PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Maria Priscila Bacellar Monteiro

Conhecimentos de crianças sobre o sistema de numeração: o desafio de utilizar eficazmente a numeração escrita

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2016

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Maria Priscila Bacellar Monteiro

Conhecimentos de crianças sobre o sistema de numeração: o desafio de utilizar eficazmente a numeração escrita

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

SÃO PAULO

2016

Banca Examinadora:

....

....

....

FICHA CATALOGRÁFICA

MONTEIRO, Maria Priscila Bacellar. Conhecimentos de crianças sobre o sistema de numeração: o desafio de utilizar eficazmente a numeração escrita. São Paulo: 2016. 135 páginas.
Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.
Área de concentração: Educação Matemática
Linha de Pesquisa:
Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Palavras-chave: Engenharia Didática. Sistema de Numeração. Contrato Didático

Dedico esse trabalho às crianças que, como Alice, tanto me ensinaram sobre a importância do sentido da atividade matemática.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Saddo Ag Almouloud, pela confiança, por acreditar em meu trabalho e, principalmente, pela importância que dá ao ensino da Matemática para os pequenos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio recebido para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao querido amigo Lino, por sua amizade, pela leitura cuidadosa do relatório de qualificação. Mas, principalmente pela generosidade e humildade com que se relaciona com todos os educadores desse país, exemplo para todos nós.

À minha querida professora Maria José, pelos debates motivadores em suas aulas, pela leitura e contribuição do relatório de qualificação.

Aos meus queridos professores Célia Carolino Pires e Benedito Antonio da Silva, por suas aulas marcadas por um profundo gosto pelo conhecimento.

Aos meus colegas Douglas, Patrícia e Luciane, pela parceria durante esses anos de estudo.

À minha superequipe, parceiras de muitos anos: Camilla, Ana Clara, Andrea e Ana Ruth, pelo sucesso do trabalho realizado.

À Cybele, Bete e Marlene, por terem compartilhado tão de perto nos últimos tempos o projeto para uma educação melhor neste país.

À minha querida amiga e mestra Telma, pelo compromisso com a escola pública, pelo exemplo que pretendo sempre seguir.

Às minhas grandes amigas Bia, Aninha, Lu e Débora (minha companheira de viagem), pelas parcerias, pelo compromisso que nos une.

À Ivô, amiga de todas as horas, grande companheira desse e de outros trabalhos.

À Ana Flávia, pela amizade sincera, pela leitura atenta e pelo incentivo constante. É um privilégio contar com a sua interlocução.

À minha querida amiga de todos os momentos, Regina, por sempre me incentivar e estar ao meu lado (embora pouco nos últimos tempos), companheira de tantos momentos da minha vida.

Às queridas mestras Delia e Patrícia pelo privilégio do convívio e interlocução, e principalmente pela generosidade com o conhecimento que produzem. As publicações de suas pesquisas não escondem nada, permitem voltar ao texto diversas vezes para aprofundar o estudo.

À Inês, pelo apoio e incentivo no início de tudo isto.

À Celina, pela disponibilidade constante, pelo gosto pela leitura, pelas traduções do francês, pela parceria e entusiasmo com a vida.

Ao Moa, pelo apoio de toda uma vida, pelo incentivo a fazermos coisas que achávamos que não conseguiríamos, pelo gosto pelo estudo, pela busca constante de compreender a razão das coisas.

À Iara, por chegar à minha vida, me trazer tanta alegria e me ensinar a ser avó.

À "ma belle-fille" Juliana, pela tradução primorosa do resumo, mas, especialmente, pelo incentivo e por estar sempre por perto.

Ao Lucas, por todo o apoio, pelo incentivo para que eu continue estudando e, principalmente, por me ajudar a ver que a vida é feita de escolhas.

Ao Qui, por me mostrar que a vida sempre pode ser mais simples.

Ao Arthur, pelo exemplo de determinação para conseguir o que se quer.

Ao Urso, por tudo, por todos os detalhes, sempre.

RESUMO

O presente estudo partiu dos resultados de pesquisas que apontam que os erros que as crianças cometem ao resolver operações por meio da técnica convencional são frutos da não compreensão das regras que regem o sistema de numeração que utilizamos hoje. Indicam também que a apresentação prematura das ordens e classes, da técnica convencional e o recurso à materialização dos agrupamentos da base não conduzem, necessariamente, ao êxito na compreensão dessas regras e, muitas vezes, impedem que as crianças construam o sentido dos conhecimentos matemáticos.

O objetivo deste trabalho foi analisar a potência de uma sequência didática, elaborada por Lerner e equipe, voltada para o ensino do sistema de numeração posicional. As atividades propostas envolviam a antecipação de resultados de cálculos e a elaboração de regras válidas que conduzissem à compreensão do agrupamento decimal.

A pesquisa foi realizada em três turmas de 2º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual da cidade de São Paulo. Participaram 91 estudantes, entre 7 anos e 8 anos, e as três professoras das turmas. As atividades foram previamente discutidas com as professoras, responsáveis pela condução das aulas e observadas pela pesquisadora.

A sequência desenvolvida se mostrou potente para o avanço das crianças na compreensão do que está oculto no sistema de numeração que utilizamos e indica que é necessária uma ruptura do contrato didático vigente para que elas assumam a responsabilidade pela resolução dos problemas propostos e avancem em suas conceitualizações.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Sistema de Numeração. Contrato Didático.

ABSTRACT

The present study is built on the results that showed that the mistakes children make solving operations using the conventional technique are due to the lack of comprehension of the rules of the numeral system we use nowadays. The researches also indicated that premature introduction of denominations of “ones”, “tens”, “hundreds”; conventional technique; and the use of objects to materialize base-10 don’t necessarily lead to the comprehension of rules and often keep the children from making meaning of mathematic knowledge.

This study aims to analyze the strength of a didactic sequence elaborated by Lerner and her staff and focused on the teaching of the positional numeral system. The proposed activities involved the anticipation of calculation results and the elaboration of valid rules that would lead to the understanding of decimal grouping.

The research was conducted in three classes of second grade of elementary school of a public school in São Paulo. Participated 91 students between seven and eight years and three teachers of their classes. The activities were previously discussed with the teachers; they were responsible for conducting classes and observed by the researcher.

The developed sequence proved to be powerful for the advancement of the children in the understanding of what is hidden in the numeral system we use and indicated that a rupture on the current didactical contract is necessary so that they take responsibility for solving the proposed problems and advance in their conceptualizations.

Key words: Didactic Engineering. Numeral System. Didactical Contract.

Lista de Figuras

Figura 1: Triângulo didático 24

Figura 2: Osso de Lebombo, o instrumento de medição mais antigo que se conhece no mundo 36

Figura 3: Osso de Ishango, vista frontal e posterior 36

Figura 4: Símbolos da numeração egípcia 37

Figura 5: Número 258.458 representado com símbolos da numeração egípcia 37

Figura 6: Numeração romana 38

Figura 7: Produção de criança – ditado de números altos 45

Figura 8: Caderno de aluno do 1º ano 46

Figura 9: Representação do número 1.245 com material dourado (A) 48

Figura 10: Representação do número 1.245 com material dourado (B) 49

Figura 11: Material didático do 4º ano (A) 51

Figura 12: Material didático do 4º ano (B) 52

Figura 13: Infográfico. Proficiência 2013 – 5º ano – Resolução de problemas 64

Figura 14: Resolução de problema com enunciado (João, 7.11) 67

Figura 15: Resolução de problema com enunciado (Sara, 8.0) 68

Figura 16: Resolução de problema com enunciado (Paulo, 8.1) 68

Figura 17: Resolução de problema com enunciado (Alice, 7.3) 69

Figura 18: Resolução de problema com enunciado (Bianca, 8.2) 72

Figura 19: Resolução de problema com enunciado (Laura, 8.3) 73

Figura 20: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Paulo, 8.1) 83

Figura 21: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Gustavo, 8.2) 83

Figura 22: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Raquel, 7.11) 84

Figura 23: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Manuel, 7.6) . 84

Figura 24: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Mateus, 7.6).. 85

Figura 25: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Rodrigo, 7.3) 88

Figura 26: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Silvia, 7,6).. 88

Figura 27: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Marina, 7.4) 89

Figura 28: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Kaique, 7.6) 89

Figura 29: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Leonardo, 7.3)... 89

Figura 30: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Juliana, 7.5).. 90

Figura 31: Produção de criança durante a aula (Mário, 7.3)... 91

Figura 32: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Ricardo, 7.3). 92

Figura 33: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Jéssica, 7.10) 93

Figura 34: Explicação sobre como realizar antecipações (Thiago, 8.2)... 94

Figura 35: Explicação sobre como realizar antecipações (Luiz, 8.2).. 94

Figura 36: Explicação sobre como realizar antecipações (Janaina, 7.8)... 95

Figura 37: Explicação sobre como realizar antecipações (Kaique, 8.0) 95

Figura 38: Explicação sobre como realizar antecipações (André, 7.9)... 95

Figura 39: Explicação sobre como realizar antecipações (Miguel, 7.10) 96

Lista de tabelas

Tabela 1: Algarismos romanos 38

Tabela 2: Ideb – Resultados e metas.. 64

Tabela 3: Cronograma das atividades realizadas na escola 66

Tabela 4: Estratégias de resolução de problema com enunciado envolvendo 38 + 25: 69

Tabela 5: Estratégias de resolução de problema: erros e acertos 70

Tabela 6: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (situação 1)........................ 80

Tabela 7: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (situação 2)........................ 91

Tabela 8: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (atividade extra) 97

Sumário

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO 14

CAPÍTULO 2. REVISÃO DAS PESQUISAS NO BRASIL SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL..................... 19

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 24

CAPÍTULO 4. METODOLOGIA 32

4.1. Análise a priori 32

4.1.1. Análise do objeto de ensino 34

4.1.2. Os conhecimentos numéricos das crianças 34

4.1.3. Um olhar sobre o ensino usual da numeração escrita 39

4.1.4. O planejamento da sequência didática 45

4.1.5. Caracterização dos sujeitos: o bairro, a escola, as professoras e as crianças 57

CAPÍTULO 5. ANÁLISE DOS DADOS.. 66

5.1. A primeira reunião com as professoras 66

5.2. Diagnóstico: resolução de problema com enunciado envolvendo 38+25.......... 66

5.2.1. Uso da técnica operatória convencional e os procedimentos de contagem. 67

5.3. A segunda reunião com as professoras.. 72

5.4. Trabalho coletivo – resolução de cálculos com a calculadora 74

5.4.1. Alice e a atividade 76

5.5. Antecipar o resultado de alguns cálculos e comprová-los com a calculadora .. 78

5.5.1. Discussão em duplas 78

5.6. Uma nova série de cálculos 85

5.6.1. A difícil tarefa de formular uma explicação.. 90

5.7. Atividade extra... 94

5.8. Caminhando para a generalização... 96

CAPÍTULO 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS 104

REFERÊNCIAS 112

ANEXO – A - Planejamento enviado para os professores 118

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO.. 124

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO.. 125

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO.. 126

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO.. 127

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

O sistema de numeração que utilizamos hoje tem um papel essencial no início da escolarização das crianças. Pode-se dizer que é o primeiro sistema de representação matemático que as crianças têm contato de maneira formal. Para Tempier:

> Nosso sistema de numeração escrito desempenha um papel essencial nas matemáticas da escola primária. A compreensão de seu funcionamento está em jogo no trabalho sobre as técnicas de cálculo: cálculo posicional, cálculo refletido ou multiplicações e divisões por 10, 100, etc. Ela é um ponto de apoio para as conversões entre unidades de medidas para os comprimentos ou as massas. Finalmente, o estudo dos números decimais vem em prolongamento das regras da numeração dos inteiros que ela generaliza[1]. (TEMPIER, 2013, p. 9)

Uma especificidade da representação numérica no sistema de numeração indo-arábico é que o valor dos algarismos varia conforme a posição que ocupa no número. Essa característica representa um grande desafio para as crianças que começam a utilizá-lo e procuram se aproximar das regras de seu funcionamento.

Vale destacar que neste trabalho, quando usamos o termo "sistema de numeração" estamos nos referindo do sistema de numeração indo arábico, que utilizamos hoje.

As razões que me levam a pesquisar como as crianças se aproximam da compreensão das regras que regem o sistema de numeração decorrem, entre outros fatores, da minha experiência profissional em sala de aula como professora e depois como formadora de professores. Durante esses anos de trabalho, em escolas públicas e privadas, observei que muitos erros que os alunos cometem ao utilizar a técnica operatória convencional decorrem do fato de não terem se apropriado das regras que regem o sistema de numeração. Pude notar também que as explicações das crianças sobre os procedimentos utilizados, mesmo quando obtêm o resultado correto, revelam a realização de um procedimento mecanizado, decorado, cujo sentido foge à compreensão da criança.

---

[1] Notre système de numération écrit joue un rôle essentiel dans les mathématiques de l'école primaire. La compréhension de son fonctionnement est en jeu dans le travail sur les techniques de calcul: calcul posé, calcul réfléchi ou multiplications et divisions par 10, 100, etc. Elle est un point d'appui pour les conversions entre unités de mesures pour les longueurs ou les masses. Enfin, l'étude des nombres décimaux vient en prolongement des règles de la numération des entiers qu'elle généralise.

Essas dificuldades não são casos isolados. Estudos como os realizados por Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) encontraram e analisaram situações como essas. Essas autoras afirmam que:

> Ao entrevistar crianças com as quais não trabalhávamos didaticamente, constatamos uma e outra vez que os famosos “vai um” e “peço emprestado” – ritual inerente das contas escolares – não tinham vínculo nenhum com as unidades, dezenas e centenas estudadas previamente. Esta ruptura manifestava-se tanto nas crianças que cometiam erros ao resolver as contas como naquelas que obtinham o resultado correto: nem umas nem outras pareciam entender que os algoritmos convencionais estão baseados na organização de nosso sistema de numeração (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 74)

Essa ruptura identificada pelas autoras, entre os conhecimentos que “valem” numa determinada situação escolar de trabalho com a Matemática e os que as crianças construíram anteriormente, muitas vezes se estende para todos os conhecimentos prévios das crianças sobre a Matemática, que, construídos em situações cotidianas, parecem não “valer” para a resolução de problemas escolares. Parece haver na escola grande distância entre o que a criança faz e o que compreende. Segundo Macedo (1994), na teoria de Piaget, realizar e compreender são dois sistemas cognitivos distintos. O fazer depende da construção de procedimentos de um “como fazer” e compreender depende da construção de uma “teoria” sobre esses procedimentos, de um “por que fazer”. Para Piaget

> Compreender consiste em isolar a razão das coisas, enquanto fazer é somente utilizá-las com sucesso, o que é, certamente, uma condição preliminar da compreensão, mas que esta ultrapassa, visto que atinge um saber que precede a ação e pode abster-se dela. (PIAGET, 1978, p. 179)

Um primeiro olhar para as dificuldades das crianças na realização de algoritmos convencionais parece indicar um predomínio do fazer em detrimento do compreender. Carraher, Carraher e Schliemann (1982) atribuem a dificuldade sistemática das crianças em resolver problemas nas situações escolares à diferença das situações de cálculo que vivenciam fora da escola. A pesquisa, realizada pelos autores em Recife na década de 1980, indica que, embora crianças que trabalham ou que ajudam seus pais no comércio tenham conhecimentos numéricos muito importantes e, muitas vezes corretos, esses conhecimentos não são aproveitados pela escola.

Da mesma forma, Sinclair (1990) ressalta que na nossa sociedade os algarismos são amplamente utilizados e representam uma variedade muito grande de conceitos numéricos e quantitativos, além de serem utilizados de outras maneiras, por exemplo, no número de telefone, de identificação de linha de ônibus, mas, como indica a pesquisa de Carraher, Carraher e Schliemann (1982), esses conhecimentos são pouco valorizados no contexto escolar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) também chamam a atenção para esse fato e apontam que as crianças, dos mais diversos contextos socioeconômicos e culturais, trazem consigo uma bagagem de noções informais sobre numeração, construídas em sua vivência cotidiana. Assim, mesmo antes de ingressar na escola, pensam, desenvolvem ideias, refletem e elaboram concepções próprias sobre o sistema de numeração[2].

> Os conhecimentos a respeito dos números naturais são construídos num processo em que eles aparecem como um instrumento útil para resolver determinados problemas e como um objeto que pode ser estudado por si mesmo. Sua utilidade é percebida pelas crianças antes mesmo de chegarem à escola; elas conhecem números de telefone, de ônibus, lidam com preços, numeração de calçado, idade, calendário. (BRASIL, 1997, p. 65)

O documento pontua que, no entanto, o mais comum na prática escolar é tentar explicitar, logo de início, as ordens que compõem uma escrita numérica – unidade, dezena, centena, etc. – com a intenção de que o aluno faça a leitura e a escrita dos números com compreensão. E alerta que, “embora isso possa parecer simples e natural do ponto de vista do adulto, que já conhece as regras de formação do sistema de numeração, o que se observa é que os alunos apresentam dificuldades nesse trabalho, deixando o professor sem compreender por que isso acontece” (BRASIL, 1997, p. 66).

De acordo com Brizuela (2006), a aprendizagem dos números escritos envolve aprender não apenas os elementos isolados do sistema mas também, simultaneamente, aprender sobre o sistema em si e as regras que o governam.

Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) pontuam que a produção e a interpretação de escritas numéricas são sempre um desafio para as crianças que estão tentando entrar no mundo dos números. Elas se empenham em compreender como os números funcionam, em encontrar relações entre a série oral e escrita e em entender as regularidades do sistema de numeração. Nesse esforço, muitas respondem adequadamente às tarefas escolares sem, contudo, avançar em direção à compreensão das características do sistema de numeração decimal.

---

[2] Neste trabalho utilizaremos o termo “sistema de numeração” para nos referirmos ao sitema de numeração indo-arábico que utilizamos hoje.

Carraher, Carraher e Schliemann indicam que são necessárias pesquisas que esclareçam "os processos através dos quais a criança adquire a compreensão do sistema numérico tornando-se capaz de operar eficazmente em contextos naturais" (CARRAHER, CARRAHER e SCHILIEMANN, 1982, p. 41).

A discussão realizada até aqui permite identificar a pertinência de um trabalho voltado para o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração nos anos iniciais da escolaridade.

Para delimitar o tema da presente pesquisa consideramos o panorama de ensino da numeração escrita nos anos iniciais no Brasil, bem como estudos psicogenéticos sobre as conceitualizações infantis acerca do sistema de numeração e investigações didáticas que estudaram o funcionamento de sequências de ensino.

A fim de analisar um recurso didático para ensinar o sistema de numeração posicional no início da escolaridade, optamos em replicar uma pesquisa realizada na Argentina, dirigida por Lerner (2007, 2013)[3], que toma como ponto de partida as ideias que os alunos constroem a partir de sua interação com a numeração escrita e introduz problemas que permitem sucessivas aproximações até a compreensão dos princípios que regem o sistema posicional.

Para realizar este estudo, fizemos uma análise detalhada da proposta original, à luz da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1996), e realizamos alguns pequenos ajustes a fim de adequá-la à realidade brasileira e à da escola pesquisada. Isso nos levou a fazer perguntas sobre o objeto de ensino, os conhecimentos de crianças sobre o sistema de numeração e as práticas de ensino, e também sobre como esse recurso seria utilizado pelos professores. Consideramos que os princípios da engenharia didática (Artigue, 1996) poderiam nos ajudar a responder essas questões.

Assim, o objetivo deste trabalho é propor e analisar o potencial didático de uma sequência de atividades e identificar elementos e características que possam ajudar os professores a melhorar as práticas relativas ao ensino do sistema de numeração posicional.

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos:

No capítulo 2 apresentamos um levantamento de pesquisas realizadas no Brasil nos últimos 15 anos, cuja temática contempla o ensino do sistema de numeração indo-arábico no Ensino Fundamental 1.

---

[3] Projeto de investigação UBACyT (F 083) dirigido por Delia Lerner e codirigido por Flavia Terigi.

No capítulo 3 analisamos alguns aspectos da teoria das situações didáticas que foram essenciais para o estudo das atividades da sequência proposta e também para analisar posteriormente o desenvolvimento das aulas.

No capítulo 4 detalhamos a metodologia empregada para a coleta de dados. Em primeiro lugar, analisamos o objeto de ensino, fazendo um panorama histórico do sistema de numeração que utilizamos hoje. Em segundo lugar, realizamos um balanço dos principais desafios encontrados pelas crianças ao aprender o sistema de numeração. E em terceiro lugar, procuramos determinar o contexto atual do ensino da numeração. Por fim, detalhamos o planejamento da sequência didática.

O capítulo 5 descreve os resultados da pesquisa, analisa as respostas das crianças, as interações entre elas e a professora.

Finalmente, apresentamos as considerações finais e as referências.

CAPÍTULO 2. REVISÃO DAS PESQUISAS NO BRASIL SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

O primeiro passo para definir nosso tema de pesquisa foi um levantamento de estudos sobre o ensino do sistema de numeração posicional nos últimos anos no Brasil a fim de nos apoiarmos em seus resultados para justificar a relevância do tema tratado e organizarmos este estudo num diálogo proveitoso com as pesquisas que o antecederam.

A revisão bibliográfica foi realizada em setembro de 2014 na Biblioteca Digital da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e no banco de teses da Capes, considerando nosso objetivo: analisar um recurso que contribua para a compreensão do valor posicional. Limitamo-nos às pesquisas em Educação Matemática, realizadas no Ensino Fundamental 1, pois pode existir diferenças significativas nas práticas de ensino de acordo com o nível. Para tanto, utilizamos as seguintes palavras-chave: sistema de numeração, Ensino Fundamental 1, valor posicional. Inicialmente encontramos 13 trabalhos sobre o tema, realizados nos últimos 15 anos. Fizemos também buscas livres na internet, totalizando 24 trabalhos.

Após a leitura dos resumos, selecionamos três pesquisas que tratavam especificamente do ensino e da aprendizagem do sistema de numeração no Ensino Fundamental 1:

- Base 10: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade, de Wanda S. Rodrigues, 2001.
- Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração, de Célia Finck Brandt, 2005.
- Investigações sobre números naturais e processos de ensino e aprendizagem desse tema no início da escolaridade, de Icléa Maria Bonaldo, 2007.

Rodrigues (2001) analisou as relações entre os conhecimentos construídos socialmente pelos alunos e os conhecimentos escolares. Entrevistou crianças e professores de escolas particulares e públicas localizadas na cidade de Santos, estado de São Paulo. O grupo da Educação Infantil era composto por crianças entre 5 e 6 anos e o do Ensino Fundamental, por alunos que cursavam a 2ª série, com idade entre 7 e 11 anos, e alunos da 4ª série, com idade entre 10 e 13 anos. A questão central de seu trabalho era identificar a trajetória da construção das escritas numéricas, de seu uso ao longo do Ensino Fundamental e contribuir para a elaboração de propostas didáticas mais consistentes, que levassem em conta conhecimentos prévios dos alunos e alguns obstáculos que se interpõem nessa trajetória.

A autora fez um panorama do ensino do sistema de numeração nas séries iniciais do Ensino Fundamental nas últimas décadas e buscou investigações sobre a construção das escritas numéricas, como as de Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) para sustentar seu estudo. Constatou que a evolução desses conhecimentos não ocorre de forma linear.

Os resultados da pesquisa indicaram que o processo de construção das ideias e dos procedimentos envolvidos nos agrupamentos e nas trocas na base 10 demandam um longo tempo de escolaridade, que começa na Educação Infantil e perpassa todo o Ensino Fundamental.

Para Rodrigues (2001), apesar dos esforços para o ensino do agrupamento e a troca de base 10, as crianças não compreendem as regras que regem o sistema de numeração:

> A compreensão dos princípios e das regras do sistema de numeração decimal certamente é muito superficial, haja vista que indicam, com frequência, o algarismo que ocupa uma dada ordem como equivalente à quantidade de unidades, dezenas ou centenas que compõe um número (RODRIGUES, 2001, p. 82)

A autora destacou a necessidade da construção de propostas de ensino que contribuam para que os alunos compreendam as regras que regem o sistema de numeração.

O resgate histórico e os resultados do estudo de Rodrigues (2001) foram muito úteis na construção da problemática da presente pesquisa, pois indicaram que os desafios no ensino do sistema de numeração posicional estão longe de serem superados e que, portanto, é necessária a construção de propostas que contribuam para que os alunos compreendam as regras que subjazem à numeração escrita.

Brandt (2005) baseou-se na Teoria dos Registros Representação Semiótica para investigar as formas de organizar e propor, no processo de ensino, situações que permitissem aos alunos compreender o sistema de numeração posicional como forma de comunicação e de registro da medida de um conjunto[4] expressa por um número.

Em seu estudo, buscou formas adequadas de organização e elaboração de tarefas, contemplando diversas atividades, que compreendessem os elementos invariantes presentes na estrutura do sistema de numeração indo-arábico. A coleta de dados foi

---

[4] Segundo Brandt, “O sistema de numeração utiliza registros de representação semiótica, em diversas formas, de representação da medida de um conjunto que é designada pelo número.” (BRANDT, 2005, p. 20).

realizada em escolas estaduais dos estados do Paraná e Santa Catarina com crianças das 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental por meio da aplicação de sequências de ensino.

Brandt (2005) observou que os alunos são sempre levados a transitar entre as duas formas de registros de representação do número: a palavra e o numeral arábico. Segundo a autora, a aprendizagem do funcionamento de cada um desses registros e a conversão de uma representação em outra envolve especificidades e a compreensão de regras de funcionamento distintas.

> As unidades cognitivamente pertinentes destes dois tipos de registro de representação têm que ser feitas em separado, já que as regras de formação da palavra e do numeral arábico que expressam o número são diferentes apesar de ambas compreenderem a estrutura do sistema de numeração decimal. (BRANDT, 2005, p. 90-91)

A autora destaca também a diferença entre a numeração falada e a numeração escrita:

> Pode-se admitir que o sistema de numeração de origem indo-arábica apresenta notórias vantagens em relação aos demais sistemas que foram inventados pela humanidade. Ele carrega uma notável capacidade de síntese, e com apenas dez dígitos, permite a representação de quantidades muito grandes. As representações na língua materna, no entanto, com a utilização de signos, podem apresentar dificuldades em fase de aprendizagem. (BRANDT, 2005, p. 81)

Apoiada em análise histórica, Brandt (2005) identificou os desafios que representam para as crianças compreender o valor posicional:

> A representação da medida de um conjunto, por sua vez, exigirá um sistema de numeração, com uma estrutura. Esse sistema surgiu e evoluiu através dos tempos e hoje se utiliza o sistema de numeração decimal posicional, de origem indo-arábica. Tal sistema possui em uma estrutura: composição aditiva e valor relativo das unidades. A composição aditiva significa compreender que a quantidade 22 equivale a 2 x 10 + 2 e que cada um dos 2 da representação possui um valor diferente, dependente da posição em que se encontra: o 2 à esquerda vale 20 unidades e o 2 à direita vale 2 unidades. Os dois valores são somados: 20 + 2. (BRANDT, 2005, p. 80)

Os resultados da pesquisa apontam que, embora as crianças utilizem o nome de números e a escrita arábica para se referir à medida de um conjunto, não reconhecem, nesses registros de representação, a estrutura do sistema de numeração.

Embora a Teoria dos Registros de Representação Semiótica não seja a abordagem teórica escolhida para fundamentar a presente pesquisa, o estudo de Brandt (2005) contribuiu para ampliar nosso olhar sobre o papel dos diferentes registros nessa aquisição e considerar o complexo caminho que as crianças precisam percorrer para compreender as regras que regem o sistema de numeração.

Bonaldo (2007) analisou documentos curriculares oficiais, cadernos de alunos e entrevistou professores de três escolas estaduais de São Paulo para investigar como as diretrizes presentes nos documentos oficiais estão presentes na prática das professoras.

Na análise das práticas das professoras e das tarefas propostas aos alunos, a pesquisadora identificou um rol bastante repetitivo de atividades nas séries iniciais, envolvendo apenas números de 0 a 10, repetição da escrita de números e exercícios para ligar a escrita numérica à quantidade correspondente.

> Analisando as produções, observamos que a professora primeiro ensina a escrever de 0 até 10 e, assim, consecutivamente. Sua concepção é que a criança para progredir no aprendizado dos números precisa aprender um a um, seguindo uma série numérica. Essa maneira de ensinar não leva em consideração que a criança, muito antes de frequentar a sala de aula, tem contato diário com o sistema de numeração. Por exemplo, ao observar o calendário, o número da casa. (BONALDO, 2007, p. 104)

A autora destacou também que, embora seja uma recomendação dos documentos curriculares oficiais, não encontrou na prática das professoras e nos cadernos dos alunos atividades voltadas para o uso social dos números.

Esse trabalho trouxe contribuições para observarmos como as diretrizes presentes nos documentos oficiais são traduzidas na prática das professoras em sala de aula e corroborou com nossa própria experiência com a formação de professores, apontando que, frequentemente, as práticas de ensino dos números e do sistema de numeração não consideram as ideias que as crianças constroem no convívio social e as atividades propostas não fazem sentido para elas.

Em síntese, as pesquisas citadas indicam que os conhecimentos que as crianças utilizam acerca dos agrupamentos em unidades, dezenas e centenas para realizar cálculos se limitam aos nomes, aos símbolos e às regras, porém não tem nenhum vínculo com o significado das noções envolvidas. As crianças podem até utilizar corretamente a técnica operatória, mas, muitas vezes, não compreendem o que fazem nem por que o fazem. As razões pelas quais devem seguir determinados passos permanecem um mistério para elas. Do nosso ponto de vista, esses erros são produto, entre outra causa, de uma abordagem didática que não contempla a complexidade que é para as crianças a compreensão do valor posicional dos algarismos.

O levantamento bibliográfico mostra ainda que a dificuldade de conseguir que os alunos compreendam realmente o princípio que rege a numeração escrita ainda está longe de ser superada e que há um grande caminho na busca de estratégias mais eficientes de ensino para que os alunos compreendam as regras do sistema de numeração**.** Favorecem também a interpretação de alguns dos erros que as crianças produzem, sugerindo uma revisão da forma como esse conteúdo é trabalhado na escola, em função das dificuldades para elaborar e compreender a posicionalidade do sistema de numeração.

Convidam a revisar o ensino desse objeto de conhecimento na escola, considerando o que as crianças já sabem acerca dos números como um importante ponto de apoio. Apontam para a relevância de estudos sobre a construção de propostas de ensino apoiadas nos usos do sistema de numeração em toda a sua complexidade. Como diz Brousseau:

> O sentido direto do saber definitivo é impossível ou, se faz assim, há que renunciar a fazê-lo funcionar. O uso e a destruição dos conhecimentos precedentes fazem parte do ato de aprender. Consequentemente, temos que admitir uma certa “reorganização didática” do saber, que muda seu sentido, e temos que admitir, ao menos de modo transitório, uma determinada dose de erros e contradições, não só por parte dos alunos, mas também por parte do ensino. (BROUSSEAU, 1990, p. 6)

Dessa forma, os resultados encontrados nas pesquisas analisadas justificam uma investigação voltada para um projeto de ensino que toma como ponto de partida as ideias que os alunos constroem a partir de sua interação com a numeração escrita e introduz problemas que permitam sucessivas aproximações até a compreensão dos princípios que regem o sistema de numeração posicional.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

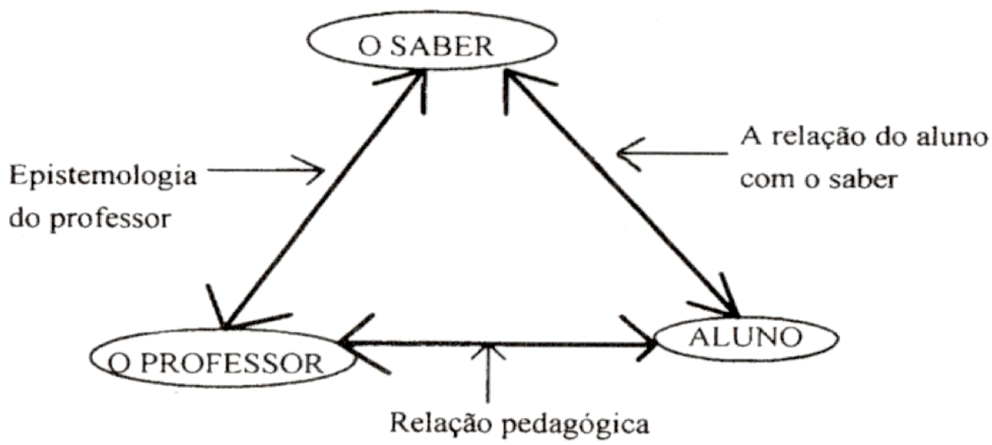
Neste capítulo, trataremos dos fundamentos teóricos que apoiam a presente pesquisa. Escolhemos como principal referência para este trabalho a Teoria das Situações Didáticas (TSD, Brousseau, 1996), pois ela permite estudar os processos pelos quais os alunos podem adquirir um saber matemático em uma situação escolar.

Segundo Almouloud, “o objetivo da teoria das situações didáticas é estudar os fenômenos que interferem no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e propor um modelo teórico para a construção, a análise e a experimentação de situações didáticas” (ALMOULOUD, 2007, p. 42).

Apoiamo-nos na TSD para descrever e analisar as situações didáticas que compõem a sequência, bem como a análise do desenvolvimento das aulas. Trataremos das noções de triângulo didático, modelos didáticos, contrato didático, situações matemáticas, que sustentam a presente pesquisa.

De acordo com Almouloud (2007), o objetivo da Teoria das Situações Didáticas é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis que propiciem a mudança de um conjunto de comportamentos dos alunos. O objeto central de estudo da TSD não é o sujeito cognitivo, mas, sim, a situação didática em que são identificadas as interações estabelecidas entre professor e aluno (ou um grupo de alunos) mediadas pelo saber nas situações de ensino. Para representar essa relação, Almouloud (2007) utiliza o seguinte esquema:

Figura 1: Triângulo didático



Fonte: ALMOULOUD, 2007, p. 32

A relação professor-aluno-saber é regida por regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato (Silva, 2008). Brousseau (1986) chama de contrato didático:

> O conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas, sobretudo, implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU, 1986, apud SILVA, 2008, p. 50)

Para o autor, esses comportamentos regulam o funcionamento da aula e as relações professor-aluno-saber, definindo assim os papéis de cada um. Assim, é possível observar uma situação de ensino por meio das relações que se movimentam entre os três pólos descritos por Brousseau: professor, aluno e saber.

Charnay (1986) afirma que toda a situação de ensino pode ser observada por meio das relações entre esses pólos e descreve três modelos de referência, considerando como cada um concebe os três pólos do triângulo:

- normativo: centrado no conteúdo
- incitativo: centrado no aluno
- aproximativo: centrado na construção do saber pelo aluno

Neste trabalho, vamos nos concentrar apenas nos modelos normativo e aproximativo, pois a sequência didática desenhada para a coleta de dados foi estruturada considerando o modelo aproximativo e, como apontam as pesquisas citadas no levantamento bibliográfico, as práticas dos professores se apoiam no modelo normativo.

Da mesma forma, Silva (2008) aponta que o modelo normativo é o mais frequente no ensino da Matemática:

> A prática pedagógica mais comum utilizada em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos; em suas aulas, ele deve selecionar partes do conteúdo que o aluno possa aprender e propor problemas cujos enunciados contêm os dados necessários e tão somente esses, cuja combinação racional, aliada aos elementos das aulas, permite encontrar a solução do problema. O aluno, por sua vez, cumpre seu contrato se ele bem ou mal compreendeu a aula dada e consegue resolver corretamente ou não os exercícios. Se isso não acontecer, o professor deverá ajudá-lo, dirigindo o seu trabalho através de indicações que esclareçam suas dúvidas ou através de pequenas questões elementares que conduzam ao resultado. (SILVA, 2008, p. 52)

No modelo normativo cabe ao professor mostrar as noções, introduzi-las, fornecer exemplos do que está ensinando. A função do aluno é escutar as explicações do professor, estar atento e depois aplicar o que se foi ensinado. O saber é entendido como acabado e o professor é um intermediário que passa aos alunos esse saber elaborado e terminado (por outros). Esse modelo se caracteriza como uma sequência "exposição/exercícios". O professor expõe, explica e logo os alunos exercitam utilizando esse saber que foi exposto.

O modelo aproximativo é centrado na construção do saber pelo aluno. Nesse modelo, cabe ao professor propor e organizar sequências de situações que apresentem obstáculos para os alunos, organizar a comunicação da aula, propor, no momento adequado, os elementos convencionais do saber. Cabe ao aluno ensaiar, buscar, propor soluções. O aluno interage com o conteúdo de diferentes maneiras, o que permite construir esquemas de conhecimento cada vez mais ajustados à natureza do conteúdo. Nesse modelo, a natureza e a organização do saber têm importância fundamental. O ponto de partida são os conhecimentos que os alunos dispõem.

Para explicar os efeitos do contrato didático, Brousseau (2013) cita uma investigação, realizada por pesquisadores do Irem[5], na qual faziam perguntas absurdas aos estudantes, como: "Em um barco há 15 cabras e 26 ovelhas. Qual é a idade do capitão?" Grande parte dos alunos somou a quantidade de cabras e ovelhas e respondeu: "41 anos!". Embora as crianças considerem o problema absurdo, respondem por que a professora perguntou.

> O costume, contrato escondido, exige que os estudantes respondam a qualquer cálculo, mas a adequação das perguntas é de responsabilidade do professor. Mais tarde, uma experiência semelhante, com professores em formação, fornece os mesmos resultados: é um efeito do "contrato didático", e não uma particularidade dos atores. (BROUSSEAU, 2013, p. 2).

O professor, segundo o contrato didático vigente, para a maioria das instituições escolares, teria o papel de transmitir diretamente o conhecimento, mas pode fazer um ato de devolução e autorizar as crianças a tomar esse direito e construir o conhecimento. Nesse sentido, o primeiro problema que o professor enfrenta no modelo aproximativo é o da devolução do problema ao aluno.

A devolução é, segundo Brousseau (1997), o ato pelo qual o professor obtém que o aluno aceite agir em uma situação, assumindo o risco e a responsabilidade de seus atos em condições incertas. Para o autor, essa posição assumida pelo aluno é um componente

[5] Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques

essencial do contrato didático. A devolução não está contida na situação matemática. Portanto, é um ato que o professor precisa organizar para conseguir que as crianças aceitem entrar na situação matemática proposta, aceitem as regras e a responsabilidade sobre o que vai acontecer. É imprescindível que o professor faça concessão desse direito porque as crianças não o conquistam por si mesmas, porque isso não faz parte do contrato didático vigente. O professor mostra ao aluno que ele, o professor, se desfez da responsabilidade de dizer e garantir a veracidade da resposta que ele, o aluno, deve dar. E procura obter que esse aluno aceite essa responsabilidade. Para tanto, não é suficiente dizer ao aluno: "Você deve...". Para que essa devolução seja possível, o professor deve assegurar que a situação possa ser "compreendida", isto é, que o aluno conheça uma estratégia básica (eficaz ou não) para responder à situação.

> Para possibilitar esse funcionamento, o professor não pode dizer antecipadamente ao aluno exatamente qual a resposta que espera dele, deve, portanto, fazer com que este último aceite a responsabilidade de procurar resolver problemas ou exercícios cuja resposta ele ignora. (BROUSSEAU, 1997, p. 41)

Para o autor, essa é uma conduta que gera insegurança nas crianças, porque elas não sabem o que vai acontecer, o que poderão ou não fazer. Por isso, é muito difícil para o professor:

> A devolução apresenta grandes dificuldades que são analisadas tradicionalmente no que se refere à motivação do aluno. As soluções preconizadas são, portanto, de natureza psicológica, psicoafetiva ou pedagógica. Pois bem, o significado do conhecimento e da situação desempenha um papel importante nesse processo e, em resultado, a didática propõe os meios específicos. (BROUSSEAU, 2008, p. 91)

Enfim, é necessário muito trabalho para criar um clima em que as crianças aceitem, durante certo tempo, serem os responsáveis pela construção do conhecimento, obviamente, com a ajuda e o apoio do professor, que confirmará essa construção, completará e ajudará a precisar aquilo que as crianças estabeleceram por si mesmas.

A situação didática é o objeto central da teoria das situações (Almouloud, 2007), definida por Brousseau como:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu[6] (contendo

---

[6] Almouloud (2007) utiliz o termo "milieu", em francês, no lugar de sua tradução em português, "meio", por entender que esta não dá conta da ideia que está em jogo.

> eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição (BROUSSEAU, 1978, apud, ALMOULOUD, 2007, p. 33)

Para o autor, as situações matemáticas têm como propósito que as crianças façam Matemática. Nessa perspectiva, cabe ao professor simular em sua classe uma microssociedade científica e propor aos alunos situações em que eles possam viver e nas quais os conhecimentos apareçam como a solução ótima para resolver os problemas colocados. Em suas pesquisas, os matemáticos enfrentam problemas que não sabem como resolver. Parte importante de sua atividade consiste em formular perguntas e resolver problemas.

Brousseau (2009) define uma situação matemática como aquela que reúne matemáticos e outras pessoas em torno da resolução de um problema. Essas situações não têm, necessariamente, o objetivo de ensinar alguma coisa a alguém, assim como um matemático que busca a solução de um problema, que procura demonstrar ou estabelecer um teorema, se encontra em uma situação na qual ele pode buscar a resposta por si mesmo. Para o autor, a situação matemática organizada na escola precisa colocar os alunos nessa mesma posição, para que construam e compreendam Matemática, fazendo Matemática, assim como aprendem a falar, falando. Esse modo de trabalhar, de certa forma, análogo ao que realizam os matemáticos no desenvolvimento do seu trabalho, tem como principal finalidade construir o sentido dos conhecimentos matemáticos.

Brousseau (2008) afirma ainda que não basta que as crianças participem desse tipo de situação para que aprendam Matemática. Para que os alunos se envolvam em uma situação semelhante a uma situação matemática é necessário um trabalho de devolução do professor. O autor chama esse tipo de situação de situação adidática. O autor alerta que o termo adidático não quer dizer não didático. Em entrevista de 2009 o autor declara que foi uma palavra mal escolhida, pois uma situação que serve para ensinar é sempre didática. Por isso, nos últimos tempos, em vez de falar diretamente em situação adidática, tem preferido falar em situação matemática. No entanto, é necessário compreender que a situação matemática precisa dessa propriedade de adidatismo, isto é, o aluno deve ser livre e depender só dele para resolver a situação. E ninguém vai dizer a ele, imediatamente, que está enganado ou que o que fez está errado.

As condições para a construção de conhecimentos matemáticos não se produzem de maneira espontânea. Para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos o professor precisa criar e organizar um meio no qual serão desenvolvidas as situações. Assim, a situação matemática é construída intencionalmente com o objetivo de os alunos adquirirem determinado saber.

Brousseau (2008) defende que a construção de conhecimento é resultado de uma adaptação do aluno a uma situação. Nas palavras do autor:

> À semelhança do que acontece na sociedade humana, o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios. Esse saber, fruto de sua adaptação, manifesta-se por intermédio de novas respostas, que são a marca da aprendizagem. (BROUSSEAU, 2008, p. 34)

O meio, definido como um sistema antagonista, sem intenção didática explícita e exterior ao aluno, segundo Almouloud:

> Um dos pontos fundamentais que dão suporte a essa teoria é a noção de milieu, que foi introduzida por Brousseau para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações. (ALMOULOUD, 2007, p. 42)

As situações matemáticas são organizadas em três fases, nas quais o conhecimento tem diferentes funções e o aprendiz tem diferentes relações com o conhecimento.

> A teoria das situações desenvolveu-se a partir da classificação de situações caracterizadas por três tipos de dialéticas ou interações fundamentais com o milieu, que envolvem diferentes relações com o saber em jogo: trocas diretas para uma ação ou tomada de decisão, trocas de informação numa linguagem codificada, trocas dos argumentos. (ALMOULOUD, 2007, p. 37)

Segundo Brousseau (2008), essas fases são interligadas e observa-se tempos dominantes de ação, de formulação e de validação. Para o autor, a devolução deve ocorrer nessas três fases. Por fim, há uma fase em que a responsabilidade volta para as mãos do professor, chamada de institucionalização. A seguir, falaremos de cada uma delas e que nos ajudará a analisar, mais adiante, as etapas previstas na sequência didática desenvolvida nesta pesquisa.

De acordo com Lerner (1996b), uma mesma noção matemática pode funcionar como conhecimento implícito em certas situações (nas situações de ação), como conhecimento que deve ser explicitado para ser comunicado (nas situações de formulação), ou como saber explícito cuja validade é preciso demonstrar (nas situações de validação).

Brousseau (2008) chama de situação de ação aquela que exige decisões por parte das crianças. Para o autor, o pensamento matemático se manifesta por frases, palavras, provas, definições e, acima de tudo, pelas decisões (Brousseau, 2009). A situação de ação representa as condições de manifestação do pensamento matemático. No entanto, algumas dessas decisões não podem ser explicadas pelas crianças. Elas tomam essas decisões sem necessariamente saber por que, mas sentem que é o que devem fazer. Nessa fase, não se pede que expliquem, mas, sim, que ajam, que tomem decisões adequadas à situação.

A situação de ação se caracteriza por colocar o aluno em uma situação de tomada de decisões no curso da ação. Para isso não é necessário que o conhecimento esteja explicitamente formulado. A melhor solução para o problema proposto é o conhecimento que se quer ensinar. O aluno atua em um meio didático criado, e este proporciona devolutivas sobre os resultados de suas ações que passam a regular sua ação (Almouloud, 2007).

Para que o aluno avance em seus conhecimentos, Brousseau (2009) destaca a importância das situações de formulação. Esse tipo de situação tem como objetivo permitir que as crianças aprendam a falar sobre o que fizeram, a usar as palavras adequadas em uma situação de comunicação.

> A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. (BROUSSEAU, 2008, p. 28)

A situação de formulação envolve sempre uma comunicação que permite transformar o conhecimento implícito em saber explícito, isto é, requer que o aluno retome o que foi feito no nível da ação e crie um modelo explícito que pode ser expresso por meio de representações, regras e signos, conhecidos ou novos. Para o autor, a produção de explicações favorece a construção de uma racionalidade matemática, o aprofundamento na conceituação dos objetos. Conseguir encadear dedutivamente relações matemáticas para produzir novas relações não é uma aquisição espontânea dos alunos; é produto de um trabalho intencional. As explicações emergem à medida que se adota uma posição reflexiva sobre o próprio trabalho.

A etapa na qual o aluno comprova (ou não) a validade do modelo por ele criado, submetendo ao julgamento de um interlocutor, é chamada de situação de validação (Almouloud, 2007). Nessa etapa, o aluno precisa justificar e apoiar suas convicções com provas para convencer seus pares. O componente principal da situação de validação é o debate sobre a prova, sobre a validade do antecipado. O essencial é a construção de argumentos. No momento da validação, o professor adia a emissão de seu juízo até que as crianças tenham conseguido validar a regra, a propriedade ou o procedimento que está em debate. Essas situações têm como intuito que as crianças aprendam as regras do debate, busquem argumentos para validar o método, o teorema.

Por fim, nas situações de institucionalização, a responsabilidade volta para as mãos do professor. Segundo Brousseau (2009), nas fases anteriores os alunos produzem um pensamento matemático verdadeiro, falso, conveniente ou não, mas, sobretudo, disperso. Para que tomem consciência daquilo que sabem, isto é, entre tudo o que fizeram nas situações matemáticas, distinguem o que havia de interessante. O professor precisa retomar o que foi realizado. Por meio da atividade de institucionalização, o professor permite que algumas coisas que aconteceram durante a situação matemática se tornem referência para toda a classe.

A institucionalização é a referência cultural pela qual um grupo dá um status ao que produziu, em relação ao que é usual na sociedade (canonização de um procedimento como algoritmo, convenções em relação à linguagem matemática, etc.).

Em entrevista de 2009, Brousseau afirma que nas situações matemáticas as crianças produzem conhecimento, mas esse conhecimento não é saber. É necessário que o professor o confirme: "Os matemáticos dizem a mesma coisa"; "O que você disse está correto"; "O que você fez ou disse vai servir". O professor (no fim, não no começo) apresenta de maneira organizada as definições, os teoremas, as demonstrações, indicando o que é essencial e o que é secundário. Revela que o saber é importante e que será retomado novamente, para ser utilizado posteriormente. Assim, progressivamente, transforma o conhecimento dos alunos em um saber de referência.

A sequência de atividades proposta e analisada no presente estudo foi planejada considerando as situações descritas por Brousseau na TSD. As situações previstas são ligadas pela dependência entre os conhecimentos resultantes de cada situação.

No próximo capítulo, analisaremos detalhadamente as atividades propostas à luz da teoria das situações.

CAPÍTULO 4. METODOLOGIA

Os resultados das investigações, mencionadas no capítulo 2, indicam que, apesar dos esforços dos professores no ensino do sistema de numeração, as crianças seguem sem compreender o valor posicional. Apontam também que os professores propõem atividades isoladas, com pouca variação, e que práticas arraigadas não contribuem para que as crianças construam o sentido dos conhecimentos matemáticos.

Assim, a pergunta que norteou este trabalho foi: Como criar um meio (milieu) favorável para a aprendizagem do sistema de numeração?

Em nossa experiência profissional, temos observado que a organização de atividades em sequências contribui para a criação de condições propícias para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, pois as crianças podem se aproximar dos conteúdos progressivamente, ao longo de determinado tempo. Em uma sequência, cada atividade inclui o trabalho realizado na anterior. Assim, é preciso respeitar a ordem das atividades planejadas. Frequentemente se recorre ao termo sequência para se referir ao ordenamento linear de atividades, do simples para o complexo. Mas aqui utilizamos esse termo como definido por autores como Castro e Zabala. Para Castro, "uma sequência didática consiste em uma série de atividades com um progressivo nível de complexidade em relação às aproximações que os alunos deverão realizar para a resolução de um problema dado" (CASTRO, 2000, p. 176). Para Zabala, uma sequência didática se caracteriza por "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18).

Da mesma forma, entendemos que o processo de aprendizagem descrito por Brousseau (1996) pode ser entendido como uma sequência de situações. A teoria das situações didáticas é especialmente fecunda para investigar os fenômenos que ocorrem em sala de aula.

Considerando esses aspectos, resolvemos propor e analisar neste estudo uma sequência didática que contribuísse para o avanço de crianças na compreensão da agrupação decimal e a metodologia escolhida para a realização deste trabalho foi a engenharia didática. De acordo com Almouloud (2007), essa metodologia pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito.

A engenharia didática surgiu nos anos 1980 como modelo de investigação em educação, como resposta às exigências de atribuir uma função efetiva às investigações educacionais. Em particular, frente ao pedido de que suas produções sejam significativas para o ensino e a aprendizagem, e para a necessidade de consolidar uma metodologia de investigação específica para a didática da Matemática:

> A noção de engenharia didática emergiu na didática da Matemática (enfoque da didática francesa) no início dos anos 1980. Segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos da área, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ALMOULOUD, 2007, p. 171)

A engenharia didática é uma metodologia de investigação que se caracteriza por um esquema experimental com base em realizações didáticas em sala de aula. Sua principal característica é a confrontação entre análise *a priori*, sobre o planejamento das atividades, e a análise *a posteriori*, sobre o que ocorreu na aplicação das tarefas, como principal forma de verificação das hipóteses formuladas na investigação (Almouloud, 2007). Nas palavras de Artigue, é uma metodologia "baseada nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino [...] cuja validação é essencialmente interna, com base no confronto entre análise *a priori* e análise *a posteriori*"[7]. (ARTIGUE, 1990 p. 286, apud TEMPIER, 2013, p. 186)

Para poder realizar o planejamento da sequência didática, de acordo com os princípios da engenharia didática, passamos para a etapa da análise a priori (ou prévia). Segundo Almouloud (2007), essa análise tem como objetivo identificar problemas de ensino, de aprendizagem do objeto de estudo, para assim delinear as questões de pesquisa. Para o autor, ela pode ser composta pelo estudo dos seguintes aspectos:

- análise da gênese histórica do conteúdo contemplado no ensino, sua funcionalidade na Matemática, os obstáculos epistemológicos;
- análise do ensino usual e seus efeitos, as atividades utilizadas pelos professores para

[7] Basée sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement [...] dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori.

ensinar o conteúdo em questão, as propostas curriculares;

- análise das concepções das crianças, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução.

A fase seguinte foi a experimentação, isto é, o desenvolvimento da sequência didática na escola, recolhendo os dados que informam sobre os fenômenos identificados na análise *a priori*. Por fim, a análise *a posteriori* se fundamentou no conteúdo, nos dados obtidos e na confrontação com a análise *a priori*.

A seguir, analisaremos três aspectos que consideramos fundamentais para o desenvolvimento da engenharia didática.

4.1. Análise a priori

Como citado anteriormente, um dos objetivos da análise a priori é identificar os problemas de ensino e de aprendizagem de um objeto de ensino. Em nosso caso, o sistema de numeração.

Considerando os aspectos apontados por Almouloud (2007), optamos em aprofundar o olhar para os envolvidos nos três pólos do triângulo didático, considerando que, assim, poderíamos ajustar as atividades propostas construindo um meio favorável para a aprendizagem do conceito em questão. Dessa forma, nesta sessão faremos uma análise dos seguintes aspectos:

- Objeto de ensino
- Conhecimentos numéricos das crianças
- Ensino usual do valor posicional

4.1.1. Análise do objeto de ensino

A presente pesquisa está fundamentada nos pressupostos da engenharia didática. Essa metodologia prevê algumas fases de desenvolvimento. A primeira delas é a análise a priori. Nessa fase, busca-se aprofundar as características do saber em jogo e identificar problemas epistemológicos relativos ao conceito (Almouloud, 2007). Acreditamos que conhecer as características de alguns sistemas de numeração permite compreender melhor ideias de crianças frente ao sistema de numeração que utilizamos hoje e o complexo percurso que precisam percorrer para compreender as regras que regem o sistema de numeração. Por essa razão, dedicaremos este capítulo ao estudo do conteúdo em questão – o sistema de numeração indo-arábico –, sua gênese histórica e os obstáculos epistemológicos[8] que podem representar para as crianças que procuram se apropriar dele.

Optamos em analisar apenas alguns sistemas de numeração escrita, em base 10, por considerar que podem ajudar a compreender os obstáculos epistemológicos que o ensino do sistema de numeração utilizado atualmente representa para as crianças.

Pensar em um sistema de numeração como objeto de ensino requer considerar que se trata de ensinar e aprender um sistema de representação. O sistema de numeração tal como conhecemos hoje é um produto cultural que os homens elaboraram, ao longo da história, para resolver os problemas que enfrentavam ao representar quantidades e operar com elas. Seu uso nos é tão familiar que, muitas vezes, não nos atentamos para as regras que são próprias desse sistema de representação. Essa distinção é necessária para planejar o ensino, pois as características do sistema de numeração intervêm em como as crianças se aproximam dele.

A necessidade da contagem, associada à resolução de problemas ligados à subsistência, esteve presente desde a origem da humanidade. Diversos autores citam o exemplo dos pastores que, ao voltar do pasto, correspondiam cada ovelha a uma pedra para se certificar de que todos os animais tinham entrado no curral. Entretanto, Roque (2012) aponta para o fato de ser muito difícil estudar culturas de prática numérica oral e alerta que essa versão não é comprovada. Segundo a autora, "as fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis". (ROQUE, 2012, p. 35). Contudo, escavações arqueológicas em diversas partes do mundo encontraram marcas em ossos e desenhos em paredes de cavernas que permitem formular a hipótese de que a ideia de número associada a seus registros já existia desde tempos remotos. Na década de 1970, arqueólogos encontraram nas montanhas Limbombos, na Suazilândia, um pequeno pedaço de osso de babuíno com ranhuras feitas deliberadamente pelo homem. O osso de Lebombo (35.000 a.C.) é possivelmente o artefato matemático conhecido mais antigo. Outro objeto semelhante, o osso de Ishango (18.000 a.C. a 20.000 a.C.), foi encontrado em 1960 na República Democrática do Congo e hoje

[8] O termo "obstáculo" é usado neste trabalho no sentido de Brousseau (apud ALMOULOUD, 2007, p. 133). Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento que produz respostas adequadas, em certo contexto, frequentemente encontrado. Mas pode produzir respostas falsas, fora desse contexto. Além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo.

encontra-se em exposição no Instituto Real Belga de Ciências Naturais. Acredita-se que esses objetos eram utilizados como dispositivo auxiliar de memória para registrar quantidades. Ao que tudo indica, esse tipo de notação foi utilizado durante muito tempo pelo homem[9].

Figura 2: Osso de Lebombo, o instrumento de medição mais antigo que se conhece no mundo

Fonte: Ta Neter Foundation

Figura 3: Osso de Ishango, vista frontal e posterior

Fonte: Ta Neter Foundation

Com o desenvolvimento da sociedade e a mudança de hábitos e necessidades da economia, as quantidades tornaram-se cada vez maiores e é possível inferir que esses métodos se tornaram menos viáveis, impulsionando a busca de uma forma mais econômica de registrá-las. Assim, os homens criaram símbolos para representar maior quantidade de objetos e surgiram os primeiros sistemas de numeração (Roque, 2012).

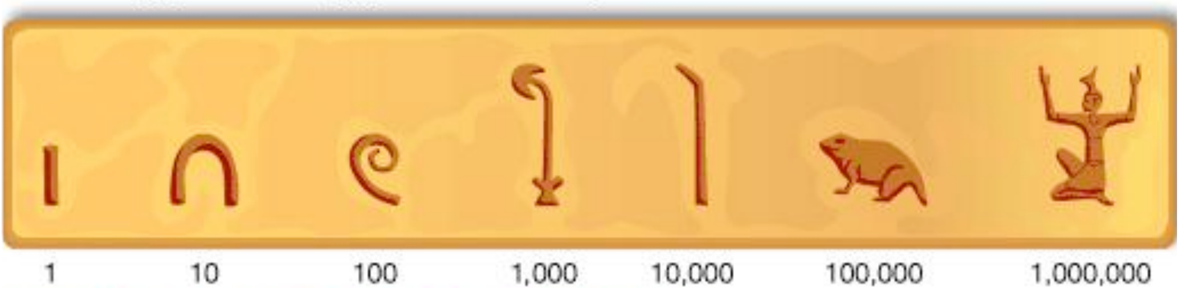
Diferentes civilizações, em distintas épocas, em diversas partes do mundo chegaram a soluções similares: criaram um símbolo para representar cada unidade que se repetia até determinado número e um símbolo diferente que representa ou abarca os anteriores. Esse

[9] Conforme pode ser visto em http://www.taneter.org/math.html, acessado em 10 de julho de 2016.

número é a base. A base 10 é a mais utilizada ao longo da história. Ifrah (1996) acredita que essa base foi escolhida por ser anatomicamente conveniente por causa dos dez dedos da mão utilizados para contar.

Segundo Ifrah (1997), por volta de 3.000 a.C., os egípcios criaram um sistema de escrita que incluía também uma forma de registro numérico. O sistema egípcio possuía um hieróglifo particular para representar a unidade e cada uma das seis potências de dez seguintes, como mostra a imagem a seguir:

Figura 4: Símbolos da numeração egípcia



Fonte: 2003 Encyclopedia Britannica, Inc.

Para representar um número, limitavam-se a repetir cada símbolo tantas vezes quanto fosse necessário. Assim, escreviam o número 258.458 da seguinte forma:

Figura 5: Número 258.458 representado com símbolos da numeração egípcia

Fonte: 2003 Encyclopedia Britannica, Inc.

De acordo com Ifrah, a notação egípcia foi uma maneira de traduzir por escrito o resultado de um método concreto de enumeração. Nas palavras do autor, “um método que consistia em representar um número dado pelo alinhamento ou empilhamento de tantos *objetos-padrão* quantos fossem necessários (pedras, conchas, bolinhas, bastonetes, discos, anéis) associados cada um a uma ordem num sistema de numeração” (IFRAH, 1997, p. 346). O sistema de numeração egípcio recorria ao princípio aditivo, isto é, cada algarismo possuía um valor próprio, independentemente de sua posição nas representações, embora geralmente os egípcios colocassem em uma determinada disposição:

No início, as numerações escritas repousaram sobre o princípio aditivo,

> regra segundo a qual o valor de uma representação numérica é obtido através da soma dos valores de todos os algarismos contidos nela. Eram, portanto, muito rudimentares: seus algarismos de base eram totalmente livres uns dos outros (cada um possuindo apenas seu próprio valor absoluto), e seus usuários limitaram-se a repeti-los tantas vezes quanto necessário. (IFRAH, 1997, p. 672)

Um sistema aditivo, como o egípcio, é muito transparente: para interpretar um número basta somar os valores dos símbolos utilizados. Porém, tem o inconveniente de necessitar de um grande acúmulo de símbolos para representar números maiores.

Para evitar esse excesso de símbolos, alguns povos introduziram sinais complementares, correspondentes a unidades intermediárias (Ifrah, 1997). Esse foi o caso dos romanos, que atribuíram um símbolo particular para os números 5, 50, 500, 5.000, etc. O sistema de numeração romano também empregava o princípio aditivo, associado ao subtrativo. Para representar um número se combinava esses sete símbolos, que podiam ser repetidos até quatro vezes:

Tabela 1: Algarismos romanos

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1.000

Fonte: Ifrah, 1997, p. 397

Segundo Ifrah (1996), inicialmente a aplicação do princípio aditivo aos sete algarismos só permitia representar números inferiores a 5 mil. Com o passar do tempo, os romanos criaram algumas convenções de escrita que permitiram representar números maiores. Uma dessas convenções era acrescentar uma barra horizontal acima do algarismo para multiplicá-lo por mil, como é possível ver nos exemplos da Figura 6:

Figura 6: Numeração romana

$$\overline{\mathrm{V}} = 5 \times 1.000 = 5.000$$
$$\overline{\mathrm{X}} = 10 \times 1.000 = 10.000$$
$$\overline{\mathrm{LXXXII}} = 82 \times 1.000 = 82.000$$

Fonte: Ifrah, 1996, p. 203

O sistema de numeração que usamos hoje é um sistema numérico posicional decimal. É decimal porque o valor que representa cada algarismo é uma potencia de dez. E é posicional porque o valor relativo de cada algarismo depende da posição que ocupa no número. É composto por dez símbolos com os quais é possível representar qualquer número. Segundo Ifrah (1997), a criação de um símbolo para representar as unidades faltantes foi uma etapa decisiva para o avanço dos sistemas de numerações.

> Nosso sistema de numeração de base 10 também é posicional. Há símbolos diferentes para os números de 1 a 9, e o 10 é representado pelo próprio 1, mas em uma posição diferente. Por isso se diz que nosso sistema é um sistema posicional de numeração de base 10, o que significa que a posição ocupada por cada algarismo em um número altera seu valor de uma potência de dez para cada casa à esquerda. (ROQUE, 2012, p. 50)

Ao longo da história, apenas quatro povos criaram sistema de numeração de posição: os babilônios, os chineses, os maias e os indianos (Ifrah, 1997). De acordo com Cousquer, citado por Almeida (2007), foi no norte da Índia, por volta do século V, que nasceu o antepassado do sistema de numeração que utilizamos hoje. No entanto, não há um consenso entre os estudiosos. Almeida (2007) argumenta que não existem documentos hindus que testemunhem, com exatidão, quando e como os hindus chegaram ao sistema de numeração decimal posicional.

Em síntese, o sistema de numeração que utilizamos hoje, em comparação com outros que foram utilizados ao longo da história, é muito mais econômico. Para escrever, por exemplo, o número duzentos e cinquenta e oito mil, quatrocentos e cinquenta e oito, utilizamos apenas 6 símbolos, bem diferente dos 32 utilizados no sistema egípcio. Em contrapartida, esse registro é muito menos transparente.

As crianças hoje, desde bem pequenas, interagem com esse complexo sistema de numeração, em que único indicador da presença de uma potência da base é a posição que o símbolo ocupa. Para interpretar um número representado nesse sistema é necessário deduzir por qual potência da base se deve multiplicar cada algarismo. Cabe, então, nos perguntar: Como as crianças se aproximam desse complexo objeto de conhecimento? Que estratégias os professores utilizam em sala para ensiná-lo? Trataremos desses dois aspectos nos próximos capítulos.

4.1.2. Os conhecimentos numéricos das crianças

O objetivo desta seção é fazer um balanço dos principais desafios encontrados pelas crianças ao aprender o sistema de numeração.

Como citado anteriormente, ao longo da história, a busca pela economia de representação numérica originou um sistema de numeração muito eficiente, que possibilita, com uma pequena quantidade de símbolos, representar infinitos números e realizar complexas operações (Terigi e Wolman, 2007). Para Lerner, Sadovsky e Wolman, "economia e transparência não são variáveis independentes: quanto mais econômico é um sistema de numeração, menos transparente se apresenta" (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 111).

Por esse motivo, entender as concepções das crianças frente ao sistema de numeração, suas dificuldades e os obstáculos que determinam sua evolução é essencial para pensarmos um projeto de ensino (Artigue, 1995).

O sistema de numeração é um objeto cultural que tem a particularidade de, nos dias de hoje, estar extremamente presente no mundo social e na vida cotidiana das crianças. As características do sistema de numeração estão presentes nas notas, nas moedas e nos preços que as crianças observam quando acompanham seus pais às compras, no número do telefone, na sua casa, na linha do ônibus, no radar de velocidade, enfim, em diferentes contextos em que os números cumprem diferentes funções e fornecem diferentes informações. Terigi e Wolman alertam para o fato de que, muitas vezes, essas informações podem ser contraditórias:

> Em muitos dos casos que mencionamos, os números não funcionam como o fazem no sistema de numeração, mas, sim, com regras específicas da situação em questão. Assim, por exemplo, se no sistema de numeração algarismos distintos representam quantidades diferentes, há usos dos grafismos numéricos em que algarismos diferentes não representam quantidades diferentes, mas, sim, classes cujas diferenças são qualitativas: o que indica o 179 de um ônibus em relação ao 21 de outro não é uma quantidade maior (ônibus maior, maior número de ônibus, etc.), mas, sim, que esse ônibus realiza um percurso diferente do outro, o numeral funciona aqui como uma etiqueta. Portanto, as regras construídas historicamente para representar variações na quantidade não estarão funcionando nestes usos diferentes. (TERIGI e WOLMAN, 2007, p. 67)

As crianças, dos mais diversos meios sociais, das diferentes regiões do país, interagem com os números e suas representações em inúmeros contextos de uso. Analisar os diferentes usos dos números nos contextos sociais pode ajudar a compreender como elas se aproximam de seu funcionamento.

Os processos por meio dos quais as crianças constroem conhecimentos acerca dos números e do sistema de numeração foram analisados por diversos autores.

Os estudos psicológicos como os de Sastre e Moreno (1984), Hughes (1986), Sinclair (1990) e Fayol (1996), entre outros, comprovam que as crianças elaboram conceitualizações originais acerca dos números e do sistema de numeração desde muito cedo, antes mesmo de entrar na escola. As investigações destinadas a estudar propostas didáticas voltadas para as produções numéricas de crianças pequenas[10] evidenciam que elas avançam em seus conhecimentos sobre sistema de numeração ao interagir com a numeração escrita em situações de produção, interpretação, comparação e ordenação de números de vários algarismos (Carraher, Carraher e Schliemann, 1982; Lerner, Sadovsky e Wolman, 1996, Alvarado e Ferreiro, 2000; Brizuela, 2006; Terigi, 2013).

Trabalhos como o de Sinclair (1990) ajudam a compreender os desafios cognitivos que a representação numérica apresenta para as crianças. A autora centrou-se na relação entre as notações das crianças e as quantidades que elas apresentavam. Explorou a progressão nos tipos de notação utilizados por crianças entre 3 e 6 anos, quando representam quantidades menores que dez. Para tanto, apresentou às crianças coleções de objetos e pediu que anotassem quantos objetos havia.

Sinclair (1990) classificou as produções que encontrou em seis grandes categorias, seguindo a ordem da mais primitiva a mais sofisticada, salientando que os diferentes tipos de notações não são mutuamente excludentes, isto é, em diferentes situações as crianças podem realizar mais de um tipo de representação:

- Categoria 1 – A criança produz pequenas grafias isoladas que não correspondem à natureza nem a forma do objeto nem à cardinalidade da coleção de objetos.
- Categoria 2 – Algumas crianças procuram representar certas características de um dos objetos da coleção, colocando uma só Figura.
- Categoria 3 – Depois aparecem representações que deixam claro o princípio da correspondência termo a termo.
- Categoria 4 – A ideia de fazer uma marca para cada objeto permanece na categoria 4, mas agora utilizando os algarismos. Por exemplo, ao anotar cinco objetos, a criança marca 1 2 3 4 5 ou ainda 5 5 5 5 5.
- Categoria 5 – Essa categoria abarca as notações em que a criança utiliza o cardinal sozinho sem o acréscimo de outras grafias.
- Categoria 6 – Agrupa as produções das crianças que registram o cardinal acompanhado de letras, especificando a natureza dos objetos da coleção.

[10] Os estudos citados realizaram investigações didáticas em turmas de crianças correspondentes à Educação Infantil e ao Ensino Fundamental 1 do Brasil.

Assim como Sinclair (1990), os estudos de Sastre e Moreno (1984) e Hughes (1986) buscaram descrever as notações espontâneas que as crianças fazem quando lhes são apresentadas diferentes quantidades de objetos. Os autores relataram resultados semelhantes. Identificaram uma progressão nas notações que só gradualmente inclui o uso de números escritos de maneira convencional (Brizuela, 2006).

Essas pesquisas nos ajudam a entender como as crianças se aproximam do registro dos números e o caminho que percorrem na compreensão do sistema de numeração que utilizamos.

Investigações como a de Lerner, Sadovsky e Wolman (1996)[11] propõem que as crianças produzam, interpretem, comparem e ordenem escritas numéricas, assim como resolvam operações em situações-problema, baseadas na hipótese de que as crianças aprendem o mecanismo de produção dos números antes de compreender integralmente a posicionalidade do sistema de numeração.

As autoras conduziram uma investigação centrada em números escritos para descobrir como as crianças se aproximam do conhecimento do sistema de numeração. Partiram de duas suposições: “As crianças elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas e que a construção da notação convencional não segue a ordem da sequência numérica, mesmo que desempenhe um papel importante nessa construção” (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 76-77).

Montaram duas situações, realizadas sempre em duplas de crianças da mesma série. A primeira consistia em um jogo de cartas em que cada participante coloca seu monte na sua frente, com os números voltados para baixo, e viram a carta de cima do monte, ao mesmo tempo. O que tiver a carta mais alta fica com todas. O jogo termina quando acaba o maço inicial de um dos jogadores. Ganha quem obtiver a maior quantidade de cartas. Para esse jogo, foi utilizado um baralho com números compreendidos entre 5 e 31, sem desenhos, de tal maneira que a comparação se baseasse exclusivamente na escrita numérica.

A segunda situação referia-se à escrita numérica. As pesquisadoras inicialmente pediam às crianças que pensassem um número muito alto e o escrevessem. Depois ditavam números cuja característica central era o debate das escritas produzidas.

---

[11] Essa investigação é um antecedente direto da investigação citada na nota 1, na introdução deste trabalho.

Ao analisar os dados recolhidos em sua pesquisa, Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) observaram algumas hipóteses que as crianças constroem no processo de apropriação do sistema de numeração. A seguir apresentamos algumas dessas hipóteses.

As autoras entrevistaram 50 crianças entre 5 e 8 anos e constataram que, antes de poder ler e escrever os números convencionalmente, constroem diferentes critérios que lhes permitem comparar, produzir e interpretar os números escritos. Segundo elas, as crianças constroem hipóteses ao participar de diferentes práticas sociais nas quais a numeração escrita é utilizada e começam por identificar aquilo que é observável, isto é, as características que podem ser vistas diretamente. Essas primeiras aproximações das crianças explicitam características próprias de um sistema posicional.

Identificaram que, ao comparar dois números com diferentes quantidades de algarismos, as crianças declaravam que é maior o que tem mais algarismos. Nas palavras das autoras: “A afirmação das crianças entrevistadas mostra que elas elaboram uma hipótese que poderia explicitar-se assim: ‘quanto maior a quantidade de algarismos de um número, maior é o número’” (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p.77). Segundo elas, as crianças utilizam esse argumento desde muito cedo e só se mostram em dúvida quando os valores absolutos dos algarismos dos números comparados são muito altos em um e muito baixos em outro. Por exemplo, para 999 e 1.110, afirmam que o primeiro é maior porque “9 é maior que 1”. As autoras destacam que as crianças utilizam esse critério independentemente de conhecer ou não o nome dos números envolvidos. Essa hipótese funciona para um sistema posicional como o que utilizamos hoje, mas não para um sistema aditivo como o egípcio. No sistema, a quantidade de algarismos (no caso dos números naturais) indica a grandeza do número. Em um sistema aditivo, como o egípcio, a quantidade de símbolos de um número não informa sobre sua grandeza. Essa característica será retomada quando discorrermos sobre as práticas usuais de ensino.

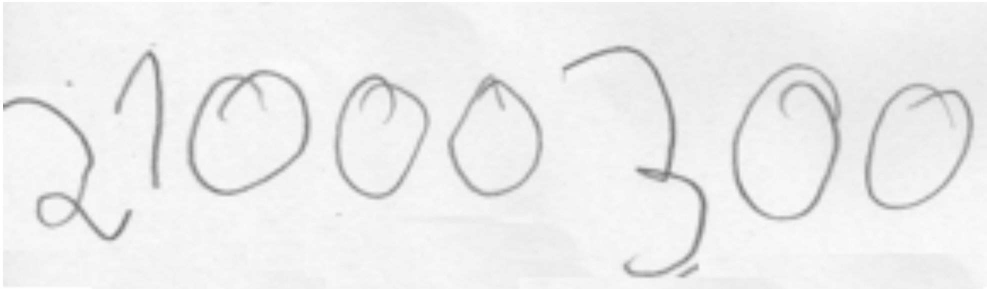
> Em nosso sistema de numeração – como é sabido –, o valor que representa cada algarismo se obtém multiplicando esse algarismo por uma determinada potencia de base. Se um número tem mais algarismos que outro, necessariamente intervieram em sua decomposição potencias de dez de maior grau que as envolvidas no outro, e em consequência será maior. (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 109)

Outra hipótese identificada pelas autoras se relaciona a quando as crianças comparam números com a mesma quantidade de algarismos. Avaliam a posição que os algarismos ocupam, consideram que o primeiro algarismo determina qual é o maior. Ao comparar 713 e 389, por exemplo, afirmam que 713 é maior "porque o primeiro é o 7, que vem depois do 3" ou, nas palavras das crianças que participaram da pesquisa, "o primeiro é que manda". As autoras explicam que, "ao comparar números de igual quantidade de algarismos, as crianças exibem argumentos por meio dos quais se evidencia que elas já descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante em nosso sistema de numeração" (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 81). Mais uma vez, observamos aqui que as crianças se apoiam em uma característica do sistema de numeração posicional em que se obtém o valor de cada algarismo multiplicando-o por uma potência da base. A posição indica que os algarismos localizados à esquerda têm maior valor que os localizados à direita – o primeiro algarismo indica por quanto multiplicar a potência da base mais alta envolvida no número. A utilização desse critério aponta que as crianças atribuem um valor relativo ao algarismo segundo sua posição dentro do número. As autoras destacam que as crianças utilizam esse critério muito antes de ouvir falar em unidade, dezena e centena.

Na situação experimental de escrita de números, Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) observaram que algumas crianças eram capazes de escrever números "redondos", isto é, dezenas, centenas exatas, antes de escreverem convencionalmente os números localizados nos intervalos entre eles. Assim, escrevem, por exemplo, 100 antes de escrever convencionalmente 93.

Constataram também que as crianças elaboram hipóteses acerca da interpretação e escrita dos números baseando-se nas informações que extraem da numeração falada nos seus conhecimentos sobre a escrita convencional dos números "redondos". A tentativa de estabelecer essa correspondência conduz a produções não convencionais. Segundo as autoras, "para produzir os números cuja escrita convencional ainda não adquiriram, elas misturam os símbolos que conhecem, colocando-os de maneira tal que se correspondam com a ordenação dos termos da numeração falada" (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 92). Assim, para escrever "dois mil e trezentos", escrevem 2000300 ou 21000300, como é possível ver na Figura 7.

Figura 7: Produção de criança – ditado de números altos



Fonte: Arquivo pessoal da autora

É interessante analisar que essa escrita, inadequada em um sistema posicional, corresponde à escrita de sistemas não posicionais, como o romano, MMCCC, ou o egípcio, , nas quais é possível ver claramente o dois mil e o trezentos.

> É indubitável que, se nossos entrevistados houvessem sido crianças egípcias do ano de 5000 a.C., teríamos obtido resultados muito diferentes. Como se trata de crianças nascidas nos umbrais do século XXI, imersas numa cultura digitalizada, suas conceitualizações apontam à organização posicional de nosso sistema de numeração. (LERNER, SADOVSKY e WOLMAN, 1996, p. 110)

Cabe destacar que numeração escrita e numeração falada têm organizações diferentes. A organização da numeração falada não é posicional.

Os estudos mencionados convidam a revisar o ensino desse objeto de conhecimento na escola, considerando a natureza do objeto de conhecimento, o que as crianças sabem, as perguntas que se fazem, os problemas que se formulam e o conflitos que devem superar. Essa posição baliza a proposta didática desenvolvida na presente pesquisa.

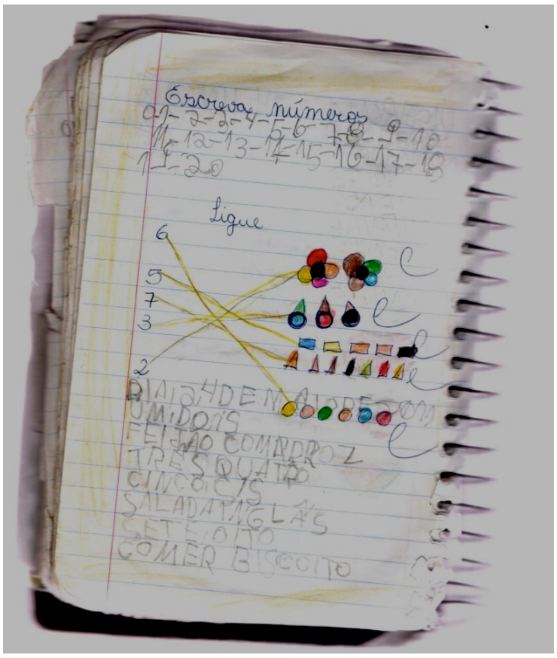
4.1.3. Um olhar sobre o ensino usual da numeração escrita

Nosso objetivo nesta seção é esboçar uma visão geral das concepções que têm orientado o ensino do sistema de numeração posicional, apontando problemas que podem se apresentar do ponto de vista do objeto de ensino e da relação com as ideias das crianças.

A análise dos currículos brasileiros em diferentes épocas e de currículos de diversos países indica que o ensino dos números e das operações sempre ocupou lugar de destaque na escola (Pires, 2000).

O ensino dos números começa desde a Educação Infantil e segue ao longo do Ensino Fundamental. Uma ideia bastante difundida é que, para as crianças poderem usar os números, primeiro necessitam dominar sua escrita. Nessa perspectiva, como indica o estudo de Bonaldo (2007) citado anteriormente, o professor apresenta inicialmente os números de um algarismo, associados à representação das quantidades, enfatizando o seu traçado, o treino e a percepção, por meio de propostas como passar o lápis sobre os algarismos pontilhados, colorir os algarismos, anotar ou ligar o número à quantidade de objetos correspondente. Por exemplo, ligar o 2 ao desenho de duas bolas (Monteiro, 2010). Em nossa experiência profissional, na formação de professores em diferentes locais do país, também encontramos estes tipos de atividades, como mostra a Figura 8:

Figura 8: Caderno de aluno do 1º ano



Fonte: Arquivo pessoal da autora. Programa Além dos Números, 2011

Essas atividades estão apoiadas na ideia de que o aluno aprende pela percepção ou pela reprodução de números ou quantidades, o que não favorece a construção de sentido da atividade matemática:

> Para que as crianças possam construir os conhecimentos matemáticos atribuindo sentido a eles, as situações que enfrentam precisam reunir uma série de condições. Entre elas, está a de comportar uma finalidade do ponto de vista da criança e, ao mesmo tempo, uma finalidade didática. A primeira, que envolve o sentido atribuído pela criança à atividade, requer que ela considere necessário atingir algo e saiba em que consiste essa meta para se introduzir no jogo proposto pela atividade. A segunda refere-se às aprendizagens que se espera que alcance. (MONTEIRO, 2010, p. 3)

Kamii (1992) enfatiza que é fundamental a autonomia intelectual da criança. Nesse aspecto, indica a necessidade do distanciamento da educação tradicional, centrada apenas na memorização e na repetição, e destaca a importância da resolução de situações-problema que façam parte do cotidiano familiar e social da criança. Para a autora, é preciso "encorajar a criança a pensar sobre número e a quantidade de objetos quando estes sejam significativos. Para ela estar alerta e colocar todos os tipos de objetos, eventos e ações em todos os tipos de ações e em todas as espécies de relações" (KAMII, 1992, p. 70). Sabemos que as crianças desde pequenas podem trabalhar diretamente com o número, contando objetos, lendo e escrevendo números, resolvendo situações de comparação, ordenação e reunião de quantidades, sempre em situações significativas, contextualizadas e com sentido.

Em sua pesquisa, Rodrigues (2001) identificou que, depois de ensinar os números de um algarismo, frequentemente se estabelece metas por ano. A autora afirma que, em geral, os professores "consideram como caminho mais natural principiar pelo ensino dos números de 1 a 9 e depois apresentar o 0, introduzir a noção de dezena como agrupamento de 10 e sua escrita. Usam procedimento semelhante para apresentar as outras ordens" (RODRIGUES, 2001, p. 83). Desse modo, para que os alunos possam assimilá-los mais facilmente, no 1º ano ensina-se números de dois algarismos; no 2º ano, números de três algarismos, e assim por diante. Quando se chega ao 10, apresenta-se os termos "unidades", "dezenas" e "centenas", considerados pré-requisitos para a resolução de operações. Parte-se do pressuposto de que o aluno aprende acumulativamente, que o conhecimento dos números de um algarismo é requisito fundamental para o estudo de números maiores que 10 e para aprender a realizar cálculos.

Terigi e Wolman (2007) apontam que apresentar os números em pequenas doses não propicia a interação das crianças com o sistema de numeração:

> A ordem de apresentação dos números e a correspondente explicitação do valor posicional são considerados requisitos necessários para o ensino dos algoritmos convencionais. Esta maneira de apresentar os números dosifica de tal modo o objeto de conhecimento que sua compreensão se vê dificultada: não é possível detectar regularidades e descobrir a recursividade do agrupamento, precisamente porque o que não se permite é a interação com o sistema enquanto tal. (TERIGI; WOLMAN, 2007, p. 70)

Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) apontam que o empenho para conseguir que as crianças compreendessem o complexo sistema de numeração indo-arábico levou a utilização de recursos que procuram materializar os agrupamentos em base 10. Pires (2012) aponta que materiais que buscam a concretização do valor posicional, como o material dourado, foram, e ainda são, os principais recursos utilizado pelos professores para ensinar as regras do sistema de numeração indo-arábico:

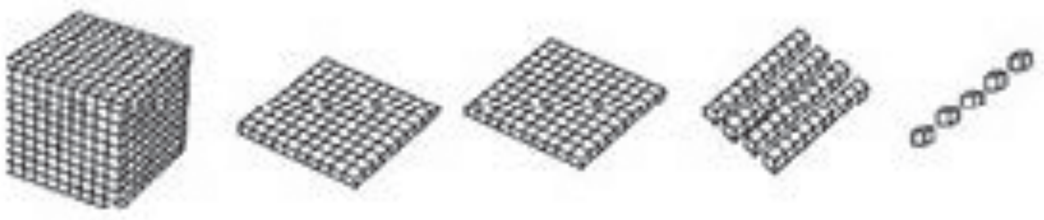
> Mesmo não sendo mais "dourado" como idealizou a educadora italiana Maria Montessori – um material feito com contas douradas dispostas em araminhos para que crianças com deficiência visual pudessem manipular e perceber as quantidades – o material comercializado em madeira com "cubinhos, barras, placas e cubão" foi (é) visto como um recurso quase indispensável de "concretização" das regras criadas pelos hindus e divulgadas pelos árabes e que nos permitem representar os números e operar com eles. De certo modo, oculta-se a história de construção do sistema e passa-se a impressão de que o Sistema de Numeração Decimal é tão ligado ao material dourado que é difícil pensar que os hindus não o utilizavam. (PIRES, 2012, p. 51)

Pires (2012) relata a própria experiência com o uso desse recurso e declara que, provavelmente, seu encantamento com o material se deve ao fato de ela mesma descobrir regras do funcionamento do sistema de numeração que antes desconhecia:

> Quando conheci o material dourado, já sendo professora de Matemática, também fiquei encantada com ele. Na verdade, hoje avalio que devo ter ficado encantada com a descoberta de que nas escritas numéricas e nos algoritmos havia uma explicação que antes, ninguém nos havia contado. Vivíamos um período de descobertas e nos filiamos à ideia de que era preciso ensinar/aprender Matemática não pela memorização de regras, mas pela compreensão do que estávamos fazendo e porque estávamos fazendo, convicção que dura até hoje. (PIRES, 2012, p.51)

Nos materiais estruturados, cada peça representa o valor de uma potência de base (unidade, dezena, centena e milhar). Logo, para compor um número com esses materiais é preciso repetir cada peça tantas vezes quanto necessário. O número representado com o material dourado, por exemplo, pode ser interpretado independentemente da posição que estejam localizadas as peças. Assim, o número 1.245 pode ser representado da seguinte maneira:

Figura 9: Representação do número 1.245 com material dourado (A)



Fonte: Pires, 2012, p. 52

É importante observar que em qualquer posição que se organize as peças, sempre teremos o número 1.245.

Figura 10: Representação do número 1.245 com material dourado (B)

Fonte: Adaptado de Pires, 2012, p. 52

Para Brandt (2005) é possível notar que esse tipo de representação guarda grande semelhança com o sistema de numeração egípcio:

> Pode-se observar que o tratamento nessa representação não exige o valor posicional, pois os cubos e as placas resultantes da adição podem estar situados em qualquer lugar. Essa representação não é congruente nem à representação no ábaco nem à representação algébrica. Ela é congruente, porém, ao sistema de numeração egípcio e evidencia a base do sistema de numeração. (BRANDT, 2005, p. 80)

Nesse tipo de material, cada peça abarca seu valor independentemente de sua localização porque representa uma potência de 10; não há nenhuma multiplicação em jogo. Este modo de representação é próprio de sistemas aditivos, mas e se diferencia do sistema de numeração, posicional de base 10. Lerner (1999) enfatiza que:

> Uma das características do nosso sistema de numeração é, precisamente, a de não representar através de símbolos específicos as características da base. Estas se representam exclusivamente através da posição que ocupam os números e de nenhuma maneira através de símbolos particulares. (LERNER, 1999, p. 57)

Rodrigues (2001) identifica que, mesmo quando os professores declararam trabalhar com recursos, como o material dourado, com a finalidade de explicitar as regras do sistema de numeração indo-arábico para os alunos, não demonstraram clara compreensão do valor posicional intrínseco no aprendizado do sistema de numeração decimal. Relaciona o fato dos professores não dominarem totalmente os conceitos implícitos no emprego do sistema de numeração decimal a não compreensão de seus alunos. Para a autora:

> Os alunos não demonstram clara compreensão do valor posicional intrínseco no aprendizado do sistema de numeração decimal. A compreensão dos princípios e das regras do SND certamente é muito superficial, haja vista que indicam, com frequência, o algarismo que ocupa uma dada ordem como equivalente à quantidade de unidades, dezenas ou centenas que compõe um número. (RODRIGUES, 2001, p. 82)

Pires (2012) cita também que, na década de 1980, jogos, como o Nunca dez, foram amplamente utilizados para que as crianças compreendessem a ideia de agrupamento, partindo da experimentação com materiais concretos, agrupando-os de 10 em 10:

> A aprendizagem do sistema de numeração decimal apoiava-se no trabalho de atividades com uso do Material Dourado Montessori (em diferentes bases e na base 10), em que se apostava no fato de que mediante a manipulação desse material as crianças se apropriariam das características do sistema de numeração. Uma dessas atividades era o jogo do "Nunca dez". Nele, cada aluno, na sua vez de jogar, lançava por exemplo um dado de pontos e retirava na caixa do material dourado igual quantidade de cubinhos. Quando ele conseguisse mais do que dez cubinhos, trocava os por uma barra que estava na caixa do material. Quando conseguisse dez barras trocava por uma placa. Vencia o jogador que conseguisse primeiro dez placas ou um número de placas, antecipadamente, combinado. (PIRES, 2012, p.47)

Ao analisar a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do estado de São Paulo, de 1986, Pires (2012) destaca que o documento apresenta as atividades de agrupamentos e trocas, de forma bastante detalhada para o ensino do sistema de numeração decimal, propondo experiências com agrupamentos e trocas em bases variadas, para levar os alunos a compreender o processo de agrupamentos e trocas, na base 10, que caracteriza o sistema posicional de numeração decimal.

Pires (2012) alerta para o fato que 30 anos se passaram desde que essa Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do estado de São Paulo foi elaborada e aponta para a necessidade de rever práticas que foram idealizadas em outras concepções. No entanto, segundo a autora, essa discussão não tem sido feita com profundidade exigida nem na academia nem nas escolas. Esse tipo de prática perdura até hoje e aparecem em materiais didáticos como o do Programa de Alfabetização na Idade Certa (Paic), do governo do Ceará (Figura 11):

Figura 11: Material didático do 4º ano (A)

GOVERNO DO ESTADO DO CEARÁ — JOGOS MATEMÁTICOS – 4º ANO — 11

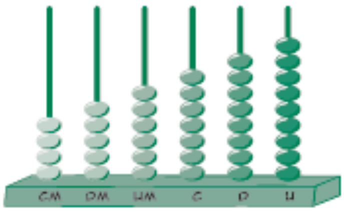
4º ANO – JOGO 04: NUNCA 10 (COM O ÁBACO)

OBJETIVOS: Construir o significado de Sistema de Numeração Decimal (base 10) explorando problema que envolvam contagem e compreender o valor posicional dos algarismos.

MATERIAIS:

- Ábaco de pinos
- 2 dados

Material necessário para cada equipe



ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Equipes de 3 a 5 alunos.

COMO JOGAR:

1. Dividir a turma em grupos.
2. Definir a ordem em que cada participante jogará.
3. Cada jogador deve pegar os dois dados e jogá-los, conferindo o valor obtido.
4. Este valor deverá ser representado no ábaco. Para representá-lo, o jogador deve colocar as argolas correspondentes ao valor obtido no pino das unidades (primeiro pino da direita para a esquerda).
5. A regra é que a cada 10 argolas (pontos) no pino das unidades, o jogador deve retirar estas 10 argolas e trocá-las por uma argola que será colocada no pino das dezenas (segundo pino), representando 10 unidades ou uma dezena.
6. Quando forem colocadas 10 argolas no segundo pino das dezenas, as mesmas devem ser trocadas por uma argola a ser colocada na ordem das centenas (terceiro pino).
7. Vencerá o jogo quem colocar a primeira peça no pino das centenas (terceiro pino do ábaco).

OBSERVAÇÃO: Com esta atividade, é possível chamar a atenção dos alunos para o agrupamento dos valores (base 10), e que um algarismo pode ter um valor diferente de acordo com a posição que ocupa em um número.
É importante que os alunos possam registrar este jogo em seus cadernos, observando as estratégias e os pontos obtidos por cada um dos jogadores.

Fonte: ARAÚJO, G. L. D., ALVES, E. A. W.; AFONSO, R. F., AZEVEDO, C. F., SOUZA, G. N. Apostila: oficina brincar e educar: Jogos matemáticos, 1o ao 5o ano do ensino fundamental, DMA_UFV Viçosa – MG.

Fonte: Paic – governo do Estado do Ceará

Uma variação desse jogo são os "amarradinhos" que procuram fazer que as crianças compreendam o princípio do agrupamento (algumas vezes, até mesmo em outras bases). As regras são basicamente as mesmas do jogo Nunca dez: cada jogador, na sua vez, joga os dois dados, soma os pontos obtidos e pega a quantidade de palitos correspondentes a essa soma. Juntando dez palitos, o jogador deve fazer um amarradinho, utilizando elásticos ou barbantes, e a cada dez amarradinhos deve fazer um amarradão (dez amarradinhos juntos).

Figura 12: Material didático do 4º ano (B)

JOGOS MATEMÁTICOS – 4º ANO 9

4º ANO – JOGO 02: JOGO DOS CANUDINHOS

OBJETIVO: Ampliar a compreensão do sistema de numeração decimal, reconhecendo sua regularidade e a formação de agrupamentos de dez.

MATERIAIS:

- Aproximadamente de 10 a 15 elásticos (ou barbantes)
- 100 palitos ou 50 canudinhos cortados ao meio
- 2 dados
  - Materiais necessários para cada equipe

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Equipes de 2 a 4 alunos.

COMO JOGAR:

1. Dividir a turma em equipes.
2. Juntam-se os palitos (ou canudinhos) no centro de uma mesa.
3. Cada jogador, na sua vez, joga os dois dados, soma os pontos obtidos e pega a quantidade de palitos correspondentes a essa soma.
4. O jogo prossegue assim durante várias rodadas (definidas pelo professor), ou até os palitos terminarem. Juntando 10 palitos, o jogador deve fazer um amarradinho, utilizando elásticos ou barbantes, e a cada 10 amarradinhos ele deve fazer um amarradão (10 amarradinhos juntos).
5. Vence aquele que conseguir o maior número de palitos.
6. Ao finalizar o jogo, os jogadores devem completar a tabela abaixo.

NOME DOS JOGADORES	AMARRADÕES (10 AMARRADINHOS)	AMARRADINHOS (10 PALITOS)	PALITOS SOLTOS	TOTAL
1º				
2º				
3º				
4º				

Fonte: SÁ. I. P. Apostila – Didática da Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassoura – Rio de Janeiro.

Fonte: Paic – governo do Estado do Ceará

Assim como os jogos envolvendo o material dourado, esse tipo de prática também apresenta o inconveniente de que a posição relativa dos amarradinhos e dos palitos soltos não é relevante na representação da quantidade em questão.

Hughes (1986) destaca resultados de pesquisas realizadas na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos que evidenciam que, para as crianças, o procedimento escrito e o uso de materiais concretos são duas atividades que não estão relacionadas. Para o autor, "é como se habitassem em dois mundos, cada um dos quais possui suas próprias regras e procedimentos, porém sem conexão entre ambos" (HUGHES, 1986, apud LERNER, 1995, p. 68).

Lerner, Sadovsky e Wolman (1996) apontam que, paradoxalmente, ao se utilizar recursos que materializam os agrupamentos da base para que as crianças compreendam a posicionalidade do sistema de numeração, se faz desaparecer justamente a posicionalidade. Ao utilizar esse tipo de recurso é possível interpretar o número independentemente da posição em que suas peças estão localizadas: um amarradinho de dez e dois palitos soltos, sempre formarão 12, não importa em qual posição de coloca os palitos soltos, atrás ou na frente do amarradinho (Pires, 2010). Para Brandt (2005), cada um dos tipos de registro utiliza diferentes formas de representação que carregam suas especificidades, que precisam ser consideradas no momento da aprendizagem:

> Quando se utiliza o material multibase e os palitos amarrados, deve-se ter consciência de que esse carrega de uma maneira direta a base 10, presente na estrutura do sistema de numeração. Já a numeração arábica carrega em outra linguagem, agora não mais visual, a composição aditiva e o valor relativo das unidades. Logo, uma quantidade representada na forma escrita, com utilização do sistema de numeração decimal, carrega uma especificidade própria da utilização de uma linguagem específica, no caso, a matemática. (BRANDT, 2005, p. 82)

Em um sistema de numeração como o que utilizamos, a posição indica as multiplicações. Por isso, não é necessário escrevê-las. Terigi (2013) pondera que, quando no sistema de numeração indo-arábico representamos, por exemplo, 1.245, estamos representando $(1 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0)$. Porém, ao escrever posicionalmente não registramos os expoentes das potências da base (3, 2, 1, 0) implícitos na posição de cada coeficiente (1, 2, 4, 5), assim como a própria base e a operação multiplicativa do coeficiente pela base. A multiplicação permanece implícita e a potencia da base é representada somente pela posição dos algarismos (Lerner, 2013).

Para Lerner (1999), além desse tipo de recurso descaracterizar o objeto de ensino ao transformar o sistema de numeração posicional em um sistema aditivo, não permite que as crianças coloquem em jogo os conhecimentos que construíram nas interações com o sistema de numeração no uso social. Nas palavras da autora:

> Esses procedimentos para tornar concreto o sistema de numeração têm dois grandes inconvenientes, tendo como base uma didática construtivista: o primeiro grande inconveniente é que se modifica o objeto de conhecimento, transformando-o em algo muito diferente do que ele é; o segundo grande inconveniente é que se impede que as crianças utilizem os conhecimentos que já tenham construído nas suas relações com o sistema de numeração. (LERNER, 1999, p. 56)

Embora esse tipo de atividade permita muitas vezes que os alunos tenham êxito, não significam, necessariamente, que compreendam as razões que sustentam o funcionamento do sistema de numeração. Manipular e experimentar antes de simbolizar, passar do concreto ao gráfico e do gráfico ao abstrato como forma de introduzir os alunos na atividade matemática parece ser a concepção subjacente a essa abordagem. Essas ideias foram atribuídas a Piaget pela Reforma da Matemática Moderna, interpretando "atividade" como atividade física, em vez de atividade intelectual de atribuição de significados, que era ao que o autor se referia (Pires, 2000). No entanto, diferentes investigações, como as de Lerner (1999), Terigi (2013), entre outras, demonstraram que a ação de manipular objetos não é um requisito para a aprendizagem dos números nem de outros conteúdos matemáticos.

Vale destacar que esses recursos são frutos do esforço para tornar mais simples para as crianças algo tão complexo como o sistema de numeração que utilizamos, que, como vimos, os homens demoraram tanto tempo para construir. No entanto, as investigações têm mostrado que, mesmo sabendo que uma dezena tem dez unidades e que se começa pelas unidades para resolver a técnica convencional da subtração e da adição, as crianças seguem produzindo erros sistemáticos (Wolman, 2010). A autora destaca que o ensino precoce de unidades, dezenas e centenas não contribuem para que as crianças resolvam os cálculos e compreendam a técnica operatória.

Na mesma direção, Rodrigues (2001) sinaliza que, para alguns professores, os procedimentos envolvidos em técnicas operatórias – como nova escrita do minuendo na subtração, que aparece na técnica conhecida como a de "recurso à unidade de ordem superior –, ainda são um enigma.

Em síntese, a análise do ensino usual do sistema de numeração permite observar o quão difícil é para as crianças compreender a natureza desse sistema de representação devido ao tratamento didático do objeto.

Cabe esclarecer que questionar uma concepção de ensino não significa que ela seja um erro. São as investigações realizadas que nos fornecem novos conhecimentos que nos permitem apurar o olhar, questionar práticas vigentes e, ao mesmo tempo, construir alternativas.

Assim, neste trabalho, partimos do pressuposto de que aprender é ter a possibilidade de interagir com o objeto de conhecimento, isto é, tomamos como ponto de partida a interação com a numeração escrita em toda a sua complexidade, para que, como diz Lerner

(2013), as crianças construam conhecimentos graças a essa interação e possam produzir sucessivas aproximações até a compreensão dos princípios estruturais que regem o sistema posicional.

4.1.4. O planejamento da sequência didática

O passo seguinte, após realizar a análise preliminar, considerando as características do objeto de ensino, as concepções das crianças e as práticas usuais dos professores, foi planejar a sequência didática.

No processo de decisão sobre as melhores condições que poderiam ser criadas para a aprendizagem do sistema de numeração, consideramos que, em vez de elaborar uma nova sequência para testá-la nesta pesquisa, poderíamos lançar mão de uma sequência já realizada em outro contexto. Assim, decidimos replicar no contexto brasileiro uma investigação dirigida por Lerner (2013) na Argentina.

Para a realização da pesquisa original, Lerner e equipe (2013) partiram dos resultados encontrados em investigações anteriores[12], nas quais observaram que as crianças elaboravam regras sobre o funcionamento do sistema de numeração. Porém, quando pediam que explicassem as razões do funcionamento dessas regras, apareciam com frequência respostas como “porque sim” ou “pensei assim”. Os pesquisadores se fizeram então novas perguntas:

- Quais condições didáticas são necessárias para que os alunos assumam como propósito pessoal a compreensão do valor posicional?
- Como diminuir a distância que costuma existir entre resolver um problema com êxito e compreender as razões desse êxito?

Para respondê-las, iniciaram uma nova etapa na investigação. Desenharam uma sequência didática utilizando como referência a Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1996). A sequência apresenta problemas vinculados à compreensão do agrupamento decimal no contexto da adição de números de dois algarismos e está desenhada de tal modo que convida a elaboração de regras válidas para o sistema de numeração, a antecipação de resultados em função das regras elaboradas e a construção de explicações que fundamentem as regras estabelecidas (Lerner, 2013).

A pesquisa foi documentada em duas publicações, a primeira fase de 2007 e a segunda fase de 2013. A sequência está organizada em quatro situações, compostas por

[12] Lerner, Sadovsky e Wolman (1996).

diferentes atividades. As duas primeiras fases são voltadas para a ação, formulação e validação e as duas últimas caminham para a generalização e institucionalização das regras elaboradas pelas crianças.

> A sequência inclui quatro situações didáticas. Nas duas primeiras se contempla, em primeiro lugar, uma fase de ação, durante a qual as crianças têm que antecipar como começa o resultado de adições de números de dois algarismos e em seguida verificar a antecipação com calculadora; em segundo lugar, se propõe uma fase centrada na reflexão, durante a qual se pede às crianças que formulem uma regra que lhes permita fazer sempre uma antecipação correta. (LERNER, 2013, p. 181-182)

Partimos desse material para desenhar a sequência didática proposta na presente pesquisa. Estudar mais de perto a sequência didática nos levou a formular algumas perguntas com relação às aprendizagens das crianças, mas também em relação às práticas dos professores:

- O que as crianças sabem sobre o sistema de numeração, mais especificamente sobre o valor posicional e sobre estruturas aditivas?
- O desenvolvimento e a análise de uma sequência didática poderão contribuir para o avanço dos conhecimentos das crianças em relação ao valor posicional?
- Quanto tempo dedicar para as situações de ação?
- Como se dará a passagem da fase de ação para a de formulação?
- Quando institucionalizar?
- Quais aspectos os professores precisam se apropriar para implementar a sequência proposta sem distorcer as questões fornecidas por nós?
- O que é essencial descrever no planejamento? Com que detalhamento? Precisamos explicitar as diferentes fases? As organizações dos grupos?
- Devemos descrever possíveis erros dos alunos e procedimentos esperados?

Consideramos também um importante aspecto, apontado pelo levantamento bibliográfico, sobre a prática usual dos professores para o ensino da Matemática. Olhando para as práticas à luz da teoria das situações, constatamos que, frequentemente, as aulas de Matemática funcionam segundo o modelo normativo, isto é, os professores explicitam os agrupamentos do sistema de numeração, ensinam as técnicas operatórias e depois propõem atividades em que os alunos devem aplicar esses conhecimentos. Do nosso ponto de vista, para que as crianças aprendam e atribuam sentido aos conhecimentos matemáticos, precisam agir, explicar, provar. Concordamos com Brousseau:

> Saber Matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados; sabemos perfeitamente que fazer Matemática implica em resolver problemas. Não se faz Matemática simplesmente resolvendo problemas, mas por vezes esquece-se que resolver um problema é apenas uma parte do trabalho; encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. Uma boa reprodução pelo aluno de uma atividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta, aqueles que lhe são úteis, etc. (BROUSSEAU, 1996, p. 37-38)

A análise por esse ponto de vista nos fez considerar que o desenvolvimento da sequência didática ocasionaria uma ruptura no contrato didático. Como consequência, surgiram novas perguntas:

- Como as crianças e os professores reagirão à mudança de contrato?
- Como uma criança que não tem essa experiência em falar sobre o que fez enfrentará o desafio de explicar?
- Como ajudá-las a construir suas explicações?

Essas questões orientaram o planejamento da sequência proposta, o desenvolvimento e a análise dos dados. No entanto, não sabemos se conseguimos responder a todas elas. De qualquer forma, acreditamos que os resultados desta pesquisa poderão ser comparados com os obtidos nas investigações realizadas em outros contextos.

4.1.4.1. Detalhamento das atividades desenvolvidas

Diagnóstico

Para ter acesso aos conhecimentos sobre as estruturas aditivas, incluímos uma atividade inicial[13] que consistia na resolução de um problema com enunciado, envolvendo uma adição de 38 + 25.

O planejamento da sequência didática que desenvolvemos no presente trabalho previa exatamente as mesmas atividades propostas pela equipe argentina. São dez atividades, organizadas em quatro fases (ou situações) distintas.

Atividades que compõe a primeira situação:

A primeira fase da sequência envolve quatro atividades.

[13] Na primeira etapa da investigação realizada pela equipe argentina, em 2007, propunha-se uma atividade inicial de resolução de problema de enunciado.

Atividade 1, situação 1:

- A professora anota na lousa uma lista de adições, cujas primeiras parcelas são números compreendidos entre 30 e 39, e as segundas parcelas são números compreendidos entre 20 e 29.

32 + 23 =	36 + 24 =	38 + 28 =
30 + 24 =	33 + 26 =	35 + 21 =
38 + 24 =	31 + 26 =	34 + 27 =

- As crianças resolvem os cálculos com a calculadora e vão ditando os resultados para a professora, que os anota na lousa.
- A professora solicita que observem os resultados e pergunta como eles começam. Conclui-se que há duas possibilidades: começar com 50 ou com 60.

O trabalho coletivo é voltado para que as crianças constatem como começam os resultados dos cálculos realizados, que foram verificados com calculadora pelas crianças e endossados pela professora. Portanto, são resultados confiáveis. No entanto, ao estabelecer duas possibilidades (em alguns casos, os resultados começam por 50, em outros por 60), a regra coloca uma questão para as crianças.

Atividade 2, situação 1:

Individualmente, as crianças devem antecipar como começará o resultado de nove cálculos e, em seguida, conferir com a calculadora;

A professora distribui um quadro impresso em uma folha com novos cálculos do mesmo tipo dos apresentados na situação anterior. Pede que os alunos, sem fazer as contas, antecipem como começará o resultado de cada um (com cinquenta ou com sessenta?), anotem com palavras (não com números) na coluna reservada para as antecipações e, depois de cada antecipação, resolvam com a calculadora e anotem o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =		
38 + 21 =		
37 + 27 =		
36 + 27 =		
35 + 25 =		

O objetivo dessa atividade é que cada criança comece a assumir o controle do problema. Ao verificar a correção ou incorreção de cada uma de suas antecipações, terão oportunidade de se perguntar no que se basear para fazer antecipações corretas.

Atividade 3, situação 1:

Em duplas, as crianças discutem como fazer para saber, com segurança, como começará os resultados dos cálculos que fizeram. A professora pergunta: "Por que, algumas vezes, o resultado é cinquenta e alguma coisa e outras vezes é sessenta e alguma coisa?"

As crianças, organizadas em duplas, discutem como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado começaria com 50 ou 60. A professora pergunta: "Se sempre somamos 30 + 20, porque o resultado às vezes é cinquenta e alguma coisa e outras vezes é sessenta e alguma coisa?"

A professora orienta os alunos a anotar as conclusões, os acordos e desacordos que aparecerem na dupla. Recolhe as produções individuais e as das duplas e as analisa para, na aula seguinte, fazer a devolução coletiva, baseada nas respostas elaboradas pelas duplas para a pergunta proposta.

Essa atividade pretende que os alunos comecem a elaborar uma razão válida que englobe todos os cálculos realizados e que permita antecipar os resultados com segurança. A organização da turma em duplas favorece que as crianças se envolvam na discussão.

Atividade 4, situação 1:

A professora analisa as produções realizadas pelas crianças na atividade anterior e, na aula seguinte, compartilha com todos as respostas elaboradas pelas duplas. Assim, introduz a segunda situação.

Atividades que compõem a segunda situação:

Essa etapa é composta por duas atividades, muito similares à anterior, mas agora o objetivo é alcançar maior grau de generalização. Pretende-se que as crianças possam elaborar uma regra, baseadas em duas novas séries de cálculos, cujas parcelas correspondam a dezenas diferentes. Essa regra deve contemplar também a lista proposta na atividade anterior.

Atividade 1, situação 2:

A professora entrega para cada criança outros dois quadros contendo cálculos do tipo "quarenta e alguma coisa" mais "vinte e alguma coisa". E o segundo contendo cálculos do tipo "cinquenta e alguma coisa" mais "trinta e alguma coisa".

Solicita que, assim como fizeram anteriormente, antecipem, sem fazer as contas, como começará o resultado de cada um e anotem com palavras na coluna reservada para as antecipações. Depois, resolvam com a calculadora e anotem o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	Calculadora
43 + 25 =		
44 + 26 =		
44 + 25 =		
45 + 29 =		

	Antecipação	Calculadora
55 + 33 =		
52 + 39 =		
53 + 37 =		
51 + 36 =		

Para as crianças que terminarem de preencher o quadro, a professora propõe uma tarefa complementar: Escreva três cálculos cujo resultado comece com 60 e outros três cujo resultado comece com 70, ou escreva três cálculos cujo resultado comece com 80 e outras três cujo resultado comece com 90.

Atividade 2, situação 2:

A professora propõe que as crianças, em dupla, discutam e respondam a seguinte pergunta: Como fazer para saber com segurança, sem fazer a conta, como começará o resultado (com 60 ou com 70, com 80 ou 90, com 50 ou 60...)?

A professora entrega uma folha para cada dupla para que registrem as respostas elaboradas e informa que, se for necessário, podem consultar os quadros das situações anteriores.

As crianças precisam discutir como fazer antecipações corretas para adições de números de dois algarismos, seja qual forem as dezenas envolvidas. Para tanto, precisarão refletir sobre as razões que sustentam os acertos e os erros.

Atividades que compõem a terceira situação

A professora propõe que, coletivamente, as crianças discutam o seguinte problema: As somas de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa (3_+ 2_) poderiam dar um resultado que comece com 40? E com 70?

Após a discussão do problema, a professora propõe outros envolvendo adições de outras dezenas com o intuito de as crianças chegarem a conclusões mais gerais.

Atividades que compõem a quarta situação:

A quarta situação envolve três atividades.

Atividade 1, situação 4:

Essa situação tem com objetivo elaborar uma conclusão compartilhada por todo o grupo e institucionalizá-la. Começa com uma fase de trabalho coletivo em que a professora propõe o seguinte problema: Decidam qual das seguintes afirmações explica melhor o que acontece quando se soma 40 ou quarenta e alguma coisa, mais 30 ou trinta e alguma coisa.

4_ + 3_

Para que dê 7_	**Para que dê 8_**
- Para que dê setenta ou setenta e alguma coisa, os últimos números têm de ser baixos. - Para que dê setenta ou setenta e alguma coisa, a soma dos últimos números tem de dar 9. - Para que dê setenta ou setenta e alguma coisa, a soma dos últimos números não podem passar de 9.	- Para que dê oitenta ou oitenta e alguma coisa, os números têm que ser altos. - Para que dê oitenta ou oitenta e alguma coisa, a soma dos últimos números tem de dar 10. - Para que dê oitenta ou oitenta e alguma coisa, a soma dos últimos números tem de passar de 9. - Para que dê oitenta ou oitenta e alguma coisa, a soma dos últimos números tem de dar mais de 10.

As afirmações incluídas nesse quadro são apenas exemplos do que as crianças poderão dizer. Para a realização da atividade, deverão ser selecionadas entre as realizadas pelos alunos nas situações anteriores.

Atividade 2, situação 4:

Em uma segunda fase, a professora distribui cópias do quadro e os alunos trabalham em dupla.

Atividade 3, situação 4:

Depois do trabalho em duplas, a professora propõe uma discussão coletiva para debater as conclusões elaboradas.

A professora retoma a consigna inicial: "Vamos ver algumas das afirmações que estão no quadro para discutir coletivamente por que lhes parece que essas podem explicar melhor o que passa ou não. Lembrem-se de que não quer dizer que uma está boa e as outras não. Quer dizer que uma explica melhor que as outras". A professora analisa com os alunos cada afirmação considerando quais são os cálculos para os quais é valida, propondo contraexemplos quando houver cálculos para os quais não é válida e destacando de várias maneiras diferentes o caráter geral que deve ter a explicação.

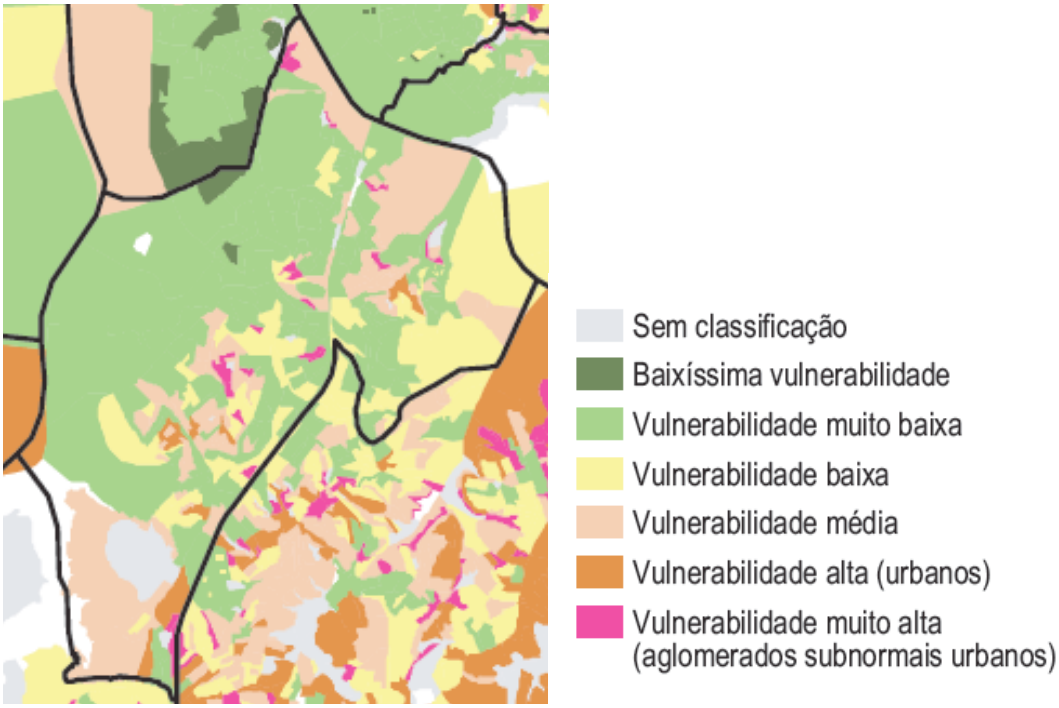
4.1.5. Caracterização dos sujeitos: o bairro, a escola, as professoras e as crianças

Esta pesquisa foi realizada em uma escola estadual na cidade de São Paulo, no distrito Cidade Dutra, um dos três que formam a Subprefeitura Capela do Socorro, região sul da cidade.

De acordo com a Secretaria de Estado de Segurança Pública, o distrito Cidade Dutra não tem altos índices de criminalidade. Segundo dados da Fundação Seade, em 2010, no distrito havia áreas de baixíssima vulnerabilidade social e outras de vulnerabilidade muito alta.

Mapa 1: Índice Paulista de Vulnerabilidade Social (IPVS)

Cidade Dutra – Município de São Paulo (2010)



Fonte: Fundação Seade. Índice Paulista de Vulnerabilidade Social – IPVS

Ao analisar o mapa 1 do Índice Paulista de Vulnerabilidade Social da cidade de São Paulo, nota-se que predomina a área de vulnerabilidade muito baixa, seguida pela área de vulnerabilidade baixa ou média. No entanto, por estar às margens da represa de Guarapiranga, o contraste social na região é visível. O bairro é formado por clubes de campo, marinas, escolas de equitação, garagens de barcos, casas de alto e médio padrão e moradias precárias. Ao mesmo tempo há grandes avenidas, ruas sem calçamento ou com calçamento em péssimas condições.

A escola onde foi realizada esta pesquisa atende do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Cada turma é formada em média por 30 alunos. A escola possui 12 salas de aulas, 51 funcionários, sala de diretoria, sala de professores, laboratório de informática, quadra de esportes descoberta, alimentação escolar para os alunos, cozinha, sala de leitura, banheiro dentro do prédio, sala de secretaria, refeitório, despensa, pátio coberto e área verde (dados do Censo/2014).

Segundo dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), em 2013, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) dos anos iniciais da escola foi de 6,2, meta projetada para 2015, como é possível observar na tabela 2:

Tabela 2: Ideb – Resultados e metas

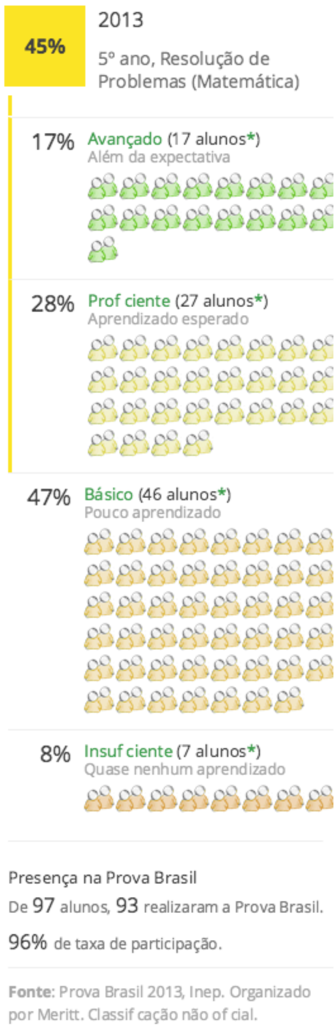
4ª série / 5º ano

Escola	Ideb Observado					Metas Projetadas							
	2005	2007	2009	2011	2013	2007	2009	2011	2013	2015	2017	2019	2021
FRANCISCO JOAO DE AZEVEDO PADRE		5.2	5.6	6.1	6.2		5.4	5.7	6.0	6.2	6.4	6.7	6.9

Fonte: Portal do Inep (http://ideb.inep.gov.br/)

Em 2013, a média de proficiência em Matemática na Prova Brasil dos alunos do 5º ano foi de 227,14.

Figura 13: Infográfico. Proficiência 2013 – 5º ano – Resolução de problemas



Fonte: Portal QEdu (http://www.qedu.org.br/). Acesso em: 2 jul. 2016.

A média está um pouco acima das médias nacional, estadual e municipal (215,24, 220,14 e 215,77 respectivamente). Esse índice corresponde ao nível proficiente da escala de desempenho do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb/Prova Brasil). Dados compilados pelo Portal QEdu apontam que 44 dos 93 alunos que fizeram a prova aprenderam o adequado na competência de resolução de problemas até o 5º ano. Esses dados revelam que os alunos dessa escola estão muito próximos das médias nacional, estadual e municipal (Figura 13).

A coleta de dados para a presente pesquisa foi realizada em junho de 2015, em parceria com as três professoras das turmas de 2º ano da escola. Elas não são concursadas, são contratadas como temporárias (Professores OFA – Ocupantes de Função Atividade). A Secretaria de Educação do Estado contrata professores temporários como uma alternativa à realização de concurso público. Esses professores gozam da maioria dos direitos dos efetivos, com exceção da estabilidade, licença-prêmio e da incorporação de gratificações ao salário. Duas professoras estão na escola há 28 anos e uma há um ano.

As três turmas eram compostas por 91 crianças, cujas idades oscilavam entre 7 anos e 8 anos e 3 meses. Porém, durante a realização da pesquisa, talvez por ser final de semestre, os alunos faltaram muito. Como o número total de crianças que participou de cada atividade foi diferente, a maioria das análises foi realizada em termos percentuais relativos e não em números absolutos, evitando que os resultados fossem distorcidos.

A escola em que a pesquisa foi realizada é semelhante a diversas escolas estaduais do município de São Paulo. Por isso, acreditamos que os resultados encontrados ajudarão a compreender o sistema de ensino em que está inserida.

Para analisar o que as crianças sabem sobre as estruturas aditivas, realizamos uma atividade diagnóstica que será descrita no próximo capítulo.

CAPÍTULO 5. ANÁLISE DOS DADOS

Como citado anteriormente, nosso planejamento previa dez atividades da sequência didática, além de uma diagnóstica. No entanto, no desenrolar das aulas, julgamos necessário acrescentar outras duas atividades, totalizando 13, que serão descritas a seguir.

A sequência foi desenvolvida em cinco dias, ao longo das três últimas semanas de junho de 2015. As atividades foram conduzidas pelas professoras e observadas pela pesquisadora As aulas foram gravadas em vídeo para garantir fidedignidade nas transcrições. A gravação não interferiu no andamento das atividades.

Tabela 3: Cronograma das atividades realizadas na escola

Datas	9/6/2015	15/6/2015	19/6/2015	22/6/2015	26/6/2015
Atividades desenvolvidas	Reunião pedagógica	Reunião pedagógica			
	Diagnóstico	Atividades 1, 2 e 3	Atividades 4, 5 e 6	Atividades extras 1 e 2	Atividades 7, 8, 9 e 10

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

5.1. A primeira reunião com as professoras

Para o presente estudo, realizamos duas reuniões com as três professoras que participaram ativamente da pesquisa. A primeira foi destinada a compartilhar o planejamento da sequência didática, enviado previamente (anexo 2), discutir e analisar cada atividade e esclarecer as dúvidas. As professoras acolheram as propostas com entusiasmo e se dispuseram a desenvolvê-las em suas salas. Disseram que haviam compreendido as atividades e não tinham dúvidas. Mesmo assim, relemos todo o planejamento e discutimos mais detalhadamente os encaminhamentos previstos para as duas primeiras situações. O intuito era que elas se apropriassem das atividades propostas, compreendendo seus fundamentos, para poder encaminhá-las com as crianças.

Durante a reunião, perguntamos sobre a familiaridade das crianças com as calculadoras e as professoras disseram que a escola possuía algumas, mas que não costumavam utilizá-las em sala de aula, pois não sabiam como e o que propor. Combinamos que conduziriam uma atividade de apresentação e exploração da calculadora antes que voltássemos para observar as primeiras atividades da sequência didática.

5.2. Diagnóstico: resolução de problema com enunciado envolvendo 38+25

No mesmo dia, observamos a atividade voltada para o diagnóstico dos saberes das crianças acerca das estruturas aditivas. Essa atividade faz parte da análise preliminar da engenharia.

A tarefa apresentava um problema de enunciado que propunha uma adição de 38 + 25 em um contexto que consideramos familiar para as crianças:

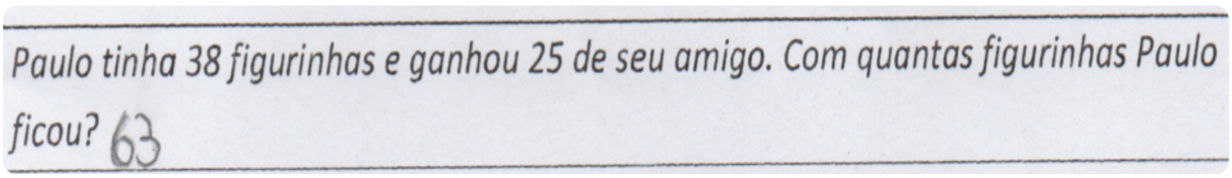
Paulo tinha 38 figurinhas e ganhou 25 de seu amigo. Com quantas figurinhas Paulo ficou?

Entregamos para cada criança uma folha com o enunciado do problema impresso e o cabeçalho (espaço para colocar o próprio nome, o nome da professora e a data). O espaço restante era destinado aos registros necessários para a resolução do problema. Todas as crianças aceitaram prontamente resolvê-lo, o que parece indicar familiaridade com esse tipo de tarefa.

Ao analisar as estratégias utilizadas pelas crianças optamos por agrupá-las, em um primeiro momento, em três categorias:

Categoria 1: Nessa categoria, agrupamos as produções em que as crianças anotaram apenas o número para indicar o resultado do problema. Esse tipo de registro não fornece pistas da estratégia empregada pela criança para calcular, como é possível ver na produção de João[14]:

Figura 14: Resolução de problema com enunciado (João, 7.11)

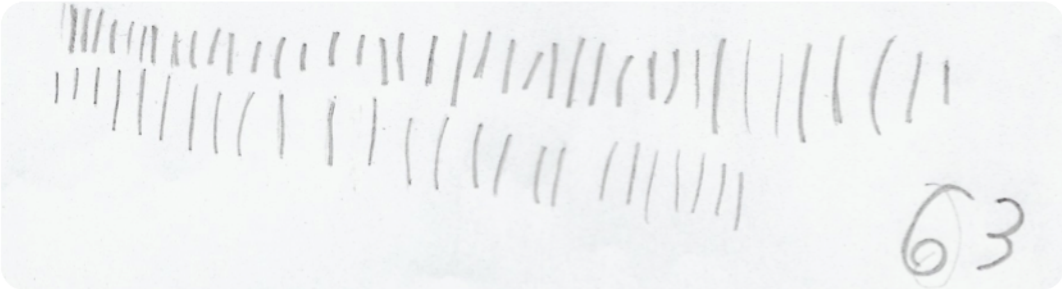

Paulo tinha 38 figurinhas e ganhou 25 de seu amigo. Com quantas figurinhas Paulo ficou? 63

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Categoria 2: Nessa categoria estão as produções em que as crianças fizeram marcas gráficas correspondentes às quantidades envolvidas no problema proposto: 38 e 25, como é possível observar na representação de Sara (Figura 15). Nesse tipo de registro, a criança contava sobre as marcas para chegar ao resultado do problema:

[14] O nome das crianças foi alterado para manter o sigilo da pesquisa e preservar a identidade dos envolvidos. Sempre estará acompanhado da idade.

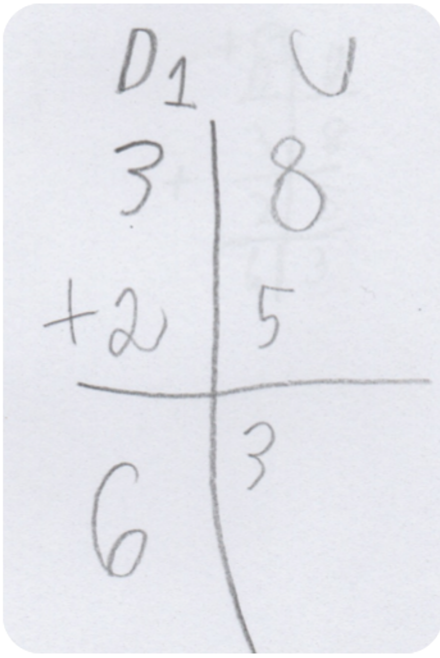
Figura 15: Resolução de problema com enunciado (Sara, 8.0)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Por fim, na **categoria 3**, reunimos as produções em que as crianças registraram a técnica operatória convencional da adição, como podemos ver na tarefa de Paulo:

Figura 16: Resolução de problema com enunciado (Paulo, 8.1)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

A atividade diagnóstica não fazia parte da pesquisa dirigida por Lerner (2013), mas em um estudo realizado anteriormente[15], dirigido pela mesma pesquisadora, foi proposta uma atividade semelhante, em entrevistas individuais. Os resultados encontrados pela equipe argentina indicam que a maioria das crianças resolveu o problema com enunciado por meio da decomposição aditiva da segunda parcela (somaram duas vezes dez à primeira parcela e depois as cinco unidades). Em nosso caso, diferentemente, 64% das crianças, do total do grupo estudado, registraram a técnica convencional da adição, como é possível

[15] Esse estudo foi publicado em Alvarado e Brizuela (2005).

notar na tabela 4:

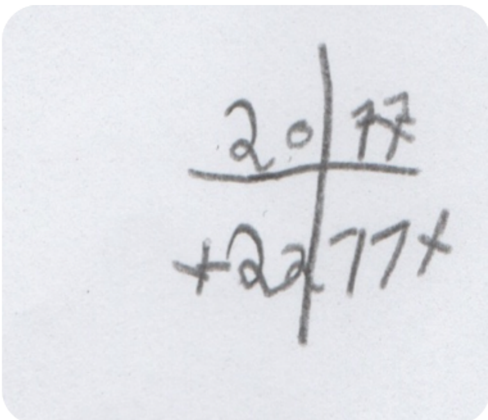
Tabela 4: Estratégias de resolução de problema com enunciado envolvendo 38 + 25: Quantidade e tipos de respostas total das três turmas analisadas

Estratégia utilizada pelas crianças (n = 83)	**Total de crianças das três turmas**
Sem classificação.	1
Anota apenas o resultado.	10
Faz marcas para contar.	19
Registra a técnica operatória convencional da adição.	53

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

Não incluímos nessas categorias a produção de Alice, que fez um traço vertical cruzado por um horizontal em sua folha e depois anotou números de dois algarismos em cada quadrante, aparentemente escolhidos de forma aleatória. Ao final da atividade, perguntamos a ela como resolveu o problema. A menina abaixou a cabeça e disse baixinho: “Não sei”. Dessa forma, não foi possível agrupar o registro de Alice nas categorias relacionadas, pois tanto o registro como a explicação dada por ela não nos permitiu estabelecer uma relação direta com os dados do problema (Figura 17):

Figura 17: Resolução de problema com enunciado (Alice, 7.3)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Ao compararmos a produção de Alice com a de outras crianças, é possível inferir que a menina procurou reproduzir um procedimento que lhe foi ensinado para “organizar a conta”, separando dezena e unidade, sem, no entanto, compreender as ideias que subjazem a essa técnica.

Esse problema de ensino foi apontado tanto pelas pesquisas citadas no levantamento bibliográfico como na análise preliminar das práticas de ensino do sistema de numeração.

Para Wolman (2010), as crianças não compreendem os fundamentos dos métodos clássicos para obter o resultado das operações ensinado na escola. Aparentemente, para essa criança o problema proposto não faz nenhum sentido. Para Vergnaud (1991), as tarefas dão sentido aos conceitos. Mas o sentido não está nas situações[16], nas palavras e nos símbolos. Está nos esquemas solicitados pelo sujeito frente a uma determinada situação:

> O sentido da adição para um sujeito individual é o conjunto de esquemas que ele pode acionar para tratar as situações que o sujeito venha a confrontar, e que envolve a ideia de adição; bem como o conjunto de esquemas que pode colocar em jogo para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos que representem a adição. Uma situação dada ou um simbolismo particular não evocam em um individuo todos os esquemas disponíveis. O sentido de uma situação particular de adição não é, portanto, o sentido da adição; nem sequer o sentido de um símbolo particular. (VERGNAUD, 1990, p. 147)

Outro aspecto analisado nas produções dos alunos foi a quantidade de acertos e erros. Constatamos que nem sempre os procedimentos utilizados pelas crianças conduziram ao resultado correto: 38,5% das crianças não chegaram ao resultado correto, como mostra a tabela 5:

Tabela 5: Estratégias de resolução de problema: erros e acertos

Estratégia utilizada pelas crianças (n = 83)	**Total das três turmas**	
	Resultado correto	Resultado errado
Sem classificação.		1
Anota apenas o resultado.	6	4
Faz marcas para contar.	7	12
Registra a técnica convencional da adição.	38	15
Total	51	32

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

As crianças que utilizam a contagem e erram se perdem ao anotar os tracinhos correspondentes às quantidades envolvidas no problema ou ao contar o total de tracinhos. Esse foi um obstáculo previsto por nós no planejamento do problema. Escolhemos números relativamente altos justamente para tornar o procedimento de contagem pouco eficiente e fomentar a busca de estratégias de cálculo mais econômicas.

Outro aspecto que vale destacar é que, das 15 crianças que erram ao utilizar a técnica

[16] Segundo o autor, “o conceito de situação não tem aqui o sentido de situação didática, mas, sim, o de ideia de tarefa” (VERGNAUD, 1991, p. 140).

operatória convencional, quatro chegaram ao total 53. Esse resultado parece indicar que essas crianças adicionam unidades e dezenas separadamente, e não consideram a dezena formada ao somar as unidades quando somam as dezenas.

Para Terigi e Wolman (2007), a organização da numeração escrita e das operações são estritamente vinculadas. Por um lado, compreender o registro numérico requer desentranhar as operações subjacentes a ela. Por outro, a resolução de operações é um terreno fértil para aprofundar a compreensão do sistema de numeração. Para as autoras, quando se ensina a técnica convencional da adição em colunas, os alunos não necessitam colocar em ação seus conhecimentos sobre o sistema de numeração posicional, calculam a soma das unidades e das dezenas separadamente, sem pensar no que esses algarismos representam. Por esse motivo, defendem que as crianças resolvam problemas antes de ter ensinado algum método de resolução. "Do ponto de vista do ensino, não introduzir no início da escolaridade os algoritmos canônicos facilita que as crianças elaborem outros procedimentos para resolver e representar operações, relacionados com suas concepções sobre a numeração e as propriedades das operações, mesmo que estas funcionem de maneira implícita", afirmam as autoras. (TERIGI e WOLMAN, 2007, p. 74)

Adamuz-Povedano e Bracho-López (2014) também atribuem certos erros cometidos pelas crianças ao ensino precoce da técnica convencional. Apontam que na escola as crianças aprendem instruções para fazer cálculos, não se trabalha com os números, mas, sim, com os algarismos, porque a dinâmica da técnica operatória convencional obriga olhar separadamente todos os algarismos que o número contém e dar a todos o mesmo tratamento, independentemente se são unidades, dezenas ou centenas.

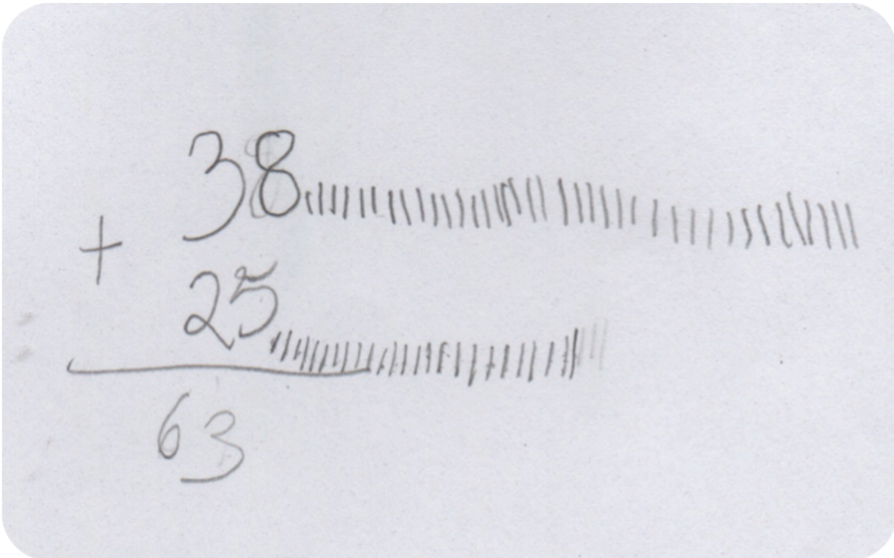
Embora a maioria das crianças tenha registrado a técnica operatória convencional, nem todas a utilizaram para resolver o problema. Pudemos observar que muitas contavam nos dedos para calcular, mas na hora de registrar colocavam a técnica, contrariando as orientações das professoras que diziam explicitamente para as crianças anotarem a estratégia utilizada. O pedido de anotar os procedimentos tinha como finalidade que as crianças utilizassem representações gráficas próprias para explicitar seu modo de pensar, para si mesmo e para a professora.

A seguir, optamos em aprofundar a análise das produções dos alunos em que aparecem a técnica operatória convencional, pois nos pareceu um caminho importante para compreender melhor as concepções das crianças e a relação com o ensino usual.

5.2.1. Uso da técnica operatória convencional e os procedimentos de contagem

Durante a atividade, chamou nossa atenção que, mesmo registrando a técnica operatória convencional, muitas crianças contavam nos dedos para resolver a operação proposta. Do total do grupo que utilizou esse procedimento, 24,5% registraram também marcas gráficas, tal como Bianca (Figura 18), que registrou um número sob o outro e anotou ao lado de cada um a quantidade correspondente de tracinhos. Depois contou o total de tracinhos para chegar ao resultado:

Figura 18: Resolução de problema com enunciado (Bianca, 8.2)



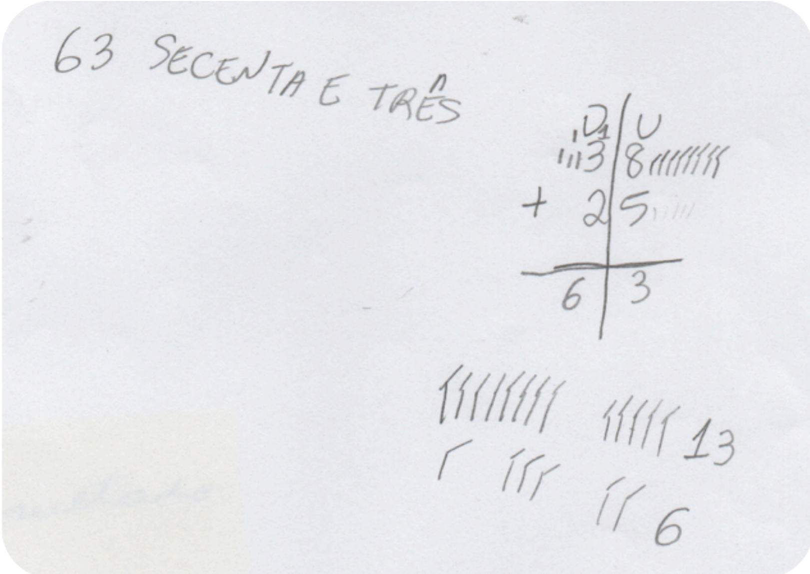
Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Por que a menina registra um recurso que não utiliza? Podemos inferir que anota a técnica operatória convencional porque acredita que é o que esperam dela. No entanto, para calcular, precisa materializar as quantidades envolvidas no problema para poder contar (nos tracinhos ou nos dedos). Essa hipótese se confirma ao observar produções de outras crianças que fazem marcas e as apagam após contá-las. Tal fato está relacionado ao contrato didático implícito às práticas escolares:

> Para resolver uma tarefa, os estudantes não somente buscam interpretar o que é pedido por escrito ou oralmente. Eles também levam em conta o modo de ensinar do educador, que por sua vez espera certos comportamentos da turma. Essa tensão de expectativas, impalpável, invisível e não verbalizada, é o chamado contrato didático, um vínculo entre quem leciona e os que estudam, para o planejamento e a execução de situações de ensino e de aprendizagem. (BROUSSEAU, 2013, p. 5)

Laura também registra a técnica convencional e recorre à contagem. Traça uma tabela no papel e coloca sobre cada algarismo uma letra para representar sua ordem. Depois, anota abaixo tracinhos correspondentes aos algarismos das unidades e das dezenas e conta sobre eles para chegar ao resultado.

Figura 19: Resolução de problema com enunciado (Laura, 8.3)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Ao analisar essa produção é possível identificar o ensino da adição centrado na técnica operatória convencional, por meio da famosa "casinha", na qual se marcam as unidades e as dezenas, que aparece na produção dessa criança. Segundo Vergnaud (1991),

> O algoritmo da adição de números inteiros frequentemente é apresentado como um conjunto de regras:
> - começar pela coluna das unidades, a situada mais à direita;
> - continuar pela coluna das dezenas, depois pelas centenas, etc.
> - calcular a soma dos números em cada coluna. Se a soma dos números em uma coluna é inferior a dez, escrever esta soma sobre a linha total (linha de baixo). Se é igual ou superior a dez, escrever apenas o algarismo das unidades desta soma e reter o algarismo das dezenas, que se leva para cima da coluna situada imediatamente à esquerda, para somá-la aos outros números desta última coluna,
> - e se continua da mesma maneira progredindo da direita à esquerda, até que se esgotem as colunas.
>
> Explicitar estas regras é difícil e quase impossível para as crianças, ainda que sejam capazes de realizar a série de operações. Sempre há muito de implícito nos esquemas.
>
> É necessário observar além do mais que, sem a numeração posicional e a conceitualização que associada a ela (decomposição polinômica dos números), o esquema-algoritmo não pode funcionar: se vê bem nos alunos que fracassam, que não sabem compor entre si as informações

> dadas em termos de dezenas, centenas, milhares. Um esquema repousa sempre sobre uma conceitualização implícita. (VERGNAUD, 1990, p. 135)

Cabe observar que, se por um lado a técnica operatória convencional da adição é um recurso eficiente de cálculo, essas crianças ainda estão no campo da contagem, não têm recursos para compreender a razão dos passos que seguem para realizar a operação e os reproduzem, muitas vezes, de maneira mecânica, como uma simples sequência de ações que precisam exercer sobre os números, ou seja, parece que, para elas, separar dezenas e unidades por traços e somar os números separadamente são regras aleatórias. Compreender a técnica operatória convencional não é uma tarefa fácil nem rápida; requer um domínio da lógica do sistema de numeração e dos significados e propriedades da operação em jogo.

A análise das atividades a seguir poderá contribuir para compreender essa questão.

5.3. A segunda reunião com as professoras

Uma semana após a realização da primeira atividade, voltamos à unidade escolar. Nessa ocasião, realizamos a segunda reunião com as professoras e observamos o desenvolvimento das primeiras atividades da sequência didática.

No início da reunião, compartilhamos a análise realizada das resoluções das crianças para o problema proposto na aula anterior. As professoras estavam curiosas para olhar para o desempenho da sua turma. Procuramos explicitar os critérios adotados e conversamos sobre cada agrupamento. As professoras relataram que perguntaram para algumas crianças que haviam anotado apenas o resultado como haviam resolvido o problema. Boa parte afirmou ter contado. Explicamos que agrupamos as produções de acordo com o registro e não pelo procedimento utilizado, pois não tivemos acesso à forma como cada criança pensou. Essa distinção tinha como fim aprimorar nosso olhar sobre os procedimentos que as crianças de fato utilizam para resolver as operações. As professoras disseram que nem sempre prestam atenção a como o aluno resolve, centram-se apenas no que registram no papel.

A conversa caminhou para as estratégias que muitas vezes ensinam para as crianças, como agrupar a contagem de cinco em cinco. A expectativa das professoras era que nós disséssemos se elas estavam ensinando “certo” ou não, se estavam no caminho.

Analisando as produções de seus alunos, as professoras afirmaram que, provavelmente, alguns tinham copiado a resposta do colega, pois o procedimento registrado não correspondia com observações realizadas por elas anteriormente. Mostraram-se surpresas também ao notar que as crianças registraram as respostas, o que não tinha sido orientado por elas.

Na semana anterior, ao planejar as atividades com as professoras, combinamos que, entre uma visita e outra, organizariam uma aula para apresentar a calculadora para as crianças. Durante a reunião, as professoras relataram o desenvolvimento da aula, centrada na exploração das teclas e no passo a passo da operação de adição. A professora da turma B explicou que distribuiu as calculadoras, uma para cada aluno, e orientou o uso das teclas: *"Fui dizendo: aperta o oito, aperta o sinal de mais, adição, aperta o 7, o igual... Amaram!*". A professora da turma C comentou que, depois de acompanhar como cada criança utilizava a calculadora, organizou a turma em duplas para que uma criança propusesse cálculos para a outra. A professora da turma A contou que os alunos diziam que a calculadora não estava funcionando porque, no visor, aparecia apenas o resultado e "*eles queriam que aparecesse igual à conta no papel. Eles se divertiram muito com a calculadora. Foi uma aula exploratória. Foi maravilhosa*!" Segundo o depoimento das três professoras, as crianças ficaram muito entusiasmadas ao manusear a ferramenta. A professora da turma A comentou: *"Perguntamos às professoras ao que atribuíam o entusiasmo dos alunos. A professora da turma B respondeu à questão da seguinte forma:* '*Em primeiro lugar porque é novo e em segundo porque é uma forma mais rápida de chegar ao resultado. Mesmo aquele que não sabe calcular, nem com palitinhos, na calculadora consegue chegar ao resultado. Aí ele pensa que já sabe'".* As professoras declararam também que o uso da calculadora possibilitou que as crianças resolvessem adições com números altos, de dois, três e até quatro algarismos, que não realizam por meio de procedimentos pessoais, isto é, agissem além das suas reais possibilidades. Os depoimentos indicam que a experiência de êxito ao utilizar a calculadora interferiu positivamente no desempenho das crianças, que ganharam maior confiança em suas possibilidades.

Embora a calculadora seja uma ferramenta que faz parte do dia a dia de algumas crianças, ainda há muita controvérsia com relação ao seu uso na escola. A pesquisadora portuguesa Teresa Assude (2006) conduziu um estudo de caso em que analisou a situação das calculadoras no ensino primário da França e da Inglaterra. Segundo a autora, apesar da concepção positiva sobre as calculadoras nos programas oficiais do ensino primário desses países – assim como no do Brasil –, essa ferramenta não é utilizada na maior parte das escolas francesas e inglesas. A autora afirma que os professores resistem a tais mudanças por diversos motivos, mas principalmente por considerarem que a calculadora impede a aprendizagem do cálculo. Para Assude, as resistências a essa ferramenta são fortes e indicam que é necessário um esforço na formação dos professores, na produção de recursos que mostrem as potencialidades desse instrumento nas aprendizagens matemáticas, nos rituais escolares e sociais relativas ao cálculo e nas avaliações escolares oficiais enquanto meio de regulação do sistema.

Assude defende que "a calculadora é uma técnica que nos ajuda na execução de certos cálculos, que nos liberta de algumas tarefas repetitivas e pode deixar-nos o espaço livre para outro tipo de tarefas, digamos mais criativas" (ASSUDE, 1990, p. 2). Na presente pesquisa, o emprego da calculadora se justifica como um instrumento que libera os alunos do desafio de resolver o cálculo por meio de estratégias próprias e possam se concentrar na relação entre os números envolvidos e resultados obtidos.

Os problemas propostos envolvem a antecipação de resultados e a calculadora é o meio de verificá-los e controlá-los. Para Lerner:

> As situações que permitem as crianças decidirem por si mesmas se o que estão fazendo está certo ou errado favorecem a devolução do problema. Entretanto, se toda a atividade das crianças depende sempre que seja o professor que avalie o que está certo ou errado no que se fez, se perde a possibilidade de que os alunos assumam sua responsabilidade pela resolução do problema. Em alguns casos a própria situação permite que as crianças vão verificando a correção ou não do que estão fazendo. (LERNER, 2011, p. 23)

Portanto, os problemas propostos na sequência didática são autoverificáveis, pois, dependendo do resultado que aparece no visor da calculadora, é possível saber se a operação realizada está correta ou não.

5.4. Trabalho coletivo – resolução de cálculos com a calculadora

Nessa atividade, o objetivo era que as crianças pudessem constatar que, quando se soma vinte e alguma coisa e trinta e alguma coisa, em alguns casos os resultados começam com 50 e, em outros, com 60. Para tanto, no início da aula, a professora distribuiu uma calculadora para cada criança e solicitou que resolvessem uma série de adições, cujas primeiras parcelas eram números compreendidos entre 30 e 39, e as segundas, números compreendidos entre 20 e 29. Ditou pausadamente cada número. As crianças iam resolvendo os cálculos e anunciando os resultados para a professora, que os anotava na lousa.

Como combinado, ao final da atividade, a professora chamou a atenção da turma para a regularidade dos resultados obtidos, ou seja, que alguns começavam com 50 e outros com 60. Os cálculos estavam anotados em três colunas, da mesma maneira como apresentado no planejamento:

32 + 23 = 55	36 + 24 = 60	38 + 28 =66
30 + 24 = 54	35 + 26 = 61	35 + 21 = 56
38 + 24 = 62	31 + 26 = 57	34 + 27 = 61

A professora apontou para a primeira coluna e pediu que as crianças lessem os resultados. Em seguida, perguntou: "*Esse primeiro grupo aqui, essas continhas começam com quanto?"* As crianças responderam em coro: *"55"*, referindo-se ao resultado do primeiro cálculo. A professora retomou: *"Cinquenta e alguma coisa..."*. Depois, apontou para a segunda coluna de cálculos e perguntou: "*E esses?"* As crianças responderam em coro: *"Sessenta e alguma coisa..."* A professora confirmou – *"Sessenta e alguma coisa"* – e apontou para a terceira coluna: *"E o terceiro grupo?"* As crianças responderam prontamente: *"Sessenta e alguma coisa"*.

Em nosso planejamento, não antecipamos que organização dos cálculos em colunas, conforme seus resultados, interferiria no andamento da atividade. Parece que a professora esperava que fosse assim e, então, pediu que as crianças observassem a regularidade dos resultados por coluna, ou grupos. Para ajustar a disposição dos cálculos e a pergunta da professora, as crianças olhavam apenas o resultado do primeiro cálculo. Mais uma vez podemos ver uma manifestação das regras implícitas do contrato didático – a pergunta do professor exige uma resposta, mesmo que não faça muito sentido. A questão é que se o professor não estiver atento para esse fato ele ensinará para as crianças que a Matemática é a disciplina das perguntas e respostas sem sentido, das regras não compreendidas.

De qualquer forma, notamos que, ao observar os cálculos anotados na lousa, as crianças puderam constatar que havia duas possibilidades de resultados, e não apenas uma. Ao final da atividade, a professora perguntou para as crianças: "*Tem algum cálculo que passa de 60? Setenta e alguma coisa... oitenta e alguma coisa...*" As crianças responderam em coro: *"Não!"* A professora continuou: "*Só temos...*" e as crianças completaram, "*50 e 60!*"

5.4.1. Alice e a atividade

Durante a atividade, observamos que uma das crianças, Alice, não digitava os números ditados pela professora. Perguntamos por que não os escrevia e a menina justificou: "*É que não sei escrever 32*". Enquanto isso, a professora a ditava: "... *mais 23*". A classe respondeu em coro: *"55*!" Alice parecia perdida frente às teclas da calculadora. Por fim, digitou 3 na sua calculadora. Ao observar as ações da menina foi possível notar que ela não sabia usar a calculadora e, portanto, não conseguiria acompanhar a atividade proposta. Assim, julgamos pertinente ajudá-la no passo a passo do uso desse instrumento. Durante toda a aula, Alice tentou acompanhar as solicitações da professora, empenhando-se em compreender o funcionamento da calculadora.

Vale lembrar que na atividade de diagnóstico, Alice registrou números aparentemente aleatórios, sem conexão aparente com os dados do problema, mas, ao que tudo indica, procurando reproduzir a técnica operatória. Essa conduta da menina parece ser frequente. Diante de um novo problema, quando não consegue estabelecer qualquer tipo de relação com o que sabe, produz uma resposta aleatória. Esse tipo de relação com o conhecimento matemático, ainda mais no início da escolaridade, pode comprometer toda a escolaridade da menina.

Dados de avaliações nacionais, pesquisas na área como as de Perrin-Glorian (1994), assim como nossa experiência profissional têm nos mostrado que esse tipo de comportamento não é um caso isolado. As crianças se esforçam em dar uma resposta para o professor, mesmo que isso não faça sentido. O professor segue dando aula para os alunos que respondem, deixando alguns para trás.

Ao final da aula, observamos que a menina utilizava o instrumento com maior autonomia, digitava os números na ordem, utilizava a tecla + para realizar a adição e apagava o resultado de um cálculo antes de passar para o seguinte.

5.5. Antecipar o resultado de alguns cálculos e comprová-los com a calculadora

Essa etapa, de trabalho individual, tinha como objetivo que cada aluno assumisse o controle do problema. As crianças deveriam antecipar como começariam o resultado de uma série de adições do mesmo tipo da atividade anterior. Em seguida, deveriam comprová-los com a calculadora, isto é, teriam de prever o resultado de uma ação ainda não realizada. Tornar-se independente da realização empírica de certa ação (resolver o cálculo) é um dos aspectos pertinentes ao conhecimento matemático. Além disso, como mencionamos, a calculadora devolve, de modo imediato e independentemente do professor, os resultados das antecipações. Promover situações em que as próprias crianças possam avaliar se o que estão fazendo está certo ou errado é crucial para que elas assumam o problema e sejam as responsáveis por sua solução.

Antes de iniciar a atividade, a professora entregou uma folha para cada criança com o enunciado da questão e uma tabela, com cinco cálculos, espaço para anotar a antecipação e os resultados obtidos com a calculadora. Depois, anotou na lousa: CINQUENTA e SESSENTA, para que os alunos pudessem copiar na coluna da antecipação. Pediu para as crianças deixarem a calculadora de lado, desligada, e explicou a atividade para a turma. Ao analisarmos a explicação dada aos alunos, foi possível notar pouca clareza nas instruções, o que nos levou a crer que a professora não tinha se apropriado totalmente da atividade. Começou dizendo: "*Então, nessa atividade aqui, não é para colocar resultado. O resultado dessa primeira parte aqui está escrito... O que está escrito aqui em cima?"*. Uma criança respondeu: *"Sem fazer o cálculo",* outra completou: *"Antecipação"*. A professora então explicou: *"Então, essa antecipação vocês vão escrever. Não é para colocar o número, é para escrever se é com 50 ou 60 que começa essa conta. Não é para colocar número, é para escrever como você acha que começa"*. Acreditamos que a falta de clareza dessa explicação interferiu de maneira determinante no desempenho dos alunos na atividade.

O primeiro desafio enfrentado pelas crianças foi entender o funcionamento da atividade. Além da explicação da professora não ter ajudado, as crianças não estão habituadas a propostas que envolvem um momento de trabalho em que a tarefa não é realizar cálculos, mas, sim, buscar relações que permitam chegar à resposta solicitada. Assim, a atividade provocou uma ruptura no contrato didático vigente. Para Silva (2008), em alguns casos, é preciso haver ruptura e renegociação do contrato didático para que a aprendizagem avance.

Para que pudéssemos acompanhar o progresso da produção das crianças ao longo da pesquisa, agrupamos os resultados conforme as seguintes categorias:

Tabela 6: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (situação 1)

Estratégia utilizada pelas crianças (n = 75)	Total das três turmas	
Antecipações sistematicamente corretas.	29	39%
Antecipações sistematicamente erradas, quando a soma das unidades forma uma nova dezena.	11	15%
Resultado exato, não aparece a antecipação.	3	4%
Antecipações corretas ou equivocadas sem uma regularidade observável.	32	42%

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

As duas primeiras categorias foram utilizadas por Lerner (2013) em sua investigação. Como parte dos resultados encontrados por nós diferiram da pesquisa realizada na Argentina, acrescentamos duas categorias: uma em que as crianças colocam o resultado exato dos cálculos, sem antecipá-los, e outra que engloba as produções que indicam que as crianças não entraram no jogo e registram os resultados de forma aleatória, ou criaram um padrão próprio para anotar. Por exemplo, alternar os resultados.

Acreditamos que as principais razões para a diferença dos resultados se relaciona com a natureza do projeto de ensino das escolas onde foram realizadas as duas pesquisas. Os resultados publicados por Lerner (2013) se referem à pesquisa realizada em uma escola onde o trabalho com o projeto de ensino estudado na investigação já estava consolidado. Nas escolas públicas brasileiras, o agrupamento recursivo da base 10 é ensinado como condição para se avançar no ensino do sistema de numeração e das técnicas convencionais das operações. Ao mesmo tempo, entende-se que em Matemática só se pode registrar o certo, como mostraram os resultados das pesquisas citadas no levantamento bibliográfico.

Durante a aula, observamos que boa parte das crianças resolvia o cálculo, em vez de antecipar seu resultado, utilizando a calculadora, contando nos dedos ou por meio da técnica operatória convencional. Algumas crianças anotaram na coluna “antecipação” o resultado exato de cada cálculo, outras, parecendo compreender melhor o enunciado do problema, anotaram apenas “50” ou “60”. Esse tipo de procedimento também foi encontrado por Lerner (2013), porém com menor incidência. Na pesquisa argentina, a maioria das crianças antecipou os resultados e, ao fazê-lo, se equivocavam sistematicamente quando a quantidade de unidades das parcelas forma uma nova dezena.

Embora na nossa classificação 39% das crianças estejam no primeiro grupo, o êxito sistemático nas antecipações não foi acompanhado por explicações consistentes. Além da observação durante a aula, algumas das justificativas das crianças indicam que realizaram o cálculo exato. Dessa forma, analisando suas produções, não foi possível saber se correspondem, de fato, a esse grupo.

Para entender melhor o raciocínio das crianças que realizavam o cálculo exato, aproximamo-nos de Paulo, que procurava resolver o primeiro cálculo, 32 + 26, apoiando-se na contagem dos dedos. Perguntamos se era possível saber, sem fazer a conta, só olhando, como começaria o resultado, se com 50 ou com 60. O menino respondeu prontamente: "*Com 50"*. Orientamos então que anotasse sua antecipação no espaço reservado, na segunda coluna.

A conversa continuou e Paulo disse que o resultado de 37 + 27 começaria por 50 e o anotou na segunda coluna. Ao conferir na calculadora e verificar que não estava correto, apagou sua anotação. Perguntamos porque havia apagado e ele respondeu: "*Porque está errado"*, e mostrou o resultado 64 na calculadora. Novamente é possível identificar manifestações do contrato didático vigente: para o menino, só é autorizado registrar ou deixar registrado o certo. Esse tipo de conduta, também identificado na pesquisa argentina, evidencia que as crianças ainda estão procurando entender "*as regras do jogo*". Lerner (2013) cita o caso de Lucas, que, assim como Mateus, também antecipa sistematicamente que o resultado começará com 50. Mas, depois de comprovar com a calculadora, corrige suas antecipações. Para Silva, "esse comportamento dos alunos revela que existem regras vigentes, ainda que implícitas, completamente internalizadas por eles" (SILVA, 2008, p. 59).

Dando segmento à atividade, orientamos o menino que não precisava apagar a antecipação, que poderia anotar o resultado encontrado na calculadora na terceira coluna. Paulo passou então a conferir o resultado dos outros cálculos. O diálogo a seguir pode ajudar a refletir um pouco mais sobre a difícil tarefa que representou para as crianças compreender as regras da atividade para que, depois, pudessem de fato enfrentar o problema proposto por nós:

Na coluna reservada para o resultado de 32 + 26, Paulo anotou 8.

Pesquisadora: "*Qual resultado você encontrou?"*

Paulo: "*58"*.

Pesquisadora: *"E o que você anotou aqui?"*

Paulo: *"Oito"*.

Pesquisadora: *"E qual foi o resultado?"*

Paulo: *"58. Mas é pra escrever oito aqui?"*

Pesquisado*"58"*.

Após esse breve diálogo, Paulo apagou o oito e escreveu por extenso: cinquenta e oito. Informamos que poderia usar números. Então, o menino apagou sua anotação e escreveu 58. Em seguida, conferiu o resultado de 38 + 21 e anotou 9. Mais uma vez questionamos:

Pesquisadora: *"Qual foi o resultado?"*

Paulo:*"59"*.

Pesquisadora: *"E o que está escrito aqui?"*

Paulo: *"Nove"*.

Pesquisadora: *"Aqui é para anotar o resultado."*

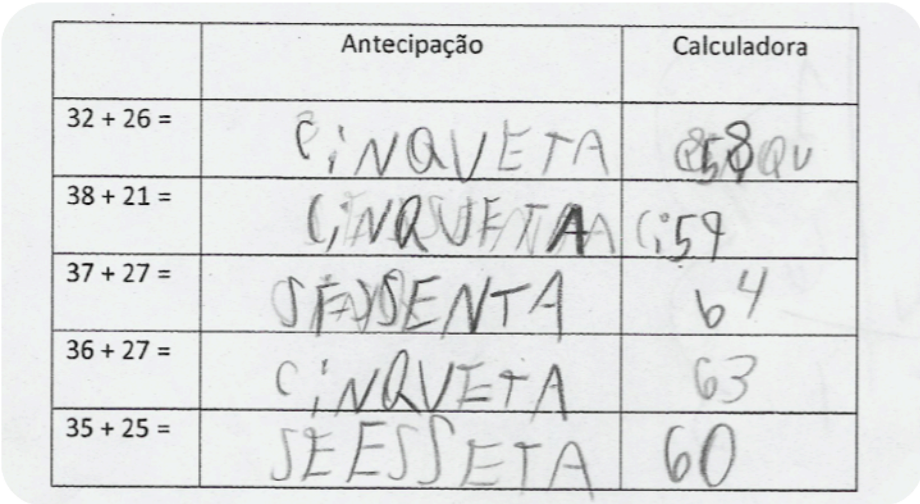
Paulo: *"Ah, entendi"*. E acrescenta o 5 antes do 9 já escrito.

Nota-se que o menino buscava entender as regras de funcionamento da atividade. No entanto, não sabia quando era para escrever por extenso, quando deveria anotar números, quando anotaria só o começo do número ou se deveria anotar apenas o final. Acreditamos que a atividade proposta envolve muitas variáveis novas para as crianças: antecipar resultados, anotar por extenso como começa o resultado, conferir e anotar com números o resultado encontrado na calculadora. Desse modo, entendemos que essa atividade teve a função de familiarização das crianças com um novo tipo de proposta.

Seguimos acompanhando Paulo, que, após entender o funcionamento da atividade, dedicou-se a antecipar o início do resultado de 37 + 27. Paulo afirmou que o resultado começaria com 50 e anotou na segunda coluna. Perguntamos por que achava que começaria com 60, mas o menino não respondeu. Em vez disso, pegou a calculadora e comprovou o resultado. Sorridente, mostrou a calculadora e disse: *"Viu, 64!*" Em seguida, passou para o próximo cálculo (36 + 27) e afirmou que o resultado começaria com 50. Ao conferir na calculadora e encontrar 63, pareceu decepcionado e imediatamente pegou a borracha para apagar o que escreveu. Retomamos a regra combinada inicialmente, que não era necessário apagar a antecipação: a ideia era verificar quando a antecipação era boa e quando não. As insistentes idas e vindas de Paulo indicam que a mudança do contrato didático não está vinculada apenas a um combinado verbal explícito; demanda tempo e requer que os alunos experimentem mais de uma vez um novo funcionamento de aula. "Os alunos, em geral, encontram muita dificuldade em se adaptarem a uma mudança de contrato. É certo que a renovação e a renegociação, bem como a transgressão do mesmo, dependem não só do tipo de trabalho como também do meio onde se dá a prática pedagógica (SILVA, 2008, p. 61).

Posteriormente, quando analisamos a produção de Paulo e observamos as correções que realizou, foi possível inferir que, em um primeiro momento, o menino supôs que ora o resultado começaria com 50, ora com 60, alternadamente.

Figura 20: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Paulo, 8.1)

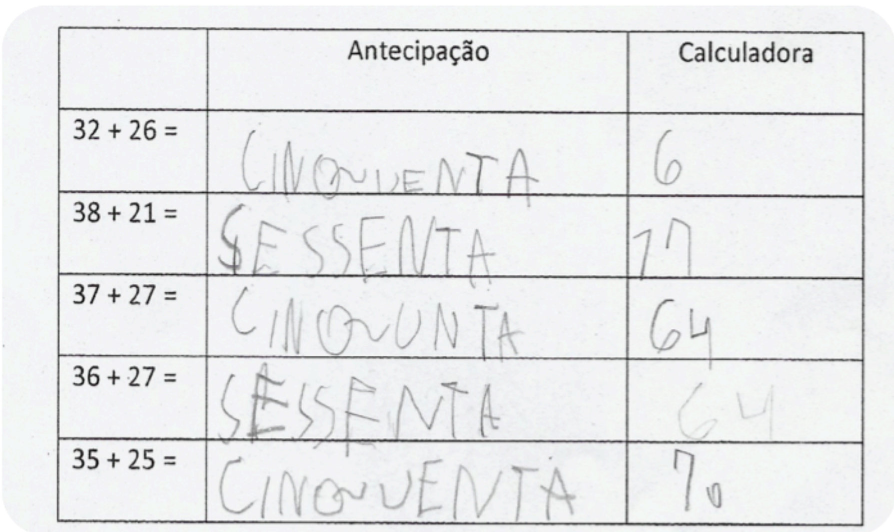


	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =	CiNQVETA	58
38 + 21 =	CiNQVETA	Ci59
37 + 27 =	SESENTA	64
36 + 27 =	CiNQVETA	63
35 + 25 =	SEESSETA	60

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Assim como Paulo, outras crianças parecem ter construído uma semelhante de alternância dos resultados, como é possível observar nas Figuras 21 e 22:

Figura 21: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Gustavo, 8.2)



	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =	CINQUENTA	6
38 + 21 =	SESSENTA	17
37 + 27 =	CINQUUNTA	64
36 + 27 =	SESSENTA	64
35 + 25 =	CINQUENTA	70

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Figura 22: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Raquel, 7.11)

	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =	CINQUE NTA = 50	58
38 + 21 =	SESSENTA = 60	59
37 + 27 =	CINQUE NTA = 50	64
36 + 27 =	SESSENTA = 60	63
35 + 25 =	CINQUENTA = 50	60

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Outro grupo de crianças, que já havia compreendido o funcionamento da atividade, afirmou que todos os resultados começariam com 50. Lerner (2013) encontrou esse tipo de resposta em todos os grupos investigados.

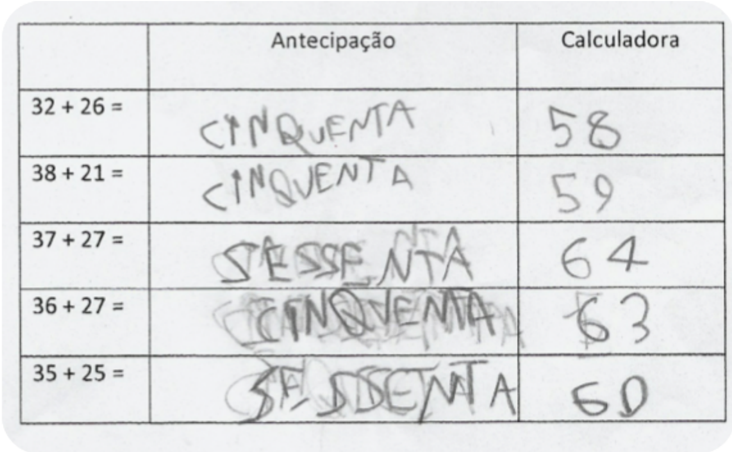
Figura 23: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Manuel, 7.6)

50 CINQUENTA	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =	CINQUENTA	58
38 + 21 =	CINQUEN TA	59
37 + 27 =	CINQUENTA	64
36 + 27 =	CINQUENTA	63
35 + 25 =	CINQUENTA	60

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Para a autora, esse tipo de erro sugere que as crianças estão inicialmente centradas nas dezenas. Consideram que 30 + 20 só pode ser 50, mesmo que na atividade coletiva tenham constatado, ao fazer as contas com a calculadora, que em alguns casos o resultado começava com 60. Nessa ótica, as unidades não têm influência alguma na quantidade das dezenas do resultado (Lerner, 2013). Dentro desse grupo, algumas crianças foram mudando o ponto de vista ao longo da atividade. É o caso de Mateus, conforme Figura 24.

Figura 24: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Mateus, 7.6)



	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =	CINQUENTA	58
38 + 21 =	CINQUENTA	59
37 + 27 =	SESSENTA	64
36 + 27 =	CINQUENTA	63
35 + 25 =	SESSENTA	60

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

O menino anotou "cinquenta" em todas as linhas e, quando perguntamos se achava que todos começariam por 50, balançou a cabeça afirmativamente. Algum tempo depois, observamos que havia apagado alguns resultados. O menino justificou: "*Antes eu pensava que começava tudo com 50. Mas depois eu pensei que era um pouco com 50 e um pouco com 60. Duas com 50 e três com 60".*

5.5.1. Discussão em duplas

A segunda parte da atividade consistia em um trabalho em dupla em que as crianças deveriam conversar e trocar com o colega como fizeram para saber se os resultados de cada cálculo começariam com 50 ou com 60. O intuito era que os alunos refletissem sobre o processo realizado, e assim transformar o conhecimento implícito em saber explícito. A professora agrupou as crianças em duplas de acordo com seus conhecimentos sobre as operações, isto é, maior ou menor eficiência no emprego da técnica operatória convencional.

Ao observar a dupla Paulo e Mateus, dois meninos que, segundo a professora, tinham facilidade em Matemática e domínio das operações, notamos que conferiam seus resultados, mas não explicavam como haviam feito para antecipá-los. Paulo dizia que o resultado de 36 + 27 era 63. Mateus afirmava que era 53: "*Você pôs errado, é 53".* Para comprovar, Paulo pegou a calculadora e refez o cálculo, mostrou para Mateus, que, assim que viu o resultado, aceitou seu erro. Esse é um exemplo do uso da calculadora para conferir e comprovar resultados. Embora Paulo ainda recorresse à contagem nos dedos, esse fato passou desapercebido pela professora, que afirmou que o menino utiliza a técnica operatória convencional com eficiência.

Com o intuito de ajudá-los a chegar à formulação de uma explicação, perguntamos:
Pesquisadora: *"Como vocês fizeram para saber se começaria com 50 ou com 60?"*
Mateus: *"Eu pensei que ia dar 50 e aí coloquei 50. Mas depois, antes de fazer na calculadora, pensei que tinha alguns com 60. Então, fiz esses dois com 60 e esses três com 50".*
Pesquisadora: *"Mas como você fez para decidir quais começavam com 50 e quais começavam com 60? Podia ser qualquer um?"*
Mateus: *"Podia".*

Ao que tudo indica para Mateus, era explícito que havia duas possibilidades de início de resultados, mas ainda não sabia explicar as razões dessa alternância.
Pesquisadora: *"E nesse, 35 + 25, por que você colocou 60?"*
Mateus: *"Eu pensei 3 + 2 = 5. Aí eu fiz assim..."* O menino anotou no papel a técnica operatória convencional da adição e explicou: "*Vai um, 60*".
Pesquisadora: "*E você, Paulo, como pensou para dizer que 36 + 27 começaria com 60?"*
Paulo: "*Eu pensei com os dedos".*
Pesquisadora: "*Com os dedos? Como é que se pensa com os dedos? Me explica*".
Paulo: *"Tem o seis"*, levantou sete dedos das mãos e seguiu contando: "*sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze*".

As explicações dadas pelos meninos centram-se na adição das unidades e dezenas separadamente. No entanto, o emprego dessa técnica, que se mostra exitosa para antecipar o início do resultado almejado, não parece ajudá-los a realizar as antecipações e compreender as razões da alternância dos resultados.

O trio formado por Luiz, Gabriel e Alice recorreu à contagem para resolver as operações. São crianças que, segundo a professora, têm dificuldade em Matemática.

Perguntamos ao grupo como fizeram para saber, antes de usar a calculadora, como começaria o resultado de 32 + 26.
Luiz: *"Eu pensei que era 50 e era mesmo".*
Pesquisadora: *"Mas como você pensou?"*
Luiz: *"Pensei na cabeça".*
Pesquisadora: *"Entendi. Mas o que você fez na cabeça? Tenta me explicar: o que apareceu lá na sua cabeça?*"

Luiz: *"Eu pensei 32 + 26*". O menino conta nos dedos: *"33, 34, 35 (...) 56, 57, 58..."*
Pesquisadora: *"E você, Gabriel. Para 32 + 21, escreveu 50. Para 36 + 27, escreveu 60. Como decidiu quando era 50 e quando era 60?"*
Gabriel: *"Eu guardei na cabeça 36 e contei mais 27"*.
Pesquisadora: *"Sem contar não dava para saber?"*
Gabriel abanou a cabeça negativamente.

Alice não participou da discussão. Quando perguntamos a ela como pensou para resolver os cálculos, disse não saber.

Embora a contagem seja uma ferramenta válida para resolver o problema, mostra-se pouco eficiente quando se trata de quantidades maiores. Para que as crianças abandonem os procedimentos de contagem e passem para os de cálculo é necessário que tenham disponível de memória um conjunto de resultados nos quais possam se apoiar para resolver outros. Kamii (1998) contribui para essa reflexão apontando que as crianças precisam construir uma rede de relações pela própria ação mental e sugere uma sequência de adições baseada nas grandezas das parcelas, que podem contribuir para a construção dessas relações.

O que parece acontecer nas classes observadas é que as professoras ensinam a técnica operatória convencional precocemente, isto é, antes que as crianças possam compreender os agrupamentos e as regras do sistema de numeração nos quais essas técnicas se apoiam.

Estudos como os de Baroody (1987) e de Dickson (1993) sugerem que muitos dos erros que os alunos cometem ao utilizarem os algoritmos têm origem no fato de o estudante não entender a lógica segundo a qual o algoritmo funciona.

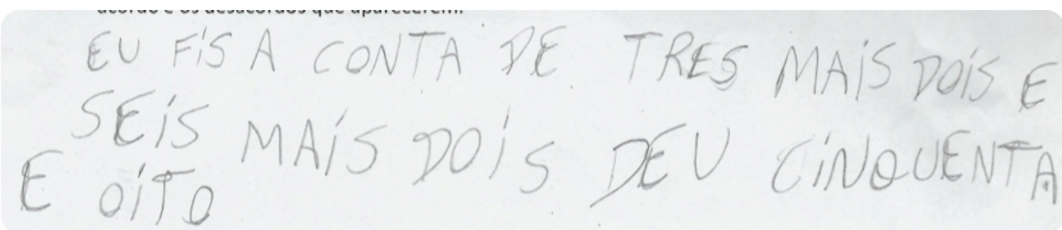
Como citado anteriormente, o ensino baseado na transmissão de regras não contribui para que as crianças relacionem e utilizem os conhecimentos que possuem e compreendam as regras do sistema de numeração decimal. Para Lerner, é preciso evitar a separação entre o conhecimento das crianças e os procedimentos escritos que a escola pretende ensinar-lhes e conclui:

> Parece imprescindível criar um vínculo constante entre a ação e a representação, um vínculo que deve incluir tanto a produção por parte das crianças de maneiras de representar as operações realizadas ou a realizar como também a interpretação das demais, incluída – é claro – a representação convencional. (LERNER, 1995, p. 68)

As justificativas das crianças foram centradas no procedimento de cálculo utilizado. Nenhuma delas produziu uma explicação sobre como fazer a antecipação. Algumas citaram como realizaram um cálculo específico, outras procuraram generalizar o procedimento. Muitas crianças justificaram que fizeram 3 + 2 = 5. Mas essa explicação não está associada sempre a anotar "cinquenta" na coluna da antecipação. Embora a explicação mais frequente seja a soma das dezenas e das unidades, nem todas as crianças que justificaram dessa maneira acertaram as antecipações. Vejamos alguns exemplos.

Rodrigo antecipou que todos os resultados começariam por 50. Mas, depois de verificá-los na calculadora, corrigiu suas antecipações. Na justificativa, explicou a soma do primeiro cálculo: 32 + 26:

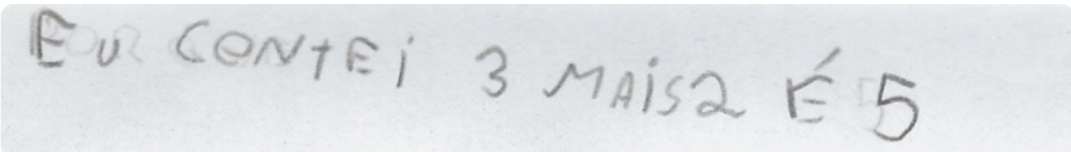
Figura 25: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Rodrigo, 7.3)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Silvia também antecipou que os resultados dos cálculos começariam com 50. Depois de conferir que o resultado de 37 + 27 começa com 60, apagou a antecipação que fez para antecipar corretamente os demais cálculos (todos com 60). Justificou suas antecipações centrando-se na soma das dezenas:

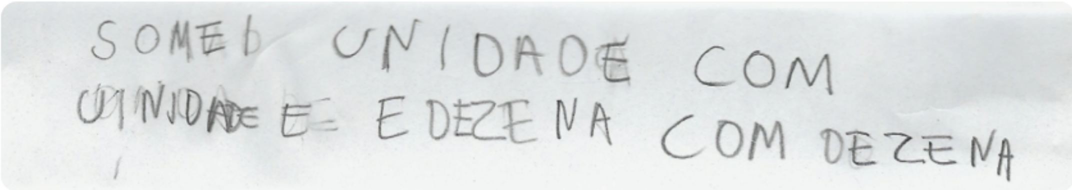
Figura 26: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Silvia, 7,6)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Marina corrigiu apenas uma de suas antecipações (38 + 21) e acertou as demais. Justificou que somou as unidades e dezenas, o que indica que não antecipou, mas realizou o cálculo:

Figura 27: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Marina, 7.4)



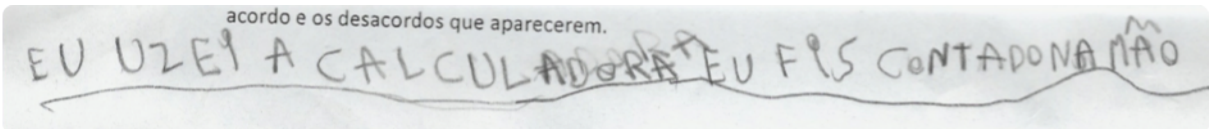
Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Kaique, Juliana e Leonardo (Figuras 28, 29 e 30) acertaram sistematicamente todas as antecipações, mas suas justificativas foram bem diferentes. Kaique afirmou que não sabia explicar e desenhou uma calculadora, o que pode indicar que o menino utilizou o instrumento para fazer os cálculos, em vez de antecipar. As justificativas de Leonardo e Juliana também indicam que realizaram o cálculo exato, por meio da contagem dos dedos ou com a calculadora:

Figura 28: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Kaique, 7.6)

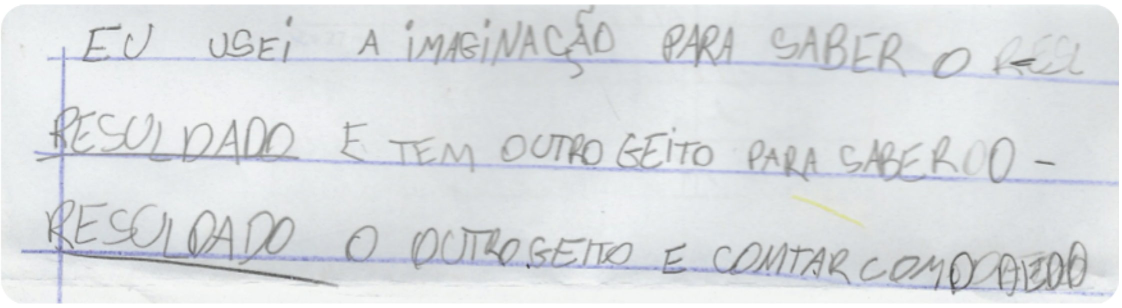
Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Figura 29: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Leonardo, 7.3)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Figura 30: Justificativas para poder antecipar 3_ + 2_ (Juliana, 7.5)



EU USEI A IMAGINAÇÃO PARA SABER O REL
RESULDADO E TEM OUTRO GEITO PARA SABER O -
RESULDADO O OUTRO GEITO E CONTAR COM O DEDO

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Avaliamos que o enunciado da questão não favoreceu a devolução do problema para as crianças. Explicar o próprio pensamento não é tarefa fácil, principalmente quando nunca ninguém perguntou como pensou. Acreditamos que se tivéssemos formulado a questão de outra forma, por exemplo, se perguntássemos "se sempre somamos 30... e 20..., por que o resultado às vezes é cinquenta e alguma coisa e outras vezes é sessenta e alguma coisa?", as crianças teriam outra interação com a atividade.

5.6. Uma nova série de cálculos

No fim da semana voltamos à escola a fim de observar o desenvolvimento das atividades que compunham a segunda situação. Essa etapa tinha como objetivo que as crianças elaborassem uma regra baseadas em novos grupos de cálculos e alcançassem maior grau de generalização. O procedimento era o mesmo da situação anterior. Mas, nessa etapa, apresentamos duas tabelas, uma com números compreendidos entre 40 e 49 na primeira parcela e entre 20 e 29 na segunda parcela, e outra cujas parcelas englobavam números entre 50 e 59 e entre 30 e 39. Novamente, as crianças deveriam antecipar como começaria cada resultado e depois verificá-lo com a calculadora.

Nesse dia, optamos por não retomar as conclusões elaboradas na aula anterior como era previsto, porque julgamos que as crianças precisavam de mais tempo para "entrar" na atividade, para compreender seu funcionamento. A professora, agora mais segura, apresentou a proposta enfatizando que não era para fazer "contas", mas, sim, uma estimativa. Em seguida, perguntou ao grupo com quanto achavam que começaria 43 + 25, com 60 ou com 70. Antes mesmo de a professora terminar a pergunta, algumas crianças responderam: *"Começa com 60"*. Das 60 crianças que foram à escola nesse dia, 28 acertaram todas as antecipações, o que corresponde a 47%. Na proposta anterior, apenas 39% das crianças acertaram todas as antecipações:

Tabela 7: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (situação 2)

Estratégia utilizada pelas crianças (n = 60)	Total das três turmas	
Antecipações sistematicamente corretas.	28	47%
Antecipações sistematicamente erradas, quando a soma das unidades forma uma nova dezena.	4	7%
Resultado exato, não aparece a antecipação.	6	10%
Antecipações corretas ou equivocadas sem uma regularidade observável.	22	36%

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

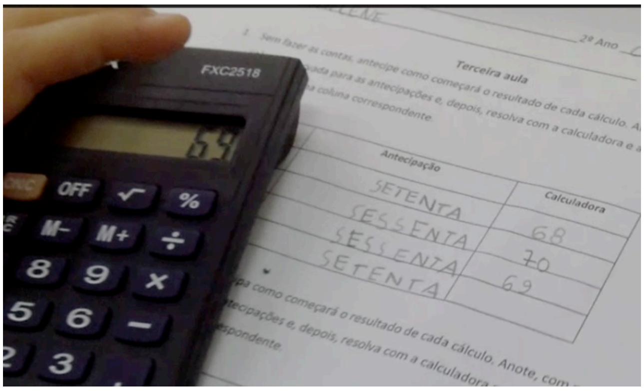
Vale observar que, entre as crianças que consideraram apenas a soma das dezenas para antecipar o resultado, três utilizaram esse procedimento para o primeiro grupo de cálculos e o ajustaram ao antecipar os resultados do segundo grupo.

Durante o desenvolvimento da proposta foi possível observar maior familiaridade das crianças com a atividade, como mostra o diálogo a seguir.

Assim que a professora leu o cálculo 52 + 39, os alunos responderam em coro: *"Começa com 90"*. Willian levantou e disse: *"É 91"*. Mateus o corrigiu dizendo: *"Mas começa com 90! Você fez conta, né, Willian?"*.

Notamos também que muitas crianças que fizeram antecipações equivocadas não as apagaram quando conferiram na calculadora. Foi o caso de Mário (Figura 31):

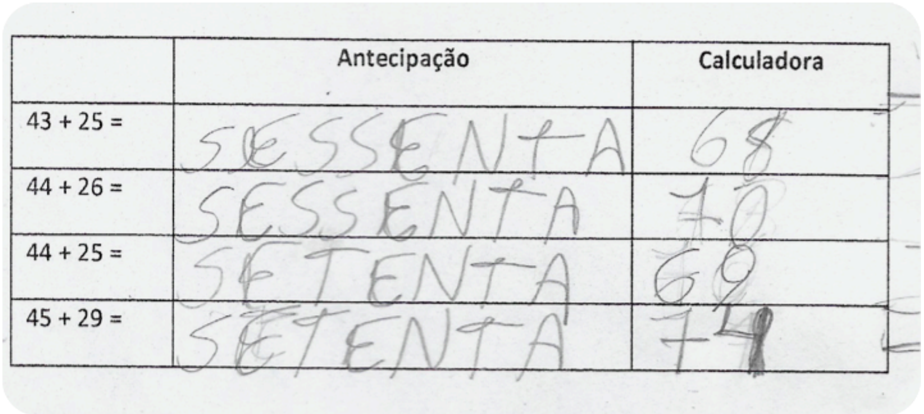
Figura 31: Produção de criança durante a aula (Mário, 7.3)



Fonte: Imagem produzida durante a pesquisa

Acreditamos que, além da experiência anterior com a atividade, o objetivo estava mais claro para a professora, que decidiu entregar a calculadora só depois da realização de todas as antecipações. Por um lado, esse encaminhamento pode ter contribuído para que as crianças compreendessem melhor as regras da atividade. Por outro, podem ter interferido na antecipação dos resultados de alguns cálculos. Por exemplo, para antecipar o resultado de 44 + 25 seria útil saber o resultado de 44 + 26. A produção de Ricardo indica que o menino não estabeleceu qualquer relação entre os resultados desses cálculos:

Figura 32: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Ricardo, 7.3)



	Antecipação	Calculadora
43 + 25 =	SESSENTA	68
44 + 26 =	SESSENTA	70
44 + 25 =	SETENTA	69
45 + 29 =	SETENTA	74

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Ao analisar a produção de Ricardo parece que o menino se deu conta de que os cálculos poderiam começar de duas maneiras diferentes e distribuiu igualmente as possibilidades.

A maior familiaridade com a atividade não foi suficiente para que todos os alunos entrassem no jogo das antecipações. Produções como a de Fernando, por exemplo, indicam que a compreensão da atividade ainda era um desafio. Depois que a calculadora foi entregue, o menino a utilizou para encontrar os resultados dos cálculos do segundo grupo (números compreendidos entre 50 e 59 e entre 30 e 39), preencheu a coluna destinada ao resultado exato e só depois preencheu a coluna reservada para a antecipação, escrevendo "setenta" em todas as linhas. Procedimentos como esse parecem indicar que as crianças se acostumaram a não buscar o sentido das atividades matemáticas.

Assim como na situação anterior, algumas crianças pareceram entender a antecipação como a criação de um padrão aleatório, que não se relaciona com as parcelas envolvidas nos cálculos. Há crianças que colocaram sempre a mesma antecipação. Por exemplo, anotaram sempre "setenta" para os cálculos do primeiro grupo, e outras que alternaram as antecipações sem relacioná-las com os cálculos da primeira coluna. Foi o caso de Jéssica (Figura 33):

Figura 33: Antecipação de resultados e posterior comprovação com a calculadora (Jéssica, 7.10)

1. Sem fazer as contas, antecipe como começará o resultado de cada cálculo. Anote com palavras, na coluna reservada para as antecipações e, depois, resolva com a calculadora e anote o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação SETENTA	Calculadora
43 + 25 =	SESSENTA ✓	68
44 + 26 =	SETENTA ✓	70
44 + 25 =	SESSENTA ✗	69
45 + 29 =	SE TENTA ✓	74

2. Sem fazer as contas, antecipa como começará o resultado de cada cálculo. Anote, com palavras, na coluna reservada para as antecipações e, depois, resolva com a calculadora e anote o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação OITENTA	Calculadora
55 + 33 =	OITENTA ✓	88
52 + 39 =	NOVENTA ✓	91
53 + 37 =	OITENTA ✗	90
51 + 36 =	NOVENTA ✗	81

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Como é possível observar, a menina acertou todas as antecipações do primeiro grupo de cálculos. Mas, ao utilizar o mesmo padrão para o segundo grupo, não obteve êxito.

Outro aspecto observado foi que alguns alunos ainda calcularam o resultado exato, em vez de antecipá-lo, mesmo que com menor frequência que na atividade anterior. Esse foi o caso de Willian, que, enquanto antecipava os resultados de cada cálculo, fazia movimentos com o braço como se estivesse traçando no ar a técnica operatória. Porém, em sua folha, anotou apenas o início de cada cálculo, conforme as regras da atividade. Em seguida, explicou que, para antecipar o resultado de 44 + 26, contou os dedos: "*7, 8, 9, 10. Dez, aí sobe uma dezena e aí soma tudo*".

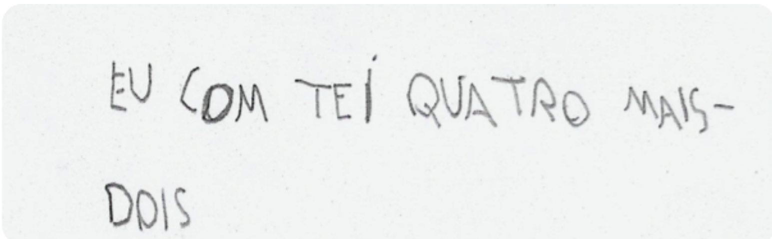
Por outro lado, observamos também uma diminuição em relação às produções agrupadas na categoria das antecipações corretas ou equivocadas sem uma regularidade observável. Na atividade anterior, a quantidade de crianças correspondia a 42% do total das que participaram e nessa a quantidade de crianças corresponde a 36%.

5.6.1. A difícil tarefa de formular uma explicação

Depois de preencher individualmente as tabelas, as crianças foram novamente agrupadas em duplas de acordo com seus conhecimentos matemáticos para que formulassem uma justificativa para o êxito nas antecipações. A experiência tem nos mostrado que produzir explicações sobre o que se fez representa um grande desafio para as crianças. As explicações dadas por elas foram muito similares às da atividade anterior. Vale lembrar que a questão proposta para a discussão em duplas era a mesma e que não favoreceu a reflexão das crianças sobre suas antecipações. Avaliamos que a instrução dada contribui para as respostas que descrevemos a seguir.

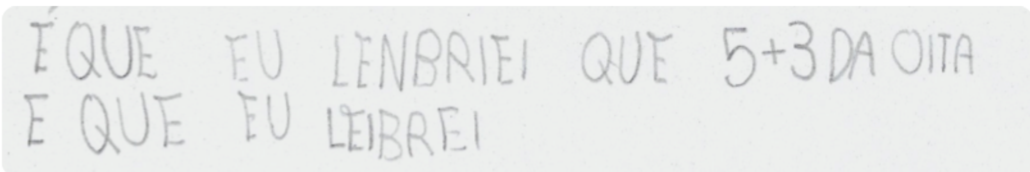
Ao analisar o desenvolvimento da atividade e os registros das crianças foi possível notar que muitas crianças, como o Thiago e o Luiz (Figuras 34 e 35), se apoiam em exemplos para formular suas explicações:

Figura 34: Explicação sobre como realizar antecipações (Thiago, 8.2)



Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Figura 35: Explicação sobre como realizar antecipações (Luiz, 8.2)

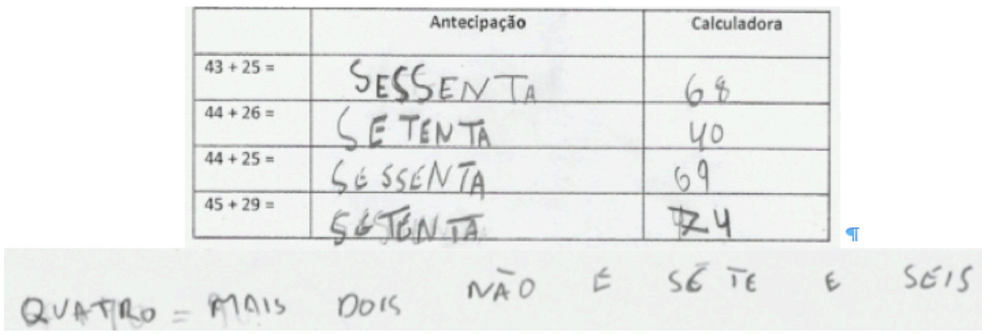


Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Vale lembrar que o enunciado dessa atividade propunha uma generalização (discuta com um colega como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado ia começar com sessenta ou com setenta, com oitenta ou noventa, com cinquenta ou sessenta?) que não foi considerada pelas crianças para produzir suas explicações.

Janaina antecipou corretamente o resultado dos cálculos da grupo 1. No entanto, quando explicou como pensou, parece em dúvida e afirmou: *"É 60 porque 4 + 2 é 6, 4 + 2 não é 7"*.

Figura 36: Explicação sobre como realizar antecipações (Janaina, 7.8)



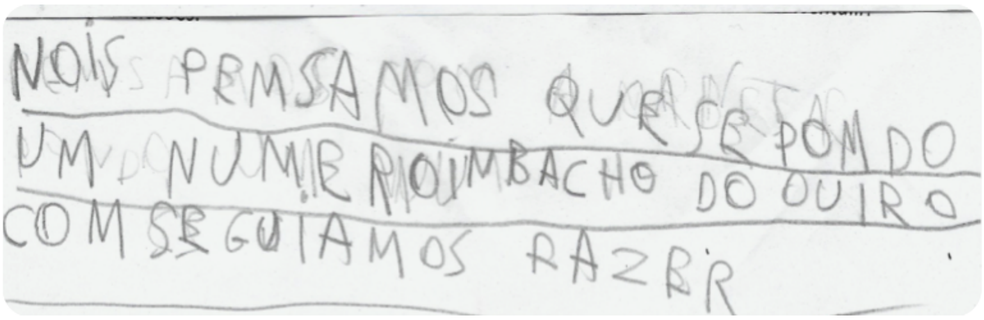
	Antecipação	Calculadora
43 + 25 =	SESSENTA	68
44 + 26 =	SETENTA	70
44 + 25 =	SESSENTA	69
45 + 29 =	SETENTA	74

QUATRO = MAIS DOIS NÃO É SÉTE E SEIS

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Mesmo quando não acertam as antecipações, boa parte das crianças fundamenta a explicação na técnica convencional da adição, como é possível observar nas Figuras 37 e 38:

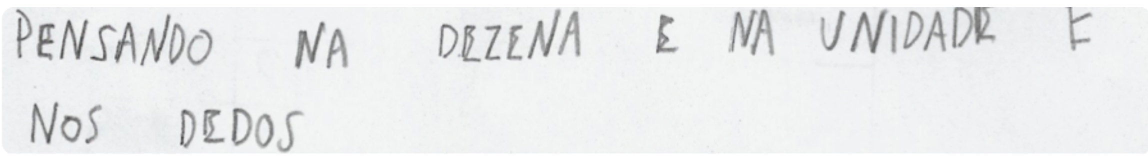
Figura 37: Explicação sobre como realizar antecipações (Kaique, 8.0)



NOIS PEMSAMOS QUE SE POMDO UM NUMERO IMBACHO DO OUTRO COM SEGUIAMOS FAZER

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Figura 38: Explicação sobre como realizar antecipações (André, 7.9)

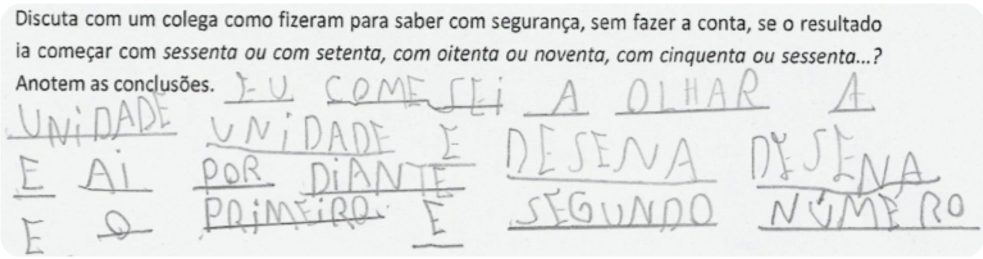


PENSANDO NA DEZENA E NA UNIDADE E NOS DEDOS

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

De maneira geral, não encontramos diferença nas explicações elaboradas pelas crianças que têm êxito sistemático nas antecipações. Apenas algumas formulam explicações um pouco mais abrangente, como esta explicação de Miguel (Figura 39):

Figura 39: Explicação sobre como realizar antecipações (Miguel, 7.10)


Discuta com um colega como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado ia começar com *sessenta ou com setenta, com oitenta ou noventa, com cinquenta ou sessenta...?*
Anotem as conclusões. EU COMESEI A OLHAR A UNiDADE UNiDADE E DESENA DESENA E Ai POR DiANTE E O PRiMEiRO E SEGUNDO NÚMERO

Fonte: Produção de aluno coletada durante a pesquisa

Segundo Sadovsky, "conseguir encadear dedutivamente relações matemáticas para produzir novas relações não é uma aquisição espontânea dos alunos, é produto de um trabalho intencional" (SADOVSKY, 2010, p. 237). Para a autora, o posicionamento de reflexão sobre o trabalho matemático é fundamental na constituição de um sujeito autônomo e intelectualmente responsável. As crianças que participaram dessa pesquisa enfrentavam pela primeira vez o desafio de explicar e justificar um procedimento. Suas explicações são centradas na descrição no procedimento utilizado para calcular. Certamente, para que possam construir argumentos e avançar nesses conhecimentos precisarão de muitas outras oportunidades. Por outro lado, muitas crianças ainda não tinham se apropriado do procedimento de antecipar. Logo, não poderiam argumentar sobre como fazer uma boa antecipação.

Ao final da aula, resolvemos que seria necessário retomar essa proposta. Assim, julgamos pertinente propor uma nova atividade, nos mesmos moldes, para que as crianças pudessem chegar a conceitualizações mais gerais.

5.7. Atividade extra

Com intuito de retomar entre todos as regras da atividade, a professora iniciou a aula recuperando o que foi feito nas anteriores. Anotou na lousa 10 + 13 e pediu que os alunos dissessem rapidamente se o resultado seria vinte e alguma coisa ou trinta e alguma coisa. Optou por números mais baixos justificando que estavam muito altos para as crianças, acostumadas a resolver operações cujo resultado fosse igual ou menor que 50. Sem hesitar, as crianças responderam vinte e alguma coisa. Em seguida, a professora propôs que pensassem como começaria o resultado de 19 + 18. Quase que imediatamente as crianças responderam trinta e alguma coisa. A professora confirmou as respostas e explicou que era isso que deveriam fazer na atividade seguinte. Parece-nos que diminuir os números para que as crianças relacionassem com um conhecimento que possuíam foi um encaminhamento interessante. A experiência de êxito conferiu sentido à atividade e deu segurança para que as crianças enfrentassem os problemas posteriores, com números maiores.

A professora explicou que, inicialmente, não entregaria a calculadora e que não era para contar nos dedos. Algumas crianças protestaram. Leu o enunciado e o primeiro cálculo apresentado, 42 + 36, e propôs que todos pensassem como começaria seu resultado.

Tabela 8: Desempenho das crianças ao fazer as antecipações iniciais (atividade extra)

Estratégia utilizada pelas crianças (n = 69)	**Total das três turmas**	
Antecipações sistematicamente corretas.	17	25%
Antecipações sistematicamente erradas, quando a soma das unidades forma uma nova dezena.	4	6%
Resultado exato, não aparece a antecipação.	3	4%
Antecipações corretas ou equivocadas sem uma regularidade observável.	45	65%

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora

Acreditamos que a diferença significativa entre o total de crianças que acertou todas as antecipações nas primeiras atividades e nessa deve-se ao fato de que agora elas não realizavam mais o cálculo exato, e sim buscam antecipar.

Durante o trabalho individual notamos que alguns alunos seguiam contando para encontrar o resultado, mas agora disfarçadamente. Restringir a utilização de uma estratégia que as crianças usavam com segurança não foi suficiente para que entrassem no jogo da atividade. Parece-nos que alguns alunos ainda precisam de um tempo de trabalho maior com esse tipo de proposta para poder avançar nos procedimentos de antecipação.

Outro grupo de crianças considerou a soma das dezenas e das unidades para decidir quando o cálculo começaria com 70 e quando começaria com 80. Foi o caso de Bárbara, que afirmou que 47 + 37 daria oitenta e alguma coisa, e explicou: *"Tem que pensar, se tiver 7 + 7 por exemplo, vai dar 10 e alguma coisa. Então, vai dar oitenta e alguma coisa"*. Ana, que estava ao seu lado, entrou na conversa e disse: *"30 + 40 = 70"*. Com a intenção de ajudar as meninas a avançar na reflexão, perguntamos se essa afirmação ajudaria a saber como começaria o resultado de 47 + 37. A menina comentou: *"Ah,* *professora, você está complicando...".* Em seguida, pensou um pouquinho e disse: *"Vai começar com oitenta e alguma coisa porque 7 + 7 é 14 e 4 + 3 é 7. Então, dá setenta... oitenta e alguma coisa, porque vou subir o um".*

Retomar a atividade e propor mais uma série de cálculos, com parcelas diferentes das propostas anteriores, possibilitou que as crianças progredissem em suas explicações. Isso fica evidente quando as meninas passaram a levar em consideração as unidades para pensar nas suas antecipações. Como é possível notar, as crianças avançaram muito em relação às explicações descritas nas aulas anteriores.

Depois que todos terminaram de conferir suas antecipações e preencher suas tabelas, a professora organizou o momento de discussão coletiva e anunciou que perguntaria um a um como resolveu cada cálculo. Vale destacar que o momento de discussão coletiva é um intercâmbio entre todos os alunos da classe, conduzido pelo professor. A socialização de estratégias e resultados faz parte da prática de muitos professores. No entanto, se o professor pede que cada aluno explique como resolveu, a aula fica muito cansativa e não contribui para que avancem nos conhecimentos produzidos. Em nosso entendimento, os momentos de discussão coletiva envolvem muito mais do que a simples socialização de produções individuais para toda a classe. O valor central desse momento reside em ser potencialmente frutífero para a generalização de confrontações, reflexões e argumentações (Quaranta e Wolman, 2006). As crianças precisam explicitar seus procedimentos para antecipar, considerar as afirmações propostas pelos colegas, argumentar procurando defender a verdade ou a falsidade das afirmações, para chegar a conclusões mais próximas entre todos.

> A confrontação exige voltar sobre seus processos, sobre suas próprias ações, a descrevê-las, a defendê-las e a tomar consciência dos recursos que dispõe, de sua pertinência e de sua validade; porém também a procurar compreender os processos dos demais, de seus argumentos e se é possível, de apropriar-se dos procedimentos de seus colegas, ampliando o campo de suas possibilidades. Tudo isto não se realiza espontaneamente, a intervenção da professora é decisiva e, justamente, organizar com êxito o momento da confrontação é uma das maiores dificuldades que os professores percebem. (SAIZ, 1995, p. 4)

O momento de discussão requer, então, um modo próprio de gerir a classe que não faz parte da prática das professoras que participaram da pesquisa. O professor precisa coordenar as contribuições das crianças, fazer circular e submeter a discussão por toda a classe as produções de um aluno ou um grupo de alunos. O professor precisa ainda, sempre que possível, fazer com que os conhecimentos construídos inicialmente contextualizados em uma situação possam ser descontextualizados e generalizados.

> Entendemos que um procedimento colocado em jogo pelos estudantes – correto ou não – é a expressão de um conjunto de relações que eles estabeleceram. Nesse sentido, o trabalho sobre os procedimentos para resolver um problema é sempre uma oportunidade para tornar essas relações observáveis. As intervenções do professor que pede que as crianças explicitem os procedimentos, os confrontem com o que os colegas fizeram e comparem diferentes tipos de problema estão localizadas nessa linha. Trata-se de incitar os alunos para que, ao repensar o que realizaram com uma finalidade (convencer alguém da validade de uma estratégia, por exemplo) – conquistem uma posição mais reflexiva em relação ao que foi feito e mais geral, abstrata, autônoma, mais livre. (ETCHEMENDY, SADOVSKY e TARASOW, 2012, p. 2)

Assim, para retomar o intuito da atividade, como a parceria entre pesquisadora e professoras estava mais consolidada, propusemos ajudar a conduzir o debate. Ao analisar as produções, observamos que, assim como na atividade anterior, três crianças ainda registravam alternadamente 70 e 80 na coluna da antecipação. Esse tipo de registro revelou que as crianças buscaram um padrão, mas que não o relacionaram com os cálculos propostos na primeira coluna. Para incentivar os alunos a expor suas ideias, em um primeiro momento, orientamos que as duplas que quisessem poderiam compartilhar com o grupo como fez para decidir quando o resultado começaria com 70 e quando começaria com 80. Algumas crianças afirmaram que colocavam qualquer número.

Henrique afirmou que "chutava" qualquer número. Porém, sabíamos que o menino havia acertado todas as antecipações. Portanto, era difícil acreditar que não se apoiou em algum procedimento de antecipação. É interessante observar que, embora ele tenha recursos para colocar um procedimento em ação para resolver o problema, ainda não sabe como explicar. Ao retomar as atividades de Henrique (7.10) ao longo da sequência foi possível inferir que, talvez, estivesse se referindo ao seu procedimento inicial. É interessante observar seus avanços ao longo da sequência. Na atividade diagnóstica, o menino faz uma primeira tentativa de resolver a operação utilizando a técnica convencional da adição, desiste de utilizar essa estratégia, apaga e passa a contar de cinco em cinco, utilizando um procedimento que foi ensinado pela professora[17]. Na primeira atividade da sequência didática, antecipa que o resultado de 32 + 26 começaria com 60. Após conferir com a calculadora, corrige sua antecipação. Volta a fazer o mesmo para 35 + 25. Ao

[17] Durante a reunião pedagógica, a professora relatou que havia ensinado os alunos a contar de cinco em cinco para agilizar a resolução das operações.

justificar como antecipou, explica como fez para resolver o primeiro cálculo. Afirma que sabia que era 50 porque 3 + 2 = 5 e 2 + 6 = 8. No entanto, inicialmente havia anotado 60. Na segunda atividade parece que o menino procura calcular os resultados por meio da contagem e, em seguida, desiste. Faz tracinhos por toda a folha, mas os apaga em seguida. Antecipa que os resultados de todos os cálculos do primeiro grupo (4_ + 2_) começarão com 60, e todos os do segundo grupo (5_ + 3_) começarão com 80, isto é, faz antecipações sistematicamente erradas, quando a soma das unidades forma uma nova dezena. E justifica: *"Lembrei que 4 + 2 dá 6 e que 5 + 3 dá oito"*. Nessa atividade, Henrique antecipa que o resultado de 42 + 36 começará com 80, não apaga sua antecipação e, em seguida, acerta todas as demais. Ao explicar como fez, afirma que chuta. Para ajudá-lo nessa tarefa – transformar conhecimento implícito em saber explícito –, retomamos a pergunta prevista inicialmente: Por que algumas vezes o resultado começa com 70 e outras com 80? Algumas crianças afirmaram que, quando um número é maior, fica oitenta e alguma coisa, quando é menor, fica setenta e alguma coisa. No decorrer da discussão, Henrique foi aprimorando sua explicação e concluiu: *"42 + 36 começa com 70 porque 4 + 3 dá 7 e 2 + 6 dá 8. Então, dará 78*". Para fazer 46 + 37, explicou: *"4 + 3 dá 7. Precisa pensar nas unidades e nas dezenas. Sobe mais um aqui. Então, vai dar oitenta e alguma coisa"*.

Voltando à discussão coletiva, sugerimos que a turma formulasse dicas para que outras crianças pudessem saber com segurança quando o resultado começaria com 70 e quando começaria com 80. Pareceu-nos que essa intervenção colaborou para que as crianças se animassem em participar e procurassem ser mais claras em suas explicações.

Ao longo da atividade foi possível notar que as crianças estavam mais familiarizadas com a tarefa, entenderam o que era antecipar e não procuravam mais calcular com pauzinhos ou contando nos dedos. Além disso, demonstraram maior conhecimento do uso da calculadora e uma postura mais reflexiva em relação às decisões para antecipar com segurança, embora ainda não soubessem muito bem como explicar.

Ao final do dia, uma das professoras avaliou que explicar como pensou requer que as crianças reflitam, raciocinem, e que nem mesmo os professores estão acostumados a pensar matematicamente. Ponderou que as crianças estão habituadas a utilizar o material dourado para explicar como pensaram, agrupando dezenas e unidades, e isso não ajudou a antecipar e explicar como fizeram.

5.8. Caminhando para a generalização

Na nossa última visita à escola observamos as situações 3 e 4 previstas na sequência didática. O objetivo dessas etapas era que as crianças elaborassem uma conclusão compartilhada por todo o grupo e a professora iniciasse a institucionalização de alguns procedimentos realizados.

A professora iniciou a aula propondo a seguinte questão: As somas de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa podem ter como resultado um número que comece com quarenta? Quase que imediatamente as crianças responderam que não e deram explicações do tipo: *"porque 30 + 20 dá cinquenta"*; *"porque, por exemplo, 3 + 2 é cinco"*; *"30 + 20 já é 50, não pode dar 40! Só se diminuir um dos números"*. Entre todos, formularam a seguinte conclusão, que a professora anotou na lousa:

TRINTA E ALGUMA COISA MAIS VINTE E ALGUMA COISA NUNCA VAI DAR QUARENTA E ALGUMA COISA PORQUE 20 + 30 = 50.

Em seguida, a professora perguntou se seria possível que o resultado começasse por 70. Alguns alunos se mostraram em dúvida. Então, Henrique argumentou: *"39 + 29 dá sessenta e alguma coisa. Então, nunca vai dar setenta e alguma coisa"*. Essa explicação foi contundente para que todos aceitassem a afirmação do menino, mas não foi generalizada para todos os casos. Quando a professora perguntou sobre a soma de outras dezenas, as crianças voltaram a discutir a possibilidade. Aos poucos foram se apropriando do argumento colocado por Henrique, comprovando e generalizando para os demais cálculos.

A discussão na turma B foi semelhante. Logo que a professora perguntou sobre a possibilidade do resultado de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa ser 40, todos afirmaram categoricamente que não poderia, e Luiza justificou: *"Por causa do 3 no primeiro numeral"*. Quando a professora perguntou se poderia começar com 70, muitos disseram que sim, Murilo justificou que para isso precisaria colocar o 9 nas unidades. Mas André discordou e disse que, colocando o 9 nas unidades, daria sessenta e alguma coisa.

Nota-se que as crianças começam a considerar o papel das unidades, embora ainda sem muita certeza.

A segunda parte da atividade consistia em selecionar a afirmação que explicasse melhor o que acontece quando se adiciona 50 ou cinquenta e alguma coisa e 30 ou trinta e alguma coisa. Para tanto, selecionamos afirmações feitas pelas próprias crianças em aulas anteriores e algumas produzidas no marco da pesquisa argentina com o intuito de ajudar as crianças a avançar em suas formulações. A professora apresentou o seguinte quadro e organizou a turma em duplas para que selecionassem as afirmações que julgassem mais adequadas:

Quadro 1: Atividade de sistematização

PARA QUE DÊ 8_	**PARA QUE DÊ 9_**
• QUANDO OS NÚMEROS SÃO MENORES, DÁ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_). • PARA QUE DÊ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_), A SOMA DAS UNIDADES TEM DE DAR 9. • PARA QUE DÊ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_), A SOMA DAS UNIDADES NÃO PODE PASSAR DE 9.	• QUANDO OS NÚMEROS SÃO MAIORES, DÁ NOVENTA OU "NOVENTA E ALGUMA COISA" (9_). • SE 50 + 30 = 80, ENTÃO 31 + 59 = 90 OU NOVENTA E ALGUMA COISA, PORQUE AQUI O RESULTADO DÁ 10. • PARA QUE DÊ NOVENTA OU "NOVENTA E ALGUMA COISA" (9_), A SOMA DAS UNIDADES TEM QUE DE DAR 10. • PARA QUE DÊ NOVENTA OU NOVENTA E ALGUMA COISA (9_), A SOMA DAS UNIDADES TEM DE PASSAR DE 10.

Fonte: Quadro elaborado pela pesquisadora

Para algumas crianças, as afirmações propostas ajudaram a elaborar melhor as próprias explicações. Foi o caso da dupla Ana e Bárbara. As meninas leram as afirmações da primeira coluna e selecionam a terceira. E justificaram: *"Está certo!"*. Depois passaram a analisar as afirmações da segunda coluna e optaram pela segunda, justificando: *"Porque aqui o resultado dá 10"*. Bárbara muda de ideia e diz que é melhor a que diz que a soma das unidades tem de passar de 10. O diálogo a seguir pode ajudar a observarmos como a conceitualização das meninas vai avançando à medida que conversam e decidem qual afirmação escolher:

Ana: *"Você mudou de opinião?"*

Bárbara: *"Mudei, porque na continha 59 + 39 o resultado não passou de 10?*"

A: *"Passou"*.

B: *“Então, deu oitenta ou noventa e alguma coisa?”*

A: *“Noventa e alguma coisa”.*

B: *“Por isso que eu marquei essa daqui”.*

A: *“Entendi. Já marquei também”.*

Ao analisar essa última etapa da sequência, ficou claro o desafio que é para o professor conduzir uma aula em que o grupo precisa decidir sobre qual é a “melhor explicação”. Esse desafio também foi observado na pesquisa argentina, mesmo na classe em que a professora era muito experiente no trabalho com o projeto de ensino apoiado nas mesmas concepções do que o proposto pelas pesquisadoras. Para Lerner (2013), como as crianças não sabem que uma explicação matemática tem caráter universal, é muito difícil para elas diferenciar uma explicação matematicamente pertinente de uma que não o é.

CAPÍTULO 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa partiu de questões levantadas por investigações realizadas nos últimos 15 anos que reconhecem que o sistema de numeração posicional é o elemento-chave no início da formação matemática escolar. Concomitantemente, apontam um sério problema no ensino usual desse conteúdo: a dificuldade em conseguir que as crianças compreendam o princípio que rege a numeração escrita e os fundamentos das técnicas convencionais para operar (Rodrigues, 2001; Brandt, 2005; Bonaldo, 2007; Terigi e Wolman, 2007; entre outros).

Os estudos citados indicam ainda que, quando as crianças são apresentadas às técnicas operatórias convencionais precocemente, não compreendem as razões dos passos que seguem para obter o resultado, somam as unidades e dezenas separadamente e não colocam em jogo conhecimentos sobre o sistema de numeração posicional. Segundo Terigi e Wolman (2007), a organização da numeração escrita e as operações guardam estreitas relações entre si. A compreensão do sistema de numeração requer desentranhar as operações subjacentes a ele e, ao mesmo tempo, a resolução de operações constitui um terreno fértil para aprofundar a compreensão do sistema de numeração. Para Lerner (1996), "quando as crianças enfrentam situações-problemas, geram – além de estratégias próprias para resolvê-las – procedimentos originais para encontrar os resultados das operações envolvidas, procedimentos que estão vinculados à organização do sistema de numeração decimal" (LERNER, et al., 1996, p. 127).

Frente a esse problema de ensino, decidimos realizar uma pesquisa que contribuísse para identificar as condições necessárias para o desenvolvimento de um trabalho em que as crianças pudessem fazer Matemática assumindo a responsabilidade pela resolução dos problemas, construindo e atribuindo sentido ao conhecimento matemático.

A pesquisa em Educação Matemática requer identificar um obstáculo, epistemológico ou didático, buscar um avanço argumentativo ou um vazio conceitual no esforço para compreender determinada realidade do ensino da Matemática. Para Robert:

> as pesquisas [...] em Didática da Matemática são frequentemente articuladas em torno de uma questão que nos colocamos sobre uma aprendizagem ou sobre um problema de ensino, ou ainda sobre uma hipótese que procuramos confirmar (particularmente a existência de uma regularidade entre um certo tipo de ensino e um certo tipo de aprendizagem para uma maioria de alunos). (ROBERT, 1992, p. 38, apud, ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 64)

Optamos por utilizar como metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (Artigue, 1996), por considerar que ela aproxima o diálogo entre a pesquisa acadêmica e a prática de sala de aula. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), a Engenharia Didática caracteriza-se por:

> um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste. (ALMOULOUD e COUTINHO, 2008, p. 66)

Além de identificar os problemas de ensino, para planejar a Engenharia, consideramos essencial não descaracterizar o objeto de conhecimento tratado e a complexidade que sua apropriação representa para as crianças.

A fim de analisar os aspectos epistemológicos envolvidos na estruturação do sistema de numeração que utilizamos hoje, realizamos um levantamento histórico, buscando identificar os obstáculos enfrentados pela humanidade na construção de sistemas de numeração e as características próprias do sistema indo-arábico. Essa análise revelou que, por um lado, o sistema de numeração indo-arábico é muito econômico, por outro, suas regras não são nada transparentes para as crianças que procuram se apropriar dele.

No tocante aos aspectos relativos às concepções dos alunos, tomamos como ponto de partida investigações didáticas e psicológicas acerca das concepções de crianças e das dificuldades que enfrentam ao procurar compreender as regras que regem o sistema de numeração (Carraher, Carraher e Schliemann, 1982; Sinclair, 1990; Lerner, Sadovsky e Wolman, 1996; Alvarado e Ferreiro, 2000; Brizuela, 2006; entre outros). Os resultados dessas pesquisas indicam que as crianças constroem hipóteses sobre o funcionamento do sistema de numeração desde muito cedo, em situações de uso, sem a mediação de materiais estruturados para esse fim.

Assim, partimos do pressuposto que as crianças aprendem na interação com a numeração escrita em toda a sua complexidade e avançam em suas conceitualizações por sucessivas aproximações, que podem resolver situações que envolvam adições e subtrações antes de serem apresentados a qualquer método de resolução.

Com base nesse panorama, resolvemos propor e analisar o potencial didático de uma sequência de atividades, elaborada e testada por Lerner e equipe (2007, 2013), voltada para a compreensão do agrupamento decimal.

As atividades foram organizadas em quatro situações com base nos aportes da teoria das situações didáticas (Brousseau, 1996), a fim de promover a elaboração de regras válidas para o sistema de numeração; a antecipação de resultados de operações em função das regras elaboradas (tentativas de generalização); a construção de explicações que fundamentem as regras estabelecidas. As crianças deveriam antecipar como começaria o resultado de adições de números de dois algarismos e, em seguida, verificar a antecipação com a calculadora. Depois, passavam para uma fase centrada na reflexão em que deveriam formular uma regra que permitisse fazer antecipações corretas. A fase final conduzia para a generalização e institucionalização das regras construídas.

A presente pesquisa foi realizada em uma escola estadual de São Paulo, em junho de 2015, e envolveu três turmas de 2º ano, compostas por 91 crianças, entre 7 e 8 anos, e suas professoras, que conduziram as atividades, observadas pela pesquisadora.

Optamos por realizar a pesquisa em turmas de 2º ano, no meio do ano escolar, pois na ocasião em que foi realizada as professoras participavam de um programa de formação em Matemática do governo do estado que tinha como princípio iniciar o estudo do sistema de numeração e das operações resgatando os conhecimentos construído pelas crianças, favorecendo a interação com a numeração escrita em contextos familiares e frequentes e a formulação de hipóteses sobre sua leitura e escrita de números. O programa propunha também a resolução de problemas envolvendo as operações por meio de estratégias pessoais antes de introduzir a técnica operatória convencional. Esse dado nos levou a crer que, ao realizar a pesquisa nessa época do ano, as crianças já teriam construído alguns conhecimentos sobre o sistema de numeração, mas ainda não teriam sido apresentadas à técnica operatória convencional da adição. No entanto, essa hipótese não se confirmou. A análise dos dados revelou que as crianças já tinham sido apresentadas à técnica convencional da adição e procuravam aplicar os passos aprendidos, mesmo que muitas vezes sem obter êxito.

A primeira atividade, dirigida a conhecer os procedimentos de resolução disponíveis para as crianças, propunha um problema com enunciado, envolvendo 38 + 26. Para resolvê-lo, algumas crianças utilizaram procedimentos de contagem, outras a técnica operatória convencional (mesmo que muitas vezes de forma equivocada). A observação de sala e a análise das produções revelou que, embora alguns alunos tenham registrado a técnica operatória convencional, resolveram o problema por meio da contagem. Esse fato parece indicar o prestígio atribuído a essa estratégia: os alunos procuram utilizá-la, mesmo sem compreendê-la, pois, acreditam que é isso que é esperado que façam. Diferentemente dos resultados da pesquisa argentina, em nosso caso, nenhuma criança usou procedimentos de cálculo, como somar sucessivamente 10 ou decompor os números e apoiar-se em resultados conhecidos.

O diagnóstico revelou que as professoras e os alunos envolvidos na pesquisa não tinham experiência em uma perspectiva didática que contemplasse o que as crianças sabem sobre o sistema de numeração e tomasse esses saberes como ponto de partida para construção de novos conhecimentos. Por outro lado, a sequência de atividades proposta por nós está apoiada em um modelo de ensino que requer que as crianças pensem, ajam, expliquem, reformulem e se responsabilizem pelos problemas propostos.

Brousseau (2008) aponta a necessidade de desenhar situações didáticas em que o conhecimento que se quer ensinar apareça como um meio para resolver o problema proposto pela situação didática. O autor cita como exemplo o fato de que algumas crianças, no início da escolaridade, sabem contar, isto é, correspondem a cada palavra dita um objeto, sem pular nenhum e sem contá-lo mais de uma vez. No entanto, não conseguem usar esse conhecimento para constituir uma coleção de objetos equivalentes a outra dada. Não aprenderam a usar esse saber como meio para resolver um problema.

> Em uma situação “de aprendizagem” em que o aluno deveria “adaptar-se a uma situação objetiva” (e não a uma relação dual com o professor), produzindo ele mesmo o conhecimento, é necessário que a consigna ou o projeto de ação possa ser concebido pelo próprio sujeito sem o auxílio de sua solução, posto que se trata de construir ou de adquirir. Para compreender a situação, o aluno deve poder esboçar, com seus conhecimentos atuais, uma estratégia de base que corresponda à consigna dada. O conhecimento novo é então o meio para produzir o efeito esperado mediante uma estratégia mais eficaz, mais segura, mais econômica, etc. (BROUSSEAU, 1999, p. 39-40)

A sequência proposta está ancorada em uma concepção de ensino diferente da usualmente adotada nas escolas públicas brasileiras. Dessa maneira, a mudança de paradigma foi o principal desafio para a realização deste trabalho.

A segunda atividade da sequência propunha que as crianças resolvessem com a calculadora uma série de adições em que a primeira parcela eram números compreendidos entre 20 e 29 e a segunda entre 30 e 39. Ao final da atividade, a professora chama a atenção das crianças para o fato de que alguns resultados começam com cinquenta e outros com sessenta. O propósito central dessa atividade não era a realização do cálculo, mas, sim, observar uma regularidade. Nesse sentido, a calculadora funcionou como instrumento facilitador para essa observação. Durante a realização dessa atividade, foi possível notar que algumas crianças não sabiam como utilizar a calculadora. Então, foi necessário intervir para ajudá-las nessa tarefa.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008), a fase de experimentação é o momento de colocar em funcionamento o dispositivo construído e corrigi-lo. Nesse sentido, foi fundamental modificar algumas variáveis e realizar intervenções que não estavam previstas (ensinar as crianças a usar a calculadora, utilizar números mais baixo, incluir uma nova atividade) para dar mais elementos para os alunos "entrar no jogo das atividades propostas".

As atividades seguintes envolviam novos cálculos e se pedia que as crianças, sem fazer contas, antecipassem como começaria o resultado de cada um. Depois de cada antecipação, deveriam conferir com a calculadora o resultado. Por não ter familiaridade com esse tipo de atividade, as crianças realizavam os cálculos, em vez de antecipar os resultados ou "chutavam" qualquer número. Entrar no jogo da atividade não se mostrou uma tarefa simples.

Para que o aluno possa assumir o problema como seu, isto é, responsabilizar-se por sua resolução, é preciso que o que está sendo apresentado "engate" em um conhecimento que possui, para que possa utilizá-lo na construção de um novo conhecimento. A análise *a priori* permitiu realizar ajustes em nossas antecipações iniciais. Ao analisar os resultados de sua investigação, Lerner (2013) concluiu que, para fazer a devolução do problema, para que as crianças atribuíssem sentido para a elaboração de razões e se envolvessem nela, era produtivo propor situações que apontassem explicitamente a ter êxito na ação, isto é, na antecipação de como começa um resultado de certas adições. Assim, decidimos utilizar exemplos envolvendo números menores e incluir uma nova atividade.

Esses ajustes não foram suficientes para fazer a devolução do problema para as crianças. Para Silva (2008), o professor precisa mostrar para a criança que ele se desfez da responsabilidade de dizer e garantir a veracidade da resposta que o aluno deve dar. Não basta que diga "Pode fazer do seu jeito", "Você deve" ou "Faça do jeito que achar melhor". Para que a devolução seja possível, o professor precisa assegurar que a situação possa ser "compreendida" pelo aluno, isto é, que ele conheça uma estratégia básica (eficaz ou não) para responder à situação. O autor alerta que o projeto de ensino não pode continuar com o "faz de conta", ou seja, finge que eu ensino e finge que aprende. Ele defende que:

> O professor tem a obrigação social de ensinar tudo o que é necessário sobre o saber. O aluno, sobretudo aquele que está tendo dificuldade em resolver a questão, solicita sua interferência, sua "ajuda". Quanto mais o professor cede às solicitações do aluno, desvendando aquilo que o almeja, quanto mais ele diz precisamente aquilo que o aluno deve fazer, mais arrisca perder suas chances de obter e de constatar objetivamente a aprendizagem que realmente deve visar. O contrato didático coloca o professor diante de uma verdadeira injunção paradoxal: tudo aquilo que empreende para produzir no aluno os comportamentos que espera tende a privar este último das condições necessárias para a aprendizagem da noção desejada. O aluno, por seu turno, também se vê diante de uma injunção paradoxal: se aceita que, de acordo com o contrato, o professor lhe ensine os resultados, ele próprio não os produz e daí não aprende Matemática, não se apropria dela. Se, ao contrario, recusa toda informação do professor, a relação didática se rompe. (SILVA, 2008, p. 72-73)

Outro resultado apontado por Delia (2013) foi que, para elaborar o conhecimento matemático e assegurar que todos os alunos progridam em sua reconstrução, é necessário que a intervenção docente enfatize o caráter geral das razões que sustentam as regras elaboradas, que coloque em ação na aula os critérios segundo os quais uma explicação pode ser considerada como matematicamente pertinente. Como os alunos participantes da pesquisa não chegaram a explicações mais gerais, resolvemos incluir na discussão explicações elaboradas por crianças de outros grupos. Essa intervenção ajudou as crianças a generalizar algumas de suas afirmações, como quando a dupla Ana e Barbara discutem sobre a afirmação que explicasse melhor o que acontece quando se adiciona 50 ou cinquenta e alguma coisa e 30 ou trinta e alguma coisa. Inicialmente as meninas escolhem uma afirmação produzida pelo próprio grupo: *Se 50 + 30 = 80, então 31 + 59 = 90 ou noventa e alguma coisa, porque aqui o resultado dá 10*. Mas, em seguida, optam pela afirmação mais geral: *Para que dê noventa ou noventa e alguma coisa (9_), a soma das unidades tem de passar de 10*, justificando com outros exemplos.

Após a análise do conjunto dos dados, dos avanços e das dificuldades encontradas no desenvolvimento da presente pesquisa, foi possível concluir que, de maneira geral, as crianças avançaram significativamente em direção à compreensão dos agrupamentos decimais, como é possível notar nas afirmações das crianças: "Trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa nunca vai dar quarenta e alguma coisa porque 20 + 30 = 50" e "O resultado de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa nunca vai começar por setenta, pois 39 + 29 dá sessenta e alguma coisa".

Para as crianças, inicialmente, as práticas voltadas para criar hipóteses e defendê-las não faziam sentido. A sequência ofereceu oportunidade para que utilizassem e confrontassem seus conhecimentos iniciais e os reconstruíssem. Entraram em um jeito próprio de funcionar que se relaciona com o fazer Matemática. Algumas crianças chegaram mais perto do nosso objetivo – a compreensão do agrupamento decimal –, outras ainda precisarão de mais tempo, retomar outras séries de cálculos, com parcelas diferentes das propostas anteriormente, para que possam entrar no jogo da ação, formulação e generalizar os procedimentos.

Os resultados mostraram que, embora em outras situações, as crianças que participaram da presente pesquisa utilizassem materiais estruturados que visavam concretizar os agrupamentos do sistema de numeração, esses recursos não se mostraram úteis para o avanço na compreensão das regras do sistema de numeração posicional.

Vale destacar que, conforme indicam resultados de pesquisas anteriores, a apresentação da técnica convencional e a materialização dos agrupamentos não favoreceram a aproximação das razões do funcionamento do nosso sistema de numeração.

Atribuir sentido aos conhecimentos matemáticos é o nosso grande desafio. Do ponto de vista do ensino, não introduzir desde o início da escolaridade as técnicas operatórias convencionais é uma das condições essenciais para revertemos esse quadro.

A mudança de contrato didático demandou grande empenho das professoras e crianças. Foi preciso passar de um modelo centrado em "explicar e fazer" para um em que os alunos assumissem o problema para si. Essa discrepância pode ser atribuída ao contexto em que as pesquisas foram realizadas. Os resultados relatados na pesquisa argentina foram obtidos em uma sala de aula cuja professora tinha experiência com o modelo de ensino proposto. No Brasil, desde muito cedo, as crianças aprendem a técnica operatória convencional e parece que isso condiciona aprendizagem. As crianças entendem que é esperado delas o uso do "quadro valor de lugar" e da técnica convencional, não se arriscam em novos procedimentos que poderiam fazer mais sentido para elas e possibilitar maior compreensão. Contextos diferentes envolvem culturas diferentes e, de certa forma, propósitos também diferentes. A sequência de atividades proposta nesta pesquisa era considerada como um ponto de partida para o aluno pensar sobre adições de números de dois algarismos e, em nosso caso, os alunos já tinham aprendido um método, uma forma de operar, mesmo que o fizessem sem compreensão. Esse fato interferiu fortemente no processo das crianças para refletir sobre os possíveis resultados, considerando os números envolvidos nos cálculos.

Esse resultado aponta para a questão da replicabilidade de sequências didáticas. Por mais exitosas que seja um recurso construído e aplicado em determinado contexto, quando se muda o cenário de realização é necessário considerar quais variáveis se mantêm e quais se alteram. Podemos dizer que, em nosso caso, a dimensão epistemológica, associada às características do saber, se manteve fixa. No entanto, o público é diferente. Logo, as dimensões cognitiva e didática variaram consideravelmente, pois são associadas às características do sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos. Assim, embora o objetivo da presente pesquisa inicialmente fosse o mesmo da pesquisa argentina, acabou sendo diferente porque lá as crianças estavam aprendendo pela primeira vez o conteúdo e aqui a intervenção foi feita em um grupo que já tinha certa cultura sobre as técnicas operatórias. Modificar essa cultura é algo bastante complexo.

Por fim, vale destacar que não basta propor aos professores planejamentos ou boas sequências didáticas para que a transformação da prática ocorra. A realização dessa sequência requer formação dos professores para que possam intervir de maneira a ajudar os alunos a considerar o que pensam sobre os números e colocar suas ideias em ação, buscar relações lógicas entre o que sabe e o problema proposto, debater com os colegas. É necessário um projeto de formação de professores que envolva análise e discussão de suas práticas, das regras implícitas no contrato didático e sua interferência nas ações dos alunos.

REFERÊNCIAS

ADAMUZ-POVEDANO, Natividad; BRACHO-LÓPEZ, Rafael. Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. Revista Internacional de Educación Para La Justicia Social: RIEJS, Madrid, v. 1, n. 3, p.37-53, 2014. Disponível em: <http://www.rinace.net/riejs/numeros/vol3-num1/art2.htm>. Acesso em: 23 jul. 2016.

ALMEIDA, Fernando Manuel Mendes de Brito. Sistemas de Numeração Precursores do Sistema Indo-Árabe. 2007. 110 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Departamento de Matemática Pura, Universidade do Porto, Porto, 2007. Disponível em: <http://docplayer.com.br/10191377-Sistemas-de-numeracao-precursores-do-sistema-indo-arabe.html>. Acesso em: 9 jul. 2016.

ALMOULLOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba: UFPR, 2007.

________________________; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, UFSC, v. 6.3, p.62-77, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_almouloud_coutinho.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2016.

ALVARADO, Mónica; FERREIRO, Emilia. El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años. Lectura y Vida: Revista Latinoamericana de Lectura, Buenos Aires, v. 21, n. 1, p.1-15, 2000. Disponível em: <http://www.lecturayvida.fahce.unlp.edu.ar/numeros/a21n1/21_01_Alvarado.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2016.

________________________; BRIZUELA, Barbara (Org.). Haciendo números: Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia. México: Paidós, 2005.

ARTIGUE, Michèle; DOUADY, Régine; MORENO, Luis. I NGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Iberoamérica, 1995. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2016.

________________________; Engenharia Didática. In: BRUN, J. (direção) Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-218, 1996.

ASSUDE, Teresa. As Calculadoras no Ensino da Matemática: alguns elementos de reflexão. Portugal: Folha Informativa do Projecto: computação no Ensino da Matemática, 1990. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/nonius/nonius25_1.html>. Acesso em: 10 jul. 2016.

___________________. Mudanças e Resistências na Evolução do Currículo de Matemática: Estudo de Caso sobre as Calculadoras na Escola Primária. Portugal: Spiem, 2006. Disponível em:

<http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2006/2006_04_TAssude.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2016.

BAROODY, Arthur. Children's mathematical thinking. New York: Teachers College Press, 1987

BÔAS, Maria Carolina Villas. Construção da noção de número na Educação Infantil: jogos como recurso metodológico. Dissertação (Mestrado) – Curso de Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

BONALDO, Icléa Maria. Investigações sobre números naturais e processos de ensino e aprendizagem desse tema no início da escolaridade: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade. Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.

BRANDT, Célia Finck. Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração decimal: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade. Tese (Doutorado) – Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

BRASIL. PCN. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2016.

BRIZUELA, Bárbara. Desenvolvimento Matemático na Criança: Explorando Notações. Porto Alegre: Artmed, 2006.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. Recherches En Didactique Des Mathématiques, Grenoble, v. 4, n. 2, p.165-198, 1983.

_______________. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (1ª parte). Enseñanza de las Ciencias, Sevilla, v. 8, n. 3, p.259-267, 1990. Disponível em: <http://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/51335>. Acesso em: 23 jul. 2016.

_________________ ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de la matemática? (2ª parte). Enseëanza de las Ciencias, Sevilla, v. 9, n. 1, p.10-21, jan., 1991. Disponível em: http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/issue/view/4211. Acesso em: 17 jan. 2016.

_________________ Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (direção) Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 1996.

_________________ Os Diferentes Papéis do Professor, In: PARRA, C.; SAIZ, I. (comp.): Didática da Matemática: Aportes e Reflexões. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 48-72, 1996b.

_________________. La théorie des situations didactiques. In: Cours donné lors de l’attribuition à Guy Brousseau Du titre de docteur honoris causa de l’université de

Montreal. Laboratoire Cultures, Education, Sociétés (laces), p. 1-59, 1997. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/>. Acesso em: 15 jul. 2016.

_________________. Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

_________________ Contrato didático: o "não dito" é essencial. São Paulo: Nova Escola, v. 264, ago. 2013. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/contrato-didatico-nao-dito-essencial-757864.shtml>. Acesso em: 17 jan. 2016.

CARRAHER, David; CARRAHER, Terezinha; SCHILIEMANN, Ana Lúcia. Na Vida Dez, na Escola Zero. São Paulo: Cortez, 1982.

CASTRO, Adriana. Actividades de exploración con cuerpos geométricos: análises de una propuesta de trabajo para la sala de cinco. In: MALAJOVICH, Ana. Recorridos didáticos en la educación inicial. Buenos Aires: Paidós, p. 175-204, 2008.

DICKSON, Linda; BROWN, Margaret; GIBSON, Olwen. Children Learning Mathematics: a teachers guide to recent research. Londres: Schools Council Publications, 1993.

DIDÁTICA da Matemática: Guy Brousseau. Direção de Regis Horta. Produção de Luciana Sperandio. Coordenação de Ana Flávia Alonço Castanho e Maria Priscila Bacellar Monteiro. Roteiro: Ana Flávia Alonço Castanho e Maria Priscila Bacellar Monteiro. DVD (25 min.). São Paulo: Atta Midia e Educação, 2009.

ETCHEMENDY, Mercedes; SADOVSKY, Patricia; TARASOW, Paola. A relação entre os sentidos de uma operação aritmética. São Paulo: Nova Escola, p.1-8, jan., 2012. Disponível em: <http://novaescola.org.br/fundamental-2/relacao-sentidos-operacao-aritmetica-663265.shtml>. Acesso em: 23 jul. 2016.

FAYOL, Michel. A criança e o número: da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GÓMEZ, Juan Miguel Belmonte. El cálculo en la enseñanza primaria: la adición y la sustracción. In: CHAMARRO, María del Carmen (Org.). Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Pearson, p. 133-158, 2003.

HUGHES, Martin. Los niños y los números. Barcelona: Planeta, 1986.

IFRAH, Georges. Os números: a história de uma grande invenção. 8. ed. São Paulo: Globo, 1996.

_____________. História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2 volumes. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KAMII, Constance. A criança e o número. São Paulo: Papirus, 1990.

_______________; DECLARK, Georgia. Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papirus, 1996.

LERNER, Delia. A matemática na escola: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

______________; SADOVSKY, Patricia; WOLMAN, Susana. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecilia; SAISZ, Irma. Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 73-155, 1996.

______________. Mesa redonda: Sobre o papel da explicitação em Língua e em Matemática: In: I Encontro Internacional Rede Latino-americana de alfabetização. Buenos Aires. Acerca de la Explicitación: reflexiones a partir de la didática de la matemática. Buenos Aires: sem editora, p. 1-9, 1996b.

______________. Reflexiones sobre uso del material concreto en Matemáticas: Problemas de la vida cotidiana. Quehacer Educativo, Montevideo, v. 34, p.56-60, 1999.

_____________. ¿Tener éxito o compreender?: una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. In: BROITMAN, Claudia. Enseñar matemática: nivel inicial y primario, volume 1 e 2. Buenos Aires: 12(ntes), p. 43-61, 2007.

______________. El aprendizaje y la enseñanza de la matemática: planteos actuales. In: LERNER, Delia et al. El lugar de los problemas en la clase de matemática. Buenos Aires: Novedades Educativas, p. 17-41, 2011.

______________. Hacia la comprensión del valor posicional: avances y vicisitudes en el trayecto de una investigación didáctica. In: BROITMAN, Claudia. Matemáticas en la escuela primaria [I]: números naturales y decimales con niños y adultos. Buenos Aires. Paidós, p.173-201, 2013.

MACEDO, Lino de. Ensaios construtivistas. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MONTEIRO, Maria Priscila Bacellar. As crianças e o conhecimento matemático: experiências de exploração e ampliação de conceitos e relações matemáticas. Anais do I Seminário Nacional: Currículo em Movimento: perspectivas atuais, 1. Belo Horizonte: Secretaria de Educação Básica-MEC, p. 1 – 17, 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/programa-curriculo-em-movimento-sp-1312968422/relatorios?id=16110>. Acesso em: 14 jul. 2016.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio. Rosario: Homo Sapiens Ediciones, 2007.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Contraintes de fonctionnement des enseignants au collège: ce que nous apprend l'étude de "classes faibles". Petit X, Grenoble, n. 35, p.5-40, 1994. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/35/35x1.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2016.

PIAGET, J. Fazer e compreender. São Paulo: Edição Melhoramentos, 1978.

PIRES, Célia Maria Carolino. Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

_______________________. Reflexões que Precisam Ser Feitas sobre o Uso dos Chamados “Materiais Concretos” para a Aprendizagem em Matemática. Boletim Gepem, Rio de Janeiro, v. 61, p.45-62, 2012. Disponível em: <http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.013>. Acesso em: 07 jun. 2016.

QUARANTA, M. E., TARASOW, P. e WOLMAN. S. Abordagens parciais à complexidade do sistema de numeração: progressos de um estudo sobre as interpretações numéricas. In: Panizza, M. Ensinar matemática na Educação Infantil e séries iniciais: análise e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

RODRIGUES, Wanda S. Base dez: o grande tesouro matemático e sua aparente simplicidade. Dissertação (Mestrado) – Curso de Educação Matemática, PUCSP, São Paulo, 2001.

ROQUE, Tatiana. História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAIZ, Irma. ¿Confrontación o corrección? La Educación En Nuestras Manos, Buenos Aires, n. 4, p.3-7, 1995.

SASTRE, Genoveva; MORENO, Montserrat. Representação Gráfica da Quantidade. Anais do I Encontro Nacional de Professores do Proepre. 1984

SILVA, Benedito Antonio da. Contrato Didático. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Educação Matemática: Uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, p. 49-75, 2008.

SINCLAIR, Anne. A Notação Numérica na Criança. In: SINCLAIR, Hermine. (org.) A Produção de Notações na Criança: Linguagem, Números, Ritmos e Melodias. São Paulo: Cortez, p.71-96, 1990.

TEMPIER, Frédérick. La numération décimale de position à l’école primaire: une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Tese (Doutorado) - Curso de École Doctorale: Savoirs Scientifiques Épistémologie, Histoire Des Sciences Et Didactique Des Disciplines, UFR de Mathématiques, Université Paris Diderot (Paris 7), Paris, 2013. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/921691/filename/TEL_These_Tempier.pdf>. Acesso em: 11 jul. 2016.

TERIGI, Flavia; WOLMAN, Susana. Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. OEI - Revista Iberoamericana de Educación - Número 43, Janeiro-Abril, p. 59-83, 2007. Disponível em: http://rieoei.org/rie43a03.htm. Acesso em: 02 de março de 2016.

_________________; BRUITON, Valeria. Los aprendizajes sobre el sistema de numeración en el primer ciclo en escuelas primarias urbanas: Estudio exploratorio en distintos contextos didácticos. Educación, Lenguaje y Sociedad, La Plata, v. 10, n. , p.13-39, dez. 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.unlpam.edu.ar/pubpdf/ieles/v10a02terigi.pdf>. Acesso em: 13 jul. 2016.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. Revue Recherches En Didactique Des Mathématiques, Grenoble, v. 10, n. 2, p.133-170, 1990.

WOLMAN, Susana. La Enseñanza de los Números en el Nivel Inicial y en el Primer Año de la EGB. In: KAUFMAN, A. M. (org.) Letras y Números. Buenos Aires: Aula XXI, Santillana, p.161-256, 2000.

_________________; QUARANTA, María Emilia. Discussões nas aulas de matemáticas: o que, para que e como se discute. In: PANIZZA, Mabel; col. Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais: Análise e Propostas. Porto Alegre: Penso, p. 189-244, 2006.

_________________. La escritura en los procedimientos de resolución de problemas de suma y resta: un proceso constructivo. Revista del IICE Nº 28. Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación de la Universidad de Buenos Aires, 2010.

ZABALA, Antoni. A prática educativa: como ensinar. Porto Alegre: Penso, 1998.

ANEXO – A - Planejamento enviado para os professores

METODOLOGIA

A sequência didática será desenvolvida em **junho de 2015** com uma turma de crianças de 7 e 8 anos do 2º ano do Ensino Fundamental da **E.E. Pe. Francisco/DE Sul3**, uma escola estadual da cidade de São Paulo.

Espera-se que, com esta sequência, as crianças avancem na compreensão do valor do algarismo no sistema posicional.
A situação desenhada pretende promover:

- A elaboração de regras válidas para o sistema de numeração.
- A antecipação de resultados de operações em função das regras elaboradas (tentativas de generalização).
- A construção de explicações que fundamentem as regras estabelecidas.

A sequência prevê nove situações didáticas, organizadas em três etapas.

PRIMEIRA ETAPA: DIAGNÓSTICO

1ª aula

1ª situação: problema com enunciado (1ª aula)
Com o objetivo de conhecer os procedimentos de resolução disponíveis para as crianças, a professora solicita que resolvam um problema com enunciado, que envolve uma adição de 38 + 25.
Paulo tinha 38 figurinhas e ganhou 25 de seu amigo. Com quantas figurinhas Paulo ficou?

SEGUNDA ETAPA

2ª situação: trabalho coletivo (2ª aula)
A professora anota na lousa uma lista de adições, cujas primeiras parcelas são números compreendidos entre 30 e 39, e as segundas parcelas são números compreendidos entre 20 e 29.

32 + 23 =	36 + 24 =	38 + 28 =
30 + 24 =	33 + 26 =	35 + 21 =
38 + 24 =	31 + 26 =	34 + 27 =

As crianças resolvem os cálculos com a calculadora e vão ditando os resultados para a professora, que os anota na lousa.

A professora solicita que observem os resultados e pergunta como eles começam. Conclui-se que há duas possibilidades: começar com 50 ou com 60.

3ª situação: trabalho individual (2ª aula)

A professora distribui um quadro impresso em uma folha com novos cálculos do mesmo tipo dos apresentados na situação anterior. Pede que os alunos, sem fazer as contas, antecipem como começará o resultado de cada um (com 50 ou com 60?), anotem com palavras (não com números) na coluna reservada para as antecipações e, depois de cada antecipação, resolvam com a calculadora e anotem o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	**Calculadora**
32 + 26 =		
38 + 21 =		
37 + 27 =		
36 + 27 =		
35 + 25 =		

4ª situação: trabalho em duplas (2ª aula – até aqui)

As crianças, organizadas em duplas, discutem como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado começaria com 50 ou com 60. A professora pergunta: *Se sempre somamos 30 + 20, por que o resultado às vezes é cinquenta e alguma coisa e outras vezes é sessenta e alguma coisa?*

A professora orienta os alunos para que anotem as conclusões, os acordos e os desacordos que aparecerem na dupla.

A professora recolhe as produções individuais e das duplas de toda a turma.

5ª situação: discussão coletiva (3ª aula)

A professora analisa as produções das crianças e, na aula seguinte, faz a devolução coletiva, baseada nas respostas elaboradas pelas duplas para a pergunta proposta.

TERCEIRA ETAPA

Essa etapa visa a elaboração de uma regra – e uma razão – a partir de duas novas séries de cálculos em que as parcelas correspondam a dezenas diferentes. A regra deve contemplar também a lista proposta na etapa anterior.

6ª situação: trabalho individual (3ª aula)
A professora entrega para cada criança outro quadro contendo cálculos do tipo “quarenta e alguma coisa” mais “vinte e alguma coisa”. Solicita que, assim como fizeram na 3ª situação, antecipem, sem fazer as contas, como começará o resultado de cada um e anotem com palavras na coluna reservada para as antecipações. Depois, resolvam com a calculadora e anotem o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	**Calculadora**
43 + 25 =		
44 + 26 =		
44 + 25 =		
45 + 29 =		

Para as crianças que terminarem de preencher o quadro, a professora propõe uma tarefa complementar:

<u>Tarefa</u>: *Escreva três cálculos cujo resultado comece com 60 e outros três cujo resultado comece com setenta.*

Em seguida, a professora distribui um novo quadro para as crianças, dessa vez contendo cálculos do tipo “cinquenta e alguma coisa” mais “trinta e alguma coisa”.

	Antecipação	**Calculadora**
55 + 33 =		
52 + 39 =		

53 + 37 =		
51 + 36 =		

Da mesma forma como com o quadro anterior, a professora propõe uma tarefa complementar para as crianças que terminarem de preencher o quadro: *Escreva três cálculos cujo resultado comece com oitenta e outras três cujo resultado comece com noventa.*

7ª situação – trabalho em duplas (3ª aula – até aqui)

A professora propõe que as crianças, organizadas em duplas, discutam e respondam à seguinte pergunta: *Como fazer para saber com segurança, sem fazer a conta, como começará o resultado (com sessenta ou com setenta, com oitenta ou noventa, com cinquenta ou sessenta...)?*

A professora entrega uma folha para cada dupla para que registrem as respostas elaboradas e informa que, se for necessário, podem consultar os quadros das situações anteriores.

As crianças precisam discutir como fazer antecipações corretas para adições de números de dois algarismos, seja qual forem as dezenas envolvidas. Para tanto, precisarão refletir sobre as razões que sustentam os acertos e os erros.

A professora propõe que as duplas discutam o seguinte problema: *As somas de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa (3_ + 2_) poderiam dar um resultado que comece com quarenta? E com setenta?*

8ª situação – discussão coletiva (4ª aula)

Discutir o problema: *As somas de trinta e alguma coisa mais vinte e alguma coisa (3_ + 2_) poderiam dar um resultado que comece com quarenta? E com setenta?*

9ª situação – institucionalização (4ª aula – final)

Essa situação tem com objetivo elaborar uma conclusão compartilhada por todo o grupo e institucionalizá-la.

Inicialmente, a professora apresenta um quadro para o grupo e propõe o seguinte problema para que discutam coletivamente:

Qual das seguintes afirmações explica melhor o que acontece quando se soma quarenta ou quarenta e alguma coisa mais trinta ou trinta e alguma coisa?

(as afirmações incluídas neste quadro devem ser selecionadas entre as realizadas pelos alunos nas situações anteriores).

4_ + 3_

Para que dê 7_	**Para que dê 8_**
• • • •	• • •

Em uma segunda fase, a professora distribui cópias do quadro e os alunos trabalham em dupla.

Depois do trabalho em grupos, discutem, coletivamente, as conclusões elaboradas. A professora retoma a consigna inicial: "Vamos ver algumas das afirmações que estão no quadro para discutir coletivamente por que lhes parece que essas podem explicar melhor o que passa ou não. Lembrem-se de que não quer dizer que uma está boa e as outras não. Quer dizer que uma explica melhor que as outras". A professora analisa com os alunos cada afirmação, considerando quais são os cálculos para os quais é valida, propondo contraexemplos quando houver cálculos para os quais não é válida e destacando de várias maneiras diferentes o caráter geral que deve ter a explicação.

ANEXO B - Atividades propostas para as crianças

E.E. PE. FRANCISCO

Nome: ____2º Ano ___

Prof. ____

Primeira etapa: Diagnóstico

Paulo tinha 38 figurinhas e ganhou 25 de seu amigo. Com quantas figurinhas Paulo ficou?

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO

PUC-SP

Nome: ____2º Ano ____

Prof. ____

Segunda aula

1. Sem fazer as contas, antecipe como começará o resultado de cada cálculo: com cinquenta ou com sessenta. Anote com palavras, na coluna reservada para as antecipações e, depois de cada antecipação, resolva com a calculadora e anote o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	Calculadora
32 + 26 =		
38 + 21 =		
37 + 27 =		
36 + 27 =		
35 + 25 =		

2. Discuta com um colega como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado ia começar com cinquenta ou com sessenta. Anotem as conclusões, o que estão de acordo e os desacordos que aparecerem.

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO

PUC-SP

Nome: ____2º Ano _____

Prof. ____

Terceira aula

1. Sem fazer as contas, antecipe como começará o resultado de cada cálculo. Anote com palavras, na coluna reservada para as antecipações e, depois, resolva com a calculadora e anote o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	**Calculadora**
43 + 25 =		
44 + 26 =		
44 + 25 =		
45 + 29 =		

2. Sem fazer as contas, antecipa como começará o resultado de cada cálculo. Anote, com palavras, na coluna reservada para as antecipações e, depois, resolva com a calculadora e anote o resultado com números na coluna correspondente.

	Antecipação	**Calculadora**
55 + 33 =		
52 + 39 =		
53 + 37 =		
51 + 36 =		

3. Discuta com um colega como fizeram para saber com segurança, sem fazer a conta, se o resultado ia começar com *sessenta ou com setenta, com oitenta ou noventa, com cinquenta ou sessenta...?* Anotem as conclusões.

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO

PUC-SP

Nome: ____2º Ano _____

Prof. ____

3. SEM FAZER AS CONTAS, ANTECIPE COMO COMEÇARÁ O RESULTADO DE CADA CÁLCULO: COM SETENTA OU COM OITENTA. ANOTE COM PALAVRAS, NA COLUNA RESERVADA PARA AS ANTECIPAÇÕES E, DEPOIS DE CADA ANTECIPAÇÃO, RESOLVA COM A CALCULADORA E ANOTE O RESULTADO COM NÚMEROS NA COLUNA CORRESPONDENTE.

	ANTECIPAÇÃO	CALCULADORA
42 + 36 =		
48 + 31 =		
47 + 37 =		
46 + 37 =		
45 + 35 =		

4. **DISCUSSÃO COLETIVA**: COMO FIZERAM PARA SABER COM SEGURANÇA, SEM FAZER A CONTA, SE O RESULTADO IA COMEÇAR COM SETENTA OU COM OITENTA?

E.E. PADRE FRANCISCO JOÃO DE AZEVEDO

PUC-SP

Nome: ___________________________ 2º Ano _____

Prof. ______________________________________

1) **DISCUSSÃO COLETIVA:** AS SOMAS DE "TRINTA E ALGUMA COISA" + "VINTE E ALGUMA COISA" (3_+2_), PODERIAM DAR UM RESULTADO QUE COMECE COM QUARENTA? E COM SETENTA?

2) **EM DUPLAS:** QUAL DAS SEGUINTES AFIRMAÇÕES EXPLICA MELHOR O QUE ACONTECE QUANDO SE SOMA CINQUENTA OU CINQUENTA E ALGUMA COISA, MAIS TRINTA OU TRINTA E ALGUMA COISA?

5_ + 3_

PARA QUE DÊ 8_	**PARA QUE DÊ 9_**
• QUANDO OS NÚMEROS SÃO MENORES DÁ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_).	• QUANDO OS NÚMEROS SÃO MAIORES, DÁ NOVENTA OU "NOVENTA E ALGUMA COISA" (9_).
• PARA QUE DÊ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_), A SOMA DAS UNIDADES TEM QUE DAR 9.	• SE 50+30=80, ENTÃO, 31+59=90 OU NOVENTA E ALGUMA COISA, PORQUE AQUI O RESULTADO DÁ 10.
• PARA QUE DÊ OITENTA OU "OITENTA E ALGUMA COISA" (8_), A SOMA DAS UNIDADES NÃO PODE PASSAR DE 9.	• PARA QUE DÊ NOVENTA OU "NOVENTA E ALGUMA COISA" (9_), A SOMA DAS UNIDADES TEM QUE DAR 10.
	• PARA QUE DÊ NOVENTA OU "NOVENTA E ALGUMA COISA" (9_), A SOMA DAS UNIDADES TEM QUE PASSAR DE 10.