em 4.1.3). Com a ‘ManjarBrancoG’ e o conjunto de atividades é possível focar em uma parte da teoria que considera o seguinte teorema: seja $f:(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$, se f é diferenciável em x_0 , então f é contínua em x_0 , com vistas a apresentar um exemplo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos de seu domínio. E, segundo o Princípio da Construção Seletiva, determinados processos subjacentes, que não são o objetivo do educador naquele momento, devem ser executados pelo computador. Entendemos que não é o objetivo do educador a construção da aplicação ‘ManjarBrancoG’, que constrói a representação da soma parcial da série de funções que tem como limite a função manjar branco, por isso, sugerimos que seja apresentado apenas a representação dos termos tanto da sequência quanto da série de funções.

Outra atividade que apresenta elementos do Princípio da Construção Seletiva é aquela em que foi abordado o conceito de solução de uma equação diferencial, para o qual foi desenvolvida a ferramenta chamada ‘EquaçãoDiferencial’ (apresentada em 4.1.5). O foco não era apresentar a maneira pela qual a ferramenta foi construída, mas utilizá-la para o estudo de determinadas equações diferenciais, propostas no conjunto de atividades, com vistas a desenvolver o conceito de solução de uma equação diferencial. O alvo é focar em parte da teoria das equações diferenciais, sendo que esse é determinado em representações de esboços de soluções particulares para equações diferenciais específicas e não, nesse primeiro momento, em processos analíticos de obtenção da solução das equações diferenciais.

¹⁷⁷ [...] needs to be designed to take account of the cognitive growth of the learner, which may differ significantly from the logical structure of the formal subject.

No material desenvolvido existem atividades que propiciam a investigação no sentido de promover a exploração de elementos de determinado conceito da Matemática e a formulação de conjecturas. Conforme visto na Revisão da literatura, a construção de atividades, em que é visada a promoção de atividades investigativas, vem sendo utilizada em pesquisas conduzidas na área, tanto que foram obtidas seis pesquisas, categorizadas como 'Atividades Exploratórias', que eram referenciadas na noção de investigações matemáticas propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Nesse tipo de atividade é objetivada a análise de uma determinada situação problema, a observação de regularidades, o estabelecimento de hipóteses e conjecturas e a validação (ou não) das conjecturas formuladas com vistas à busca por uma solução para uma dada situação problema.

No material para o ensino desenvolvido nesta tese há atividades que apresentam elementos destacados em atividades exploratórias, as quais são: aquelas desenvolvidas para o conceito de derivada (apresentado em 4.1.2) e para a relação entre continuidade e diferenciabilidade (apresentado 4.1.3).

No primeiro conjunto de atividades, apresentado em 4.1.2, há a 'MagnifyG', construída com base na noção de retidão local e atividades que procuram desenvolver a observação de regularidades com o cálculo da taxa de variação de uma função em dois pontos 'próximos', com vistas ao desenvolvimento de uma conjectura sobre qual seria a função que associaria a cada valor de x a taxa de variação instantânea da função nesse valor.

No conjunto de atividades para explorar a relação entre continuidade e diferenciabilidade, apresentado em 4.1.3, é proposto o estudo da função manjar branco e o desenvolvimento de conjecturas sobre o que ocorre com a quantidade de valores nos quais as funções, que compõem a série estudada, não seja diferenciável e também quando é sugerida a formulação de conjecturas sobre o que ocorre com a quantidade de pontos de não diferenciabilidade da função obtida a partir da soma parcial de funções que compõem a série considerada.

É possível detectar no material para o ensino apresentado nesta tese a existência de atividades que visam apoiar o desenvolvimento do conceito formal da Matemática.

As atividades para o ensino de função apresentam exemplos de funções que contribuem para o aprofundamento compreensão da noção formal do conceito de

função pelo fato de apresentarmos exemplos de funções definidas por mais de uma sentença e funções definidas em intervalos e reunião de intervalos. Sem a apresentação desses e de outros tipos de funções, o sujeito pode inferir que uma função tem que ser dada por uma única sentença, algo que não está de acordo com a definição formal de função.

Outras atividades que apoiam o desenvolvimento do conceito formal são aquelas desenvolvidas para o ensino do conceito de limite de sequência. Essas atividades foram concebidas para possibilitar a introdução da definição de limite e nelas são apresentadas atividades que têm por objetivo a compreensão dos elementos que compõem a definição, ou seja, o ε e o N_0 , por meio da ideia de jogo desenvolvida por Courant e Robins (2000).

De maneira similar às atividades anteriores, no conjunto de atividades para o ensino do conceito de continuidade (apresentado em 4.1.5), é vista uma aplicação que promove uma interação com os elementos da definição formal (ε e δ) para a construção de uma vizinhança que garanta a condição imposta pela definição de continuidade.

Uma questão observada no material desenvolvido é que há atividades que apresentam ideias com alto grau de complexidade e não seguem uma sequência usualmente estabelecida. Isso é possibilitado com o auxílio do computador, que segundo Tall,

[...] oferece novas possibilidades. Ao invés de construir do simples para o complexo, é possível construir, com determinado *software*, ambientes para que o aprendiz possa explorar ideias mais complexas desde o princípio. Essa forma de aprendizagem envolve a negociação de significados de conceitos matemáticos modelados pelo computador nos quais a organização do currículo e o papel do professor é crucial¹⁷⁸ (TALL, 1989, p. 37, tradução nossa).

É de nosso conhecimento que o ensino de tópicos como sequências de funções e funções dadas por limites de sequências de funções, comumente, são apresentados em uma disciplina de Análise Real e não de Cálculo. Contudo, pela proposta do pesquisador inglês, é possível utilizar essas ideias avançadas para a apresentação do exemplo de uma função contínua e não diferenciável em todos os

¹⁷⁸ [...] offers new possibilities. Instead of building from simple to complex, it is possible to construct appropriate software environments for the learner to explore more complex ideas from the outset. This form of learning involves a negotiation of the meaning of the mathematical concepts modelled by the computer in which the organization of the curriculum and the role of the teacher is crucial.

pontos do domínio e que podem ser formalizadas posteriormente, como apresentado nas atividades relativas ao ensino da relação entre continuidade e diferenciabilidade (apresentadas em 4.1.3), pois as demonstrações apresentadas precisam de resultados e técnicas que podem ser apresentadas em Análise Real.

Determinadas atividades foram elaboradas com vistas a utilizar elementos advindos da visualização para a formalização de conceitos matemáticos. Por exemplo, quando usamos a noção da retidão local para o desenvolvimento das atividades para o ensino da derivada são utilizados aspectos visuais como a porção ampliada de uma parte do gráfico de uma função para, depois de algumas atividades, possibilitar a formalização do conceito de derivada a partir do que foi visualizado com a 'MagnifyG'.

Outro exemplo é o conjunto de atividades para ensino do conceito de solução de uma equação diferencial. Por meio da aplicação 'CampoDeDireçõesG' e da ferramenta 'EquaçãoDiferencial' é possível fornecer elementos relacionados ao conceito de solução de uma equação diferencial, como aquele que diz que essa solução é uma família de funções e não uma única função, por meio da exposição do campo de direções associado à equação diferencial.

Uma noção que permeou o desenvolvimento das atividades é a de organizador genérico. Lembrando que essa noção é definida como “um ambiente (ou micromundo) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados”¹⁷⁹ (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor). Tall ressalta que para o desenvolvimento de um organizador genérico é necessário selecionar uma raiz cognitiva apropriada. Lembrando que uma raiz cognitiva é “uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto, deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro”¹⁸⁰ (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa).

Sendo assim, as atividades desenvolvidas para os conceitos de derivada, limite de sequências, relação entre continuidade e diferenciabilidade, solução de

¹⁷⁹ [...] an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate examples and (if possible) non-examples of a specific mathematical concept or a related system of concepts.

¹⁸⁰ [...] as a cognitive unit which is (potentially) meaningful to the student at the time, yet contain the seeds of cognitive expansion to formal definitions and later theoretical development.

uma equação diferencial, continuidade e integral, podem ser denominadas como organizadores genéricos pelo fato de proverem um ambiente no qual o sujeito pode manipular exemplos e, no caso da 'ManjarBrancoG' destinada para a exploração da relação entre continuidade e diferenciabilidade, contraexemplos dos conceitos matemáticos considerados em cada aplicação.

Nem todas as atividades foram desenvolvidas considerando-se as raízes cognitivas indicadas por Tall, a saber, as noções de retidão local (taxa de variação/diferenciação/equações diferenciais); a continuidade perceptiva (conceito formal de continuidade); área abaixo do gráfico (integração). Uma dessas atividades é aquela proposta para o ensino do conceito de limite de uma sequência. Contudo, entendemos que a 'SequênciaG' foi baseada em uma possível raiz cognitiva, a ideia do jogo sugerida em Courant e Robbins (2000), que foi enunciada do seguinte modo:

A definição sugere uma competição entre duas pessoas, *A* e *B*. *A* faz uma exigência de que a quantidade fixa *a* deve ser aproximada por a_n com um grau de precisão melhor do que uma margem escolhida $\varepsilon = \varepsilon_1$; *B* atende à exigência demonstrando que existe um certo inteiro $N = N_1$ tal que todos os a_n após o elemento a_{N_1} satisfazem a exigência ε_1 . Então, *A* pode se tornar mais exigente e fixar uma nova margem, menor, $\varepsilon = \varepsilon_2$. *B* mais uma vez atende encontrando um inteiro maior (talvez maior) $N = N_2$. *Se B poder atender à exigência de A por menor que seja a margem estipulada por A, então a situação expressa por $a_n \rightarrow a$ (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 336, grifo do autor).*

A ideia enunciada apresenta indícios de ser potencialmente significativa para o sujeito, em um primeiro momento, e conter sementes que propiciem uma expansão cognitiva para o estudo da definição formal do conceito de limite de uma sequência. Afirmamos isso pelo fato da ideia do jogo apresentar elementos que compõem a definição formal do conceito de limite. Contudo, entendemos que é preciso realizar outros estudos para confirmação da possibilidade de ocorrer, ou não, a expansão cognitiva necessária para afirmar que essa ideia é uma raiz cognitiva para o conceito de limite de sequência.

Nas atividades elaboradas para o ensino do conceito de função não identificamos uma ideia com características de raiz cognitiva. Contudo, entendemos que a exposição de exemplos de funções definidas por mais de uma sentença em diferentes partes do domínio pode auxiliar com a expansão cognitiva do sujeito para

a compreensão da definição formal do conceito de função, que não especifica uma natureza para a regra que define a função. Como sugerido por Tall:

As funções apresentadas na escola têm várias características similares que afetam o significado do conceito de função. Por exemplo, uma função é dada geralmente por uma fórmula composta de polinômios, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos – todas que possuem aspectos reconhecíveis. Na transição da Escola Básica para a Universidade, esses *met-befores* podem sugerir propriedades implícitas que uma função deve ter, por exemplo, uma única fórmula e estudantes raramente têm contato com funções de uma função que tem sentenças distintas em diferentes partes do domínio¹⁸¹ (TALL, 2013a, p. 257-258, tradução nossa).

As aplicações desenvolvidas apresentam elementos dos Três Mundos da Matemática. Lembrando que a descrição de cada um dos mundos é a seguinte: o mundo conceitual-corporificado é baseado na ação e na percepção de propriedades de objetos corporificados, tais como gráficos e diagramas, que pode ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais; o mundo simbólico-proceitual é o mundo dos símbolos que são utilizados para cálculos e manipulações (sejam no âmbito da Aritmética, da Álgebra e do Cálculo) e as atividades desse mundo se iniciam com ações (como apontar e contar) e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos; e o mundo axiomático-formal que é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são utilizadas para especificar determinado objeto matemático.

Para exemplificar elementos dos Três Mundos da Matemática que estão presentes em atividades desenvolvidas, apresentamos aquelas para o ensino do conceito de derivada.

Pelo fato de iniciar com uma reflexão sobre o objeto gráfico de uma função e a noção de inclinação, que podem ser vistos e manipulados com a 'MagnifyG' produzida, entendemos que essa reflexão apresenta elementos do mundo conceitual-corporificado. O mundo simbólico-proceitual é desenvolvido quando nas atividades é solicitado o cálculo da taxa de variação da função em uma vizinhança determinada, que necessita de conceitos simbólicos como o de função e de taxa de

¹⁸¹ The functions met in school mathematics have various familiar features that affect the meaning of the function concept. For instance, a function is usually given by a formula made up of polynomials, trigonometric functions, exponentials and logarithms – all of which have recognizable shapes. In the transition from school to university, these *met-befores* may suggest implicit proprieties that a function must have, for instance, it is usually given by a single formula and students rarely have experience of a function having different formulae on different parts of the domain.

variação. Nesse momento, o conceito de taxa de variação da função é simbolizado por um número real. Posteriormente, depois do desenvolvimento das atividades, é sugerida a apresentação da definição formal do conceito de derivada de função, sendo esse um componente do mundo axiomático formal.

Tall identifica elementos do Cálculo e da Análise Matemática com base no referencial teórico dos Três Mundos da Matemática quando diz que os

[...] gráficos e a noção de inclinação habitam o mundo conceitual-corporificado e suas propriedades em termos da continuidade natural a retidão local. Os conceitos simbólicos de função e derivada residem no mundo do simbólico-proceitual. O Cálculo Elementar desenvolve-se em uma mistura dos dois. Enquanto isso, a Análise Matemática habita o mundo axiomático-formal que envolve uma mudança substancial de significado com a definição formal incluindo a definição de limites, em termos de épsilon e delta¹⁸² (TALL, 2013a, p. 24, tradução nossa).

Os elementos identificados por Tall estão presentes no material produzido. Com relação aos elementos do mundo conceitual-corporificado, elencamos a utilização de representações gráficas de funções apresentada nas atividades para o ensino dos conceitos de função, de derivada, de limite de sequência, da relação entre continuidade e diferenciabilidade, de continuidade e de integral. A noção de inclinação está presente nas atividades relacionadas ao conceito de derivada e relação de diferenciabilidade e continuidade. O conceito simbólico de função emergiu nos conjuntos de atividades para o conceito de função, derivada, limite de sequência e continuidade e diferenciabilidade. Em todas as atividades desenvolvidas era objetivado o desenvolvimento formal do conhecimento matemático e por isso sempre incorporamos as definições formais dos conceitos considerados.

Neste momento apresentamos considerações sobre as questões norteadoras desta pesquisa.

Com relação à primeira questão, relacionada ao modo que se pode subsidiar a proposição e o desenvolvimento de material para o ensino dos conteúdos do Cálculo, por meio da Gênese Documental, destacamos que foram utilizadas a noção de recurso e suas componentes (a matemática, a material e a didática) de maneira a

¹⁸² [...] graphs and the notion of slope inhabit the conceptual embodied world of objects and their properties in terms of natural continuity and local straightness. The symbolic concepts of function and the derivative lie in the world of proceptual symbolism. Elementary calculus develops as a blend of the two. Meanwhile, mathematical analysis inhabits the axiomatic formal world which involves a substantial change in meaning with formal definitions including the epsilon-delta definition of limit.

organizar a produção do material apresentado. Entendemos que por meio da exposição das três componentes, que subsidiaram o desenvolvimento de cada atividade, foi possível destacar o conceito matemático considerado, por meio da exposição da componente matemática, os elementos teóricos que subsidiaram o desenvolvimento daquela atividade pela exposição da componente didática e as aplicações produzidas no GeoGebra pela apresentação da componente material. Na exposição da componente didática foram inseridos os constructos teóricos desenvolvidos por Tall com vistas a destacar a maneira pela qual esses constructos influenciaram a composição do material para o ensino produzido.

Temos ciência que a Gênese Documental apresenta suas noções de uma forma diferente do que a utilizada neste trabalho. Em pesquisas de Trouche, a Gênese Documental considera a observação do trabalho de um professor no desenvolvimento de uma aula. Contudo, vislumbramos que ao assumirmos a intenção de elaborar o material, inspirando-nos na noção de recurso. Quando destacamos as três componentes de cada conjunto de atividades, tornamos esse material com potencial de recurso para o professor usuário do material que elaboramos. Ou seja, o material ampliaria o conjunto de recursos do professor na organização de suas aulas de Cálculo. Entendemos que a organização de materiais de ensino referenciada na noção de recurso auxilia na exposição e incorporação de resultados de pesquisas na produção de materiais para o ensino, favorecendo a relação teoria e prática.

Ainda refletindo sobre a referência da Gênese Documental no desenvolvimento do material para o ensino, podemos dizer que, a forma da componente material de cada atividade possibilitou exibir os passos de construção das aplicações do GeoGebra construídas. Inferimos que esse tipo de apresentação torna disponível, ao leitor, o conhecimento sobre ferramentas e comandos, do *software* GeoGebra que podem auxiliar na indução de um processo de Gênese Instrumental. Essa indução seria dada, pois a apresentação das ferramentas e comandos podem auxiliar o desenvolvimento, por parte dos usuários, de novos esquemas de utilização¹⁸³ ao artefato GeoGebra.

Com a forma de organização do material a partir da Gênese Documental sugerimos a inclusão de pesquisas e constructos teóricos, desenvolvidos no âmbito

¹⁸³ Segundo Rabardel (1995).

da Educação Matemática, no repertório de recursos de um professor para o desenvolvimento do seu trabalho de documentação. Ademais, resultados de pesquisas, quando considerados na produção de um dado material, podem auxiliar a justificar o modo de desenvolvimento daquela atividade. Isso pode ser evidenciado no material produzido nesta pesquisa levando-se em conta que foram incorporadas, como componente didática, noções propostas por Tall e essas direcionaram a escolha dos elementos da componente material. Por exemplo, no conjunto de atividades para o ensino de funções, pelas orientações de Tall, como apresentar funções definidas por mais de uma sentença, funções cujos domínios são união de intervalos, funções com descontinuidades, não diferenciáveis procuramos ferramentas disponíveis no GeoGebra para o esboço de gráficos de funções nessas condições.

Pontuando como os constructos teóricos de Tall puderam ser incorporados no material para o ensino produzido. Eles impactaram na maneira pela qual a componente material foi escolhida e uma determinada aplicação foi concebida. Por exemplo, em virtude da utilização da raiz cognitiva da retidão local, desenvolvemos a 'MagnifyG' que amplia, com determinado grau, uma porção do gráfico de uma função real para verificar se essa porção, localmente, se assemelha a um segmento de reta. Também ao considerar essa raiz cognitiva foi possível inferir sobre a não diferenciabilidade de uma função real e desenvolver uma aplicação que esboça os termos da soma parcial da série de funções cujo limite é a função manjar branco, com vistas a exibir um exemplo extremo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio. Para apresentação do conceito de solução de uma equação diferencial, a maneira como Tall propõe que seja apresentado o conceito, nos motivou a construir a ferramenta 'EquaçãoDiferencial'.

O que apresentamos nos parágrafos anteriores deste capítulo tem a intenção de indicar que consideramos válido incorporar um constructo teórico, de natureza cognitiva, no desenvolvimento de material para o ensino de conceitos do Cálculo, pois é assim que esse tipo de constructo pode ser incorporado no repertório de recursos de um professor e compor um dos elementos do seu trabalho de documentação.

Para finalizar, apresentamos indicações para futuras pesquisas vislumbradas após a produção desta tese. Entendemos que a pesquisa conduzida abre duas

possibilidades para futuras investigações: a primeira é relativa à proposição de uma sequência didática levando em consideração um dos materiais apresentados e os efeitos dessa sequência na aprendizagem do conceito considerado; outra proposta está relacionada à observação do trabalho de um professor, ou grupo de professores, com o material apresentado nesta tese. Essa pesquisa poderia envolver tanto a observação de uma atividade em sala de aula, quanto a preparação do professor para a aplicação dessa atividade. No âmbito de uma investigação desse tipo emergiram questões como: durante a utilização de determinada atividade, foram sugeridas modificações pelo professor? Quais foram essas modificações? Como se deu o trabalho de preparação de uma sessão de aula com a atividade escolhida?

Entendemos que a discussão teórica sobre a produção de material para o ensino referenciado em constructos teóricos desenvolvidos no campo da Educação Matemática se faz necessária. Além disso, como outra possibilidade de futuras pesquisas, destacamos a produção de outros materiais para o ensino referenciado em constructos teóricos distintos daqueles utilizados neste trabalho. Por exemplo, podem ser considerados os resultados e constructos teóricos de outros renomados pesquisadores da Educação Matemática, como Dubinsky e Sfard, que apresentam constructos teóricos de natureza cognitivista e que podem ser considerados no desenvolvimento de uma atividade para o ensino.

Ressaltamos que o material desenvolvido nesta tese está disponibilizado no repositório eletrônico GeoGebraTube¹⁸⁴, o qual possibilita o compartilhamento de construções, vídeos, *applets* e outros materiais produzidos no GeoGebra. Para disponibilizar determinado material nesse repositório é necessário criar um usuário e senha. O material desenvolvido nesta tese estará disponível no perfil do autor¹⁸⁵.

Por fim, pretendemos, com o material apresentado, ampliar o campo das discussões sobre o desenvolvimento de outras atividades referenciadas em resultados de pesquisa e constructos teóricos da Educação Matemática. Entendemos que a elaboração de material para o ensino é um campo de pesquisa fértil e necessário para que se possa implementar resultados de pesquisas da Educação Matemática nas salas de aula.

¹⁸⁴ Endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/materials/>

¹⁸⁵ Endereço eletrônico: <https://www.geogebra.org/marcioalmeidasp>

REFERÊNCIAS

ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na Interação com o GeoGebra**: proposta de uma oficina para professores de matemática. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

ALMEIDA, M. V. **Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall**. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <<https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/10969>>. Acesso em: 03 jan. 2017.

ALVES, D. O. **Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados**: uma proposta para cursos de introdução ao Cálculo. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2498/1/DISSERTAÇÃO_EnsinoFunçõesLimites.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2016.

ALVES, M. J. G. **Uma proposta para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral com a utilização do software GeoGebra**. 2014. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2014.

AMARAL, E. M. H.; MÜLLER, T. J.. Integração de Tecnologias para Construção de Objetos de Aprendizagem – O case E₂D Ensino de Derivadas a Distância. **Novas Tecnologias na Educação (Renote)**, Porto Alegre, v. 10, n. 1, p.1 – 11, jul. 2012. Semestral. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/30812/19198>>. Acesso em: 04 jan. 2016.

ASSUDE, T.; BOERO, P.; HERBST, P.; LERMAN, S.; RADFORD, L. The Notions and Roles of Theory in Mathematics Education Research. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11, 2008, Monterrey. **ICME 11 Proceedings**. Monterrey, 2008. p. 338 - 356.

ASSUMPÇÃO, P. G. S.. **Introdução ao Estudo de Derivada: uma sequência didática com o uso do software GeoGebra**. 2011. 83 f. TCC (Graduação) - Curso de Pós Graduação em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011. Disponível em: <http://repositorio.ufsm.br:8080/xmlui/bitstream/handle/1/1071/Assumpcao_Paula_Gabrieli_Santos_de.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 27 jun. 2016.

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S.; **Objetos de aprendizagem: diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação**. **Revista Contemporânea de Educação**, v. 5, n. 10, p. 128-148, jul./dez. 2010.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Pararelo, 2003. Tradução de: Ligia Teopisito.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation. New York: Springer Science, 2005.

BRITTON, S.; HENDERSON, J. Issues and trends: a review of Delta conference papers from 1997 to 2001. In: DELTA CONFERENCE ON TEACHING AND LEARNING OF UNDERGRADUATE MATHEMATICS AND STATISTICS, 9, 2013, Kiama. **Proceedings of the 9th DELTA conference on teaching and learning of undergraduate mathematics and statistics**. Melbourne: The University Of Western Sydney, 2013. p. 50 - 58. Disponível em: <<http://www.deltaconference.org/conferences/2013/documents/ConferenceProceedings.pdf>>. Acesso em: 25 jan. 2017.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique de mathématiques**. Paris, v. 7, nº 2, pp. 33-115, 1986.

CARGNIN, C.; BARROS, R. M. O.. A Contribuição do GeoGebra para a Convergência do Conceito de Convergência. **Revista Paraense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 4, n. 6, p.215-232, jan/jun. 2015. Semestral. Disponível em: <<http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/942>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

CARLSON, D.; JONHSON, C. R.; LAY, D. C.; PORTER, A. D. The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for a first course in linear algebra. **The College Mathematics Journal**, nº 24, p. 41 – 46, 1993.

CORNU, B. Apprentissage de la notion de limite: modeles spontanés et modeles propes. In: COMIT, C.; VERGNAUD, G. (Eds). **Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**. Grenoble, 1981, p. 322 -329.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática**: uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Ciência Moderna, 2000.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Lopes, M.; 3 ed. – Porto Alegre: Artmed, 2010.

DE VILLIERS, M. The value of experimentation in mathematics. In: NATIONAL CONGRESS OF AMESA, 9, 2003, Cape Town. **Proceedings...** Cape Town: University of the Western Cape, 2003. p. 174–185.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1991, p. 25 – 41.

DUBINSKY, E.; TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, David (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. New York: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 231-243.

FEY, J. Y. Eclectic approaches to elementarization: cases of curriculum construction in the United States. BIEHLER, R. et al. (Orgs) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 15 – 26, 1994.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. al (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2010. p. 77-112.

FROTA, M. C. R. (2001). Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo. In: LACHINI, J. ; LAUDARES, J. B. (Orgs.). **Educação Matemática: a prática educativa sobre o olhar dos professores de cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 89-121.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed., São Paulo: Atlas, 2008.

GIRALDO, V. A. **Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada**. 2004. 221 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <<http://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1364837580.pdf>>. Acesso em: 21 jul. 2017.

GONÇALVES, D. C. **Aplicações das Derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra**. 2012. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2012. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacao_2012/Dissertacao_Daniele_Cristina.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2016.

GONÇALVES, D. C.; REIS, F. S. Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p.417 - 432, ago. 2013. Quadrimestral. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/bolema/v27n46/v27n46a06.pdf>>. Acesso em: 05 jan. 2016.

GRANDE, A. L.; VAZQUEZ, V. R. Resolução de Problemas de Otimização com o Auxílio do *Software* GeoGebra. **Revista do Instituto Geogebra de São Paulo**, São Paulo, v. 3, n. 1, p.23 – 34, 2014. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/23>>. Acesso em: 25 fev. 2016.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199 - 218, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In: GUEUDET, G; PEPIN, B.; TROUCHE, L. **From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. p. 23 - 41. (Mathematics Teacher Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-1966-8_2>. Acesso em: 09 mar. 2015

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2, 2002, Hersonissos. **Proceedings of 2nd International**

Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level.
Hersonissos: University of Crete, 2002, p. 1 – 24.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2.** Tradução e adaptação para português (de Portugal) de António Ribeiro. 2009. Disponível em: <http://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 09 fev. 2015.

IEEE Learning Technology Standards Committee (LTSC). **Draft Standard for Learning Object Metadata.** New York: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2000.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates.** Recife: SBEM, p. 11 – 26, 2009.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V.. Um Documento para o Ensino do Conceito de Limite de Sequência Real. In: SIMPÓSIO LATINO-AMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, 1., 2016, Bonito. **Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática.** 2017. p. 1 - 11. Disponível em: <http://ladima.tuseon.com.br/uploads/file_manager/source/d7322ed717dedf1eb4e6e52a37ea7bcd/Trabalhos/SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI.pdf>. Acesso em: 13 abr. 2017.

JAWORSKI, B. Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 9, p.187 – 211, 2006. Bimestral. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s10857-005-1223-z>>. Acesso em: 25 fev. 2015.

KOLB, D; RUBLIN, I; MCINTYRE, J. **Psicologia Organizacional: uma abordagem vivencial.** São Paulo: Ed. Atlas, 1986.

KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. **ZDM: Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 533 - 548, 2014.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R.. **Where Mathematics comes from: how the embodied mind brings Mathematics into being.** New York: Basic Books, 2000.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia de pesquisa em Ciências Sociais**. Porto Alegre: ARTMED, 1999.

MALARA, N.; ZAN, R The problematic relationship between theory and practice. In. ENGLISH, Lyn D. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 553 – 580, 2002.

MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M.. Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In. ENGLISH, L. D. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, p. 165 – 198, 2002.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. 2015. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/4984/1/DISSERTAÇÃO_EnsinoDerivadasCálculo.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2016.

MAYER, R. **Multimedia Learning**. Cambridge: Cambridge University Press. 2001.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real**. 2014. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014. Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/123706/000829660.pdf?sequencia=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 06 jan. 2016.

MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B.; GUIMARAIS, Y. P. B. Q.. Explorando um ambiente informatizado, com uma atividade didática, para o estudo de taxa de variação. In: VALLE, L. E. L. R.; MATTOS, M. J. V. M.; COSTA, J. W. (Org.). **Educação Digital: a tecnologia a favor da inclusão**. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 166 – 187.

MONTEIRO, M. S.; ALMEIDA, M. V. Análise de Novas Abordagens no Ensino de Álgebra Linear. In: SIMPÓSIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E PÓS-GRADUAÇÃO DO IME-USP, 3, 2007, São Paulo, **Atas...** São Paulo: IME-USP, 2007.

MORAES, H. L.. **Utilização do software GeoGebra no estudo pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável**. 2013. 47 f. Dissertação

(Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

MORENO-ARMELLA, L; HEGEDUS, S. J; KAPUT, J. J. From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, p. 99 – 111, 2008.

MÜLLER, T. J.. **Objetos de Aprendizagem Multimodais e Ensino de Cálculo**: uma proposta baseada em análise de erros. 2015. 203 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/128914/000975772.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 27 jun. 2016.

NASCIMENTO, A. C. A.. Objetos de aprendizagem: entre a promessa e a realidade. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A. (Org.). **Objetos de Aprendizagem**: uma proposta de recurso pedagógico. Brasília: MEC, SEED, 2007, p.135 – 145.

PAVIO, A. **Metal Representations**: a dual coding approach. Oxford, England: Oxford University Press, 1986.

PINTO, M. M. F.; HEITMANN, F. P.; KAWASAKI, T. F.; GUIMARÃES, A. M.; LUZ, L. C. S.; RIZZO, L. M.; LOTT, F. Z.. Objetos de Aprendizagem de Matemática:: uma experiência na iniciação científica de alunos de graduação. **Revista Docência do Ensino Superior**, Belo Horizonte, v. 1, n. 12, p.96-111, 2011. Anual. Disponível em: <<https://www.ufmg.br/giz/wp-content/uploads/2014/10/09-Objetos-de-aprendizagem-de-matematica-uma-experiencia-na-iniciacao-cientifica-d-e-alunos-de-graduação-diagramado.pdf?ba40e4>>. Acesso em: 14 abr. 2016.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P.; BOURMAUD, G. Instruments et systèmes d'instruments (Instruments and systems of instruments). In: RABARDEL, P.; PASTRÉ, P. (Ed.). **Modèles du sujet pour la conception**: Dialectiques activités développement. Toulouse: Octarès, 2005. p. 211 – 229.

RABARDEL, P.; VERILLON, P. Cognition and artifact: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. **European Journal of Psychology in Education**, v. 10, n. 1, p.77 – 101, 1995. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF03172796>>. Acesso em: 15 abr. 2015.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. **ZDM: Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 507 – 515, 2014.

RICALDONI, M. A. G.. **Construção e Interpretação de Gráficos com o Uso de Softwares no Ensino de Cálculo**: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivada de funções reais. 2014. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática (PROFMAT), Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2014. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3563>>. Acesso em: 26 fev. 2016.

ROBERT, A.; LATTUATI, M.; PENNINGX, J.. **L'Enseignement des Mathématiques au Lycée**: un point de vue didactique. Paris: Ellipses, 1999.

ROBERT, A.; SPEER, N. Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. In: HOLTON, D. (Ed.) **The Teaching and Learning of Mathematics at University Level – an ICMI study**., Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 283 – 299.

ROCHA, M. D.. **Desenvolvendo Atividades Computacionais na Disciplina Cálculo Diferencial e Integral I**: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/2932>>. Acesso em: 26 fev. 2016.

SCHOENFELD, A. Some notes on the enterprise (research in collegiate mathematics education, that is). **Research in Collegiate Mathematics Education**, 1, p. 1 – 19, 1994.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. 21. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

SILVA, B. A. Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p.393 - 413, 2011.

SILVA, A. P.; PEREIRA, R. S. G.; DAMIN, W.; YONEZAWA, W. M.. Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do *software* GeoGebra. **Espacios**, São Paulo, v. 35, n. 4, p.1-10, 2014. Disponível em: <<http://www.revistaespacios.com/a14v35n04/14350406.html>>. Acesso em: 27 jun. 2016.

SILVER, E. A.; HERBST, P. G. Theory in Mathematics Education Scholarship. In: LESTER JUNIOR, F. K. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte: Information Age Publishing And Reston, 2007. Cap. 2. p. 39 - 67.

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). **Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers**. Berlin/Heidelberg: Springer, 2010. p. 7-32. (Advances in Mathematics Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-00742-2_2>. Acesso em: 21 abr. 2015.

STEINBRING, H. Dialogue between theory and practice in Mathematics Education. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. (Eds.) **Didactics of Mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 89 – 102.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SWELLER, J. **Cognitive Load Theory**: a special issue of educational psychologist Lawrence Erlbaum Associates Inc, 2003.

SWIDAN, O.; YERUSHALMY, M. Learning the indefinite integral in a dynamic and interactive technological environment. **ZDM:Mathematics Education**, v. 46, n. 4, p. 533 - 548, 2014.

TALL, D. The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. **The Mathematical Gazette**, v. 66, n. 435, p. 11 – 22, 1982. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1982a-blancmange.pdf>>. Acesso em: 08 abr. 2014.

_____. **Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics**. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – University of Warwick, Inglaterra, 1986.

_____. Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, Canadá, v.3, n.9, p.37-42, 1989.

_____. Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5., 1993, **Proceedings...**, Addison-Wesley, p. 243 – 258, 1993. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993h-real-rat-cmplx.pdf>>. Acesso em 22 jan. 2017.

_____. Computer Environments for the Learning of Mathematics. In: BIEHLER, In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; WINKLEMANN, B. (Eds.), **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 189 – 199, 1994.

_____. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. **Proceedings...** Blackwood: ATCM Inc, 2000. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>>. Acesso em 22 jan. 2013.

_____. Cognitive development in advanced mathematics using technology, In: **Mathematics Education Research Journal**, v. 12, n. 3, p. 210 - 230, 2001. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001b-merj-amt.pdf>>. Acesso em 22 jan. 2013.

_____. Introducing the three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, Canadá, v. 23 n. 3, p. 29-33, 2004.

_____. Developing a theory of mathematical growth. **ZDM: Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 39, n. 1-2, p.145-154, 2007. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-006-0010-3>>. Acesso em: 03 abr. 2015.

_____. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Reserach Journal**, Netherlands, v. 20, n. 2, p.5-24, 2008. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF03217474>>. Acesso em: 08 abr. 2015.

_____. Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. **ZDM: Mathematics Education**, v. 41, n. 4, p.481-492, 2009. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0192-6>>. Acesso em: 01 maio 2015.

_____. A sensible approach to the calculus. F. Pluinage & A. Cuevas (Eds.), **Handbook on calculus and its teaching**. México: Pearson. 2013a. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2012z-sensible-calculus.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2015.

_____. **How humans learn to think mathematically: exploring three worlds of mathematics**. New York: Cambridge University Press, 2013b.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M.. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké**, Campinas, v. 21, n. 39, p.155 – 168, 2013. Disponível em: <<http://ojs.fe.unicamp.br/ged/index.php/zetetike/article/view/4327>>. Acesso em: 09 jun. 2016.

THOMAS, G. B. **Cálculo I**. São Paulo: Addison Wesley, 2011.

TRAMONTANO, A.; ALVES, M. J. G.; VEIGA, J.. O GeoGebra como Recurso Facilitador nos Processos de Ensino-Aprendizagem da Derivada de Funções Polinomiais. **Revista de Ensino de Ciências e Engenharia**, v. 4, n. 2, p. 33 – 49, 2013.

TROUCHE, L. Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. **International Journal Of Computers For Mathematical Learning**, v. 9, n. 3, p.281- 307, 2004. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s10758-004-3468-5>>. Acesso em: 03 mar. 2015.

VALENTE, J. A. A espiral da aprendizagem e as tecnologias de informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, M. C. R. A. (org.) **A Tecnologia no Ensino: implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. p. 15 – 37.

VINNER, S. **Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent.** In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 6, 1983, Antuérpia. *Proceedings...*Antuéria: Antwerp University, p. 24-28, 1983.

_____. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65 – 81.

VINNER, S.; TALL, D. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.** Educational studies in mathematics, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

WILEY, D. A. **Learning Object Design and Sequencing Theory.** 2000. Tese (Doutorado em Filosofia) - Department of Instructional Psychology and Technology, Brigham Young University, Provo, UT, 2000.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 2007.

ANEXO A – Resultados obtidos com a pesquisa no Google Acadêmico

Neste Anexo apresentamos os 313 resultados que encontramos na base de dados Google Acadêmico (<https://scholar.google.com.br/>) dos quais obtivemos as pesquisas utilizadas na Revisão da literatura desta tese.

A maneira como obtivemos esses resultados foi a seguinte:

Em primeiro lugar acessamos o Google Acadêmico (<https://scholar.google.com.br/>) e na ferramenta de busca foi digitado: “Cálculo Diferencial e Integral” ou “GeoGebra”, sendo que o período de tempo fixado foi entre os anos de 2010 e 2015.

A seguir estão os resultados obtidos com a busca efetuada.

[Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais](#)

A Richit - 2010 - repositorio.unesp.br

... 96 Fig. 19: Caixa de Entrada do GeoGebra..... 98 Fig. ... um curso à distância de formação de professores de Cálculo Diferencial e Integral no contexto das tecnologias digitais, ou seja, buscamos compreender quais aspectos do ...

[Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia](#)

A Richit, VC Benites, MA Escher... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... ensino de Cálculo Diferencial e Integral, pois, aspectos como a visualização, reflexão, e... desenvolvidas por meio do software GeoGebra, poderão colaborar para os desafios ...consideramos como atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em um ...

[Dimensões Teórico-Methodológicas do Cálculo Diferencial e Integral: perspectivas histórica e de ensino e aprendizagem](#)

MA Escher - 2011 - repositorio.unesp.br

... análise preliminar dos livros selecionados, das Entrevistas efetuadas com professores que lecionaram, ou que ainda lecionam Cálculo e da prática em sala de aula. As Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, Paradigma Indiciário, História, ...

[\[PDF\] Tecnologia digital aplicada no ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral](#)

M BIZELLI, SH Fiscarelli... - CONGRESSO DE ..., 2010 - congressoits.unifebe.edu.br

... Fig.2 - Applet desenvolvida no Geogebra Fig.3 – Animação desenvolvida no Flash Page 8 As aulas digitais, com resoluções de problemas, têm sido bastante utilizadas, principalmente pelos alunos que precisam faltar em alguma aula ou ... de Cálculo Diferencial e Integral....

[Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a ...](#)

MD Rocha - 2010 - repositorio.ufop.br

... com o GeoGebra 134 ... lecionam Cálculo Integral e Diferencial e/ou que se interessam pela temática. Nele, de forma...Page 21. 21 CAPÍTULO 1 O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL ...

[CITAÇÃO] Objetos De Aprendizagem De Funções E Cálculo A Distância: o professor e as múltiplas representações matemáticas

FP Heitmann, MMF Pinto - Revista Brasileira de Informática Na Educação, Porto ..., 2013

[\[PDF\] Tecnologias Digitais e Educação Matemática](#)

MC Borba, A CHIARI - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013 - pnem.fe.unb.br

... 1990 - Softwares de Funções, Geometria Dinâmica, Cálculo Diferencial e Integral, Modelagem Intensificação do uso do laboratório em escolas e universidades ... Page 8. □ Computador não como um mero substituto ou suplemento do ser humano ... Geogebra Page 10....

[Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra](#)

FRV Alves - Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... Resumo Este trabalho discute algumas noções topológicas no contexto da transição do Cálculo Diferencial e Integral - CUV para a Análise Real - AR com arrimo no software GeoGebra.... GeoGebra ou o CAS Maple possibilitam explorar a visualização, a evolução de imagens...

[Objetos de Aprendizagem de Matemática: uma experiência na iniciação científica de alunos de graduação](#)

MMF Pinto, FP Heitmann, TF Kawasaki... - Revista Docência do ..., 2015 - seer.lcc.ufmg.br

... fessores, numa disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Tal processo foi registrado ... seu processo de concepção e elaboração. Entre essas, a conveniência do GeoGebra, tan-... Ou, como evidencia o título deste texto, a iniciação científica destes. Percebemos hoje que,...

[\[PDF\] Um mapa do ensino de Cálculo nos últimos 10 anos do COBENGE](#)

JS Wrobel, MVC Zeferino, TCJ Carneiro - CONGRESSO BRASILEIRO DE ..., 2013 - fadep.br

...do estudante para detectar as principais causas de dificuldades em Cálculo ou em outras ...no contexto da eletrônica de potência para o ensino de cálculo diferencial e integral em cursos ... como o uso dos softwares Winplot, Mathcad, WolframAlpha, Matlab, GeoGebra e recursos...

[Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do GeoGebra no contexto do Cálculo a várias variáveis](#)

FRV Alves - Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São ..., 2013 - revistas.pucsp.br

... escassez de estudos pertinentes ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral a Várias ... tangente a uma curva (CUV) ou tangente a um gráfico ou superfície (CVV). Na figura 7, exibimos uma construção com o Geogebra que evidencia o comportamento ...

[Atividades Investigativas de Aplicações das Derivadas Utilizando o GeoGebra/Investigative Activities Related to Applications of Derivatives Using GeoGebra](#)

DC Gonçalves, F da Silva Reis - Bolema, 2013 - search.proquest.com

... research on applications of derivatives, through investigative activities using the software GeoGebra. ... que a falta de sentido da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se ... é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando...

[PDF] [A NOÇÃO DE INTEGRAL GENERALIZADA: SUA EXPLORAÇÃO APOIADA NA TECNOLOGIA E NO CONTEXTO HISTÓRICO](#)

FRV Alves - 2013 - dm.ufscar.br

...heurística da noção de convergência e divergência, com o recurso aos softwares Geogebra e do ... A noção de integral constitui pedra fundante no Cálculo Diferencial e Integral. No rol dos matemáticos que contribuíram, direta ou indiretamente para a gênese e sistematização...

[CITAÇÃO] Processos de formação continuada do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais na perspectiva do conhecimento da ... A Richit, [RGS Miskulin](#) - XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE ..., 2011

[PDF] [... Estudo das Atividades Propostas em um Curso de Licenciatura em Matemática, na Disciplina de Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, na Modalidade a ...](#)

AFS Alves - 2011 - loja.pucsp.br

..."guia" com exemplos de atividades de Cálculo Diferencial e Integral explorando as adequada ou não, ou se foi possível explorar todos os seus potenciais.... softwares Geogebra e Cabri, dúvidas referente à utilização do ambiente virtual ...

[PDF] [Ensino de disciplinas básicas da matemática em nível superior numa perspectiva de trabalho colaborativo](#)

EB FIGUEIREDO, EB AZEVEDO, G Moro... - III Simpósio Nacional de ..., 2012 - sinect.com.br

...A procura pela monitoria foi maior nas disciplinas da primeira fase, ou seja, em CDI ... do Centro de Ciências Tecnológicas, que cursavam as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica ... Os softwares utilizados neste projeto foram o Winplot e o GeoGebra e os...

[PDF] [Possibilidades Didático-Pedagógicas do Software GeoGebra no Estudo do Conceito de Integral](#)

A Richit, M Luís, B do Rio Branco - Anais da XIII Conferência ..., 2011 - gente.eti.br ... alguns estudos que enfocam a investigação de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e o ... Ou seja, buscamos apresentar pesquisas, as quais sugerem que a utilização de alguns ... aos participantes familiarização com alguns recursos do software GeoGebra (Hohenwarter &...

[Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra](#)

J Molon, ES Figueireo - Ciencia & Natura, 2015 - cascavel.cpd.ufsm.br

... da inserção, no Ensino Médio, das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral: limites de ... limitadas pelo eixo das abscissas e por retas verticais, ou até mesmo ... entendimento dessas ideias, foram desenvolvidas atividades utilizando o Software GeoGebra como ferramenta ...

[Ensino de cálculo diferencial e integral: das técnicas ao humans-with-media](#)

AF Vieira - teses.usp.br

...como? Talvez, mas este não é o ponto-alvo para polêmicas ou aprofundamentos. Esta pesquisa investiga as possíveis causas dos problemas no ensino da Matemática, projetados intensamente no ensino do Cálculo Diferencial e Integral. 3 Ibidem, p. 42. Page 27. 27 ...

[CITAÇÃO] O SOFTWARE GEOGEBRA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA—UMA VISÃO A PARTIR DE DISSERTAÇÕES E TESES
[M CYRINO](#), LAF Baldini - RPEM, Campo Mourão, Pr, 2012

[A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência](#)

EC dos Santos, JF Mota, AB Brito... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br ... Cálculo Diferencial e Integral I. Essa estrutura está organizada a partir das seguintes ... Page 11. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 9657, pp.129-143, 2012 139 região e que essa pode ser obtida através de subestimação ou de superestimação ...

[Processos de visualização e representação de conceitos de cálculo diferencial e integral com um software tridimensional](#)

CAA Gouveia - 2010 - repositorio.unesp.br
... 40 Figura 6: Tela do software Geogebra 3.0.0.0 em Educação e/ou Educação Matemática, como os de Souza Jr (2000), Reis (2001), Bean (2004), Farias (2007), Scucuglia (2006) e Barufi (1999), o Cálculo Diferencial e Integral...

[CITAÇÃO] Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática

FRV Alves - Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em ..., 2012

[Resolução de problemas de otimização com o auxílio do software GeoGebra](#)

AL Grande, VR Vazquez - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2014 - revistas.pucsp.br ... regularmente matriculados na mesma instituição de ensino nos cursos de tecnologia, sendo que os mesmos já cursaram ou cursam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral ... software GeoGebra 4.0, sendo que nenhum dos estudantes que participaram do...

[PDF] [Integração de Tecnologias para Construção de Objetos de Aprendizagem—O case E2D Ensino de Derivadas a Distância](#)

[ÉMH do Amaral](#), TJ Müller - RENOTE, 2012 - seer.ufrgs.br

...muito grande de reprovações e dificuldades dos alunos em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. ... foi criado, no ano de 2011, o projeto denominado “Desenvolvendo Utilitários com GeoGebra”....materiais já existentes e utilizados como materiais de aula, ou até mesmo ...

[CITAÇÃO] Um levantamento sobre pesquisas com o uso do software Geogebra no ensino de funções matemáticas

MP Amaral, [I Frango](#) - Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2014

[O uso do GeoGebra no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e de Funções](#)

JWA Silva, KV de Oliveira, KA da Silva... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... Integral. O diferencial deste programa é que ele possui um sistema de Geometria ... Page 13. CXCI 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 9657, pp.CLXXX-CXCII, 2012 ... dedução que a transmissão e/ou aquisição do conhecimento matemático exige. ...

[CITAÇÃO] Utilização de uma sequência investigativa no ensino aprendizagem de taxa de variação

Y GUIMARAIS, D MIRANDA, J LAUDARES - V SIPEM. Anais... Petrópolis-RJ, 2012

[Insight: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo](#)

FRV Alves - VIDYA, 2015 - periodicos.unifra.br

... Para evidenciar, todavia, possibilidades e vias de seu uso consciente no ensino, trazemos algumas situações envolvendo o Cálculo Diferencial e Integral a Várias ... No contexto do ensino da Matemática, deparamo-nos com o uso recorrente de termos e/ou palavras às quais ...

[PDF] [As Potencialidades das Tecnologias no Ensino da Matemática](#)

IZ Siple - X Encontro Nacional de Educação Matemática. ..., 2010 - moodle.ufba.br

... (Trouche et al 2007, p.6, tradução livre) Conceber e/ou adaptar recursos pedagógicos que possibilitem explorar as ... FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA De maneira a explorar as potencialidades dos softwares Winplot e GeoGebra no ...

[Cálculo diferencial e integral e tecnologias digitais: perspectivas de exploração no software GeoGebra](#)

A Richit, MM Farias - 2013 - funes.uniandes.edu.co

... ênfase algébrica dada ao longo do tempo nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral não oportunizou ... conceitos de Cálculo a partir de representações gráficas, numéricas ou algébricas envolvendo ... e Integrais) em uma perspectiva de investigação com o software GeoGebra....

[CITAÇÃO] Reflexões sobre as Dificuldades na Aprendizagem do CDI I (Cálculo Diferencial e Integral I) na UFRN: uma proposta de ensino baseada nas TIC (...

FV Amorim, GC de Sousa

[PDF] [Atividades de construção e interpretação de gráficos com o uso do GeoGebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I](#)

MAG Ricaldoni - cefetes.br

Page 1. Atividades de construção e interpretação de gráficos com o uso do GeoGebra no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I Márcio Augusto Gama Ricaldoni ...aprenderem ou procurarem entender os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, sendo...

[CITAÇÃO] EXPLORANDO OS CONCEITOS INICIAIS DA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA.

AD Alves

[PDF] [Possibilidades de exploração de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com o Software GeoGebra](#)

A Richit, A Richit, [ML Tomkelski](#) - gepid.upf.br

... Bacharelado em Matemática, professores da Educação Básica ou Ensino Superior. ... para familiarização dos mesmos com o Software GeoGebra e prosseguiremos com atividades envolvendo diferentes conceitos inerentes ao Cálculo Diferencial e Integral como Funções...

[Possibilidades didático-pedagógicas do software GeoGebra no estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral: Perspectivas na formação continuada de ...](#)

A Richit, [RGS Miskulin](#) - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

...Diferencial e Integral fazem uso apenas das somas a direita ou das somas superiores, o que, do nosso ponto de vista, possa causar confusões conceituais com relação a y_i ser um ponto arbitrário nos sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Finalmente, concluíram que o GeoGebra não ...

[PDF] [Estudo de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais Ordinárias com Auxílio do Software Livre MAXIMA](#)

GS Lima, [GA Alves](#), HG Silva, [LO Souza](#), RS Silva... - feis.unesp.br

... No ENAPET 2011 e 2012 fizemos trabalhos relacionados ao software GEOGEBRA e este ... (plotar) gráficos de funções de uma ou várias variáveis e campos de direções ... separei problemas de cálculo diferencial e integral I e II para uma turma e...

[Cálculo Diferencial e Integral-Derivadas e Aplicações](#)

GAL Villagra - 2013 - repositorio.sead.ufscar.br

...Cálculo Diferencial e Integral Bacharelado em Sistemas de Informação ... Page 24. AT3-1 – Unidade 3 Derivadas e Aplicações Derivadas Implícitas Exemplo 2: vamos calcular a derivada da função $y = \arcsen x$, (*) 1 Observe na calculadora ou no GeoGebra que para...

[PDF] [O Método das Tangentes de Newton](#)

MV de Almeida, NS Ferrão, S de Brito Marcelino - 2011 - pucsp.br

... Educação Matemática Superior •Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Page 4. ... Quantidade muito pequena, associada ao tempo p. ou \dot{x} . Acréscimo da variável x (y) ... Page 17. Representação do Método no software GeoGebra Page 18. Conclusão ...

[PDF] [CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E TECNOLOGIAS DIGITAIS: COMPREENSÕES NA DIREÇÃO DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES A PARTIR DA ...](#)

ARRGS Miskulin - Actas del VII CIBEM ISSN - cibem7.semur.edu.uy

... das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral sob a ... possibilitar a construção de um conhecimento instrumental (Richit, 2010), ou seja, em ... junto aos professores competências para utilização do Software GeoGebra na abordagem ...

[CITAÇÃO] Aplicações de Limite de Funções com o auxílio do GeoGebra.

JEA Marciano, AKC de Araújo, I Mezzomo

[CITAÇÃO] CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO UTILIZANDO OS APLICATIVOS GEOGEBRA E GRAPHMÁTICA

RSR Jover

[PDF] [MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA](#)

UMAPPOE DE, C DIFERENCIAL - uss.br

Em suma, o processo de experimentações da Engenharia Didática se divide em quatro fases: a análise preliminar, o teste a priori, a experimentação e o teste a posteriori. Acreditamos que essas fases nos auxiliarão a entender os marcos de ensino e de ...

[Cálculo Diferencial e Integral-Limite e Continuidade](#)

GAL Villagra - 2013 - sistemas7.sead.ufscar.br

... AT2-1 - Unidade 2 Limite e Continuidade1 Cálculo Diferencial e Integral Bacharelado em Sistemas de Informação UAB - UFSCar ... Em geral Se f é uma função real definida em uma reunião de intervalos, x_0 é um ponto no interior ou no extremo de um desses intervalos....

[Noções intuitivas do cálculo diferencial e integral no ensino médio: é possível?](#)

AJS Silva - 2015 - bibliodigital.unijui.edu.br

... Cálculo Diferencial e Integral abordados na forma de noções intuitivas. Page 5. 5 ... questionados acerca da tendência da PG de razão menor que -1 e maior que 1, ou seja, ... arquivos produzidos nas representações no software Geogebra e com os registros dos ...

[PDF] [O USO DA INTEGRAL DEFINIDA NO CÁLCULO DA ÁREA ALAGADA DA BARRAGEM DO RIO BONITO](#)

CM Paraol, A Pescador - abenge.org.br

... Com uma breve revisão histórica do cálculo diferencial e integral, observa-se que seu desenvolvimento foi ... O problema básico do cálculo integral é o problema das áreas; ou seja, calcular ... da área em questão foram desenvolvidos com o auxílio dos softwares geogebra e graph...

[CITAÇÃO] Unesp–Rio Claro Brasil andricelirichit@ gmail. com Rosana Giaretta Sguerra Miskulin A Richit

[Artigos relacionados](#) [Citar](#) [Salvar](#)

[Elementos para o desenvolvimento de uma abordagem para o ensino de funções reais](#)

MV Almeida, SBC Iglori - ... /Cruzeiro do Sul, 2015 - revistapos.cruzeirodosul.edu.br

... são apresentadas atividades para o ensino do conceito de função com o uso do software GeoGebra. ... os gráficos de funções reais a valores reais definidas por mais de uma sentença ou ainda de ... ensino de conceitos o Cálculo Diferencial e Integral (WILKELMANN, 1994), em ...

[ENSINO E APRENDIZAGEM DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UM MAPEAMENTO DAS TESES E DISSERTAÇÕES PRODUZIDAS NO BRASIL](#)

EML Pagani, [NSG Allevato](#) - VIDYA, 2014 - periodicos.unifra.br

... que os softwares utilizados nos trabalhos são o Geogebra e o ... de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e ... dificuldades existentes no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, evidenciadas pelos ...

[PDF] [UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL NO ENSINO MÉDIO](#)

CFR Concordido, AC de Castro Barbosa - editorarealize.com.br

... todo o currículo em torno do conceito de função e à introdução de noções de Cálculo Diferencial e Integral para todos os alunos do secundário. (SOARES; DASSIE; ... dinâmica GeoGebra, ou equivalente, a fim de tornar a exposição mais rápida e precisa, além ...

[PDF] [Resolução de Problemas/Design Potencializando Processos Formativos de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática no contexto das TIC–GeoGebra](#)

[R Miskulin](#), A Richit - pucsp.br

... conceitos matemáticos por meio do GeoGebra. Page 5. ... consiste no fato de que os professores aprendem colaborativamente, em comunidades de investigação e/ou redes, nas quais os professores buscam, ... ministrantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I. ...

[CITAÇÃO] Atividades com Geogebra para o ensino de Cálculo GC de Sousa

[PDF] [CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I](#)

A Mognon - dma.uem.br

... facilitar o entendimento dos alunos e, com auxílio de software GeoGebra, as figuras do capítulo de derivadas foram refeitas. ... 5. $-5 < 4 - 3x^2 < 1$ Notas de aula - Cálculo Diferencial e Integral I ... CAPÍTULO 1. NÚMEROS REAIS 1.6 Módulo ou Valor Absoluto de um Número Real ...

[Um estudo sobre a implementação do cálculo diferencial e integral no ensino médio](#)

JA Oliveira Júnior - 2015 - teses.usp.br

... Diferencial e Integral. 1.2 Noções de Limite ... Para o esboço da função $g(x)$, utilizou-se o software Geogebra, pois os alunos, até esse exato ... $g(x)$ é idêntica à função do exemplo 1.2.2, exceto pela interrupção que existe no ponto (4, 6). Ou ...

[Compreensões de professores de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais: perspectivas da utilização de ambientes computacionais](#)

A Richit, [R Squerra](#) - 2013 - funes.uniandes.edu.co

... developed for the online course (context of the research study) using GeoGebra, contributed to ... Diferencial e Integral no contexto das tecnologias digitais, ou seja, buscou compreender quais ... digitais pelo professor de Cálculo Diferencial e Integral em sua prática pedagógica....

[CITAÇÃO] SOBRE O ENTENDIMENTO DA NOÇÃO DE INDETERMINAÇÃO: O CASO DA REGRA DE LHOSPITAL
IF de Azevedo, FRV Alves

[PDF] [... E COMUNICAÇÃO NAS ESTRATÉGIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROFESSORES E ESTUDANTES DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL](#)

[LFR Pires](#), MA Escher - ujf.br

... relatou já terem manuseado aplicativos ou softwares como Wolfram Alpha, Geogebra entre outros.... aplicativos ou programas, 70% registraram utilizar o próprio computador ou da universidade ... anos e 12% lecionam mais de 20 anos a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. ...

[O processo de construção de objetos de aprendizagem em cálculo diferencial e integral durante uma atividade de design](#)

EL Reis - 2010 - repositorio.unesp.br

... No Capítulo 4 buscamos descrever e analisar o Processo de Construção de Objetos de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral, dividido em quatro seções, seguindo a ... Grupos de Pesquisas e Universidades ou mesmo pessoas comuns interessadas em aprimorar o...

[CITAÇÃO] POSSIBILIDADES NA PLATAFORMA MOODLE: OFICINAS COM ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES

LH da Cunha Ferreira, ML Ramalho, EG Fernandes...

[PDF] [CONCEPÇÕES SOBRE ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, GEOMETRIA E TECNOLOGIAS DIGITAIS: COMO O PROFESSOR ...](#)

A Richit, A Richit - ticeduca.ie.ul.pt

... sujeitos: Professores de Cálculo Diferencial e Integral e pesquisadores, situações de ... professores de Cálculo com essas tecnologias (software GeoGebra e TelEduc). E, além ... docente do professor de Cálculo se mostra ou se apresenta no contexto das tecnologias digitais). ...

[PDF] [Novas Tecnologias Incorporadas aos Softwares Matemáticos No Ensino](#)

E Retzlaff, RFF Contri - sites.google.com

... <http://www.geogebra.org/download/install.htm> ... Faz a representação da função derivada e tangente num determinado ponto, sendo útil no Cálculo Diferencial e Integral. ... Possibilita, em trigonometria, trabalhar com o ângulo em graus ou em radianos. ...

[PDF] [Avaliação do uso do Geogebra no Ensino de Área e Perímetro: Um Estudo de Caso na Escola Estadual Professor Ronaldo Marques da Silva](#)

DP de Araújo Seda, JML Filho - anais.seminfo.net.br

... Rocha (2010) [7] desenvolveu um estudo ao longo de um semestre acompanhando as aulas de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I, da ... Com relação ao nível de satisfação em usar o GeoGebra nas aulas, 90% responderam que acharam bom ou ótimo e apenas ...

[PDF] [Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos com o Cálculo Integral em Volumes de Figuras Sólidas Utilizando o Geogebra 3D](#)

JC da Silva - ifes.edu.br

... Ao levar em consideração o significado literal do Cálculo, ou seja, uma função ... Resolução de Problemas, através do uso do aplicativo Geogebra 3D, no intuito de ... MCB A construção/ negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral. ...

[CITAÇÃO] Funções vetoriais nos espaços bi e tridimensionais: uma intervenção com o software GeoGebra.

RS Imafuku

[CITAÇÃO] A utilização integrada de softwares dinâmicos no ensino de Análise Real: um estudo da construção do conceito de Integral de Riemann

JL de Oliveira

[Ensino do cálculo: uma proposta de exploração na perspectiva do uso dos registros de representação](#)

FRV Alves - # Tear: Revista de Educação, Ciência e ..., 2012 - seer.canoas.ifrs.edu.br

... maneiras mediante as quais é possível dividir a figura e combiná-las em subfiguras; o modo

de mudança de orientação ou sua posição no plano ou no espaço. ... hx obtido

no Geogebra Fonte: Autoria própria. ... O ensino de Cálculo Diferencial e Integral apoiado em instrumentos ...

[Funções definidas implicitamente por meio de equações: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple](#)

FRV Alves - Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São ..., 2014 - revistas.pucsp.br

... Thus, we indicate some elements connected to the notion of equations defined implicitly in the case of two ou three variables. ... locus, some examples are reinterpreted with the help of technology, described by a proposed complementarity with the software Geogebra and the ...

[PDF] [GEOGEBRA: OBJETO DE APRENDIZAGEM NO PROCESSO DE ENSINO DA MATEMÁTICA](#)

ALGDH Begosso, FNQF Salmen - geogebra.org.uy

... 308 Page 5. Diciplinas como o Cálculo Diferencial e Integral podem ter problemas resolvidos com o ... Contudo, montar figuras representativas a todo exercício ou ficar alterando os dados e ... Na Figura 1, tem-se a tela do GeoGebra possibilitando a visualização de gráficos: ...

[PDF] [VIRTUAL MATH TEAMS](#)

GH Gomes, SAS Vicente, [AB Powell](#) - researchgate.net

... de interação oferecidas no ambiente virtual VMT, na discussão de atividades da disciplina de

Física Geral II, con- tendo conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. ... Gráficos Pode-se usar o Geogebra, ou criar um gráfico no Winplot, copiar e colar no Word, para depois copiar e ...

[O uso da integral definida no cálculo da área alagada da barragem do Rio Bonito](#)

A Pescador, CM Paraol - Revista Produção e Desenvolvimento, 2015 - 200.9.149.159

... KEYWORDS: integral defined; curve fitting; geogebra and graph. ... Segundo Kaiber e Renz (2008), no Brasil o ensino do cálculo diferencial e integral, historicamente, caracteriza-

se ... de processos algébricos, seguidos de exercícios repetitivos e com pouca, ou quase nenhuma ...

[EXPLORANDO UM AMBIENTE INFORMATIZADO, COM UMA ATIVIDADE DIDÁTICA, PARA O ESTUDO DE TAXA DE VARIAÇÃO](#)

DF de Miranda, JB Laudaes... - Educação Digital: A ..., 2013 - books.google.com
... A disciplina Cálculo Numérico, nos cursos de engenharia, trata, numericamente, tópicos do cálculo diferencial e integral. ... tenha alguma dúvida se a reta é mesmo tangente à curva, então você pode usar os recursos de “ampliar” ou “reduzir” do Geogebra para verificar ...

[PDF] [Integral Dupla e a Impressão 3D](#)

GMH Miranda - ufjf.br

... Notamos que pesquisas relacionadas com ensino e ou aprendizagem de Cálculo Diferencial ... graduação entre o Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real (denominado pelo ... WinPlot e o Geogebra 3D, porém os dois não geram o arquivo para a impressão 3D. ...

[PDF] [Cálculo On Line](#)

MHSSBS Barrozo, [SH Fiscarelli](#) - sbmac.locaweb.com.br

... precisam acessar o material para compreender o conteúdo abordado; ou seja, os ... processo de ensino e aprendizagem das disciplinas relacionadas com o Cálculo Diferencial e Integral. ... actionscript; Applets – desenvolvidos utilizando o software livre Geogebra (que possibilita ...

[CITAÇÃO] Hipertexto e Matemática

R de Oliveira Mendes

[... Geogebra como Recurso Facilitador nos Processos de Ensino-Aprendizagem da Derivada de Funções Polinomiais/The use of the software GeoGebra to facilitate the ...](#)

A Tramontano, MJG Alves, J Veiga - Revista de Ensino de Ciências e ..., 2013 - latec.ufrj.br
... O software GeoGebra nos possibilita trabalhar com conceitos da álgebra e ... ramos da matemática, ou seja, ao mesmo tempo trabalhar com funções polinomiais ... para o ensino e a aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, ...

[Aprendizagem significativa de conceitos matemáticos: um estudo sobre o uso do GeoGebra como um organizador prévio](#)

MC de Barros, A Mognon, LA Kato - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Geometria Analítica, pois sua ... exemplo, no caso do domínio da função posição, o uso do GeoGebra não interferiu nos resultados. ... Mecânica, ou seja, aquela em que os alunos apenas observaram que a função era um ...

[CITAÇÃO] MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON APLICADO A LOCALIZAÇÃO DE RAÍZES POLINOMIAIS

JC de Oliveira - 2014

[HTML] [Soma de Riemann e cálculo de área sob uma curva por integrais com auxílio do software Geogebra](#)

AP da SILVA, [RSG PEREIRA](#), W DAMIN... - Espacios, 2014 - revistaespacios.com

... Palavras-chaves: cálculo diferencial e integral; tecnologia da informação e comunicação; possibilidades e limitações. ... que utilizaram os resultados obtidos com o auxílio do software

Geogebra para apresentar ... ser falta de atenção por parte dos membros dos grupos ou falta de ...

[CITAÇÃO] Estudo da Definição de Derivada usando GeoGebra
ÉV de Castro Alves, SS Diógenes, I Mezzomo

[Uma abordagem didático-pedagógica do cálculo diferencial e integral I na formação de professores de matemática](#)

MGV Diogo - 2015 - repositorio.unesp.br

... METODOLÓGICAS SOBRE AS CATEGORIAS, apresentamos os principais resultados, mostrando que o processo de ensinar Cálculo Diferencial e Integral I é permeado de dimensões ou significados que fazem parte da prática e do conhecimento do professor de Matemática...

[CITAÇÃO] CÁLCULO COM MAPLE: EXPLORANDO CONCEITOS CENTRAIS DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL USANDO A TECNOLOGIA
MA Escher, [RGS Miskulin](#)

[PDF] [O USO DO GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS](#)

JJ de Gomes, FAA Dias, FG de Lima... - ANAIS DA V SEMANA ... - matematicauva.org

... perpassam o campo algébrico e caminha para a dimensão gráfica e/ou geométrica.

Assim,

acreditamos que a utilização pedagógica de recursos tecnológicos, como Geogebra por exemplo, favorecem a investigação matemática de conceitos de Calculo Diferencial e Integral. ...

[O Método das Tangentes de Newton: uma abordagem que associa história e tecnologia com o uso do software Geogebra](#)

NS Ferrão, MV de Almeida... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... Introdução No ensino superior, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral costuma apresentar ... palavras ou desenhos a ser memorizado". ... Page 2. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 965, pp.172-183, 2012 173 ...

[PDF] [Cálculo I: Noções Básicas](#)

SMM Caporale, JP Rezende, KA de Deus, MA Silva - projetotics.cead.ufla.br

... Elaboramos este material didático com o objetivo de auxiliá-lo na compreensão de conteúdos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral. Material disponível: ... $\lim \rightarrow$ ou seja, \lim ... realize a atividade proposta: lo.iq.unesp.br/GeoGebra/limites_exemplo4.html _____ ...

[Provocação de situações de aprendizagem em cálculo com o apoio do GeoGebra](#)

M Leyser, ARG Brunet, JCP Leivas... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... Diferencial e Integral. Nesse é observado que funções definidas por mais de uma ... qualitativas é ser “compreensivas” ou interpretativas, significando para Alves-Mazzotti (2002) que ... Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 9657, pp.CCCXXIII-CCCXXXV, 2012 ...

[PDF] [O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA](#)

MMLDP Azevedo, OFV Amorim - Actas del VII CIBEM ISSN - cibem7.semur.edu.uy

... para o cálculo diferencial e integral com o software Geogebra” objetivou elaborar ... Em nossa investigação tratamos especificamente do software GeoGebra que apresenta ... O software apresenta três diferentes janelas: gráfica, algébrica ou numérica, e a folha de cálculo. ...

[O SOFTWARE GEOGEBRA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA— UMA VISÃO A PARTIR DE DISSERTAÇÕES E TESES](#)

MC de Costa Trindade Cyrino... - Revista Paranaense de ..., 2015 - fecilcam.br
... Análise da prática pedagógica: - no ensino de Cálculo Diferencial e Integral na busca de identificar ... da utilização do software GeoGebra na formação de professores de Matemática. ... como um obstáculo para alguns professores, devido à insipiência ou ausência completa dessa ...

[\[PDF\] ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA LINEAR E TECNOLOGIAS DIGITAIS: PERSPECTIVAS DE EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA NO SOFTWARE GEOGEBRA](#)

ARMM do Rosário, FRG Sguerra... - Actas del VII CIBEM ... - cibem7.semur.edu.uy
... Básica ou Ensino Superior. ... software GeoGebra. 3. Referências Andrade, JP G (2010). ... 89 (1). Richit, Andriceli. Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais. ...

[\[PDF\] ... E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CÁLCULO INTEGRAL DE VOLUMES DE FIGURAS SÓLIDAS UTILIZANDO O GEOGEBRA 3D NA FORMAÇÃO ...](#)

JC DA SILVA - pos-graduacao.uepb.edu.br
... Propor aos futuros professores de Matemática formular e Resolver Problemas Matemáticos a partir do Geogebra 3D com o Cálculo Integral de ... Nesta primeira etapa, uma simples equação ou termo deve levantar questionamentos sobre ...

[\[PDF\] ESTRATÉGIAS PEDAGÓGICAS PARA ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA COM O USO DO GEOGEBRA](#)

CAAP Abar - EDITORA DA UNIVERSIDADE ..., 2012 - pos-graduacao.uepb.edu.br
... e Integral O objetivo desta pesquisa foi apresentar ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e suas ... e otimização de funções são apresentadas por meio dos softwares Geogebra e Winplot ... variáveis e podem ser desenvolvidas juntamente com o aluno ou ser apenas ...

[\[PDF\] CO 09: Um relato sobre a Cicloide: a Helena do Século XVII](#)

C da Silva Medeiros - sbhmat.org
... de forma similar à que demonstraremos abaixo. Observe a figura 2: Figure 2. Cicloide no Geogebra Fonte: Arquivo Pessoal ... Tautócrona, ou seja, a Cicloide é isócrona. ... sistematização do Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de valorizarmos essa ...

[\[PDF\] Curvas Pedais via Geometria Dinâmica](#)

FA Oliveira, DM de Almeida - sbmac.org.br
... e Licenciatura em Matemática, por exemplo: Geome- tria Analítica (Cônicas), Cálculo Diferencial e Integral (Funções ... construímos e exploramos algumas curvas planas com o auxílio do Geogebra, um software ... M se desloca sobre S denomina-se curva pedal (ou podária) de S ...

[CÁLCULO: UMA PROPOSTA POSSÍVEL PARA O ENSINO MÉDIO](#)

CR da Silva, KRQ Sousa - Revista Panorâmica, 2015 - oca.ufmt.br
... particular de uma universidade ou outra, pois os índices também são semelhantes, por ... Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário. ... Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra. ...

[\[CITAÇÃO\] GEOGEBRA E O LUGAR GEOMÉTRICO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES EM \$\mathbb{R}^2\$](#)

AS de Novais, UBMCU de Barra Mansa...

[Artigos relacionados](#) [Citar](#) [Salvar](#)

[Uma Investigação sobre o Uso de Ferramentas Computacionais no Ensino de Cálculo Integral e Diferencial](#)

SCR de Paula, AMB Tostes, GS Barbosa, [MAP Araújo](#) - RENOTE - seer.ufrgs.br
... Palavras-chaves: Metodologia de ensino, software educacional, ensino e aprendizagem, Cálculo Diferencial e Integral. ... as palavras chave serão procuradas (todo o texto ou abstract). ... selecionados cinco softwares para uma análise mais completa: Geogebra (2015), Winplot ...

[PDF] [ESTUDO DAS FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO COM AUXÍLIO DO PROGRAMA GEOGEBRA](#)

YPB de Queiroz Guimarães, M de Miranda Lacerda... - coped-nm.com.br
... dinâmico Geogebra. Esse software foi escolhido por ser gratuito, pode ser baixado da Internet mesmo e por ... do crescimento ou decrescimento; coeficientes angular e linear; raiz da função; posição da reta e lei de formação. A ...

[Validação de Laboratórios Virtuais de Aprendizagem baseada em uma visão Taxonômica](#)

BG Ávila, [ÉMH do Amaral](#), TJ Müller, [LMR Tarouco](#) - RENOTE - seer.ufrgs.br
... obtidas permitiram a classificação do VirtualLab como D4, conforme a Figura 7, ou seja, um ... em ampliar e qualificar o serviço de monitoria oferecido a alunos de Cálculo Diferencial e Integral, disciplina conhecida ... 4.4 Geogebando (Desenvolvendo Utilitários com GeoGebra) ...

[PDF] [GEOGEBRA: AS NOVAS TECNOLOGIAS APLICADAS AO ENSINO DA MATEMÁTICA](#)

SS de Oliveira, NMBN Oleques, IBP Rocha... - porteiros.s.unipampa.edu.br
... o desenvolvimento de conceitos de Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral. O diferencial ... de inclinação ou do coeficiente angular. Partindo do princípio que o GeoGebra proporciona uma resposta visual do que esta sendo ...

[O DESENVOLVIMENTO DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA A ABORDAGEM DO CONCEITO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO UTILIZANDO O ...](#)

F Amorim, G Sousa - Ensino de Ciências e Tecnologia em ..., 2012 - santoangelo.uri.br
... em paralelo ao algebrismo utilizando o ambiente de Geometria Dinâmica GeoGebra, pelo fato ... de aula convencional que disponibilize apenas o quadro e o piloto ou giz, essa ... um grupo de aproximadamente 10 alunos de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I oriundos ...

[HTML] [Investigative activities related to applications of derivatives using GeoGebra](#)

DC Gonçalves, FS Reis - Bolema: Boletim de Educação Matemática, 2013 - SciELO Brasil
... research on applications of derivatives, through investigative activities using the software GeoGebra. ... que a falta de sentido da aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral origina-se ... é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando ...

[GeoGebra: um trabalho concatenado entre a álgebra e a geometria no ensino superior](#)

KB Alvarenga... - ... do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br
... ainda entre elas e o Cálculo Diferencial e Integral I. Percebemos que na formação inicial ... lados ou as que envolvem a área e um dos lados. Do mesmo modo, foram intuídas, ... dinâmica que o GeoGebra oferece, mas também efetuando os cálculos algebricamente e ...

[CITAÇÃO] CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA: REPRESENTAÇÕES E RESTRIÇÕES

JLG Andrade, DF de Miranda, I do Carmo Vaz...

[PDF] [Experiência de atividade sobre derivada utilizando o software Geogebra](#)

GC de Sousa - gente.eti.br

... proposta consiste na exploração e visualização utilizando o ambiente de Geometria Dinâmica GeoGebra ... Norte a um grupo de 10 alunos de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I. Os ... e os encontros ocorreram em um horário extra das aulas convencionais, ou seja, eles ...

[Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo](#)

AL Trevisan, MT Mendes - 2013 - repositorio.utfpr.edu.br

... turmas de Cálculo Diferencial e Integral I de cursos de Licenciatura e Engenharia da UTFPR nos câmpus Apucarana e Londrina da UTFPR. ... como motivações iniciais ao estudo de limites) e que pouco (ou mesmo nada) tem contribuído ... (no caso, o Geogebra); explorar ideias ...

[CITAÇÃO] UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA EM REALIMENTAÇÃO PARA O ENSINO DA INTEGRAL

H Borges

[Aplicações das derivadas no Cálculo I: uma atividade investigativa aplicada à engenharia de produção utilizando o GeoGebra](#)

DC Gonçalves, FS Reis - Revista da Educação Matemática, 2011 - cead.ufop.br

... investigativa relacionada a Aplicações das Derivadas utilizando o software GeoGebra. ... O Cálculo Diferencial e Integral é considerado uma das mais importantes disciplinas de ... é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando ...

[Um olhar sobre a produção científica envolvendo tecnologias da informação e comunicação na educação no mestrado profissional em Educação matemática da ...](#)

MA de Souza, VLP Oliveira, FS Reis - Revista da Educação ..., 2011 - cead.ufop.br

... realizadas em Laboratório de Informática com o software GeoGebra, explorando conceitos ... destinadas à utilização por professores dos Ensinos Superior e/ou Médio, contendo ... Integrais em um ambiente informatizado, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, pautando-se ...

[Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC: implicações para prática do professor que ensina matemática](#)

MMR Farias - 2014 - repositorio.unesp.br

... Winplot, GeoGebra e Moodle4, utilizados nesta pesquisa, e como esses contribuem com a ... em trabalho colaborativo baseado nesse programa, acessível através da Internet ou de rede local ... quando inter-relaciona noções de Cálculo Diferencial e Integral ao ensinar Funções no ...

[PDF] [EXPERIÊNCIA DE ATIVIDADE SOBRE INTEGRAL UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA](#)

F Amorim, G Sousa - santoangelo.uri.br

... saber, falaremos da concepção, aplicação e análise de resultados com atividades sobre integral via Geogebra as quais ... em 24 desses cursos, a referida instituição apresenta em sua estrutura curricular, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) ou equivalente, isto ...

[Métodos de Integração: uma discussão do seu ensino com apoio no software Geogebra](#)

FRV Alves, MA Lopes - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2013 - revistas.pucsp.br
... Tal assunto é tradicionalmente encontrado nos livros de Cálculo Diferencial e Integral. ... qualidades da função (ou classe de funções) com que lidamos. Page 6. Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v.2 n.1, pp.05- 21, 2013 10 ...

[PDF] [MEMÓRIAS E HISTÓRIAS DE AULAS DE MATEMÁTICA](#)

HDEA DE - cac-php.unioeste.br

... Entre as quais destaco o pouco ou quase nenhum conhecimento prévio como, por exemplo, a diferença de círculo e circunferência, a ... DE AULAS DE MATEMÁTICA Nas aulas de Laboratório de Ensino de Matemática tive a oportunidade de conhecer o software Geogebra. ...

[Problemas de máximos e mínimos com o auxílio do software GeoGebra e conhecimento de derivadas](#)

FM Numer - 2015 - lume.ufrgs.br

... como a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que era abordada no terceiro ano do ... calcular o valor numérico de uma função; - diferenciar se uma função polinomial do 1º grau é crescente ou decrescente; - analisar gráficos; - construir gráficos no Geogebra; ...

[CITAÇÃO] Explorando Significados sobre Cálculo Integral de Volumes por meio de Formulação e Resolução de Problemas
JC da Silva

[PDF] [A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS](#)

SBC Igliori, MV de Almeida - dfis.uefs.br

... colaboradores visando favorecer a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Na perspectiva de Tall, os autores deste artigo escolheram um software adequado, o GeoGebra, e definiram uma estratégia de resolução da equação diferencial, a forma (gráfica), ou qualitativa ...

[PDF] [A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NA OBTENÇÃO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES SUJEITO À RESTRIÇÕES](#)

PX Pamplona, DL Fernandes, EA Santos - editorarealize.com.br

... disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Cálculo III e quase sempre são resolvidos ... (3,0) e é 9. O procedimento para determinar esses valores utilizando o Geogebra, é dado abaixo. ... 2º Passo: Escreva $1 = z$ (ou outro valor diferente de um) e depois escreva $z y x = + 2 2 2$; ...

[O USO DE INSTRUMENTOS INTERATIVOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA](#)

R de Castro Prado, RA Justo - RETEC-Revista de ..., 2012 - retec.fatecourinhos.edu.br

... Cálculo Diferencial e Integral podem ser resolvidos sugerindo as ferramentas acima citadas e que possibilitam ... Contudo, montar figuras representativas a todo exercício ou ficar alterando os dados e ... No GeoGebra, por exemplo, pode ser construído um gráfico e por meio de ...

[PDF] [O uso dos softwares GeoGebra e SimCalc para o enriquecimento da Imagem de Conceito de derivada](#)

RS Imafuku - ufjf.br

... e de sua derivada, ambos desenvolvidos num ambiente informático, com os softwares GeoGebra e SimCalc; e ... exploratório, para avaliar se houve o enriquecimento das e/ou modificação nas ... Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral vêm ...

[HABITANDO ESPAÇOS VIRTUAIS DA DISCIPLINA DE CÁLCULO I: APRENDIZAGEM E INTERAÇÃO DE UM ALUNO CHAMADO “LEIBNIZ”](#)

V Rodrigues Lopes, S Scherer - Revista Paranaense de Educação ..., 2015 - fecilcam.br
... Data were obtained from the organization and development of activities, proposed with the Geogebra software in Virtual Learning Environment on WhatsApp. ... Derivatives. Introdução

O
Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, como denominaremos neste ...

[Contribuições de um curso online na formação de professores de Cálculo: reflexões a partir da perspectiva conhecimento da prática](#)

A Richit, [RG Miskulin](#) - 2013 - funes.uniandes.edu.co
... promover o desenvolvimento de competências para a utilização do software GeoGebra, o qual ... de articulação das tecnologias digitais a formação do professor de Cálculo Diferencial e Integral, seguindo uma abordagem qualitativa de caráter interpretativo, ou seja, buscou ...

[CITAÇÃO] REFLEXÕES SOBRE O USO DAS TIC COMO ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE CÁLCULO

FV Amorim, GC de Sousa

[PDF] [CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO PARA O ENSINO MÉDIO](#)

BV dos Santos, ED de Caxias, FL de Brito, LA Goulart - dm.ufscar.br
... de alunos que buscam as áreas tecnológicas, no curso de Cálculo Diferencial e Integral têm sido ... certas funções, bem como a avaliação de intervalos de crescimento ou decréscimo, noções ... médio é meramente visual, valendo-se de plotadores como o software Geogebra. ...

[CITAÇÃO] UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA EM REALIMENTAÇÃO PARA O ENSINO DA INTEGRAL

RPOE DA INTEGRAL

[O QUE ACONTECE QUANDO OS ALUNOS RESOLVEM EXERCÍCIOS DE CÁLCULO COM UM SOFTWARE?](#)

GLD Santos, JC Barbosa - VIDYA, 2014 - periodicos.unifra.br
... Disponível em: <http://www.geogebra.org/> ... No entanto, considerando as experiências anteriores dos alunos, particularmente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral (ROCHA, 2010 ... para apoiar-se apenas na tecnologia digital para levantar essas soluções e/ou conclusões. ...

[A CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA PARA A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA](#)

C Cargnin, RMO Barros - Revista Paranaense de Educação Matemática, 2015 - fecilcam.br
... de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I, apontam o uso computacional ... observação dos pares ordenados listados na janela de álgebra do GeoGebra. ... (aproximação ou não de um determinado valor à medida que se aumentava o número de pontos Page 9. ...

[UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DA MECÂNICA VETORIAL EM CURSOS DE ENGENHARIA](#)

B de Oliveira Godinho, BNM Ribeiro... - Acta Scientiae et ..., 2014 - uezo.rj.gov.br
... 2012) apresenta contribuiçao do software GeoGebra no estudo de calculo diferencial e integral. ... pela soma algébrica das componentes xey de todas as forgas (Figura 7), ou seja, (1 ... resultante e do angulo que a mesma faz com 0 eixo x. O software GeoGebra também possibilita ...

[PDF] [ABORDAGEM DA CONVERGÊNCIA DE SEQUÊNCIAS INFINITAS EM AMBIENTES INFORMATIZADOS VISANDO À CORPORIFICAÇÃO DO CONCEITO/ ...](#)

DSS de Moura Fonseca... - ... Conference on Technology ..., 2015 - sapientia.ualg.pt
... INTRODUÇÃO É notória a reconhecida importância atribuída à disciplina Cálculo Diferencial e Integral nos cursos da ... Tall (2002) denomina isso como raiz cognitiva, ou seja, como algo que ... Entendemos que os recursos do software GeoGebra utilizados nas atividades tiveram ...

[PDF] [Concepção e validação de um objeto para o ensino de derivadas: o case E2D](#)

[ÉMH Do Amaral](#), T Müller, B Gorziza - tise.cl

... o Macromedia Flash para criação de animações; os programas GIMP e Corel Draw para manipulação de imagens; e por último o GeoGebra, um software ... [2] Freitas, H; Muniz, RJ Análise quali ou quantitativa de ... [3] Guimarães, OLC Cálculo Diferencial e Integral: do Algebrismo ...

[PDF] [TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO PARA O ENRIQUECIMENTO NO ENSINO/APRENDIZAGEM](#)

CMR Caridade - ticeduca.ie.ul.pt

... conseguido adquirir e o aluno B2 afirma que a compreensão e visualização das funções se torna mais simples, ou seja reforçando a ideia do aluno A2. ... GeoGebra software in teaching-learning process, Anale. Seria ... Atividades do cálculo diferencial e integral com auxílio do ...

[Calculando área sob gráficos de funções](#)

AC Simões - 2014 - repositorio.unesp.br

... Nestas aproximações, o Geogebra nos fornece gráficos dinâmicos e tabela de valores das áreas. ... a fórmula ou, como exemplo inicial, demonstrar que este recurso gráfico nos fornece ... temos o curso de Cálculo Diferencial e Integral onde é possível mostrar a convergência ...

[CITAÇÃO] Uma abordagem numérica para problemas de otimização no Ensino Médio AP do Carmo - 2013

[PDF] [AS FERRAMENTAS DA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA COMO SUPORTE ÀS AULAS PRESENCIAS DE CÁLCULO I](#)

[HRFL de Almeida](#) - rc.unesp.br

... Cálculo Diferencial e Integral 1 (Cálculo I) é a forma de apresentar conceitos básicos ... entre eles o Graphmatica e o Geogebra, utilizado diretamente no nosso projeto. ... teoria apresentada em sala de aula, em grupo ou individualmente, e uma discussão era iniciada. ...

[PDF] [APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DA FUNÇÃO AFIM COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA](#)

AM de Souza, JP de Sousa, TC Cruz - editorarealize.com.br

... logarítmica e exponencial. Ex2.: Na primeira aula de uma disciplina de cálculo diferencial e integral para alunos da ... O que significa o zero (ou raiz) da função no gráfico? No ambiente do software Geogebra, através da mediação do professor, o aluno ...

[Uma introdução ao estudo das superfícies mínimas utilizando o GeoGebra](#)

LN da Silva, MP da Silva - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2015 - revistas.pucsp.br

... geral nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Já ... é constante para um determinado volume V , ou seja: $= 4 (3 4) 2 3$ Essas duas funções podem ser inseridas e estudadas no GeoGebra de acordo com a figura a seguir: FIGURA ...

[PDF] [OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM E GEOGEBRA: UMA PARCERIA A FAVOR DO ENSINO DA MATEMÁTICA](#)

MCD de Oliveira, JR Bertinati, R Messias... - geogebra.org.uy

... condições de aprender por meio da utilização dos recursos disponíveis, sejam eles objetos

virtuais ou ambientes virtuais de aprendizagem. ... GeoGebra Uruguay 2012 ISSN 2301-0185 428 Page 8. ... disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, na modalidade de educação a ...

[Estudo comparado da transição ensino secundário e superior entre brasil e moçambique](#)

P Mateus, M Alves - 2013 - funes.uniandes.edu.co

... aprendizagem da Matemática: caso de Geogebra no estudo de derivadas de funções reais de ... e gráfica e na possibilidade de aplicação dessas funções em outras ciências e/ou em situações ... de Cálculo Diferencial e Integral enquanto objeto matemático. No Brasil ela serve de ...

[Uma experiência de trabalho colaborativo nas disciplinas básicas da matemática nos cursos de engenharia](#)

EB de Figueiredo, IZ Siple, EB de Azevedo... - Revista de Ensino de ..., 2014 - abenge.org.br

... A preocupação com as disciplinas do ciclo bá- sico dos cursos de engenharia, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e ... apresentadas nessas disciplinas têm sido, ao longo das décadas, responsáveis por um grande número de evasões ou de retenções ...

[CITAÇÃO] A ARTE DOS POLIEDROS REGULARES: A RELAÇÃO DE EULER NOS CINCO SÓLIDOS DE PLATÃO

EC Souto, MP Tabaldi

[Virtual Math Teams: discussão de um ambiente virtual no ensino de conteúdos matemáticos em um curso de engenharia](#)

GH Gomes, SAS Vicente... - Revista Trilha ..., 2013 - editorarevistas.mackenzie.br

... de interação oferecidas no ambiente virtual VMT, na discussão de atividades da disciplina de

Física Geral II, con- tendo conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. ... Gráficos Pode-se usar o Geogebra, ou criar um gráfico no Winplot, copiar e colar no Word, para depois copiar e ...

[PDF] [OS MÉTODOS PARA CALCULAR ÁREAS E VOLUMES DE EU-DOXO E ARQUIMEDES: UM OLHAR SOB A PERSPECTIVA HISTÓRICA FAZENDO O USO ...](#)

MDF da Silva - htem2013.dm.ufscar.br

... 2 Utilizamos o Geogebra Page 6. ... vendo o produto de segmentos, ou seja, ele deduziu que: e que ... de 2008 pp. 35-39). -SILVA, MD F Problemas e modelos que contribuíram com desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos gregos a Newton. Tese de Doutorado. ...

[PDF] [Funções quadráticas, contextualização, análise gráfica e aplicações](#)

RC Menezes - 2015 - repositorio.bc.ufg.br

... Além disso, Foi usado softwares tais como o Winplot e o Geogebra, para a cons- trução dos

gráficos. ... Cálculo Diferencial e Integral. Entre os antigos, ele foi o que melhor aplicou o Método ... das áreas dos triângulos ADB e BCE é um quarto da área do triângulo ABC, ou seja, ...

[PDF] [Funções elementares de primitiva não elementar.](#)

ADEP LEITE - 2013 - sites.uem.br

... um tópico principal de todo o Cálculo Diferencial e Integral. Mas nem sempre a primitiva de uma função pode ser expressa em termos de funções elementares. ... das podem ou não ter primitivas que são expressas por funções elementares. Num terceiro ...

[CITAÇÃO] UM ESTUDO SOBRE O BAIXO ÍNDICE DE APROVAÇÃO NAS DISCIPLINAS DE CÁLCULO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA-CAMPUS RIO ...

JFG Júnior, VR de Bessa, MJ Cezana - Revista Eletrônica-Illuminart, 2015

[CITAÇÃO] A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

V Marim, LS Costa, TMM de Carvalho, APL Alberto

[Interação e Aprendizagem de conhecimentos sobre Derivadas em Espaços Virtuais](#)

VR Lopes, S Scherer - SIED: EnPED-Simpósio ..., 2014 - sied-enped2014.ead.ufscar.br

... No GeoGebra, plote o gráfico da função $f(x)=12x-2x^2$ e insira um ponto A sobre a curva que ... Eu concordo com o Cavalieri, para $x = 3$ temos $f'(x)=0$, ou seja no ponto de máximo a ... Criando um ambiente construcionista de Aprendizagem em cálculo diferencial e integral I. 2001. ...

[PDF] [O USO DE MAPAS CONCEITUAIS COMO ELEMENTO SINALIZADOR DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM CÁLCULO \(The use of concept maps as an ...](#)

NS Ferrão, [AL Manrique](#) - Investigações em Ensino de Ciências, 2014 - if.ufrgs.br

... faziam parte do conteúdo a ser ministrado outros softwares como Geogebra, Modellus, Tracker ... todos já haviam cursado, com aprovação, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I – destes ... movido pela necessidade de contribuir para fins práticos mais ou menos imediatos ...

[CONCEITO DE DIREÇÃO: O QUE DIZEM MESTRANDOS A RESPEITO?](#)

JCP Leivas, [V Bisognin](#) - Revista Didasc@lia: Didáctica y ..., 2015 - runachayecuador.com

... Idem, p. 51), ao que ampliamos para outros espaços geométricos ou ambientes, como ... a diversos campos dessa área do conhecimento, como no Cálculo Diferencial e Integral de uma e ... Para finalizar, apresentamos uma construção feita no GeoGebra, em colaboração, para a ...

[PDF] [OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL TÉCNICA DE NÍVEL MÉDIO](#)

FAFGJ Peres, DMJ Bosco, LA Lopes - Actas del VII CIBEM ISSN - cibem7.semur.edu.uy

... de eletrônica; conceitos do Cálculo Diferencial e Integral para os cursos de eletrônica e ... 2 O GeoGebra é um software gratuito de matemática que agrega conceitos geométricos e algébricos ... Assim, "Objetos de Aprendizagem podem ser definidos como entidades, digitais ou não ...

[Modelagem trigonométrica de cálculo de distâncias usando GeoGebra](#)

ROR Júnior, [A Henriques](#) - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2015 - revistas.pucsp.br

... Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, ISSN 2237- 9657, v.3 n.2, pp 80 ... 84 do saber, em particular, os objetos matemáticos, as organizações ou praxeologias desses

objetos que intervêm no ... elementos institucionais visando o Cálculo Diferencial e Integral como objeto de ...

[PDF] [O USO DE UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM PARA A DISCUSSÃO DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO](#)

GH GOMES, SAS VICENTE, BA CANDIDO, DS LOPES... - iis.org

... usual do aprendizado em geometria, mas também nas disciplinas de Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral e outras ... uma janela de bate-papo que possui uma área para desenhar ou rabiscar soluções ... P2: "A gente ta tentando resolver sem o geogebra, ento vcs tentam o ...

[HTML] [It's on the Web: what now](#)

RO Mendes, [MV Maltempo](#) - Bolema: Boletim de Educação ..., 2015 - SciELO Brasil ... Construiu-se, então, um site contendo os assuntos da ementa da disciplina, conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, de modo a ... Figura 4 Applet Geogebra. ... de aproximadamente quatro pessoas, de acordo com suas escolhas, e cada grupo tinha dois ou três computadores à ...

[CONCEITO DE DIREÇÃO: O QUE DIZEM MESTRANDOS A RESPEITO?](#)

JC Pinto Leivas, [V Bisognin](#) - Revista Didasc@ lia: Didáctica ..., 2013 - search.ebscohost.com

... Idem, p. 51), ao que ampliamos para outros espaços geométricos ou ambientes, como ... a diversos campos dessa área do conhecimento, como no Cálculo Diferencial e Integral de uma e ... Para finalizar, apresentamos uma construção feita no GeoGebra, em colaboração, para a ...

[VANTAGENS E DESVANTAGENS APONTADAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO USO DE TECNOLOGIA DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO ...](#)

D Marin - DiversaPrática, 2012 - seer.ufu.br

... 3 Foram citados os seguintes softwares pelos entrevistados: Geogebra, Maple, Mathematica, Winplot ... professor do ensino superior, seja em nível da pós-graduação ou na ... A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. ...

[PDF] [USO DE SOFTWARES MATEMÁTICOS COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM](#)

LA Klee - projetos.unijui.edu.br

... GeoGebra – Dynamic Mathematics for schools ... Faz a representação da função derivada e tangente num determinado ponto, sendo útil no Cálculo Diferencial e Integral. ... Possibilita, em trigonometria, trabalhar com o ângulo em graus ou em radianos. ...

[Introdução ao estudo de derivada: uma sequência didática com o uso do software geogebra](#)

PGS Assumpção - 2011 - repositorio.ufsm.br

... Page 13. 12 disciplinas de Cálculo Diferencial, e Integral e consistir em uma ferramenta importante na ... Exploração do Software GeoGebra: procuramos neste momento a familiarização com as ferramentas ou comandos que o aplicativo disponibiliza, ou seja, exploramos e ...

[PDF] [HOUE APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO DE FUNÇÕES?](#)

M Kist, MM Passos - sinect.com.br

... O professor da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, com objetivo de identificar quais ... dita, eles foram instruídos sobre alguns comandos básicos do software GeoGebra (software

utilizado ... entanto, na avaliação não se daria ênfase em respostas “certas ou erradas”, mas ...

[PDF] [Utilização do software Geogebra no estudo de pontos de máximo e pontos de mínimo de funções de uma variável](#)

HL Moraes - 2013 - repositorio.bc.ufg.br

... Hoje temos o software Geogebra que de forma fácil e rápida apresenta gráficos de inúmeras ... por $f'(x)$, em x_0 , é o limite, se existir, da razão $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ quando Δx tende a 0, ou seja, ... O conceito de derivada é considerado o cerne do Cálculo Diferencial e Integral e tem ...

[Ensino de derivadas em cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra.](#)

M Júnior, J Cirqueira - 2015 - repositorio.ufop.br

... contribuir para a prática de professores de Cálculo Diferencial e Integral. 1.5.2. Objetivos Específicos ... TICEM; - Elaborar, testar e avaliar atividades exploratórias com o software GeoGebra, ... cursos de Licenciatura em Matemática ou da área de ciências exatas, como Produto ...

[A corporificação do conceito de convergência de sequências infinitas por meio de atividades exploratórias](#)

D Fonseca, R de Oliveira - 2013 - funes.uniandes.edu.co

... Cálculo Diferencial e Integral, que tem índices de reprovação notoriamente altos. ... GeoGebra chamada Controle Deslizante), o valor de a_n também aumenta e se torna cada vez ... termos consecutivos da sequência estão cada vez menores e/ou que as distâncias entre os ...

[PDF] [A Espiral de Euler e suas principais propriedades.](#)

RL de Castro - mat.ufmg.br

... usando as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. A história da Espiral de Euler começa, ... No capítulo 4, veremos algumas aplicações da Espiral de Euler ou Clotóide como: "A Clotóide ... As demais figuras foram plotadas usando os programas Geogebra (gratuito) [23], Mathe- ...

[PDF] [Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT/SBM](#)

F Luis - 2013 - impa.br

... 32 V Si e Ss com o GeoGebra 34 VI Soma de Quadrados 37 ... Para defender o “Cálculo no Ensino Médio” fomos buscar onde tópicos de Cálculo Diferencial e Integral se encontram (ou poderiam ser encontrados) em conteúdos aplicados no Ensino Médio, e encontramos. ...

[PDF] [Sequência Didática Matemática](#)

L Fassarella, S Mateus-ES - luciofassarella.net

... Integral: • A dimensão conceitual concerne às motivações para a definição da ... conhecimentos básicos do software Geogebra, especificamente as ferramentas inserir ... A relevância diz respeito à pertinência ou adequação de uma atividade para o ensino do tema na ...

[PDF] [FACULDADE ESTADUAL DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS DE UNIÃO DA VITÓRIA-PR, HCT DE SOUZA...](#)

matematicafafiu.pbworks.com

... Matemática na Educação é importante examinar suas raízes nas aplicações de Matemáticas praticadas por matemáticos, engenheiros, biólogos, etc...”, ou seja é ... um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistemas são ...

[Construção e interpretação de gráficos com o uso de softwares no ensino de cálculo: trabalhando com imagens conceituais relacionadas a derivadas de funções ...](#)

MAG Ricaldoni - 2014 - repositorio.sisbin.ufop.br

... 82 4.2.2. A visualização proporcionada pelo GeoGebra 85 ... Com isso, pode-se conjecturar que ocorra certo desinteresse por parte dos alunos em aprender ou procurar entender os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, sendo que ...

[O uso do software GeoGebra no ensino da matemática](#)

A Mognon, MC de Barros - Revista do Instituto GeoGebra ..., 2012 - revistas.pucsp.br

... apoio para aulas de Cálculo Diferencial e Integral I para cursos de Engenharia. Na busca ... 4. Crie o segmento AM e o segmento MB. Movimento A ou B e observe as Page 4. 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra.ISSN 2237- 9657, pp.CCCVIII-CCCXXII, 2012 CCCXI ...

[PDF] [RESGATE DA INSERÇÃO DAS NOÇÕES ELEMENTARES DO CÁLCULO \(EM PARTICULAR, DAS NOÇÕES DE LIMITE\) DURANTE O ENSINO MÉDIO](#)

AM Ferreira - 2014 - portais4.ufes.br

... Este trabalho é uma alternativa de retorno da abordagem de assuntos ligados ao Cálculo Diferencial e Integral, de forma intuitiva e construtiva, durante o Ensino Médio. ... (especificamente, o GeoGebra)? ... dos fatos: surgiu o Cálculo Integral ou primeiro o Cálculo Diferencial? ...

[Definições matemáticas sobre funções e suas derivadas como um eixo de discussão para o ensino e a aprendizagem do cálculo.](#)

RL Pinto - 2014 - repositorio.ufop.br

... Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado ... grande parte deles desmotivada, ou apresentando lacunas na formação matemática básica”. ... Escolhemos o GeoGebra, por se tratar de um software livre, por sua interface ...

[ANÁLISE E VISUALIZAÇÃO DE FORMAS QUADRÁTICAS NA DETERMINAÇÃO DE PONTOS EXTREMANTES](#)

FRV Alves - Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e ..., 2015 - ojs.ifes.edu.br

... mathematical formulation (Taylor polynomial of 2nd order), which allows to the investigation of such points is added by the using the CAS Maple and the software GeoGebra, with the ... respeito ao motivo ou argumentação formal que conduzam o leitor a uma sensação de ...

[Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo: uma proposta baseada em análise de erros](#)

TJ Müller - 2015 - lume.ufrgs.br

... aprendizagem representacional, conceitual e proposicional. A aprendizagem representacional implica aprender o significado de palavras ou símbolos ou dos elementos por eles representados. No Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo, é fundamental aprender os ...

[PDF] [Atividades matemáticas para os cursos de engenharias](#)

MJH Rehfeldt, MT Quartieri - univates.br

... Você poderá escolher a opção Geogebra Tablets ou GeoGebra para Desktop. Em breve, estará disponibilizado o GeoGebra para Smartphone. Para instalar no seu computador, escolha o seu sistema operacional e faça o download. A tela do GeoGebra ...

[Estudo de ferramental computacional para ambiente virtual de aprendizagem como suporte de Ensino de Matemática](#)

LS Silva - 2014 - dspace.bc.uepb.edu.br

... 33 Figura 9: Aba destinada à manipulação de elementos de Cálculo Diferencial e Integral ... O Geogebra é um software de código aberto para usuários não comerciais. O uso comercial, ou seja, modificar a ferramenta para criar um novo produto de mercado, ...

[PDF] [A utilização do GeoGebra na contextualização do ensino de Química: um relato da Práxis Docente](#)

JT Machado, GF de Aquino Filho, [LH Amaral](#) - Coleção do V Seminário ... - fe.unicamp.br ... com a área de atuação dos acadêmicos, além da utilização do GeoGebra na análise ... A pesquisa desenvolvida ocorreu na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tem como o foco o estudo da ... As aulas foram de forma tradicional, ou seja, sem a contextualização com a área ...

[PDF] [Introdução ao cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção](#)

VM da Luz - 2011 - pg.im.ufrj.br

... De fato verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8%. De modo geral, o ...

[PDF] [Modelagem por meio de funções elementares](#)

CA Soares - 2014 - repositorio.bc.ufg.br

... 2014 Page 4. Page 5. Page 6. Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador. ...

34 Figura 4.1.2 Tela do Geogebra com caixa de diálogo 35 ...

[Tecnologias digitais na sala de aula: o uso do software Graphmatica como ferramenta pedagógica](#)

ETM Rico - 2012 - lume.ufrgs.br

... poderiam ser ensinados em outras situações ou pelo uso de métodos do ensino tradicional. É dinâmico e divertido, atrai e desperta muito interesse. Cita-se como exemplo o software Geogebra que partir de uma construção se pode ...

[TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO SEGUNDO OS PRESSUPOSTOS DA FILOSOFIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA](#)

M Bennemann, [NSG Allevato](#) - Nuances: estudos sobre ..., 2014 - revista.fct.unesp.br

... aprendizagem. Agora, com o contato direto com a planilha de cálculo e o GeoGebra, diz ter ... Essas investigações mencionadas pela professora dizem respeito aos trabalhos desenvolvidos pelo grupo, ou seja, explorar aspectos matemáticos técnicos e sociais no intuito de ...

[Área e perímetro de figuras planas: explorando construções dinâmicas com GeoGebra](#)

DT Kich - 2015 - lume.ufrgs.br

... software GeoGebra. Dos Caminhos da Pesquisa ... Buscavam fazer a quadratura de regiões poligonais ou limitadas por uma curva, ou seja, transformar estas figuras em quadrados ... significativos na geometria desenvolvendo o cálculo diferencial e integral. 1.2 Dimensão didática ...

[PDF] [SOBRE A MATEMÁTICA DAS MEDIDAS NO PLANETA TERRA: DOS GREGOS ÀS NOVAS TECNOLOGIAS](#)

JA Salvador, JCV Sampaio - dm.ufscar.br

... método da exaustão, de Eudoxo, uma das contribuições gregas para o Cálculo Diferencial e Integral. ... Explorar conhecimentos de geometria euclidiana e construções, desenhos ou esquemas dos objetos ... e os softwares modernos de Geometria Dinâmica como o GeoGebra. ...

[Construção e aplicação de uma sequência didática para o ensino de trigonometria usando software geogebra](#)

MM Lopes - 2010 - repositorio.ufrn.br

... para o ensino de trigonometria; 3. Elaborar um manual com orientações para o uso do software GeoGebra no ensino de trigonometria; 4. Disponibilizar, na forma digital e/ou impressa, para os professores das escolas a sequência ...

[Crescimento e decaimento exponencial](#)

GMB Fonzar - 2014 - 200.129.202.51

... 5.1 Sugestões de atividades.....80 5.1.1 O software GeoGebra.....81 ... ao apresentado nos países desenvolvidos. No antigo modelo de Ensino Médio ou Secundário, os conteúdos eram ...

[Atividades exploratório-investigativas em sala de aula de cálculo I com uso de tecnologia](#)

DV Carvalho - 2011 - repositorio.unesp.br

... de matemática. 2.4 Propostas aprovadas para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no ano de 2011 ... O conceito de função deveria ser rediscutido, construindo e/ou aprofundando os conhecimentos adquiridos pelos alunos no ensino fundamental e no ensino médio. ...

[PDF] [Geometria, Artes e Tecnologia na escola em favor do Processo de Ensino-aprendizagem](#)

CS Costa, CFB Palmeira, [S Pesca](#), PE de Moraes... - 2015 - dbd.puc-rio.br

... utilização do Geogebra e a forma como o conhecimento foi construído. ... semiconcreto, seguindo a regra geral, mas operando sobre casos – palavras ou números – concretos. (Matemática e Arte, Dirceu ... E o Cálculo, diferencial e integral, foi considerado a grande descoberta da ...

[Usando tecnologias da informação e comunicação no ensino de geometria analítica plana: explorando os conceitos de feixe de retas paralelas e concorrentes](#)

IN dos Santos, FS Reis - Revista da Educação Matemática, 2011 - cead.ufop.br

... outras disciplinas do currículo específico destes cursos, entre elas, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear ... A visualização de construções geométricas e/ou gráficas e de suas ... aproximadamente 20 (vinte) computadores, nos quais foram instalados o software GeoGebra. ...

[Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias](#)

TCB Cabral - Perspectivas da Educação Matemática, 2015 - seer.ufms.br

... exemplo, o Geogebra. O Winplot e o Maxima outrossim têm sido explorados em sala de aula como recurso didático para o trabalho de ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Portanto, é uma clara demonstração que os dispositivos eletrônicos como computadores ou mesmo ...

[Ensino de funções, limites e continuidade em ambientes educacionais informatizados: uma proposta para cursos de introdução ao cálculo](#)

DO Alves - 2010 - repositorio.ufop.br

... Ten exploratory activities on different contents of Functions, Limits and Continuity, implemented in Computer Lab using the software GeoGebra, were formulated and evaluated. ... Page 12. 11 função é crescente ou decrescente e os seus valores de máximo e mínimo, ...

[PDF] [PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA](#)

GDOEDEM GROSSO, CDER BARBOUR - bbg.unemat.br

... das escolas municipais, estaduais e particulares da região de abrangência dessa Universidade, propõe cursos e disponibiliza visitas para conhecer o material disponível, oferece suporte aos professores da instituição que ministram cursos de extensão ou prestam assessorias ...

[PDF] [Geometria Diferencial das Curvas Planas](#)

JPF Domingues - 2013 - rc.unesp.br

... e involuta, a partir de elementos de Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Euclidiana, Equações Diferenciais e Análise. ... curvas no software GeoGebra ([1]). Page 19. ... e $(0, \dots, 0, 1)$. Os elementos de R^n são n-uplas ou vetores $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, onde ...

[PDF] [Uma sequência de ensino para a aplicação do teste da Hessiana](#)

FRV Alves - Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em ..., 2012 - sbembrasil.org.br

... 1 Introdução O ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real - CUV é objeto de estudo há décadas. Vários escritos científicos, sejam realizados no Exterior ou no Brasil, indicam elementos preocupantes que, apesar dos esforços e da ...

[Tecnologias aplicadas ao ensino de cálculo nas engenharias: uma pesquisa quase experimental com uso de software maple](#)

NCS Luca - 2014 - dspace.c3sl.ufpr.br

... espaciais ao cosmo (RENZ, 2008). No Século passado, o cálculo diferencial e integral é utilizado, por exemplo, em cálculos de juros, simples ou compostos, quando, por determinado tempo há incidência de juros sobre capital e juros gerados por este. Ainda para cálculos de ...

[CITAÇÃO] CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
M ZABEL, DE FUNÇÕES

[PDF] [UMA HISTÓRIA DO ENSINO DAS CÔNICAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR NO BRASIL](#)

OTW PAQUES, E SEBASTIANI FERREIRA - apm.pt

... A partir de 1964 é reunida com o Cálculo Diferencial e Integral. ... Evidentemente, obtendo pontos e tangentes ao invés de só pontos ou só tangentes, a cônica resultará muito mais ... é por pontos e tangentes. (são as figura 1,2 e 3 do anexo, construídas com o software geogebra). ...

[PDF] [UMA CONTRIBUIÇÃO AO ENSINO DO CÁLCULO DE RAÍZES QUADRADAS E CÚBICAS](#)

MVA de Lima - 2013 - mat.ufcg.edu.br

... permitem ao aluno encontrar raízes exatas ou não, sem decorar resultados, de modo mais

significativo: utilizando operações aritméticas. ... Naquela época, já estava clara a necessidade

de se trabalhar com aproximações, ou pelo menos os matemáticos ...

[PDF] [Informática na Matemática: Computação Simbólica no Ensino Médio com o Software Gratuito GeoGebra](#)

DU Pesco, HJ Bortolossi... - A Matemática das Pipas ... - bienaldematematica.org.br
... Lembre-se que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, etc. Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra 4.2)! 1 ... Descreva como você obteve sua resposta (com ou sem o GeoGebra 4.2)! (e) Encontre o máximo divisor comum entre 2 10–1, 70! ...

[O uso dos softwares Winplot e Winmat no Curso de Licenciatura em Matemática: potencialidades, possibilidades e desafios](#)

ER Martins - 2013 - univates.br

... 105 6.4.2 Análise da proposta para a Disciplina Cálculo Diferencial e Integral.....

106 ... instituições de ensino. Os softwares livres ou de domínio público têm se apresentado como uma boa alternativa de inserção nessas instituições, principalmente nas públicas. ...

[Registros de representação semiótica e o geogebra: um ensaio para o ensino de funções trigonométricas](#)

JR Damasco Neto - 2010 - repositorio.ufsc.br

... Depois de muita pesquisa e testes, percebeu-se que o GeoGebra possuía diversas características que iam ao encontro dos interesses e objetivos da ... a idéia de Artigue (1988) que a resume em uma fase de realizações das sessões de ensino com os alunos, dentro ou fora de ...

[A presença das TIC no curso de licenciatura em matemática da UNESP-campus Guaratinguetá](#)

CPP Haka - 2013 - repositorio.unesp.br

... é visto na faculdade durante a sua formação sem que eles demonstrem um senso crítico ou autonomia para a idealização de novos projetos para o ensino de matemática com as TIC. ... Ou seja, interessava-nos alunos de primeiro ano que tinham contanto com o uso das ...

[CITAÇÃO] Algumas Superfícies Notáveis em Espaços Não-Euclidianos
IM Gonçalves

[Uso de tic's para o ensino de matemática: um estudo com o software geogebra](#)

JT Lúcio - 2014 - dspace.bc.uepb.edu.br

... Cálculo Diferencial e Integral. Ele foi desenvolvido por Markus Horhenwarter, da ... escolar nesses dois sentidos, ou seja, a matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia para entender a matemática. ... A Figura 1 ilustra a interface do software Geogebra. ...

[Experimentação-com-Geogebra: revisitando alguns conceitos da análise real](#)

LC Mazzi - 2014 - repositorio.unesp.br

... A escolha pelo software GeoGebra se deu pelo fato de ser um software livre e com inúmeras ... sendo abordado, inicialmente, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, geralmente, ... qualquer método não dedutivo, incluindo os raciocínios intuitivo, indutivo ou por analogia. ...

[PDF] [Aprendizagem de conceitos de área e perímetro com o GeoGebra no 6º ano do ensino fundamental](#)

CC Ballejo - 2015 - tede2.pucrs.br

... GeoGebra. 2.1 O SOFTWARE GEOGEBRA Na disciplina de matemática, há a possibilidade de se explorar diversos softwares educativos pagos ou gratuitos, como, por exemplo, Régua e compasso, Poly, S-Logo, GeoGebra, Graphequation, Graphmatica e Winplot. Todos os ...

[PDF] [Numericamente igual a \$\pi\$](#)

TG Marques - 2013 - repositório.bc.ufg.br

... Arquimedes. $3 + 8 \cdot 60 + 30 \cdot 3600$ ou $3 \cdot 17 \cdot 120 \sim = 3, 141666... \dots$ As fundações da nova análise foram estabelecidas na segunda metade do século XVII, quando Newton (1642 - 1727) e Leibnitz (1646 - 1716) fundaram o Cálculo Diferencial e Integral, o terreno ...

[PDF] [Edital n 12/2010 Concurso Público para Provimento de Cargos de Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico Anexo II Programas e Bibliografia](#)

P SINGER, ÉP Gradiva - ifrj.edu.br

... aspectos jurídicos da indústria do petróleo e gás as participações governamentais (Bônus de assinatura, Royalties, Participação especial, pagamento pela ocupação ou retenção de ... PINTO, D.; MORGADO, MCF Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis. ...

[Uma abordagem da distribuição normal através da resolução de uma situação problema com a utilização do software Geogebra](#)

PHR Gonçalves - 2014 - repositório.bc.ufg.br

... é vista no Ensino Médio, sendo mais comum em currículos de cursos de graduação em disciplinas de probabilidade ou estatística ... trabalho propõe uma abordagem da Distribuição Normal através da resolução de uma situação problema com auxílio do software Geogebra a ser ...

[PDF] [Transformações Geométricas: iniciativas existentes e abordagens possíveis na formação de professores](#)

IC Barroso - ufjf.br

... Geogebra. Introdução ... No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula". ... 3 Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Page 9. ...

[PDF] [ABORDAGEM HISTÓRICO CULTURAL EM SALA DE AULA INCLUSIVA DE MATEMÁTICA: O PROCESSO DE APROPRIAÇÃO DO CONCEITO DA FUNÇÃO ...](#)

SS Gonçalves-IFTM - uniube.br

... Daniel: Sandro, você passou esse negócio no GeoGebra pro pessoal? ... para a promoção da acessibilidade das pessoas portadoras de deficiência ou com mobilidade ... MACHADO, RM A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente ...

[O Auxílio do Software Geogebra na Aquisição do Conhecimento da Função Seno](#)

RSG Pereira, AP Silva, W Damin... - Perspectivas da ..., 2014 - 200.129.202.50

... execução do software ($f(x) = A + B \cdot \text{sen}(C \cdot x + D)$); a execução - plotagem do gráfico no software

Geogebra; a reflexão - análise do comportamento gráfico em relação a cada parâmetro; a ... a ele adquirir novos conceitos ou modificar conceitos anteriores. E é justamente o registro de ...

[PDF] [MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA](#)

MV DE ALMEIDA, DEINAP DE, D TALL - sapientia.pucsp.br

... III. Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: na perspectiva de David Tall. Page 4. iv ... _____ Page 5. v Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta ...

[CITAÇÃO] Os Caminhos da Modelagem no “Pós”-GPIMEM: desenvolvendo uma árvore genealógica D da Silva Soares, [MC Borba](#) - Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2014

[PDF] [Sessão Poster Digital](#)

III CMRS - Matemática e Estatística em Foco, 2015 - seer.ufu.br

... Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campus Cajazeiras, acerca do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), nos ... apresentar ao estudante uma abordagem visual de um conteúdo passado em sala de aula, ou como forma ... [1]
<http://wiki.geogebra.org/en> ...

[Identificação de funções de transferência de ordem fracionária utilizando como entrada um degrau](#)

[LA Jacyntho](#) - 2015 - repositorio.unesp.br

... passar dos anos para ajudar na implementação de modelos mais eficientes, que se chama Cálculo Fracionário (CF) ou cálculo diferencial e integral de ordem não inteira. Esta necessidade decorre de sua capacidade em ...

[CITAÇÃO] RECURSOS AUDIOVISUAIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA APLICADA EM UM CURSO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
NS Domingues, M de Carvalho Borba

[PDF] [O USO DE FERRAMENTAS PEDAGÓGICAS PARA O ENSINO DE CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL EM CURSOS SEMIPRESENCIAIS: O CASO DO INSTITUTO ...](#)

WL Bezerra - 2015 - repositorio.ufc.br

... Nesse contexto, surgiram os primeiros cursos nas modalidades à distância ou semipresenciais, com o intuito de possibilitar a educação aos lugares e povos mais distantes. ... disciplina de Cálculo I nos cursos à distância ou semipresenciais. Além de possibilitar o ...

[Um estudo sobre a introdução de conceitos de cálculo no Ensino Médio](#)

[MS Santos](#) - 2012 - lume.ufrgs.br

... Figura 23: Interface do GeoGebra. 57 ... 2.1. REALIDADE DO CÁLCULO NAS UNIVERSIDADES O ensino de Cálculo Diferencial e Integral está presente em vários cursos de nível superior. ... Novos materiais ou ...

[As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa.](#)

AM Miranda - 2010 - repositorio.sisbin.ufop.br

... Geogebra, Cabri-Geometre, Geometricks, Graphmatica, Maple, Régua e Compasso, etc. ... a carga horária e/ou reduzindo a quantidade de conteúdo nas ementas. ... O índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da ...

[Utilizando o software GeoGebra como recurso didático para o ensino do movimento oscilatório de pêndulos](#)

RCM Santos - 2013 - repositorio.unesp.br

... Atividade 4: Comportamento do movimento do pêndulo utilizando como parâmetros o comprimento do fio ou haste (l) e o valor de sua amplitude (θ_0) 123 Page 21. 5.1.4.4.1.

Desenvolvimento no software GeoGebra 123 5.1.4.4.2. Discussão de alguns fenômenos físicos ...

[PDF] [Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT/SBM](#)

MBC Lemos - 2014 - impa.br

... `A minha professora de Cálculo Diferencial e Integral III, Maria ... oes feitas na sequência didática fica mais explícita se olharmos para as duas sequências didáticas em paralelo em uma tabela, onde os tópicos que foram suprimidos da sequência didática ou transferidos de um ...

[O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO: AS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES E ALUNOS](#)

RF Pires, BA da Silva - Encontro de Produção ..., 2013 - revistapos.cruzeirosul.edu.br

... disciplinas, como por exemplo, a de Cálculo Diferencial e Integral. ... de problemas envolvendo os mais diversos contextos, ou seja, quando ele for capaz de ... CHACÓN, IMG; PRIETO, NJ Developing competencies to teach functions with GeoGebra from a holistic approach: A case ...

[Função afim no cotidiano](#)

SC Mota - 2010 - lume.ufrgs.br

... O termo „função“ tem sua gênese em questões geométricas e gráficas, alvo inicial do Cálculo Diferencial e Integral, sendo ... funções e oferece comandos como Raízes ou Extremos. As construções geométricas virtuais produzidas com o GeoGebra não ...

[PDF] [EDITAL DE RETIFICAÇÃO Nº 02/2012-ISEC, DO EDITAL Nº 01/2012-ISEC](#)

LCC Batista - uema.br

... Temas das disciplinas DISCIPLINA: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL A UMA VARIÁVEL 1. Limites ... Introdução ao GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/book/intro-en>. ... REFERÊNCIAS: Bloch, M. Apologia Da História: Ou O Ofício De Historiador. ...

[PDF] [Caros Colegas](#)

M Viana - sbm.org.br

... A utilização de recursos tecnológicos (Geogebra, Cabri por exemplo) ... de variação, derivadas parciais ou ordinárias, como, por exemplo, as equações fornecidas pelos ... Para modelagem e resolução de problemas, o cálculo numérico e o cálculo diferencial e integral, ...

[Interagindo com os Números complexos/Interacting with the complex numbers](#)

CS Puhl, IG De Lima - Revista de Ensino de Ciências e Engenharia, 2014 - latec.ufrj.br

... dificuldades ao usar software Geogebra, terão disponível um manual para encontrar ... aprendizagem possa ser utilizado como recurso de apoio ou material didático ... de graduação

de Engenharia e Computação, em disciplinas com ênfase em Cálculo Diferencial e Integral, ...

[PDF] [Interagindo com os Números complexos](#)

CS Puhl, IG De Lima - latec.ufrj.br

... dificuldades ao usar software Geogebra, terão disponível um manual para encontrar ... aprendizagem possa ser utilizado como recurso de apoio ou material didático ... de graduação

de Engenharia e Computação, em disciplinas com ênfase em Cálculo Diferencial e Integral, ...

[PDF] [BEATRIZ ALVES DA SILVA DALMOLIN](#)

ATE ARITMÉTICA, ÁEG NOS... - busca.unisul.br

RESUMO O objetivo deste presente estudo é investigar a natureza dos erros apresentados pelos estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em dois cursos de Engenharia. A análise dos dados fundamenta-se nos princípios da Teoria Histórico- ...

[Aprendizagem Matemática on-line: quando tensões geram conflitos Online math learning: when tensions generate conflicts](#)

[DLP Souto](#) - ... Matemática Pesquisa. Revista do Programa de ..., 2015 - revistas.pucsp.br ... matemático, da procura por padrões e da validação de conjecturas foi acentuado e sem nenhuma preocupação com qualquer tipo de memorização de regras ou fórmulas. O ... Um exemplo são as ideias defendidas por Devlin (1997), o 4 [www.geogebra.org](#) Page 5. Educ. Matem. ...

[A geometria do compasso \(1797\) de Mascheroni \(1750–1800\) em atividades com oGeoGebra](#)

JDS Oliveira - 2014 - repositorio.ufrn.br

... usando o software GeoGebra. A pesquisa resultou na elaboração de um produto educacional, um caderno de atividades, o qual foi estruturado de modo a permitir que durante a sua execução os alunos pudessem realizar investigações históricas e/ou Matemática, para tanto ...

[PDF] [UFRRJ](#)

GM da Fonseca Pinto - labem.uff.br

... iniciais do ensino fundamental até o nível superior, auxiliando o estudo de disciplinas como

Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo. No GeoGebra encontramos janelas para entradas de expressões algébricas ou comandos, a janela de visualização gráfica, onde podem ...

[Uma proposta de ensino da trigonometria com uso do software GeoGebra](#)

LW Pedroso - 2012 - lume.ufrgs.br

... 1 Software livre, disponível em: <<http://www.geogebra.org/cms/>>. Page 18.

17 ... ENEM, ou seja, buscou-se o desenvolvimento dos conhecimentos básicos da Trigonometria a ... relativas às suas noções sobre funções. Essa disciplina aborda o Cálculo Diferencial e Integral ...

[PDF] [PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO CENTRO DE CIÊNCIAS MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA](#)

[GSS FERREIRA](#), E ALGÉBRICAS - repositorio.ufc.br

... sempre esteve ao meu lado, seja me apoiando, me estimulando ou me orientando: Obrigado! (sem você isto não seria possível...) ... Desta forma, os estudantes de matemática desde os primeiros anos na educação básica no ensino fundamental ou no ensino médio, e por ...

[Números reais: história e didática](#)

LIL Sousa - 2013 - repositorio.ul.pt

... na matemática grega no contexto de alguns problemas geométricos que podem parecer elementares, como é o caso da diagonal de um quadrado ou do perímetro de uma circunferência. ... designar essas quantidades. “Número” na Grécia era inteiro ou racional. Os ...

[As representações no ensino e na aprendizagem da derivada de uma função: um estudo com alunos do 11.º ano de escolaridade](#)

JJTDV Barros - 2014 - repositorium.sdum.uminho.pt

... A representação gráfica foi utilizada no estudo comparativo da função com a sua função derivada ou, de modo ... Para além da calculadora gráfica, os alunos e o professor também podem utilizar o GeoGebra através da exploração de construções ...

[Matemática dinâmica: uma abordagem para o ensino de funções afim e quadrática a partir de situações geométricas](#)

EB Salin - 2014 - lume.ufrgs.br

... que ajudaram a refletir sobre as atividades elaboradas de forma a explorar os recursos semióticos do software GeoGebra. 2.1 A TEORIA DOS REGISTOS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA A Matemática trabalha com objetos abstratos, ou seja, seus conceitos, suas ...

[POSSIBILIDADES DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE UM GRUPO DE ALUNOS DO ...](#)

CS Dall'Alba - Teses e Dissertações PPGEICIM, 2015 - ppgecim.ulbra.br

... 37 2.4 TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 42 2.4.1 O software GeoGebra

Geometria na Perspectiva Curricular e/ou na Formação de Professores, Geometria na ...

[PDF] [ÁREA DA SUPERFÍCIE E VOLUME DE PRISMAS E CILINDROS.](#)

GVDOC VENDRAME - 2014 - sites.uem.br

... Figura 6 - Antiprismas.....26 Figura 7 - Poliedros regulares ou poliedros de Platão.....28 ... Figura 19 - Prismas construídos no Geogebra.....38 ...

[GeoGebra: um instrumento auxiliar no processo ensino/aprendizagem da matemática](#)

LCT Gonçalves - 2013 - repositorio.uma.pt

... construímos uma ficha de trabalho, em que os discentes trabalhavam a partir do software GeoGebra. No final desta unidade fizemos um teste a duas fases, ou seja, consistiu num teste

que foi realizado em dois momentos, ambas cotadas a 100%. Na primeira fase, os ...

[Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática](#)

NJ Baldovinotti - 2011 - repositorio.unesp.br

... Page 8. Finalmente, a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, auxiliaram na elaboração e desenvolvimento ... oficinas com cinco professores de matemática os quais atuam no ensino fundamental ou médio e de vinte estudantes do curso de licenciatura em Matemática ...

[Sequências e séries: uma proposta duvaliana para a educação básica](#)

CM Quina - 2015 - teses.usp.br

... podem auxiliar o ensino de geometria, álgebra, funções entre outros conteúdos. 6 Disponível para download gratuito no site: www.geogebra.org Page 16. 15 ... termos somados.

Ainda que o professor não se aprofunde em aspectos filosóficos ou ...

[PDF] [UMA REFLEXÃO SOBRE A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A UTILIZAÇÃO DE TECNOLOGIAS](#)

BL Ramos, [MS Rosalen](#) - HUMANIDADES & TECNOLOGIA EM REVISTA - finom.edu.br

... etc: Compartilhem conosco!" Nenhum dos participantes respondeu ou compartilhou suas estratégias ou aulas. Indicamos também alguns sites que tivessem alguma reportagem,

entre

eles:< <http://www.ebah.com.br/content/ABAAfOEsAl/software-geogebra-como-recurso...>

[PDF] [A COMPOSITION OF TECHNOLOGIES—GEOGEBRA AND DISTANCE LEARNING CAAP Abar](#), LM Barbosa - First North American GeoGebra Conference, 2010 - geogebra.ir ... IAC; Bellemain, F. Rodrigues, MHWL (2008) Construções Geométricas com Papel e Lápis ou Utilizando Software ... GeoGebra NA2010 July 27-28 2010 Ithaca College, Ithaca, NY, USA [8] Gravina, MA (1996 ... 9] Guimarães, OLC (2002) Cálculo Diferencial e Integral: do Algebrismo ...

[PDF] [SOFTWARE EDUCATIVO NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO](#)

LTÉA de Almeida - Teses e Dissertações PPGEICIM, 2014 - ppgecim.ulbra.br ... desenvolvimento realizado no ambiente informatizado destacou-se pelo fato de proporcionar ao aluno mais segurança, maior autonomia e motivação na construção do conhecimento fora ou dentro da ... Figura 07 - Interface do software GeoGebra..... ...

[As Pesquisas Sobre a Licenciatura em Matemática na Universidade Aberta do Brasil H Almeida](#), M de Carvalho Borba - Perspectivas da Educação ..., 2015 - seer.ufms.br ... ensino e aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral 1 da UAB/UFS13, enquanto ... via telefone ou correio eletrônico. ... ZAMPIERI, 2013) e ao uso de software como o Geogebra, por exemplo (HEITMANN, 2013; MELILLO, 2011; PEREIRA; MELO, 2013; SILVA, 2010). ...

[PDF] [Computer Algebra, Virtual Learning Environment and Meaningful Learning: is it Possible?](#)

[C Abar](#), L Madsen Barbosa - Acta Didactica Napocensia, 2011 - core.ac.uk ... Rodrigues, MH (2008), Construções Geométricas com Papel e Lápis ou Utilizando Software ... pdf [January 25, 2009] [8] GeoGebra website: <http://www.geogebra.org> [January ... artigo.htm [January 25, 2009] [10] Guimarães, OLC (2002) Cálculo Diferencial e Integral: do Algebrismo ...

[CITAÇÃO] CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
GA HAVEROTH, ASVF DA DERIVADA - 2013

[PDF] [ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO: MAPEAMENTO SISTEMÁTICO DE ARTIGOS SUBMETIDOS PARA O COBENGE-2007 a 2013.](#)

JACB Oliveira, JM de Jesus Santos, GRPR Pinto... - abenge.org.br ... Utilização de Kits Montados a Partir de Equipamentos Obsoletos ou Defeituosos em ... 7. Interface Matlab/Guide como Ferramenta no Ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos de ... Uma Experiência Com Conceitos De Mecânica Vetorial Utilizando O Software Geogebra. ...

[PDF] [CURSO SUPERIOR DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA](#)

AJT Segurado - reitoria.ifto.edu.br ... 38 4. INFRAESTRUTURA FÍSICA 39 4.1. Espaço Físico Existente e/ou em Construção 39 4.2. Biblioteca ...

[Didática da matemática: uma análise exploratória, teoria e prática em um curso de licenciatura](#)

CFR Siqueira - 2013 - lume.ufrgs.br

... importantes, mas faltou espaço aqui. Por fim, aos familiares, demais amigos e todos que de forma direta ou indireta contribuíram ... paraquedas 66 Figura 12: Layout inicial do Geogebra – versão 4.2.56 68 ...

[PDF] [PROJETO PEDAGÓGICO CURSO DE MATEMÁTICA](#)

RS SANTA MARIA - unifra.br

... ocorre nos meses de junho ou julho, para ingresso no segundo semestre do respectivo ano.

b) Seleção Especial - Vagas remanescentes: as vagas remanescentes são aquelas que ... estar com o Ensino Médio, ou equivalente, concluído e ter sido aprovado em processo seletivo ...

[LIVRO] [Objetos de Aprendizagem Multimodais: Projetos e Aplicações](#)

[JV de Lima](#), F Singo, A Canto Filho, T Müller, F Silva - 2014 - books.google.com

... que textual escritatem dificuldades em dedicar atenção a atividades de ensino aprendizagembaseadas em um modelo maistradicional que seapóia principalmente em exposições peloprofessor, com o uso de exclusivodorecurso visual quadro negro,verde ou branco. ...

[PDF] [SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA MESTRADO PROFISSIONAL-PROFMAT](#)

F CAON, N COMPLEXOS, IRECE APLICAÇÕES... - bicen-tede.uepg.br

... são importantes facilitadores de cálculos. Apesar disso, os Números Complexos são pouco

explorados ou explorados de forma pouco significativa no Ensino Médio. Este trabalho tem ...

33 2.2.7 Forma Trigonométrica ou Polar de um Número Complexo

[PDF] [PROFMAT/SBM](#)

WC Batista, MMV da Silva - 2014 - impa.br

... Portanto, diante de um mundo informatizado, nada mais natural que utilizar esta tecnologia como facilitador de nossas atividades sejam elas acadêmicas e/ou profissionais. ... Ele lançou as bases para o cálculo diferencial e integral. ...

[Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?](#)

DS Soares - 2012 - repositorio.unesp.br

... 18 Introdução Há um bom tempo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) é alvo de pesquisas na área de Educação Matemática. ... (SEIGEL, 1988). Ou seja, parece que a presença da Matemática nos currículos não atende ao próprio argumento que a justifica. ...

[Um estudo sobre as funções reais nas escolas de Piranga](#)

MS Cruz - 2013 - locus.ufv.br

... educacionais. A maioria dos professores não tem conhecimentos sobre softwares educacionais, alguns professores citaram o GeoGebra , o Winplot e Planilhas Eletrônicas, mas não os ... Alguns professores sugeriram materiais que propiciassem a construção ou a utilização na ...

[PDF] [FRANCIELE DALLABRIDA](#)

C SOE DE GEOMETRIA, AEVNOC DE - dmejp.unir.br

... uma base teórica e prática para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, muito ... 4 Espaço vetorial é o envolvimento de vetores com as operações de adição e multiplicação

por números reais, ou seja, é um conjunto de elemento que possuem duas operações definidas ...

[PDF] [Lembranças da escolarização narradas por uma professora da educação infantil: a materialidade de uma pasta de atividades mediando a construção da ...](#)

CA dos Santos - Coleção do V Seminário Nacional de Histórias e ... - fe.unicamp.br
... básicos para a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Numa tentativa de fomentar experiências similares as que vivenciamos, que buscassem instigar professores de Matemática a refletir acerca de suas próprias práticas avaliativas (ou, mais amplamente, suas ...

[PDF] [O professor de matemática online percebendo-se em cyberformação](#)

DJ Seidel - Teses e Dissertações PPGEICIM, 2014 - ppgecim.ulbra.br
... alunos que estudam, por exemplo, Cálculo Diferencial e Integral ou como um mero ... continuada de professores neste panorama e também sobre a EaD Online e/ou sobre tais temáticas entrelaçadas. ... sobre funções com a utilização do software Geogebra. ...

[O processo de autoria na cultura digital: a perspectiva dos licenciandos em matemática](#)

DB Alves - 2012 - repositorio.ufu.br
... 123 FIGURA 31 – Aplicativo criado no Geogebra 123 ... 95 Tabela 3– As disciplinas citadas pelos alunos que usam e/ou produzem com o ... CDI - Cálculo Diferencial e Integral ICC - Ciência da Computação ...

[Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação: uma ponte do ensino médio para o ensino superior ...](#)

IN Santos - 2011 - repositorio.ufop.br
... demonstra, através de resposta a exercícios, que aparentemente compreendeu um conceito matemático, porém, uma vez mudado o capítulo de estudo ou algum aspecto do exercício, ... computador associado a um software educacional, como o GeoGebra, poderemos ser ...

[Representação gráfica do ginásio de esportes Belin Carolo: utilização das quádras e do software maple](#)

JAR Silva - 2012 - repositorio.roca.utfpr.edu.br
... tar os mais conhecidos: Matlab, Mathematica, Geogebra entre outros. ... nas básicas da graduaç~ao, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Geometria ... O Maple é um software de computaç~ao algébrica e simbólica, ou seja, ele foi projetado ...

[PDF] [O uso da calculadora simples em sala de aula](#)

DH Arruda - 2013 - repositorio.bc.ufg.br
... I. Título. CDU: 51-37:37.016 Page 5. Page 6. Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador. ... A esses devo meus reconhecimentos. A esses que leram ou ouviram com cuidado ...

[Recorte dos produtos educacionais em história no ensino da matemática e em didática da matemática a partir das dissertações e teses defendidas no brasil entre ...](#)

AG Mello - 2012 - repositorio.ufrn.br
... Matemática têm mostrado algumas modalidades que se caracterizam pela migração conceitual e pela hibridação conceitual, ou seja, as informações são rearranjadas de ... trabalhos em uma ou outra categoria, mas, mesmo assim, notamos que há uma ...

[PDF] [Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?](#)

D da Silva Soares - 2012 - researchgate.net

... 18 Introdução Há um bom tempo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) é alvo de pesquisas na área de Educação Matemática. ... (SEIGEL, 1988). Ou seja, parece que a presença da Matemática nos currículos não atende ao próprio argumento que a justifica. ...

[PDF] [O Uso da Calculadora Simples em Sala de Aula](#)

DH de Arruda - 2013 - repositorio.bc.ufg.br

... I. Título. CDU: 51-37:37.016 Page 5. Page 6. Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador. ... A esses devo meus reconhecimentos. A esses que leram ou ouviram com cuidado ...

[PDF] [O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação pelos professores de Matemática da Universidade Pedagógica de Moçambique-Delegação de Nampula](#)

SI Momade, [J Peixoto](#), JA Civardi - 2010 - mestrado.prpg.ufg.br

... um dos caminhos certo para adquirir um bem -cultural ou social – era através de estudos. Page 6. 6 ... Durante este tempo, muitas pessoas participaram direta ou indiretamente para que euegasse a um resultado final, portanto, não é fácil encontrar as palavras ...

[PDF] [Uma Construção Geométrica dos Números Reais](#)

S de Carvalho Santos - 2015 - btdtd.ufs.br

... compasso e utilizando o GeoGebra. 1.1 Contexto histórico ... que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ... ções de variáveis reais, convergência de séries infinitas, o cálculo diferencial e integral. E ...

[PDF] [DOUTORADO EM EDUCAÇÃO](#)

SAD DE FARIAS, EA DE TRIÂNGULOS - tede.biblioteca.ufpb.br

... total de 73 questões, durante sete meses de planejamento, elaboração, execução e avaliação das cinco etapas que caracterizaram o estudo: criação; material ou materializada; linguagem ... QUADRO 08 – Perguntas sobre a construção de triângulo utilizando o GeoGebra

[A matemática do financiamento habitacional](#)

KMB Santos - 2015 - repositorio.utfpr.edu.br

... Não obstante, centenas de escolas em todo o Brasil, públicas e particulares, já vêm ministrando o assunto, de forma obrigatória ou mesmo como tema extracurricular. ... para download no site www.aefbrasil.org.br, na íntegra ou por temas como: sonho planejado, ...

[O ensino da matemática financeira no ensino médio](#)

ML Rodrigues - 2013 - repositorio.utfpr.edu.br

... Compreender situações envolvendo crescimento ou decréscimo de funções. ... Revelam-nos a sua existência já na Babilônia, no ano 2.000 aC Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas. ...

[PDF] [O Papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica](#)

EA JANZEN - 2011 - ppge.ufpr.br

... Page 5. Ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar as possibilidades para a sua criação ou produção Paulo Freire Page 6. RESUMO ... 44 Figura 3.3: Interface do software geogebra 47 ...

[A visualização no ensino de geometria espacial: possibilidades com o software Calques 3D](#)

AM Ritter - 2011 - lume.ufrgs.br

... 2 Geogebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma ... tridimensionais juntamente com as técnicas de perspectiva (Parsysz, 1989); ou ainda, a ... da Academia Francesa de Ciências, que realizou especialmente estudos sobre cálculo diferencial e integral. ...

[PDF] [Anais do III Seminário Institucional do PIBID Univates e I Simpósio Nacional sobre Docência na Educação Básica: Alfabetização e Letramento nas Diferentes ...](#)

CA Hauschild, AR Konrath, EC Dente - gnuteca.univates.br

... DESMISTIFICAÇÃO..... 429 OFICINAS..... 430 Eixo Temático: Educação e Tecnologia
gEOgEBRA: INTRODUÇÃO ÀS POSSIBILIDADES..... 431 ...

[PDF] [Da modelação matemática à simulação computacional: a experimentação matemática no ensino](#)

MCPS Oliveira - 2015 - repositorium.sdum.uminho.pt

... trabalho conducente à sua elaboração não recorri à prática de plágio ou a qualquer ... integral, séries, transformadas de Fourier, equações diferenciais, ... e ii) para efetuar simulações ... Figura 2.5 - Aplicação desenvolvida em Geogebra para estudo de rotações de uma figura. ...

[Uma proposta de ensino de funções para o Primeiro Ano do Ensino Médio](#)

PR Bernardo - 2015 - lume.ufrgs.br

... 110 Apêndice D: O uso do GeoGebra como continuidade da proposta escolherem algum curso e/ou carreira relacionada com as Ciências Exatas. ... cursos, eles terão que lidar com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que, embora seu ...

[Saberes mobilizados pelo professores de matemática na educação de jovens e adultos: buscando fios que tecem esta relação](#)

LJR Scherwenske - 2013 - repositorio.ufpel.edu.br

... que as disciplinas eram basicamente voltadas para o cálculo puro e a licenciatura propriamente dita era trabalhada em uma, ou no máximo em duas cadeiras por semestre. ... quebra-cabeça Tangram, o software Geogebra, o software Wingeom e o Material Dourado. ...

[Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática](#)

AL Trevisan - 2014 - repositorio.utfpr.edu.br

... Minha atitude passiva frente a uma avaliação em que se busca medir o quanto de uma técnica ou algoritmo é reproduzida pelo estudante foi aos ... Certamente essa escolha teve forte influência da “paixão” desenvolvida pela disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. ...

[PDF] [Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos de Geometria Analítica](#)

AF DE PAULA - 2011 - files.ddmat.webnode.com

... 161 Quadro 5: escolhas realizadas pelos alunos (justaposição ou sobreposição)
161 ... no curso de Licenciatura em Matemática. Trabalhando com o Software Geogebra, integrado à disciplina de Vetores e Geometria ...

[Relação de teses de doutorado e dissertações de mestrado relativas à Educação Matemática produzidas no Brasil no ano de 2009 A compendium of doctoral theses ...](#)

MV Melo - Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 2011 - fe.unicamp.br

... Orientadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Disponível em:
http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2009/baumann_app_me_rcla.pdf> ou <<http://cecemca.rc.unesp.br/ojs/index.php/bolema/article/view/2555/2248>> 38. BECKER, Marcelo. ...

[M-learnMat: Modelo Pedagógico para Atividades de M-learning em Matemática SCF Batista](#) - 2011 - lume.ufrgs.br

... pesquisa. Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho. ... Sociedade em Rede (CASTELLS et al., 2004), ou como a Era da Conexão (LEMOS, 2005). Em termos educacionais, a popularização destas tecnologias pode ser entendida ...

[PDF] [Construções geométricas no ambiente virtual de ensino TeleMeios com mediação na Sequencia Fedathi.](#)

AM JUCÁ - 2011 - repositorio.ufc.br

... disso, acessavam, remotamente, as máquinas dos outros participantes, sendo permitido até que qualquer deles pudesse desenhar ou escrever no ... Durante as sessões, a régua e o compasso tradicionais foram substituídos pelo software de geometria dinâmica: Geogebra. ...

[PDF] [ESTILOS DE APRENDIZAGEM E MATERIAIS DIDÁTICOS DIGITAIS NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA A DISTÂNCIA](#)

[IP DA SILVA](#) - pos-graduacao.uepb.edu.br

... Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação. ... A todos os professores do PPGEEM, que contribuíram, direta ou indiretamente, ...

[Geometria espacial no Ensino Fundamental: uma reflexão sobre as propostas metodológicas](#)

JO Chaves - 2013 - locus.ufv.br

... À Capes pelo apoio financeiro. Enfim, a todos que acreditaram em mim e, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, obrigada. Page 7. v SUMÁRIO ... excluída do currículo escolar ou passa a ser, em alguns casos restritos, ...

[Programação linear na escola básica](#)

TV Martins - 2013 - lume.ufrgs.br

... vale menos, ou mais, e do outro lado, não temos quaisquer pontos dessa região. A figura 6, adaptada de Anton (2001), dá uma ideia da prova do teorema. Essa figura apresentada pelo autor nos motivou a levar os alunos a construírem, com o auxílio do software GeoGebra, o ...

[CITAÇÃO] Quadros interactivos no ensino da matemática

MFC Loureiro - 2010 - Universidade de Aveiro

[PDF] [Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem](#)

R Magarinus - Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria, ..., 2013 - cascavel.ufsm.br

... 64 3.3.1 Apresentando aos alunos o software GeoGebra..... ... grandezas envolvidas no cálculo de juros simples ou compostos através de funções. ... estudos do Cálculo Diferencial e Integral, cujo objeto de estudo são as relações funcionais. ...

[Música e matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem](#)
CBR Camargos - 2010 - repositorio.ufop.br

... pretende-se contribuir para a Educação Matemática, na medida em que o projeto possibilitará a geração de um modelo (ou modelos) passível de utilização por professores ... nessa época, em meio à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, uma experiência com ...

[O papel do vídeo nas aulas multimodais de matemática aplicada: uma análise do ponto de vista dos alunos](#)

NS Domingues - 2014 - repositorio.unesp.br

... Vídeos. Modelagem Matemática. Cálculo Diferencial e Integral I. Multimodalidade. Page 9. ... diferentes mídias como lápis e papel, calculadoras gráficas, Winplot 6 , Geogebra 7 , ... Ou seja, essas aulas apresentam elementos de multimodalidade, embora o professor não tenha ...

[Investigando o uso de softwares educacionais como apoio ao ensino de matemática](#)

CP Machado - 2011 - meriva.pucrs.br

... Educacionais não obtém formação, durante a graduação ou quando há alguma formação, ela é insuficiente ou inadequada. ... pois não havia móveis adequados para colocar os computadores, a rede elétrica era precária ou havia falta de segurança na escola. ...

[Explorando funções polinomiais com o auxílio do graphmatica em uma escola da zona rural](#)

AL Silva - 2012 - dspace.bc.uepb.edu.br

... aprendizagem. Os programas gráficos de computador (aplicativos), como Graphmatica (utilizado nessa pesquisa), GeoGebra, Winplot, entre tantos outros, podem ser utilizados ... Ou seja, em um mundo em constante evolução é notável e urgente que o ensino de ...

[Abordagem histórico cultural em sala de aula inclusiva de Matemática: o processo de apropriação do conceito da função derivada por um aluno cego.](#)

SS Gonçalves - 2014 - repositorio.ufop.br

... esse novo desafio. Daí surgiu a inquietação que motivou esta pesquisa: ensinar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral a alunos cegos. Quais recursos utilizar para que eles apreendam conceitos, por exemplo, de derivadas ou funções ...

[PDF] [UM ESTUDO SOBRE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA](#)

FDES COELHO - mariabicudo.com.br

... Portanto, em ato de gratidão, enlaço-as nas linhas a seguir. Reconheço-as, acolhedoras deste trabalho, como solo de pesquisa ou como mantenedoras. ... Page 13. 13 constitua4. Também, não é entendido como o real ou a coisa que pode ser para além de nossa percepção. ...

[Una propuesta para articular área y medida usando la TSD, en alumnos de nivel superior.](#)

MA Martínez Miraval - 2015 - tesis.pucp.edu.pe

... areas of the approximation rectangles as an addition of terms to their learning process. Keywords: area, measure of an area, GeoGebra, dialectics. Page 7. 7 LISTA DE FIGURAS ... cualquier curso de cálculo diferencial e integral. Para su estudio, se parte de dos ...

[PDF] [LÍCIA GIESTA FERREIRA DE MEDEIROS](#)

DMÂ FORMA, ASTG NO - uss.br

... Educação Matemática e depois esse mestrado, por todas as vezes que me ajudou durante o curso, por todas as manhãs ou tarde discutindo e corrigindo este trabalho. Muito,

muito ... Obrigada a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que eu cursasse esse ...

[PDF] [FABIAN ARLEY POSADA BALVIN](#)

PANOC DA MODELAGEM - rc.unesp.br

... com o conhecimento algébrico, as constituídas pelos alunos configuraram modos de ação que tomam o conceito de variação conjunta entre diferentes quantidades (covariação), como principal unidade de análise; isto é, adotam o enfoque variacional ou funcional como ...

[Práticas algébricas no contexto da modelagem compreendida como proposta pedagógica](#)

FA Posada Balvin - 2015 - repositorio.unesp.br

... com o conhecimento algébrico, as constituídas pelos alunos configuraram modos de ação que tomam o conceito de variação conjunta entre diferentes quantidades (covariação), como principal unidade de análise; isto é, adotam o enfoque variacional ou funcional como ...

[Contribuições de uma Unidade de Aprendizagem sobre Estatística com o recurso da Planilha](#)

ML Cunha - 2012 - meriva.pucrs.br

... tecnológicos para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que destinavam-se a tornar aqueles conteúdos mais significativos e aplicáveis a outras áreas do conhecimento, expandindo a atuação dos alunos para além da resolução de listas de exercícios ou de problemas ...

[PDF] [CONTRIBUIÇÕES DIDÁTICAS DE MALBA TAHAN PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA](#)

AJC Scopel - biblioteca.pucminas.br

... pelas conversas que tínhamos. Aos meus familiares, que de forma direta ou indireta, contribuíram para a minha formação. A ... aspectos instrumentais e/ou utilitários da ação de Malba Tahan condizentes com enfoques da Educação Matemática. ...

[O ensino da geometria analítica em um curso de licenciatura em matemática: uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de ...](#)

FC Cardoso - 2014 - bibliodigital.unijui.edu.br

... a qual tem conhecimento da teoria que sustenta este estudo, ou seja, a teoria ... Moreover, the collaborative teacher used as a methodological resource Geogebra software that leveraged the ... Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Análise Matemática, Fundamentos de ...

[PDF] [MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA](#)

HT de Souza - sapientia.pucsp.br

... Esta investigação poderia acontecer por dois caminhos: com estudantes ou docentes do Ensino Médio ou do Ensino Superior. ... modular por meio da resolução de problemas utilizando as TICs, mais especificamente, o software GeoGebra, com professores do Ensino Médio. ...

[Desenvolvimento da cultura digital na formação inicial do professor de matemática](#)

DC Menezes - 2014 - penelope.dr.ufu.br

... Quadro 9 - Dissertações que utilizaram o software GeoGebra do Ensino Médio ... As classes multisseriadas existem principalmente nas escolas do meio rural, visando diminuir a evasão escolar, ou em projetos específicos, baseados na metodologia da aceleração e no telecurso ...

[A interação da modelação com as TIC: uma análise no interesse dos estudantes em aprender matemática](#)

AL Machado - 2012 - repositorio.pucrs.br

... Aos 14 estudantes, colaboradores voluntários no projeto, sempre educados e atenciosos, que abriram mão de horas de estudos e/ou lazer. Em especial ao ... forma direta ou indireta, contribuíram para que eu vencer esta etapa. Page 7. 6 RESUMO ...

[PDF] [Caderno de Resumos](#)

V SHIAM - researchgate.net

... Erika Ruggio de Sousa Figueiredo Maxwell Soares de Oliveira Julia Schaeztle Wrobel Sobre

Pipas e Geometria ou Como Ensinar Matemática Brincando ... Novos sentidos ao ensinar-aprender funções a partir do coletivo pensante professor-estudante-GeoGebra InvAu27 ...

[Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical](#)

LGS Souza - 2012 - teses.usp.br

... por me permitirem o prazer de fazer este trabalho; A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para que eu galgasse mais este degrau. Page 7. 5 ... (superior) e a reta de regressão linear (inferior), feito no Geogebra 39 ...

[Estudos das inequações: contribuições para a formação do professor de matemática na licenciatura.](#)

AF Magalhães - 2013 - repositorio.sisbin.ufop.br

... UFOP, que contribuíram imensamente com minha formação pessoal e profissional. Enfim, agradeço a todos aqueles, que direta ou indiretamente, contribuíram para a ... curso de Licenciatura em Matemática ou diretamente em escolas públicas e particulares do ...

[Um estudo sobre licenciatura de matemática oferecida na modalidade à distância](#)

FS Coelho - 2015 - repositorio.unesp.br

... Portanto, em ato de gratidão, enlaço-as nas linhas a seguir. Reconheço-as, acolhedoras deste trabalho, como solo de pesquisa ou como mantenedoras. ... Page 13. 13 constitua4. Também, não é entendido como o real ou a coisa que pode ser para além de nossa percepção. ...

[PDF] [Celebrado del 16 al 18 de noviembre del 2011 en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, organizado por la Escuela de Matemática. Cartago, Costa Rica](#)

MSAB Alpízar - cidse.itcr.ac.cr

Page 1. i Page 2. ii Celebrado del 16 al 18 de noviembre del 2011 en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, organizado por la Escuela de Matemática. Cartago, Costa Rica M.Sc. Alexander

Borbón Alpízar Editor Page 3. iii Comité Organizador: M.Sc. Alexander Borbón Alpízar ...

[Del álgebra a la geometría: la sistematización de las coordenadas cartesianas y la representación gráfica de funciones en la Introdutio in analysin infinitorum de ...](#)

M Navarro Moncho - 2012 - roderic.uv.es

... ANEXO X. MÉTODO CARTESIANO EN LACROIX ANEXOS GEOGEBRA ANEXO XI. ... Page 10.10 en su propio tratado de cálculo diferencial e integral (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral), en los que el principal objetivo es la reestructuración, organización y ...

[PDF] [A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM AMBIENTES COLABORATIVO-INVESTIGATIVOS DE APRENDIZAGEM: UM ESTUDO DE CONCEITOS DE ...](#)

JML Pinheiro - 2013 - uff.br

... utilização do software VMTwG e do Geogebra. ... Ainda, ela tem ramificações em outras disciplinas do currículo específico destes cursos, entre elas, Cálculo Diferencial e Integral, Page 19. 19 ... “pouca ou nenhuma” ênfase dada ao conteúdo no Ensino Médio. ...

[PDF] [Que políticas educativas para o desenvolvimento sustentado do ensino da Matemática em Portugal?](#)

HM Guimarães, JP Gonçalves, [P Abrantes](#) - ATAS, 2015 - dspace.uevora.pt
... Page 20. Painel 20 XXVI SIEM em Portugal? Ou será que o 'detalhe' não é um aspeto importante? ... São em particular bastante valorizadas as possibilidades, que esta vem magnificar, de realizar com os alunos um trabalho de natureza investigativa ou exploratório. ...

[Processo de autonomia na formulação de problemas de matemática: uma perspectiva de formação inicial de professores](#)

ML Alexandre - 2014 - repositorio.ufu.br
... Essas são páginas para mim tão importantes quanto qualquer capítulo desse texto, qualquer citação ou conclusão que possa ser apresentada. ... 20 INTRODUÇÃO: OS “QUÊS” E OS “PORQUÊS” DESTAS PÁGINAS Tem gente que escreve por ego, ou só pra fazer firula. ...

[PDF] [TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UMA INVESTIGAÇÃO NO PROJETO “AULA INTERATIVA”](#)

CR DE OLIVEIRA - matematicaepeticadocente.net.br
... Page 4. 4 Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos. ... justificativa ou relevância do tema e o problema de pesquisa. 1.1 TRAJETÓRIA PROFISSIONAL ...

[Resolução de problemas envolvendo funções quadráticas por alunos do ensino secundário](#)

GMDS Nunes - 2012 - repositorio.ul.pt
... Os “intervalos” apresentados incluem os extremos. Por exemplo 14-17 significa 14, 15, 16 ou 17 valores. A classificação máxima é de 20 valores – p 43. ... Novamente, os “intervalos” apresentados incluem os extremos. Por exemplo 14-16 significa 14, 15 ou 16 valores. A ...

[PDF] [Año XI–Número 43–Diciembre 2015](#)

F Invitada, RU Azpeitia - fisem.org
... En él los autores destacan las preocupaciones didácticas observadas en los libros y en las prácticas de los maestros que enseñaron los cursos de Cálculo diferencial e integral en la Universidad de São Paulo entre los años 1930 y 1990. ...

[Origen y evolución del concepto de universo: una aproximación a los lineamientos de astronomía como asignatura de la educación media](#)

JH Marín Beltrán - bdigital.unal.edu.co
Page 1. Origen y Evolución del Concepto de Universo: Una Aproximación a los Lineamientos de Astronomía como Asignatura de la Educación Media JORGE HUMBERTO MARÍN BELTRAN UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA FACULTAD DE CIENCIAS ...