

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP**

LUIZ FELIPE ARAUJO MOD

**O OBJETO MATEMÁTICO TRIÂNGULO EM TEOREMAS DE REGIOMONTANUS:
UM ESTUDO DE SUAS DEMONSTRAÇÕES MEDIADO PELO GEOGEBRA**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2016**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

LUIZ FELIPE ARAUJO MOD

O OBJETO MATEMÁTICO TRIÂNGULO EM TEOREMAS DE REGIOMONTANUS:
UM ESTUDO DE SUAS DEMONSTRAÇÕES MEDIADO PELO GEOGEBRA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação da Prof. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

SÃO PAULO
2016

BANCA EXAMINADORA

Durante a realização deste Mestrado Acadêmico, foi concedida uma bolsa pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura

Local e Data

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me sustentado integralmente e por sempre me dar infinitamente mais do que posso imaginar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pela bolsa concedida durante a realização deste Mestrado Acadêmico.

À Professora Doutora Celina Abar por sua compreensão e orientação durante todo o período de Mestrado.

Aos professores da Banca Examinadora, Doutor Sérgio Dantas e Doutor Fumikazu Saito, pelas contribuições valiosas para este trabalho.

Aos meus pais Kênia Virgínia Silva Araujo e João Mod Filho e às minhas irmãs Mariana e Beatriz que sempre me incentivaram e apoiaram.

Aos meus familiares e amigos que me encorajaram na realização deste Mestrado.

A todos os meus professores da minha Graduação na UFABC e do Mestrado na PUC-SP pelos conhecimentos compartilhados que me permitiram chegar até aqui.

MOD, Luiz Felipe Araujo. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus:** um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2016.

Resumo: Esta pesquisa de Mestrado Acadêmico tem como objetivo investigar teoremas de Regiomontanus, sobre triângulos, com a utilização do *software* GeoGebra. Regiomontanus (1436-1476) foi um matemático cuja produção contribuiu especialmente no desenvolvimento da Trigonometria, com a obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, publicado em 1533 e que é o foco desta pesquisa. No Livro I dessa obra, encontram-se teoremas cujas demonstrações envolvem construções de triângulos satisfeitas algumas condições dadas. As demonstrações de alguns destes teoremas são analisadas pela mediação dos movimentos dinâmicos do GeoGebra na perspectiva das funções da demonstração segundo Villiers. Verifica-se a necessidade de percorrer os diferentes papéis da demonstração e a importância da utilização do GeoGebra como instrumento de investigação, no qual é possível identificar que algumas possibilidades não estão contempladas nas demonstrações de Regiomontanus. A pesquisa, em seu desenvolvimento, também indica possibilidades de como um legado da História da Matemática pode-se tornar uma atividade de investigação em sala de aula.

Palavras-chave: Regiomontanus, Demonstração, Geometria, GeoGebra.

MOD, Luiz Felipe Araujo. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus:** um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2016.

Abstract: This Master's research aims to investigate Regiomontanus' theorems about triangles with the use of the software GeoGebra. Regiomontanus (1436-1476) was a mathematician whose production contributed especially in the development of trigonometry with the work *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, published in 1533 and that is the focus of this research. In the Book I of his work, there are theorems whose demonstrations involve constructions of triangles met some given conditions. Demonstrations of some of these theorems are analyzed by the mediation of the dynamic movements of GeoGebra in view of the functions of the demonstration according to Villiers. There is the need to scroll through the different roles of the demonstration and the importance of the use of GeoGebra as an instrument of investigation, in which it is possible to identify that some possibilities are not included in the Regiomontanus' demonstrations. The survey, in its development, also indicates possibilities of how a legacy of the History of Mathematics can become a research activity in the classroom.

Key words: Regiomontanus, Demonstration, Geometry, GeoGebra.

Lista de Figuras

FIGURA 1 - SENO DE UM ÂNGULO	31
FIGURA 2 - TRIÂNGULO RETÂNGULO QUALQUER	37
FIGURA 3 - UMA EXPLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS	38
FIGURA 4 - UMA PROVA DO TEOREMA DE PITÁGORAS	38
FIGURA 5 - UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS	39
FIGURA 6 - UTILIZAÇÃO DO <i>SKETCHPAD</i>	46
FIGURA 7 - TELA DO GEOGEBRA	47
FIGURA 8 - PROBLEMA DO TETRAEDRO	50
FIGURA 9 - TEOREMA 20	58
FIGURA 10 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 1)	59
FIGURA 11 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 2)	59
FIGURA 12 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 3)	60
FIGURA 13 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 4)	60
FIGURA 14 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 5)	61
FIGURA 15 - TEOREMA 20 (ARGUMENTO 7)	62
FIGURA 16 - TEOREMA 24	64
FIGURA 17 - TEOREMA 24 (ARGUMENTO 1)	64
FIGURA 18 - TEOREMA 24 (ARGUMENTO 2)	65
FIGURA 19 - TEOREMA 24 (ARGUMENTO 3)	65
FIGURA 20 - TEOREMA 24 (ARGUMENTO 4)	66
FIGURA 21 - TEOREMA 27	67
FIGURA 22 - TEOREMA 27 (ARGUMENTO 1)	68
FIGURA 23 - TEOREMA 27 (ARGUMENTO 3)	69
FIGURA 24 - TEOREMA 31	70
FIGURA 25 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 1)	71
FIGURA 26 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 2) A	71
FIGURA 27 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 2) B	72
FIGURA 28 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 5) A	73
FIGURA 29 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 5) B	73
FIGURA 30 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 8)	74
FIGURA 31 - TEOREMA 31 (ARGUMENTO 9)	75
FIGURA 32 - TEOREMA 34	76

FIGURA 33 - TEOREMA 34 (ARGUMENTO 1)	77
FIGURA 34 - TEOREMA 34 (ARGUMENTO 2)	77
FIGURA 35 - TEOREMA 34 (ARGUMENTO 3)	78
FIGURA 36 - TEOREMA 34 (ARGUMENTO 4)	78
FIGURA 37 - TEOREMA 34 (ARGUMENTO 5)	79
FIGURA 38 - TEOREMA 43	80
FIGURA 39 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 1)	81
FIGURA 40 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 2) A	82
FIGURA 41 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 2) B	82
FIGURA 42 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 3) A	83
FIGURA 43 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 3) B	84
FIGURA 44 - TEOREMA 43 (ARGUMENTO 3) C	84
FIGURA 45 - TEOREMA 47	86
FIGURA 46 - TEOREMA 47 (ARGUMENTO 1)	87
FIGURA 47 - TEOREMA 47 (ARGUMENTO 3)	88

Sumário

Lista de Figuras.....	15
Introdução	21
Capítulo 1. Considerações sobre História da Matemática e Regiomontanus.....	23
1.1. Um estudo da História para o Ensino da Matemática	23
1.2. Regiomontanus	26
1.3. <i>De Triangulis Omnimodis Libri Quinque</i>	29
Capítulo 2. Quadro teórico	33
2.1. Aspectos das Transposições Didática e Informática.....	33
2.2. Demonstração, prova e explicação	35
2.3. Funções da demonstração.....	40
Capítulo 3. Considerações sobre o Livro I de Regiomontanus e a mediação do GeoGebra.....	45
3.1. Tecnologia e a mediação do GeoGebra	45
3.2. Apresentação dos teoremas	51
Capítulo 4. Construção e análise dos teoremas escolhidos.....	55
4.1. Teorema 20.....	57
4.2. Teorema 24.....	63
4.3. Teorema 27.....	66
4.4. Teorema 31.....	69
4.5. Teorema 34.....	75
4.6. Teorema 43.....	80
4.7. Teorema 47.....	85
Considerações finais	89
Referências	93
Apêndice A – Resultados de Euclides.....	97
Apêndice B – Teoremas de Regiomontanus.....	99
Apêndice C – Tábua de senos	105

Introdução

Minha trajetória docente se iniciou aos treze anos de idade quando comecei a dar aulas particulares de Matemática para alunos da rede particular de ensino. A prática só fez crescer meu interesse pela disciplina.

Quando concluí o Ensino Médio decidi fazer os cursos de Bacharelado e Licenciatura em Matemática. Foi na realização destes cursos que meu fascínio pela área se consolidou. Durante o curso, realizei dois projetos de Iniciação Científica financiados pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e um projeto financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP); aprofundei-me em estudos relacionados à Geometria (Superfícies Mínimas, Teoremas Notáveis da Geometria Plana e Triangulação de Polígonos) e na utilização de *softwares* para o estudo da Matemática (utilizei o *MatLab* para desenvolver rotinas de Triangulação de Polígonos no Plano Euclidiano e no Plano Hiperbólico).

A primeira disciplina do Bacharelado em Matemática em que tive contato com o Método Axiomático de Demonstração foi uma disciplina chamada “Geometria Plana e Desenho Geométrico”. A partir dessa disciplina e das pesquisas em Iniciações Científicas, orientadas pelo Prof. Dr. Valério Ramos Batista, fiquei incentivado a continuar os estudos em Geometria Axiomática.

Para atender as minhas aspirações profissionais como docente, decidi cursar o Mestrado em Educação Matemática.

Meus estudos acadêmicos iniciais sempre contemplaram Geometria, Demonstração e Tecnologia e, no Mestrado, tive ainda contato com outros temas relativos à Educação Matemática sobretudo em relação à utilização de tecnologias. Por isso, resolvi me dedicar ao estudo das demonstrações de alguns teoremas estabelecidos por Regiomontanus, importante matemático do século XV, com a finalidade de investigá-las em um ambiente dinâmico, em especial às relativas a triângulos no plano euclidiano. O objetivo geral deste trabalho é, portanto, investigar teoremas de Regiomontanus com a utilização do GeoGebra.

Com aporte na teoria de M. De Villiers (2002), sobre as funções da demonstração, percebi um caminho a ser percorrido para aperfeiçoar meus

conhecimentos com esta pesquisa e, conseqüentemente, aprimorar minha prática docente.

Assim, o presente trabalho se dedica a uma análise do Livro I de Regiomontanus no qual encontram-se Teoremas sobre a construção de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas, e de onde emergem as questões desta pesquisa: “quais funções da demonstração se revelam nas situações geométricas dos teoremas de Regiomontanus sobre triângulos quando explorados no GeoGebra?” e “como a exploração da demonstração pode se tornar uma atividade de investigação Matemática ou estratégia didática em sala de aula?”.

O primeiro capítulo apresenta algumas considerações sobre o papel da História da Matemática no Ensino e que justificam explorar alguns teoremas de Regiomontanus. Além disso, contém um recorte biográfico de Regiomontanus e sua obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* que justificam a escolha desses para esta pesquisa.

No segundo capítulo, estão expostos os estudos sobre as funções da demonstração. São apresentados alguns aspectos das Transposições Didática e Informática segundo Chevallard e Balacheff e os conceitos de demonstração, prova e explicação segundo Balacheff, que deram suporte às funções da demonstração segundo Villiers, e permitiram o desenvolvimento do trabalho.

O terceiro capítulo traz algumas considerações sobre a mediação do GeoGebra e a apresentação de teoremas do Livro I da obra *De Triangulis* de Regiomontanus, que foram escolhidos para análise.

As funções da demonstração, caracterizadas por Villiers, embasaram o estudo dos teoremas sobre triângulos selecionados feito no quarto capítulo, onde os teoremas escolhidos foram apresentados, indicando caminhos de suas construções no GeoGebra e respectivas análises.

O trabalho finaliza com algumas considerações sobre o estudo realizado nos capítulos anteriores e indica possibilidades para futuras pesquisas.

Capítulo 1. Considerações sobre História da Matemática e Regiomontanus

Este capítulo apresenta algumas considerações sobre o papel da História da Matemática no Ensino que justificam explorar alguns teoremas de Regiomontanus. Breve histórico de sua vida e obra são também aqui apresentados.

1.1. Um estudo da História para o Ensino da Matemática

O primeiro aspecto destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) com relação à História da Matemática é que “o conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores” (BRASIL, 1997, p. 30), pois, desta forma, os docentes serão capazes de mostrar que a matemática não é uma ciência de verdades eternas, infalíveis e imutáveis e, além disso, conhecer os processos que levaram à estruturação dos conceitos matemáticos permitirá uma melhor compreensão da aprendizagem dos alunos (BRASIL, 1997).

É possível verificar que a matemática se desenvolveu em resposta a questionamentos de diferentes origens e contextos – de ordem prática como na divisão de terras, de questões provenientes de outras ciências como a física e a astronomia e de investigações da própria matemática – como sugerem os PCN (BRASIL, 1997).

Sobre a importância da contribuição da História da Matemática no ensino e aprendizagem, os PCN indicam que

Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1997, p. 34)

Além disso, abordar os conceitos matemáticos em conexão com sua história permite um resgate da identidade cultural e pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos como forma de responder às suas motivações ou finalidades, permitindo a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento (BRASIL, 1997). Mais do que isso, os alunos serão levados a compreender que a abstração matemática de algumas culturas permitiu os avanços

tecnológicos de hoje (BRASIL, 1998). Portanto, “a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles” (BRASIL, 1997, p. 43).

Nesse sentido, os PCN de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) apontam diversas vezes que os aspectos históricos podem ser utilizados pelo professor para a compreensão de: números naturais, inteiros e racionais (páginas 64, 71 e 102), grandezas e unidades de medida (páginas 65, 69, 101, 129, 132 e 133) e geometria (páginas 125 a 127).

Entretanto, essa abordagem não se resume em situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou citar trechos da História da Matemática. O professor deve encará-la “como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados” (BRASIL, 1998, p. 43). Por conseguinte, “a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos” (BRASIL, 1997, p. 23).

Sugere-se “que, embora a história da matemática seja uma mediadora para a aprendizagem da matemática, não é método de ensino, mas uma provedora de recursos que conduz à reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático” (FURINGHETTI, 2007 apud SAITO; DIAS, 2013).

Furinghetti (2007) se refere a um programa de educação para futuros professores no qual “a História da Matemática não é introduzida *per se*, mas como mediadora do conhecimento para o ensino” (p. 133 – tradução do autor).

A autora ressalta que o objetivo deste programa foi

[...] fazer os participantes refletirem sobre o significado dos objetos matemáticos por meio da experimentação dos momentos históricos de sua construção. Pretendia-se que esta reflexão pudesse promover uma apropriação de significado para o ensino de objetos matemáticos que prevenisse a reprodução passiva do estilo de ensino que os futuros professores vivenciaram quando estudantes. (FURINGHETTI, 2007, p. 133 – tradução do autor)

Contudo, pesquisas apontam que propostas de interação entre História e Educação Matemática e estudos sobre o papel da história da matemática no ensino se apresentam, em sua maioria, como relatos e “ensaios” (SAITO; DIAS, 2013). Por isso, é necessário um diálogo entre historiadores e educadores da matemática de modo a refletirem “sobre a possibilidade da construção de uma interface que

contemple a significação dos objetos matemáticos historicamente constituídos” (SAITO; DIAS, 2013, p. 90).

Faz-se necessário aprofundar o diálogo entre historiadores da matemática e educadores da matemática de modo a alinhar as concepções de natureza epistemológica e historiográfica da história da matemática, juntamente com diferentes propostas da didática matemática, para que uma interface entre duas diferentes áreas possa ser construída (SAITO, 2013).

Mendes (2009) salienta que:

Informações históricas devem certamente passar por adaptações pedagógicas que, conforme os objetivos almejados, devem se configurar em atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ou fora dela (extraclasse). Além disso, devem recorrer a materiais manipulativos sempre que necessário sem perder de vista que a aprendizagem deve ser alcançada a partir das experiências e reflexões dos próprios estudantes. (MENDES, 2009, p. 109)

O autor acredita que:

De acordo com o nível de complexidade do conhecimento a ser construído pelos estudantes, independente do nível escolar em que se encontrem, é adequado o uso de atividades que favoreçam a interatividade entre o sujeito e seu objeto de conhecimento [...]. (MENDES, 2009, p. 115)

Como Saito e Dias indicam, a interface entre História e Educação Matemática “não é única e constitui-se numa gama de possibilidades” (2013, p. 92). Nesta pesquisa, aspectos do trabalho de Regiomontanus serão apresentados como um legado da História da Matemática e especificidades da criação de sua obra serão apenas mencionadas. Privilegiar-se-á a exploração de alguns teoremas por ele descritos por meio de um ambiente dinâmico de Geometria com base nas funções da demonstração segundo Villiers (2001, 2002).

Nas duas próximas seções, será apresentado um recorte biográfico de Regiomontanus e sua obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, tomando como principais referências a tese de doutorado de Ana Carolina Costa Pereira (2010) e o livro de Barnabas Hughes (1967).

1.2. Regiomontanus

Johann Müller nasceu no dia 6 de junho de 1436 na cidade de Königsberg¹, atual capital da província russa Kaliningrado. Foi do nome de sua cidade natal que surgiu o nome pelo qual ele é mais conhecido. Regiomontanus é a versão latina de Königsberg que no português significa montanha do Rei.

O pai de Regiomontanus era um moleiro com condições financeiras que possibilitaram enviar seu filho para estudar fora de Königsberg onde as escolas não satisfaziam as necessidades deste habilidoso praticante de matemática.

Foi enviado para a Universidade de Leipzig aos onze anos, onde iniciou seus estudos universitários. Já em 1448 demonstrou suas habilidades na elaboração de seu primeiro almanaque mesmo sem ter professores que pudessem lhe ensinar como fazer os cálculos.

Não é possível saber quais foram seus professores de Astronomia na Universidade de Leipzig, pois estes eram escolhidos entre os professores da Faculdade de Artes. Este seria um dos fatores para que Leipzig ficasse atrás de Viena em Astronomia e Matemática. Em 1450, Regiomontanus matricula-se na Universidade de Viena, na Áustria, atraído pelo ensino de Matemática, Astronomia e Cosmologia.

Georg Peurbach (1423-1461), o mais proeminente defensor do Humanismo no solo alemão da época, foi professor de Regiomontanus a partir de 1454. Mais tarde, se tornou seu companheiro de estudos e pesquisas. Mais do que isso, realizaram juntos excelentes trabalhos, por exemplo:

Como resultado de uma conferência sobre *Teoria Planetária* ministrada na Universidade de Viena por Peurbach, as notas escritas por Regiomontanus, que estava na plateia, foram publicadas pela primeira vez na imprensa de Nuremberg, em 1472. O Cardeal Bessarion (1403 – 1472) obteve uma cópia com os comentários do Regiomontanus. Entre 1472 e 1653 o texto passou por 56 edições e foi o livro preferido no século XVI. Entre 1528 e 1619, teve quatro edições em francês, uma edição em italiano, em 1566, e uma tradução para hebraico, em 1546. (PEREIRA, 2010, p. 31 e 32)

Em 1452, Regiomontanus recebeu o grau de bacharel e, em 1457, foi nomeado para o corpo docente da Universidade de Viena. Nos anos que viveu em Viena

¹ A cidade também ficou famosa por ter tido entre os seus habitantes o filósofo Immanuel Kant e pelo problema das sete pontes de Königsberg, resolvido por Euler em 1736.

escreveu os horóscopos de pessoas da nobreza. Ele também calculou as posições diárias dos planetas para o ano de 1451 e, depois, para 1453-1461.

Entre 1454 e 1458, fez cópias de diversas obras mostrando sua preocupação em adquirir a melhor educação, dentre elas pode-se encontrar trabalhos de Peurbach e importantes tratados medievais.

Em sua passagem por Viena, o cardeal Bessarion convidou Peurbach para uma viagem a Roma com o objetivo de escrever o *Epítome* do livro *Almagesto*, de Ptolomeu. Ele aceitou o convite com a condição de que Regiomontanus fosse com ele. Contudo, Peurbach faleceu antes de terminar a obra e coube a Regiomontanus concluí-la em 1462.

Enquanto acompanhava o cardeal em suas viagens, ele escreveu o *Epítome do Almagesto* e outros textos, além de reproduzir obras de outros autores. O *Almagesto* de Ptolomeu era uma obra fundamental da Astronomia antiga e o *Epítome* ajudaria na sua compreensão. Sobre esta obra, Pereira indica que:

[...] foi um novo tratado astronômico que abriu caminho para futuras investigações baseadas em observações fundamentais e resultados de épocas passadas. Tanto Copérnico quanto Galileu usaram-no como livro texto. O livro foi bastante considerado pelos jesuítas, de forma que ele não foi banido e mesmo os jesuítas ensinavam por ele em Pequim. (PEREIRA, 2010, p. 40)

Após concluir este importante tratado, Regiomontanus deu início a obra que seria um marco na História da Matemática: *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*. Apesar de ter concluído o texto por volta de 1464, ele só foi publicado em 1533 em Nürnberg sob a edição de John Petrus. Sobre a utilização da obra, Pereira afirma que:

O trabalho poderia servir como base para cálculos geométricos e astronômicos como ele havia originalmente planejado e deveria ser usado para calcular diariamente as coisas do céu e o tamanho e distância de cometas. A verdadeira ferramenta útil aqui era a Trigonometria. (PEREIRA, 2010, p. 41)

No tempo que permaneceu em Veneza, ele frequentou e ministrou conferências na Universidade de Pádua onde “falou sobre o desenvolvimento da Matemática como ciência básica e dos seus ramos resultantes, como Astronomia, Física e Música” (PEREIRA, 2010, p. 43).

Ainda na companhia de Bessarion: trabalhou na solução para a Quadratura do Círculo, escreveu o tratado *Disputationes contra Cremonensia in planetarum theoricas*

deliramenta, continuou com seus estudos do grego, fez uma cópia completa do Novo Testamento, começou a calcular tábua de arcos e áreas e escrever o *Problemata almagesti*. Além destas obras, construiu um astrolábio de metal de diâmetro 116 mm e um tipo de relógio de sol.

Em 1467, Regiomontanus entrou para a recém-criada Universidade de Pressburg, na Hungria, onde compilou as *Tabulae directionum*, obra que possui trinta e um problemas astronômicos diversos.

No comentário a estas tábuas, ele se referiu a uma tabela de senos com o seno 90° igual a 60.000. Ressaltou, no entanto, na seção 10, que uma tábua de seno com seno 90° igual a 100.000 seria mais útil. Nesta mesma seção, ele introduziu a *Tabula fecunda*, isto é, uma tábua de tangentes com $tg45^\circ=100.000$ e mostrou suas vantagens. [...]. É possível, portanto, que Regiomontanus tenha sido o primeiro a introduzir a moderna tábua de tangentes e a enfatizar sua utilidade. (PEREIRA, 2010, p. 45 e 46)

Em 1468, ele morou em Buda, uma região da Hungria, onde completou a sua tábua de senos na qual considerou o círculo de raio 10.000.000 e o valor do seno de 90° igual ao raio deste círculo, e estes cálculos permitiram a criação de mais uma tábua de senos. Ele serviu como consultor para montar a biblioteca do rei Mathias Corvinus para quem dedicou o grande tratado *Tabulae primi mobilis*.

Em 1469, escreveu um manuscrito para o arcebispo chamado *torquetum* e o enviou com um instrumento de fabricação caseira. Na epístola de sua dedicatória, enumerou os diversos tipos de instrumentos observacionais.

Em 1471, foi para Nüremberg com o objetivo de fazer uma observação sistemática do céu com a ajuda de instrumentos astronômicos.

Também era importante seu plano de organização de uma base para a publicação das mais importantes obras clássicas para a Matemática e a Astronomia, livres dos erros acumulados pelas cópias repetidas vezes feitas à mão. Pretendia também publicar seus trabalhos, entre eles o seu livro sobre triângulos e as tabelas trigonométricas e astronômicas. (PEREIRA, 2010, p. 50)

Em 1472, estabeleceu sua própria imprensa. Sua intenção era publicar diversas obras, contudo sua morte prematura em 1476 o impediu de fazê-lo. Algumas obras foram publicadas postumamente, como a já citada *De Triangulis*.

Dentre os tratados impressos antes de sua morte, estão os anuários (Almanaques Astronômicos), também conhecidos como *Efemérides* e os Calendários.

As *Efemérides* fornecem os dados sobre as posições dos planetas e da lua para cada dia do ano de 1475 a 1506.

Sobre as contribuições de Regiomontanus, Pereira ressalta que:

Na História das Ciências, podemos perceber que muitos personagens tiveram importância no processo de desenvolvimento de um determinado assunto. Muitas dessas pessoas contribuíram para a produção científica de uma dada época, visando o desvendar de um futuro ainda pouco explorado. A Astronomia, uma das ciências mais antigas, reuniu cientistas que trouxeram contribuições para outras áreas, como a Física e a Matemática, produzindo grandes personalidades na história. Johann Müller Regiomontanus foi um desses. (PEREIRA, 2010, p. 56)

Ele produziu obras de grande importância na Europa do século XV que foram utilizadas por cientistas de destaque. Seus instrumentos de Astronomia e suas *Efemérides* contribuíram, inclusive, para descobertas geográficas e foram utilizadas por Vasco da Gama e Cristóvão Colombo.

Portanto, a escolha de Regiomontanus para esta pesquisa não se deu por acaso. Ele foi escolhido por se tratar de um autor cuja contribuição para a Astronomia e a Matemática foi muito importante. Como citado anteriormente, seus trabalhos foram amplamente divulgados pela Europa e sua utilização não se limitou apenas à Matemática. Na lista de pessoas que utilizaram suas produções estão nomes de destaque na História da Matemática, na História das Ciências e na História Mundial, como Colombo e Copérnico.

Hughes explica que “a reputação de Regiomontanus e sua influência sobre seus contemporâneos e seus seguidores nos cem anos seguintes tem sido tema de dedicada atenção” (HUGHES, 1967, p. 3 – tradução do autor). Especificamente na Matemática, ele contribuiu para que a Trigonometria fosse compreendida como um ramo independente da Matemática ao invés de apenas uma ferramenta na astronomia (COOKE, 1997).

1.3. De Triangulis Omnimodis Libri Quinque

Na obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque*, Regiomontanus sintetizou o que se conhecia de trigonometria na Europa. Sobre esse texto Pereira afirma que “é considerado um dos primeiros livros-textos que apresentam a Trigonometria em sua

forma moderna; para muitos pesquisadores, esta obra promoveu a independência da Trigonometria em relação à Astronomia” (PEREIRA, 2010, p. 56).

Como mencionado na seção anterior, Regiomontanus escreveu a obra *De Triangulis* como um conjunto de regras sobre triângulos, que seriam úteis aos leitores do *Epítome do Almagesto*, que, por sua vez, tinha por objetivo ajudar na compreensão do *Almagesto* de Ptolomeu. Nota-se claramente o caráter introdutório dela para os praticantes de matemática e astronomia da época (HUGHES, 1967).

Dentre os diversos teoremas apresentados estão o que hoje conhecemos como a Lei dos Senos (Livro II) e a Lei dos Cossenos (Livro IV), embora ele nunca tenha usado o cosseno diretamente (HUGHES, 1967; COOKE, 1997).

Por se tratar de um marco na História da Matemática e por abordar temas estudados na Educação Básica, faz sentido explorar alguns teoremas propostos nesta obra por meio de ferramentas de ensino disponíveis atualmente, neste caso ambientes dinâmicos de Geometria.

Como já mencionado, apesar de ter sido concluída por volta de 1464, a obra só foi publicada em 1533 sob a edição de John Petrus. Posteriormente, uma edição foi publicada por Hans Petri e por Petter Perna sob a edição de Daniel Santbech. Atualmente, pode ser apreciada na versão original, em latim, com uma tradução para o inglês no livro de Barnabas Hughes (1967) e na sua tradução para o português nos anexos da tese de Doutorado de Ana Carolina Costa Pereira (2010).

Ela é dividida em cinco livros, de I a V, sendo os dois primeiros dedicados à Trigonometria Plana e os três últimos à Trigonometria Esférica.

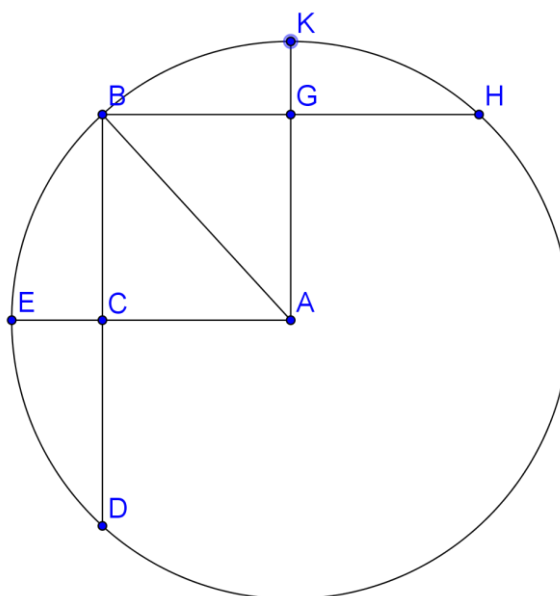
Os livros iniciam apresentando definições e axiomas seguidos dos teoremas e suas demonstrações onde se encontram referências às proposições de *Os Elementos* de Euclides que irão justificar algumas deduções.

O Primeiro Livro começa tratando de conceitos de grandezas e razões, e depois passa para o estudo de triângulos retângulos, isósceles e escalenos com algumas exceções de teoremas como, por exemplo, aqueles que utilizam explicitamente o seno de um ângulo (HUGHES, 1967).

O seno, na época de Regiomontanus, difere ligeiramente da definição da função seno de hoje. O seno, como usado em sua obra, é uma perpendicular traçada de uma extremidade de um arco de um círculo para o diâmetro que foi traçado pela outra extremidade do arco. O seno reverso é a parte do diâmetro entre o pé daquela perpendicular ou o seno e o arco. O seno do complemento do arco é o seno da

diferença entre o arco e um quadrante; consequentemente, se o arco é menor que 90° , o complemento do arco é 90° menos os graus do arco, mas, se o arco é maior que 90° , o complemento é levado a ser os graus do arco menos 90° . (PEREIRA, 2010, p. 67)

Figura 1 - Seno de um ângulo



Fonte: autor

Na Figura 1 o seno do arco BE seria o comprimento do segmento BC que é a forma utilizada para indicar o seno do ângulo A do triângulo ABC. Mundy-Castle (2004) explica que atualmente pode-se utilizar a mesma ideia para definir o seno de um ângulo adicionando a condição $AB = 1$. Em *De Triangulis*, Regiomontanus considera o raio da circunferência como sendo 60.000 para formular sua tabela de senos e, dessa forma, obtém 60.000 para o $\text{sen}90^\circ$, pois o raio e o $\text{sen}90^\circ$ tem a mesma medida.

"Pode-se dizer que a ordenação sistemática do conhecimento trigonométrico inicia com o Teorema 1 do Livro II" (HUGHES, 1967, p. 7 – tradução do autor) que estabelece a lei dos senos. Este livro é norteado por dois elementos: determinação de comprimentos de lados de um triângulo empregando equações algébricas e a primeira forma implícita da fórmula trigonométrica para o cálculo da área de um triângulo.

O Livro III estabelece as bases da trigonometria esférica que será detalhada no livro seguinte. "Do Teorema 01 ao Teorema 34, Regiomontanus aborda a geometria de grandes círculos em esferas; do Teorema 35 ao Teorema 56, estuda triângulos esféricos" (PEREIRA, 2010, p. 75).

O quarto livro contém a lei dos senos para triângulos esféricos além de resultados sobre esses triângulos quando forem retângulos ou oblíquos.

O último, continua abordando triângulos esféricos e apresenta a lei dos cossenos nesse espaço.

Em resumo, Regiomontanus deixou uma sólida fundamentação em geometria plana e esférica para trigonometria. Além de oferecer um número considerável de teoremas originais (incluindo, entre eles, uma implicação da fórmula trigonométrica para a área de um triângulo), ele usou álgebra duas vezes para solucionar problemas geométricos e apresentou o primeiro teorema prático para lei dos cossenos em trigonometria esférica. (HUGHES, 1967, p. 8 – tradução do autor)

As considerações feitas a respeito da História da Matemática indicam algumas reflexões de pesquisadores da área sobre a forma de sua utilização em propostas de atividades para a prática da sala de aula.

Em seguida, os relatos da biografia de Regiomontanus e da obra *De Triangulis* justificam a escolha desses para esta pesquisa, que se dedica a uma reflexão de alguns teoremas dessa obra na qual encontram-se teoremas cujas demonstrações envolvem construções de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas.

No capítulo a seguir, serão expostos os estudos sobre as funções da demonstração que deram suporte para o desenvolvimento do trabalho.

Capítulo 2. Quadro teórico

Este capítulo está constituído do quadro teórico sobre o qual esta pesquisa foi estruturada. São apresentados alguns aspectos das Transposições Didática e Informática segundo Chevallard e Balacheff; os conceitos de demonstração, prova e explicação segundo Balacheff e as funções da demonstração segundo Villiers. Essas teorias permitirão analisar as situações matemáticas que se revelarem na exploração dos teoremas de Regiomontanus sobre triângulos.

2.1. Aspectos das Transposições Didática e Informática

Chevallard definiu o termo transposição didática ao afirmar que:

Um conteúdo do saber, que é destinado ao saber a ser ensinado, sofre um conjunto de alterações no sentido de adaptar com mais eficiência seu lugar entre os objetos da educação. Esse 'trabalho' que acontece com o saber a ser ensinado é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39 – tradução do autor)

A transposição didática é um processo que se desenvolve em diferentes níveis: inicia com o conhecimento científico (saber matemático), depois transita pelos textos pedagógicos (saber a ensinar) e termina com o conhecimento da prática pedagógica (saber ensinado). Assim, existem três tipos de saberes: o científico, que está associado aos trabalhos acadêmicos (artigos, teses e outros); o escolar ou a ensinar, que representa o conjunto de conteúdos da estrutura curricular e está contemplado nos livros didáticos; e o ensinado, que é aquele registrado no plano de aula do professor.

Para o professor, cabe a transformação dos saberes nestes três níveis de modo que não perca suas características essenciais, mesmo com a sua adaptação para a sala de aula (D'AMORE, 2007). Ao fazer a transposição didática, podem ocorrer alguns problemas como o distanciamento entre o saber ensinado e sua origem (o saber científico) e, como consequência, uma recontextualização que modifica seu sentido original (CHEVALLARD, 1991).

Toda vez que um conteúdo é ensinado, é importante questionar-se o contexto de sua origem e quais valores justificam sua presença no currículo escolar para possibilitar uma educação matemática mais significativa. Fazer essa contextualização

sem reduzir o significado das ideias que originaram o saber ensinado é um desafio didático para o professor.

Assim, seria importante existir uma colaboração entre a pesquisa acadêmica ou científica e o trabalho do professor, que segundo D'Amore (2007) seria a institucionalização do professor-pesquisador como uma nova figura profissional.

Outro paradigma para a didática da educação é o uso do computador em sala de aula. Nesse contexto, Balacheff (1994) propõe uma teoria para analisar as mudanças geradas por esta utilização de forma análoga à transposição didática. Em sua teoria, promove um repensar do uso do computador para que não seja apenas mais um elemento na educação, mas se torne um diferencial quando utilizado.

Em sua teoria, intitulada Transposição Informática, Balacheff (1994) afirma que um ambiente informático apresenta três aspectos: o “universo interno”, que é constituído pelos componentes que permitem o funcionamento do dispositivo informático; a “interface”, que compreende a tela do dispositivo que permite a comunicação com usuário e na qual são observadas as representações dos conteúdos matemáticos que estão sendo estudados; e o “universo externo”, que é constituído pelos usuários e seus conhecimentos mobilizados pela interação com o dispositivo informático.

Assim, na transposição informática, a mudança de representação provoca uma transformação de um modelo matemático de referência para um modelo representado no dispositivo informático a ser manipulado por um usuário. Essa passagem pode ser dirigida pelo professor a partir de resultados de pesquisas, que apresentem os obstáculos que possam surgir, ou na elaboração de materiais pedagógicos.

Da mesma forma que, na transposição didática, o saber a ser ensinado sofre modificações, os objetos de ensino são transformados em saberes implementados ao serem modelados computacionalmente na transposição informática. O saber aprendido (aquele que o aluno realmente alcança) decorre da interação do estudante (ou usuário) com o dispositivo.

Segundo Balacheff (1994), as transposições informática e didática estão intrinsecamente relacionadas e não podem ser facilmente separadas. O professor deve explorar pesquisas que tragam aspectos do “saber sábio” e desenvolver estratégias didáticas que permitam explorar o “saber a ser ensinado” por meio de transposições didáticas e informáticas.

2.2. Demonstração, prova e explicação

Neste item, serão apresentados os conceitos de demonstração, prova e explicação segundo Balacheff e outros autores, acompanhados de exemplos que poderão permitir um melhor entendimento destes. Além disso, traz-se um recorte do que indicam os PCN sobre a importância destes temas.

Arsac (1987) afirma que a demonstração ocupa um lugar central na Matemática e, por isso, seria importante que possuísse um papel importante no currículo. Logo, é um objeto de estudo privilegiado na didática da matemática.

O artigo de Arsac (1987) explicita como a noção de demonstração foi sendo desenvolvida a partir dos problemas matemáticos existentes no começo do Século V a.C., problemas de caráter aritmético e geométrico que contribuíram para a compreensão de diferentes conceitos matemáticos, como os de irracionalidade e incomensurabilidade.

Nos PCN, o leitor se depara diversas vezes com palavras como: justificativa, argumentação, demonstração, prova e explicação. Por exemplo, sobre as contribuições da Matemática para as demandas do trabalho, cita “[...] o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar” (BRASIL, 1998, p. 34). No entanto, faz-se necessário compreender as diferenças entre cada um destes termos no contexto da Educação Matemática.

Sobre a argumentação, os parâmetros indicam que ela está vinculada à capacidade de justificar uma afirmação sendo necessário elaborar uma explicação e justificá-la. Dessa forma, um argumento só pode ser aceito se estiver sustentado por outros conteúdos matemáticos e se permitir responder a contra-argumentos ou réplicas aos quais for submetido (BRASIL, 1998).

Apontam inclusive uma distinção entre argumentação e demonstração ao afirmar que:

Uma argumentação não é, contudo, uma demonstração. A argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, enquanto a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido. Assim, a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração.

Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração. (BRASIL, 1998, p. 70)

Segundo os parâmetros, o estudo de Geometria no quarto ciclo do Ensino Fundamental propicia a reflexão sobre a necessidade e as exigências do raciocínio lógico dedutivo, pois,

[...] possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BRASIL, 1998, p. 122)

Neste sentido, observam que “a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações” e que “há exigências formais para uma demonstração em Matemática que podem não estar presentes numa argumentação” (BRASIL, 1998, p. 86). No entanto, sugerem que as verificações empíricas acompanhem os estudos das demonstrações quando possível, pois contribuem na produção de conjecturas e na ampliação do grau de compreensão dos conceitos envolvidos e, neste nível de ensino, não se requer um estudo absolutamente formal e axiomático da Matemática.

Estas verificações podem ser por meio de imagens, computação gráfica, cálculos e outros. Com relação aos recursos que funcionam como ferramentas de visualização, como as imagens, os parâmetros afirmam que permitem a compreensão de uma relação, regularidade ou propriedade e são citados como facilitadores no ensino. Embora ressaltem que a verificação experimental ou a medição feita em objetos físicos não pode validar matematicamente um teorema.

Como exemplos citam: (1) o Teorema de Pitágoras, que tem representações visuais bastante conhecidas para compreender a relação por ele expressa, onde nota-se a relevância da explicação empírica visual sem descartar o uso da demonstração; e (2) a irracionalidade do π , que pode ser observada por relações entre medições em objetos físicos, mas tem uma demonstração inadequada para o ensino fundamental.

Almouloud *et al* (2008) apresentam uma pesquisa sobre os conhecimentos de professores do Ensino Fundamental acerca de explicação, prova e demonstração. A pesquisa busca mostrar a importância da formação do professor de Matemática para que seja capaz de fazer demonstrações em sala de aula.

O artigo mostra que alguns professores possuem dificuldades em compreender as diferenças entre explicação, prova e demonstração, além de dificuldades em fazer

demonstrações ou organizar demonstrações a partir de um conjunto de afirmações desordenadas. Mais do que isso, aponta mais um argumento para justificar a necessidade de uma formação continuada do professor de Matemática.

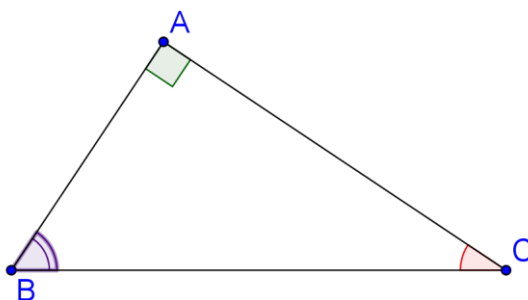
Os autores explicam que “usualmente, consideramos a demonstração como um procedimento de validação que caracteriza a Matemática e a distingue das ciências experimentais” (ALMOULOU *et al*, 2008, p. 224).

O fato de que os verbos explicar, provar e demonstrar são muitas vezes considerados como sinônimos pode-se tornar um obstáculo para investigações em torno do tema, pois misturam diferentes tipos de atividades dos alunos. Por isso, é necessário fazer uma distinção clara deles (BALACHEFF, 2000).

A explicação está situada no nível de quem a produz. Ele estabelece e garante a validade de uma proposição baseado em seus conhecimentos e em suas próprias regras de decisão da verdade. A explicação se expressa no seu discurso que pretende tornar inteligível a verdade da proposição por ele já adquirida. Ela não se reduz necessariamente a uma cadeia dedutiva podendo ser discutida, rejeitada ou aceita (BALACHEFF, 2000; 1987).

Por exemplo, considere o Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice C, tem-se que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ onde AB, AC e BC são as medidas dos lados AB, AC e BC, respectivamente, do triângulo (Figura 2).

Figura 2 - Triângulo retângulo qualquer

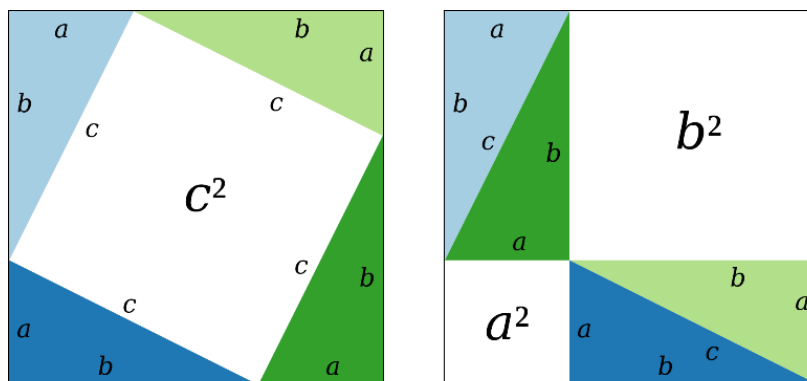


Fonte: autor

Uma possível explicação para este Teorema pode ser por meio de quadrados construídos sobre os lados do triângulo, onde se verifica que a soma das medidas das áreas dos quadrados menores é igual a medida da área do quadrado maior. Na Figura 3, tem-se dois quadrados de lados $a + b$ divididos em triângulos e quadrados menores

onde se verifica que a área do quadrado de lado c é equivalente à soma das áreas dos quadrados de lados a e b .

Figura 3 - Uma Explicação do Teorema de Pitágoras



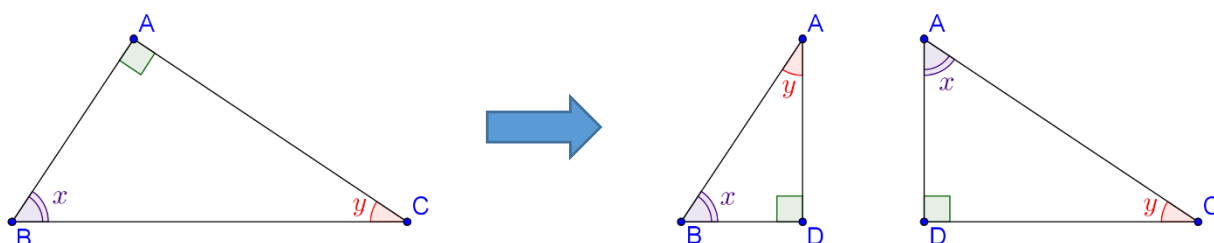
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem Acesso em 06 jun. 2016

A passagem de explicação para prova é um processo no qual o discurso que assegura a validade de uma proposição muda de papel passando a ser aceito por uma certa comunidade em um dado momento. Este papel não é definitivo, podendo evoluir juntamente com os avanços dos saberes nos quais se apoia (BALACHEFF, 2000; 1987). Segundo Balacheff (2000), uma prova pode ser aceita por determinada comunidade e rejeitada por outra.

Ainda com relação ao Teorema de Pitágoras, com o objetivo de apresentar um exemplo de prova; considere os triângulos retângulos semelhantes ABC, ABD e ADC onde AD é a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A e à base BC na Figura 4

Figura 4 - Uma Prova do Teorema de Pitágoras



Fonte: autor

Utilizando a propriedade do cosseno de x e y nos triângulos mencionados, tem-se as relações $AB/BC = BD/AB$ e $AC/BC = CD/AC$ das quais pode-se concluir que: $AB^2 = BC \cdot BD$ e $AC^2 = BC \cdot CD$. Portanto, $AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + CD) = BC^2$.

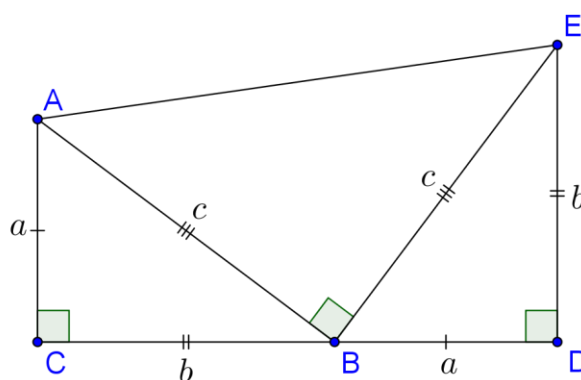
Sobre demonstração, Balacheff observa que “o tipo dominante de prova em matemática tem uma forma particular. Trata-se de uma sequência de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras” (2000, p. 13 – tradução do autor). Essas provas são chamadas de demonstrações e possuem as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros, anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução escolhidas com base em um conjunto de princípios básicos da lógica;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (ALMOULOUD *et al*, 2008, p. 224)

Como exemplo de demonstração, pode-se citar a de James Garfield para o Teorema de Pitágoras (GARFIELD, 2016). Ele demonstra dois resultados introdutórios que foram utilizados na demonstração do teorema, a saber, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e deduz a fórmula da área do trapézio.

Ele constrói o trapézio ACDE como na Figura 5

Figura 5 - Uma Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: autor

Utilizando o fato de ACDE ser um trapézio de bases a e b e altura $a + b$, a medida de sua área será igual a

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \frac{1}{2} \cdot (a + b)^2$$

Pela soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180° , pode-se concluir que o ângulo EBA é reto e que o triângulo ABE é retângulo. Assim, a medida da área do

trapézio pode ser determinada pela soma das medidas das áreas dos três triângulos retângulos formados

$$\frac{1}{2} \cdot ab + \frac{1}{2} \cdot ba + \frac{1}{2} \cdot c^2 = ab + \frac{1}{2} \cdot c^2$$

Como as duas equações representam a área do trapézio, pode-se concluir que

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b)^2 = ab + \frac{1}{2} \cdot c^2$$

E tem-se $a^2 + b^2 = c^2$.

Como Balacheff sinaliza, não existe uma única comunidade matemática para aceitar as demonstrações realizadas. O que divide tais comunidades não é a qualidade na estrutura de suas demonstrações, mas os axiomas e as regras lógicas por elas escolhidas (BALACHEFF, 2000; 1987).

Finalmente, conforme afirmam Almouloud *et al*

[...] a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados. Além disso, o conjunto organizado desses fatos deve comprovar, de forma irrefutável, algum tipo de proposição matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada (ALMOULOUUD *et al*, 2008, p. 227).

Além disso, é necessário realizar “reflexões mais aprofundadas a respeito das concepções dos professores, não apenas sobre o que é demonstração, mas também sobre o que é explicar, argumentar e provar” (ALMOULOUUD *et al*, 2008, p. 242) e promover mudanças nessas concepções. Assim, os professores estarão preparados “para ensinarem seus alunos a raciocinar, argumentar, provar e demonstrar” (ALMOULOUUD *et al*, 2008, p. 243) como solicitam os PCN de Matemática.

2.3. Funções da demonstração

No contexto das ideias de demonstração, segundo Balacheff, os professores de matemática percebem a dificuldade dos alunos em compreender a sua necessidade, fato indicado também por investigações em Educação Matemática. Os alunos acabam não reconhecendo esta necessidade principalmente quando se trata de um fato visualmente observável, pois não reconhecem a função da demonstração (VILLIERS, 2001).

Uma demonstração não tem como único resultado verificar a conjectura que se está tentando provar. Mais do que isso, uma demonstração pode conduzir os matemáticos por caminhos que possibilitarão a construção de novos conceitos e teorias como se pode constatar nos exemplos citados por Villiers (2002). Por isso, a necessidade de instigar estudantes a buscarem demonstrações.

Existe uma falsa impressão de que matemáticos apenas resolvem problemas previamente conhecidos, porém, ao contrário disso, muitas vezes eles criam e resolvem problemas a partir de seus estudos e reflexões (VILLIERS, 1997). Uma possível causa desta impressão é que, de acordo com Villiers (1997, p. 15, tradução do autor), “existe uma tendência entre os matemáticos de divulgar somente seus resultados finais de forma clara e organizada, sem discutir ou refletir sobre o processo de descoberta ou investigação da demonstração” deste resultado.

Segundo Villiers (2001), a função tradicional da demonstração é a de verificação da validade das afirmações matemáticas, embora não seja necessária para convencer alguém de um resultado. Apesar de ser esta a principal função da demonstração, Villiers apresenta outras funções:

- Verificação (dizendo respeito a verdade da afirmação);
 - Explicação (fornecendo explicações quanto ao facto de ser verdadeira);
 - Sistematização (a organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
 - Descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados);
 - Comunicação (a transmissão do conhecimento matemático);
 - Desafio intelectual (a realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração).
- (VILLIERS, 2001, p. 32)

Na função de verificação ou convencimento, Villiers (2002) ressalta que os professores de matemática entendem a demonstração como a única maneira pela qual terão convicção sobre uma determinada conjectura, mas isto não é exatamente necessário. Pelo contrário, a convicção é que, muitas vezes, promove a busca por uma demonstração.

O fato da convicção não ser alcançada somente pela demonstração pode ser evidenciado pelos resultados apresentados em algumas demonstrações incorretas, mas que consistem em afirmações verdadeiras. Ou ainda, a existência de conjecturas das quais se têm convicção de sua veracidade e sua demonstração ainda não foi desenvolvida, como a Hipótese de Riemann (VILLIERS, 2001).

Villiers completa afirmando que:

Sem dúvida, dadas as limitações próprias bem conhecidas da intuição e dos métodos quase-empíricos, a argumentação precedente não significa de modo algum ignorar a importância da demonstração como um meio indispensável de verificação, especialmente no caso de resultados duvidosos ou surpreendentes, por não serem intuitivos. Pretende sim colocar a demonstração numa perspectiva mais apropriada em oposição a uma idealização distorcida da demonstração como único (e absoluto) meio de verificação/convicção. (VILLIERS, 2001, p. 33)

Sobre as verificações empíricas, ele compreende suas contribuições para garantir um certo nível de confiança na validade da conjectura e para confirmar que é verdadeira. Mesmo que sejam dados inúmeros exemplos que indiquem a veracidade da conjectura, eles não dispensam a necessidade de uma explicação.

Buscar por uma explicação não significa que a validade da conjectura está sendo questionada, mas a carência de uma explicação pode significar que falta compreensão sobre o tema.

Os matemáticos atribuem maior importância a esta função, pois

Assim, na maior parte dos casos em que os resultados em questão são intuitivamente evidentes por si mesmos e/ou são apoiados numa quase-empírica evidência convincente, a função da demonstração para os matemáticos não é a de verificação, mas sim a de explicação (ou outras funções da demonstração descritas a seguir). (VILLIERS, 2001, p. 33)

Nesse sentido, ao elaborar uma demonstração, se identificam as relações lógicas entre afirmações. Ela é a ferramenta que permite transformar um conjunto de resultados em um sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas caracterizando a função de sistematização. Segundo Villiers, a sistematização

- Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas.
- Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação econômica dos resultados.
- Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas.
- Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação da aplicabilidade dos seus axiomas e definições.

- Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes. (VILLIERS, 2001, p. 34)

Alguns elementos da verificação estão presentes na sistematização, mas neste último o objetivo não é verificar a validade das conjecturas e, sim, organizar afirmações isoladas. Além disso,

Devido à perspectiva global resultante de tal simplificação e unificação, também está presente certamente um claro elemento de explicação quando a demonstração é utilizada como processo de sistematização. Neste caso, contudo, o ponto de incidência dirige-se a uma explicação global e não local. (VILLIERS, 2001, p. 35)

Os teoremas podem ser descobertos por meio da intuição, de métodos quase-empíricos e, também, de processos puramente dedutivos configurando outra função da demonstração, a de descoberta (VILLIERS, 2002). "Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados" (VILLIERS, 2001, p. 33).

Outra função destacada por Villiers é a de comunicação. A demonstração é a forma como os resultados são divulgados entre matemáticos, professores e alunos. Por se tratar de uma forma de interação, envolve uma negociação dos significados dos conceitos e dos critérios relativos ao que é um argumento sustentável. Além disso, "a filtragem social de uma demonstração através destas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como, por vezes, para a sua rejeição devido à descoberta de um contraexemplo" (VILLIERS, 2001, p. 35).

Os matemáticos consideram a demonstração como sendo um desafio intelectual que configura uma das funções estabelecidas por Villiers (2002), por isso,

Fazer demonstrações pode também ser comparado com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, e a satisfação que daí resulta. Neste sentido, a demonstração cumpre uma função gratificante e de realização própria. A demonstração é portanto um campo de teste para a energia intelectual e engenho do matemático. (VILLIERS, 2001, p. 35)

Finalmente, ele sugere que as funções de explicação e de descoberta sejam utilizadas para introduzir a demonstração como uma atividade significativa, pois a função de verificação pode não fazer sentido para alunos principiantes (VILLIERS, 2001), mas que "ela pode (e deve) ser desenvolvida mais tarde para dar possibilidade

aos alunos de atingirem uma compreensão mais desenvolvida sobre o valor e a natureza da demonstração dedutiva” (VILLIERS, 2002, p. 10).

As funções da demonstração caracterizadas por Villiers (2001, 2002) serão consideradas nos teoremas sobre triângulos de Regiomontanus e esse estudo será apresentado nos próximos capítulos nos quais também serão discorridos os procedimentos dessa pesquisa.

Capítulo 3. Considerações sobre o Livro I de Regiomontanus e a mediação do GeoGebra

Neste capítulo, serão feitas algumas considerações sobre a mediação do GeoGebra e a apresentação de teoremas do Livro I da obra *De Triangulis* de Regiomontanus.

3.1. Tecnologia e a mediação do GeoGebra

Os PCN de Matemática apontam, desde sua criação em 1997, que o computador seja visto “como um recurso didático cada dia mais indispensável” (BRASIL, 1997, p. 34). Não somente por sua presença na sociedade moderna, mas também por sua aplicação no ensino de Matemática; ele é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino da Matemática. “Tudo indica que seu caráter lógico-matemático pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que ele permite um trabalho que obedece a distintos ritmos de aprendizagem” (BRASIL, 1997, p. 35).

Além disso, assinalam a necessidade dos professores saberem escolher *softwares* educacionais considerando os objetivos almejados, uma vez que podem servir de apoio para o ensino e de ferramenta para o desenvolvimento de habilidades (BRASIL, 1997). “Assim, o que se propõe hoje é que o ensino de Matemática possa aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos alunos” (BRASIL, 1998, p. 46).

Os *softwares* dinâmicos de Geometria possibilitam a elaboração de conjecturas a partir de verificações indutivas. Se a verificação não for o suficiente para motivar a busca de uma demonstração, o desafio de tentar explicar o porquê de um resultado específico ser verdadeiro pode despertar a curiosidade para a construção de uma demonstração (VILLIERS, 2001).

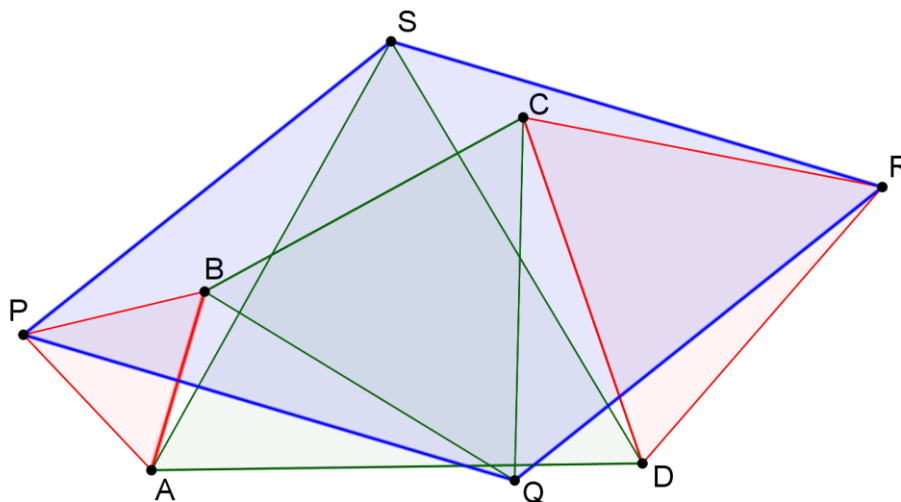
O dinamismo do *software*, a partir das movimentações dos elementos da figura, preserva as características da mesma, ou seja, a lógica da construção. Os elementos da figura estão relacionados a uma hierarquia de propriedades que corresponde a uma relação condicional lógica (MARIOTTI, 2000).

A autora afirma que é possível estabelecer uma correspondência entre as construções e a Geometria Axiomática Euclidiana. Assim, ela mostra um caminho para motivar o estudo de demonstrações em sala de aula, estabelecendo esta relação com as construções geométricas embora afirmando que seja difícil entender porque propriedades bem conhecidas ou que pareçam evidentes precisem ser questionadas.

Villiers (1997) utiliza outro *software* de Geometria, o *Sketchpad*, para discutir sua relevância na elaboração de conjecturas. O autor apresenta diversos exemplos de resultados geométricos após investigar relações de figuras planas nesse *software* sugerindo caminhos para demonstrações. Em outros trabalhos, utiliza o *Sketchpad* para explorar as funções da demonstração (VILLIERS, 2001; 2002).

Em um dos exemplos, citados por Villiers (1997, p. 16), tem-se um quadrilátero convexo ABCD e os triângulos equiláteros ABP, BCQ, CDR e DAS construídos sobre os lados do quadrilátero. Os triângulos ABP e CDR são “exteriores” ao quadrilátero ABCD, enquanto os outros dois são “interiores” a ele como na Figura 6. O quadrilátero PQRS será sempre um paralelogramo. Mesmo tendo a convicção de que a conjectura era verdadeira pela construção desenvolvida no *software*, ele indica uma demonstração para ela (VILLIERS, 1997).

Figura 6 - Utilização do *Sketchpad*



Fonte: (VILLIERS, 1997, p. 16)

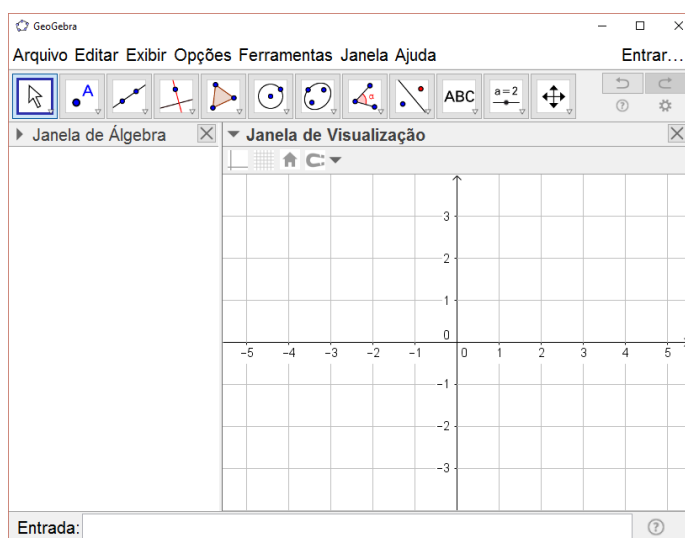
As generalizações e a produção de conjecturas são parte fundamental dos processos de validação. No caso dos problemas geométricos, a utilização de um *software* facilita a visualização das propriedades e do resultado e, posteriormente, a formulação de um enunciado. A introdução de problemas envolvendo demonstração

com o auxílio de recursos tecnológicos pode contribuir para uma ruptura entre as provas pragmáticas, que são elaboradas pela observação, e as provas intelectuais, que são as baseadas no rigor matemático (FERREYRA; CASTRO, 2016).

Segundo Ferreyra e Castro (2016), é considerado um recurso didático todo material que intervém no processo de ensino e contribui para a qualidade da educação. Estes materiais ou recursos têm se ampliado em virtude dos avanços tecnológicos.

O GeoGebra é um recurso didático tecnológico para o ensino, principalmente para desenvolver a matemática na Educação Básica. A barra de ferramentas possui comandos simples que permitem ver simultaneamente os registros gráficos e algébricos das construções. Além disso, se for necessária uma modificação, pode-se recorrer ao protocolo da construção para examinar os passos realizados (FERREYRA; CASTRO, 2016).

Figura 7 - Tela do GeoGebra



Fonte: autor

Ele se apresenta como um recurso informático para o ensino da matemática e sua linha de comandos facilita a incorporação dos objetos (PARODI *et al*, 2016). É um *software* educativo de caráter heurístico no qual predomina a aprendizagem experimental e por descobrimento, onde o professor pode criar atividades ricas em situações e o aluno explorá-las fazendo conjecturas. O intuito é que o aluno chegue ao conhecimento a partir de experiências, criando seus próprios modelos de pensamento e suas próprias interpretações do problema. Permite, portanto, a

formulação de uma conjectura como passo fundamental e prévio para a demonstração (PARODI *et al*, 2016).

Ferreyra e Castro “analisam as possibilidades da aplicação do software GeoGebra na resolução de um problema, estudando em particular a produção de conjecturas em torno do mesmo e a elaboração de algum tipo de prova” (2016, p. 1- tradução do autor). Após fazer observações e elaborar uma conjectura, apontam que é necessário encadear uma sequência de enunciados identificando argumentos adequados para formalizar uma demonstração. Conforme ressaltam, o GeoGebra possui diversas ferramentas que permitem analisar a solução e ilustrar a demonstração obtida, como a possibilidade de exibir o rastro da movimentação de um ponto ou reta (FERREYRA; CASTRO, 2016).

Mariotti (2000) elabora um trabalho acerca da relação entre os comandos do *software* de Geometria *Cabri-Géomètre* com as definições, axiomas e teoremas da Geometria Axiomática. Seu objetivo é verificar o papel deste *software* no processo de ensino-aprendizagem.

Ela apresenta uma consideração importante a respeito da movimentação de elementos geométricos no ambiente do *software*. A função de movimentação deixa de ser uma função orientada externamente e passa a ser um sinal teórico da validade da figura. Além disso, “o fato de os comandos disponíveis poderem ser reconhecidos como propriedades teóricas (correspondendo a axiomas ou teoremas de uma teoria) faz a construção em si ser um sinal externo de um teorema” (MARIOTTI, 2000, p. 49 – tradução do autor).

As construções geométricas podem assumir um significado mais profundo que o de simples representação, pois

As ferramentas e as regras para seu uso têm uma contrapartida nos axiomas e teoremas de um sistema teórico, de forma que cada construção corresponde a um teorema específico. Num sistema deste tipo, o teorema valida a veracidade da construção: a relação entre os elementos do desenho produzidos pela construção é estabelecida por um teorema sobre a figura geométrica representada pelo desenho (MARIOTTI, 2000, p. 27 – tradução do autor)

Segundo Balacheff (2002), alunos têm dificuldades em construir um argumento válido, fato que ressalta a insuficiência da demonstração para compreensão de resultados. Por isso, enfatiza-se o uso de construções geométricas como forma de contribuir para tal compreensão.

Por verificarem as dificuldades que os alunos apresentam em torno da demonstração, Parodi *et al* (2016) analisaram como os docentes a utilizam como processo de validação de resultados e proposições. Utilizaram o GeoGebra como instrumento para analisar o sentido dos processos de prova e de que maneira se chega à convicção da validade de um resultado. Segundo os autores

Para que a solução de um problema requeira uma prova é necessária a motivação da incerteza para assegurar, de alguma maneira, a veracidade do resultado. A situação deve conter um desafio que por ser contraditório gere o interesse em formular uma solução. O desafio pode se originar em uma satisfação intelectual ou em uma curiosidade pela verdade. Isto implica em buscar problemas específicos cuja solução exija uma elaboração de uma série de justificativas solidamente fundamentadas que encadeadas entre si assegurem a verdade da resposta. (PARODI *et al*, 2016, p. 4-5 – tradução do autor)

Em seu artigo, Lima (2013) apresenta um relato de uma oficina realizada na VI Semana de Matemática do CCT da Universidade Federal de Campina Grande cujo objetivo era apresentar o GeoGebra como um recurso facilitador dos processos de ensino e aprendizagem. Ela indica o uso deste *software* na “verificação de teoremas da Geometria Euclidiana Plana, fazendo uma comparação entre as demonstrações clássicas de alguns teoremas com as demonstrações feitas” no *software* (LIMA, 2013, p. 6965).

Lima enfatiza que “novas teorias de aprendizagem e novos recursos didáticos devem ser implementados a fim de fornecerem aos alunos uma formação mais significativa” (2013, p. 6965) e sugere que recursos computacionais sejam utilizados para atingir este objetivo, pois “os *softwares* educativos matemáticos apresentam-se como uma válida alternativa metodológica” (LIMA, 2013, p. 6966).

Com relação ao uso do GeoGebra na oficina ministrada, relata que

[...] foi utilizado para verificar a validade de alguns teoremas da Geometria Euclidiana Plana; isso permitiu, por sua vez, que os participantes tomassem conhecimento de meios que facilitam o entendimento dos alunos, que geralmente é limitado devido a abstração e complexidade de muitas demonstrações (LIMA, 2013, 6967).

Contudo, deve-se levar em conta que a utilização de figuras em demonstrações requer cuidados. Mesmo que elas ajudem a clarificar os argumentos de uma demonstração, podem levar à assunção de hipóteses extras, à eliminação de casos especiais ou, ainda, à dedução de resultados absurdos por conta das imperfeições da

figura (ABAR, 2011). Por isso, a autora destaca que as figuras devem ser construídas corretamente, principalmente quando forem utilizadas como guia da demonstração.

Ainda segundo Abar (2011, p. 4), “construções complicadas demoram muito tempo para serem feitas com o uso de compasso e régua e com a utilização de um *software* de Geometria Dinâmica uma construção incorreta é menos provável de ser obtida”.

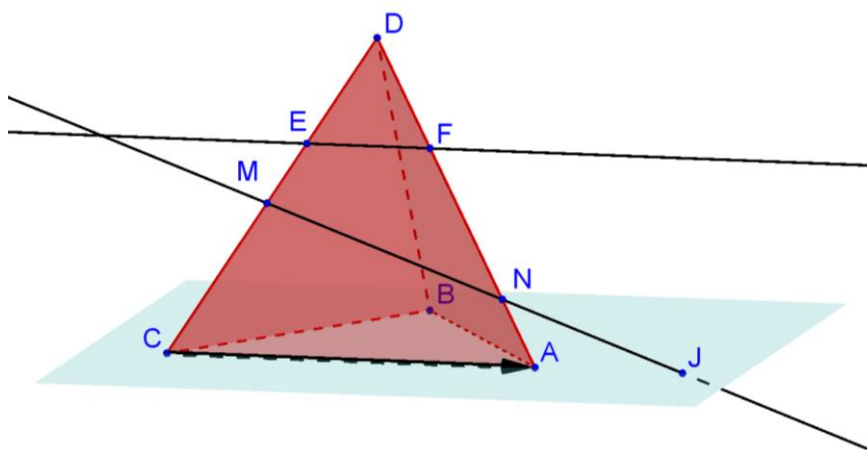
Por um lado, os *softwares* dinâmicos de geometria permitem uma análise de teoremas já demonstrados e podem revelar situações não presentes nelas, como foi o caso do Teorema 40 do Livro I de Regiomontanus. Verificou-se que com as condições dadas, existiam cinco casos distintos. Para quatro casos, foi possível construir dois triângulos congruentes. No quinto caso, não previsto na demonstração original, os dois triângulos construídos não eram congruentes (MOD; ABAR, 2016).

Por outro lado, os *softwares* podem conduzir o usuário a erros (VILLIERS, 2007); como foi possível observar na exploração da seguinte atividade:

Considere os pontos M e N cada um sobre uma aresta distinta não contida na base de um tetraedro regular. Analisar a intersecção da reta que passa pelos pontos M e N com o plano da base do tetraedro (CREEM, 1992 – adaptado).

Sabe-se que existem infinitas retas paralelas ao plano da base ABC do tetraedro passando por dois pontos contidos em duas arestas distintas do tetraedro. Na Figura 8, a reta EF foi construída como sendo a reta paralela ao plano da face ABC do tetraedro passando por E com a mesma direção do vetor CA. Na Janela de Álgebra o ponto de intersecção da reta EF com o plano ABC será indicado por “G = ?”.

Figura 8 - Problema do Tetraedro



Fonte: autor

Construindo os pontos M e N sobre duas arestas distintas e como no GeoGebra não é possível fazer com que tal reta seja paralela ao plano da base pela movimentação dos pontos M e N ou com o comando *animar*, o usuário pode ser levado a considerar que a intersecção entre a reta e o plano sempre existe, pois o ponto de intersecção J (Figura 8) tem sempre suas coordenadas na Janela de Álgebra, exceto quando M e N coincidem respectivamente com os pontos A e B. Assim, atividades deste tipo podem levar o aluno a uma conjectura que não é verdadeira por uma limitação do *software*.

Por isso, este trabalho procura mostrar um possível caminho onde as duas ferramentas (construções e demonstrações) podem ser utilizadas para compreensão de resultados matemáticos geométricos de fácil acesso aos alunos do ensino básico sem perder de vista as considerações feitas acima.

Nesta perspectiva, a exploração dinâmica de teoremas propostos por matemáticos ao longo da história se mostra um caminho para o estudo e análise de suas demonstrações. Deste modo, procurou-se investigar e explicar as demonstrações de Teoremas de Regiomontanus sobre triângulos com os movimentos dinâmicos do *software* GeoGebra.

3.2. Apresentação dos teoremas

Sendo a Geometria um dos ramos mais antigos da Matemática, seu estudo possibilita a exploração de seus aspectos históricos, pois ela se desenvolveu em função de necessidades humanas (BRASIL, 1998). Mais do que isso, "os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo" (BRASIL, 1998, p. 86).

Dentre as diversas questões presentes no estudo da Geometria estão as relacionadas com objetos no espaço que tratam de sua ocupação, localização, deslocamento, representação sob diferentes ângulos. Na época de Regiomontanus, por exemplo, existia uma necessidade de determinar as posições dos astros e, como pontuam os PCN, tais questões "são tão necessárias hoje quanto o foram no passado" (BRASIL, 1998, p. 122).

A Geometria "desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para

compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”, e “favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações” (BRASIL, 1998, p. 122), pois

As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. (BRASIL, 1998, p. 126)

Verificou-se que, no Livro I da obra *De Triangulis* de Regiomontanus, encontram-se definições e axiomas que possibilitarão as demonstrações realizadas nos teoremas subsequentes. Os Teoremas 20 a 57, que abordam as propriedades e construções geométricas de triângulos retângulos, isósceles e escalenos, serão os objetos de nossa investigação. Nos Apêndices deste trabalho, encontram-se todos os teoremas do Livro I na sua tradução para o inglês de Hughes (1967).

Os primeiros quatro teoremas descrevem as operações que podem ser feitas com as medidas de segmentos (encontrar sua soma, diferença, quadrado e raiz quadrada) que serão amplamente utilizadas na obtenção de medidas desconhecidas nos teoremas seguintes. Os teoremas de 5 a 15 versam sobre comparações entre comprimentos conhecidos a partir de unidades de medida distintas, suas razões e proporções. Os três teoremas seguintes tratam de relações entre as medidas dos lados e a medida da área do retângulo. O teorema 19 refere-se à popularmente conhecida “regra de três”. Suas visualizações geométricas não serão exploradas no GeoGebra, pois se tratam de enunciados de caráter do ponto de vista aritmético.

O teorema 20 requer atenção especial, pois nele Regiomontanus explica como determinar o seno de um ângulo (Figura 1). Por isso, foi selecionado para ser analisado no próximo capítulo desta pesquisa. O teorema 21 explora o fato de um ângulo reto possuir 90° , uma vez que quatro ângulos retos formam uma circunferência e esta possui 360° .

Os teoremas 22 a 30 abordam problemas referentes a triângulos retângulos exceto o teorema 25 que estabelece que “se dois ângulos de um triângulo qualquer são conhecidos, o terceiro pode ser determinado” (HUGHES, 1967, p. 63 – tradução do autor).

Alguns deles possuem construções relativamente simples, como o Teorema 22 que usa basicamente a propriedade de que a soma de três ângulos internos de um

triângulo é igual a 180° para determinar a medida de um ângulo em um triângulo retângulo, onde a medida de um dos ângulos agudos é conhecida. Os teoremas 23 e 24 estabelecem relações entre medidas de lados e ângulos, sendo que um deles afirma que *se os lados que formam o ângulo reto do triângulo retângulo forem congruentes, as medidas dos ângulos agudos serão congruentes*, e o outro indica que *se a hipotenusa for o dobro de um dos catetos, a medida do ângulo agudo formado pela hipotenusa e este cateto será o dobro do outro ângulo agudo*, que será analisado no próximo capítulo. O teorema 26 é uma versão do Teorema de Pitágoras.

Nos teoremas 27 e 28, Regiomontanus volta a utilizar a função seno. Ao afirmar que “quando dois lados de um triângulo retângulo são conhecidos, todos os ângulos podem ser determinados” (HUGHES, 1967, p. 65 – tradução do autor) e que “quando a razão de dois lados de um triângulo retângulo é dada, seus ângulos podem ser determinados” (HUGHES, 1967, p. 67 – tradução do autor), Regiomontanus utiliza a tabela de senos (Apêndice C) para determinar o ângulo a partir de seu seno.

As situações apresentadas nos teoremas acima sugerem atividades que podem ser exploradas pelos alunos com a utilização do GeoGebra; como exemplo, indica-se o teorema 27 que será apresentado e analisado no próximo capítulo.

Finalizando os teoremas sobre triângulos retângulos, Regiomontanus apresenta mais dois resultados sobre como determinar os ângulos e os lados quando a medida de um dos ângulos agudos for conhecida ou determinar as razões dos lados nas mesmas hipóteses.

O teorema 31, também apresentado e analisado no próximo capítulo, estabelece quais são as condições para que a altura de um triângulo qualquer tenha intersecção com a base relativa a ela. Ainda sobre triângulos quaisquer, o teorema 32 indica que conhecendo as medidas dos lados e de uma das alturas, é possível determinar as medidas das demais alturas de um triângulo.

Os teoremas 33 e 34 abordam questões relativas a triângulos equiláteros, um sobre a medida dos ângulos e o outro sobre a medida dos lados. A construção do teorema 34, no próximo capítulo, aborda relações entre os quadrados das medidas que podem ser visualmente apresentadas como sendo as medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os segmentos.

Desde o teorema 31, nota-se que são explorados diversos tipos de triângulos e, assim, nos teoremas 35 ao 41, Regiomontanus trata de questões relativas a triângulos isósceles.

Os teoremas 42 a 47 apresentam resultados que podem ser obtidos quando as medidas dos três lados de um triângulo são conhecidas. Especificamente, o teorema 43 constitui o que hoje são chamadas de relações métricas em um triângulo retângulo e possui duas outras abordagens nos teoremas 44 e 45. Por se tratar de um tema importante, o teorema 43 será apresentado e analisado no próximo capítulo.

Os teoremas 48 a 53 constituem diferentes casos onde são conhecidas algumas medidas sobre triângulos e outras são determinadas. Com exceção do teorema 51 que apresenta uma situação onde algumas medidas conhecidas não são suficientes para determinar outras.

Finalmente, do teorema 54 ao 57 são apresentados resultados envolvendo razões entre medidas de lados e ângulos.

No próximo capítulo, os teoremas que foram selecionados serão apresentados indicando caminhos de suas construções e respectivas análises segundo as funções da demonstração discutidas anteriormente.

Capítulo 4. Construção e análise dos teoremas escolhidos

Neste capítulo, são apresentados os teoremas de Regiomontanus sobre triângulos escolhidos para serem desenvolvidos na pesquisa. Foram elaboradas suas respectivas construções no GeoGebra procurando identificar em cada passo as funções da demonstração na perspectiva de Villiers (2001, 2002). Cada uma é apresentada por meio de figuras indicando um *link* para o respectivo arquivo.

Nas demonstrações dos teoremas, toda vez que for citado um resultado proposto por Euclides será indicado como [Euclides *a.b*] onde *a* indica em qual dos livros de *Os Elementos* se encontra o resultado e *b* o número do resultado, por exemplo: [Euclides I.5] é o quinto resultado do primeiro livro de Euclides que pode ser lido em português em Bicudo (2009). O mesmo procedimento é utilizado nos Teoremas propostos por Regiomontanus, a saber: [Regiomontanus I.20] é o vigésimo teorema do primeiro livro de Regiomontanus que pode ser lido em inglês em Hughes (1967). Os resultados de *Os Elementos* e os teoremas do Livro I de Regiomontanus que forem mencionados neste capítulo, poderão ser lidos nos Apêndices A e B deste trabalho.

Como já citado anteriormente, Villiers (2001) estabelece seis funções para a demonstração. A primeira função que pôde ser observada na realização deste trabalho foi a de **desafio intelectual**, pois houve a necessidade de adaptar a linguagem do texto elaborado por Regiomontanus. Hughes, em sua obra (1967), faz uma tradução do original em latim para o inglês que pode ser considerada como uma tradução literal, uma vez que traduz o texto sem adaptações para a linguagem Matemática usual acrescentando apenas alguns comentários. Pereira (2010) segue o mesmo caminho quando traduz o texto do inglês para o português fazendo uma tradução praticamente palavra por palavra.

A intenção não foi fazer uma nova tradução para o texto original, mas produzir uma versão em português que fosse mais acessível a educadores e alunos do Ensino Básico. Aspectos do processo de Transposição Didática são considerados para adaptar um saber sábio, neste caso a obra produzida por Regiomontanus, para um saber a ser ensinado.

A segunda função da demonstração verificada foi a de **sistematização**. Nas demonstrações dos Teoremas, a forma como a argumentação é construída precisou ser reestruturada para uma melhor compreensão do leitor. No momento da **sistematização**, foi possível passar por duas outras funções da demonstração: **verificação** e **explicação** utilizando o *GeoGebra* como ferramenta para exploração dos resultados.

Em alguns casos, a **verificação** conduziu a um processo de **descoberta**, pois certos resultados apresentaram aspectos a serem melhor analisados e não identificados nas demonstrações de Regiomontanus. Finalmente, a **descoberta** que foi desenvolvida pode ser configurada como uma **comunicação**.

Cada teorema é apresentado em sua versão em inglês segundo Hughes (1967) e em uma proposta do autor em português com uma linguagem reelaborada. Em seguida, foram indicados os passos da construção do *GeoGebra* que permitiram contemplar as hipóteses dadas. Na análise da demonstração, são indicados argumentos em português, redigidos com base na versão de Hughes (1967), com sua respectiva exploração mediada pelo *GeoGebra* onde sinaliza-se algumas funções da demonstração segundo Villiers (2001, 2002) que foram observadas. Os objetos que constituíam construções auxiliares foram ocultos para facilitar a visualização.

Nas demonstrações, foi utilizada uma notação específica para se referir a ponto, segmento, reta, ângulo e triângulo:

- Ponto: letra maiúscula precedida da palavra “ponto”. Exemplo: ponto A.
- Segmento: duas letras maiúsculas precedidas das palavras “segmento” ou “lado”. Exemplos: segmento AB ou lado CD.
- Reta: duas letras maiúsculas precedidas da palavra “reta” ou uma letra minúscula precedida da palavra “reta”. Exemplos: reta AB ou reta r.
- Ângulo: três letras maiúsculas onde a letra do meio indica o vértice do ângulo precedidas da palavra “ângulo” e do símbolo “<” ou uma letra maiúscula precedida da palavra “ângulo” e do símbolo “<”. Exemplos: ângulo <ABC ou ângulo <B.
- Triângulo: três letras maiúsculas indicando os vértices do triângulo precedidas da palavra “triângulo” e do símbolo “ Δ ”. Exemplo: triângulo ΔABC .

4.1. Teorema 20

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/SrrF7d9R>>.

Teorema 20 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 59)

In every right triangle, one of whose acute vertices becomes the center of a circle and whose [hypotenuse] its radius, the side subtending this acute angle is the right sine of the arc adjacent to that [side and] opposite the given angle, and the third side of the triangle is equal to the sine of the complement of the arc. (HUGHES, 1967, p. 59)

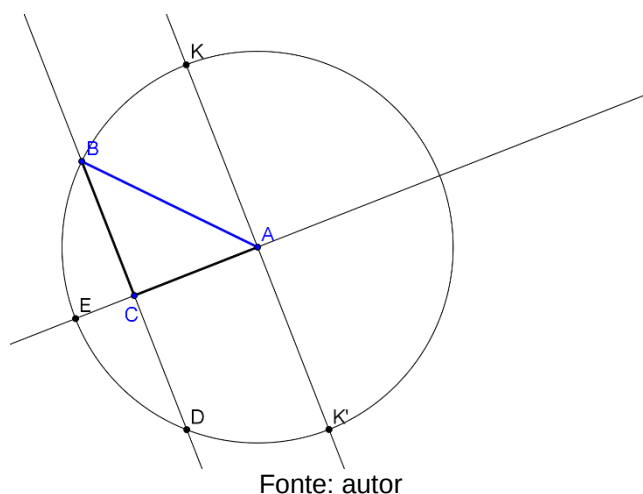
Teorema 20 – proposta do autor

Dados o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em C e a circunferência de centro A e raio AB, então BC é o seno reto do arco adjacente correspondente ao ângulo $\angle BAC$ e AC é o seno do complemento deste arco.

Construção no GeoGebra

1. Com a ferramenta *ponto*, determinar os pontos A e C.
2. Para o ângulo reto em C, construir a reta passando por A e C com a ferramenta *reta* e, com a ferramenta *reta perpendicular*, construir a reta perpendicular à reta AC passando por C e nela definir o ponto B.
3. Com a ferramenta *segmento*, determinar os segmentos AB, BC e CA.
4. Construir uma circunferência de centro em A e raio AB com a ferramenta *círculo dados centro e um de seus pontos*.
5. Denominar de E o ponto de intersecção da reta AC e da circunferência.

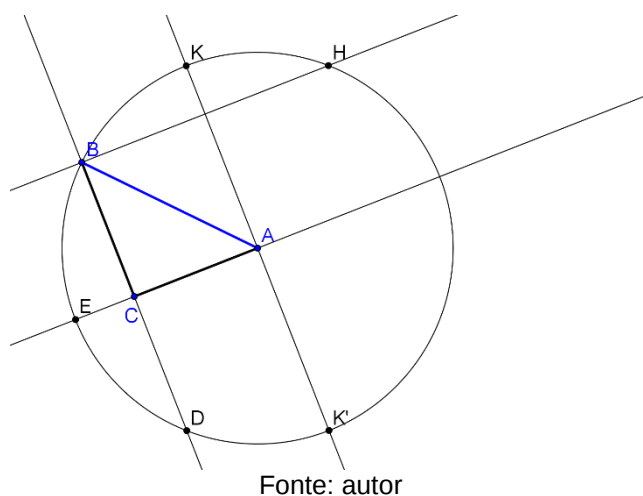
Figura 10 - Teorema 20 (Argumento 1)



Argumento 2: Do ponto B, trace uma corda BH paralela ao lado AC.

Com a ferramenta *reta paralela*, traçar uma reta paralela ao lado AC passando por B e determinar o ponto H, diferente de B, de intersecção desta reta com a circunferência.

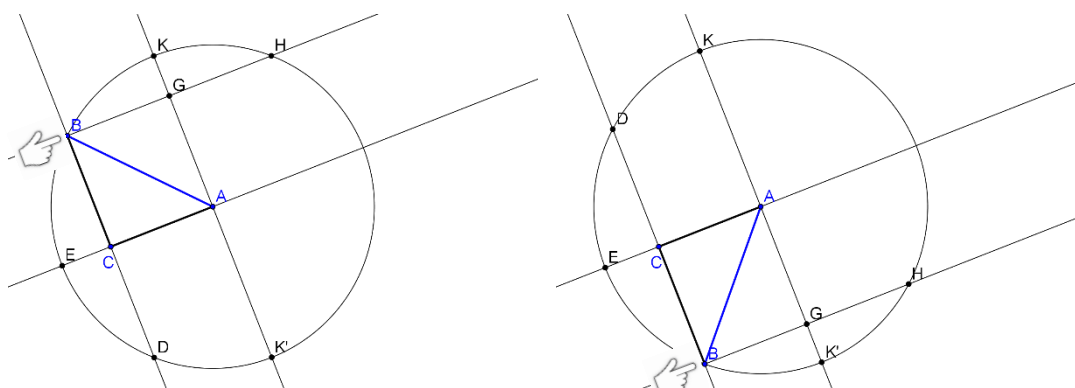
Figura 11 - Teorema 20 (Argumento 2)



Argumento 3: As duas retas BH e AK necessariamente se interceptam em um ponto que será chamado de G, pois os ângulos ABH e BAK são agudos.

Pode-se ter B e K em semiplanos distintos em relação à reta AC pela movimentação do ponto B, então, deve-se acrescentar no Argumento 3 que a intersecção entre as retas BH e AK existe, pois os ângulos ABH e BAK' também são agudos. Sem as considerações com relação a existência de K', quando a movimentação do ponto B fosse realizada, poderia não existir a intersecção dos segmentos AK e BH.

Figura 12 - Teorema 20 (Argumento 3)

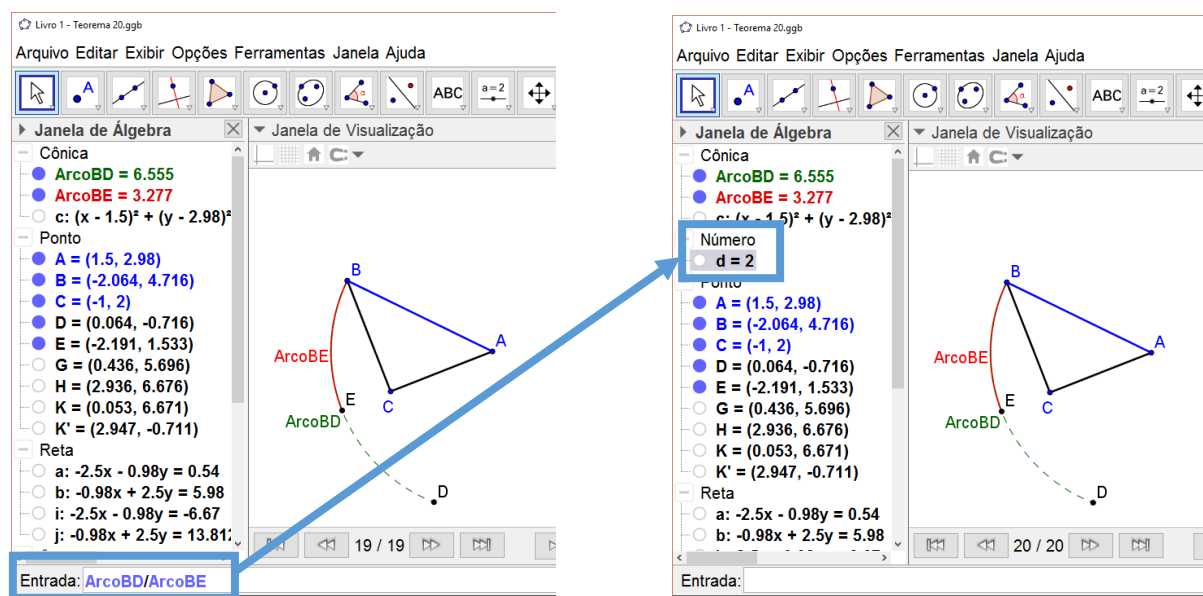


Fonte: autor

Argumento 4: Como o raio AE intercepta a corda BD perpendicularmente, pois o ângulo $\angle ACB$ é reto por hipótese, AE bissecta a corda BD por [Euclides III.3] e o arco BD por [Euclides III.29].

Utilizando a ferramenta *distância*, *comprimento* ou *perímetro* pode-se verificar que as medidas da corda BD e do arco BD são respectivamente o dobro das medidas do segmento BC e do arco BE. Para isso, é necessário construir os segmentos e arcos desejados com as ferramentas *segmento* e *arco circular* e em seguida digitar no *Campo de Entrada* a divisão entre eles. O GeoGebra retornará o número 2 como resposta para a razão entre as medidas maior e menor dos arcos como se pode observar na Figura 13.

Figura 13 - Teorema 20 (Argumento 4)

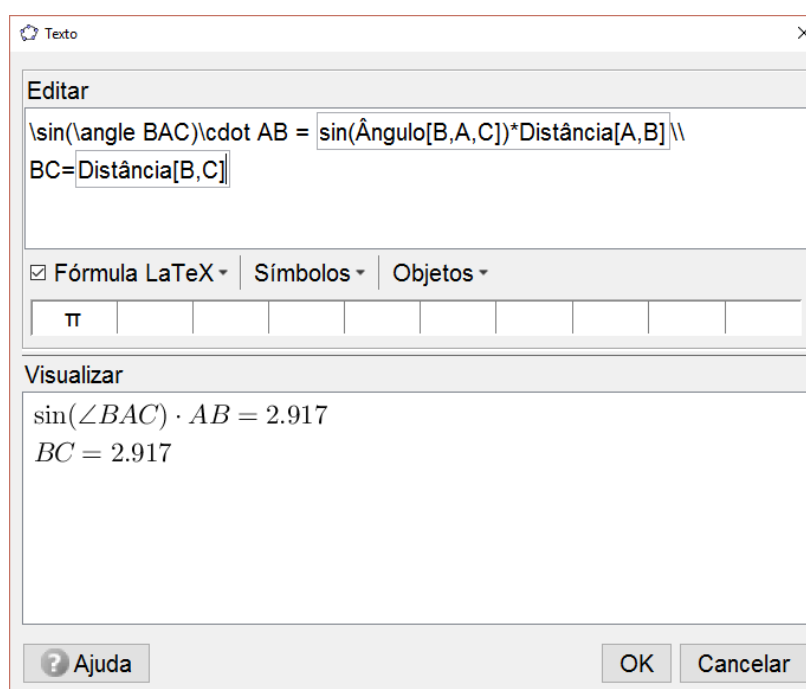


Fonte: autor

Argumento 5: O segmento BD é a corda do arco BD e BC é o seno do arco-metade BE oposto ao ângulo $\angle BAC$ por definição de seno.

Na definição de seno utilizada por Regiomontanus, tem-se que BC é igual ao produto do seno do ângulo $\angle BAC$ pela medida do raio AB. Para verificar tal informação no GeoGebra, utilizar a ferramenta *texto*. Na *Janela de Texto*, selecionar o *box Fórmula LaTeX* e digitar o texto como na Figura 14:

Figura 14 - Teorema 20 (Argumento 5)



Fonte: autor

Assim, a primeira tese do teorema está demonstrada, ou seja, BC é o seno reto do arco adjacente correspondente ao ângulo $\angle BAC$.

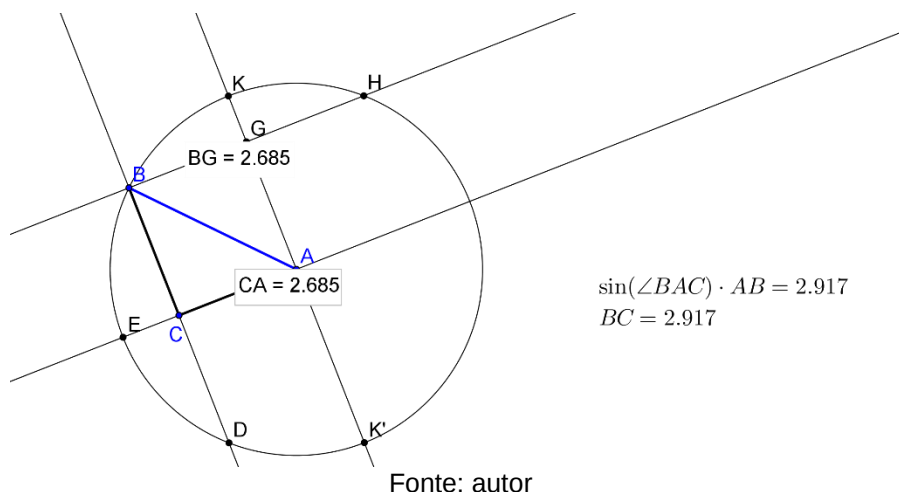
Argumento 6: Como o ângulo $\angle AGB$ é reto, então AK bissecta a corda BH e seu arco BH por [Euclides I.34] e o segmento BG é o seno de arco BK por definição.

Realizando os mesmos procedimentos do Argumento 5, pode-se verificar a veracidade do Argumento 6.

Argumento 7: A medida do segmento BG é igual a medida do lado AC por [Euclides I.34] devido à área de AGBC ser limitada por retas paralelas.

Utilizando a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro* pode-se observar que os segmentos BG e CA possuem a mesma medida uma vez que formam o retângulo AGBC.

Figura 15 - Teorema 20 (Argumento 7)



Argumento 8: Mas o ângulo $\angle CAG$, ou $\angle EAK$, é reto por [Euclides I.29] porque a reta BC é paralela à reta AG. Então, por [Euclides VI.33], o arco EK é um quadrante da circunferência e, conseqüentemente, o arco BK é definido como o complemento do arco BE e o seno do segmento BG referente ao arco BK tem a mesma medida que o lado AC.

Finalmente, tem-se que a medida de AC é igual à medida de BG que, por sua vez, é o seno do complemento do arco BE e a segunda tese do teorema está demonstrada.

Conclusão

Nesse teorema, a demonstração se apresenta como um **desafio intelectual**, pois é necessário compreender como Regiomontanus utilizava a função seno em sua época. Além disso, a utilização do *software* permitiu **descobrir** que considerar a intersecção dos segmentos AK e BH no Argumento 2 não seria suficiente para determinar o ponto G em qualquer situação gerada pela movimentação do ponto B. Foi necessário considerar a intersecção da reta AK com a corda BH que permitiu a existência do ponto G para qualquer movimentação de B.

4.2. Teorema 24

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/ByCQsbPN>>.

Teorema 24 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 63)

If the [hypotenuse] of a right triangle is double the length of one of the sides adjacent to the right angle, then the acute angle included by that side and the hypotenuse is double the other acute angle. Hence geometry also reveals each of the angles.

Teorema 24 – proposta do autor

Se a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual ao dobro da medida de um dos catetos, então a medida do ângulo agudo formado por este cateto e a hipotenusa é o dobro da medida do outro ângulo agudo.

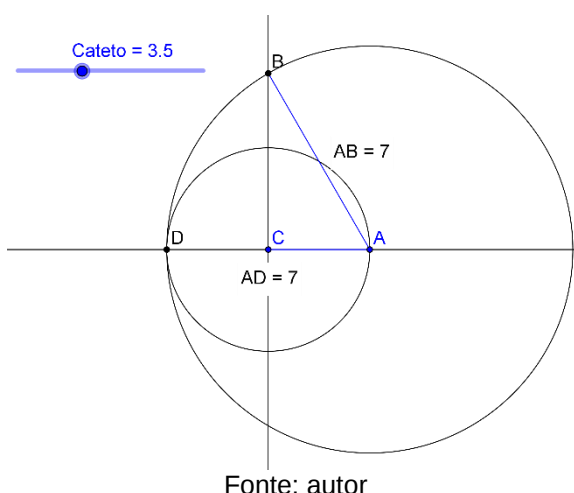
Construção no GeoGebra

1. Criar um *controle deslizante* variando de 0,1 a 10 com incremento de 0,1 para indicar a medida do cateto que é metade da medida conhecida da hipotenusa.
2. Determinar o ponto C e, com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*, criar o ponto B tal que o segmento CB possua a medida indicada pelo controle deslizante.
3. Traçar a reta perpendicular à BC passando pelo ponto C com a ferramenta *reta perpendicular*.
4. Com a ferramenta *círculo dados centro e raio*, construir a circunferência de centro B e raio igual ao dobro da medida indicada pelo controle deslizante.
5. O vértice A do triângulo será a intersecção da reta e da circunferência construídas nos passos 3 e 4.
6. Com a ferramenta *segmento*, indicar os demais segmentos que compõem os lados do triângulo.

Argumento 2: Os segmentos AB e AD são congruentes, pois por hipótese AB mede o dobro de AC e AD mede o dobro de AC.

Outra **verificação** é realizada, pois para afirmar que AD mede o dobro de AC se está considerando que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio. Para verificar que, de fato, as medidas são iguais, pode-se utilizar a ferramenta *distância*, *comprimento* ou *perímetro* para medir os comprimentos de AB e AD.

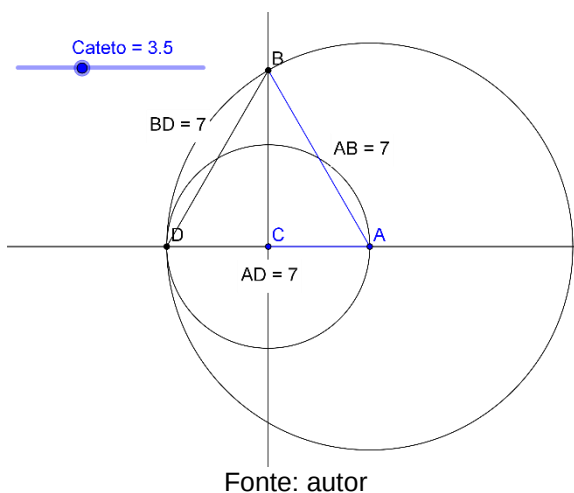
Figura 18 - Teorema 24 (Argumento 2)



Argumento 3: Os segmentos AB e BD são congruentes por [Euclides I.4] e os ângulos $\angle ABC$ e $\angle DBC$ também são congruentes. Então, a medida do ângulo $\angle ABD$ é o dobro da medida do ângulo $\angle ABC$.

Nesse argumento, Regiomontanus utiliza o fato de que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DBC$ são congruentes para afirmar que a medida do ângulo $\angle ABD$ é o dobro da medida do ângulo $\angle ABC$.

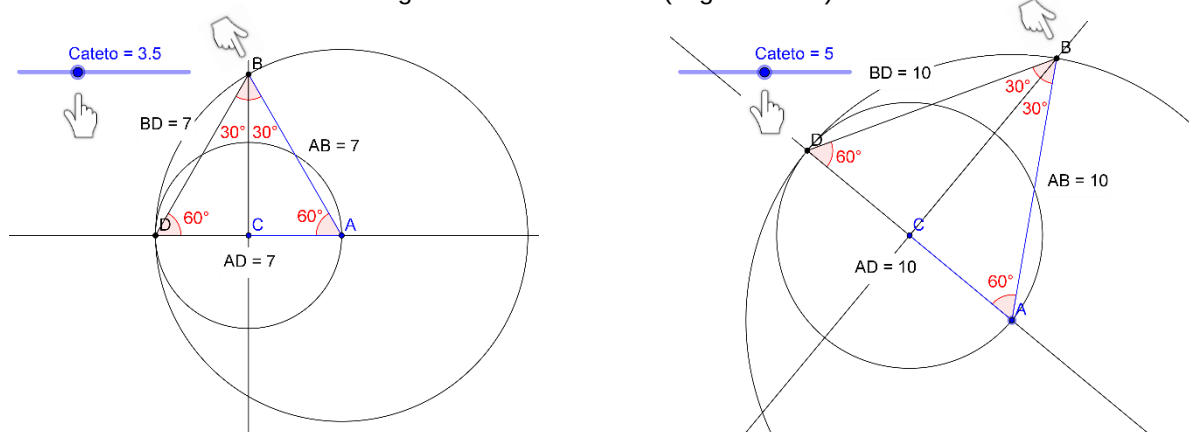
Figura 19 - Teorema 24 (Argumento 3)



Argumento 4: Além disso, as medidas dos ângulos $\angle ABD$ e $\angle BAD$ (ou $\angle BAC$) são congruentes, pois o triângulo $\triangle ABD$ é equilátero por [Euclides I.5]. Então, a medida do ângulo $\angle BAC$ é o dobro da medida do ângulo $\angle ABC$.

Para verificar as igualdades das medidas dos ângulos, sugere-se que sejam construídos os ângulos $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ADB$ e $\angle DBC$ com a ferramenta *ângulo*. A movimentação do ponto A e do controle deslizante permitirá **verificar** que as medidas dos ângulos nunca se alteram.

Figura 20 - Teorema 24 (Argumento 4)



Fonte: autor

Conclusão

No Teorema 24, foi constatado um predomínio da função de **verificação** na mediação do GeoGebra nos argumentos da demonstração. Especificamente no Argumento 3, tem-se evidências da função de **explicação** ao utilizar a congruência de triângulos para sua justificativa.

4.3. Teorema 27

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/wkJEtY72>>.

Teorema 27 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 65)

When two sides of a right triangle are known, all the angles can be found.

Teorema 27 – proposta do autor

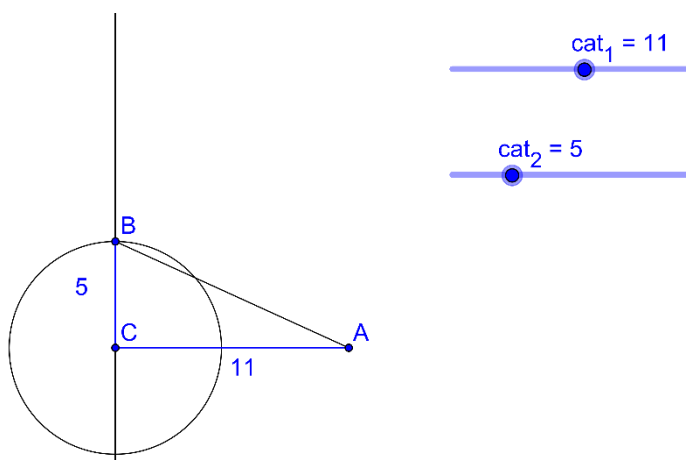
Se as medidas de dois lados de um triângulo retângulo forem conhecidas, então a medidas de seus ângulos poderão ser determinadas.

Construção no GeoGebra

Observação: serão consideradas conhecidas as medidas dos catetos, pois o Teorema 26 do Livro I garante que se pode encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo quando dois de seus lados tiverem medidas conhecidas.

1. Construir dois controles deslizantes para indicar as medidas conhecidas dos catetos.
2. Determinar o vértice C do triângulo retângulo.
3. Com a ferramenta *segmento com comprimento fixo*, determinar o ponto A de comprimento igual a um dos catetos conhecidos.
4. Determinar a reta AC e, com a ferramenta *círculo dados centro e raio*, construir a circunferência de centro C e raio igual a medida do outro cateto conhecido.
5. O ponto B será a intersecção da reta perpendicular a AC passando por C com a circunferência do passo 4.
6. Com a ferramenta *segmento*, indicar o segmento AB.

Figura 21 - Teorema 27



Fonte: autor

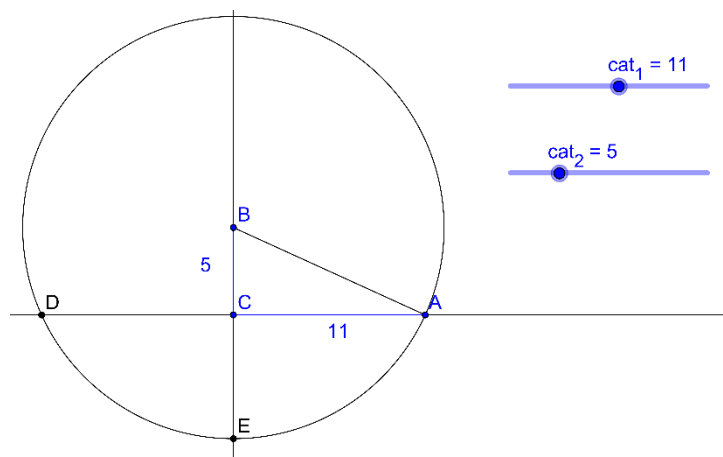
Demonstração analisada

Argumento 1: Considere o $\triangle ABC$, retângulo em C, cujos lados AB e AC são conhecidos e a circunferência de centro B e raio BA. Então, AC será o seno do arco relativo ao ângulo $\angle ABC$ por [Regiomontanus I.20] que é um dos ângulos procurados.

Utilizando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 20 já apresentados, tem-se que AC é o seno reto do arco adjacente correspondente ao

ângulo $\angle ABC$ e BC é o seno do complemento deste arco (basta trocar A e B nas hipóteses, teses, argumentos e figuras do Teorema 20).

Figura 22 - Teorema 27 (Argumento 1)



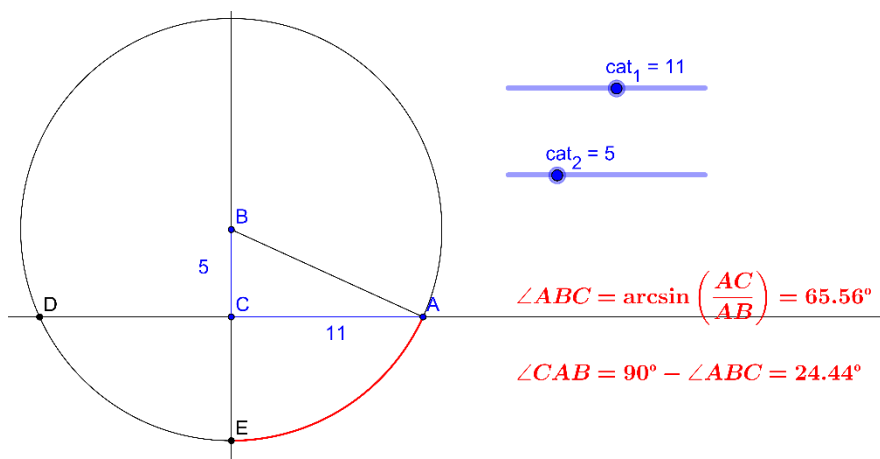
Fonte: autor

Argumento 2: Como, por hipótese, os comprimentos dos lados AB e AC são conhecidos e expressos em função de uma certa medida e, além disso, o comprimento de AB é expresso em função de uma nova medida (aquela referente ao seno inteiro); então AC também pode ser expresso pela nova medida por [Regiomontanus I.7].

Regiomontanus busca justificar como as medidas dos lados serão obtidas em função da indicada pela tabela dos senos que pode ser apreciada no texto de Mundy-Castle (2004, p. 5) e, também, no Apêndice C.

Argumento 3: Como AB é o seno inteiro, o seno de AC se torna conhecido e, pela tabela de senos, o arco AE referente ao ângulo $\angle ABC$ também é determinado. Além disso, a medida do ângulo $\angle BAC$ será encontrada por [Regiomontanus I.22] e a medida do ângulo reto $\angle BCA$ será conhecida por [Regiomontanus I.21].

Figura 23 - Teorema 27 (Argumento 3)



Fonte: autor

Conclusão

Antes de começar a analisar a demonstração, foi feita uma observação a respeito de quais lados seriam considerados conhecidos por hipótese e porque essa consideração não traz perda de generalidade para a demonstração utilizando o Teorema 26 do Livro I de Regiomontanus. Pode-se considerar que este argumento atende a função de **sistematização** indicada por Villiers (2001) onde enfatiza que se deve organizar os resultados num sistema dedutivo de teoremas.

4.4. Teorema 31

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/CKfmPnYB>>.

Teorema 31 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 71)

If one of the two angles on the base of a triangle is obtuse, then a perpendicular drawn from the vertex angle to the base will fall outside the triangle. But if [one of the base angles] is a right angle, the perpendicular will coincide with the side adjacent to the right angle. If both [base angles] are acute, the perpendicular must remain within the triangle.

Teorema 31 – proposta do autor

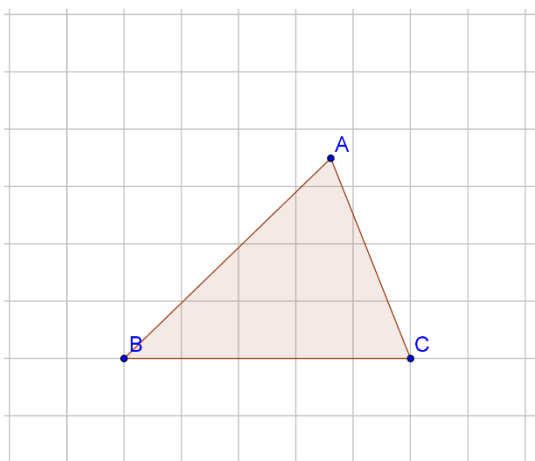
Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r a reta perpendicular à reta suporte do lado BC passando pelo ponto A .

- a) Se o ângulo $\angle B$ (ou $\angle C$) for obtuso, então r não interceptará o segmento BC .
- b) Se o ângulo $\angle B$ (ou $\angle C$) for reto, então r será a reta suporte do lado AB (ou AC).
- c) Se os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ forem agudos, então r interceptará o lado BC .

Construção no GeoGebra

1. Deixar a *malha quadriculada* visível.
2. Construir um triângulo qualquer com a ferramenta *polígono* de modo que os pontos B e C fiquem sobre alguns dos vértices dos quadrados da malha.

Figura 24 - Teorema 31



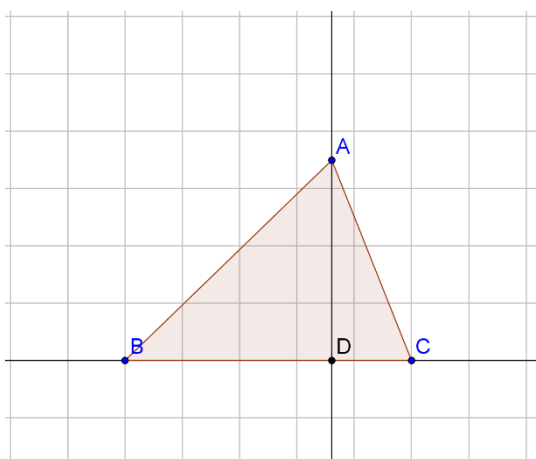
Fonte: autor

Demonstração analisada

Argumento 1: Seja o ponto D a interseção da reta r com a reta BC . Então o ângulo $\angle ADC$ será reto pela definição de perpendicularidade.

Construir a reta r perpendicular à reta suporte do lado BC com a ferramenta *reta perpendicular* e determinar o ponto D de intersecção de r com a reta suporte do lado BC usando a ferramenta *interseção de dois objetos*. A *malha quadriculada* facilitará a visualização de todos os casos na movimentação dos pontos, mas ela não é necessária na demonstração do teorema e, muito menos, é necessário que os pontos B e C estejam alinhados sobre uma reta horizontal paralela à borda da página como acontece quando são posicionados sobre os vértices dos quadrados da malha.

Figura 25 - Teorema 31 (Argumento 1)

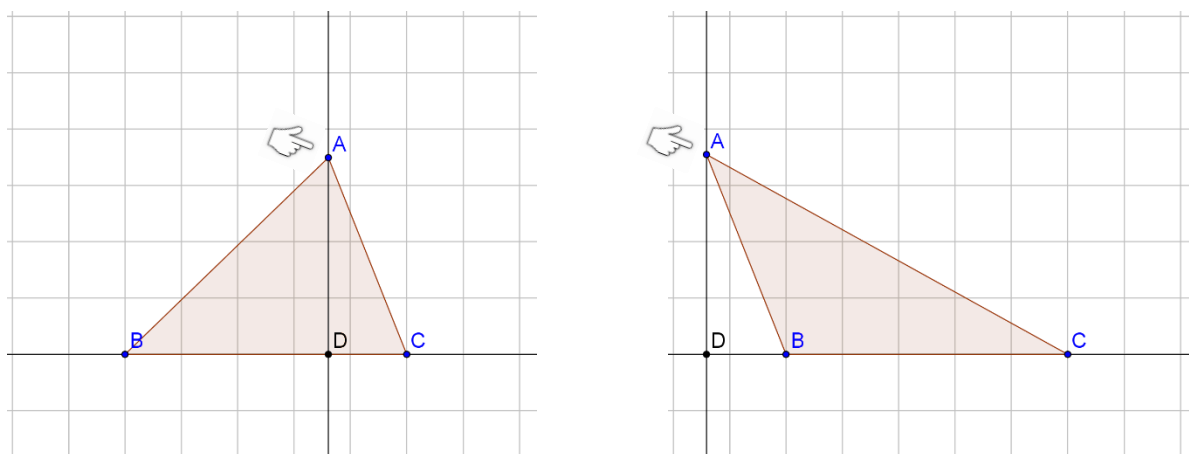


Fonte: autor

Argumento 2: (Caso a) Suponha por absurdo que a reta r intercepta o segmento BC quando o ângulo $\angle B$ é obtuso. Caso D seja diferente de B e C . Como o ângulo reto $\angle ADC$ é um ângulo externo do triângulo $\triangle ADB$, então deve ser maior que o ângulo interno oposto $\angle ABD$ por [Euclides I.16] que é obtuso. Chega-se ao absurdo, pois um ângulo reto não pode ser maior que um ângulo obtuso.

No GeoGebra não é possível fazer uma construção que contemple o enunciado feito por “absurdo”, mas, pela movimentação de A , pode-se fazer com que o ângulo $\angle B$ fique obtuso.

Figura 26 - Teorema 31 (Argumento 2) A

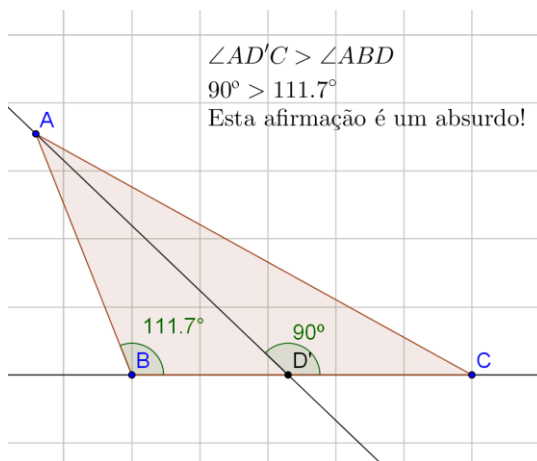


Fonte: autor

Contudo, é possível colocar um ponto D' sobre o segmento BC e construir a reta AD' e o ângulo $\angle AD'C$ com a *legenda* 90° . Nesta situação se observa o absurdo

indicado no Argumento 2. Um ângulo externo $\angle AD'C$, que é reto, ser maior que um dos ângulos internos opostos $\angle ABD$, que é obtuso.

Figura 27 - Teorema 31 (Argumento 2) B



Fonte: autor

Argumento 3: Caso D seja igual a B, os ângulos $\angle ADC$ e $\angle ABC$ serão iguais. Mas o ângulo $\angle ADC$ é reto por construção e o ângulo $\angle ABC$ é obtuso por hipótese. Chega-se a um absurdo, pois um ângulo não pode ser simultaneamente reto e não reto (obtusos).

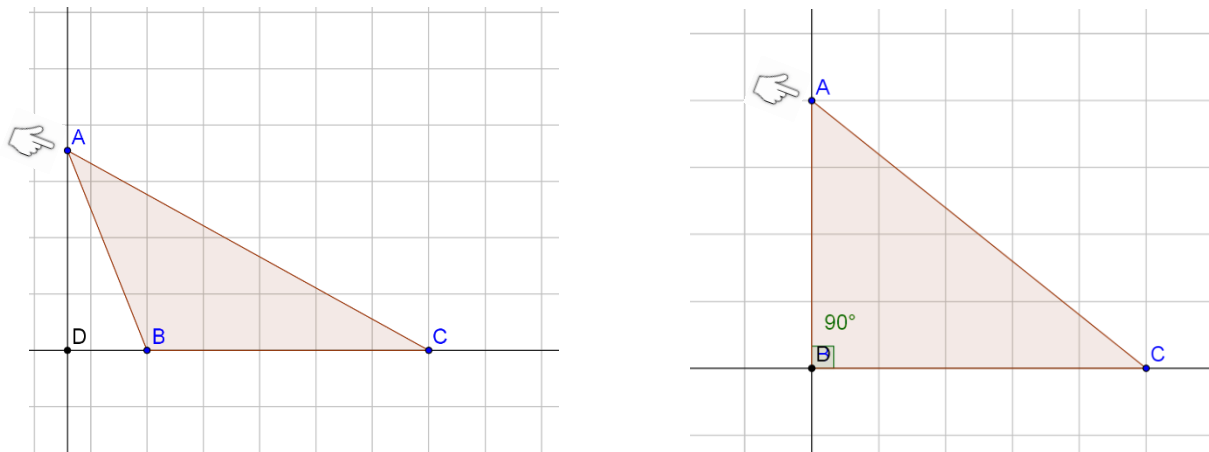
Argumento 4: Caso D seja igual a C, o $\triangle ADB$ possuirá um ângulo obtuso e um ângulo reto. Assim, as medidas dos dois ângulos mencionados não somarão menos de dois ângulos retos como exige [Euclides I.17] o que representa uma contradição. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r não intercepta o segmento BC e está demonstrado o item a) do teorema.

Argumento 5: (Caso b) Suponha por absurdo que a reta r não intercepta o segmento BC em B quando o ângulo $\angle B$ é reto. Caso D não pertença ao segmento BC, a medida do ângulo externo formado pelo vértice D do triângulo $\triangle ADB$ será igual à medida do ângulo interno oposto formado pelo vértice B contradizendo [Euclides I.16], pois o ângulo externo é necessariamente maior que o interno oposto.

Novamente, como não é possível fazer uma construção que contemple o enunciado feito por “absurdo”, pode-se fazer com que o ângulo $\angle B$ fique reto apenas pela movimentação de A. A malha quadriculada será importante para conseguir

explorar esse caso onde o ângulo $\angle B$ é reto, pois, sem ela, seria mais complicado fazer com que o ângulo ficasse reto apenas com a movimentação do ponto A.

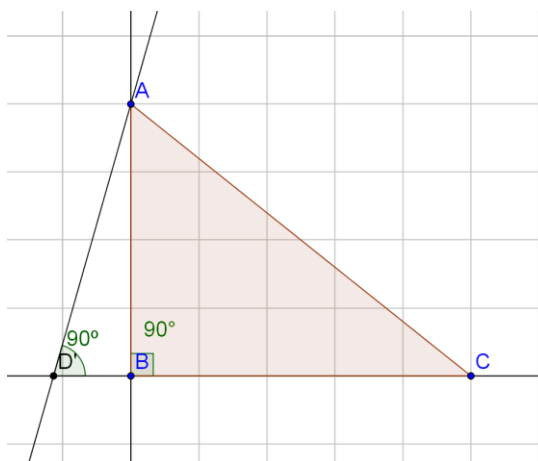
Figura 28 - Teorema 31 (Argumento 5) A



Fonte: autor

Utilizando um ponto D' para indicar o ponto de intersecção da perpendicular com a reta BC onde D' não pertence ao segmento BC , nota-se o absurdo indicado no Argumento 5.

Figura 29 - Teorema 31 (Argumento 5) B



Fonte: autor

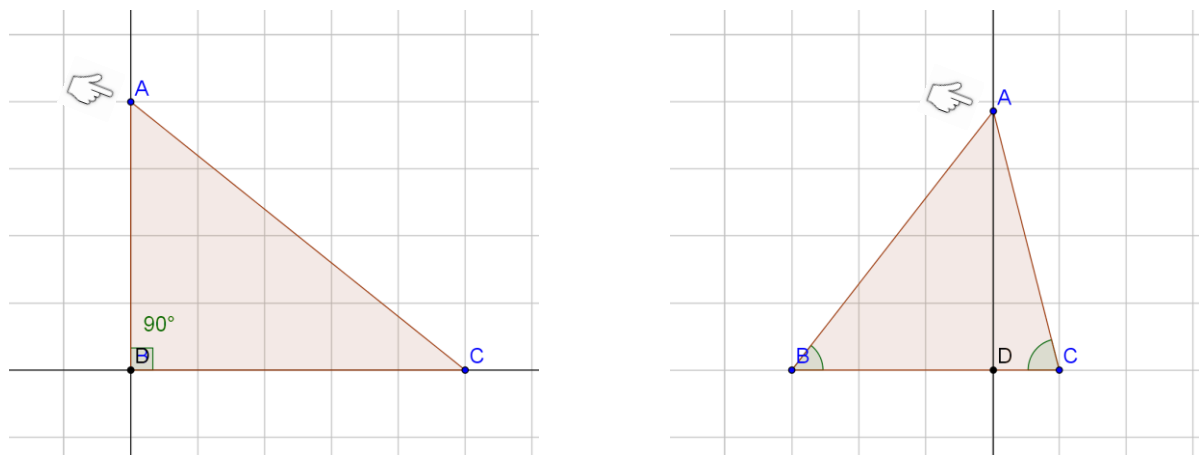
Argumento 6: Caso D pertença ao segmento BC e seja diferente de C, o $\triangle ADB$ possuirá dois ângulos retos contradizendo [Euclides I.17], pois a soma das medidas dos ângulos deste triângulo será maior que dois ângulos retos.

Argumento 7: Caso D seja igual a C, então um ângulo agudo teria que ser um ângulo reto, contradizendo a definição de ângulo agudo. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r será a reta suporte do lado AB e está demonstrado o item b) do teorema.

Argumento 8: (Caso c) Suponha por absurdo que a reta r não intercepta o segmento BC exceto talvez em B ou em C quando o ângulo $\angle B$ é agudo. Caso D seja igual a B ou C, então seria um ângulo agudo que também é reto contradizendo a definição de ângulo agudo.

Pela movimentação de A, pode-se fazer com que os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ fiquem agudos como na Figura 30.

Figura 30 - Teorema 31 (Argumento 8)

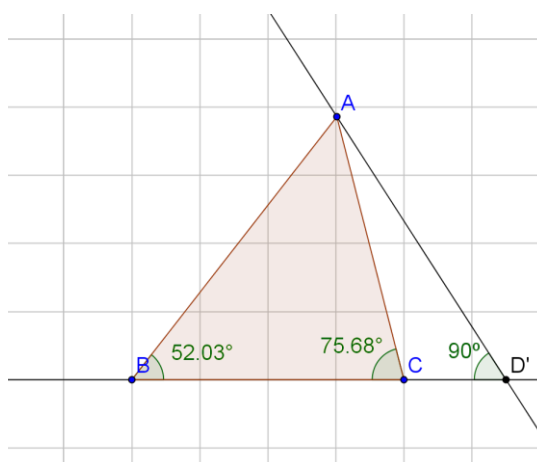


Fonte: autor

Argumento 9: Caso D não pertença ao segmento BC, então o ângulo $\angle ABC$ (ou o ângulo $\angle ACB$) seria um ângulo externo do $\triangle ABD$ (ou $\triangle ACD$) e teria de ser maior que o ângulo interno oposto $\angle ADB$ (ou $\angle ADC$) por [Euclides I.16]. Assim, chega-se a um absurdo, pois um ângulo agudo não é maior que um ângulo reto. Eliminadas todas as possibilidades, a reta r interceptará o lado BC e está demonstrado o item c) do teorema.

Utilizando um ponto D' para indicar o ponto de intersecção da perpendicular com a reta BC onde D' não pertence ao segmento BC, nota-se o absurdo indicado no Argumento 9.

Figura 31 - Teorema 31 (Argumento 9)



Fonte: autor

Conclusão

Fica evidente que a função **verificação** não é suficiente para validar a conjectura estabelecida, pois da observação dos exemplos fornecidos pela movimentação no *software* não se chega a nenhum argumento que forneça uma explicação para a conjectura. Neste caso, as funções de **explicação** ou **sistematização** são necessárias para garantir a veracidade da conjectura.

4.5. Teorema 34

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/Dv92WFdh>>.

Teorema 34 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 75)

In every equilateral triangle the [second] power of a side is four-thirds of the [second] power of its perpendicular. Hence, if the side is known, the perpendicular can be found, and vice versa.

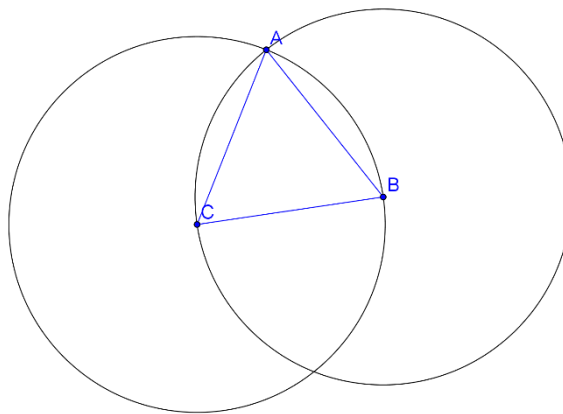
Teorema 34 – proposta do autor

Em todo triângulo equilátero o quadrado da medida de um lado é $\frac{4}{3}$ do quadrado da medida de sua altura. Consequentemente, se a medida deste lado é conhecida, então a medida da altura pode ser determinada, e vice-versa.

Construção no GeoGebra

1. Construir dois pontos B e C no plano.
2. Determinar as circunferências de centro B e raio BC e de centro C e raio CB com a ferramenta *círculo dados centro e um de seus pontos*.
3. Escolher um dos pontos de intersecção com a ferramenta *ponto* para determinar o ponto A.
4. Com a ferramenta *segmento*, indicar os segmentos AB, BC e CA para formar o triângulo equilátero $\triangle ABC$.

Figura 32 - Teorema 34



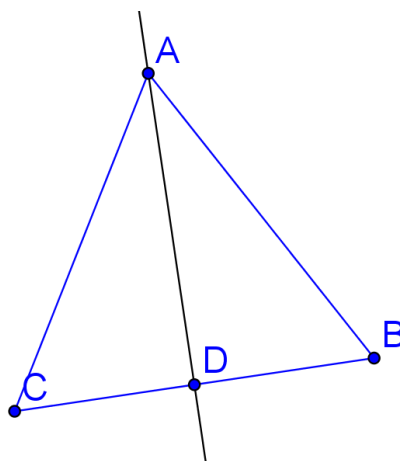
Fonte: autor

Demonstração analisada

Argumento 1: Seja D o pé da perpendicular baixada pelo vértice A do $\triangle ABC$ equilátero. Por [Regiomontanus I.33] os ângulos da base são agudos e por [Regiomontanus I.31] o ponto D pertence ao segmento BC.

Construir a reta perpendicular à reta suporte do segmento BC passando pelo ponto A e marcar o ponto D de intersecção da reta com o segmento. Note que para realizar esse passo da construção, subentende-se que a intersecção estará contida no segmento, o que é garantido pelo Teorema 31 apresentado na Seção 4.4. Ou seja, a **sistematização** foi importante para afirmar o Argumento 1.

Figura 33 - Teorema 34 (Argumento 1)

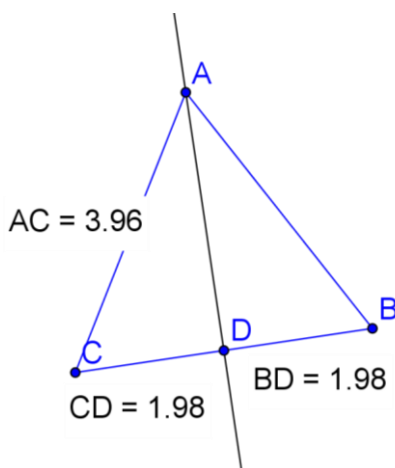


Fonte: autor

Argumento 2: O ponto D divide a base BC em duas partes com a mesma medida por [Euclides I.47]. Além disso, que a medida de BC (ou AC) é duas vezes a medida de DC.

Com a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro* pode-se determinar a medida dos segmentos para **verificar** o exposto no Argumento 2.

Figura 34 - Teorema 34 (Argumento 2)

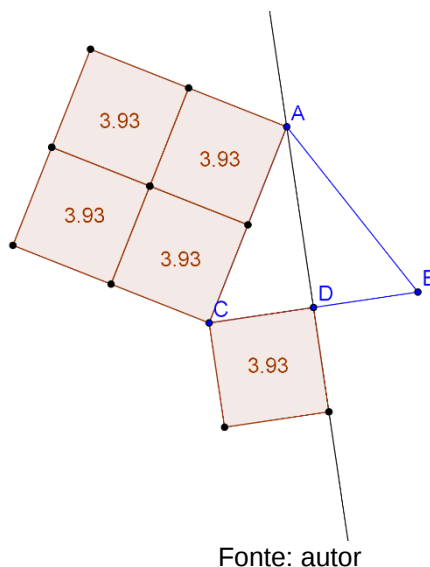


Fonte: autor

Argumento 3: Assim, o quadrado da medida AC é quatro vezes o quadrado da medida CD por [Euclides II.4] ou [Euclides VI.18].

Para observar a relação entre os quadrados das medidas, pode-se construir quadrados sobre os lados indicados. Para isso, é necessário determinar o ponto médio do segmento AC com a ferramenta *ponto médio ou centro* e, em seguida, construir cinco quadrados apoiados nos lados com a ferramenta *polígono regular* como na Figura 35.

Figura 35 - Teorema 34 (Argumento 3)

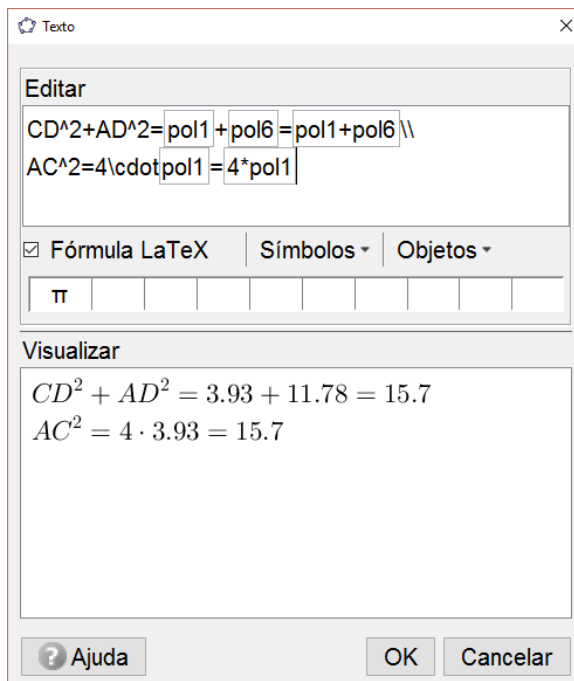


Fonte: autor

Argumento 4: Além disso, o quadrado da medida AC é igual ao quadrado da medida AD mais o quadrado da medida CD por [Euclides I.47]. Então, a soma destes dois quadrados é quatro vezes o quadrado da medida DC.

Novamente, pode-se construir o quadrado sobre o segmento AD. Para **verificar** que a soma dos quadrados das medidas de AD e CD é igual ao quadrado da medida de AC, pode-se utilizar a ferramenta *texto*. Na *Janela de Texto*, selecionar o *box Fórmula LaTeX* e digitar o texto como na Figura 36:

Figura 36 - Teorema 34 (Argumento 4)

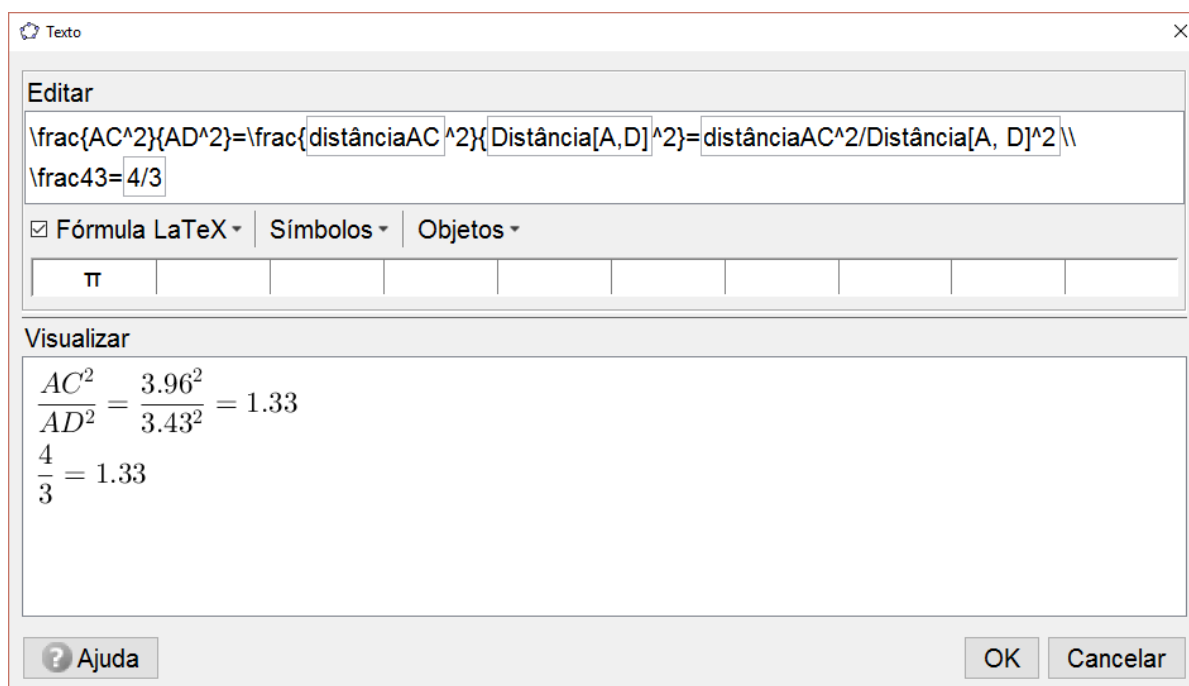


Fonte: autor

Argumento 5: Consequentemente, a razão de sua soma está para o quadrado da medida de CD assim como 4 está para 1. A razão do quadrado da medida de AD está para o quadrado da medida de CD assim como 3 está para 1, isto é, o triplo. Além disso, o quadrado da medida de AC é o quádruplo do quadrado da medida de CD. Então, o numerador da primeira razão é quatro, enquanto o da segunda é três. Logo, a razão do quadrado da medida de AC está para o quadrado da medida de AD assim como 4 está para 3, isto é, quatro terços por [Regiomontanus I.12]. Portanto, o quadrado da medida do lado AC é provado ser quatro terços do quadrado da medida de sua respectiva altura AD, como a proposição indicou.

Mais uma vez, com a ferramenta *texto*, pode-se **verificar** o que foi afirmado no Argumento 5 utilizando a ferramenta texto como na Figura 37:

Figura 37 - Teorema 34 (Argumento 5)



Fonte: autor

Conclusão

Em cada argumento da demonstração, a função de **verificação** foi essencial para observar as relações entre as medidas. Além disso, a construção obtida pode ser considerada uma forma geométrica de **comunicar** os passos algébricos contidos na demonstração.

4.6. Teorema 43

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/wC2d9ZXV>>.

Teorema 43 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 89)

If three sides of a triangle are given, the two segments into which the perpendicular, drawn from the vertex to the base, divides the base may be found.

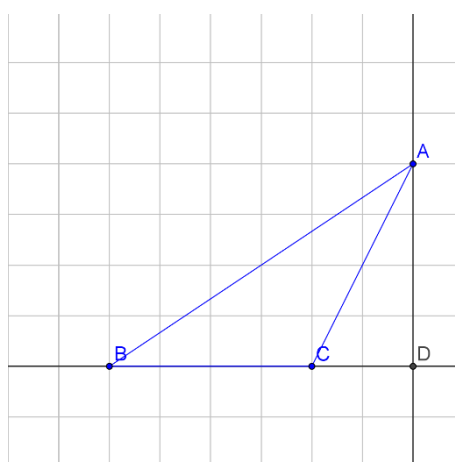
Teorema 43 – proposta do autor

Se as medidas dos três lados de um triângulo $\triangle ABC$ forem conhecidas e dado o ponto D de intersecção da reta perpendicular à reta BC passando pelo ponto A, então as medidas dos segmentos BD e CD podem ser determinadas.

Construção no GeoGebra

1. Deixar a *malha quadriculada* visível.
2. Construir dois pontos A, B e C no plano.
3. Com a ferramenta *segmento*, indicar os segmentos AB, BC e CA para formar o triângulo $\triangle ABC$.
4. Determinar a reta BC e a reta perpendicular à reta BC passando por A.
5. Indicar o ponto D de intersecção das duas retas com a ferramenta *intersecção de dois objetos*.

Figura 38 - Teorema 43



Fonte: autor

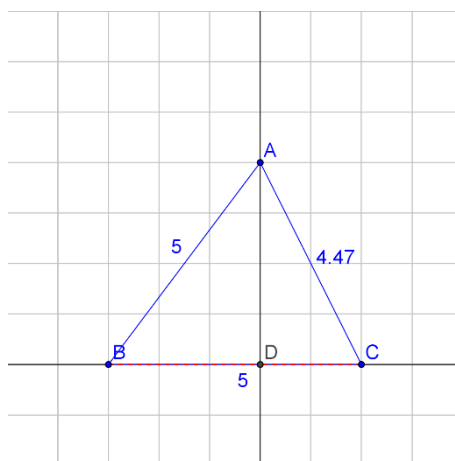
Demonstração analisada

Antes de iniciar a demonstração, Regiomontanus apresenta uma justificativa para não considerar os triângulos retângulos em sua demonstração. Primeiro afirma que “quando a perpendicular coincide com um dos lados, então existirá somente um segmento” e depois que “foi falado o suficiente sobre encontrar medidas desconhecidas em triângulos retângulos” (HUGHES, 1967, p. 89 – tradução do autor).

Argumento 1: Se os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ forem agudos, a reta AD intercepta a base BC por [Regiomontanus I.31]. A soma dos quadrados das medidas de AC e BC vai exceder o quadrado da medida de AB pelo dobro do produto das medidas de BC e CD por [Euclides II.13]. Como as medidas dos lados do triângulo são conhecidas, o quadrado da medida de AB e a soma dos quadrados das medidas de AC e BC também serão conhecidas por [Regiomontanus I.1] e [Regiomontanus I.3]. Então o dobro do produto das medidas de BC e CD também será conhecida por [Regiomontanus I.4].

Do Argumento 1, pode-se escrever a equação: $AC^2 + BC^2 - AB^2 = 2 BC \cdot CD$. Como esta notação não era utilizada por Regiomontanus, ele justifica como determinar o valor de $AC^2 + BC^2 - AB^2$ e, em seguida, que esse valor será o mesmo para a expressão $2 BC \cdot CD$.

Figura 39 - Teorema 43 (Argumento 1)

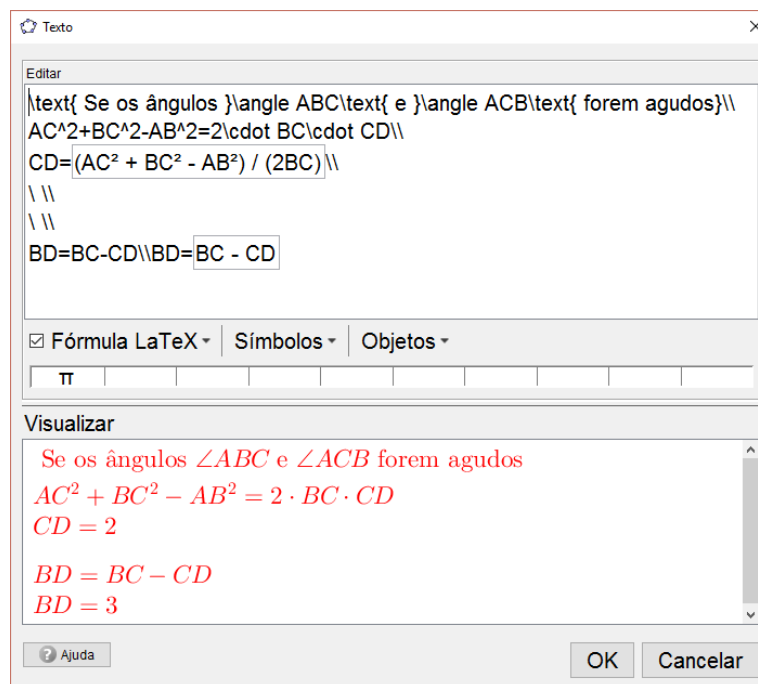


Fonte: autor

Argumento 2: O produto das medidas de BC e CD é conhecido. Mais do que isso, como a medida do lado BC é conhecida por hipótese, a medida do segmento CD passa a ser conhecida por [Regiomontanus I.17] e a medida do lado BD também pode ser determinada.

Sabendo o valor de $2 \cdot BC \cdot CD$, é possível determinar a medida de CD e a medida do segmento BD pode ser determinada fazendo $BC - CD$ que será igual a BD . Utilizando as notações atuais, pode-se verificar a solução obtida escrevendo com a ferramenta *texto* como na Figura 40:

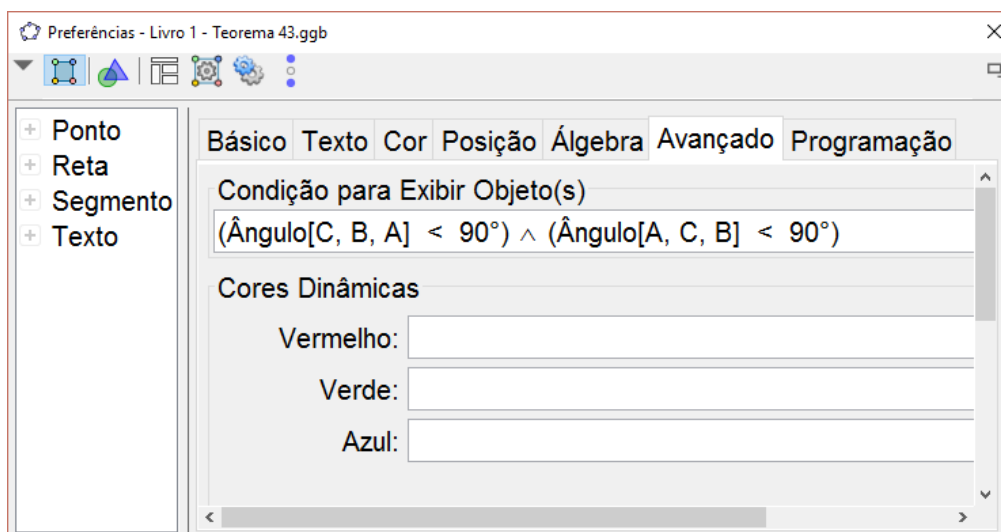
Figura 40 - Teorema 43 (Argumento 2) A



Fonte: autor

Para que este texto apareça somente quando os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ forem agudos, basta escrever uma *condição para exibir objeto(s)* na aba *avanzado* das *propriedades* do texto criado como na Figura 41:

Figura 41 - Teorema 43 (Argumento 2) B

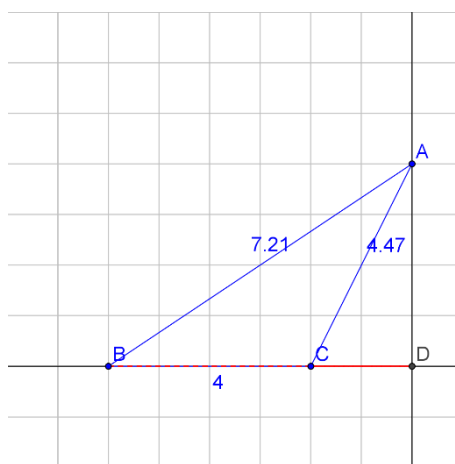


Fonte: autor

Argumento 3: Se o ângulo $\angle C$ for obtuso, a perpendicular AD ficará fora do triângulo de modo que C e D estejam no mesmo semiplano em relação à reta AB . Por [Euclides II.12], o quadrado da medida de AB será maior que a soma dos quadrados das medidas de AC e BC pelo dobro do produto de BC e CD . Utilizando os mesmos teoremas indicados no caso anterior, as medidas dos segmentos CD e BD podem ser determinadas.

Do Argumento 3, pode-se escrever a equação: $AB^2 - (AC^2 + BC^2) = 2 BC \cdot CD$. A seguir, Regiomontanus indica que serão utilizados os mesmos teoremas do caso anterior, onde os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ eram agudos, para determinar as medidas dos segmentos desejados CD e BD .

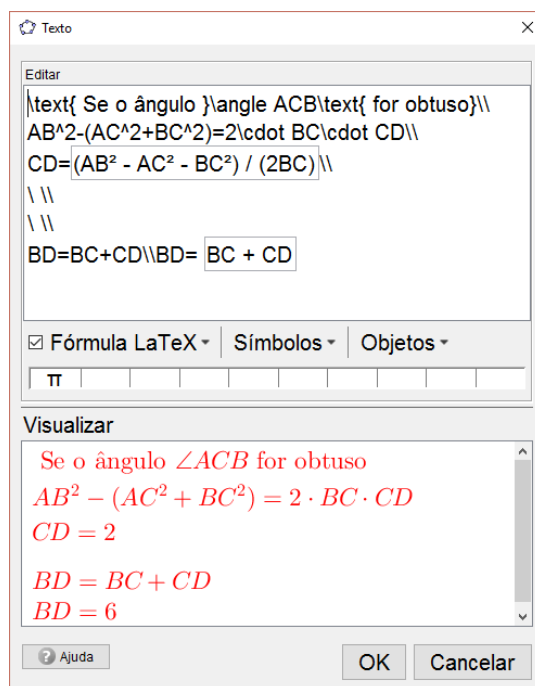
Figura 42 - Teorema 43 (Argumento 3) A



Fonte: autor

Novamente, verifica-se a relação exposta na equação escrevendo com a ferramenta *texto* como na Figura 43:

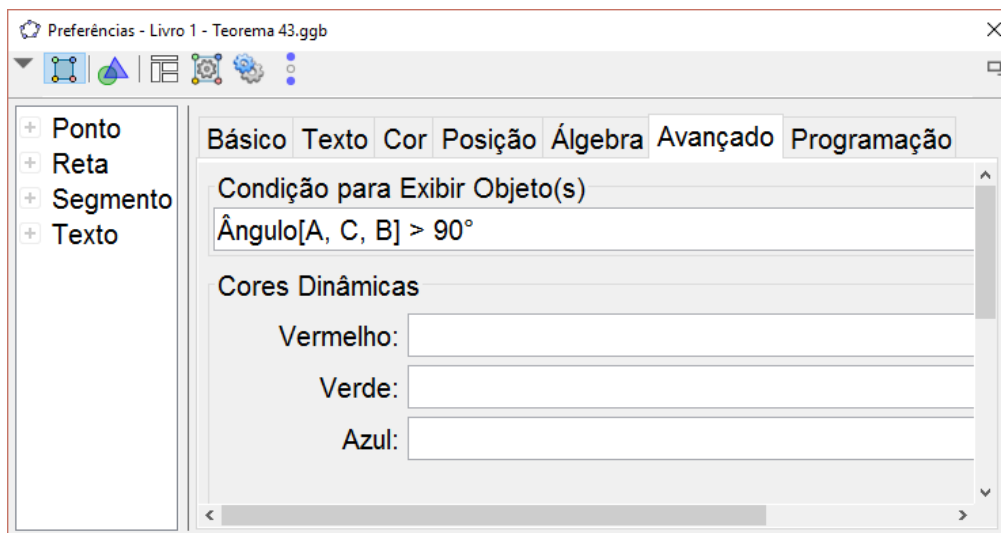
Figura 43 - Teorema 43 (Argumento 3) B



Fonte: autor

Para que este texto também só apareça somente quando um dos ângulos $\angle B$ ou $\angle C$ for obtuso, basta escrever uma *condição para exibir objeto(s)* na aba *avançado* das *propriedades* do texto criado como na Figura 44:

Figura 44 - Teorema 43 (Argumento 3) C



Fonte: autor

Conclusão

Novamente, as funções de **explicação** ou **sistematização** foram essenciais para garantir a veracidade da conjectura. A construção permite uma visualização do

que foi proposto no teorema, mas não se estabelece como uma **verificação** da hipótese enunciada nem dos argumentos da demonstração.

4.7. Teorema 47

O arquivo da construção deste teorema pode ser localizado em:

<<https://www.geogebra.org/book/title/id/fMEsdZ63#material/hG5kTgJ4>>.

Teorema 47 – versão em Inglês (HUGHES, 1967, p. 97)

If three sides of any triangle are known, the sizes of its three angles may also be found.

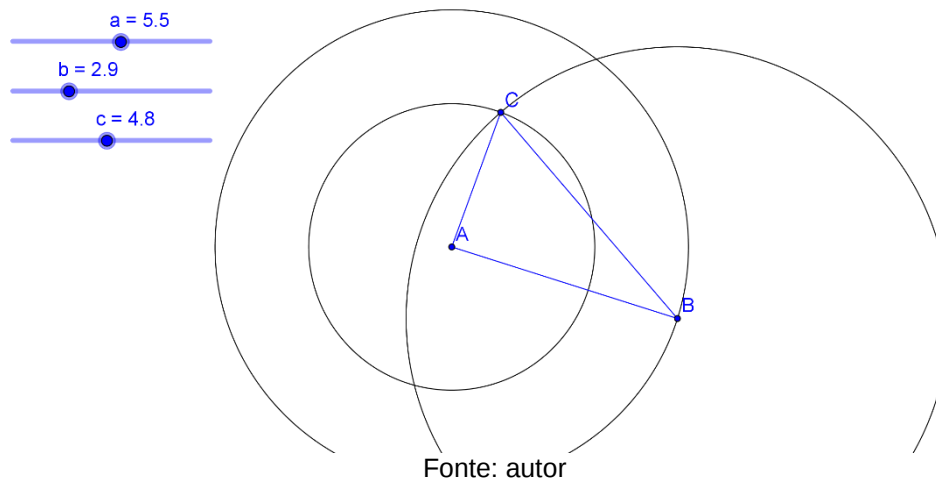
Teorema 47 – proposta do autor

Se as medidas dos três lados de um triângulo são conhecidas, então as medidas de seus três ângulos também podem ser determinadas.

Construção no GeoGebra

1. Construir três controles deslizantes a , b e c para indicar as medidas conhecidas dos lados do triângulo.
2. Determinar a circunferência de centro A e raio c com a ferramenta *círculo dados centro e raio* e indicar um ponto B qualquer nela com a ferramenta *ponto em objeto*.
3. Construir as circunferências de centro em A e raio b e de centro em B e raio a . Sua intersecção será o vértice C do triângulo desejado.
4. Com a ferramenta *segmento*, indicar os segmentos AB , BC e CA para formar o triângulo $\triangle ABC$.

Figura 45 - Teorema 47



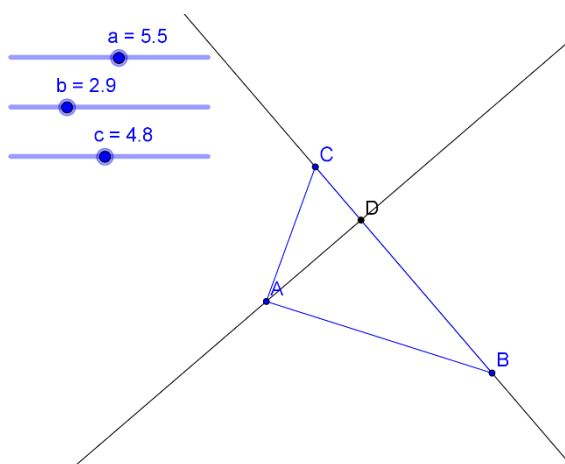
Demonstração analisada

Mais uma vez, Regiomontanus justifica o motivo de não considerar os triângulos retângulos em sua demonstração “porque parece termos falado o suficiente sobre triângulos retângulos” (HUGHES, 1967, p. 97 – tradução do autor).

Argumento 1: Considere o $\triangle ABC$ cujos lados possuem medidas conhecidas e seja D o ponto de intersecção da reta BC com a sua perpendicular passando pelo ponto A . Se a perpendicular intercepta o segmento BC em algum ponto diferente de B e C , o teorema anterior garante que a medida da altura AD pode ser determinada. Como o triângulo retângulo $\triangle ADC$ tem os lados AD e AC com medidas conhecidas, então seus ângulos agudos podem ser determinados por [Regiomontanus I.27]. De forma análoga, o triângulo retângulo $\triangle ABD$ tem os lados AD e AB com medidas conhecidas e, então, seus ângulos agudos podem ser determinados.

Para visualizar a altura AD indicada, basta construir a reta BC e a reta perpendicular à reta BC passando por A .

Figura 46 - Teorema 47 (Argumento 1)



Fonte: autor

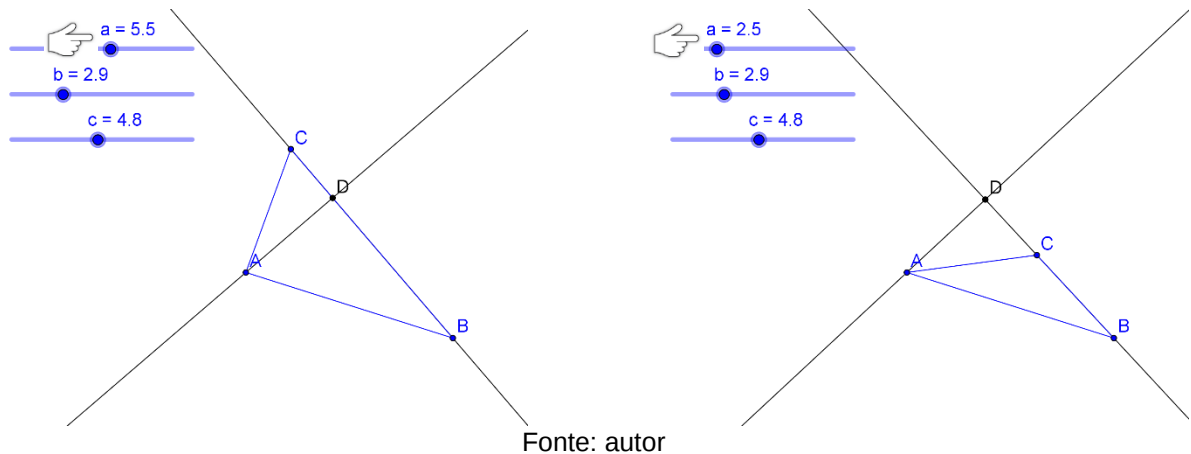
Argumento 2: como os ângulos $\angle B$ e $\angle C$ são comuns aos triângulos mencionados e ao triângulo $\triangle ABC$ dado, então a medida do ângulo $\angle BAC$ pode ser determinada por [Regiomontanus I.25].

Do Argumento 1, tem-se que os ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ são conhecidos. Mas o ângulo $\angle ABC$ é equivalente ao ângulo $\angle ABD$ e o ângulo $\angle ACB$ equivalente ao $\angle ACD$. A medida do ângulo $\angle BAC$ pode ser determinada utilizando o fato de que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180° . Logo, as medidas de todos os ângulos foram determinadas.

Argumento 3: Se a perpendicular AD não intercepta o segmento BC, as medidas dos ângulos $\angle ABD$ e $\angle ACD$ serão conhecidas pelas razões já citadas. Por [Euclides I.13], as medidas dos ângulos $\angle ACD$ e $\angle ACB$ somam 180° e, por [Regiomontanus I.3] a medida do ângulo $\angle ACB$ fica determinada. Novamente, a medida do ângulo $\angle BAC$ pode ser determinada por [Regiomontanus I.25].

Para visualizar a altura AD indicada, basta movimentar os controles deslizantes:

Figura 47 - Teorema 47 (Argumento 3)



Conclusão

Conforme Regiomontanus avança na elaboração dos teoremas do Livro I, percebe-se que os argumentos apresentados são menos verificáveis apenas com a visualização da construção. Assim, pode-se constatar a necessidade da **explicação** e da **sistematização** para a validação das conjecturas apresentadas em cada argumento.

Considerações finais

Este trabalho se dedicou a uma análise do Livro I de Regiomontanus no qual se encontram Teoremas sobre a construção de triângulos, satisfeitas algumas condições dadas, e de onde emergiram as questões da pesquisa: “quais funções da demonstração se revelam nas situações geométricas dos teoremas de Regiomontanus sobre triângulos quando explorados no GeoGebra?” e “como a exploração da demonstração pode se tornar uma atividade de investigação Matemática ou estratégia didática em sala de aula?”.

Alguns autores afirmam que a demonstração tem um papel central na Matemática, assim como deveria ter na Educação Matemática, pois, além de ser o cerne da prática Matemática, é uma ferramenta essencial para promover a compreensão dela (BALL *et al*, 2002). O fato da demonstração ter se tornado algo sem significado para os alunos pode estar relacionado à função que lhe é atribuída.

Segundo Ball *et al*, “a demonstração deveria servir mais para testar a credibilidade ou a veracidade de uma suposição do que para estabelecer a verdade de uma afirmação²” (2002, p. 908 – tradução do autor) complementando que o fracasso no ensino tradicional de Geometria está parcialmente relacionado à falta de reconhecimento da complexidade sobre o tema.

Villiers sugere que os alunos sejam iniciados nas várias funções da demonstração numa sequência (Explicação – Descoberta – Verificação – Desafio Intelectual – Sistematização) não de uma maneira estritamente linear, mas numa espécie de espiral em que funções já introduzidas sejam retomadas e ampliadas (VILLIERS, 2001). Seguindo essa sequência, é possível “(re)descobrir” resultados propostos por Regiomontanus e, mais do que isso, verificar outras possibilidades não indicadas pelo autor.

Durante essa pesquisa, percebeu-se que o GeoGebra permite a exploração das diferentes funções da demonstração. Mais do que isso, possibilita uma forma de representação de resultados matemáticos e pode ajudar na visualização de novos casos ou na criação de outras possibilidades a serem exploradas.

² “[...] a proof may serve more to test the credibility or the fruitfulness of an assumption than to establish the truth of a statement” (BALL *et al*, 2002, p. 908).

Num processo de investigação Matemática em sala de aula, como propõem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), cuja temática fossem teoremas sobre triângulos; o desafio intelectual de representar geometricamente os diferentes casos possíveis a partir das hipóteses e identificar situações não previstas poderia instigar o estudante a novos estudos e possibilitar que

[...] se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas (BRASIL, 1998, p. 71).

Nessa perspectiva, o trabalho de Mundy-Castle (2016) indica um caminho para explorar as demonstrações de alguns teoremas de Regiomontanus em sala de aula. Em suas notas de aula, ele apresenta os argumentos utilizados por Regiomontanus em algumas de suas demonstrações e elabora perguntas que conduzem os alunos na investigação delas. Em certo momento, sugere que os alunos produzam figuras para ajudar a responder seus questionamentos.

No caso desta pesquisa, o GeoGebra foi uma ferramenta importante para auxiliar na construção de argumentos a respeito dos teoremas analisados, pois, por meio da movimentação dos pontos, foi que se constaram casos que não estavam contemplados na demonstração.

Nos termos apresentados por Chevallard (1991), ao considerar o legado deixado por Regiomontanus como um saber sábio, pode-se buscar uma adaptação desse saber para um saber a ser ensinado na perspectiva da Transposição Didática. Assim, essa pesquisa possibilita a aproximação do professor da Educação Básica de um texto teórico e indica caminhos para sua utilização em sala de aula. Cabe ao professor continuar o processo da Transposição Didática tornando-o em um saber a ser ensinado.

A riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração, pois “uma dada conjectura ser ou não verdadeira é muitas vezes uma questão irrelevante em matemática” (VILLIERS, 2002, p. 1), a exemplo da demonstração do Último Teorema de Fermat demonstrado por Andrew Wiles pode-se dizer que

O valor real do que Wiles e os seus colaboradores fizeram é muito maior do que a mera demonstração de uma conjectura excêntrica. A importância da demonstração do último teorema de Fermat reside na abertura de novas possibilidades para a matemática. ... O valor da demonstração de Wiles não está naquilo que demonstra, mas naquilo que torna acessível, no que possibilita (ROTA, 1997, p. 190 apud VILLIERS 2002, p. 2).

Nesta linha de pesquisa, outros teoremas de Regiomontanus podem ser estudados dinamicamente com a utilização do GeoGebra e novas descobertas podem se revelar, o que sugere uma estratégia didática interessante para ser explorada na prática docente.

A reflexão sobre a distinção entre demonstração, prova e explicação segundo Balacheff (2000; 1987) poderia conduzir a uma pesquisa sobre o tipo de argumentação elaborada por Regiomontanus, onde seria realizado um estudo aprofundado das questões históricas de sua época, traçando um paralelo para o contexto atual.

Esta estratégia indicaria um caminho a ser percorrido para responder a questões como as expostas por Pereira e Pereira:

Consideramos que muitas discussões sobre uso de fontes históricas para o ensino de matemática ainda precisam ser feitas. [...]. Consideramos um desafio a produção de materiais didáticos, cuja fonte histórica seja o principal elemento para a condução do ensino, porém, isso dependerá de uma série de fatores já discutidos. Almejamos, assim, confeccionar atividades utilizando fontes e validá-las no meio escolar para perceber, em lócus, suas potencialidades (2015, p. 76).

Além disso, a forma como foi indicada para exploração da demonstração mediada pelo GeoGebra pode-se constituir em uma estratégia didática para o ensino de demonstrações em cursos de graduação, especialmente de Licenciatura em Matemática.

Referências

- ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. A Contribuição da Geometria Dinâmica na Resolução de Problemas. In: **II Seminário em resolução de problemas**. Rio Claro: UNESP, 2011.
- ALMOULOU, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; MIGUEL, Maria Inez Rodrigues; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 217-246, 2008.
- ARSAC, Gilbert. **El origen de la demostracion: ensayo de epistemologia didactica**. Trad. Martín Acosta. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 8, n. 3, 1987, p. 267-312.
- BALACHEFF, Nicolas. Processus de preuve et situations de validation. **Educational Studies In Mathematics: An International Journal**, Springer Netherlands, v. 18, n. 2, p.147-176, maio 1987.
- _____. La transposition informatique: Note sur um nouveau problème pour la didactique.. In: ARTIGUE, Michèle et al (Ed.). **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1994. p. 364-370.
- _____. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Centro de Impresión Digital Cargraphics S.A., 2000. Tradução de: Pedro Gómes.
- _____. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. In F.-L. Lin (Ed.), 2002 **International Conference on Mathematics** - "Understanding proving and proving to understand". Taipei, Taiwan: NSC and NTNU, 2002, p. 23-44.
- BALL, Deborah Loewenberg et al. The Teaching of Proof. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS, 2002, Beijing. **Proceedings...** . Beijing: Higher Education Press, 2002. v. 3, p. 907 – 920
- BICUDO, Irineu. **Euclides: Os Elementos**. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- _____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique**. Grenoble: Pensée Sauvage, 1991.

COOKE, Roger. The Renaissance: Algebra and Trigonometry. In: COOKE, Roger. **The history of mathematics: a brief course**. 1st ed. Burlington, VT: Wiley-Interscience, 1997. Cap. 14. p. 303-305.

CREEM – CENTRE DE RECHERCHE ET EXPERIMENTATION POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES (France). **Activités Mathématiques avec Imagiciels: Geometrie dans l'espace**. Paris: Ministere de l'Education Nationale et de la Culture, 1992.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2007.

FERREYRA, Nora; CASTRO, Nora. **GeoGebra como punto de partida de un proceso de validación**. Disponível em: <<https://seadiuncoma.files.wordpress.com/2010/03/061.pdf>>. Acesso em: 27 set. 2016.

FURINGHETTI, F. Teacher education through the history of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 66, n. 2, p. 131-143, 2007.

GARFIELD, James. James Garfield's Proof of the Pythagorean Theorem. Disponível em: <<http://facultyweb.kennesaw.edu/sellerme/docs/garfieldpro.pdf>>. Acesso em: 25 out. 2016.

HUGHES, Barnabas. **Regiomontanus on Triangles**. Madison, Milwaukee and London: University of Winsconsin Press, 1967.

LIMA, Marcella Luanna da Silva. **O auxílio do geogebra na verificação de alguns teoremas da geometria euclidiana plana**. In: VII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Montevideo, 2013, p. 6965 - 6972.

MARIOTTI, Maria Alessandra. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. **Educational Studies in Mathematics**. Kluwer Academic Publishers: Netherlands, v. 44, 2000, p. 25-53.

MENDES, Iran Abreu. Atividades históricas para ensino da trigonometria. In: CARVALHO, Dione Lucchesi de et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2009. Cap. 2. p. 105-178.

MOD, Luiz Felipe Araujo; ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. O GeoGebra como instrumento de investigação de teoremas de Regiomontanus. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais...**. Disponível em: <http://sbempe.cpanel0179.hospedagemdesites.ws/enem2016/anais/pdf/5909_2409_ID.pdf>. Acesso em: 14 out. 2016.

MUNDY-CASTLE, Charles. **Regiomontanus and Trigonometry: A teaching module**. 2004. Disponível em: <[http://www.math.utep.edu/Faculty/cmmundy/Math1508/teaching module.pdf](http://www.math.utep.edu/Faculty/cmmundy/Math1508/teaching%20module.pdf)>. Acesso em: 05 set. 2016.

PARODI, Carlos et al. **El trabajo conjetural con el uso del GeoGebra**. Disponível em:

<http://www.cidse.tec.ac.cr/ciemac/memorias/6toCIEMAC/Ponencias/El_trabajo_conjetural_Parodi_Ferreira.pdf>. Acesso em: 27 set. 2016.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A obra De Triangulis Omnium Libri Quinque de Johann Muller Regiomontanus 1436-1476: uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria**. 2010. 329 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; PEREIRA, Daniele Esteves. ENSAIO SOBRE O USO DE FONTES HISTÓRICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA. **Rematec: Revista de Matemática Ensino e Cultura**: Histórias das Matemáticas em Pesquisas e Práticas, Natal, v. 18, n. 10, p.65-78, jan/abr. 2015.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2003 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SAITO, Fumikazu. História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2013, Montevideo. **Actas**. Montevideo: Semur, 2013. p. 3979 - 3987.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre História da Matemática e Ensino: Uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p.89-111, 2013.

VILLIERS, Michael de. The role and function of proof in dynamic geometry: Some personal reflections. In: KING, James; SCHATTSCHNEIDER, Doris (Ed.). **Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research**. Washington: Mathematical Association of America Notes, 1997. p. 15-24.

_____. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática - APM**, Portugal, n. 62, p. 31-36, mar/abr 2001.

_____. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica**. Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue, Associação de Professores de Matemática, 2002. Disponível em: <<http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2006.2/esp00000/arquivos/profmat2.pdf>>. Acesso em: 09 mar. 2016.

_____. Some pitfalls of dynamic geometry software. **Learning and Teaching Mathematics**, n. 4, p. 46-52, 2007.

Apêndice A – Resultados de Euclides

BICUDO, Irineu. **Euclides: Os Elementos**. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

Livro I

[Euclides I.4]: Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais (p. 101)³.

[Euclides I.5]: Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si (p. 102).

[Euclides I.13]: Caso uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos (p. 108).

[Euclides I.16]: Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é maior do que cada um dos ângulos interiores e opostos (p. 110).

[Euclides I.17]: Os dois ângulos de todo triângulo, sendo tomados juntos de toda maneira, são menores do que dois retos (p. 111).

[Euclides I.29]: A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos (p. 120).

[Euclides I.34]: Das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas (p. 123).

[Euclides I.47]: Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto (p. 132)⁴.

³ Caso de Congruência de Triângulos: Lado-Ângulo-Lado

⁴ Resultado conhecido como “Teorema de Pitágoras”

Livro II

[Euclides II.4]: Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos (p. 137).

[Euclides II.12]: Nos triângulos obtusângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso é maior do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo obtuso por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo obtuso, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada exteriormente pela perpendicular relativamente ao ângulo obtuso (p. 147).

[Euclides II.13]: Nos triângulos acutângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo (p. 148).

Livro III

[Euclides III.3]: Caso, em um círculo, alguma reta pelo centro corte alguma reta, não pelo centro, em duas, também a corta em ângulos retos; e, caso corte-a em ângulos retos também a corta em duas (p. 153).

[Euclides III.29]: Nos círculos iguais, retas iguais subtendem circunferências iguais (p. 176).

Livro VI

[Euclides VI.18]: Sobre a reta dada descrever uma retilínea semelhante, e também semelhantemente posta, à retilínea dada (p. 249).

[Euclides VI.33]: Nos círculos iguais, os ângulos têm a mesma razão que as circunferências, sobre as quais estão situados, caso estejam situados tanto nos centros quanto nas circunferências (p. 266).

Apêndice B – Teoremas de Regiomontanus

HUGHES, Barnabas. **Regiomontanus on Triangles**. Madison, Milwaukee and London: University of Wisconsin Press, 1967.

Teoremas do Livro I

Theorem 1. The square of any given line is known (p. 33).

Theorem 2. The side of a known square can be found (p. 35).

Theorem 3. If several quantities are given in terms of each other, their sum may be found (p. 35).

Theorem 4. When two unequal quantities are given in terms of each other, their difference may be found (p. 37).

Theorem 5. Any two quantities, given in terms of each other, have the same ratio as that of the two numbers according to which the quantities are measured. Hence, we may state that every given ratio may be found in numbers (p. 37).

Theorem 6. If one of two quantities in a given ratio is known, the other can be found (p. 39).

Theorem 7. If two quantities are given in terms of each other and one of them is known by a new measure, then the other may be found by this same new measure (p. 41).

Theorem 8. If each two quantities is given in terms of a third, they can be expressed in terms of each other (p. 43).

Theorem 9. If each of two quantities is given in terms of a third, both their sum and [their] difference, should they be unequal, may be found (p. 45).

Theorem 10. Any number of quantities expressed in terms of one other quantity can be known in terms of each other (p. 45).

Theorem 11. Geometry can find the sum of any number of quantities expressed in terms of another quantity, together with the difference of any two of these if a difference exists (p. 47).

Theorem 12. If the ratio of two quantities to a third is given, their ratio to each other may be found (p. 47).

Theorem 13. If the ratios of any number of quantities to one other [quantity] are given, then the ratio of any two of these becomes known (p. 49).

Theorem 14. If the ratio of each of two quantities to a third is given and one of the quantities is known, then the other can also be found (p. 49).

Theorem 15. If any number of quantities form given ratios with another particular quantity, and if any one of these quantities is known, then all the others may be found (p. 51).

Theorem 16. The product of two straight lines given in the same units reveals [the area of] a rectangular parallelogram (p. 51).

Theorem 17. From any given side of a rectangular parallelogram [of] known [área], one can determine the other side (p. 53).

Theorem 18. From the given ratio of the sides of a rectangular parallelogram with known area, the length of each of the sides can be found (p. 55).

Theorem 19. If, of four proportional quantities, any three are given, the fourth one that remains will become known (p. 57).

Theorem 20. In every right triangle, one of whose acute vertices becomes the center of a circle and whose [hypotenuse] its radius, the side subtending this acute angle is the right sine of the arc adjacent to that [side and] opposite the given angle, and the third side of the triangle is equal to the sine of the complement of the arc (p. 59).

Theorem 21. Every right angle is necessarily known (p. 61).

Theorem 22. If one of the two acute angles of a right triangle is given, the other can be found (p. 61).

Theorem 23. If, in a [right] triangle, the two sides containing the right angle are equal, the two acute angles opposite the sides may be found (p. 63).

Theorem 24. If the [hypotenuse] of a right triangle is double the length of one of the sides adjacent to the right angle, then the acute angle included by that side and the hypotenuse is double the other acute angle. Hence geometry also reveals each of the angles (p. 63).

Theorem 25. If two angles of any triangle are known, the third may be found (p. 63).

Theorem 26. If two sides of a right triangle are known, the third is directly apparent (p. 65).

Theorem 27. When two sides of a right triangle are known, all the angles can be found (p. 65).

Theorem 28. When the ratio of two sides of a right triangle is given, its angles can be ascertained (p. 67).

Theorem 29. When one of the two acute angles and one side of a right triangle are known, all the angles and sides may be found (p. 69).

Theorem 30. If one of the acute angles of a right triangle is given, the ratios of the sides can be found although the [lengths of the] sides themselves are not known (p. 71).

Theorem 31. If one of the two angles on the base of a triangle is obtuse, then a perpendicular drawn from the vertex angle to the base will fall outside the triangle. But if [one of the base angles] is a right angle, the perpendicular will coincide with the side adjacent to the right angle. If both [base angles] are acute, the perpendicular must remain within the triangle (p. 71).

Theorem 32. If three sides of any triangle are known, and if one of the three perpendiculars is given, the other two can be found (p. 73).

Theorem 33. The three angles of every equilateral triangle can be proven known; whence it is agreed that any one of [the angles] is acute (p. 75).

Theorem 34. In every equilateral triangle the [second] power of a side is four-thirds of the [second] power of its perpendicular. Hence, if the side is known, the perpendicular can be found, and vice versa (p. 75).

Theorem 35. If any one of the angles of an isosceles triangle is known, the other angles will be found. In addition, each of the base angles will be shown to be acute (p. 77).

Theorem 36. The perpendicular which is conterminous with the two known sides of an isosceles triangle and which bisects the known base may be easily found (p. 79).

Theorem 37. The types of angles in an isosceles triangle may be easily found when the sides and base are known (p. 79).

Theorem 38. If, in an isosceles triangle, either a side or a perpendicular is given together with one of the angles, the other sides and perpendiculars can be measured (p. 81).

Theorem 39. When the sides and base of an isosceles triangle are known, all its angles may be found (p. 83).

Theorem 40. If the perpendicular of an isosceles triangle is given, then either the side can be found when the base is known or the base can be found when the side is known (p. 83).

Theorem 41. If only one angle of an isosceles triangle is given, the ratios [of] each side to the base and the perpendiculars may be found (p. 85).

Theorem 42. When the three sides of a triangle are known, the type of any angle may be determined (p. 87).

Theorem 43. If three sides of a triangle are given, the two segments into which the perpendicular, drawn from the vertex to the base, divides the base may be found (p. 89).

Theorem 44. Another proof for the previous theorem (p. 91).

Theorem 45. Segments of this type may be calculated in other ways (p. 93).

Theorem 46. When the three sides of a triangle are known, a perpendicular drawn from any vertex to the side opposite it can be measured (p. 95).

Theorem 47. If three sides of any triangle are known, the sizes of its three angles may also be found (p. 97).

Theorem 48. If two angles of a triangle are known, the ratios of the sides to one another can be found (p. 97).

Theorem 49. If two sides of a triangle and their included angle are given, the other angles and the other side can be found (p. 99).

Theorem 50. If one of two known sides is opposite a given obtuse angle, both the [other] side and the remaining angles can be found geometrically (p. 101).

Theorem 51. When two sides of a triangle are given with an acute angle opposite one of these [sides], there is not enough [information given] to find the [other] side and the remaining angles. However, if we know which way the perpendicular falls, then all can be found (p. 101).

Theorem 52. If the given side of a triangle bears two known angles, the other two sides can be found (p. 103).

Theorem 53. If in a triangle the side opposite one of two given angles is known, the other sides can be found (p. 103).

Theorem 54. If three sides of a triangle are in known ratios to each other, all the angles can be measured (p. 105).

Theorem 55. If in any triangle the ratios of the three angles to one another are given, any one of [the angles] may be found, and the ratios of the sides to each other will also be known (p. 105).

Theorem 56. When the ratio of two sides is given and any one angle is known, the other two angles may be found. Hence the ratio to each of the mentioned sides to the third side will be determined (p. 107).

Theorem 57. If the ratios of each two angles to a right angle are individually given and any one side is known, all the angles and the other sides may be found (p. 109).

Apêndice C – Tábua de senos

MUNDY-CASTLE, Charles. **Regiomontanus and Trigonometry: A teaching module**. 2004. Disponível em: <[http://www.math.utep.edu/Faculty/cmmundy/Math1508/teaching module.pdf](http://www.math.utep.edu/Faculty/cmmundy/Math1508/teaching%20module.pdf)>. Acesso em: 05 set. 2016.

Angle (degrees)	Sine	Angle	Sine	Angle	Sine
1	1047	31	30902	61	52477
2	2094	32	31795	62	52977
3	3140	33	32678	63	53460
4	4185	34	33552	64	53928
5	5229	35	34415	65	54378
6	6272	36	35267	66	54813
7	7312	37	36109	67	55230
8	8350	38	36940	68	55631
9	9386	39	37759	69	56015
10	10419	40	38567	70	56382
11	11449	41	39364	71	56731
12	12475	42	40148	72	57063
13	13497	43	40920	73	57378
14	14515	44	41680	74	57676
15	15529	45	42426	75	57956
16	16538	46	43160	76	58218
17	17542	47	43881	77	58462
18	18541	48	44589	78	58689
19	19534	49	45283	79	58898
20	20521	50	45963	80	59088
21	21502	51	46629	81	59261
22	22476	52	47281	82	59416
23	23444	53	47918	83	59553
24	24404	54	48541	84	59671
25	25357	55	49149	85	59772
26	26302	56	49742	86	59854
27	27239	57	50320	87	59918
28	28168	58	50883	88	59963
29	29089	59	51430	89	59991
30	30000	60	51962	90	60000