PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

JAYME DO CARMO MACEDO LEME

APRENDIZAGEM DA DERIVADA:
UMA PERSPECTIVA DE ANÁLISE PELOS FLUXOS DE PENSAMENTO

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2016

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

JAYME DO CARMO MACEDO LEME

APRENDIZAGEM DA DERIVADA:
UMA PERSPECTIVA DE ANÁLISE PELOS FLUXOS DE PENSAMENTO

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Doutor em Educação Matemática****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

SÃO PAULO
2016

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

____

Assinatura

____

Local e Data

DEDICATÓRIA

Normalmente, a dedicatória é feita em poucas linhas e oferecida a parentes próximos. Mas, hoje, vou fazer algo diferente. Dedicarei essa pesquisa, a alguém que foi especial em minha vida acadêmica, a alguém que, no meio de tantos alunos de uma graduação, me tratou como um filho, investindo esforços por acreditar que talvez eu pudesse ter um futuro, mesmo sabendo que, daqueles muitos alunos, poucos iriam conseguir almejar titulações maiores que a graduação. Essa pessoa é minha mãe por consideração, minha amiga, minha querida orientadora e eterna professora a Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori!

Eu a considero como uma mãe, porque quando entrei na graduação não tinha a mínima pretensão em seguir carreira docente; no entanto, como um debutante, que é apresentado à sociedade, ela me inseriu no mundo além da graduação, abriu portas para minha vida profissional, tornou-me uma pessoa melhor e mais reflexiva, amparou-me em momentos difíceis e orientou-me de forma esplêndida e magistral, tanto no mestrado como no doutorado. Não quero dizer que esse percurso tenha sido fácil e cheio de flores, pois, muitas vezes, discutimos, discordamos e até brigamos, assim como membros de uma família, mas sem perder o respeito e carinho mútuo, pois sempre a admirei nesses quase 20 anos que a conheço.

Bem, eu poderia tecer elogios por muitas e muitas páginas, mas, como recomendado por ela “fazer uma tese enxuta”, vou precisar encerrar por aqui.

Para finalizar, quero ressaltar que muitos de nós, humanos, não sabemos o porquê de nossa existência, porém sei que a existência da professora Sonia, assim como muitos outros motivos, foi me tornar no profissional que sou hoje e, por isso, um pedaço de sua essência fundiu-se à minha e assim como um gene, será transmitido entre as gerações e gerações de minha família, pois sempre é e sempre será lembrada nas minhas conversas.

Por isso, torno pública essa dedicatória, forjada por lágrimas das lembranças que as palavras resgatam e dedico todo meu trabalho a ela.

Com carinho, Jayme Leme

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori, pela sua sapiência e olhos observadores, por plantar uma semente de esperança em minh'alma enquanto eu ainda era um jovem graduando. Hoje, ela colhe os frutos, debutando mais um doutor, cuja vida foi moldada pelo seu exemplo e que traz como reflexo, traços de um filho que herda parte de seus ensinamentos.

Aos professores Dr. Rogério Ferreira da Fonseca, Dra. Mariluci Alves Martino, Dr. Gerson Pastre de Oliveira e Dra. Cristiana Abud da Silva Fusco, que compuseram a banca examinadora desta tese e na qualificação contribuíram de modo significativo no direcionamento final da pesquisa por meio de suas críticas e sugestões pertinentes e bem colocadas.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pela solidez do corpo docente, cujo objetivo comum é a transformação dos discentes do programa em pesquisadores reflexivos e competentes. Em especial, agradeço aos professores Prof. Dr. Fumikazu Saito, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar pela excelência das disciplinas ministradas, cujos ensinamentos foram fundamentais para meu amadurecimento pessoal e científico.

A meus amigos do Programa, pelos momentos de amizade e compartilhamento dos desesperos que passamos juntos. Um agradecimento especial a meu amigo Marcio Vieira Almeida, pela amizade e prestatividade nas discussões de pontos da tese e Marcílio Farias da Silva, pelo companheirismo nos inúmeros seminários que apresentamos juntos.

À professora Dra. Mariluci Alves Martino, Coordenadora Técnica do Ensino Superior de Graduação e o professor Dr. Marcos Antonio Maia de Oliveira, diretor da FATEC Guarulhos, pelo incentivo e apoio na manutenção de meu afastamento parcial, que permitiu maior dedicação e aprofundamento da tese.

À minha amiga professora Telma Bueno, pelo incentivo e auxílios e sugestões na redação do texto e, ao amigo, professor Marco Assis, pelo apoio e felicidade radiante que sempre compartilhou comigo.

À professora Ivone Borelli, pela cuidadosa revisão gramatical deste trabalho.

À professora Mariane Teixeira, pelo pronto atendimento na revisão do *abstract*.

À professora Marta Farrero, pelas contribuições na revisão do *resumen*.

Aos meus filhos Jayme, Julia, Manuela e Yasmin pelo apoio que me ofereceram durante a realização do doutorado e, um beijo muito especial a minha esposa Amanda Augusto Leme, pela sua paciência nos meses mais críticos, ajuda nas leituras da tese e solidariedade nas discussões e reflexões teóricas que compartilhou comigo, mesmo sendo conversas unilaterais.

Ao Centro Paula Souza, pela concessão do afastamento parcial sem prejuízo, incentivo esse fundamental para a qualificação e excelência de seus docentes.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

A presente tese tem como temática a aprendizagem da derivada. A pesquisa foi motivada pelo problema: Quais são os diferentes pensamentos relacionados ao processo de aprendizagem de um conceito? Assim, buscou-se na teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por David Tall, elementos que permitem compreender, como os humanos aprendem a pensar matematicamente. A partir desse referencial, foram desenvolvidos nove fluxos de pensamento envolvidos na aprendizagem de um conceito matemático. Também foi realizado um estudo da derivada para compor o material de análise desta pesquisa e, na perspectiva dos fluxos de pensamento, destacou-se os fluxos que permitem observar elementos de aprendizagem da derivada, como no mundo corporificado, que apresenta aspectos sensíveis e perceptíveis aos sentidos, ocasião em que é tratado como a inclinação da reta tangente, a retidão local de uma curva ou a taxa de variação instantânea; no mundo simbólico, são observadas rotinas e processos tácitos a esse conceito, que são executados a fim de se criar simbologias próprias; e no mundo formal, observou-se a estrutura axiomática que a derivada pode ser concebida. Esta tese apresenta uma proposta *teórica exploratória*, pois se trata de uma pesquisa que utiliza apenas documentos para construir os próprios conceitos e argumentos, utilizando o rigor e a coerência lógica, para produzir um material de base para novos estudos. Outro resultado observado, que resultou em um avanço dentre as teorias discutidas, refere-se a característica perceptível da derivada, pertencente ao mundo corporificado, pois esta desvincula-se de características processuais, propiciando dessa forma, oferecer um referencial base para novas investigações no processo de ensino e aprendizagem da derivada.

Palavras-Chave: Aprendizagem da derivada, Os Três Mundos da Matemática, Fluxos de pensamento, Cálculo Diferencial e Integral.

ABSTRACT

This thesis has as main theme the learning of the derivative. The research was motivated by the questioning: What are the different thoughts related to the learning process of a concept? Thus, the theory of the Three Worlds of Mathematics proposed by David Tall was used as basis, what brought elements that allow us to understand how humans learn to think mathematically. From this framework, was developed nine thought flows involved in learning a mathematical concept. A study of the derivative is also held to compose the material analyzed in this research and, from the perspective of thought flows, specific flows that allow us to observe learning elements of derivative were highlighted, as in the embodied world, which presents sensitive and noticeable aspects, when it is treated as the tangent line slope, place of righteousness instant variation curve or rate. In the symbolic world, it's possible to observe routines and tacit processes to this concept, which are run in order to create their own symbols; and in the formal world, it was observed the axiomatic structure that a derivative can be designed. This thesis follows the exploratory theoretical proposal, because it is a research that relies only on documents to build its own concepts and arguments, using the accuracy and logical consistency to produce a base material for further research. Another result observed, which resulted in a breakthrough among the theories discussed, refers to noticeable feature of the derivative, belonging to the embodied world as this unlinked is procedural characteristics, providing thus provide a reference basis for further investigations in the process teaching and learning derivative.

Keywords: Learning of derivative, the Three Worlds of Mathematics, thought flows, Calculus.

RESUMEN

Esta tesis tiene como tema el aprendizaje de la derivada. La investigación fue motivada por el problema: ¿Cuáles son los diferentes pensamientos relacionados al proceso de aprendizaje de un concepto? De esta forma, se buscó en la teoría de los Tres Mundos de las Matemáticas, propuestas por David Tall, elementos que permitiesen comprender como los humanos aprenden a pensar matemáticamente. A partir de este referencial, se utilizó para desarrollar nueve corrientes de pensamiento involucrados en el aprendizaje de un concepto matemático. También se realizó un estudio de la derivada para componer el material de análisis de esta investigación y, en la perspectiva de las corrientes de pensamiento, se destacaron las corrientes que permiten observar elementos del aprendizaje de la derivada, como en el mundo corporificado, que presenta aspectos sensibles y perceptibles a los sentidos, ocasión en que es tratada como la inclinación de la recta tangente, rectitud local de una curva o tasa de variación instantánea; en el mundo simbólico, se observaron rutinas y procesos tácitos a este concepto, que son ejecutados con el objetivo de crear simbologías propias; y en el mundo formal, se observó la estructura axiomática en la que la derivada se puede concebir. Esta tesis, sigue la propuesta teórica exploratoria, pues se trata de una investigación que utiliza sólo documentos para construir los propios conceptos y argumentos, utilizando el rigor y coherencia lógica, para producir un material de base para nuevas investigaciones. De esta manera, por las corrientes de pensamiento relacionados al aprendizaje de la derivada, nuevas investigaciones pueden ser producidas, como la elaboración de secuencias didácticas o análisis de conceptos de alumnos de Cálculo Diferencial e Integral, con foco en la derivada.

Palabras clave: Aprendizaje de la Derivada, los Tres Mundos de las Matemáticas, Corrientes de pensamiento, Cálculo Diferencial e Integral.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

– INTRODUÇÃO –

A presente pesquisa foi realizada no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no âmbito do Grupo de Pesquisa credenciado pelo CNPq, “O Elementar e o Superior em Matemática” liderado por Sonia Barbosa Camargo Igliori. Este trabalho discorre sobre potencialidades dos fluxos de pensamento para a aprendizagem do conceito de derivada. O Cálculo Diferencial e Integral, que tem a derivada como um de seus conceitos fundamentais, foi um marco para a evolução da humanidade e mudou o modo de se fazer ciência. O emprego da derivada, não se restringe apenas à Matemática, sendo aplicado em outras áreas do saber, como: Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia, entre outras, a fim de resolver problemas, como: Qual a velocidade necessária para que um certo foguete vença a gravidade terrestre? Se uma colônia de bactérias cresce conforme certa lei funcional, qual será a quantidade dessa população em um determinado instante t? A partir das curvas de demanda e custos, qual o nível de produção de um certo produto p, conforme certa lei, para se maximizar o lucro?

Em minha experiência como docente, percebo que grande parte dos alunos quando estudam a disciplina Cálculo[1] apresenta maior facilidade em compreender os aspectos processuais da derivada, do que o estrutural, ou seja, é mais fácil utilizar regras para obter derivadas do que entender o que é a derivada. Essa percepção também é investigada por pesquisas em Educação Matemática que tratam de dificuldades na compreensão do conceito de derivada e podem focar em diferentes vertentes, como a realizada por Ramos (2009), que buscou fazer um levantamento de dificuldades e concepções de alunos, no que se refere à compreensão do conceito de derivada e suas aplicações. Outros pesquisadores buscam elaborar atividades ou sequências didáticas a fim de otimizar o aprendizado da derivada, como a de D’Avoglio (2002) que propôs uma

[1] Iremos utilizar o termo Cálculo para nos referenciar tanto à disciplina como aos conceitos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, em razão da frequência que este termo aparece nesta pesquisa.

sequência didática, utilizando conceitos do cotidiano, para o favorecimento da aprendizagem. Também, há outro grupo de pesquisas que busca investigar aspectos de aprendizagem do conceito derivada, como o trabalho de Leme (2003), que apresentou uma reflexão sobre os aspectos processuais e estruturais da derivada à luz da teoria de Anna Sfard; Meyer (2003) investigou, sob o ponto de vista geométrico, elementos da imagem conceitual e definição conceitual relativa à derivada; e Godoy (2004) analisou a percepção dos alunos sobre derivada à luz da teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval. Esta tese toma a direção do grupo de pesquisas, a fim de contribuir com a ampliação dos estudos que tratam desse tema.

Assim, damos continuidade à pesquisa de Leme (2003) propondo o aprofundamento, tomando como base um referencial teórico que leva em conta aspectos perspetiveis, processuais e formais na aprendizagem na derivada.

Nesta tese o foco não é o objeto matemático, mas, sim, como esse objeto pode ser percebido pelo sujeito, ou seja, o foco está na formação do pensamento matemático quando o sujeito aprende o conceito de derivada. Trata-se portanto de uma pesquisa no âmbito das investigações cognitivistas referenciadas pelo estudo dos fluxos de pensamento do sujeito quando aprende matemática. Tomamos como hipótese que a identificação dos diferentes fluxos do pensamento pode acrescentar informações sobre a aprendizagem do conceito de derivada. Tal hipótese nos leva a formular a seguinte questão norteadora:

Quais são os fluxos de pensamento, embasados na teoria dos Três Mundos da Matemática, envolvidos na aprendizagem da derivada?

A busca de encaminhamento à essas questões são fundamentais para o interferir na aprendizagem da derivada de modo profícuo, e as respostas a elas podem trazer base para novas pesquisas voltadas para o ensino, como elaboração de sequencias didáticas ou de outras propostas pedagógicas.

Finalizamos a introdução, descrevendo a organização do relatório desta pesquisa, sendo constituído de cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os caminhos que levaram à escolha do tema e a delimitação do problema de pesquisa. No segundo, trazemos a derivada na perspectiva dos elementos históricos, da estrutura conceitual e nas abordagens de aprendizado. Já, no capítulo terceiro, apresentamos o corpo da Teoria dos Três Mundos da Matemática, proposto por David Tall e trabalhos que contribuíram para uma melhor compreensão dessa teoria, além de trazer uma reflexão das pesquisas de Kendal, Sfard e Tall. Na sequência, vem o quarto capítulo, em que explicitamos quais são os fluxos de pensamento embasados na teoria de Tall (2013), realizando no quinto capítulo, uma análise dos fluxos de pensamento para a aprendizagem da derivada.

– CAPÍTULO 1 –

Trajetória do Pesquisador, Pesquisas Correlatas e Problema de Pesquisa

Meu primeiro contato com as dificuldades para a compreensão dos conceitos de Cálculo surgiu ao ingressar em um curso de Licenciatura em Matemática em 1997. Lembro-me que era uma disciplina temida por muitos alunos e, realmente, foi bastante desafiadora para mim. Em 2000, iniciei a carreira como docente em um curso superior, ministrando aulas de Cálculo. Na ocasião, deparei-me com novas dificuldades, não só as de aprendizagem, mas também as relacionadas ao ensino dessa disciplina. Em busca de respostas, procurei uma formação que pudesse responder alguns questionamentos, o que me levou a cursar o Mestrado em Educação Matemática no Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que me apresentou o mundo da pesquisa. Nesse período, investiguei algumas dificuldades para a compreensão conceitual do Cálculo, mais especificamente, o conceito de derivada. De acordo com Leme (2003), uma das dificuldades para a compreensão desse conceito decorre da farta priorização dos aspectos procedimentais apresentados pelos livros didáticos sobre a disciplina em pauta, destacando que:

> O privilégio dado à representação simbólica da derivada não propicia uma unificação semântica dessa noção. Esta discrepância sugere uma grande possibilidade de que os livros didáticos sejam geradores de dificuldades para a compreensão conceitual da derivada.
> (LEME, 2003, p.80)

Nos últimos 16 anos, como professor e pesquisador com enfoque no Cálculo, tive diferentes oportunidades para analisar e discutir os aspectos didáticos dessa disciplina. Durante o doutorado, pude me aprofundar em questões mais complexas que me permitiram desenvolver esta pesquisa. Esse conjunto de experiências vividas pode ser explicado pelo termo “met-before”, conforme Tall (2013):

> […] para descrever como nós interpretamos novas situações em termos de experiências que já vivemos, no qual a palavra *met-before* não se refere à experiência atual em si mesma, mas, aos traços que elas deixam e que afetam nosso pensamento atual.[2]
> (TALL, 2013, posição 1.785, tópico 4, tradução nossa)[3]

Apoiado nessa experiência, inicialmente, pretendia investigar como o conceito de derivada era tratado nos cursos de Tecnologia do Centro Paula Souza. Essa intencionalidade levou-me a consultar diversos projetos pedagógicos dos referidos cursos que continham essa disciplina como componente curricular. Após a leitura desses documentos, fiquei atônito ao saber a quantidade e diversidade de cursos que possuiam essa disciplina e, no entanto, apresentavam mesma ementa ou ementas similares.

Em um segundo momento, pelo meu vínculo profissional com a Coordenadoria do Ensino Superior do Centro Paula Souza, órgão esse responsável pela gestão e definição das Diretrizes Curriculares das Fatecs, entre outras funções, eventualmente, tive conversas com alguns colegas responsáveis pela elaboração das matrizes curriculares e projetos pedagógicos. Ao indagá-los sobre a peculiaridade da mesma ementa de Cálculo para os diversos cursos, obtive como resposta “Cálculo é Cálculo, não interessa o curso”. Esse fato ia na contramão de minha prática, como docente de Cálculo, pois, quando ministrava aulas em um curso de Engenharia, tratava de certos conceitos que não eram discutidos, quando era professor em um curso de Logística. Isso me chamava a atenção e apontava uma possível direção de pesquisa, focando os conceitos dessa disciplina, sob diferentes domínios. No entanto, mesmo considerando

---

[2] […] to describe how we interpret new situations in terms of experiences we have met before, where the word met-before refers not to the actual experience itself, but to the trace that it leaves in the mind that affects our current thinking.

[3] Citação de um livro em formato e-book, que são livros em formato digital que possuem posições em lugar de páginas para localizar um texto no livro. Além da posição, foi adicionado também o tópico do livro onde se encontra a citação.

importante essa condução, optamos por nos debruçar nos aspectos conceituais no lugar dos pragmáticos.

Posteriormente, na tentativa de desenhar a problemática e delimitar o problema de pesquisa, fui levado a refletir que um estudo sobre a disciplina de Cálculo não propiciaria um aprofundamento esperado em uma tese de doutorado, o que me levou a focar especificamente a noção de derivada.

Concomitante a esses diferentes momentos, estava em busca de um referencial teórico que pudesse sustentar e embasar a pesquisa que estava se fundamentando e foi pela leitura do livro de Tall (2013) “Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente: Explorando os Três Mundos da Matemática”[4], que encontrei a teoria norteadora para a fundamentação da presente pesquisa, cujo tema convergia para as discussões do Grupo de Pesquisa “O Elementar e o Superior em Matemática” (GPES), da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, gerido pela pesquisadora Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori, que me orientou neste trabalho.

Tal caminho convergiu para a busca de um olhar mais atento à derivada e observamos que a teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall (2013), seria a luz que iluminaria esta jornada.

Antes de nos debruçarmos nesta investigação, apresentamos o caminho percorrido para delimitar o problema de pesquisa.

[4] Título original: “How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics”

1.1 Problemática e Problema de Pesquisa

> *Um problema de pesquisa é um problema! Pois a mente humana é, em geral, bastante sábia para não se inquietar inutilmente.*
> *(Laville e Dionne)*

Para Laville e Dionne (1999), existem duas grandes categorias de pesquisa. A primeira, visa a preencher uma lacuna nos conhecimentos, buscando ampliar o conjunto dos saberes disponíveis e que poderão ser utilizados para a solução de problemas de demandas sociais. A segunda categoria de pesquisa, tem por motivação contribuir para resolver um problema de nosso meio. Foi, por essa segunda categoria, que buscamos então delimitar o problema de pesquisa.

Para tanto, ao se realizar uma investigação, diferentes níveis de problemas de pesquisa podem ser encontrados, seja o de um estudante em iniciação científica ou o de um pesquisador profissional. Logo, o problema de pesquisa é delimitado, de acordo com os conhecimentos e experiências do pesquisador em suas respectivas áreas do saber. (LAVILLE e DIONNE, 1999).

Para os autores, "Um *problema de pesquisa* é um problema que se pode resolver com conhecimentos e dados já disponíveis ou aqueles factíveis de serem produzidos" (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 87). Tais problemas não surgem por acaso nem são encontrados no jardim. Eles assombram o meio social em que estamos inseridos, advindos de nossa experiência e são uma mistura de conhecimentos e crenças constituídas das mais variadas amplitudes e domínios.

Assim, o problema de pesquisa está contido em uma problemática, pois "A problemática é o conjunto dos fatores que fazem com que o pesquisador conscientize-se de um determinado problema" (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 98).

Pela minha vivência como professor de Cálculo, tive a oportunidade de ministrar aulas dessa disciplina em quatro Instituições de Ensino Superior, que possuíam os cursos de Licenciatura em Matemática, Ciências da Computação, Engenharia Química e Logística. Essa diversidade de cursos permitiu-me viver diferentes experiências, que influenciaram minha prática docente e levaram-me a fazer escolhas quanto à abordagem dos conceitos tratados na disciplina.

Logo, a compreensão de um conceito é moldada também pelos aspectos didáticos relacionados à construção do conceito: conforme Tall e Vinner (1981), os aprendizes elaboram *imagens conceituais* relativas à um conceito. Assim, a formação de imagens conceituais possui uma relação de dependência com as atividades vivenciadas pelos alunos e são desenvolvidas pelos diferentes pensamentos que estas propiciam. Por esse raciocínio, pudemos levantar as seguintes questões formuladas intuitivamente: Quais são os diferentes pensamentos relacionados ao processo de aprendizagem de um conceito? Que tipos de atividades desencadeiam tais pensamentos?

Laville e Dionne (1999) referem que as questões intuitivas, advindas da percepção, pertencem à problemática sentida, que:

> A conscientização de um problema de pesquisa depende, portanto, do que dispomos no fundo de nós mesmos: conhecimentos de diversas ordens - brutos e construídos - e entre esses conceitos e teorias; conhecimentos que ganham sentido em função de valores ativados por outros valores: curiosidade, ceticismo, confiança no procedimento científico e consciência de seus limites...
>
> Nessa etapa, as capacidades intuitivas ganham importância. A percepção inicial de um problema é, muitas vezes, pouco racional. No entanto, percebendo o problema, já temos uma ideia do modo como poderíamos resolvê-lo: já temos uma hipótese (às vezes várias).
>
> A primeira preocupação do pesquisador é então passar dessa percepção intuitiva do problema a ser resolvido - e de sua eventual solução - para seu domínio metódico, racional. Em resumo, objetivar sua problemática (LAVILLE; DIONNE, 1999, p. 97).

Nesta problemática, as ideias do problema ainda não estavam precisas, mas já mostravam um caminho possível a seguir. Com a finalidade de amadurecer essa problemática sentida, buscamos pesquisas que tratassem da aprendizagem de conceitos matemáticos, em especial, o de derivada, a fim de observar como essas questões poderiam ser tratadas em um contexto científico. Essa busca está em conformidade com as pesquisas em Educação Matemática e empregamos o entendimento sobre pesquisas em Educação Matemática, de forma análoga à apresentada por Malara e Zan (2002):

> Como uma ciência teórica e autônoma, baseada em um sistema conceitual e sobre métodos originais de investigação, não emprestados de disciplinas próximas, que objetiva estudar o fenômeno do ensino da Matemática em sua complexidade em vista de seu contexto[5] (MALARA; ZAN, 2002, p. 553, tradução nossa).

Com essa compreensão de pesquisa, somada às questões iniciais, fomos direcionados a alguns estudos que tratassem de investigações sobre o desenvolvimento do conceito de derivada. Para Laville e Dionne (1999), o amadurecimento dessa problemática sentida, amparada em pesquisas reconhecidas em uma determinada área do saber, caracteriza-se como uma problemática consciente e que é denominada por eles, como *problemática racional*, definida como:

> A problemática é o conjunto dos fatores que fazem com que o pesquisador conscientize-se de um determinado problema, veja-o de um modo ou de outro, imaginando tal ou tal eventual solução. O problema e sua solução em vista não passam da ponta de um iceberg, ao passo que a problemática é a importante parte escondida. Uma operação essencial do pesquisador consiste em desvendá-la. (LAVILLE e DIONNE, 1999, p.98)

Com base no levantamento bibliográfico, destacamos que a pesquisa de Sfard (1991) apresentava as características dos aspectos processuais e estruturais de um conceito matemático e que os conceitos são apreendidos ao transitarem pelos estágios de *interiorização*, *condensação* e *reificação*, levando o sujeito do aprendizado a “visualizar’ objetos abstratos.

Tall e Vinner (1981) destacam que as *imagens conceituais* são constituídas pelas imagens mentais, propriedades e processos relacionados a um conceito, sendo a *definição conceitual*, a tentativa de externalizar a *imagem*

---

[5] As a theoretical and autonomous science, based on a conceptual system and on original methods of inquiry not borrowed from close disciplines, aimed at studying the phenomenon of mathematics teaching in its complexity and seen in its context.

conceitual pelo sujeito, que pode ou não estar de acordo com a definição matemática do conceito.

As pesquisas de cunho cognitivo discutem diferentes aspectos relacionados ao pensamento e aquisição de conceitos matemáticos, compondo, então, parte da problemática racional. No entanto, para avançarmos nas pesquisas em Educação Matemática, devemos buscar novos horizontes de forma a confrontar, complementar ou ampliar possíveis caminhos para a compreensão dos conceitos matemáticos, como a proposta por Kendal (2001) que formulou 18 habilidades necessárias para a compreensão da derivada, envolvendo os registros numérico, gráfico e simbólico e os processos cognitivos de formulação e interpretação.

A fim de contribuir com esse rol de pesquisas que tratam da conceitualização da derivada, buscamos na teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall (2013), outra perspectiva que permitisse analisar, sob o ponto de vista cognitivo, diferentes fluxos de pensamento para a aprendizagem de um conceito.

Logo, compreender os diferentes fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada é um problema de pesquisa, enquadrado em uma problemática mais ampla, na qual teremos que produzir dados que permitam analisar a derivada sob este enfoque cognitivo.

1.2 Levantamento Bibliográfico

Neste tópico, apresentamos uma revisão da literatura que trata da Educação Matemática e conceitos relacionados ao Cálculo, que contribuíram de forma direta ou indireta para este estudo.

Os artigos, dissertações e teses consultadas que fomentaram as bases para nossas argumentações, foram buscados exclusivamente pela *Internet* seja em bibliotecas virtuais, seja em artigos encontrados no Google acadêmico.

O histórico apresentado na Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED) relata que o Grupo de Trabalho 19 foi criado em 1999, na 22ª reunião anual, em decorrência do aumento de pesquisas em Educação Matemática no País. Teve contribuição da pesquisadora Sonia Barbosa Camargo Igliori, 1ª coordenadora do GT 19, para a crescente organização de núcleos de pesquisas em Educação Matemática, nos Programas de Pós-Graduação em Educação, além da consolidação dos Programas de Pós-Graduação específicos em Educação Matemática, como o da UNESP (Rio Claro) e o da PUC-SP. Tal fortalecimento acentuou uma preocupação dos pesquisadores em Educação Matemática relacionada ao processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, em razão do alto índice de reprovações, tanto nas universidades particulares como nas públicas. Tais dificuldades, de acordo com Ferrini-Mundy e Graham (1991), não eram uma característica dos estudantes brasileiros, mas uma característica típica de estudantes de Cálculo, corroborando para o surgimento de um movimento nos Estados Unidos da América denominado Reforma do Ensino do Cálculo, que iniciou em 1986 e foi motivado por fatores como a compreensão conceitual dos temas dessa disciplina e fatores de ordem pragmática, ligados à sua aplicabilidade em outros campos profissionais.

Pinto (2002) ressalta que, no Brasil, essa preocupação é marcada, em 2000, pelo I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em que foi constituído o primeiro grupo de trabalho para pesquisas no Ensino Superior, denominado Grupo de Trabalho nº 04 - Educação Matemática do Ensino Superior que, na época desta pesquisa era coordenado pelo pesquisador José Carlos Leivas. Nesse encontro, as pesquisas puderam ser agrupadas em quatro segmentos: a que investiga a prática docente, a que focaliza a conceitualização pelos alunos; a que trata da definição e da argumentação em Matemática e a que elege como objeto, a Matemática.

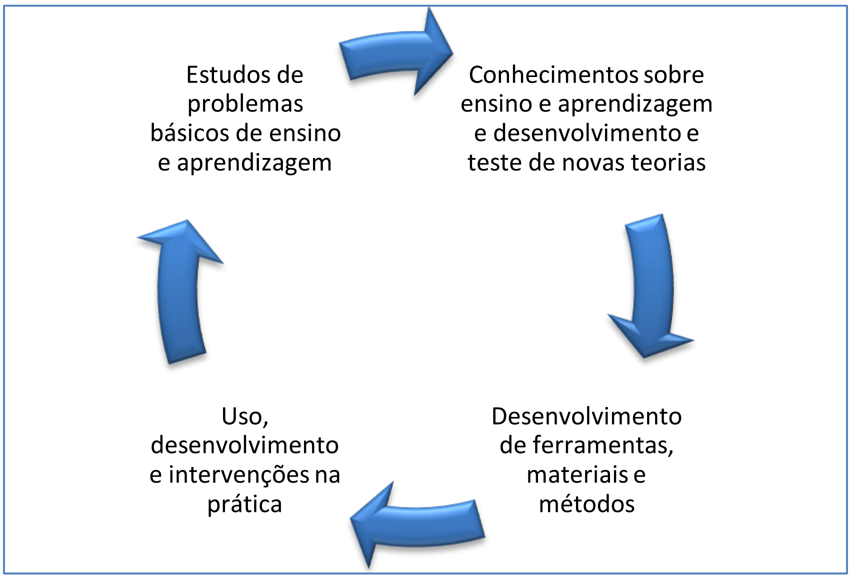
Algumas pesquisas como as de Villarreal (1999), Dall’Anese (2000) e Leme (2003) investigaram a compreensão produzida por alunos universitários sobre os conceitos de Cálculo, optando por focar exclusivamente em um determinado conceito, o da derivada.

Em artigos mais recentes, como *Pesquisas sobre Cálculo: o que sabemos e em que direção precisamos ir?*[6] de Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014), observamos uma proposta que apresenta um possível caminho para a produção e melhoria da prática docente, conforme segue:

> As pesquisas sobre ensino e aprendizagem do Cálculo, geralmente, têm seguido um padrão de identificar e estudar as dificuldades dos alunos e obstáculos cognitivos, seguidas por investigações dos processos pelos quais os alunos aprendem conceitos particulares, evoluindo para estudos em sala de aula, incluindo os efeitos das inovações curriculares e pedagógicas sobre a aprendizagem do aluno e, mais recentemente, a pesquisa sobre o conhecimento, crenças e práticas dos professores. Podemos ver esse padrão na pesquisa, em diferentes graus e em diferentes subdomínios do Cálculo: limite, derivada e integral[7] (RASMUSSEN, MARRONGELLE e BORBA, 2014, p.508).

Ainda, de acordo com os autores, podemos observar um ciclo do conhecimento para a produção e melhoria da prática docente, conforme observamos na Figura 1:

Figura 1 – Ciclo do conhecimento para a produção e melhoria da prática



Fonte: Adaptado pelo autor

---

[6] Research on calculus: what do we know and where do we need to go?

[7] Research on calculus learning and teaching generally has followed a pattern of identifying and studying student difficulties and cognitive obstacles followed by investigations of the processes by which students learn particular concepts, evolving into classroom studies, including the effects of curricular and pedagogical innovations on student learning, and, more recently research on teacher knowledge, beliefs, and practices. We can see this pattern, in varying degrees, in the research in different subdomains of calculus: limit, derivative, and integral.

Com base nesse ciclo do conhecimento, percebemos que as pesquisas poderiam ser categorizadas em quatro vertentes: uma, que trata do *desenvolvimento de ferramentas, materiais e métodos para o entendimento do Cálculo*; outra, envolvendo *o uso, desenvolvimento e intervenções na prática dos conceitos de Cálculo*; uma terceira, relativa *ao estudos de problemas básicos de ensino e aprendizagem dos conceitos de Cálculo;* e a última, relacionada *ao conhecimento sobre o ensino e aprendizagem do Cálculo e o desenvolvimento e teste de novas teorias*. Consideramos pertinente adotar essas categorias nesse levantamento, pois entendemos que elas nos auxiliariam na organização do material encontrado, sintetizando as diferentes propostas de pesquisa.

A seguir, apresentaremos alguns trabalhos pertencentes as três primeiras categorias que nos auxiliaram na compreensão e entendimento de alguns aspectos desta tese, detalhando, posteriormente, pesquisas que se enquadraram na última categoria apresentada.

No artigo *Provas e Demonstrações em Matemática: Uma Questão Problemática nas Práticas Docentes no Ensino Básico* de Fusco e Almouloud (2010), encontramos uma reflexão sobre os dados coletados de professores da rede pública de São Paulo, relativos ao raciocínio dedutivo nos processos de ensino e aprendizagem. Tal pesquisa contribuiu para um melhor entendimento de questões relacionadas a um ponto de vista formal da Matemática. Conforme Balacheff (1982), provas são explicações aceitas em um certo momento, para um determinado grupo social e que, caso essa prova refira-se a um enunciado matemático, será denominada demonstração. A demonstração são as únicas aceitas pelos matemáticos e respeitam certas regras, podendo ter alguns enunciados considerados verdadeiros (axiomas). No artigo, é ressaltado que as demonstrações são realizadas referentes aos objetos matemáticos de estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora façam referência a eles.

Fonseca e Igliori (2011) discutem, no artigo "*A complementaridade e a noção de número real* ", alguns aspectos relativos à conceitualização de número real, fundamental para o Cálculo Diferencial e Integral. Essa discussão gira em torno da questão "o que é número?", apresentam o estudo da teoria de John

Horton Conway para conceituar número real. Destacam, ainda, que essa teoria permite responder àquela questão epistemológica, e conceituar número, dos naturais aos transfinitos. Tal discussão é pertinente a esta pesquisa, pois a conceitualização de número real, mesmo que, em diferentes contextos filosóficos, é base para a construção dos conceitos do Cálculo.

Na dissertação proposta por Meyer (2003), "*Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual*", alunos da Licenciatura foram investigados para observar elementos da imagem conceitual e definição conceitual produzidos por eles, relativos ao conceito de derivada, contribuindo para esta pesquisa, com o entendimento das imagens mentais produzidas pelos alunos, quando questionados sobre o que é a derivada. Para Tall e Vinner (1981, p. 152), "a imagem conceitual descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais, as propriedades associadas e os processos", ou seja, as imagens e os processos associados a um determinado conceito. Já o termo definição conceitual, de acordo com esses pesquisadores, é o modo verbalizado pelo sujeito para explicitar um conceito, podendo este ser assimilado de forma "rotinizada" ou significativa.

Neste levantamento bibliográfico, destacamos duas pesquisas que se enquadravam na categoria Conhecimentos sobre ensino e aprendizagem do Cálculo e desenvolvimento e teste de novas teorias, detalhadas nos próximos dois tópicos.

1.2.1 Aspectos Processuais e Estruturais da Derivada

A pesquisa de Leme (2003) objetivou investigar aspectos de aprendizagem do conceito derivada. Para sustentar tal pesquisa, o referencial teórico de Sfard (1991) foi usado, no qual as noções abstratas podem ser concebidas de dois modos fundamentalmente diferentes: *estrutural* – como objetos e *operacional* – como processos. Conforme esse referencial, processos de aprendizagem e de resolução de problemas consistem em uma intrincada articulação entre concepções operacionais e estruturais da mesma noção. Para essa pesquisadora:

> Diferentemente de objetos materiais, as elaborações de Matemática avançada são totalmente inacessíveis para nossos sentidos – elas só podem ser vistas pelos olhos de nossa mente. Além disso, mesmo quando desenhamos uma função ou escrevemos um número, temos o cuidado em enfatizar que tal signo no papel é uma entre as várias representações possíveis da mesma entidade abstrata, que não pode ser vista nem tocada... "Ver", de alguma forma, estes invisíveis objetos parece ser um componente essencial da habilidade matemática, e a falta de tal capacidade pode ser uma das maiores razões dos porquês da Matemática parecer impermeável às várias "mentes bem formadas". Esse tipo de concepção será chamada de estrutural. (SFARD,1991, p.2)

Sfard (1991) ressalta diferentes tipos de abordagens para um mesmo conceito matemático e destaca que, na Matemática Moderna, a concepção estrutural foi predominante, mas, que é importante levar em conta as duas abordagens, como considerar a definição matemática de função, tanto como um conjunto de pares ordenados como um processo computacional. Outro exemplo é a simetria, que pode ser concebida tanto como uma propriedade estática de forma geométrica como uma forma de transformação. Os segundos tipos de abordagens de função e simetria expressam os processos, algoritmos e ações mais do que os próprios objetos, refletindo uma concepção operacional desses conceitos.

Dessa forma, tanto os aspectos operacionais como os estruturais são partes integrantes e indissociáveis para a compreensão de um conceito. Normalmente, a aprendizagem de um conceito matemático ocorre pela evolução dos estágios cognitivos denominados por Sfard (1991), *interiorização*, *condensação* e *reificação*.

Na pesquisa de Leme (2003), podemos encontrar os seguintes estágios cognitivos para a compreensão da derivada:

Interiorização: Esta fase caracteriza-se pela ação dos *processos* sobre objetos familiares. Os objetos considerados familiares à noção de derivada são: limite, função, taxa de variação, coeficiente angular da reta, equação de uma reta e reta tangente. Vale ressaltar que esses objetos familiares, às vezes, podem ser prejudiciais à aquisição de novos conceitos, como o caso do conceito de reta tangente, quando adquirido no campo da geometria pode entrar em conflito, quando tratado em um curso de Cálculo. A seguir, serão destacadas algumas dualidades entre processos e objetos relacionados ao conceito da derivada:

<u>Cálculo de limite em um ponto</u>

Processo: Manipulações algébricas utilizando limites.

Objeto: Limite $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

<u>Cálculo da função derivada</u>

Processo: Manipulações algébricas utilizando regras de derivação.

Objeto: Derivada.

<u>Cálculo da inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto</u>

Processo: Manipulações algébricas utilizando regras de derivação.

Objeto: Inclinação da reta tangente.

<u>Interpretar a derivada em um ponto como a inclinação da reta tangente no ponto</u>

Processo: Interpretação da derivada em um ponto.

Objeto: Inclinação da reta tangente.

Interpretar a derivada como a taxa de variação instantânea

Processo: Interpretação da derivada em um ponto.

Objeto: Taxa de variação instantânea.

Condensação**:** Nesse estágio, Sfard (1991) aponta que há uma compactação de *processos* extensos em unidades manipuláveis mais compactas. Agora, o estudante torna-se mais capaz de pensar no *processo* como se fosse um objeto, sem a necessidade de dispensar esforços cognitivos nas partes que o compõem. *Processos* compactados podem ser agrupados com outros *processos*, de modo a permitir generalizações e comparações. Leme (2003) destaca alguns *processos* relacionados à derivada que considerou *compactados*:

- Capacidade de identificar os pontos do gráfico de uma função em que a derivada é positiva, negativa ou nula;
- Capacidade de interpretar a derivada em diferentes representações, como a numérica, gráfica e simbólica;
- Capacidade de utilizar a noção de derivada para estudar extremos locais, teorema do valor médio e construção de funções polinomiais de grau maior ou igual a três;
- Capacidade de interpretar a derivada nas áreas das ciências e economia, como lucro marginal, rendimento marginal, custo marginal, velocidade instantânea e aceleração instantânea, entre outros; e
- Capacidade de entender que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$, como a reta cujo coeficiente angular é $f'(x_0)$.

Reificação**:** Nesta fase, o estudante deverá tratar a derivada como um *objeto*. Ele deverá compreender os *processos*, que até então utilizava com certa habilidade e familiaridade, sob uma nova perspectiva. Essa nova visão de derivada funde os *processos compactados* envolvidos nas representações numérica, gráfica e simbólica. Nesse estágio, o sujeito não compreende mais a derivada apenas como o limite da razão incremental de uma função nem apenas como a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto, nem apenas como a taxa de variação instantânea, mas, sim, o conceito de derivada constituído de seus aspectos operacionais e estruturais.

Nessa perspectiva, pelo pressuposto teórico apresentado por Sfard (1991), a compreensão da derivada pelo sujeito ocorre quando ele supera os estágios de interiorização, condensação e reificação.

A concepção de conceitualização está intimamente ligada às características processuais e estruturais da derivada e relacionadas a processos cognitivos. Essa perspectiva cognicista nos permite refletir sobre novos horizontes, em que um conceito pode transitar em nossas mentes sob diferentes aspectos, como os processuais e estruturais, da mesma forma que pode transitar na perspectiva de distintos mundos, como o *corporificado*, *simbólico* e *formal*[8].

Com a teoria de Sfard (1991) as noções de fluxos de pensamento são elaboradas, porém foi pela teoria de Tall (2013), que tais noções se desenvolvem.

Outro aspecto pertencente à uma abordagem de investigação tomando por base a estrutura dos fluxos de pensamento é a investigação sobre a compreensão dos conceitos a partir da existência de diferentes registros de representação semiótica e a relação do aprendiz com esses registros. Na tese de Kendal (2001), são discutidos os três registros, numérico, gráfico e simbólico da derivada e as possíveis correlações entre esses registros, apresentadas a seguir.

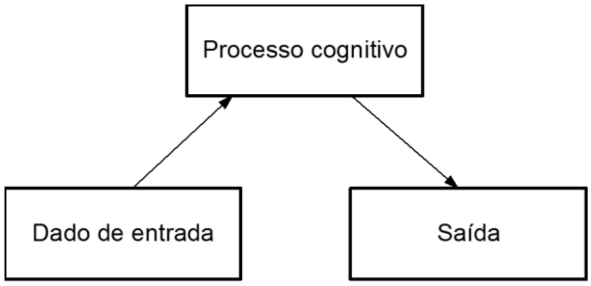
1.2.2 As Representações da Derivada

A tese de doutorado de Kendal (2001) objetivou desenvolver um quadro de competências para descrever a compreensão do conceito de derivada. Assim, foram apresentadas 18 habilidades decorrentes da combinação de três

[8] Denominações dos Mundos da Matemática, definidos por David Tall (2013).

possibilidades de entrada, três possibilidades de saída e dois processos cognitivos. A Figura 2 apresenta esse correlacionamento:

Figura 2 – Estrutura das questões propostas por Kendal (2001)



Fonte: Adaptado: Kendal, 2001.

A seguir, descreveremos as diferentes entradas, saídas e processos cognitivos relacionados à compreensão do conceito de derivada:

<u>Representação de *entrada*</u>

A representação de *entrada* é dependente do dado de entrada, e é classificada como:

- Numérica (N), se o dado é numérico (pares ordenados ou tabelas contendo valores de x e $f(x)$), permitindo o cálculo de uma taxa de variação ou uma taxa de variação instantânea.
- Gráfica (G), se o dado é gráfico (reta tangente à curva), possibilitando interpretar a derivada em um ponto, como a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto.
- Simbólica (S), se o dado é um símbolo $\left(\frac{dy}{dx}, f'\right)$, possibilitando encontrar o resultado por certas regras de diferenciação.

<u>Representação de *saída*</u>

A representação de *saída* é dependente da solicitação da questão, sendo classificada como:

- Numérica (n), se a questão solicita encontrar (ou explicar sobre) a taxa de variação;
- Gráfica (g), se a questão solicita encontrar (ou explicar sobre) a inclinação da reta tangente em um ponto; e
- Simbólica (s), se a questão solicita encontrar (ou explicar sobre) a derivada como uma expressão simbólica.

<u>Processo cognitivo</u>

Um processo cognitivo é necessário para obtenção do resultado de uma atividade, expresso na representação de *saída*, sendo definido como:

- Formulação (*F*) é a habilidade de reconhecer a representação de *entrada* e saber, como realizar a diferenciação correspondente, seja pelas representações *numérica*, *gráfica* ou *simbólica*;
- Interpretação (*I*) é a habilidade de raciocinar sobre uma *entrada*, isto é, explicar em linguagem natural ou dar o significado equivalente de uma derivada nas representações *numérica*, *gráfica* ou *simbólica*.

Exemplo: Seja a função real $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Determine a inclinação da reta tangente ao seu gráfico no ponto (0,6).

$\boxed{f(x) = x^2 - 5x + 6}$ é o <u>dado de entrada</u>

$\boxed{\text{a inclinação da reta tangente ...}}$ é o <u>dado de saída</u>

$\boxed{\text{Estratégias para encontrar a } f'(x) \text{ e } f'(0)}$ constituem o <u>processo cognitivo</u>

Neste exemplo, temos uma entrada simbólica (S), um processo cognitivo de formulação (F) e uma saída gráfica (g), podendo ser sintetizado por SFg.

As possíveis combinações alternando-se as diferentes representações da derivada (Numérica, Gráfica e Simbólica) nos dados de entrada e saída e os dois processos cognitivos (Formulação e Interpretação) permitem determinar 18 tipos de habilidades, apresentados nos dados da Tabela 1.

Tabela 1 –Habilidades relacionadas aos dados de entrada, saída e processo cognitivo.

		ENTRADA		
		Numérica (N)	Gráfica (G)	Simbólica (S)
SAÍDA	Numérica (n)	N F n N I n	G F n G I n	S F n S I n
	Gráfica (g)	N F g N I g	G F g G I g	S F g S I g
	Simbólica (s)	N F s N I s	G F s G I s	S F s S I s

Fonte: Kendal (2001, p. 57)

Esse recorte da pesquisa de Kendal (2001) apresenta uma articulação entre as representações numérica, gráfica e simbólica da derivada, a fim de propor uma classificação das habilidades para uma compreensão da derivada. A pesquisadora conclui que o desenvolvimento da compreensão da derivada está intimamente ligado às habilidades de articulação entre suas diferentes representações.

A pesquisa de Kendal contribui para esta tese quando assumimos que é possível existir a articulação entre os diferentes registros da derivada para a compreensão desse conceito, de forma similar, conjectutaramos que os fluxos de pensamento relativos ao mundo corporificado, simbólico e formal também podem ser ativados por meio de diferentes atividades que envolvem o conceito de derivada durante o processo de aprendizagem.

As pesquisas nacionais e internacionais discutidas nesses tópicos possibilitaram observar um atual cenário de trabalhos em Educação Matemática que tratam do conceito derivada. De acordo com esse levantamento, uma pesquisa sobre a aprendizagem da derivada faz parte de um grupo que se embasa em teorias, a fim de observar certos aspectos relacionados a um determinado conceito. No entanto, não observamos pesquisas que utilizassem a teoria dos Três Mundos da Matemática de David Tall para analisar a derivada e nem pesquisas que tratassem de fluxo de pensamentos que ocorressem entre os mundos propostos por ele. Por esse pressuposto, consideramos que a pesquisa desenvolvida é inédita e poderá contribuir com a área da Educação Matemática, retomando alguns aspectos que foram evidenciados em outros estudos e acrescentando novos, que ainda não foram investigados.

Assim como Kendal (2001) ou Sfard (1991), que buscaram apresentar ferramentas teóricas para analisar a compreensão de um conceito, vislumbramos na teoria de Tall (2013) outra possibilidade de análise da aprendizagem da derivada, que advém das três formas de como se aprende a pensar matematicamente, assim, temos a finalidade de avançar na área da Educação Matemática, compreendendo-a em um contexto mais amplo.

1.3 Objetivo e Questão de Pesquisa

O objetivo desta pesquisa é investigar os fluxos de pensamento na formação do pensamento matemático na aprendizagem do conceito de derivada, tendo por base a Teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall (2013), com vistas a identificação de meios que potencializem a aprendizagem desse conceito matemático.

Para tanto, buscamos nessa teoria sustentações que proponham que o pensamento matemático pode ser concebido nos mundos corporificado, simbólico e formal. Logo, os conceitos matemáticos, como a derivada, podem ser observados à luz desses diferentes mundos, permitindo uma transição de pensamento entre eles, que constituem os fluxos de pensamento para a compreensão da derivada.

Para almejar o objetivo proposto, explicitamos a questão que irá nortear esta pesquisa:

- *Quais são os fluxos de pensamento, embasados na teoria dos Três Mundos da Matemática, envolvidos na aprendizagem da derivada?*

A seguir, apresentamos um estudo da derivada que servirá como fonte de dados para analisar esse conceito à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática.

– CAPÍTULO 2 –

A Derivada

Neste capítulo, apresentamos a derivada sob três perspectivas: A dos elementos históricos, a da definição conceitual e a das abordagens de aprendizagem, amparadas em livros, artigos e pesquisas.

Nos elementos históricos temos intenção de ilustrar aspectos epistemológicos relacionados aos Fluxos de Pensamento na aprendizagem da derivada. Devido a esse objetivo, apresentaremos apenas elementos das principais ideias envolvendo este conceito.

Na perspectiva conceitual, são apresentadas as definições que conceituam a derivada nos tempos atuais.

Nas abordagens de aprendizagem são discutidas a perspectiva de ensino amparadas nas representações gráfica, numérica e simbólica da derivada.

Esse levantamento irá compor o material de análise e servirá como fonte de dados para as análises dos fluxos de pensamento desse conceito.

2.1 Elementos Históricos

Para Boyer (1959), o Cálculo teve suas origens nas dificuldades lógicas encontradas pelos matemáticos gregos para expressar ideias intuitivas sobre razões, proporcionalidade de segmentos de reta e infinito. Posteriormente, os matemáticos foram atentados a utilizar o conceito de infinitesimal, mesmo que logicamente insatisfatório; alguns séculos depois, excluiu o infinitamente pequeno das demonstrações em Geometria em razão do rigor do pensamento.

Em se tratando da derivada, no século XVI, o estudo quantitativo da variabilidade foi ressaltado, apoiado pela introdução da Geometria Analítica e da representação sistemática das quantidades variáveis. No século XVII, esse método analítico somado à aplicação dos conceitos de número foram as bases para elaboração dos algoritmos de Newton e Leibniz. No entanto, não havia uma concepção das bases lógicas dos conceitos matemáticos, sendo o século XVIII, um período de tentativas de livrar o Cálculo da intuição de movimento contínuo e magnitudes geométricas. Só no século XIX, com a definição de número, uma base sólida foi completada, colocando a derivada como conceito fundamental do Cálculo, cujo surgimento advém de duas questões básicas: O *problema das tangentes* (o traçado de uma tangente a uma curva) e *o problema das áreas* (as quadraturas de curvas).

Algumas ideias basicas do Cálculo já se encontravam nos métodos desenvolvidos por matemáticos gregos como Euclides, Arquimedes e Apolônio. Euclides afirmava que se uma reta r é tangente a uma circunferência c, então ela encontra o círculo em apenas um ponto e é perpendicular ao raio por esse mesmo ponto. No entanto, com o desenvolvimento da Geometria Analítica no século XVII, o interesse por tangentes à curvas é retomado por Fermat que, utilizando técnicas analíticas, resolveu dedicar-se ao antigo Problema das Tangentes e percebeu que o conceito euclidiano de tangente necessitava ser reformulado, pois era válido apenas para circunferência e elipse e inaplicável para casos gerais. Dessa forma, Fermat desenvolve um método algébrico que possibilitava determinar os pontos de máximos e mínimos de uma função.

Newton desenvolve ideias do Cálculo sobre a origem e natureza do movimento. O Método das Tangentes de Newton (Método das Fluxões) apresenta solução para o problema de determinar a tangente a uma curva dada por uma equação $f(x, y) = 0$ em que as variáveis x e y são grandezas que *fluem* com o tempo, chamadas de fluentes e, suas velocidades, de fluxões.

Leibniz desenvolveram suas teorias influenciadas pelos trabalhos de Descartes e Pascal, publicando o livro *Calculus Differentialis*, em que a tangente a uma curva envolve diferenças nas coordenadas x e y, desenvolvendo terminologias e notações próprias que se mantém até os dias atuais.

Esse caminho de 2500 anos para se concluir uma base sólida, com conceitos precisos e logicamente definidos, tem seu preço, pois mesmo com a origem prática do Cálculo, o conhecimento matemático desvincula-se do mundo da experiência sensorial, da intuição e da cognição imediata, tendo como resultado construções abstratas bem-definidas, como as definições fundamentais do Cálculo (limite, derivada e integral) que podem então agora ser claramente observadas nos livros de Cálculo e demonstradas as operações que as envolvem.

Hoje, os livros didáticos de Cálculo trazem apenas fragmentos de sua história, pois não conseguem retratar o árduo caminho que a humanidade percorreu para chegar às definições apresentadas, mostrando apenas uma síntese da produção humana de um conhecimento científico, que foi moldado por recorrentes aperfeiçoamentos de sua estrutura para chegar aos resultados utilizados nos dias atuais.

2.2 Estrutura Conceitual

Notação:

$\lim_{x \to p} f(x) = L$ é dito como o limite de f de x, quando x tente a p é igual a L.

Definição de limite

Seja f uma função definida em um intervalo aberto da reta contendo um ponto p, não necessitando que f seja definida no próprio p. Seja L um número real.

$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Definição de derivada

$f'(p)$, que se lê f linha de p, é a derivada da função f em um ponto p de seu domínio e é definida como: $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$, se esse limite existir e for finito.

<u>Definição de máximo local</u>

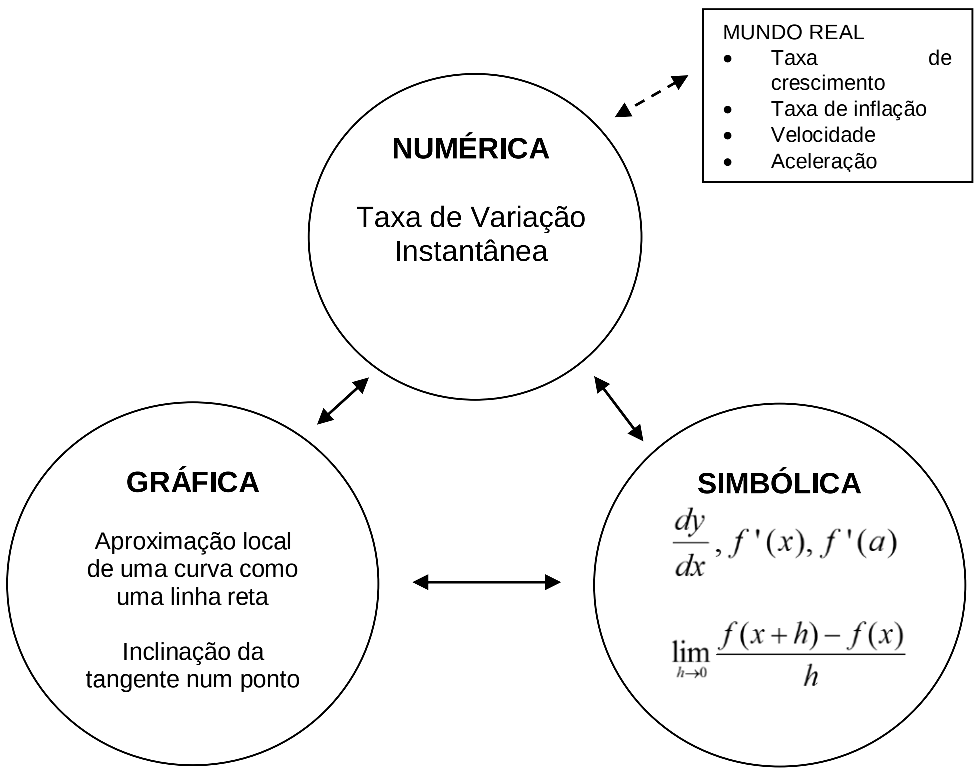
A função f , definida em um conjunto S, tem um máximo local em c pertencendo a S, se existe algum intervalo aberto I contendo c, tal que $f(x) < f(c)$ para todo x pertencente ao intervalo I $\cap$ S. De forma similar, define-se mínimo local.

2.3 Abordagens de Aprendizagem

Neste tópico, tratamos da derivada à luz de pesquisas que propiciam observar diferentes abordagens desse conceito, por exemplo, quando observado em sua representação numérica, gráfica e simbólica.

Nessa perspectiva, Kendal (2001) fez uma pesquisa que destacou esses aspectos sobre a derivada, conforme se pode observar na Figura 3:

Figura 3 – Mapa das Representações da Derivada



Fonte: Kendal (2001, p. 47)

Kendal (2001) ressalta que a compreensão da derivada está intimamente ligada as articulações das representações gráfica, numérica e simbólica e os processos cognitivos de formulação e interpretação, elaborando, assim, 18 habilidades necessárias para compreesão desse conceito.

Na mesma direção, apresentamos o conceito de limite expresso na representação simbólica, definição esta que teve sua semente com D'Alembert (1717 - 1783), ressaltando na Encyclopédie (1751), julgando que uma definição apropriada para derivada necessitava, primeiramente, do entendimento de limite, propondo que uma quantidade é o limite de uma outra quantidade quando a segunda puder se aproximar da primeira dentro de qualquer precisão dada, não importando quão pequena, apesar da segunda quantidade nunca exceder a quantidade que ela aproxima.

Posteriormente, Weierstrass (1815-1897) apresentou uma definição moderna de limite, que até hoje se mantém nos livros de Cálculo e Análise, sendo apresentada como:

Definição: Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f. Dizemos que f tem limite L, em p, ponto de acumulação do domínio, se, para todo $\varepsilon > 0$dado, existir um $\delta > 0$ tal que, se para todo $x \in D_f$ com $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

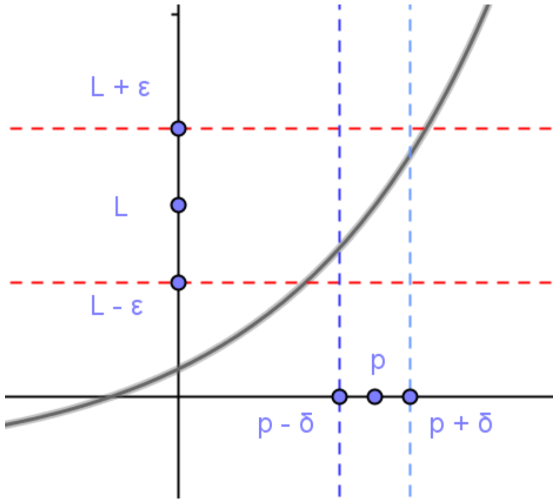
Tal número L, quando existir será único e indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$.

No âmbito da aprendizagem essa definição pode ser explorada em três representações:

1. Gráfica

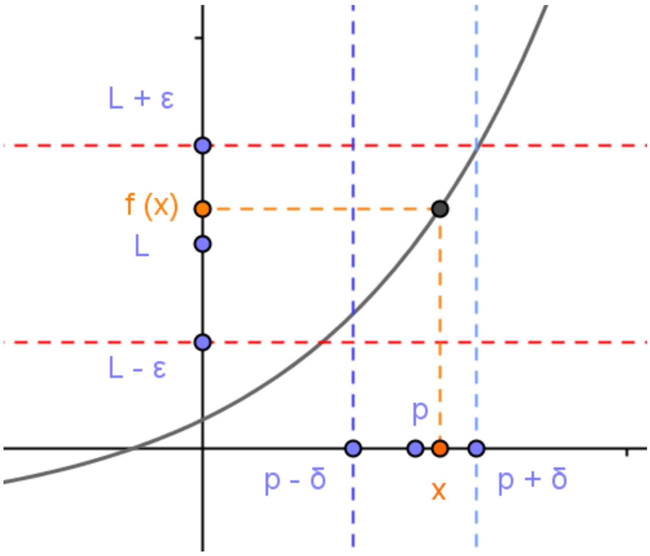
   Podemos observar no registro gráfico, como o das Figuras 4 e 5, que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \neq p \in D_f$, $x \in]p-\delta , p+\delta[$ implica que $f(x) \in]L-\varepsilon , L+\varepsilon[$.

Figura 4 – Vizinhanças de L e p.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5: $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Fonte: Elaborado pelo autor

2. Simbólica

$\lim\limits_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que, para todo $x \neq p \in D_f$,

$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

3. Numérica

Podemos analisar o limite pela representação numérica, por exemplo: Para calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ podemos construir tabelas como as apresentadas nos dados da Tabela 2:

Tabela 2 – Representação numérica do limite em um ponto

x	(x²-9)/(x-3)
2	5
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999
2,9999	5,9999
2,99999	5,99999

x	(x²-9)/(x-3)
4	7
3,1	6,1
3,01	6,01
3,001	6,001
3,0001	6,0001
3,00001	6,00001

Fonte: Elaborado pelo autor

Na observação do comportamento dos números das tabelas, percebemos a regularidade que quando mais próximo o valor de x está de 3 tanto pela direita como pela esquerda, mais próximo o valor da expressão $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ aproxima-se de 6, logo o $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Assim, as três representações do conceito de limite destaca as palavras de D'Alembert, quando diz que uma definição apropriada para derivada necessitava, primeiramente, do entendimento de limite, pois, sem essa compreensão, a expressão da derivada de uma função no ponto p, ou escrita simbolicamente como, $f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ não passa de mera simbologia desprovida de significado.

Da mesma forma que apresentamos os diferentes registros de representações do limite, podemos expressar a derivada na representação gráfica, numérica e simbólica.

1. Simbólica

Na representação simbólica a derivada é definida como:

$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, se o limite existir e for finito.

A partir da definição da derivada, ainda na representação simbólica, regras de derivação podem ser provadas como:

Se $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, com $n \neq 0$.

Demonstração

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{x^n-p^n}{x-p}$$

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{\cancel{(x-p)}.[(x^{n-1}.p^0)+(x^{n-2}.p^1)+(x^{n-3}.p^2)+...+(x^0.p^{n-1})]}{\cancel{(x-p)}}$$

$f'(p)=(p^{n-1}.p^0)+(p^{n-2}.p^1)+(p^{n-3}.p^2)+...+(p^0.p^{n-1})=np^{n-1}$, logo

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

Tal demonstração dessa regra, assim como muitas outras possíveis de serem apresentadas pertencem aos processos relacionados à derivada, sendo desenvolvidas em uma representação estritamente simbólica. Também é por meio das demonstrações, usando a definição da derivada, que são demonstradas as propriedades da derivada, como:

se f e g são deriváveis em p, então $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.

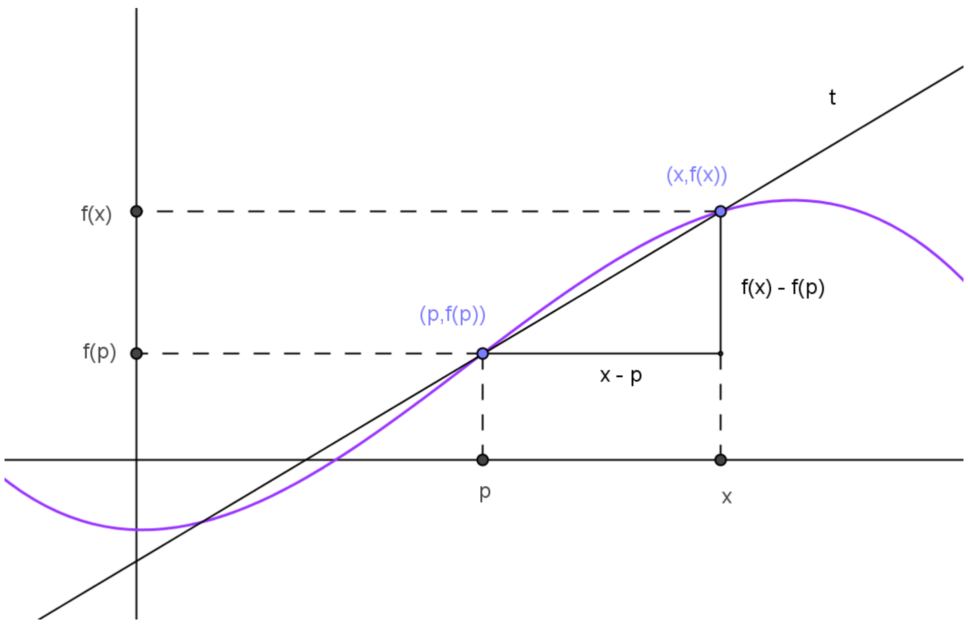
2. Gráfica

Na representação gráfica, a derivada pode ser concebida como inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto. No entanto, a concepção de reta tangente já fazia parte dos problemas geométricos clássicos, desde Euclides (cerca de 300 a.C), um período que tratava a reta tangente a uma circunferência, como sendo a reta que intercecta essa circunferência em um único ponto. Desde então, ao longo dos séculos, os matemáticos buscaram diferentes métodos e ferramentas para determinar retas tangentes às curvas, como Arquimedes (287 - 212 a.C.), que possuía um procedimento para encontrar a tangente à sua espiral ou Apolônio (262 - 190 a.C.), que apresentou um método para encontrar retas tangentes a parábolas, elipses e hipérboles.

Hoje, é possível determinar a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto p, por meio de manipulações geométricas que nos permitem observar um certo movimento e compreender a derivada, em sua representação gráfica, como a inclinação da reta tangente, conforme podemos visualizar sua construção pelos gráficos apresentados nas Figuras 6, 7 e 8.

Seja f uma função e p um ponto do seu domínio, representados nos gráficos a seguir:

Figura 6 – Reta secante ao gráfico de f

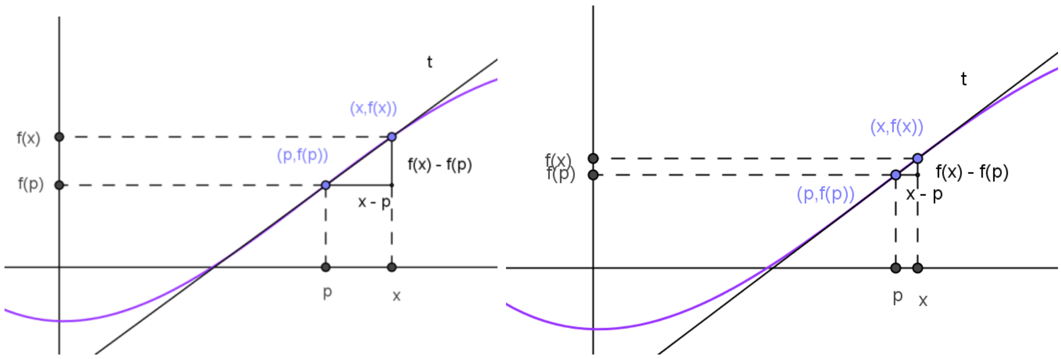


Fonte: Elaborado pelo autor

A reta t é secante e intercecta o gráfico de f em $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$. A inclinação da reta t é expressa por $a = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$

Tomando valores de x cada vez mais próximos de p, encontramos novas inclinações de outras retas secantes, conforme ilustrado nos gráficos da Figura 7.

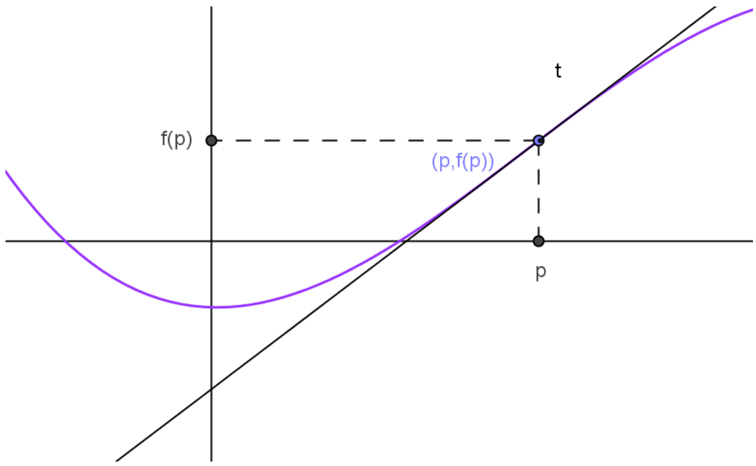
Figura 7 – Retas secantes ao gráfico de f



Fonte: Elaborado pelo autor

Desse modo, observamos que o limite dos coeficientes $a = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, das retas secantes, quando x tende a p é dada por $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ e denotamos essa reta cuja inclinação é esse limite, como a reta tangente ao gráfico da função f em p, conforme apresentado no gráfico da Figura 8.

Figura 8 – Reta tangente ao gráfico de f em (p , f(p))



Fonte: Elaborado pelo autor

Logo, podemos dizer que a reta t é tangente ao gráfico da função f em p e que pode ser determinada pela expressão $y = f'(p)\, x + b$.

Outro enfoque gráfico da derivada é o de retidão local. Nessa abordagem, ela é apresentada como um processo computacional de magnificação local, em que um intervalo de uma curva é ampliado em uma tela de computador, podendo-se observar a curva parecer cada vez mais com uma reta, conforme a ampliação é aumentada. Assim, caso a reta tangente esteja traçada por um comando computacional, percebemos que, com o aumento da magnitude, a curva cada vez mais se confunde com a reta tangente.

3. Numérica

A derivada na representação numérica, pode ser tratada como taxa de variação instantânea.

Por essa perspectiva, tomemos como exemplo, um dos conceitos estudados na Física, que é o de variação da distância percorrida por um móvel em relação ao tempo decorrido. A taxa de variação desse móvel em relação ao tempo pode ser expressa pela relação $\frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}}$, e é chamada de velocidade média.

A velocidade média pode ser calculada por $V_m = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{s}_f - \mathrm{s}_i}{t_f - t_i}$, sendo s uma função dependente do tempo t.

Assim, seja um móvel que percorre um trajeto por um certo tempo e queremos determinar sua velocidade instantânea em um certo instante p.

A velocidade média desse móvel do instante p até o instante t é expressa por $V_m = \frac{\mathrm{s(t)} - \mathrm{s(p)}}{t - p}$, porém, se quisermos encontrar a velocidade instantânea em p, precisaremos tomar arbitrariamente valores de t cada vez mais próximos a p, expressos, então, por $\lim\limits_{t \to p} \frac{s(t) - s(p)}{t - p}$. Logo, poderemos denotar esse limite, como a taxa de variação instantânea, quando t tende a p, ou seja, a derivada na representação numérica pode ser compreendida, como uma taxa de variação instantânea. Tal comportamento pode também ser percebido, utilizando conceitos de outras áreas como a Economia, em que a derivada, por exemplo, é aplicada na análise marginal para cálculos sobre funções de demandas, lucros e prejuízos podendo, então, maximizar os lucros e minimizar os prejuízos.

No estudo da derivada, ressaltamos que, mesmo tendo diferentes enfoques, percebemos que o conceito de limite está inserido independente da abordagem observada.

Este estudo nos dará suporte para a análise da derivada sob o ponto de vista dos Três Mundos da Matemática, que será apresentado a seguir.

– CAPÍTULO 3 –

Os Três Mundos da Matemática e Teorias Correlacionadas

Neste capítulo, apresentamos o corpo da teoria dos Três Mundos da Matemática proposta por Tall (2013), que nos permitiu observar os possíveis fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada. Posteriormente, apresentaremos as reflexões de diferentes pesquisadores preocupados com a formação do pensamento matemático. Finalizaremos o capítulo, com uma reflexão sobre os trabalhos de Anna Sfard, Margaret Kendal e David Tall.

3.1 A Teoria dos Três Mundos da Matemática

É a teoria que decide o que podemos observar
ALBERT EINSTEIN

Entre os pesquisadores, é consenso que os dados não “falam” por si só. É necessária uma teoria subjacente à pesquisa para dar significado aos dados coletados. Na Teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall (2013), encontramos uma lupa cuja nitidez possibilita investigar aspectos da aprendizagem relacionados à Matemática.

Essa teoria, construída ao longo de 30 anos, teve a colaboração de vários pesquisadores com enfoque no desenvolvimento do pensamento matemático e foi sintetizada no livro de Tall (2013) **Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente: Explorando os Três Mundos da Matemática**[9]. Neste livro,

[9] Título original: “How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics”

várias ideias de seus colegas contribuíram de forma significativa, como Richard Skemp, Shlomo Vinner, Eddie Gray, Efraim Fischbein, John Pegg, entre outros.

A teoria de David Tall foi escolhida para esta investigação, pois permite revelar as diferentes formas de se pensar durante o processo de aprendizagem, foco desta pesquisa. Por meio dela é tratado o desenvolvimento do que iremos chamar de fluxos de pensamento, que consistem na movimentação do pensamento entre os mundos propostos pelo teórico. Dessa forma, nossa pesquisa é pautada na análise desses fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada, sustentada na seguinte questão fundamental da teoria de Tall: Como os humanos podem aprender a pensar matematicamente? Essa questão é feita levando-se em conta o desenvolvimento de um sujeito a longo prazo, que lhe possibilita expressar ideias gerais de modo a dar sentido ao mundo que o cerca.

Em Tall (2013), é indicado que o desenvolvimento a longo prazo de ideias matemáticas é mais do que uma adição de novas experiências às antigas, a fim de ajustar a estrutura do conhecimento, mas, sim, uma reconstrução das conexões mentais que envolve uma estrutura crescente de conhecimentos cada vez mais sofisticada. Essa fundamentação é sustentada pelo fato de que, ao contrário do senso comum, novos níveis do pensamento matemático não são necessariamente construídos com base nas experiências prévias, pois, algumas vezes, essas experiências em níveis anteriores podem ser problemáticas aos níveis mais avançados, como a ideia de que *a multiplicação sempre aumenta*. Educadores matemáticos têm consciência de que essa generalização abusiva é um conhecimento prévio que se torna problemático. Da mesma forma, conhecimentos intuitivos sobre conjuntos finitos são problemáticos para a concepção de conjuntos infinitos, constituindo-se verdadeiros obstáculos epistemológicos.

O autor retrata diferentes formas de evolução dos conhecimentos em Matemática. Por exemplo, na Geometria, crianças brincam com objetos reconhecendo suas propriedades e pelos seus julgamentos conseguem descrevê-los, usando a linguagem natural. Com o passar do tempo, essas descrições tornam-se mais precisas, e os objetos podem ser construídos por meio de régua e compasso. Eventualmente, nas universidades, as propriedades das figuras poderão ser tratadas em uma estrutura formal axiomática, como a da Geometria Euclidiana, como também das Geometrias não Euclidianas e da Topologia.

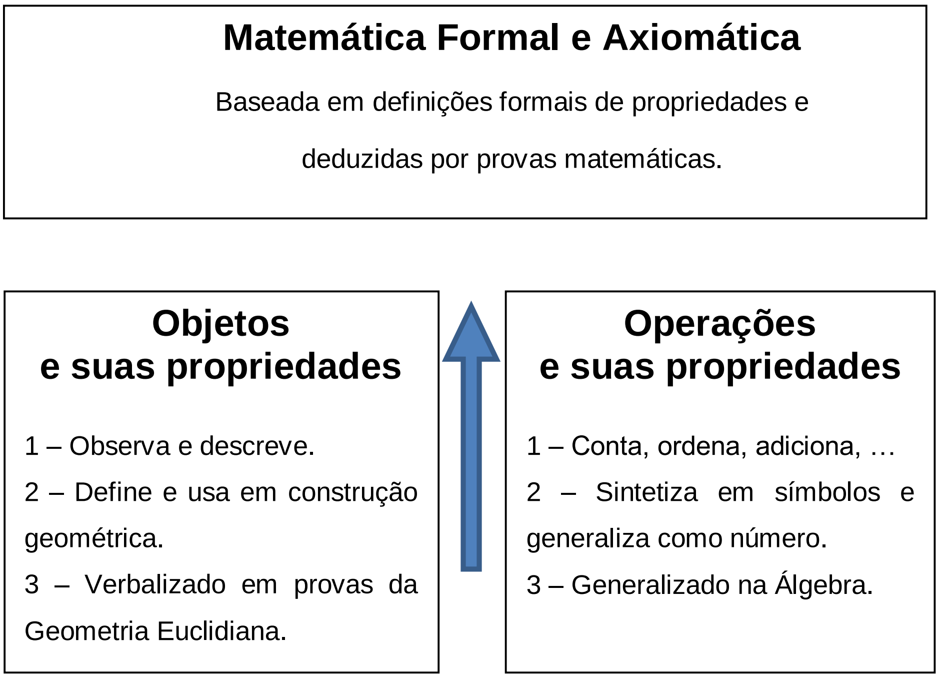
Atualmente no Brasil, os alunos costumam ter, em geral, seu primeiro contato com o conceito de derivada em um curso de Cálculo, no Ensino Superior. Esse conceito, assim como aqueles encontrados na Geometria Euclidiana, também possui características relacionadas à percepção visual, como as diferentes retas secantes que intercectam o gráfico de uma função e possuem inclinação cada vez mais próxima à da reta tangente em um ponto, nas proximidades desse ponto; ou a visualização ampliada do gráfico de uma função em um ponto, utilizando *softwares* gráficos, que permitem perceber a retidão da curva nas vizinhanças desse ponto. Essas imagens são construídas, utilizando-se informações perceptíveis a nossos sentidos. Com as frequentes reincidências dessas imagens em estudos acadêmicos, algumas delas vão se solidificando na mente, possibilitando aos estudantes produzirem novas imagens ou até movimentá-las de forma mental, mesmo tendo sido apresentadas como imagens estáticas.

Já na Aritmética, o caminho segue uma trajetória diferente. Não começa com o foco nas propriedades físicas dos objetos, como na Geometria, mas, nas ações sobre os objetos, como contar, agrupar, ordenar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Essas ações são operações matemáticas, e os símbolos são introduzidos para otimizarem rotinas. Com o tempo, os processos sobre as operações evoluem, podendo ser comprimidos e simbolizados, por exemplo, processos, como contar e adicionar, evoluem para o conceito de número. A longo prazo, as operações são sintetizadas, podendo ser manipuladas pela mente. Eventualmente nas universidades, esses processos poderão ser manipulados por estruturas formais, como a teoria dos números.

No caso da derivada, quando nos deparamos com questões do tipo “Seja f a função dada por $f(x) = x^2 + 3x$, determine a derivada de f”, percebemos que essa atividade é similar quanto à sua natureza a qualquer outra atividade procedimental, como “Quanto é 153 x 27” ou “784 + 943 é igual a?”, ou ainda, “Calcule os zeros da função f dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$”. Tais simbologias remetem a procedimentos algébricos e/ou algorítmicos que não ocorrem em aspectos físicos e perceptíveis, mas, sim, em aspectos operacionais com a finalidade de sintetizar rotinas. Estudantes iniciantes de Cálculo, ao observarem o símbolo f', percebem esse símbolo apenas como uma operação a realizar, utilizando manipulações algébricas. Já estudantes mais avançados podem compreender esse símbolo, como uma função que exprime a derivada para qualquer valor de seu domínio, reforçando a ideia de que os processos evoluem para símbolos.

A teoria proposta por Tall (2013), sobre as possibilidades de investigação do desenvolvimento a longo prazo do pensamento matemático, apresenta um leque bastante abrangente, pois permite investigar, desde a infância, os primeiros contatos com objetos matemáticos, até a fronteira das pesquisas em Matemática Avançada. O quadro do crescimento estrutural das atividades de pensamento é apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Estrutura das atividades do pensamento, Tall (2013)



Fonte: Adaptado pelo autor

Com base nesse desenvolvimento, David Tall (2013) propõe, então, três formas essencialmente diferentes em que o pensamento matemático desenvolve-se:

> *Corporificação conceitual,* baseia-se nas ações e percepções humanas, desenvolvendo imagens mentais que são verbalizadas de modo cada vez mais sofisticado e tornam-se entidades mentais perfeitas em nossa imaginação.[10]
>
> *Simbolismo operacional,* cresce além de ações físicas dos procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos podem permanecer em um nível processual, outros podem conceber os símbolos de forma flexível, como as operações a realizar e também operar, por meio de cálculo e manipulação.[11]
>
> *Formalismo axiomático* baseia-se no conhecimento formal de sistemas axiomáticos especificado pela definição cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas.[12]
>
> (TALL, 2013, posição 443, tópico 1)

Essas três formas de desenvolvimento do pensamento matemático possuem qualidades próprias em seus próprios mundos. A primeira, é baseada na corporificação (conceitual); a outra, no simbolismo (operacional) e a terceira, no formalismo (axiomático).

Tall (2013) aponta que, essas formas do desenvolvimento do pensamento matemático, podem ser compreendidas em três diferentes mundos, mas intimamente ligados, denominados ***corporificado***, ***simbólico*** e ***formal***. Relata, ainda, que na Matemática escolar os mundos corporificado e o simbólico são desenvolvidos em paralelo. Além disso, define os termos usados nas intersecções entre os mundos, como Formalismo Corporificado, Formalismo Simbólico e Simbólico Corporificado, conforme apresentado na Figura 10.

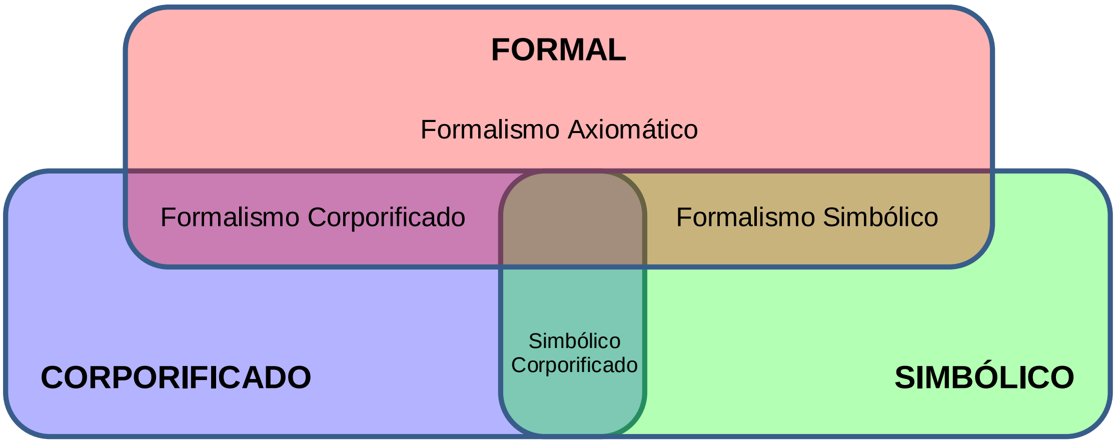
---

[10] *Conceptual embodiment* builds on human perceptions and actions developing mental images that are verbalized in increasingly sophisticated way and become perfect mental entities in our imagination.

[11] *Operational symbolism* grows out of physical actions into mathematical procedures. Whereas some learners may remain at a procedural level, others may conceive the symbols flexibly as operations to perform and also to be operated on through calculation and manipulation.

[12] *Axiomatic formalism* builds formal knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof.

Figura 10 – Os três Mundos da Matemática, Tall (2013)

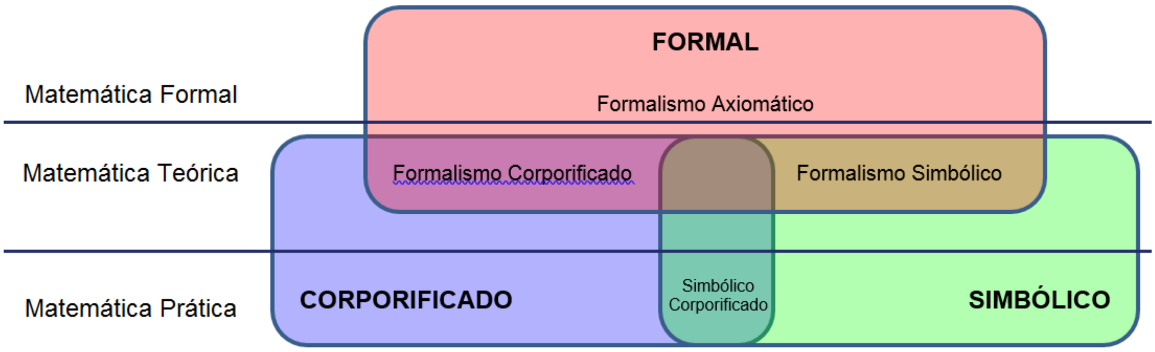


Fonte: Adaptado pelo autor

O autor utiliza o termo “Formalismo Corporificado”, para se referir à transição entre os mundos Corporificado e Formal, na qual a percepção e a manipulação de objetos geométricos misturam-se com os princípios da estrutura axiomática. O termo “Formalismo Simbólico” é empregado na transição entre os mundos Simbólico e Formal, nos quais as ações sobre os procedimentos aritméticos contribuem para a construção de um conjunto teórico definido, como o conjunto dos números reais.

Tall (2013) ainda distingue que tais intersecções podem ser distribuídas nos estágios de Matemática Prática, Matemática Teórica e Matemática Formal, conforme ilustrado na Figura 11:

Figura 11 –Intersecções entre os Mundos da Matemática, Tall (2013)



Fonte: Adaptado pelo autor

- A Matemática Prática relaciona-se ao Simbólico Corporificado, pois envolve tanto a percepção como os procedimentos, como o exemplo em que a ordem dos termos de uma adição não altera a soma, ou seja, a percepção da criança ao observar que tanto faz efetuar a operação $1 + 4$ ou $4 + 1$ que se obtém o mesmo resultado. No caso da derivada, alunos de Cálculo poderiam operar e determinar que, as derivadas das funções reais $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são, respectivamente, $f'(x) = 3x^2$ e $g'(x) = 2x$.

- A Matemática Teórica relaciona-se ao Formalismo Corporificado e ao Formalismo Simbólico, pois envolve, tanto a percepção de propriedades como o simbolismo dos procedimentos, apresentando, como exemplo, que $2+3+5+9$ tem o mesmo resultado que $5+3+9+2$. Em relação a derivada, os alunos podem perceber que a derivada de $f(x) = x^3 + x^2$ é $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

- A Matemática Formal relaciona-se ao Formalismo Axiomático, pois é embasada em definições de conceitos e propriedades, como a lei da comutatividade da adição, em que $a+b = b+a$. Neste caso, os alunos podem entender que se f e g são deriváveis no ponto *a*, tem-se que $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

O autor ressalta que a transição para a Matemática Formal parece demasiadamente complicada para os estudantes, mesmo àqueles com familiaridade das propriedades gerais, destacando que essa transição pode ser feita do modo natural, isto é uma evolução do mundo corporificado e simbólico, ou de modo puramente formal, centrado na lógica de uma estrutura axiomática definida.

Em conformidade com a teoria de Tall (2013), explicitamos e refletimos sobre os seguintes pontos:

No mundo simbólico, o processo da contagem evolui a fim de dar significado ao símbolo de adição. Logo, existem processos que devem evoluir para dar sentido aos símbolos relacionados à derivação.

No mundo corporificado, existem elementos perceptíveis a nossos sentidos, como as figuras geométricas que podem se tornar imagens estáticas ou dinâmicas em nossa mente, da mesma forma, que as imagens relacionadas à noção de derivada, como o movimento das retas secantes a uma curva que tendem à reta tangente em um ponto, podem se tornar imagens mentais dinâmicas.

No mundo formal, existe uma estrutura axiomática relacionada à derivada, que a partir da definição de derivada dada por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se esse limite existir e for finito, desenvolve-se uma estrutura de provas e demonstrações em que todas as regras e propriedades são demonstradas ou provadas matematicamente.

Além da teoria proposta por David Tall, a seguir, apresentamos uma síntese de pesquisas correlatas, a fim de investigar os entornos da fundamentação teórica adotada nesta tese.

3.2 Pesquisas que embasaram a Teoria de David Tall

Neste item descrevemos, de forma sucinta, alguns elementos de teorias que sustentam a Teoria dos Três Mundos de David Tall (2013). O objetivo dessa descrição é destacar que os fundamentos dessas teorias trouxeram possibilidades para a análise da formação do pensamento matemático, alvo de nossa investigação e, também, para explicitar a ligação entre esses fundamentos e o desenvolvimento desta tese. Vale destacar ainda, que o fato desses elementos teóricos terem referenciado outras teorias da Educação Matemática, significa a adequação de seus constructos é aporte para o estudo da aprendizagem de conceitos matemáticos.

A primeira teoria e a principal é aquela proposta por Jean Piaget (1972) para a qual o desenvolvimento cognitivo ocorre ao longo dos estágios sensório-motor, pré-operacional, operacional concreto e operacional-formal, em que:

• o sensório-motor dura, aproximadamente, os 18 primeiros meses de vida do ser humano, que desenvolve o conhecimento prático, constituído da subestrutura do conhecimento representativo posterior. Como exemplo, temos a construção do esquema do objeto permanente que, para um bebê, um objeto não tem permanência, pois se ele desaparece do campo perceptivo, não existe mais. Posteriormente, ele tentará achá-lo por sua localização espacial, possibilitando a construção do espaço prático ou sensório-motor;

• o pré-operacional, com o início da linguagem, da função simbólica e da representação faz a criança reconstruir tudo o que ela desenvolveu no nível sensório-motor em relação ao nível do pensamento representativo, pois as ações sensório-motoras não são mais transformadas imediatamente em operações;

• no operacional concreto, ocorrem as primeiras operações com objetos concretos, mas não expressados verbalmente. Como exemplo, temos as operações de classificação, ordenamento, operações espaciais e temporais e todas as operações fundamentais da lógica elementar de classes, da Matemática elementar, da Geometria elementar e da Física elementar;

• no operacional formal, essas operações são ultrapassadas à medida que a criança alcança o nível de operações formais, podendo raciocinar com hipóteses e não só com objetos. Ela constrói novas operações, operações de lógica proposicional, relações e números.

A outra, não menos importante é aquela elaborada por Jerome Bruner (1996) que sustenta a existência de três formas fundamentalmente distintas de se aprender: a aprendizagem enativa, icônica e simbólica.

• aprendizagem enativa diz respeito ao desenvolvimento da organização da ação, possibilitando a flexibilização frente às mudanças do ambiente;

• aprendizagem icônica possibilita o uso de imagens para guiar nosso desenvolvimento de compreensão ou ações; e

• aprendizagem simbólica diz respeito ao uso de símbolos para reorganizar as habilidades e informações adquiridas anteriormente, por exemplo, os símbolos envolvidos na contagem possibilitam a habilidade de reorganização e desenvolvimento de qualquer número.

Já no âmbito da Educação Matemática, Efraim Fischbein (1994) discute a interação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ligados aos conceitos matemáticos, quando tratamos a Matemática como uma atividade humana. Essa perspectiva aborda o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos como um processo criativo, envolvendo momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação.

• o aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações. Tais elementos compõem o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser levados em conta, quando analisamos o processo de criação em Matemática, pois necessitamos adentrar, como um componente ativo do processo de raciocínio, devendo ser inventados, aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo aluno. Fischbein (1994) destaca ainda que o pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos alunos e que, somente, um processo adequado de ensino pode dar características funcionais a esses elementos formais;

• O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução, sendo um elemento de caráter fundamental no processo de entendimento e criação, pois apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para propiciar habilidades para se resolver problemas, cujas técnicas necessitam de métodos sistemáticos e repetitivos para serem adquiridos; e

• O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva, sendo considerado autoevidente pelo aluno, o qual não vê necessidades de prova ou justificação. O conhecimento intuitivo exerce um papel cooperativo ao raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas, podendo torná-lo um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis. Entretanto, a intuição poderá ser um caminho perigoso e poderá levar a contradições e equívocos, pois afirmações do tipo “A parte é menor que o todo” ou “Uma série infinita tende ao infinito, pois somamos valores indefinidamente” pode ser, intuitivamente, válida e aceita para uma grande parte de estudantes, mas, que são falsas. No caso do conjunto dos pares que tem a mesma cardinalidade que o conjunto dos naturais e das séries convergentes que não tendem ao infinito são exemplos verdadeiros, mas não intuitivos.

As sínteses apresentadas acima nos propiciaram uma melhor compreensão da teoria de David Tall apresentando diferentes enfoque cognitivos. Além dessas pesquisas, os aspectos processuais e estruturais da derivada e as diferentes representações da derivada se mostraram pertinentes para a investigação dos fluxos de pensamento, nos levando a apresentar uma reflexão dessas pesquisas, apresentadas a seguir.

3.3 Uma Reflexão das Pesquisas de Kendal, Sfard e Tall

Este tópico apresenta algumas reflexões teóricas das pesquisas de Anna Sfard, Margaret Kendal e David Tall cujas contribuições e concepções sustentaram vários pontos desta tese de doutorado.

Em primeiro lugar, salientamos que as pesquisas em discussão foram realizadas em diferentes períodos, logo, trazem reflexos temporais em que se sustentaram.

Em 1981, Tall e Vinner apresentaram o termo *imagem conceitual* para indicar as imagens mentais, propriedades e processos relacionados a um conceito. Esse termo já refletia a possibilidade de um sujeito visualizar objetos matemáticos.

Sfard (1991), 10 anos depois, debruçava-se nas ideias de como os conceitos matemáticos podem ser apreendidos pelo sujeito, propondo que as concepções dos conceitos de um sujeito deveriam hierarquicamente evoluir entre os estágios de *interiorização*, *condensação* e *reificação* para completarem um ciclo e servirem de base para aquisições de novos conceitos. Ressalta, ainda, que os conceitos podem ser concebidos de forma estrutural (objeto) ou operacional (processo) e que a forma de “ver” objetos invisíveis estaria relacionada à concepção estrutural, ou seja, os processos evoluem para objetos, possibilitando, assim, o sujeito visualizar os objetos matemáticos.

Mais 10 anos se passaram, e encontramos no trabalho de Kendal (2001), uma descrição das possíveis articulações entre os registros numérico, gráfico e simbólico da derivada, que propôs que é por meio da articulação de 18 habilidades relativas a derivação que se obtem a compreensão da derivada.

Recentemente, em 2013, David Tall sintetiza um trabalho de mais de 30 anos e descreve como os humanos pensam matematicamente. A teoria denominada Os Três Mundos da Matemática engloba outras teorias que discutem o entendimento de como os objetos matemáticos podem ser concebidos por um sujeito na aprendizagem, assim, ora amplia, ora complementa a teoria de Sfard e o trabalho de Kendal, quando organiza ideias discutidas por esses autores e propõe que a aprendizagem do pensamento matemático articula-se entre o mundo Corporificado, Simbólico e Formal.

Nessa perspectiva, o autor não discute as características processuais ou estruturais nas quais os conceitos matemáticos são concebidos nem ressalta as representações dos objetos matemáticos. Mas, tanto as abordagens processuais e estruturais dos conceitos matemáticos, assim como suas diferentes representações são elementos que compõem os mundos propostos por Tall, pois o autor desvincula-se do objeto matemático para enfatizar como os sujeitos aprendem a pensar matematicamente, propondo que:

- O mundo corporificado é rodeado de processos e objetos que podem ser percebidos pelo sujeito e são invocados a fim de propiciar imagens mentais, ou seja, são procedimentos, imagens, rotinas, entre outros elementos, que possibilitam um sujeito perceber, sentir e “ver mentalmente” a existência de objetos matemáticos;

- O mundo simbólico mantém o foco no sujeito quando executa processos e rotinas relativas aos conceitos matemáticos. As ações executadas pelo sujeito, propiciam-no a desenvolver simbologias referentes a esses conceitos, que podem ser desde processos observáveis no cotidiano, como o de subtrair quantidades, relacionado ao símbolo de subtração, até processos desenvolvidos em áreas específicas, como o processo de integração, que possui simbologias próprias. Como exemplo, temos expressões “$7-3$” e “$\int_0^2 x^3 . dx$” que, mesmo fora de qualquer contexto, invocam diferentes rotinas que, em ambos os casos, se obtém o resultado 4, ou seja, os símbolos matemáticos sintetizam processos tácitos a um conceito que podem estar desprovidos ou não de qualquer contexto, ou qualquer imagem para serem executados; e

- O mundo formal é regido por uma estrutura axiomática, na qual os teoremas são demonstrados apoiados em certas afirmações tidas como verdadeiras (axiomas) e desenvolve-se toda uma estrutura relacionada a um determinado conceito com base nesses axiomas ou teoremas já provados. O entendimento dessa estrutura invoca, tanto processos como objetos para lhe dar significado.

Conforme apresentado, consideramos que a teoria de Tall (2013) traz algumas contribuições em relação à de Sfard (1991), pois a autora traz à tona aspectos operacionais e estruturais dos objetos matemáticos, ressaltando que a aprendizagem ocorre em três estágios, ou seja, os processos ocorrem, inicialmente, em estruturas familiares (interiorização), que vão se aglutinando em unidades mais compactas (condensação), até perderem sua estrutura de processo e serem compreendidos como objetos (reificação). Em outras palavras, são os processos que se transformam em objetos. David Tall também considera os processos só que, em outra perspectiva, pois, para ele, os processos evoluem para símbolos e não para objetos, como propõe Sfard. Além disso, distingue processos relacionados às rotinas (manipulações algébricas que dão significado aos símbolos) e processos relacionados à estrutura axiomática (definições, teoremas e provas).

Outra contribuição da teoria de David Tall está em tratar a parte perceptível dos objetos matemáticos pelo sujeito, podendo usar os sentidos humanos para reconhecer características da representação desse objeto matemático, sendo que tais pontos não estão presentes na teoria de Sfard (1991) e nem no trabalho de Kendal (2001).

Assim, a teoria de Tall (2013) é abrangente o suficiente para subsidiar o desenvolvimento dos fluxos de pensamento e possibilitar a análise dos fluxos com foco na aprendizagem.

– CAPÍTULO 4 –

Os Fluxos do Pensamento

Entendemos que o desenvolvimento dos fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada é a grande contribuição que esta pesquisa oferece ao campo da Educação Matemática, pois propicia um modo diferenciado ao que temos hoje, em questões relacionadas ao desenvolvimento do pensamento matemático de um indivíduo.

O desenvolvimento dos fluxos de pensamento foram embasados na Teoria dos Três Mundos da Matemática, propostos por Tall (2013), além de teorias cognitivistas como as de Sfard (1991), que ressalta que um conceito matemático é adquirido por um sujeito, quando esse conceito perpassa pelos estágios de *interiorização*, *condensação* e *reificação*.

Na construção dos fluxos de pensamento utilizamos algumas proposituras lógicas, a seguinte proposta: Tall (2013), propõe que a aprendizagem do pensamento matemático, referente a objetos matemáticos, ocorre pela articulação entre os mundos corporificado, simbólico e formal. Ora, entendemos que a derivada é um objeto matemático, logo por essa teoria, ela pode ser apreendida se um sujeito articular esse conceito entre os mundos corporificado, simbólico e formal.

E além disso também assumimos uma postura *teórica exploratória*, na perspectiva de FIORENTINI e LORENZATO (2006) quando dizem que:

> O pesquisador, nesse tipo de estudo, não utiliza dados e fatos empíricos para validar uma tese ou ponto de vista, mas a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.69).

Ou ainda de Gil (2008) quando diz que:

> … tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou **hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores** (Gil, 2008, p. 27 – grifo nosso).

Normalmente, pesquisas com esses enfoques são desenvolvidas por levantamentos bibliográficos e produção de material, objetivando proporcionar uma visão geral sobre um determinado fato, sendo utilizado quando o tema é pouco explorado. Gil (2008, p. 27) ressalta ainda que “Muitas vezes, as pesquisas exploratórias constituem a primeira etapa de uma investigação mais ampla”, como o caso de explorar elementos da aprendizagem da derivada, sob o foco da teoria dos Três Mundos da Matemática, poderá servir de base a novas pesquisas de cunho aplicado.

Tall (2013) destaca que, por esses mundos, os humanos aprendem a pensar matematicamente e dá como exemplo crianças que, na infância, manipulam objetos geométricos e observam algumas propriedades desses objetos, até chegar a uma etapa mais avançada, na qual tais objetos são tratados por uma estrutura axiomática, como a da Geometria Euclidiana. Ressalta, ainda, que essa evolução ocorre a longo prazo e que a evolução do pensamento matemático, normalmente, transita primeiro entre os mundos corporificado e simbólico, indo, posteriormente, em direção ao mundo formal.

Assim, de forma a exemplificar como entendemos os diferentes mundos propostos na teoria de Tall (2013), utilizamos o triângulo, como objeto matemático de análise e iremos analisá-lo à luz dos Três Mundos, por exemplo, analisar a parte perceptível, em que pode-se observar representações em revistas, jornais, pinturas, atividades escolares, além de lembrar de sua forma em objetos concretos do cotidiano, favorecendo, assim, a criação de imagens mentais desse objeto pelo sujeito cognoscente. Essas características estão em correspondência com o mundo corporificado.

Por outro ponto de vista, o mesmo objeto propicia ao sujeito desenvolver processos que independem de sua representação, como a soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180 graus ou que, na relação de um triângulo retângulo, a relação entre a medida do do cateto oposto e a medida da hipotenusa propicia a compreensão do seno, cuja simbologia é dada pela relação $sen\,\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$. Os processos desenvolvidos relativos a um objeto matemático que visam dar significado a simbologias matemáticas são características do mundo simbólico.

Em uma terceira perspectiva, o triângulo pode ser definido pela seguinte sequência de definições matemáticas, tomando os conceitos ponto e reta como primitivos e o termo “estar entre”, um conceito demonstrado anteriormente.

- Em uma reta qualquer, marcamos dois pontos P e Q não coincidentes. Os pontos P e Q e as partes da reta compreendidas entre esses pontos são denominados **segmento de reta** e os dois pontos são as **extremidades do segmento**;

- Dois ou mais **segmentos de retas** são **colineares,** quando pertencem a uma mesma reta;

- Dois **segmentos são consecutivos**, quando possuem uma extremidade em comum;

- **Linhas poligonais** são segmentos de retas consecutivos e não colineares;

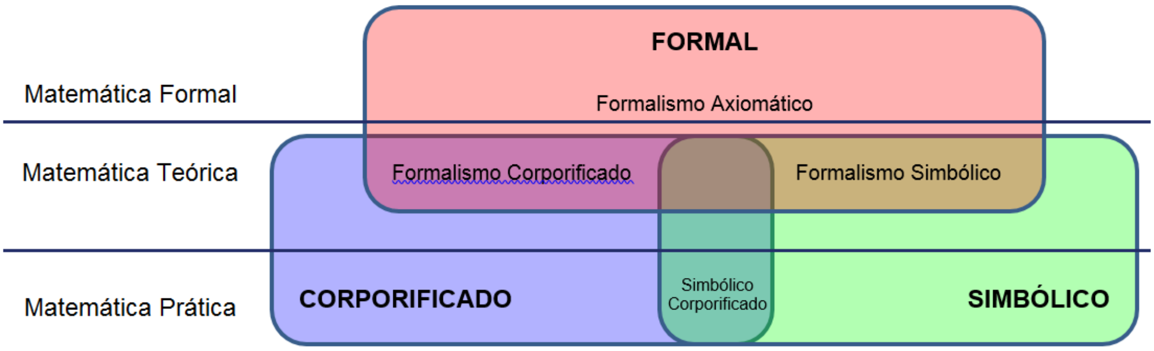
- **Linha poligonal fechada** é uma linha poligonal em que a extremidade do último segmento de reta coincide com a extremidade do primeiro segmento de reta; e

- **Triângulo** é uma linha poligonal fechada formada por três segmentos de reta.

Essa sequência de definições, assim como a estrutura axiomática proposta nos postulados de Euclides, é uma forma que não leva em conta os aspectos perceptíveis nem processuais, sendo características do mundo formal.

Além da análise isolada dos três mundos, a aprendizagem de conceitos matemáticos pode ocorrer durante as relações existentes entre as intersecções dos três mundos. Tall (2013) propôs uma classificação da Matemática em três níveis: *prática, teórica e formal*, conforme apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Intersecções entre os Mundos da Matemática, Tall (2013)



Fonte: Adaptado pelo autor

Dessa forma, os conceitos adquiridos por um sujeito relativos à Geometria são tratados na aprendizagem pelas articulações do pensamento entre os três mundos da Matemática. Essa articulação sugere a existência de diferentes fluxos de pensamento para o desenvolvimento de um conceito matemático, podendo os fluxos de pensamento serem observados, conforme Tall (2013), na Matemática Prática, Teórica e Formal.

A fim de organizar e codificar as possibilidades dos fluxos do pensamento matemático, utilizaremos as letras C, S e F para referenciar o mundo Corporificado, Simbólico e Formal. Para fins de exposição das ideias usaremos os termos a "partida" e "chegada" para indicar a sentido do fluxo de pensamento e utilizaremos letras maiúsculas para indicar a partida do fluxo, e a minúscula, para a chegada. Logo, um Fluxo Cf refere-se a um fluxo de pensamento que parte do mundo corporificado no sentido do mundo formal

Para Tall (2013), quando o sujeito está inserido na aprendizagem da *Matemática Prática* articula, tanto a percepção como os procedimentos matemáticos, manifestando fluxos de pensamento relacionados ao Simbólico Corporificado, conforme observa-se na Figura 12. Assim, percebemos o fluxo entre os mundos:

- Corporificado para corporificado (Cc)
- Simbólico para simbólico (Ss)
- Corporificado para simbólico (Cs)
- Simbólico para corporificado (Sc)

Já na Matemática Teórica, relacionada ao Formalismo Corporificado e ao Formalismo Simbólico envolvendo a percepção, os procedimentos e o formalismo relacionam os mundos:

- Formal para corporificado (Fc)
- Formal para simbólico (Fs)
- Corporificado para formal (Cf)
- Simbólico para formal (Sf)

A Matemática Formal, relacionada ao Formalismo Axiomático, envolve o fluxo de pensamento:

- Formal para formal (Ff)

Em suma, percebemos diferentes fluxos de pensamento para a aprendizagem de conceitos matemáticos, sendo a teoria de Tall (2013) uma possibilidade de investigação para averiguar a formação de conceitos matemáticos pelo sujeito, podendo então conceber os diferentes fluxos de pensamento na aprendizagem, envolvendo os Três Mundos da Matemática, em nove maneiras fundamentalmente distintas, sintetizadas na Tabela 3:

Tabela 3 – Códigos que relacionam o fluxo do pensamento matemático nos Mundos da Matemática

CÓDIGO	DO	PARA
Cc	Corporificado	Corporificado
Ss	Simbólico	Simbólico
Ff	Formal	Formal
Cs	Corporificado	Simbólico
Sc	Simbólico	Corporificado
Cf	Corporificado	Formal
Fc	Formal	Corporificado
Sf	Simbólico	Formal
Fs	Formal	Simbólico

Fonte: Adaptado pelo autor

A fim de explorar os nove fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem de um conceito, escolhemos de forma arbitrária, o conceito de máximos e mínimos locais para essa exemplificação.

Quando os fluxos permanecem no mesmo mundo (Cc, Ss ou Ff), observamos que apresentam um forte elo de ligação entre as premissas e as conclusões, pois enfatizam os componentes pertencentes e específicos de um determinado mundo.

A seguir, destacamos a categorização dos fluxos de pensamento subdivididos na Matemática prática, teórica e formal, utilizando o conceito de máximos e mínimos.

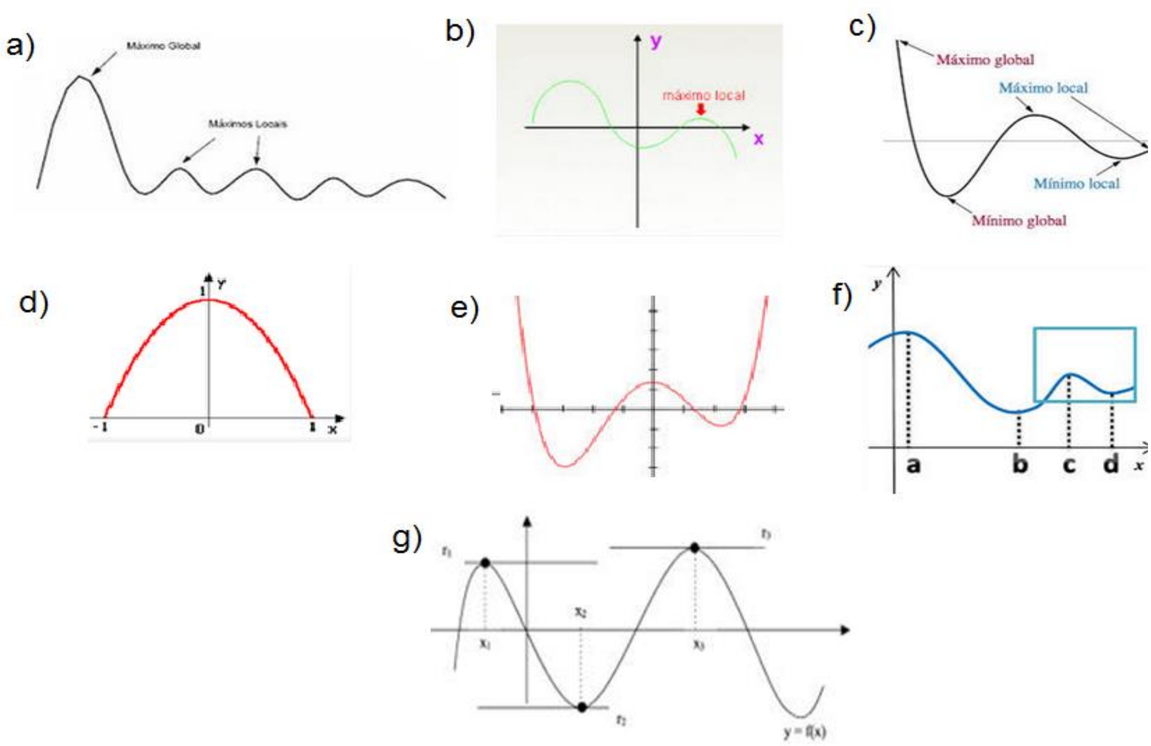
4.1 Fluxos de Pensamento relativos à Matemática Prática

Neste item, os fluxos de pensamento Cc, Ss, Cs e Sc são apresentados, pois destacam as características perceptíveis e processuais dos conceitos, enfatizando a parte prática e podem ser classificados, como:

- Corporificado → Corporificado (Cc)

Para Tall (2013), é por meio de nossas ações e percepções que desenvolvemos imagens mentais, que podem ser verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada, podendo se tornar entidades mentais perfeitas em nossa imaginação. Os máximos e mínimos locais, assim como outros conceitos matemáticos, remetem à lembrança de imagens similares às contidas na Figura 13, na qual observamos gráficos de funções que possuem uma certa característica comum e buscamos encontrar algumas regularidades entre esses gráficos.

Figura 13 – Gráficos que apresentam pontos de máximos e mínimos locais



Fonte: Imagens de trabalhos propostos pelo autor.

Imagens como essas são perceptíveis a nossos sentidos e conseguimos observar diferenças visuais entre elas, como cores, espessura dos traços, letras, números e símbolos que se misturam com as curvas, entre outras possíveis observações. Tais imagens podem ser encontradas por estudantes de Cálculo, em livros didáticos, em aulas que tratam do crescimento e decrescimento de funções ou em pesquisas na *Internet*. No entanto, não são as cores ou a espessura das linhas que as caracterizam como imagens relacionadas aos máximos e mínimos locais, mas, sim, as características perceptíveis do objeto matemático que se confrontam com as imagens conceituais que temos do mesmo objeto.

Para o fluxo do pensamento manter-se no mundo corporificado, entendemos que as observações devem pertencer ao mundo sensível, como o caso da observação dos gráficos e a conclusão dessa observação, indicando nos gráficos possíveis pontos de máximos e mínimos locais que devem se manter no mundo sensível. Em outras palavras, o fato de observar os gráficos em busca de regularidades e concluir que, nesses gráficos, existem pontos de máximo e mínimos locais, é um tipo de aprendizagem relacionada ao fluxo do pensamento que parte do mundo corporificado e mantém-se no mesmo mundo, podendo denotar-se pelo código Cc.

- Simbólico → Simbólico (Ss)

Os processos para determinação de máximos e mínimos locais são potencializados pelo uso da derivada. Tais processos são como rotinas a seguir, a fim de se construir um produto. Por exemplo, se tivermos a função real f dada por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ e quisermos determinar os máximos e mínimos locais de f, poderemos utilizar processos relacionados à derivação como estratégia, executando a seguinte rotina:

I. Determine f'.
II. Faça $f'(x) = 0$ para encontrar os números críticos, x_1 e x_2.
III. Determine f''.

IV. Se $f''(x_1) < 0$, então, será um máximo local.

Se $f''(x_2) > 0$, então, será um mínimo local.

V. Determinar os extremos relativos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$

Essa rotina pode ser entendida como um processo computacional, pois quando executada apresenta como resultado os pontos de máximos e mínimos locais. Assim, evidenciamos outra singularidade entre as teorias de David Tall (2013) e Anna Sfard (1991), pois o autor cita que o pensamento matemático trata dos símbolos, como operações a realizar por meio de cálculos e manipulações, sendo características do pensamento simbólico operacional. De forma similar, a autora aponta que uma abordagem concebida, como um processo computacional reflete a concepção operacional.

Logo, é plausível concluir que existem processos para aprendizagem. No entanto, levantamos a questão quanto à natureza desses processos. Será que em um conceito analisado no mundo simbólico, todos os processos envolvidos estarão diretamente associados a ele?

A seguir, observamos que nem sempre os processos possuem uma relação direta e que à luz de Sfard (1991), no estágio de *condensação,* o sujeito sintetiza diferentes processos extensos em unidades mais compactas que poderão ser combinadas com outros processos compactados.

Dessa forma, pelo exemplo dado, temos processos relacionados diretamente ao conceito de máximo e mínimo local, mas outros processos não possuem uma relação direta. A fim de distinguir os diferentes processos relacionados aos máximos e mínimos locais, denotemos como P_n a rotina, como Pd os processos relacionados ao conceito de máximo e mínimo local e como $P\bar{d}$ os processos que não são relacionados.

Assim, sendo P_1 a rotina descrita acima, Pd_1 o processo de derivação, $P\bar{d}_1$ o processo de resolução de equações do 2ª grau, Pd_2 o processo de verificar a concavidade da curva pela derivada e $P\bar{d}_2$ o processo para determinar pares ordenados, poderemos escrever essa rotina como:

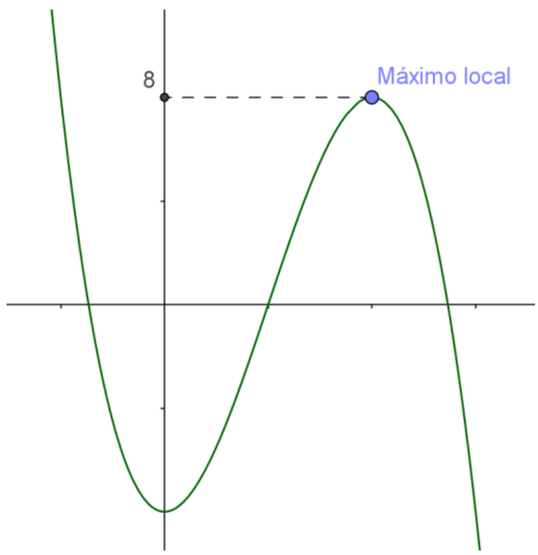
$$P_1 = Pd_1 \rightarrow P\bar{d}_1 \rightarrow Pd_1 \rightarrow Pd_2 \rightarrow P\bar{d}_2$$

Em situações nas quais podemos observar uma entrada simbólica e determinar uma rotina P_n, consideraremos como um fluxo de pensamento Ss.

- Corporificado → Simbólico (Cs)

Este fluxo ocorre em situações em que se tem a percepção de máximos e mínimos locais e necessitamos encontrar uma resposta, por meio de procedimentos algébricos, por exemplo, observar o gráfico da função f, ilustrado pela Figura 14, dada por $f(x) = -x^3 + 4x^2 + t$, para determinar o valor de t.

Figura 14 – Gráfico da função f dada por f(x) = - x³ + 4x² + t.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse caso, o sujeito que busca resolver a questão proposta poderá observar no gráfico o ponto de máximo e saber que, nesse ponto, a derivada é nula. Igualando a derivada a zero, os pontos críticos são determinados. Pela observação, t é calculado pela manipulação algébrica do ponto crítico correspondente e pelo valor da função nesse ponto.

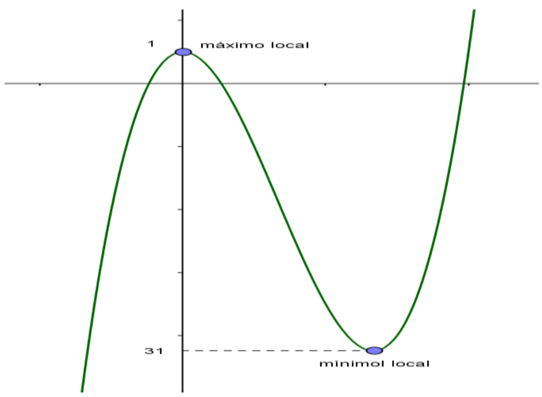
Esse tipo de atividade envolve a compreensão de uma figura, perceptível aos sentidos e executar procedimentos algébricos para a obtenção de uma solução, codificaremos como Cs.

- Simbólico → Corporificado (Sc)

Nesse fluxo, temos a informação no mundo simbólico e pretendemos observar o resultado no mundo corporificado, por exemplo, esboçar o gráfico da função f dada por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, indicando no gráfico os pontos de máximos e mínimos locais.

Para isso, encontramos $f'(x) = 3x^2 - 12x$, a derivada de f. Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos os pontos críticos 0 e 4. Considerando a segunda derivada $f''(x) = 6x - 12$ constamos que $f''(0) = -12$ e $f''(4) = +12$, logo, em $x=0$ é ponto de máximo local e em $x = 4$ de mínimo local. Assim, no gráfico de f pode-se localizar os máximos e mínimos locais, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$.



Fonte: Elaborado pelo autor

Quando atividade envolve estruturas e manipulações algébricas, visando a buscar uma compreensão de características perceptíveis, o fluxo de pensamento será codificado como Sc.

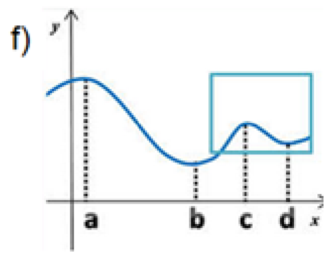
4.2 Fluxos de Pensamento relativos à Matemática Teórica

Neste item, discutiremos os fluxos de pensamento Cf, Fc, Sf e Fc relativos à Matemática Teórica. Tais fluxos relacionam aspectos práticos e processuais dos conceitos matemáticos com elementos do mundo formal. Em cada caso apresentamos uma atividade relativa ao fluxo de pensamemento analisado.

- Corporificado → Formal (Cf)

Atividade: O gráfico apresentado na Figura 16, c é um ponto de máximo local. Utilizando as palavras “intervalo aberto” e “maior ou igual”, pretende-se elaborar uma definição para máximo local.

Figura 16 – Gráfico de uma função, destacando o máximo local em c.



Fonte: Elaborado pelo autor

Análise: Essa atividade é influenciada pela *definição conceitual* do sujeito relativo ao conceito de extremo relativo e pelos termos do enunciado. Assim, entendemos que atividades em que se parte do mundo corporificado, objetivando apresentar elementos da estrutura formal, pode contribuir para a formação do fluxo codificado Cf.

- Formal → Corporificado (Fc)

Atividade. Considere a definição "Sejam f uma função real e $p \in Df$. Dizemos que p é *ponto de máximo local* de f se existir r > 0 tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo x em] p–r,p+r [∩ Df" e esboce o gráfico de uma função real f qualquer e indique os termos contidos na referida definição.

Análise: Nessa atividade, a partida do fluxo é a definição e é solicitada uma exploração perceptível dessa definição. Nos casos em que a atividade se indica com elementos de uma estrutura axiomática, como definições ou teoremas em busca de dar um significado perceptível a essa estrutura formal, iremos codificar o fluxo como Fc.

- Simbólico → Formal (Sf)

Atividade: Seja a função real $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e considere a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2. Utilizando definições ou teoremas, indique quais estabelecem relações entre f e a reta tangente.

Análise: Nesse caso, o sujeito precisa realizar manipulações algébricas para perceber que em 2 existe um mínimo local e buscar nos livros elementos formais que se referem à definição de mínimo local. Atividades que partimos de manipulações algébricas em busca de observar elementos formais propiciam um fluxo o qual codificaremos como Sf.

- Formal → Simbólico (Fs)

Atividade: Seja f uma função contínua em um intervalo [a, b], que possui derivada em todo ponto do intervalo]a, b[, exceto possivelmente, em um ponto c. Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f\,'(x) < 0$ para todo $x > c$, então, f tem um máximo local em c. Utilize a definição para a função $f(x) = |-2x + 6|$ e indique em quais valores a derivada é positiva ou negativa, fazendo uma correspondência com a definição.

Análise. Em atividades que o sentido parte de elementos formais em busca do desenvolvimento de procedimentos algébricos, codificaremos o fluxo como Fs.

4.3 Fluxos de Pensamento relativos à Matemática Formal

Neste tópico, apresentamos o fluxo relativo à Matemática Formal. Esse fluxo está desvinculado dos aspectos perceptíveis e práticos dos conceitos matemáticos, pois a Matemática antecede a prática e pode ser desenvolvida em uma estrutura estritamente formal.

- Formal → Formal (Ff)

Os temas de extremos locais de funções reais de uma variável real são, em geral, apresentados em livros didáticos como segue: (observamos a parte que trata do conceito de máximos e mínimos locais, que propõe a seguinte propositura):

Definição 1: Sejam f uma função e p $\in$ Df. Dizemos que p é *ponto de máximo local* de f se existir r > 0 tal que $f(x) \leq f(p)$ para todo x em] p–r , p+r [$\cap$ Df.

Definição 2: Sejam f uma função e $p \in$ Df. Dizemos que p é *ponto de mínimo local* de f se existir r > 0 tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo x em] p–r , p+r [$\cap$ Df.

Proposição 1: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b] e derivável em]a, b[.

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in$ (a, b), então, f é crescente em [a, b];

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in$ (a, b), então, f é decrescente em [a, b].

Teorema 1: Seja f uma função derivável em p, onde p é um ponto interior a Df. Uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

Teorema 2: Sejam f uma função que admite derivada de 2ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in$ I.

a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow$ p é ponto de mínimo local.

b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow$ p é ponto de máximo local.

Esse tratamento é citado por Tall (2013), como formalismo axiomático, baseado no conhecimento formal cujas propriedades são deduzidas e provadas axiomaticamente. Esse aspecto é compartilhado por Fischbein (1994), no qual esses elementos compõem o núcleo das ciências matemáticas e devem ser levados em conta no processo de criação em Matemática, ressaltando que as construções do pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos alunos, pois, só por um processo adequado de ensino, poderá dar a esses elementos formais, características funcionais.

Em situações em que o fluxo de pensamento está atrelado ao desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo, pertencendo ao mundo formal e mantendo-se nesse mesmo mundo, denotaremos pelo código Ff.

Este estudo nos possibilita identificar alguns exemplos em que observamos diferentes fluxos de pensamento em atividades de aprendizagem que permitem a aprendizagem do conceito de extremos locais. Queremos deixar claro que, os exemplos dados não constituem uma sequência para o aprendizado desse conceito, mas, sim, foram apresentados para exemplificar os diferentes fluxos relacionados a um conceito.

Nesta tese, visamos a analisar os fluxos de pensamento que podem estar envolvidos na aprendizagem da derivada; no próximo capítulo, buscamos acrescentar elementos com uma análise mais profunda, utilizando os fluxos de pensamento para compreender os diferentes aspectos relacionados à aprendizagem da derivada.

– CAPÍTULO 5 –

Análise dos Fluxos de Pensamento na Aprendizagem da Derivada

Neste capítulo, analisamos os fluxos de pensamento com foco na aprendizagem da derivada à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2013). Esta análise é realizada, tomando por base o estudo das perspectivas de abordagens da derivada apresentado no Capítulo 2, as teorias discutidas no Capítulo 3 e os diferentes fluxos de pensamento propostos no Capítulo 4. Ao final, apresentamos a síntese que poderá servir de referência a outras pesquisas de cunho aplicado, podendo a partir dessa análise elaborar sequências de atividades para atestar potencialidades didáticas que esse enfoque pode ofertar.

5.1 Fluxo Ff

Conforme Tall (2013), o formalismo axiomático é baseado no conhecimento formal em que propriedades e teoremas de conceitos matemáticos são deduzidos e provados matematicamente a partir de axiomas ou teoremas já demonstrados. O mundo formal, também, é compreendido nos diferentes aspectos dos conceitos matemáticos propostos por Fischbein (1994), no qual o aspecto formal é o núcleo das ciências matemáticas e necessita estar presente no processo de raciocínio.

A seguir, apresentamos algumas provas e demonstrações visando à explicitar a derivada estritamente no mundo formal.

Definição de derivada: A derivada de uma função f, denotada por f', é definida em um valor x ∈ $Df \cap I$, com I⊂ Df como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, se esse limite existir e for finito.

i. Prove que a derivada de qualquer função constante é zero.

Demonstração: Seja dada $f(x)=c$, para todo x real.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0 \quad \therefore \quad f'(x)=0$$

ii. Prove que a derivada de uma função afim dada por $f(x)=mx+b$ é $f'(x)=m$.

Demonstração: Suponha f uma função afim expressa por $f(x)=mx+b$, para todo x real. Por definição

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{mx+mh+b-mx-b}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to 0}m=m \;\therefore\; f'(x)=m$$

iii. Prove que a derivada da função seno é a função cosseno.

Demonstração: Suponha a função $f(x)=sen\,x$.

Seja a identidade trigonométrica $sen\,a-sen\,b=2.sen\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}$ e o limite fundamental $\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen\,x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2.sen\frac{x+h-x}{2}.\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2.sen\frac{h}{2}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=\cos x$$

$$\therefore \; f'(x)=\cos x$$

Assim como estes três exemplos que transcrevem um fluxo de pensamento Ff, podemos observar a possibilidade de averiguar o mesmo fluxo nas demonstrações de algumas propriedades da derivada, por exemplo:

Supondo p e q duas funções reais e diferenciáveis:

i. Prove que $\left(p(x)+q(x)\right)' = p'(x)+q'(x)$

Demonstração: Seja $f(x) = p(x)+q(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(p(x+h)+q(x+h)\right)-\left(p(x)+q(x)\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)+q(x+h)-p(x)-q(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)+q(x+h)-q(x)}{h}$$

Como $\lim\limits_{h\to 0}\left(A+B\right) = \lim\limits_{h\to 0} A + \lim\limits_{h\to 0} B$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{p(x+h)-p(x)}{h}+\frac{q(x+h)-q(x)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x) = p'(x)+q'(x)$$

ii. Prove que $(p(x).q(x))' = p'(x).q(x)+p(x).q'(x)$.

Sendo $\lim\limits_{h\to 0}\left(A+B\right) = \lim\limits_{h\to 0} A + \lim\limits_{h\to 0} B$ e $\lim\limits_{h\to 0} A.B = \lim\limits_{h\to 0} A.\lim\limits_{h\to 0} B$

Demonstração: Seja $f(x) = p(x).q(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(p(x+h).q(x+h)\right)-\left(p(x).q(x)\right)}{h}$$

Somando e subtraindo o termo $\dfrac{p(x).q(x+h)}{h}$, teremos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{p(x+h).q(x+h)-p(x).q(x)}{h}+\frac{p(x).q(x+h)}{h}-\frac{p(x).q(x+h)}{h}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h).q(x+h)-p(x).q(x+h)+p(x).q(x+h)-p(x).q(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{q(x+h).(p(x+h)-p(x))+p(x).(q(x+h)-q(x))}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}q(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}+\lim_{h\to 0}p(x).\lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h}$$

$$f'(x)=q(x).\lim_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}+p(x).\lim_{h\to 0}\frac{q(x+h)-q(x)}{h}$$

$$f'(x)=q(x).p'(x)+p(x).q'(x)$$

$$\therefore (p(x).q(x))'=p'(x).q(x)+p(x).q'(x) \quad C.Q.D.$$

iii. Prove que $\left(\dfrac{p}{q}\right)'=\dfrac{p'q-p\,q'}{q^2}$, com $q(x)\neq 0$, para qualquer $x \in$ Dq

Demonstração: Seja $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, temos que $p(x)=f(x).q(x)$.

Conforme provado anteriormente, $(p.q)'=p'q+p\,q'$, então,

$$p'(x)=f'(x).q(x)+f(x).q'(x)$$

$$\frac{p'(x)-f(x).q'(x)}{q(x)}=f'(x)$$

Substituindo $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, teremos:

$$f'(x)=\frac{p'(x)-\dfrac{p(x)}{q(x)}.q'(x)}{q(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{p'(x).q(x)-p(x).q'(x)}{q(x)}}{q(x)}$$

$$f'(x)=\frac{p'(x).q(x)-p(x).q'(x)}{q^2(x)}$$

$$\therefore\ \left(\frac{p}{q}\right)'=\frac{p'q-p\ q'}{q^2}\qquad .$$

Como podemos observar, os exemplos citados propiciam um fluxo de pensamento Ff relacionado à derivada, no que prevalece a estrutura de provas e demonstrações, que partem, tanto de definições aceitas como a definição da derivada, como as proposições provadas em momentos antecedentes, como o uso de propriedades dos limites ou a demonstração da derivada do produto de duas funções.

Ressaltamos que não pretendemos esgotar todas as possíveis demonstrações relacionadas às regras de derivação e suas propriedades, mas, sim, explicitar a estrutura que se enquadra no fluxo de pensamento Ff.

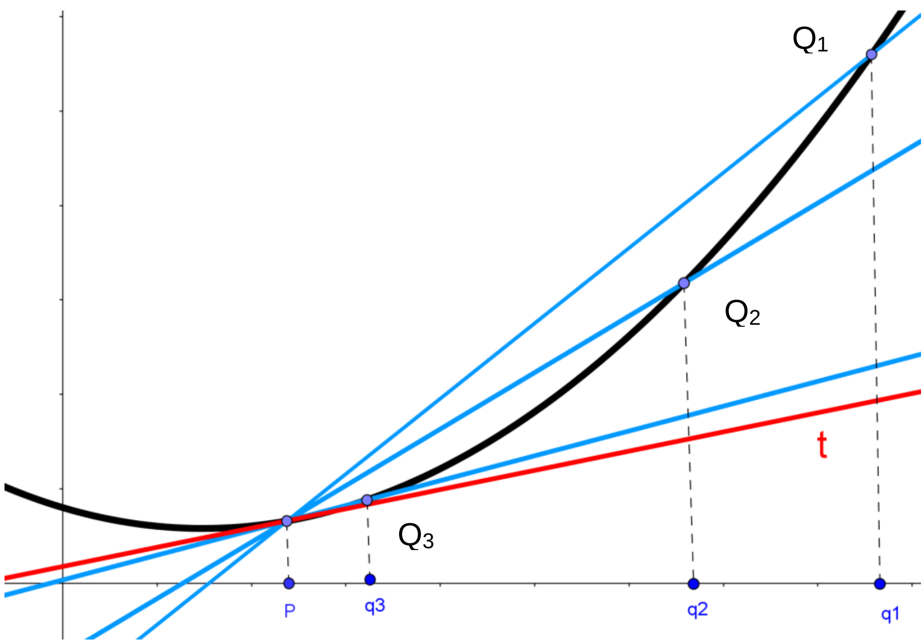
5.2 Fluxo Cc

Os aspectos corporificados da derivada, ou seja, aqueles que podem ser percebidos por nossos sentidos são os relacionados à sua representação gráfica e numérica.

Na representação gráfica, a derivada é percebida, tanto como a inclinação da reta tangente em um ponto como a retidão local desse gráfico nas vizinhanças do ponto. Já, na representação numérica, é percebida no cálculo numérico da derivada em um ponto.

Iniciaremos a análise pela representação gráfica, por meio das informações apresentadas na Figura 17, onde observamos o gráfico de uma função f e as retas que intercectam o ponto $(p,f(p))$. Por um processo computacional, traçamos a reta tangente a p (na Figura 17 representada pela reta t) para explorar a ideia de que, quanto mais próximo q_n estiver de p, as inclinações das retas secantes PQ_n, estarão mais próximas à inclinação da reta tangente t.

Figura 17 – Gráfico da função f, da reta tangente t e das retas secantes PQ_n.

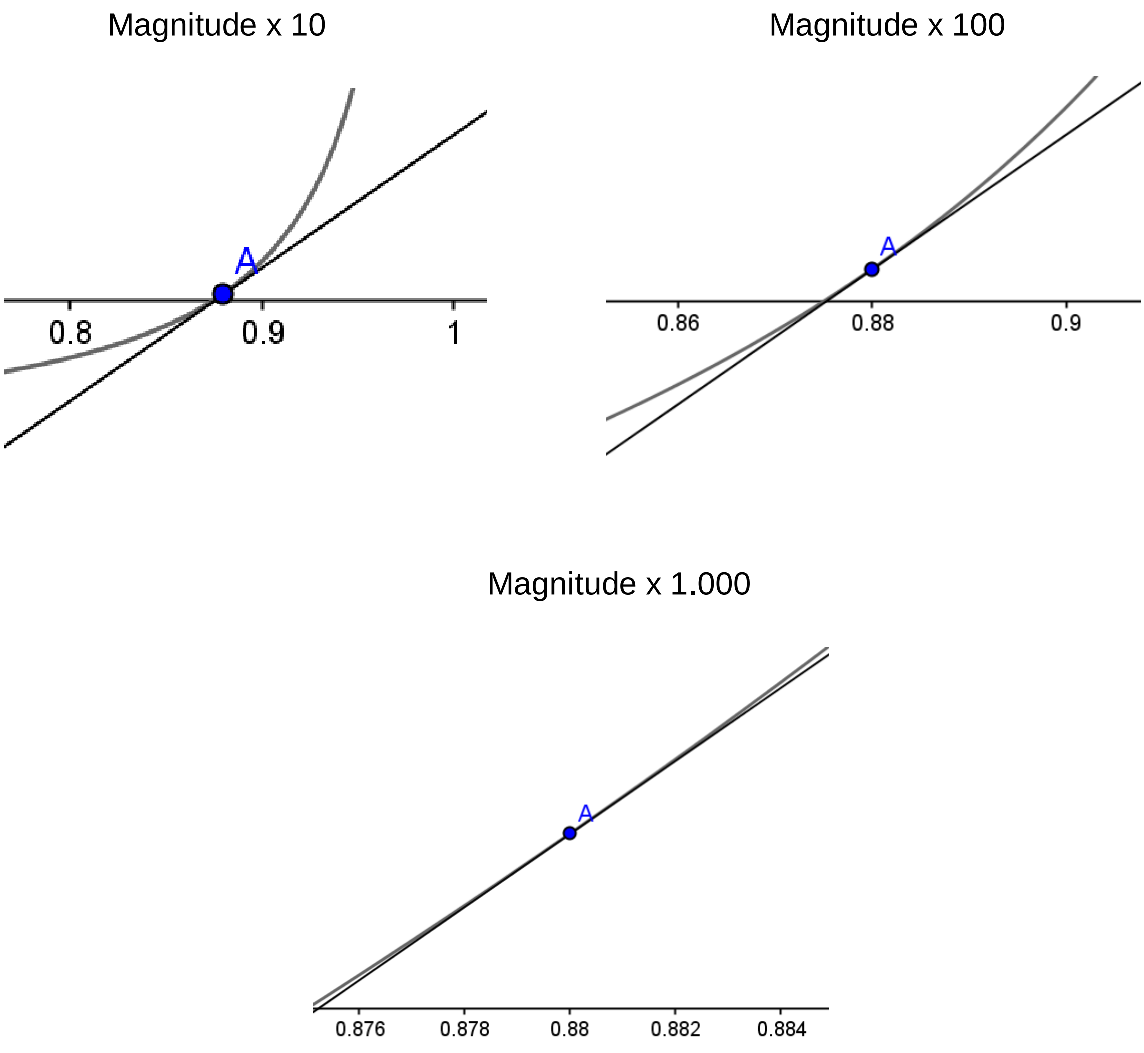


Fonte: Elaborado pelo autor

Essa representação poderá ser visualizada, tanto na tela de um computador como por sequências de gráficos que detalham esse processo de aproximação. Tais observações podem propiciar a um sujeito desenvolver imagens mentais, estáticas ou dinâmicas da obtenção da reta tangente. No entanto, o cerne dessa manipulação mental não deve estar no produto final que seria a reta tangente, mas, sim, na variação das inclinações das retas secantes expressas por $a_n = \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$, que tendem à inclinação da reta tangente, mas, pelo limite expresso por $a = \lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$, caso esse limite exista. Assim, a derivada é a inclinação da reta tangente obtida como aproximação das inclinações das retas secantes.

Outra perspectiva observável na representação gráfica é a de retidão local. Ao ampliarmos o gráfico de uma função f nas vizinhanças do ponto de tangência p, percebemos que quanto maior for a magnitude mais a curva se confunde com a reta tangente, conforme ilustrado pela sequência de gráficos da Figura 18:

Figura 18 – Diferentes magnitudes da função f no ponto A.



Fonte: Elaborado pelo autor

A retidão local pode ser percebida, tanto pelo uso de computadores como pelas sequências de figuras que mostram diferentes magnitudes em um ponto.

Essa sequência sugere que, ao se calcular a taxa de variação média $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ de uma função f, quanto maior a magnitude menor será o intervalo observável de extremos x e p, ou seja, conforme a magnitude aumenta, visualizamos valores de x cada vez mais próximos a p. Logo, para se calcular a taxa de variação instantânea em p, é aceitável que utilizemos o limite expresso por $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Em ambas as situações, ressaltamos que o fluxo de pensamento permanece no mundo corporificado, pois, tanto as observações iniciais (as inclinações das diferentes retas secantes ou as taxas de variação média de uma função) como a conclusão (tendem à inclinação da reta tangente ou à taxa de variação instantânea), as intuições permanecem em um ambiente observável e perceptível, propiciando o desenvolvimento de imagens mentais dessas situações, enfatizando o fluxo Cc.

Outro enfoque da derivada em que os sentidos são mobilizados é dado pela representação numérica. Como exemplo, usamos a função $f(x) = x^2$ e p = 3 , para observar os resultados da expressão $\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$, para valores de x cada vez mais próximos a p, ou seja, os valores da expressão $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$, quando x se aproxima de 3. Os dados estão expressos na Tabela 4

Tabela 4 – Tabelas que sintetizam os resultados da expressão (x²-9)/(x-3), quando x se aproxima de 3 pela direita e pela esquerda.

x	$(x^2-9)/(x-3)$
4	7
3,1	6,1
3,01	6,01
3,001	6,001
3,0001	6,0001
3,00001	6,00001

x	$(x^2-9)/(x-3)$
2	5
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999
2,9999	5,9999
2,99999	5,99999

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesse caso, ressaltamos que o fluxo de pensamento parte da observação dos valores x cada vez mais próximos ao número 3, bem como o resultado da expressão $\frac{x^2-9}{x-3}$ que se aproxima de 6, ou seja, se L é o valor para o qual a expressão se aproxima, então, esperamos que $L=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, neste exemplo, $L=6$.

Novamente, destacamos que não pretendemos esgotar as possibilidades de aprendizagem da derivada relacionada ao mundo perceptível, mas, sim, ressaltar alguns aspectos desse conceito que podem ser observados a fim de possibilitar a formação de imagens mentais, como as das situações apresentadas, consequentemente, relativas ao fluxo de pensamento Cc.

5.3 Fluxo Ss

Esse fluxo é percebido em atividades que tratam dos processos envolvidos na aprendizagem da derivada, visando dar significados aos símbolos desse conceito. No entanto, a aplicação de regras e rotinas não necessita ser realizada por uma estrutura axiomática, como as descritas no tópico 5.1. Os processos relativos ao mundo simbólico surgem quando o sujeito realiza suas atividades apenas apoiados em manipulações algébricas e buscam desenvolver habilidades relacionadas à aplicabilidade do conceito em situações práticas ou de atividades para aprendizagem, que visem ao desenvolvimento de procedimentos sistematizados e algoritmizados.

A fim de observarmos os aspectos do mundo simbólico, apresentaremos alguns procedimentos visando a compreensão do fluxo do pensamento Ss para o aprendizado da derivada.

Inicialmente, indicamos as notações mais frequentes para designar a derivada de uma função, que tiveram suas origens nas proposituras de Lagrange e Leibniz.

- Notações para função derivada:

$$f' \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx}(x) \qquad \frac{d}{dx}f(x) \qquad D_x(f(x)) \qquad (f(x))'$$

- Notações para a derivada em um ponto p:

$$f'(p) \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=p} \qquad \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=p} \qquad \frac{d}{dx}f(p) \qquad D_x(f(p)) \qquad (f(p))'$$

Quando se referem à ordem da derivada – derivada de 2ª ou 3ª ordem –, algumas notações parecem ser mais práticas como f'' e f''', e outras nem tanto, como $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^3y}{dx^3}$. Mas, o processo desencadeado, independente da notação adotada por qualquer uma das simbologias, é o mesmo.

A seguir, iremos explorar diferentes situações em que o fluxo de pensamento é relativo ao mundo simbólico durante o processo de aprendizagem da derivada.

i. Seja a função real $f(x) = x^5$, determine a derivada dessa função.

RESOLUÇÂO: Como f é da forma $f(x) = x^n$, usamos a regra de derivação $f'(x) = n.x^{n-1}$ para obter $f'(x) = 5x^4$.

Não pretendemos apresentar ou explicar regras de derivação, porém, é importante trazer alguns exemplos para explorar e analisar os diferentes processos relacionados ao mundo simbólico.

No caso desse exemplo, temos que o ponto de partida para o fluxo do pensamento inicia-se pela simbologia $f(x) = x^5$, que ativa processos cognitivos em busca de situações já vivenciadas "*met-before"*. Caso exista um procedimento que possa ser executado por essa entrada, a rotina equivalente é desencadeada a fim de encontrar um resultado. Fischbein (1994) destaca que as técnicas e procedimentos de resolução de atividades são elementos de caráter fundamental para o entendimento, pois essas propiciam as habilidades para se resolver problemas e necessitam de métodos sistemáticos e repetitivos para serem adquiridos.

Para distinguir os diferentes processos envolvidos na derivação, denotamos como P_n as rotinas a serem executadas, como Pd os processos relacionados à derivada e como $P\bar{d}$ os processos que não estão relacionados à derivada.

Tomemos como exemplo a função $f(x) = x^7$ e sua derivada $f'(x) = 7\,x^6$. Esse procedimento que implica em apenas utilizar a regra de derivação teremos que $P_1 = Pd_1$.

Se tomarmos como exemplo a função $f(x) = \frac{1}{x^3}$, para encontrar a derivada de f, $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$ será necessário realizar um processo que não está relacionado a derivação, ou seja, transformar $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ e $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$. Logo, nesse caso, há processos relacionados à derivada e processos que não estão relacionados, podendo a rotina ser sintetizada como: $P_2 = P\bar{d}1 \to Pd1 \to P\bar{d}2$

Dessa forma, observamos que os processos relacionados à derivada articulam-se com outros processos que podem estar ou não relacionados aos de derivada.

Percebemos que, ao se buscar a derivada da função $f(x) = \frac{1}{x^3}$, inicialmente, será necessário perceber que se trata da aplicação da regra de derivação para funções na forma $f(x) = x^n$. No entanto, outros procedimentos estão em jogo e não se tratam de processos relacionados à derivada, mas, que precisam ser executados antes da aplicação do processo de derivação. Assim, podemos declarar quais são os processos relacionados à derivada e quais não são.

O processo $Pd1$ refere-se a multiplicar o monômio pelo expoente n e subtrair 1, conforme a regra se $f(x)=x^n$, logo $f'(x)=n.x^{n-1}$. Tal processo é estritamente ligado ao conceito de derivada, tanto que a demonstração dele parte da própria definição de derivada. Entretanto, a função $f(x)=\frac{1}{x^3}$ para ser percebida, como uma função da forma $f(x)=x^n$, necessita ser tratada ou reescrita, mas, por um processo que não está relacionado diretamente à derivada que denotamos por $P\bar{d}1$, pois executa a rotina de mudar o denominador para o numerador, trocando o sinal do expoente. E o processo $P\bar{d}2$, que executa a rotina de mudar o numerador de expoente negativo para o denominador, trocando o sinal do expoente, sendo esses dois últimos processos relativos às propriedades das potências.

De forma similar, para derivar a função $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, teríamos um $P\bar{d}3$, como o processo de transformar a expressão $\sqrt[3]{x^2}$ em $x^{\frac{2}{3}}$.

Como visto, no fluxo de pensamento Ss, podemos ter diferentes configurações, podendo, então, conjecturar as seguintes rotinas:

$P_1 = Pd1$

$P_2 = P\bar{d}1 \rightarrow Pd1$

$P_3 = P\bar{d}1 \rightarrow Pd1 \rightarrow P\bar{d}2$, entre outras possibilidades.

Na situação, em que o fluxo do pensamento parte do mundo simbólico e mantém-se nesse mesmo mundo, em que rotinas são executadas e articuladas a outros processos relativos à derivada (Pd) ou não ($P\bar{d}$), contribuindo para o amadurecimento de uma simbolização, codificaremos como fluxo Ss.

ii. Seja *f(x) = tg x*, determine *f'*.

RESOLUÇÂO: $f'(x) = (tg\,x)' = \left(\dfrac{sen\,x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(sen\,x)'.\cos x - sen\,x.(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x.\cos x - sen\,x.(-sen\,x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Essa atividade envolve o cálculo da derivada de funções trigonométricas e precisa do emprego da regra do quociente da derivada, além de habilidades em manipulações com o trato das identidades trigonométricas. No exemplo, observamos o encadeamento de processos, ou seja, o processo de transformações das identidades trigonométricas que ocorrem em concomitância com o processo de desenvolvimento da regra do quociente da derivada.

Neste caso, observamos dois processos relacionados à derivada e dois não, resultando na seguinte rotina:

$P_2 = P\bar{d}1 \rightarrow Pd\,2 \rightarrow Pd\,3 \rightarrow P\bar{d}2 \rightarrow P\bar{d}1 \rightarrow P\bar{d}1$, sendo as aplicações dos seguintes processos:

$P\bar{d}1$- Identidades trigonométricas;

$Pd\,2$ - Regra da derivada do quociente;

$Pd\,3$- Derivada de funções trigonométricas; e

$P\bar{d}2$- Produto de funções trigonométricas.

Abrimos aqui um parênteses para destacar que o entendimento de que a derivada da função tangente é a função secante ao quadrado, não floresce, naturalmente, nem é perceptível a nossos sentidos. Logo, é compreendida como resultante da utilização e reutilização de rotinas que as envolvem, configurando, assim, o fluxo de pensamento Ss.

Outro ponto que devemos considerar é relativo à etapa familiarização apontada por Sfard (1991); nessa etapa, o sujeito adquire uma certa familiaridade com os objetos matemáticos relacionados ao conceito. No caso, as habilidades no trato de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente) e o desenvolvimento de identidades trigonométricas seriam consideradas familiares.

iii. Seja a função real dada por $p(x) = (x^3 - 5x^2)^4$, determine a derivada de p.

RESOLUÇÂO: Sendo a função p da forma $p(x) = f\left(g(x)\right)$, temos que:

$$p'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x)).g'(x) = 4(x^3 - 5x^2)^3.\ (3x^2 - 10x)$$

Em situações que envolvem a derivada de funções compostas, novos processos fundem-se a processos anteriores. Para Sfard (1991), é no estágio de condensação que os processos extensos compactam-se a fim de se integrarem com outros processos compactados. No exemplo dado, podemos observar a seguinte sequência de procedimentos para executar a rotina P_3:

$P_3 = P\bar{d}3 \rightarrow Pd4 \rightarrow Pd1$, sendo as aplicações dos seguintes processos:

$P\bar{d}3$ - Reconhecimento de funções compostas;

$Pd4$ - Derivação pela regra da cadeia; e

$Pd1$ - Derivada de funções do tipo $f(x) = x^n$.

No caso do exemplo dado, a rotina a ser executada para encontrar a função derivada é denotada como regra da cadeia, sendo necessário empregar novas rotinas relativas à derivada e integrá-las com outras rotinas aplicadas em momentos anteriores.

Reafirmamos que não pretendemos esgotar todos os processos relacionados à derivada, e os que não são, mas, sim, explorar a possibilidade de observar que o fluxo de pensamento Ss, durante a aprendizagem da derivada, é composto por processos, relativos ou não ao processo de derivação, a fim de executar rotinas, caracterizando, assim, um fluxo Ss, pois permanece estritamente no mundo simbólico e tem a finalidade de amadurecer as simbologias relacionadas à derivação.

5.4 Fluxo Sc

Esse fluxo de pensamento está relacionado à Matemática Prática, pois se parte da execução de processos que visam a buscar elementos da derivada sentida, por exemplo, construir o gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$. Determinando-se zeros da função derivada pode-se encontrar os pontos críticos seguindo a seguinte rotina:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

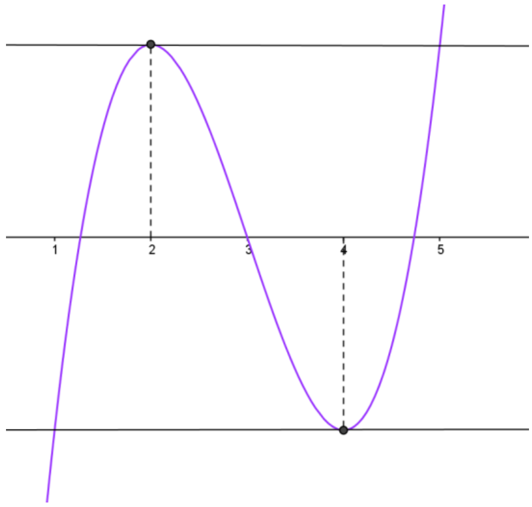
Fazendo $f'(x) = 0$, teremos $3x^2 - 18x + 24 = 0 \therefore x = 2 \vee x = 4$. Logo, em 2 e 4, a reta tangente possui inclinação nula.

Pelo sinal da derivada de 2ª ordem, podemos determinar a concavidade da curva, logo temos que:

$$f''(x) = 6x - 18$$
$$f''(2) = -6 \rightarrow Concavidade\ para\ baixo$$
$$f''(4) = +6 \rightarrow Concavidade\ para\ cima$$

Com base nesses processos de derivação e podemos esboçar um gráfico, que se assemelha ao gráfico construído por programas gráficos como o apresentado pela Figura 19:

Figura 19 – Esboço do gráfico de f.



Fonte: Elaborado pelo autor

Ressaltamos aqui, que os procedimentos para o cálculo das derivadas de 1ª e 2ª ordens pertencem ao mundo simbólico e encontrar o gráfico cujos pontos de máximos e mínimos apresentem a derivada nula corresponde ao mundo corporificado. Logo, essa é uma atividade de aprendizagem que propicia o fluxo de pensamento Sc.

Outro exemplo, temos a função $f(x) = x^2 - 4$ e pedimos para esboçar o gráfico e traçar a reta tangente no ponto de abscissa 3, indicando os valores que a reta tangente intercecta os eixos x e y.

Nessa situação, destacamos os seguintes processos:

1º - Esboçar o gráfico de f;

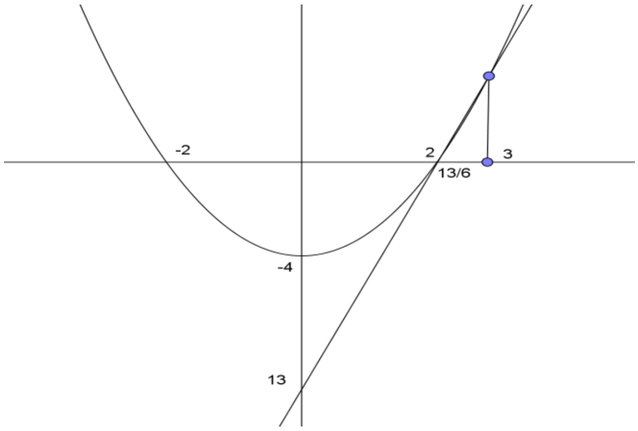
2º - Traçar a reta tangente no ponto (3, 5);

3º - Encontrar a equação da reta tangente, conforme rotina:

$$f'(x) = 2x$$
$$f'(3) = 6 \therefore m = 6$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y = 6x - 13$$

4ª – Indicar os valores em que a reta tangente intercecta os eixos x e y, conforme esboço do gráfico apresentado pela Figura 20.

Figura 20 – Esboço do gráfico de f e da reta tangente em x=3.



Fonte: Elaborado pelo autor

Essa rotina pode ser compreendida como:

$P_4 = P\bar{d}4 \rightarrow Pd1 \rightarrow Pd5 \rightarrow P\bar{d}5$, sendo:

$P\bar{d}4$ - Esboço de gráfico de funções do 2º grau;

$Pd1$ - Derivada de funções do tipo $f(x) = x^n$;

$Pd5$ - Esboçar o gráfico de retas tangentes nos pontos de uma f qualquer;

$P\bar{d}5$ - Calcular a equação da reta conhecendo-se a inclinação e um ponto.

$P\bar{d}6$ - Calcular os valores que a reta tangente intersecta os eixos x e y.

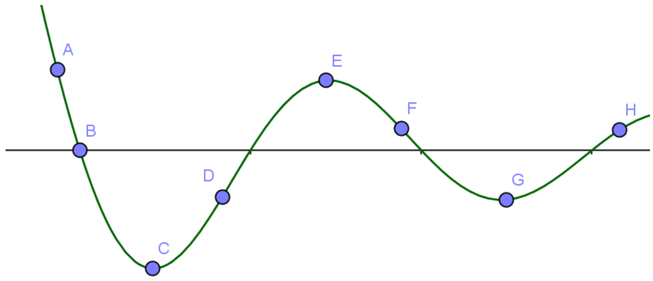
O exemplo destaca novamente situações que, a partir de processos, buscamos uma compreensão perceptível da derivada, favorecendo o fluxo Sc.

5.5 Fluxo Cs

Da mesma forma que o fluxo de pensamento Sc, esse fluxo é relativo à Matemática Prática. No caso da derivada, é quando, a partir de sua característica sentida e observável, pretendemos transitar para o mundo simbólico, em que rotinas e processos serão desencadeados e executados pelo sujeito.

Como exemplo, partimos da observação do gráfico de f, representado na Figura 21, pretendemos fazer o estudo do sinal da derivada de f nos pontos indicados:

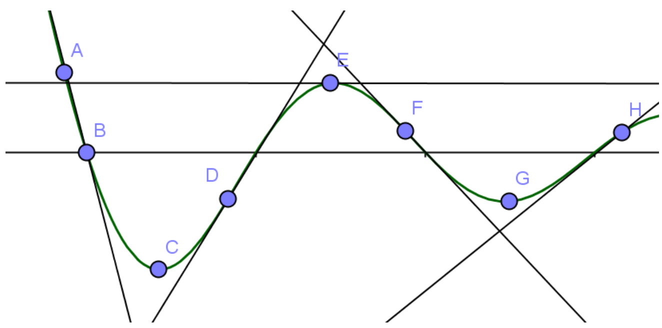
Figura 21 – Gráfico de uma função f e pontos em que se deseja fazer o estudo do sinal da derivada.



Fonte: Elaborado pelo autor

No mundo corporificado, a derivada pode ser interpretada como a inclinação da reta tangente e podemos, mentalmente, vislumbrar as possíveis retas tangentes que intercectam os pontos apresentados no gráfico, como os ilustrados pela Figura 22.

Figura 22 – Retas tangentes aos pontos que se deseja fazer o estudo do sinal da derivada.



Fonte: Elaborado pelo autor

Logo, no domínio observável da função f, podemos afirmar que f' é: negativa nos pontos de abscissas $x_A,\ x_B\ e\ x_F$, positiva nos pontos de abscissas $x_D\ e\ x_H$ e nula nos pontos de abscissas $x_C,\ x_E\ e\ x_G$. Assim, podemos usar a seguinte simbologia para expressar as conclusões:

$f' > 0$ em $x_D\ e\ x_H$;

$f' < 0$ em $x_A,\ x_B\ e\ x_F$;

$f' = 0$ em $x_C,\ x_E\ e\ x_G$.

No exemplo, ressaltamos que o fluxo de pensamento pode ocorrer, inicialmente, pela "visualização" mental das retas tangentes nos pontos indicados, ou seja, pertencentes ao mundo corporificado e concluímos que f', em determinados pontos pode ser positiva, negativa ou nula, ou seja, é atribuído um significado à simbologia f', que pertence ao mundo simbólico, para correlacionar as inclinações das retas tangentes.

As situações em que se parte da derivada *sentida*, para executar processos ou utilizar simbologias a fim de expressar conclusões sobre a derivada, entendemos que propiciam o fluxo Cs.

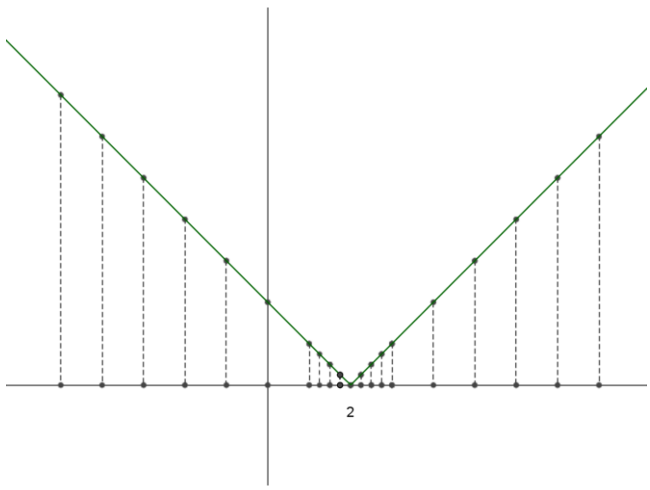
5.6 Fluxo Fc

Esse fluxo de pensamento, assim como os demais que se seguem, é relativo à Matemática teórica.

Nesse caso, temos como ponto de partida o formalismo axiomático relacionado à derivada, que vai no sentido de uma situação em que existem partes observáveis da derivada, por exemplo, utilizar a definição da derivada para compreender a impossibilidade de se determinar a reta tangente em x = 2 de uma função como $f(x) = |x-2|$.

Calculando a derivada dessa função por definição obtemos: não existe o limite para x = 2, pois $\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2) - f(2)}{x-2} = 1 \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{(-x+2) - f(2)}{x-2} = -1$. Tal situação pode ser observada quando buscamos compreender, por meio de construções de retas tangentes, o que acontece com a derivada da função $f(x) = |x-2|$ em x = 2. Esta construção trata dos elementos do mundo corporificado, representados pelo gráfico ilustrado pela Figura 23, onde observamos que, nas vizinhanças à esquerda de 2, as inclinações das retas tangentes a f são sempre -1 e que nos pontos à direita de 2 são sempre 1, logo não podemos traçar a reta tangente a f em x = 2, ou seja, não existe a reta tangente a f em x = 2.

Figura 23 – Elementos do mundo corporificado referentes às retas secantes que se aproximam de x=2.



Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa atividade partimos da definição da derivada, estrutura essa apresentada em um contexto axiomático, em que a condição de existência da derivada é aceita sem discussão e verifica-se no contexto observável, em que a a intersecção das duas retas (formando um bico) para uma função modular $f(x) = |ax+b|$ indica que essa função não possui derivada quando x = - b/a. Essa situação pode ser explorada em outros exemplo, como funções cujas leis são expressa por mais de uma sentença como é o caso da função $f\ (x) = \begin{cases} x^2 - 4, se\, x \geq 0 \\ x - 4, se\, x < 0 \end{cases}$.

Ocasiões em que o fluxo de pensamento parte de elementos da estrutura formal e busca destacar elementos corporificados, denotaremos como um fluxo de pensamento Fc.

5.7 Fluxo Fs

De forma similar ao fluxo de pensamento Fc, esse tipo de fluxo ocorre quando temos o formalismo relacionado à derivada, e os processos são desencadeados e executados com base nessa estrutura.

Sfard (1991) ressalta que mesmo se um conceito for apresentado primeiramente em seu aspecto estrutural, o sujeito tentará compreendê-lo em uma perspectiva processual. Essa postura também é compartilhada por Tall (2013) quando sugere que, inicialmente, a aprendizagem ocorre nos mundos corporificado e simbólico, para em um momento posterior, ocorrer no mundo formal.

A obtenção da derivada de uma função, por definição em caso particular como $f\,(x) = x^2$ é mobilizado o fluxo Ff.

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

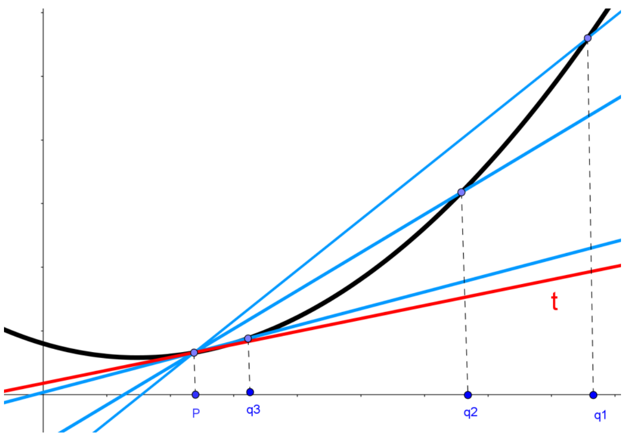
$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h.(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(2x+h\right) = 2x \ \therefore\ f\,'(x) = 2x$$

No caso, temos um processo que é o desenvolvimento algébrico do limite para encontrar o resultado simbólico $f\,'(x) = 2x$. Tall (2013) cita que os processos, com o tempo, vão se desenvolvendo até se tornarem símbolos. A função derivada de f, nesse caso $f\,'$, não se trata de um processo, mas, sim, de uma nova função, um outro objeto matemático diferente de f. No entanto, para um sujeito que inicia o estudo da derivada, o símbolo f' pode significar um processo, ou seja, um resultado de operações algébricas sobre f. No entanto, para um sujeito envolvido no estudo de equações diferenciais pode tratar a derivada como um objeto.

5.8 Fluxo Cf

O gráfico, ilustrado na Figura 24, foi apresentado para indicar a mobilização de um fluxo de pensamento no mundo corporificado, pois o foco era observar a tendência das retas secantes, que convergiam para a reta tangente.

Figura 24 – Retas secantes e reta tangente em um ponto p



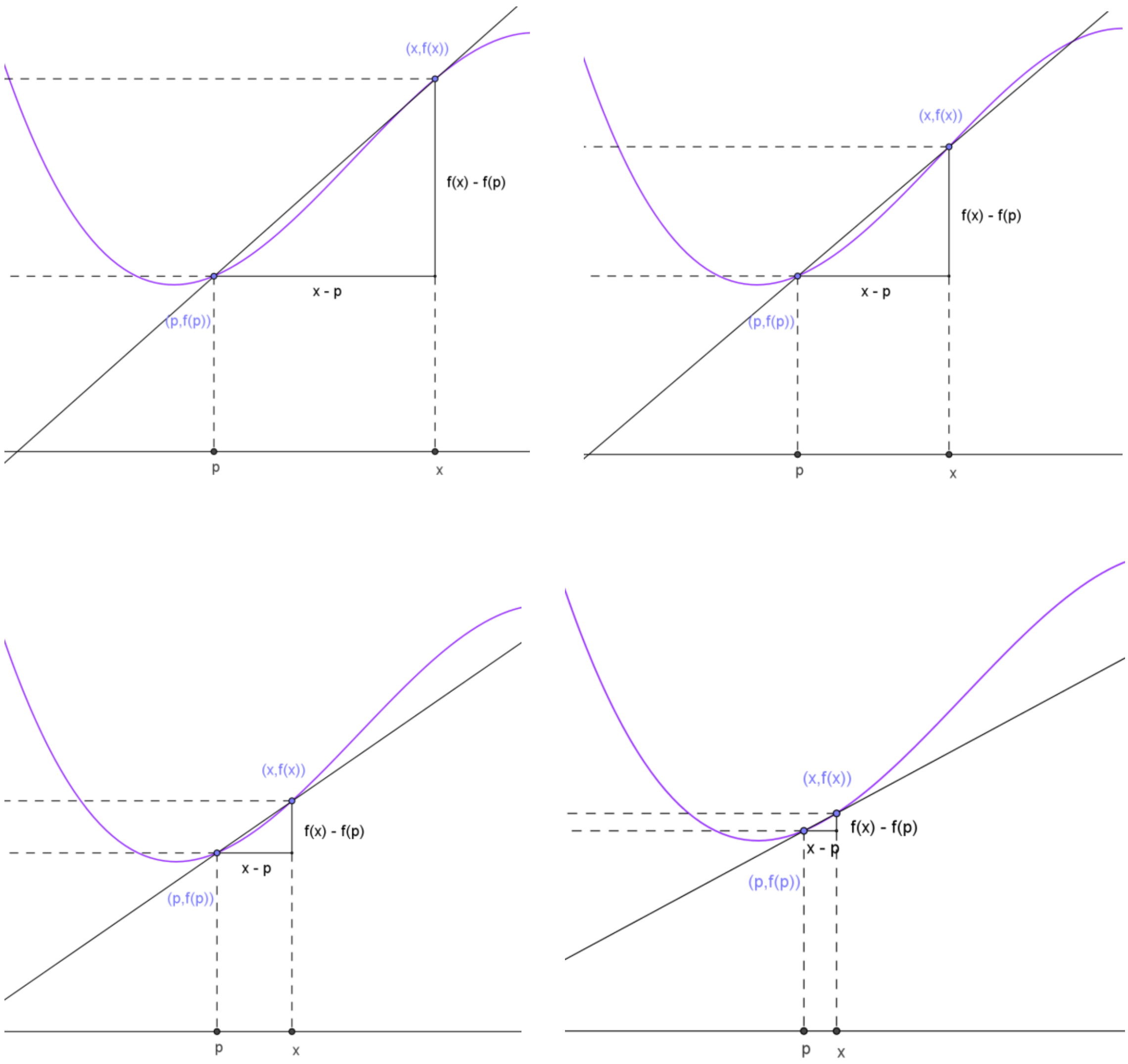
Fonte: Elaborado pelo autor

Entretanto, observando a convergência das inclinações das retas secantes para a inclinação da reta tangente e a retidão local, poderemos fazer alusões sobre a definição da derivada. Ao realizar isto há também a manifestação do fluxo de pensamento Cf, pois o foco está na observação do comportamento das retas secantes, mas, que objetivam dar significado à definição formal de derivada. Expressamos essa ideia com o exemplo a seguir:

Seja a sequência de gráficos que apresenta diferentes retas secantes ao gráfico da função f, com valores de x cada vez mais próximos a p, conforme a Figura 25.

As inclinações das retas secantes poderão ser calculadas pela igualdade $m=\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

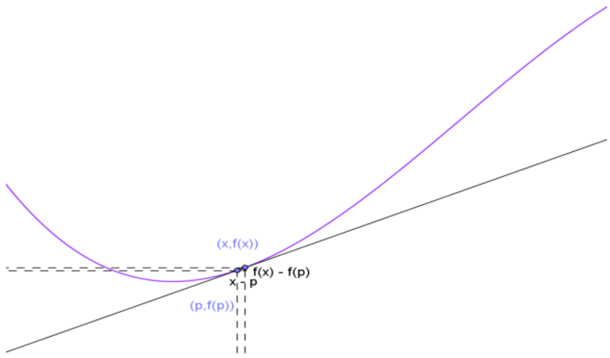
Figura 25 – Sequência de gráficos que apresenta diferentes retas secantes ao gráfico da função f



Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme x aproxima-se de p, os detalhes observáveis em cada gráfico na obtenção das inclinações da reta secante, começam a se tornar imperceptíveis a nossos sentidos, como os da Figura 26.

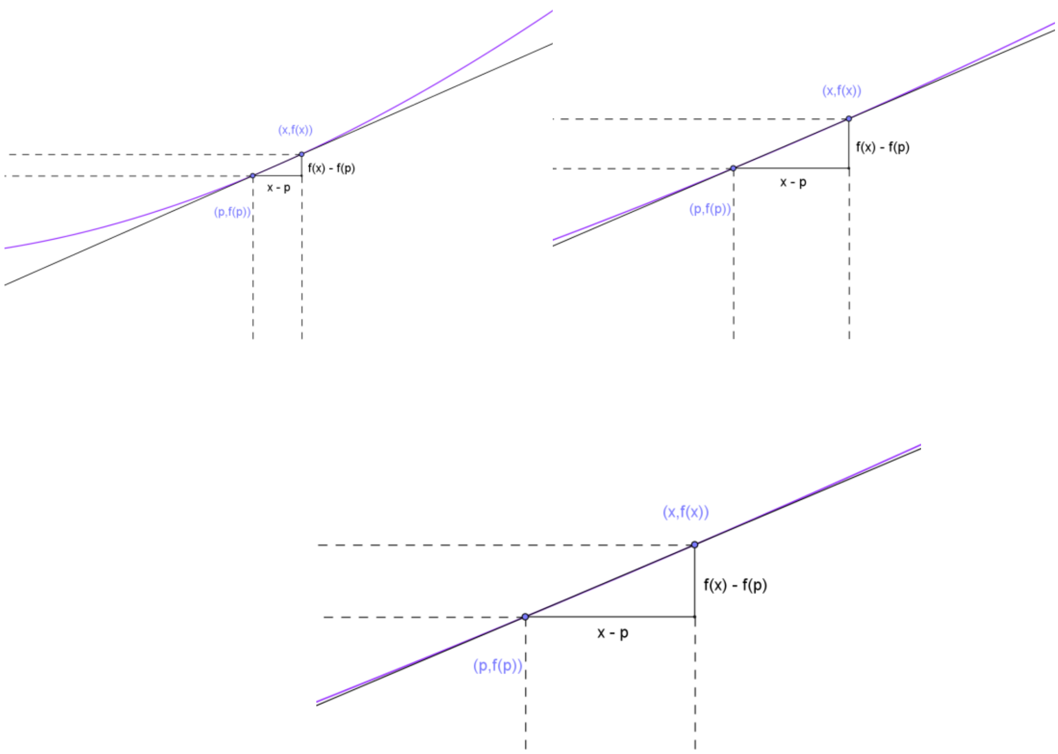
Figura 26 – Reta secante ao gráfico da função f



Fonte: Elaborado pelo autor

Mas, podemos aumentar o campo de visão para observar os detalhes, aumentando a magnitude por processos computacionais, conforme a Figura 27:

Figura 27 – Aumento da magnitude por processos computacionais



Fonte: Elaborado pelo autor

Quanto mais x aproxima-se de p, mais a curva assemelha-se à uma reta, cuja inclinação é dada por $m=\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$; nesse caso, destacando a retidão local da curva. A partir dessa situação graficamente explorada pode-se formular a definição formal da derivada evidenciando o limite $\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ e como sendo a derivada da função f no ponto p.

Estamos cientes de que esse procedimento não é caracterizado como uma demonstração, pois não segue uma estrutura axiomática, utilizando-se de teoremas e definições apresentadas anteriormente. No entanto, ressaltamos ser possível utilizar elementos da derivada percebida, como inclinações de retas e as ideias de retidão local, a fim de dar significado a elementos da Matemática formal, como no caso, a definição de derivada.

Ressaltamos que, possivelmente, os docentes proponham situações que permitam o desenvolvimento do fluxo de pensamento Cf, mesmo sabendo que não se trate de demonstrações matemáticas. Talvez a teoria de Tall (2013) forneça subsídios para compreensão que o aprendizado não segue o modo dos padrões matemáticos que utilizam apenas provas e demonstrações formais, no caso o fluxo de pensamento Ff, mas também que envolve outros fluxos de pensamento como o Cf, Sf, Fc e Fs.

5.9 Fluxo Sf

De forma semelhante ao fluxo Cf, o fluxo de pensamento Sf ocorre na observação do comportamento de regras computacionais que visam a proporcionar significados aos elementos formais relacionados à derivada, por exemplo, a derivada de funções como $f(x)=x^n$, cuja derivada é $f'(x)=n.x^{n-1}$, por meio de sequências de cálculos de limites, como:

i- Para n=2

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2)-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2x+h\right)=2x$$

ii- Para n=3

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

iii- Para n=4

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4)-x^4}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\right)=4x^3$$

iv- Para n=5

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5)-x^5}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h.(5x^4+10x^3h+10x^2h^2+5xh^3+h^4)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(5x^4+10x^3h+10x^2h^2+5xh^3+h^4\right)=5x^4$$

Logo temos:

n=2, $f'(x) = 2x$

n=3, $f'(x) = 3x^2$

n=4, $f'(x) = 4x^3$

n=5, $f'(x) = 5x^4$

sendo coerentemente supor que:

n=6, tenhamos $f'(x) = 6x^5$

n=k, se obtenha $f'(x) = kx^{k-1}$.

Desse modo, utilizando manipulações algébricas, observamos elementos relativos à estrutura formal, como:

Se $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, com $n \neq 0$.

Demonstração:

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p} \frac{x^n - p^n}{x - p}$$

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{\cancel{(x-p)}.[(x^{n-1}.p^0) + (x^{n-2}.p^1) + (x^{n-3}.p^2) + ... + (x^0.p^{n-1})]}{\cancel{(x-p)}}$$

$f'(p) = (p^{n-1}.p^0) + (p^{n-2}.p^1) + (p^{n-3}.p^2) + ... + (p^0.p^{n-1}) = np^{n-1}$, logo

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Em situações que se parte de manipulações algébricas específicas, a fim de constatar elementos relacionados ao mundo formal da derivada, expressaremos pelo fluxo de pensamento Sf.

6. Síntese dos Fluxos de Pensamento para o Aprendizado da Derivada

Conforme a análise apresentada, podemos observar diferentes fluxos de pensamento relacionados à derivada, que estão sintetizados nos dados da Tabela 5.

Tabela 5 – Tabela que sintetizam os nove fluxos de pensamento.

Código	Característica
Ff	Fluxo estritamente formal, ocorrendo no âmbito de provas e demonstrações.
Cc	Fluxo estritamente sensível, ressaltando somente aspectos perceptíveis da derivada (Inclinação da reta tangente, retidão local da curva e taxa de variação instantânea)
Ss	Fluxo estritamente processual, inter-relacionando rotinas no âmbito, ou não, da derivada. Esse fluxo propicia o amadurecimento da simbologia que envolve o conceito de derivada.
Sc	Fluxo que permite relacionar a partir de processos elementos da derivada percebida, como a inclinação da reta tangente ou uma taxa de variação instantânea.
Cs	Fluxo que permite relacionar a partir de elementos da derivada sentida, processos e simbologias relacionados à derivada.

Fc	Fluxo que parte de elementos formais da derivada em busca de perceber esses elementos na derivada interpretada, como uma inclinação da reta tangente ou uma taxa de variação instantânea.
Fs	Fluxo que parte de elementos formais da derivada em busca de desenvolver processos relacionados à derivada como cálculo de limites.
Cf	Fluxo que parte da derivada interpretada como uma inclinação da reta tangente ou taxa de variação instantânea em busca de apresentar partes dos elementos formais da derivada.
Sf	Fluxo que parte dos processos relacionados à derivada em busca de apresentar partes dos elementos formais da derivada.

Fonte: Elaborado pelo autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encerramos esta tese que tratou da aprendizagem da derivada, sob o foco dos Fluxos de Pensamento, apresentando um panorama geral da pesquisa e ressaltando os momentos que consideramos fundamentais.

Podemos afirmar que este pesquisa foi banhada de esforço, estudo, reflexão e investigação, a fim de apresentar um trabalho maduro e objetivo, sem a preocupação quantitativa de informações, mas, sim, apresentar uma pesquisa sólida e consistente, sobretudo, por estarmos nos enveredando em teorias e conceitos matemáticos densos.

Iniciamos o estudo traçando a trajetória do pesquisador, pesquisas correlatas e o problema de pesquisa, a fim de expor a diversidade de caminhos que poderíamos ter seguido, porém, as escolhas em qual caminho trilhar não poderiam ser amparadas por vontades subjetivas, mas, por pesquisas de um determinado campo, em nosso caso, a Educação Matemática e que a vontade do pesquisador em explorar um tema adapta-se às pesquisas existentes a fim de delimitar o problema de pesquisa.

Assim, nos debruçamos por mais de um ano na problemática existente relativa à aprendizagem da derivada, a fim de delimitar nossa pretensão de investigar os fluxos de pensamento, amparados na Teoria dos Três Mundos da Matemática, para compreender aspectos da aprendizagem da derivada. Essa delimitação, com contribuições inclusive dos membros da banca de qualificação, foi norteadora e decisiva para propor as duas questões de pesquisa: Quais são os fluxos de pensamento, embasados na teoria dos Três Mundos da Matemática, envolvidos na aprendizagem da derivada? Como o entendimento desses fluxos pode potencializar o aprendizado desse conceito?

Ora, se objetivamos analisar um determinado conceito, precisamos fazer um estudo dele, de tal forma, que o material apresentado servisse, como fonte de dados, para o que se pretendia investigar. Para tanto, abordamos a derivada sob três perspectivas: os elementos históricos, que trouxeram um panorama da

Matemática, do Cálculo e da derivada; o conceitual, trazendo as definições matemáticas de limite e derivada; e de aprendizagem, no qual tratamos das diferentes abordagens e concepções da derivada. Nessa última perspectiva, ressaltamos que utilizamos o estudo realizado por Kendal (2001), que apresentou as representações numérica, gráfica e simbólica da derivada e, a partir desta tese, uma nova oportunidade estará disponível, que é a de analisar a derivada sob a perspectiva dos fluxos de pensamento, cujo tema, até então, não tinha sido abordado.

Na sequência do estudo da derivada, apresentamos uma síntese da teoria dos Três Mundos da Matemática, proposta por Tall (2013). Essa teoria era tão recente quando começamos a investigá-la, que não encontramos livros disponíveis no Brasil e, foi graças à tecnologia, que conseguimos adquirir esse livro pela compra via e-book, permitindo, assim, o acesso da teoria na integra, e não apenas sínteses de artigos encontrados na *internet*. Esta teoria tem como questão fundamental “Como os humanos aprendem a pensar matematicamente?”, sugerindo que o caminho a essa resposta está na exploração dos Três Mundos da Matemática.

Posteriormente, trouxemos uma reflexão das diferentes teorias e pesquisas a fim de explicitar as contribuições que a teoria de David Tall apresentava suas correlações com os demais estudos.

Após a apresentação da teoria norteadora desta pesquisa, indicamos que a metodologia para analisar os fluxos de pensamento estava em conformidade com o método dedutivo, apoiada em situações mais gerais consideradas verdadeiras (premissas) nas quais poderíamos concluir dedutivamente, situações específicas. Além disso, enquadramos esta tese como uma proposta *teórica exploratória*, conforme Fiorentini; Lorenzato (2006) e Gil (2008), por se tratar de uma pesquisa que não utiliza dados ou fatos empíricos, mas, constrói os próprios conceitos e argumentos, de acordo com o rigor e a coerência lógica, além de ter a finalidade de desenvolver ideias mais precisas de um determinado problema, servindo de base para estudos posteriores. Assim, tomando como base os Três Mundos da Matemática, propusemos nove diferentes fluxos de pensamento, codificados como Cc, Ss, Cs, Sc, Fc, Fs, Cf, Sf e Ff que foram exemplificados utilizando o conceito de estremos locais. Esses fluxos estavam em conformidade com as ideias de Tall (2013), sendo observados pela classificação proposta por ele, como *matemática prática*, *matemática teórica* e *matemática formal*.

Com os fluxos de pensamento definidos, partimos para a análise desses fluxos com o foco na ação de um sujeito que aprende o conceito de derivada.

Ao analisar os fluxos de pensamento, percebemos que nenhuma das atividades apresentadas eram inéditas ou difíceis de serem propostas para alunos de Cálculo. Mas, em nenhuma pesquisa encontrada, observamos a diferenciação de atividades pelas suas caraterísticas pertinentes à forma de se pensar matematicamente e que, as atividades elaboradas para exemplificar os fluxos de pensamento ativavam diferentes características relacionadas à aprendizagem dos objetos matemáticos.

Logo, se buscamos uma melhoria no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, conhecer os diferentes fluxos de pensamento a fim de desenvolver atividades que incitem a ativação dos vários fluxos para a aprendizagem da derivada, poderá potencializar a aprendizagem desse conceito, pois, conforme Tall (2013), a aprendizagem ocorre pela exploração dos mundos corporificado, simbólico e formal.

Assim, trazemos como contribuição às pesquisas de Educação Matemática, em especial, as relacionadas à aprendizagem da derivada, uma nova perspectiva, pois, nessa abordagem são declarados os elementos dos diferentes mundos e os possíveis fluxos de pensamento que podem ocorrer entre eles.

Tal contribuição pode ser observada no aprofundamento do trabalho de Leme (2003) que tratou dos aspectos processuais e estruturais relacionados a aprendizagem da derivada. No entanto, tais aspectos não levam em conta os aspectos perceptíveis da derivada, como os destacados pelo mundo corporificado da derivada, apresentados nesta tese. Assim, consideramos um avanço na pesquisa realizada.

Chamamos a atenção, pois não tivemos a finalidade de atribuir valores quanto à melhor forma de se abordar o conceito da derivada, mas, sim, destacar esse conceito em elementos perceptíveis a nossos sentidos que vão formando imagens mentais para o sujeito que aprende, como perceber a derivada como a inclinação da reta tangente, como a retidão local de uma curva em um ponto ou como uma taxa de variação instantânea, sendo essas percepções relacionadas ao mundo corporificado.

Um segundo aspecto a ser destacado foi o dos processos relacionados à derivada. Um estudante iniciante de Cálculo, ao observar pela primeira vez uma atividade de Cálculo de derivada, poderá ficar estagnado pelo fato de desconhecer a simbologia f', pois essa simbologia não terá nenhum significado ao estudante por não estar relacionada a nenhuma rotina. No entanto, durante o aprendizado da derivada, ele irá deparar-se inúmeras vezes com atividades semelhantes à: Seja uma função f dada por $f(x) = x^2$, determine f'. Essas atividades vão permitindo ao estudante agregar diferentes rotinas relacionadas à derivação na simbologia f'. Em outras palavras, o mundo simbólico é aquele que o sujeito relaciona rotinas e processos às simbologias matemáticas.

O último ponto a ser ressaltado é o aspecto formal, que é diferente dos aspectos perceptíveis da derivada, como também dos simbólicos, pois, mesmo envolvendo manipulações algébricas, apresenta uma estrutura própria na qual com base nos axiomas, definições e/ou teoremas já demonstrados, novos teoremas poderão ser provados.

Salientamos, ainda, que os fluxos que ocorrem no próprio mundo, como os Cc, Ss ou Ff apresentam um forte elo de ligação entre as premissas e conclusões, pois enfatizam os componentes específicos de cada mundo.

O entendimento dos fluxos de pensamento possibilita àquele que ensina a compreender o conceito de derivada sob uma nova perspectiva, possibilitando-o criar novas situações de aprendizagem diversificando atividades para tratar dos diferentes fluxos de pensamento relativo a esse conceito.

Os fluxos de pensamento relacionados à aprendizagem da derivada possibilitam também, novas investigações sobre a aprendizagem desse conceito, como a elaboração de sequências didáticas ou a análise das concepções de alunos de Cálculo Diferencial e Integral.

REFERÊNCIAS

BALACHEFF, N. **Preuve et démonstration en mathématiques au collège**. Recherches em Didactique des Matémathiques, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

BOYER, C. B. **The History of Calculus: and its conceptual development**. New York, Dover Publication, Inc., 1959.

BRUNER, J. S. **The culture of education**. Harvard University Press, 1996.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Lopes, M.; ed. 3, Porto Alegre: Artmed, 2010.

DALL'ANESE, C. **Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP. São Paulo, 2000.

D'AVOGLIO, A.R. **Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

FERRINI-MUNDY, J.M.; GRAHAM, K. **An overview of the calculus curriculum reform effort: issues for learning, teaching, and curriculum development. American Mathematical Monthly**, 1991.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity.** Didactics of mathematics as a scientific discipline, 1994.

FONSECA, R.F.; IGLIORI, S.B.C**. A complementaridade e a noção de número real**. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.

FUSCO, C.A.S.; ALMOULOUD, S.A. **Provas e demonstrações em matemática: uma questão problemática nas práticas docentes no Ensino Básico**. Bahia: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GODOY, L.F.S. **Registros de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo, vol. 1**. ed.5, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KENDAL, M. **Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system**. Doutorado em filosofia, tese, Melbourne (2001).

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Artmed, UFMG, 1999.

LEME, J.C.M. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2003.

LEME, J.C.M; IGLIORI, S.B.C**. Mapas Curriculares: Uma Nova Ferramenta para Análise de Conteúdos de Disciplinas**. III FÓRUM NACIONAL SOBRE CURRÍCULOS DE MATEMÁTICA: Investigações, Políticas e Práticas curriculares. Anais Eletrônico. 2015, São Paulo.

MALARA, N.; ZAN, R. **The problematic relationship between theory and practice**. In. ENGLISH, Lyn D. (Ed.) Handbook of International Research in Mathematics Education. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2002.

MARCONI, M.A.; LAKATOS, E.M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

MEYER, C. **Derivada/reta tangente: imagem conceitual e definição conceitual**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de

Pós-Graduação em Educação Matemática. Centro de Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PIAGET, J. **A evolução intelectual da adolescência à vida adulta**. Development v.15, 1972.

PINTO, M.M.F. **Educação matemática no ensino superior**. In Educação em Revista, Belo Horizonte, n. 36, 2002.

RAMOS, V.V. **Dificuldades e concepções de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre derivada e suas aplicações.** Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156 11.1, 2009.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K; BORBA, M.C. **Research on calculus: what do we know and where do we need to go?**. ZDM 46.4, 2014.

SFARD, A. **On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as different sides of the same coin**. Educational Studies in Mathematics, 1991.

TALL, D.O. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the three worlds of mathematics**. Cambridge University Press, 2013.

TALL, D.O.; VINNER, S.; **Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, Netherlands, v. 12, n. 2, 158-161, 1981.

VILLARREAL, M.E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. (Tese de Doutorado). UNESP, Rio Claro, 1999.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALVES-MAZZOTTI, A.J.; GEWANDSZNADJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa.** São Paulo: Pioneira, 1998.

ASPINWALL, L.; SHAW, K.L.; PRESMEG, N.C. **Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative,** v. 33, n. 3. Educational Studies in Mathematics, 1997.

AUSUBEL, D.P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Pararelo, 2003. Tradução de: Ligia Teopisito.

AUSUBEL, D.P.; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H; **Educational psychology: A cognitive view**, v. 2, 1968.

AUSUBEL, D.P. **The psychology of meaningful verbal learning**, 1963.

BARBOSA, S.M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia.** Doctoral Dissertation, UNESP, Rio Claro, Brasil, 2009.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Editora Edições 70, 1977.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M.A. **APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. The teaching and learning of mathematics at university level**. Springer Netherlands, 2002.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics: An educational approach**, V. 5. Springer Science & Business Media, 1987.

GRAY, E.M.; TALL D.O. **Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. Journal for research in Mathematics Education**, 1994.

IGLIORI, S.B.C. **Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais**. In: FROTA, M. C. R; NASSER, L. (Orgs.) Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1990.

LIMA, G.L. **O Ensino do Cálculo no Brasil: breve retrospectiva e perspectivas atuais**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

LIMA, R.N. **Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática**. Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. v. 9, n. 2, 2008.

MAANEN, J. V. **Reclaiming qualitative methods for organizational research: A preface**. Administrative science quarterly, 1979.

MORAES, R. **Análise de conteúdo**. Revista Educação, Porto Alegre, v. 22, n.37, 1999.

NEMIROVSKY, R.; RUBIN, A**. Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative**. TERC Working Paper, Cambridge, 1992.

NOVAK, J.D.; CAÑAS, A.J. **The theory underlying concept maps and how to construct and use them**. Florida: v. 284, 2008.

ORTON, A.A. **Students' understanding of differentiation**. Educational Studies in Mathematics, v. 14 n. 3, 1983.

SALINAS, P. **Approaching calculus with SimCalc: linking derivative and antiderivative**. In S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), The SimCalc vision and contributions. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2013.

SILVA, B.A. **Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 12, n. 3, 2011.

TALL, D.O. **Functions and calculus. International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht, V.1, 1997.