Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC - SP

Ana Rebeca Miranda Castillo

Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges

Doutorado em Educação Matemática

São Paulo

2016

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

PUC - SP

Ana Rebeca Miranda Castillo

Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges

Doutorado em Educação Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Fumikazu Saito.

São Paulo

2016

Banca Examinadora

Dedico este trabalho aos amores de minha vida!

Tan, meu amor e companheiro de ontem, hoje e sempre...

Meus filhos Gabriel, Carolina e Matheus, razões do meu viver...

AGRADECIMENTOS

São tantos !! Em cada momento vivido nestes quatro anos, minha família querida sempre esteve presente, me apoiando, me consolando e principalmente existindo! Sou muito grata por ter vocês na minha vida!!

Ao Tan, meu amor, companheiro e amigo, por tudo!! Você é um ser humano especial, sem você eu não teria nem começado o curso e este trabalho definitivamente não teria saído!

Aos meus filhos adorados, Gabriel, Carolina e Matheus e minha norinha querida Paloma. Vocês foram os que mais sentiram o quão difícil é uma pessoa se dedicar à pesquisa em educação neste país. Desde o início, mesmo não tendo muita maturidade para entender o porquê de tanto estudo, de alguma forma sabiam que o que eu estava fazendo era muito importante para mim. Cada um com seu jeitinho entendeu e apoiou. Muito obrigada meus amores!!!

À minha mãe Rebeca, minha tia Vicky, meu irmão Osvaldo, minha cunhada Luciana e meu sobrinho preferido Cristiano. Vocês indiretamente me ajudaram muito, compreendendo minha frequente ausência e silêncio nestes últimos anos.

A mis abuelitos, Merary y Rebeca (in memoriam), por inspirarme con su conducta ante los estúdios y la vida.

A mi papá (in memoriam), porque sin él no estaría aquí.

Aos meus sogros queridos Dona Penha e "Seu" Neno e ao meu divertido cunhado Flávio (Tutu), pelo carinho e também por me apoiarem, cada um do seu jeito. A marmita domingueira muitas vezes foi imprescindível!

À minha querida Marta, o que seria de mim sem seu carinho, dedicação e apoio? Você tem uma participação enorme na minha vida, sua presença silenciosa e humilde, me transmitindo força muitas vezes apenas com o olhar... serei eternamente grata por tudo!

À Lilia, minha irmã mais velha! Por compreender minha ausência e ser minha amiga e comadre querida!

À Rita C. Davimercati, sem seus ouvidos, conselhos, broncas e muita conversa eu não teria chegado até aqui! Muito obrigada por tudo!

À Nara, minha amiga querida! Muito obrigada pelas nossas conversas, desabafos e viagens, por compartilhar comigo seus ideais e sonhos. Sua presença em minha vida e suas contribuições no meu trabalho têm sido e sempre serão muito valiosas!

À Maria Lúcia, minha amiga querida! Você tem me acompanhado esses anos todos e seu apoio tem sido fundamental nos mais diversos momentos, muito obrigada pela sua amizade, carinho e companhia!

À Edna, minha amiga querida! Com suas palavras simples e carinhosas, você me confortou em muitos momentos de angústia e cansaço, muito obrigada por estar em minha vida!

Ao Milton, meu amigo querido! Suas histórias divertidas, conversas sarcásticas e por vezes irônicas me fizeram dar boas risadas em momentos que precisava muito disso! Obrigada por sua amizade!

As minhas amigas e companheiras de percurso profissional, Rosana, Penelope, Patricia, Jacqueline e Letícia pela torcida e carinho de sempre, obrigada por serem minhas amigas queridas!!!

Às minhas amigas e colegas do grupo HEEMa, Roseli, Regina e Angela, muito obrigada pela força, nossas "terapias" em grupo além de divertidas foram fundamentais para que eu entendesse que estava no caminho certo.

Aos meus amigos e companheiros de doutorado, Jacinto, Paulo e Rita, muito obrigada pela companhia nas minhas tardes de estudo na PUC, nossas conversas sempre agradáveis, produtivas e divertidas foram extremamente importantes, serviram para aliviar minhas angústias e me fazer sentir menos sozinha.

Ao Edson, por sua generosa companhia e leitura neste momento final do trabalho. Você me ajudou enormemente, muito obrigada pelo apoio!

Ao professor Dr. Sérgio Cobianchi, por me honrar com sua amizade! Sua sensibilidade, delicadeza e generosidade são exemplos que levarei comigo para sempre!

À professora Drª Marisa da Silva Dias, pelo exemplo como professora e ser humano, muito obrigada por tudo! Sou muito grata por tê-la na banca de avaliação deste trabalho, suas contribuições à pesquisa em nossa área de estudos são preciosas!

À minha "eterna" orientadora, professora Drª Maria José (Zezé), por fazer parte da banca deste trabalho e pelas contribuições nos meus estudos e na minha vida!

À professora Drª Arlete Brito, por aceitar compor a banca de avaliação deste trabalho. Seu trabalho com a História da Matemática enriqueceu imensamente este trabalho e a área de Educação Matemática como um todo.

Ao professor Dr. Ubiratan D'Ambrosio, por aceitar compor a banca para avaliação deste trabalho e por suas observações e reflexões a respeito da contribuição que a História da Matemática pode dar à Educação Matemática, elas foram fundamentais para o término deste trabalho.

Ao meu orientador professor Dr. Fumikazu Saito (Fumi), por em muitas de suas aulas, orientações e bate-papos me fazer viajar no tempo e passar a admirar uma época e pessoas que de outra forma certamente não seria possível. Seus ensinamentos muitas vezes "acalorados" me fizeram compreender o quanto a pesquisa em História é relevante para a Educação.

À toda equipe do Mathema, pela oportunidade de aprendizado, por compreender a necessidade de me dedicar a este trabalho e principalmente por compartilharem conhecimentos de forma tão generosa e carinhosa. Vocês marcaram de forma profunda minha formação como educadora!

Ao professor Dr. Saddo, por seu apoio imprescindível em um momento decisivo.

À Suzanne, por sua presteza e cuidado nesta última etapa do trabalho. É o momento que mais precisamos de calma e atenção, e você teve a sensibilidade de compreender isso. Muito obrigada!

A todos os professores do programa, por participarem de minha formação!

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos sem a qual não poderia ter feito o curso de doutorado.

A Deus por me propiciar a convivência com pessoas tão queridas!

“Há um menino
Há um moleque
Morando sempre no meu coração
Toda vez que o adulto fraqueja
Ele vem pra me dar a mão
E me fala de coisas bonitas
Que eu acredito
Que não deixarão de existir
Amizade, palavra, respeito
Caráter, bondade alegria e amor
Pois não posso
Não devo
Não quero
Viver como toda essa gente
Insiste em viver
E não posso aceitar sossegado
Qualquer sacanagem ser coisa normal”

Trecho da música “Bola de meia, Bola de Gude”
Milton Nascimento e Fernando Brant

“Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena
Acreditar no sonho que se tem
Ou que seus planos nunca vão dar certo
Ou que você nunca vai ser alguém (...)
Se você quiser alguém em quem confiar
Confie em si mesmo
Quem acredita sempre alcança! ”

Trecho da música “Mais uma vez”
Flávio Venturini e Renato Russo

RESUMO

Este trabalho discorre sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*), instrumento de medida abordado no tratado *A Boke Named Tectonicon*, escrito e publicado por Leonard Digges (1520-1559). Tem como objetivos: identificar o contexto no qual a obra e seu autor estavam inseridos; verificar, a partir desse contexto, quais conhecimentos matemáticos foram mobilizados e abordados no tratado e sua relação com as práticas matemáticas e o saber erudito da época além de analisar esses conhecimentos matemáticos incorporados no báculo, considerando a prática de mensuração e os procedimentos descritos pelo autor. Foram articuladas três dimensões de análise, a historiográfica, a contextual e a epistemológica e o estudo centrou-se especificamente na construção e uso do báculo (*cross-staff*). O contexto social e político do século XVI mostrou que a valorização do conhecimento matemático foi uma consequência gradual do processo histórico social ocorrido na Inglaterra e promoveu um rico diálogo entre os eruditos das universidades e artesãos ligados a diferentes setores da sociedade. Com a leitura e análise do tratado, verificou-se como era feito o cálculo de medida de área de terrenos com diversos formatos e também o cálculo da medida de altura de objetos. Em relação ao báculo, foi observado que era mais que um simples dispositivo de medição, pois já no processo de sua fabricação eram necessários conhecimentos de divisão de um segmento em partes iguais, perpendicularismo e demarcação de escalas. No seu manuseio, para obter a medida desejada, era necessário mobilizar a propriedade de semelhança de triângulos e saber que uma reta é determinada por dois pontos. E no seu uso posições relativas entre retas e projeções ortogonais eram conhecimentos que estavam implícitos ao fazer as medições. Com os resultados deste trabalho conclui-se que tanto o báculo como os outros instrumentos abordados em *Tectonicon*, são mais que simples ferramentas, são instrumentos que incorporam conhecimentos, mostram a relação entre o saber e o fazer de uma época e apontam questões de ordem epistemológica para reflexão a respeito do processo de construção do conhecimento científico e matemático.

Palavras-chave: História da Matemática. Educação Matemática. Instrumentos Matemáticos. Báculo. Leonard Digges

ABSTRACT

This work discourses about mathematical knowledge incorporated and mobilized in the construction and use of the staff (cross-staff), measuring instrument discussed in the treatise *A Boke Named Tectonicon*, written and published by Leonard Digges (1520-1559). Its objectives are: identifying the context in which the work and its author were inserted; checking from that context, what mathematical knowledge were mobilized and addressed in the treaty and its relation between mathematical practices and erudite knowledge from that time and analyze these mathematical knowledge added in staff, considering the practice of measurement and the procedures written by the author. Three analytical dimensions have been articulated, the historiography, the contextual and the epistemological and the study focused specifically on the construction and use of the staff (cross-staff). The social and political context of the 16th century has shown that the appreciation of mathematical knowledge it was a gradual result of social historical process occurred in England and promoted a rich dialogue among scholars of universities and craftsmen connected to different sectors of society. By reading and analyzing the treated, it was found how was made calculation of measure of a land area with several shapes and also calculation of measure of height of objects. Regarding the staff, it was observed that it was more than a simple measuring device, because in the process of its manufacture it was necessary a segment division of knowledge in equal parts, perpendicularity and demarcation scales. In its handling to achieve the desired measure it was necessary to mobilize the similarity of triangles property and to know that a line is determined by two points. And on its use the relative positions between the lines and orthogonal projections were skills that were implicit in making the measures. The results of this work concluded that both the staff and the other instruments addressed in *Tectonicon*, are more than simple tools, they are instruments that incorporate knowledge, they show the relation between to know and to do of an era and raises issues of epistemological to reflection on the construction of scientific and mathematical process.

Keywords: Mathematics History. Mathematics Education. Mathematical instruments. Staff. Leonard Digges.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste trabalho investigaremos um instrumento de medida chamado báculo (*cross-staff*), cuja descrição e uso se encontram num tratado inglês do século XVI, intitulado *A Boke Named Tectonicon*[1] (DIGGES, 1605). Este tratado, é dedicado especialmente à agrimensura, foi publicado pela primeira vez em 1556 por Leonard Digges (1520-1559) e apresenta uma série de procedimentos de medida que nos revela interessantes aspectos do saber-fazer matemático daquela época.

Essa obra foi direcionada aos praticantes das matemáticas em geral e a outros interessados por instrução nas matemáticas.[2] Nela nos deparamos com diversas técnicas de mensuração, manipulação e fabricação de instrumentos de medida. Além disso, também nos defrontamos com a mobilização de inúmeros conceitos e procedimentos geométricos para a determinação da medida de distâncias e áreas da superfície de montanhas, terrenos e outros elementos.

Tectonicon teve ampla divulgação no período de sua publicação e também nos anos seguintes[3], principalmente, por conta da valorização do ofício do artesão agrimensor, impulsionada tanto pela exploração de novos territórios e a colonização destes, como por um aumento na demanda em obter conhecimentos matemáticos que eram necessários para essa área de atuação, mas também estavam muitas vezes ligados à arte da cartografia, da navegação e do comércio (BENNET, 1991). Além desses fatores, os aspectos práticos da geometria despertaram o interesse de príncipes e estadistas, pois eram utilizados, por exemplo, na organização da artilharia em uma possível guerra, na necessidade de determinar a medida das alturas de muralhas e distâncias entre navios e a costa, no traçado de mapas, no estabelecimento de posições em alto mar e na demarcação de fronteiras.

---

[1] Conforme Van den Hoven (1996) e Amaral (2009), "Tectonicon" refere-se à *tekton*, termo que significa carpinteiro em grego antigo. Doravante, designaremos esta obra apenas por *Tectonicon*.

[2] A respeito dos praticantes das matemáticas, consulte também Harkness (2007), Richeson (1966) e Taylor (1954).

[3] Segundo Harkness (2007, p. 107) esta obra foi reimpressa vinte vezes por quase cento e cinquenta anos.

É nesse contexto, em que o desejo de obter a instrução matemática se tornava cada vez mais intenso, que o tratado de Leonard deve ser situado. Durante a década de 1530 e 1540, o rei Henrique VIII (1491-1547) com receio de uma invasão por parte do continente, em resposta à separação da Inglaterra da igreja católica, modernizou a defesa de sua costa levando para território inglês mestres nas artes de artilharia e fortificação com o objetivo de instruir os ingleses nativos, na arte da guerra. Essa separação levou à dissolução dos monastérios católicos ingleses e gerou uma grande oferta de terras provocando enorme especulação referente a seu comércio. Assim, a demanda por agrimensores com conhecimentos nas aplicações práticas de geometria e trigonometria cresceu. Conforme Ash (2004), a relevência súbita dessas aplicações práticas levou as classes dominantes (nobres, clero e burguesia) a ampliar sua preocupação em ter familiaridade com as matemáticas, principalmente com geometria e astronomia, ambas focadas em aspectos práticos.

Para obter instrução nas matemáticas, as famílias ricas, mesmo contratando tutores para seus filhos, passaram a frequentar a universidade. Não só cavaleiros e aristocratas se preocupavam com a proficiência matemática, mas comerciantes ingleses deveriam também possuir tais conhecimentos matemáticos para a prática de suas transações comerciais.

Essa necessidade também foi suprida pelos autodenominados “professores” de matemática. Segundo Taylor (1954) alguns tinham experiência universitária, mas a maioria era constituída por praticantes das matemáticas que simplesmente manipulavam sua arte, entre eles produtores de almanaques, astrólogos, marinheiros aposentados e agrimensores.

Alguns desses praticantes das matemáticas, além de praticar seu ofício, também fabricavam seus instrumentos de trabalho, e quando não o faziam, trabalhavam em conjunto com os fabricantes. A obtenção de uma medida precisa era uma prerrogativa, ou seja, ao produzir seus instrumentos ou trabalhar em conjunto com quem os produzia, tinham de considerar os conhecimentos matemáticos que eram necessários para exercer de forma eficiente o ofício. Assim os praticantes das matemáticas eram aqueles que não só praticavam as matemáticas, mas também construíam e manipulavam instrumentos matemáticos. Esta característica os distinguia de outros artesãos, pois, além de construir e manipular tais instrumentos, escreviam as instruções necessárias sobre como utilizá-los a fim de obter a medida satisfatoriamente. Era comum escreverem um tratado, compilado de notas de ensino, para que outros artesãos interessados nas técnicas de mensuração, bem como na fabricação e no uso de instrumentos matemáticos, recorressem à obra para auxiliá-los na prática de seu ofício (TAYLOR, 1954).

Esses instrumentos eram chamados no século XVI de “matemáticos”, não por se restringir a uma área de conhecimento em si, mas por medir o que Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) denominava como “quantidades”, que eram distância, ângulo, tempo e peso. Dentre os instrumentos matemáticos da época podemos citar as réguas, balanças, diversos relógios, instrumentos de navegação, astronomia e agrimensura[4].

Devemos destacar que no século XVI não havia uma distinção clara entre as várias áreas de conhecimento, por meio da separação em disciplinas específicas. As matemáticas eram conhecidas na antiguidade como geometria e harmonia e receberam vários nomes até o século XIX. Segundo Roux (2010), nesse período temos que pensar nas matemáticas, não como um campo unificado de conhecimento e sim como atividades desenvolvidas por aqueles que se denominavam “matemáticos” ou eram considerados como tais. Além disso, como observam Bromberg e Saito (2010), os estudiosos da natureza dessa época, por exemplo, estavam envolvidos não só com cálculos matemáticos, mas também com preocupações provenientes da filosofia natural. Assim as matemáticas nesse período, estavam relacionadas a outras áreas do saber, por isso, ao fazermos referência às matemáticas é mais adequado, coliga-las a outras áreas do saber.

Desse modo, a Geometria e a Aritmética eram duas áreas matemáticas com estreita relação com a Astronomia e a Música, formando o *quadrivium*, que junto com a Gramática, Retórica e a Lógica, o *trivium*, eram conhecidas como as “sete artes liberais”. A esse respeito, Saito (2011) afirma que, ao lado dessas “artes liberais” estavam também as chamadas “artes servis” ou “mecânicas”, que exploravam os conhecimentos práticos. Apesar de diferentes e de não manterem uma relação de

---

[4] A esse respeito podem ser consultados os estudos de Bennett (2003) e Hankins e Silverman (1997).

dependência nem de submissão, foi a partir do século XVI, que se iniciou um processo mais intenso de intercâmbio entre elas.[5]

As artes mecânicas foram valorizadas e chamaram a atenção de príncipes e eruditos por diferentes razões. Dentre elas, particularmente no que diz respeito à agrimensura, foi a necessidade de encontrar um meio mais eficaz de estabelecer os limites de propriedade e a demarcação de fronteiras que impulsionou a arte de medir terras. Com a desintegração do padrão medieval da posse de terras, estas tornaram-se propriedades privadas e a prática do agrimensor contribuiu para a mudança do perfil da propriedade rural. Segundo McRae (1993), no período compreendido entre 1520 e 1620 é notória a ascensão do capitalismo agrário que desafiou os modelos pré-estabelecidos da vida agrária tradicional estabelecendo métodos. Por exemplo, o “agrimensor moderno” defendia a necessidade de os proprietários tomarem conhecimento não só das dimensões de suas terras, mas também das riquezas geradas por sua exploração. Dessa maneira, o agrimensor passou a ser visto como um especialista que trazia conhecimentos legais a respeito das relações dos senhores das terras e seus inquilinos.

No que diz repeito ao ofício e as ferramentas utilizadas pelo agrimensor, até então, o bastão era o seu principal instrumento de medição além das estacas e das cordas. Contudo, ao longo do século XVI, outros novos instrumentos de medida começaram a ser utilizados. De acordo com Bennett (1991), tais instrumentos não eram inovações já que muitos deles resultavam de adaptações de outros, provindos da astronomia e da navegação, tais como o quadrante, o astrolábio e o *radius astronomicus*. Na navegação esses dois últimos resultaram, respectivamente, no astrolábio de marinheiro e no báculo, tornando-se dispositivos de medição de altitudes. Na agrimensura os mesmos instrumentos foram simplificados para a medição de distâncias e alturas.

Podemos dizer que a adaptação dos instrumentos utilizados na navegação ou mesmo na astronomia para servir à agrimensura tinha por finalidade resolver

---

[5] Sobre a valorização das artes mecânicas e sua relação com as “artes liberais”, consulte também Rossi (1989) e Van den Hooven (1996).

problemas de ordem prática e não teórica. É nesse movimento em que diferentes conhecimentos matemáticos eram mobilizados que podemos identificar aspectos do saber fazer matemático de uma época. Em outros termos, como observa Saito (2012), o estudo da construção, utilização e aperfeiçoamento desses instrumentos matemáticos pode trazer indícios que nos ajudem a retomar parte do processo da construção do conhecimento científico e matemático moderno.

A fabricação e o uso de um instrumento de medição são processos que não podem ser reduzidos a uma fórmula simples. Esses processos implicam não só na compreensão do que está sendo medido, mas em outros conhecimentos de ordem prática envolvidos na medição. De fato, em *Tectonicon* o autor não dá ênfase ao saber teórico para a construção e uso dos instrumentos, nem à teoria envolvida na prática do ofício, mas ao *fazer* que implica um *saber* que necessariamente não é teórico *stricto sensu*, tal como hoje entendemos. Nesse sentido, o *Tectonicon* trata não só dos instrumentos matemáticos, mas também dos conhecimentos matemáticos compartilhados por praticantes das matemáticas de uma época.

O báculo, descrito por Leonard em seu tratado, incorpora conhecimentos matemáticos relativos à sua construção e uso. Conhecimentos esses, reconhecidos entre os praticantes das matemáticas, não revelados de forma explícita nos tratados, requisitados de forma expressiva por parte da sociedade e que provocavam o interesse dos eruditos das universidades. Desse modo, embasados nessa problemática, que pode contribuir para estabelecer o que entendemos por matemática e ciência moderna hoje, buscaremos responder a seguinte questão: **Que conhecimentos matemáticos emergem do estudo da construção e uso do báculo (cross-staff)?**

Embora possa parecer simples, a resposta a essa questão não é tão óbvia quanto parece. Nos dias atuais, em que a matemática é um corpo de conhecimento unificado e autônomo, tendemos a sobrepor nossos conhecimentos matemáticos modernos para "decodificar" um instrumento como o báculo. Entretanto, historicamente, os procedimentos e as técnicas utilizadas por agrimensores, descritos em *Tectonicon*, apontam para diferentes formas de considerar os conhecimentos matemáticos.

A fabricação e uso do báculo abordado em *Tectonicon* elenca de forma implícita diversas relações matemáticas que podem ser exploradas didaticamente, porém não empregando o instrumento apenas como um dispositivo para obter medidas ou confirmá-las aplicando relações métricas no processo de mensuração e, sim, como um meio de compreender como o conhecimento matemático se constituía em uma determinada época, ou seja, considerando que o instrumento incorpora esse conhecimento no seu processo de construção e uso.

Desse modo, no decorrer de nossa investigação dirigimos nosso olhar procurando identificar e analisar esses conhecimentos matemáticos incorporados, tendo a preocupação de entender como os praticantes das matemáticas os desenvolviam, qual era o papel dos teóricos das universidades nesse processo e a preocupação do autor com o público ao qual se dirigia em seu tratado, os praticantes das matemáticas, segmento de profissionais muito diversificado em sua constituição, com uma atuação de destaque significativa no período.

Delineamos dessa maneira os seguintes objetivos: 1) identificar o contexto no qual a obra e seu autor estavam inseridos; 2) verificar, a partir deste contexto, quais conhecimentos matemáticos são mobilizados e abordados no tratado e como se relacionam com as práticas matemáticas e o saber erudito da época; 3) analisar os conhecimentos matemáticos incorporados no báculo, tendo em consideração a prática da mensuração e os procedimentos descritos pelo autor para sua construção e uso.

1.1 Procedimentos metodológicos

Para atingir nossos objetivos de pesquisa, além da leitura de *Tectonicon* realizamos a leitura de outros quatro tratados publicados no mesmo período. Consultamos *A Geometrical Practical Treatize Named Pantometria*[6], outro tratado de agrimensura de Leonard, publicado postumamente por seu filho Thomas Digges (1546-1595), *Del modo di misurari* de Cosimo Bartoli (1503-1572) publicado em 1564;

---

[6] Segundo Crosby (1999), *Pantometria* (do grego: *panto* – tudo + metria – medida) significa mensuração universal; doravante designaremos esta obra apenas por *Pantometria.*

The Triangular Quadrant or The Quadrant on a Sector Being a general instrument for Land or Sea Observation, publicado por John Browne (1642-1702) em 1662; e *The trigonall sector*, de John Chatsfeild (?) publicado em 1650. Nessas leituras nosso intuito era o de identificar os conhecimentos matemáticos envolvidos na fabricação e uso de instrumentos matemáticos.

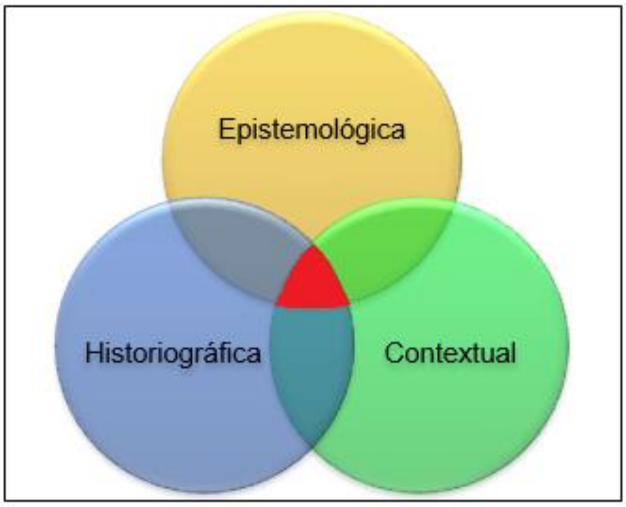
Neste trabalho, analisamos a edição de 1605 de *Tectonicon* e por uma leitura cruzada com o *Pantometria* (1571) consideramos apenas os conhecimentos matemáticos a que Leonard teve acesso em sua época. A leitura dos outros três tratados e dos instrumentos neles descritos nos deu indícios da problemática que aqui propusemos, ou seja, que os instrumentos matemáticos mobilizam diferentes conhecimentos matemáticos para diferentes situações de medida. Além disso, ajudou-nos a compreender as relações de ordem teórica e prática, bem como do saber fazer matemático dos praticantes das matemáticas da época.

A análise do documento original, isto é, o *Tectonicon*, foi acompanhada da leitura de diferentes estudos. Buscamos uma literatura secundária que abordou o contexto em que essa obra foi escrita e publicada para nos situarmos no contexto social, político e econômico da época, bem como estudos biográficos a respeito do autor. Além disso, consultamos outros estudos que nos auxiliaram a entender o papel dos instrumentos matemáticos no século XVI, os conhecimentos matemáticos utilizados e aplicados pelos praticantes das matemáticas em sua fabricação e uso, e outros aspectos ligados à obra.

Para não reforçar uma concepção linear do desenvolvimento do conhecimento, que muitas vezes leva a interpretações presentistas de fatos históricos, realizamos a análise desses documentos à luz de uma nova perspectiva historiográfica que, segundo Bromberg e Saito (2010, p.53), “busca reconstituir a história da matemática no seu contexto, levando-se em consideração não só aspectos internos, mas também externos ao desenvolvimento do conhecimento matemático.”

Desse modo, utilizamos como abordagem metodológica a articulação de três dimensões de análise, a historiográfica, a contextual e a epistemológica, figura 1.

Figura 1 - Esferas de análise



Fonte: Beltran, Saito e Trindade (2014)

De acordo com ALFONSO-GOLDFARB (2008) um pressuposto para que uma pesquisa relacionada à história não incorra em anacronismos é a articulação dessas três dimensões de análise. Assim, segundo a autora deve haver uma “[...] preocupação em concentrar a pesquisa sobre documentos primários e nunca perder de vista suas implicações epistemológicas e filológicas.” (p.7) Dentre estes documentos primários podemos considerar o tratado *Tectonicon* como um desses materiais.

A articulação dessas três esferas de análise é necessária para a elaboração de um trabalho que envolva a história, uma vez que permite elaborar uma análise contextual interna ao texto. Tal análise considera aspectos epistemológicos dos argumentos e conceitos de uma época (esfera epistemológica) sob uma ótica do contexto social histórico (esfera contextual) em que ocorrem, não perdendo de vista uma perspectiva de escrita da história (esfera historiográfica) que auxilie na análise do documento e também na seleção de literatura secundária que permita a apropriação das várias formas em que se deram esses estudos. Assim, é na intersecção entre essas três esferas que a análise de nosso objeto de estudo se localiza.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma; no capítulo dois, apresentamos o contexto no qual Leonard e suas obras estão inseridos e também um estudo referente às medidas lineares e de áreas de superfícies, que o autor aborda em seus tratados de agrimensura. No terceiro capítulo analisamos como esses conhecimentos matemáticos eram mobilizados na fabricação e no uso dos instrumentos matemáticos apresentados em *Tectonicon*, e na sequência mais especificamente, o báculo. Em nossas considerações finais, apresentamos os resultados de nossa análise, bem como os confrontamos com nossa questão de pesquisa, para verificar se é possível respondê-la e estabelecer possíveis caminhos futuros a serem seguidos.

2 LEONARD DIGGES E SEUS TRATADOS DE AGRIMENSURA

Leonard Digges é uma figura bem conhecida pelos historiadores da ciência, porém pouco espaço lhe foi dedicado na história da matemática.[7] Ele é considerado pelos historiadores da ciência pioneiro na produção de textos voltados para a prática geométrica do homem comum na Inglaterra do século XVI.[8]

A família de Leonard era do condado de Kent, Inglaterra, e se destacava por ser dona de várias propriedades. Leonard não era apenas um senhor de terras, mas sim um fidalgo, também poderíamos dizer que se tratava de um aristocrata rural.[9] A época em que ele viveu foi bastante tumultuada e passou pelo reinado de três monarcas ingleses entre os anos de 1509 e 1603.[10] Entre os diferentes eventos que marcaram este período, podemos destacar as iniciativas da coroa inglesa para projetos ligados a demarcação, preservação e defesa das fronteiras inglesas a partir do século XV.

Segundo Johnston (1994), Henrique VIII durante seu reinado criou uma cultura de corte que rivalizava com os outros príncipes europeus. Descrito como um príncipe requintado e generoso, se preocupou em construir novos palácios e para isso trouxe de outros países pintores e escultores, investiu também na construção de fortificações, organização e expansão de sua marinha e para isso importou carpinteiros navais, profissionais com experiência em astronomia e fabricação de instrumentos matemáticos. Ao trazer mestres nas artes mecânicas, não poderia prever que estas se tornariam bastante valorizadas, visto que por meio delas, era possível resolver diferentes problemas de ordem prática principalmente relacionados à artilharia e à construção de fortificações.

---

[7] Ver por exemplo, os estudos de Freehafer (1970), Johnson; Larkey; Digges, (1934); Johnson (1937), Patterson (1951), Ronan (1992) e Webb (1945).

[8] A esse respeito consulte os estudos de Johnston (1994), McRae (1993) e Taylor (1954).

[9] Uma evidência dessa posição social é o brasão da família Digges apresentado nas duas edições de *Pantometria*.

[10] O reinado de Henrique VIII (entre os anos de 1509 a 1547), de Eduardo VI (entre 1547 e 1553), de Maria I (entre 1553 e 1558) e Elizabete I (entre 1558 e 1603). A esse respeito, consulte Atlas Histórico (1986)

Embora essa mudança promovida pelo rei viesse a fazer parte da sociedade pelos próximos reinados, a valorização desse conhecimento prático e das matemáticas envolvidas não ocorreu de forma imediata, visto que inicialmente os conhecimentos matemáticos eram utilizados para fins de recreação pessoal. Além de entreter os leitores com problemas e enigmas matemáticos, o conhecimento matemático era bastante apreciado porque, associado às artes mecânicas, propiciava a construção de diferentes dispositivos e artefatos. Segundo Johnston (1994), esses dispositivos circulavam muitas vezes como uma ferramenta para a exibição de truques entre outras diversas práticas da época. Era comum, assim, presentear o rei com artefatos. Catherine Parr, por exemplo, a última esposa do rei, ofereceu a ele um dispositivo semelhante a um copo, cuja tampa possuía diversos compartimentos com gravuras e conclusões aritméticas.

Mesmo com essa finalidade mais voltada para o entretenimento, no reinado de Henrique VIII, as matemáticas começaram a ser utilizadas com assiduidade na confecção de mapas e plantas e também como um recurso para as estratégias militares e políticas. Em uma guerra, por exemplo, o artilheiro precisava determinar a distância ao alvo inimigo e, para isso, na agrimensura já haviam técnicas para efetuar a medição de distâncias. Inicialmente o procedimento era feito com estacas e cordas e, posteriormente, passou-se a utilizar instrumentos de medição que utilizavam a triangulação, entre as diversas ténicas da época, para obter essas medidas. Esta forma de mensuração se adaptou de forma precisa às necessidades desse artilheiro que assim não precisaria ter que fincar estacas em um território hostil. Mas para aplicar essa técnica precisava do conhecimento matemático e, para obtê-lo, era necessário ser instruído.

Foi nesse contexto que muitos praticantes das matemáticas escreveram tratados que abordavam a construção e uso de instrumentos de medida para resolver problemas de ordem prática ligados à navegação, à agricultura e, também, à artilharia.[11] Leonard foi um desses autores que investiu nas matemáticas práticas,

[11] A esse respeito, consulte estudos de Harkness (2007), Jonston (1995b), e Walton (2000).

publicando diversos tratados que abordavam essas áreas, como veremos mais adiante.

Há poucas informações sobre a formação de Leonard de modo que não sabemos ao certo onde foi que ele recebeu instrução matemática. Segundo Johnston (1994), ele parece ter estudado na University College em Oxford. Naquela época, as principais universidades da Inglaterra eram as de Oxford e de Cambridge que, a partir do século XVI, passaram por mudanças no corpo discente. O perfil do estudante que antes era o de um estudioso pobre que ingressava na universidade com o objetivo de obter um avanço profissional e, por vezes, se dirigir para o estudo eclesiástico, mudou com o ingresso cada vez maior dos filhos da nobreza.

Segundo Goulding (2010) no final do século XVI, as universidades se tornaram atraentes para a nobreza, já que seus mestres influenciados pelos ideais da Renasceça começaram a integrar textos humanistas no currículo universitário. Assim a nobreza percebeu que os estudos inicialmente fornecidos por um tutor contratado para lecionar poderiam ser obtidos de forma menos dispendiosa com professores universitários. Desse modo, as universidades londrinas, as de Oxford e de Cambridge alteraram seus currículos, passando a oferecer gramática, retórica e lógica no início da graduação. Assim, cavalheiros sairiam depois de um ou dois anos sem uma graduação, mas com uma formação sólida nas artes linguísticas que eram necessárias para o serviço da lei ou civil. Nesse particular, Johnston (1994) ainda observa que alguns, para dar continuidade aos estudos, se dirigiam a outras casas da corte para adquirir traquejo social. Este parece ter sido o caso de Leonard, que não obteve o diploma da universidade de Oxford e foi internado em Lincoln Inn em 1537 onde recebeu a educação usual dada aos jovens cavalheiros da época.[12]

Leonard escreveu sobre diversos temas relativos à agrimensura, à artilharia e à navegação que mobilizavam conhecimentos de geometria prática. No que se refere aos assuntos relacionados à agrimensura, fabricação e uso de instrumentos, a ele são atribuídas duas obras: *Tectonicon* e *Pantometria*, esta última contendo também questões relacionadas à arte militar.

[12]Para mais informações consulte Easton, J. B. in Gillispie (ed.) Dictionary of Scientific Biography, s.v. “Digges, Leonard”.

Embora prometesse uma série de outros trabalhos, estes não foram publicados e alguns só o foram postumamente, como é o caso do tratado *Pantometria* com duas edições, 1571 e 1591 e do tratado *An Arithmetical! Militare e Treatise Named Stratioticos* ou simplesmente *Stratioticos,* com duas publicações em 1579 e 1591, que tratam essencialmente de questões e problemas relacionados às artes militares. Esses dois tratados, e suas posteriores edições, foram publicados por seu filho Thomas que fez acréscimos de sua autoria. Em *Pantometria,* Thomas acrescentou um novo tópico, intitulado *A Mathematicall Discourse of the 5 Platonicall Regular Solides, and their Metamorphosis into 5 other compound rare Geometricall bodies;* e em *Stratioticos* anexou questões relacionadas à balística, que foram respondidas de forma parcial na segunda edição desse mesmo tratado e também na segunda edição de *Pantometria*.[13]

No que diz respeito aos seus trabalhos voltados à navegação, Leonard foi autor de *A Prognostication of Right Good Effect* de 1555, baseado em um almanaque, de sua autoria, de tabelas astronômicas chamado *A Generall Prognostication*, publicado em 1553 e renomeado no ano seguinte *A Prognostication Everlasting*, com onze edições antes de 1600. Cabe ressaltar que na edição publicada em 1576, recebeu acréscimos de Thomas, incluindo o texto *A Perfit Description of the Caelestiall Orbes*. Essa obra recebeu, ao longo do século, diversas denominações e se tornou muito popular por conter um rico material de astronomia que até aquele momento só havia sido escrito em latim ou grego.

Segundo Johnston (1994), o sucesso desse último tratado, *Prognostication*, se justifica pela necessidade, na época, de entender a observação celeste, prática necessária para a navegação. Este tratado foi especialmente útil aos marinheiros, pois continha dados para encontrar a hora do mar cheio em trinta e sete portos, além de descrever a fabricação e uso de três instrumentos bem simples: o relógio de sol, o quadrante e o “esquadro”, sendo que este último fornecia a tangente aproximada de qualquer ângulo.

---

[13] A esse respeito, consulte Johnston (1994).

Os tratados publicados por Leonard trazem, entre outras coisas, indícios de que a proficiência matemática tornara-se imprescindível naquela época. Segundo Harkness (2007), comerciantes e artesãos ingleses precisavam ter um conhecimento de matemática prática para poder exercer suas ocupações de modo que a busca por instrução nas matemáticas aumentou significativamente. Assim, muitos a buscaram junto aos praticantes das matemáticas ou contrataram tutores para isso, como observamos anteriormente.

A maioria desses praticantes das matemáticas, conforme já mencionamos, eram pessoas que escreviam tratados e almanaques referentes ao seu ofício ou se dedicavam à confecção de horóscopos. Mas o crescente interesse pelo estudo das matemáticas levou muitos desses praticantes a se especializarem. Parte desse processo estava relacionado à nova configuração política e econômica da Inglaterra que exigia cada vez mais aprimoramentos nas estratégias de defesa costeira por meio da construção de fortificações. Na navegação as mudanças ocorriam no uso de novos instrumentos e técnicas de localização em alto mar. No comércio e no câmbio, essas mudanças se faziam presentes na padronização dos pesos, medidas e nas regras para a troca de moedas. Já na origem da pequena indústria, que começava a se formar, a mudança se deu com as artes mecânicas fornecendo preparação técnica tanto para a criação de novas máquinas, como para o manuseio eficaz das que já existiam. Outro setor que foi fortemente afetado com as alterações sociais e econômicas foi a agricultura e a pecuária da época que dependiam da partição e do controle de terras. (HARKNESS, 2007)

Essas questões de ordem prática mobilizaram diferentes setores da sociedade, principalmente aqueles ligados à aristocracia inglesa, que passaram a ver vantagens não só econômicas, mas também políticas e sociais na disseminação do conhecimento matemático. Muitos aristocratas ingleses não mediram esforços para difundir conhecimentos matemáticos e com isso se beneficiar não só financeiramente com a venda de seus tratados, mas também conquistar prestígio político e reconhecimento social, ao mostrar que detinham um conhecimento que nem todos compartilhavam, tal como fez Leonard, que embora fosse um aristocrata, poderia ser considerado na época um praticante das matemáticas, pois segundo Johnston (1995, p.111), “Quer senhores ou artesãos especializados, os praticantes das matemáticas eram ‘mestres’, ou tentavam ser considerados como tal.”

Consideramos Leonard um praticante das matemáticas num sentido bem amplo, não só porque tratou de instrumentos matemáticos, mas também porque utilizou o conhecimento matemático como parte de sua ocupação.[14] Isso, entretanto, não quer dizer que Leonard fosse um mero prático no sentido que damos a esse termo nos dias de hoje. Isso porque, nos tratados *Tectonicon* e *Pantometria*, relacionados à agrimensura, podemos identificar diferentes tratamentos frente aos conhecimentos matemáticos. Enquanto em *Tectonicon* há uma preocupação com questões de ordem prática da geometria, ligadas à agrimensura e à produção de instrumentos simples, em *Pantometria* o conteúdo se mostra voltado a interesses mais teóricos.[15]

Embora as duas obras reflitam sobre a articulação entre conhecimentos matemáticos teóricos e práticos, essas duas ordens de conhecimento não podem ser interpretadas com base na dicotomia entre conhecimento teórico/puro e aplicado. Mesmo porque as categorias de ciências, *pura* e *aplicada*, como entendemos hoje, ainda não existiam naquela época.[16] Desta forma, devemos entender que Leonard não se ocupava da matemática aplicada, mas aplicava conhecimentos matemáticos em sua prática. Com efeito, os conhecimentos geométricos apresentados em *Tectonicon* não podem ser considerados simples aplicações da geometria encontrada em *Pantometria*. Embora tratem dos mesmos conhecimentos, visto que extraem seus princípios da *practica geometria* medieval, as duas obras têm diferentes objetivos e abordam a geometria a partir de diferentes pontos de vista, como veremos a seguir.

2.1 *Tectonicon* e *Pantometria*

Segundo Ash (2004), tratados como o *Pantometria* e o *Tectonicon* eram uma poderosa ferramenta para a divulgação do conhecimento matemático e também para

---

[14] A esse respeito, consulte Walton (2000).

[15] Para maiores informações ler Johnston (1994)

[16] Sobre as relações entre conhecimento teórico e prático consulte Ash (2004) e Roux (2010).

o reconhecimento das artes professadas por seus autores. Esses dois tratados disseminaram as artes matemáticas, mais especificamente a agrimensura, dando margem a novas interpretações dos princípios e teorias abstratas, na medida em que reformulavam e forneciam novas ideias e técnicas para resolver problemas de ordem prática.

Comparando o conteúdo dessas duas obras, notamos que ambas tratam de geometria prática, embora se diferenciem em muitos aspectos. Em linhas gerais, podemos dizer que a organização dos assuntos em *Pantometria* corresponde mais aos propósitos de um geômetra do que aos de um agrimensor. Isso porque os mesmos temas tratados em *Tectonicon* aparecem em *Pantometria* explicitados e organizados à moda euclidiana, elencando um conjunto de definições próprias da geometria que fundamentam os conhecimentos geométricos mobilizados na construção e no uso de diversos instrumentos que a obra se propõe a discorrer. Estas definições contemplam todos os casos geométricos considerados em *Tectonicon*, porém são tratados de forma mais detalhada.

Devemos observar que *Tectonicon* incorpora conhecimentos geométricos bem elementares, que embora não os descreva de maneira explícita tal como podemos notar em *Pantometria,* se dirigia a uma audiência familiarizada com o ofício da agrimensura e *Pantometria*, além desse público também para outro, provavelmente formado pelos estudiosos que estavam interessados em um conhecimento mais prático.

Desse modo, o *Tectonicon* tinha por objetivo fornecer ao agrimensor métodos e técnicas para exercer seu ofício, bem como propiciar o registro dos conhecimentos geométricos que eram necessários para desenvolver a arte de medir. Já o tratado *Pantometria* tinha como objetivo efetuar medições voltadas para diversas finalidades, como determinar a medida da distância entre embarcações, construir fortificações, determinar medidas de alturas e distâncias para a arquitetura e a artilharia, exigindo assim um detalhamento teórico realizado com inserção na obra de algumas definições e teoremas geométricos.

Uma das razões desta diferença entre os dois tratados, quanto ao tratamento dos conhecimentos matemáticos, é encontrada na forma de encarar o ensino das matemáticas na época em que cada um deles foi publicado. Na Inglaterra do final do século XV e durante todo o século XVI, as matemáticas percorreram um longo caminho para se fixarem como uma disciplina a ser ensinada nas universidades. Segundo Cooper (1993), a instrução nas matemáticas com ênfase na prática não era fornecida pelas universidades, pois eram os próprios praticantes das matemáticas que se encarregavam de ensinar. As aplicações matemáticas eram ensinadas em instituições criadas pelos comerciantes que tinham sido beneficiados com o conhecimento matemático ligado à prática de seu ofício. O Gresham College foi um exemplo dessas instituições, onde os professores ministravam as leis, a retórica, mas também a música, física, geometria e astronomia com ênfase na prática.

Nesse particular, Higton (2001) observa que, após muito tempo de a agrimensura ser praticada somente com bastões e cordas e utilizar como fundamento matemático a regra de ouro[17] para seus cálculos, novos métodos foram introduzidos nos textos do final do século XVI entre estes textos estavam os tratados de agrimensura de Leonard, que defendiam o uso de rigorosas técnicas matemáticas para o cálculo de medidas de áreas e para a elaboração de plantas e mapas das propriedades.

Com o interesse por parte dos proprietários de terras em obter a medição exata de suas terras, a demanda por uma instrução matemática que possibilitasse entender o trabalho dos agrimensores começou a se estabelecer. Na universidade de Oxford em 1570 um jovem professor chamado Henry Savile (1549-1622) foi defensor de um currículo reformado no qual as matemáticas fizessem parte. Sua visão, porém, quanto ao valor e finalidade das ciências matemáticas era a mais tradicional, considerava as matemáticas como uma ciência abstrata e ligada à filosofia platônica.

Goulding (2010) explica que Savile no fim da vida conseguiu transformar o estudo da matemática na Inglaterra, estabelecendo as “Cadeiras Savilianas de Geometria e Astronomia” que foram as primeiras cátedras ligadas a assuntos

---

[17]Segundo Brooks (1880), Humprey Baker (1562-1587) explica que a denominação regra de ouro foi dada pelos filósofos para a regra de três que utiliza três números em sua operação. Para mais informações consulte Harkness (2007).

matemáticos na Inglaterra. E foi justamente nessas cátedras que se instituiu mais tarde em 1619 que o ensino da medição de terras deveria ser uma atribuição do professor de Geometria.

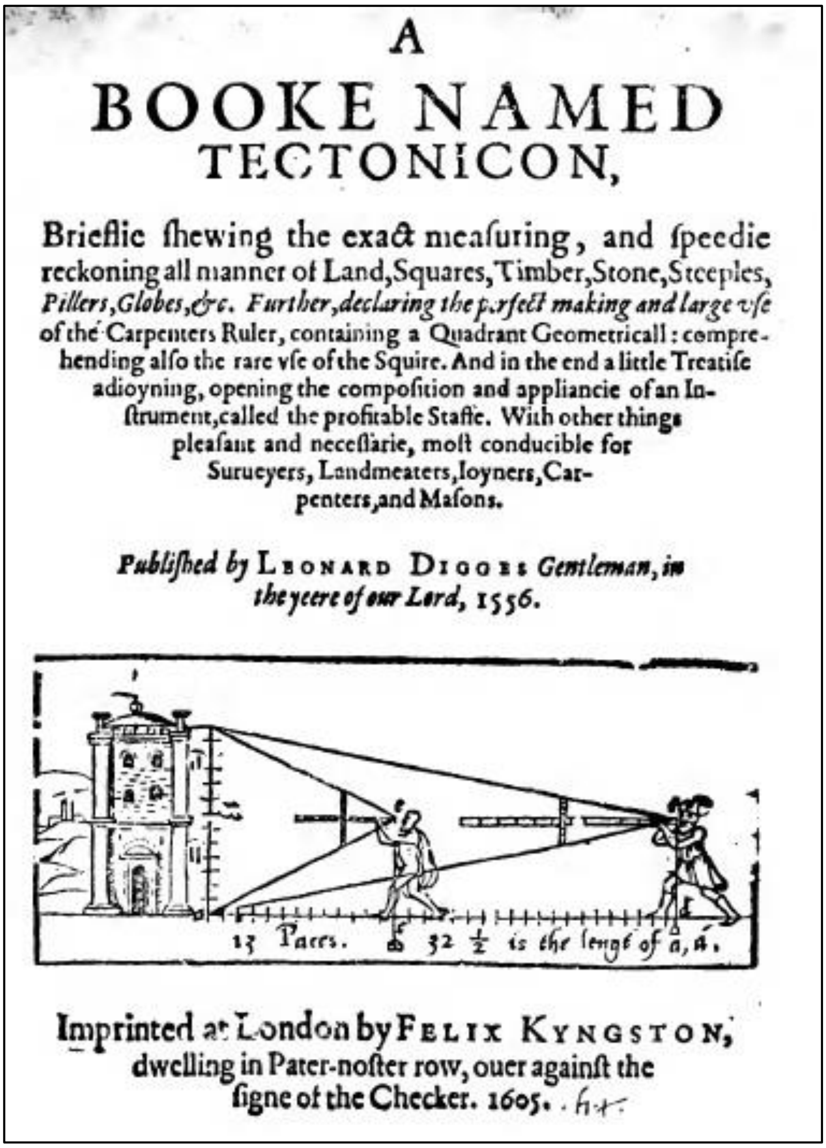
Todo esse panorama social pode explicar as pretensões dos tratados de agrimensura de Leonard em fornecer conhecimentos matemáticos ligados à prática, mas também validando-os por meio de justificativas matemáticas já estabelecidas no meio universitário. Isso significa que tanto *Pantometria* como *Tectonicon* procuravam articular aspectos teóricos e práticos da geometria que os renascentistas haviam herdado. Não se tratava, entretanto, de aplicar as definições e os teoremas da geometria na prática, nem o contrário, isto é, partir de considerações práticas para chegar a outras teóricas. O *Tectonicon* e o *Pantometria* eram tratados de geometria prática, frutos de uma tradição que remontava aos agrimensores romanos e primeiros medievais. [18] E, diferentemente, à geometria de Euclides, de Arquimedes, de Nicômaco e de outros, que correspondem a uma tradição erudita transmitida aos estudiosos de geometria, tinham uma preocupação prática com pretensões teóricas.

O tratado *Tectonicon* (figura 2) tinha como objetivo fornecer em vernáculo um tratamento simples dos conhecimentos matemáticos necessários para a construção e uso de instrumentos para medições. Este tratado aborda especificamente aplicações práticas relacionadas à medição de distâncias e alturas, contém uma parte considerável dedicada à fabricação e uso do instrumento conhecido, desde a Idade Média, por báculo, de que trataremos adiante de forma mais detalhada.

---

[18] A esse respeito consulte Lewis (2001) e Richeson (1966)

Figura 2 - Frontispício de *Tectonicon*



A
BOOKE NAMED
TECTONICON,

Brieflie ſhewing the exact meaſuring, and ſpeedie reckoning all manner of Land, Squares, Timber, Stone, Steeples, *Pillers, Globes, &c. Further, declaring the perfect making and large vſe* of the Carpenters Ruler, containing a Quadrant Geometricall: comprehending alſo the rare vſe of the Squire. And in the end a little Treatiſe adioyning, opening the compoſition and appliancie of an Inſtrument, called the profitable Staffe. With other things pleaſant and neceſſarie, moſt conducible for Surueyers, Landmeaters, Ioyners, Carpenters, and Maſons.

Publiſhed by LEONARD DIGGES *Gentleman, in the yeere of our Lord,* 1556.

Imprinted at London by FELIX KYNGSTON, dwelling in Pater-noſter row, ouer againſt the ſigne of the Checker. 1605.

Fonte: Digges (1605)

Publicada em 1556, a obra teve diversas edições, como já mencionado anteriormente, e trata das aplicações práticas da geometria em problemas de agrimensura e outras áreas afins, apresentando não somente técnicas, mas também os procedimentos para se obter as medidas necessárias ao ofício. No frontispício da obra, Leonard anuncia que busca com esta obra mostrar de forma breve:

> [...] a medição de forma precisa e o rápido cálculo de todas formas de terra, vigas de madeira, pedra, campanários, pilares, globos, etc. Além disso, apresenta de forma completa a construção da régua de carpinteiro, que contém um quadrante geométrico, e seus muitos usos: incluindo ainda o uso excepcional do esquadro. E ao final, é acrescentado um pequeno tratado, que trata da composição e da aplicação de um instrumento chamado báculo (*profitable staffe*), com outras coisas aprazíveis e necessárias que muito contribuem para agrimensores, medidores de terra, marceneiros, carpinteiros e pedreiros" (DIGGES, 1605, frontispício, tradução nossa).[19]

O *Tectonicon* encontra-se dividido em duas seções precedidas por um texto dirigido ao leitor, cujo objetivo é prefaciar a obra, e uma carta também dirigida ao leitor com um breve resumo do conteúdo[20]. A primeira das duas seções que se seguem, intitulada "Diversas coisas conduzidas na arte da medição", é composta de vinte e um capítulos. Esses capítulos fornecem basicamente as primeiras noções matemáticas requeridas para o ofício da agrimensura, tais como unidades de medida, técnicas para calcular a medida de área de terrenos com superfícies de diferentes formatos e outros procedimentos para medir a altura de montanhas e profundidade de vales e calcular as medidas de áreas das superfícies de toras de madeira, troncos ocos ou pedras redondas. A segunda e última seção, intitulada "Um pequeno tratado que expõe sobre a fabricação e o uso de um Instrumento Geométrico que até agora o medidor de terra e o carpinteiro o nomearam como báculo" (DIGGES, 1605, II, tradução nossa)[21] é composta por uma carta dirigida ao leitor e quatro capítulos. No primeiro e no segundo capítulos, o autor se detém nas explicações a respeito das partes que constituem o instrumento e como deve ser usado. Nos dois últimos, explica como utilizar o instrumento para medir alturas e larguras respectivamente. Em ambas seções, cada

---

[19]Em inglês lê-se: *"Brieflie shewing the exact measuring, and speedie reckoning all manner of Land, Squares, Timber, Stone, Steeples, Pillers, Globes, etc. Further, declaring the perfect making and large use of the Carpenters Ruler, containing a Quadrant Geometricall: comprehending also the rare use of the Squire. And in the end a little Treatise adioyning, opening the composition and appliancie of na Instrument, called the profitable Staffe. With other things pleasant and necessarie, most conducible for Surveyers, Landmeaters, Ioyners, Carpenters, and Masons*." (DIGGES, 1605, frontispício)

[20]Esta obra não está paginada. Para referenciá-la em suas partes, adotamos o seguinte critério: as duas seções são designadas em romano, I e II, e os capítulos por números arábicos, assim, por exemplo, "DIGGES, 1605, I, 3" e "DIGGES, 1605, II,1" referem-se, respectivamente, ao "terceiro capitulo da primeira seção" e "primeiro capítulo da segunda seção", e o texto que não faz parte de um capítulo será denominado pelo seu conteúdo na respectiva seção.

[21]Em inglês lê-se: "*A Little treatise declaringe the makinge and use of an Instrument Geometricall (so farre as it furthereth the Landemeter or Carpenter, named the profitable staffe*."(DIGGES, 1605, II) doravante designaremos esta parte por *A little treatise*

capítulo contém inicialmente instruções a respeito do assunto tratado de forma geral, na sequência fornece um exemplo, utilizando valores de medida quando é o caso e na maioria desses exemplos fornece uma figura que ilustra onde, esses valores dados no exemplo, devem ser considerados.

Como era muito comum naquela época, tratados deste tipo traziam duas partes, uma que fornecia instruções para a construção de instrumentos e outra para o seu uso. Muitos se tratavam de coletâneas de descrições de instrumentos de outros tratados e também de notas de aula. Eram escritos e publicados tanto por praticantes das matemáticas como por estudiosos de diversas modalidades, como a cartografia, geografia e da natureza.[22]

A preocupação dos leitores desses tratados era adquirir conhecimentos matemáticos tanto básicos como mais elaborados, como por exemplo, fornecendo instruções de como efetuar transações mercantis e manter os registros comerciais e também para como garantir a habilidade no manuseio de instrumentos desenvolvidos nas oficinas. Segundo Harkness (2007), o interesse dos londrinos estava na experiência prática, para eles era ela que deveria guiar a teoria. Já os responsáveis por fornecer os conhecimentos matemáticos argumentavam que primeiro os estudantes deveriam conhecer muito bem as bases teóricas, desenvolver seus conhecimentos nas teorias matemáticas mais avançadas e assim, chegar ao conhecimento de técnicas de utilização de instrumentos mais sofisticados.

A abordagem matemática, especificamente dos tratados de agrimensura, centrava-se na mensuração precisa das propriedades de terra e também na construção e uso de instrumentos que possibilitassem essa acurácia na medição. Assim, o que não era uma preocupação vigente no início do reinado de Elizabeth quanto à delimitação de propriedades, após sua morte a elaboração do mapa da propriedade se tornou um elemento importante para a definição de posição social e também para o estabelecimento de responsabilidades entre proprietários de terras e seus arrendatários. Além disso, segundo Poole e Bruckner (2002), os manuais de agrimensura propriciaram um crescimento da ideia de nacionalidade, já que os

[22] A esse respeito, consulte Saito (2012)

ingleses, ao visualizar e conceituar o espaço em que viviam por meio dos mapas impressos tomavam consciência do poder nacional.

Dessa forma, para obter a precisão no processo de medição de propriedades, para a fabricação e uso de instrumentos de medida que seriam utilizados neste processo e, finalmente, para que os autores de tratados apresentassem essas técnicas em suas obras, eram necessários diversos conhecimentos matemáticos e nem todos possuíam uma instrução suficiente que os habilitasse nessa leitura.

Segundo Harkness (2007) dois londrinos, um comerciante e um matemático, ambos educados em Cambridge, contribuiram para divulgar o ensino da matemática enfatizando os benefícios de sua instrução. O comerciante Henry Billingsley (?-1606) decidiu traduzir, a partir do grego para a língua inglesa, *Os Elementos* de Euclides e pediu ao seu amigo matemático John Dee (1527-1608/9) que prefaciasse a obra. Neste prefácio ele descreveu as disciplinas matemáticas e esclareceu suas aplicações. Argumentaram que a Inglaterra deveria educar o maior número de pessoas possível tanto na prática como na teoria em igual medida para assim assentar a construção de instrumentos e a astrologia sobre sólidas bases matemáticas.

Mas como segundo Harkness (2007) a preocupação dos cidadãos londrinos estava entre outras coisas em compreender as novas tecnologias instrumentais que se desenvolviam na cidade, os tratados de agrimensura, por exemplo, escritos no século XVI, em geral, forneciam instruções para os administradores e superintendentes de terras[23] a respeito de técnicas de medida para diversas situações de construção e uso de instrumentos específicos. Por esses motivos as publicações aumentaram de modo significativo até o século XVIII.[24]

Foi nesse contexto que os tratados de Leonard foram escritos e lidos. Diferentemente de *Tectonicon*, que tem um apelo mais prático, ou seja, em seus capítulos fornece orientações específicas para atividades práticas como a medição de distâncias e o cálculo de medidas de áreas de superficies de terrenos como montanhas e vales, o *Pantometria* (figura 3) parece ter pretensões mais teóricas e

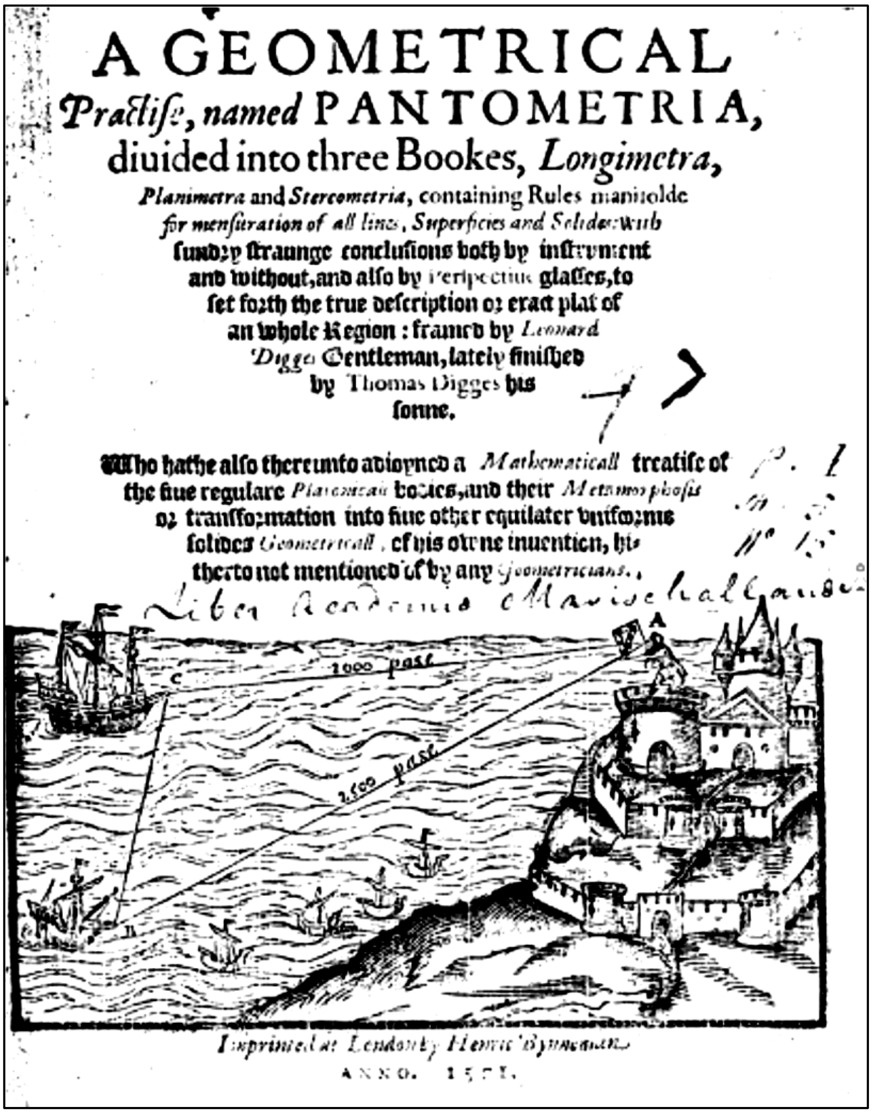
---

[23] Sobre esse assunto, vide estudos de McRae (1993) e de Richenson (1966).

[24] A esse respeito, consulte Saito (2013b).

fornece uma fundamentação matemática elaborada como uma forma preparatória para as medições tanto de distâncias, áreas e volumes, como para a fabricação e uso de instrumentos. Este último tratado teve duas edições, uma que aqui citamos, em 1571 e, outra, em 1591, que trata também de instrumentos matemáticos, porém apresenta algumas considerações teóricas, extraídas de diversas obras de geômetras bastante consagrados naquela época, tais como Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga.

Figura 3 – Frontispício de *Pantometria*


A GEOMETRICAL
Practise, named PANTOMETRIA,
diuided into three Bookes, Longimetra,
Planimetra and Stereometria, containing Rules manifolde
for mensuration of all lines, Superficies and Solides: with
sundry straunge conclusions both by instrument
and without, and also by perspectiue glasses, to
set forth the true description or exact plat of
an whole Region: framed by Leonard
Digges Gentleman, lately finished
by Thomas Digges his
sonne.

Who hathe also thereunto adioyned a Mathematicall treatise of
the fiue regulare Platonicall bodies, and their Metamorphosis
or transformation into fiue other equilater uniforme
solides Geometricall, of his owne inuention, hi-
therto not mentioned of by any Geometricians.

Imprinted at London by Henrie Bynneman.
ANNO. 1571.

Fonte: Digges (1571)

Essa preocupação, em conferir ao tratado um aspecto mais teórico, pode ser explicada pelo momento vivido nesse período pelos praticantes e os estudiosos das matemáticas. Segundo Harkness (2007),

> [...] uma geração de estudantes de Londres foi ensinada por seus professores as ligações entre a teoria e a prática, os autores de textos matemáticos cada vez mais uniram esses dois aspectos do conhecimento matemático em seus trabalhos. Ao fazê-lo, finalmente os autores matemáticos elizabetanos foram capazes de mudar para um novo argumento: a de que a instrução matemática levava à rápida e confiável resolução de problemas para os comerciantes, artesãos e até mesmo funcionários do estado. (HARKNESS, 2007,p. 102, tradução nossa)[25]

O tratado *Pantometria* é constituído de capa, brasão da família de Sir Nicholas Bacon, cavaleiro ao qual a dedicatória que vem a seguir é destinada, prefácio ao leitor e três livros. O primeiro livro, que contém trinta e seis capítulos, é dedicado a "longimetria", ou seja, à medida de distâncias obtidas por meio de diferentes instrumentos. Os seis primeiros capítulos desse livro apresentam algumas definições e teoremas utilizados nos capítulos subsequentes, nos quais são apresentados diferentes instrumentos para medir comprimentos, larguras e alturas, em diversas situações. O segundo livro contém vinte e quatro capítulos e é dedicado à "planimetria", ou seja, ao cálculo da medida da área de superfícies planas com diversos formatos. E o terceiro livro, denominado "stereometria" que contém quinze capítulos, trata das diferentes maneiras de se calcular a medida do volume de sólidos de diversos formatos. A esses três livros segue ainda um quarto texto, intitulado "Discurso matemático sobre os sólidos geométricos", que é dedicado aos cinco sólidos platônicos e a partir destes à geração de outros cinco sólidos que seriam transformações dos primeiros (*metamorphosis*), escrito e anexado ao tratado original por Thomas Digges, filho de Leonard.

Embora o *Pantometria* pareça ser um tratado teórico por incorporar algumas definições e teoremas, o seu conteúdo, assim como em *Tectonicon*, se volta para a

---

[25]Em inglês lê-se: *"[...] a generation of London students was taught the links between theory and practice by their teachers, the authors of mathematical texts increasingly knit together these two aspects of mathematical knowledge in their work. In doing so, late Elizabethan mathematical authors were able to move to a new argument: that mathematical literacy led to quick and reliable problem solving for merchants, craftsmen, and even officers of the state."* (HARKNESS, 2007, p.102)

aplicação prática da geometria, não somente para finalidades ligadas à agrimensura, mas também para as da arquitetura e das artes da guerra. Aborda por exemplo, conhecimentos de geometria necessários para a construção de fortificações, para o estabelecimento de acampamentos e para a artilharia. Seu propósito era fornecer recursos geométricos (tanto teóricos quanto práticos) com a finalidade de obter medidas de distância entre dois ou mais lugares, além da altura e largura de construções e relevos em terrenos, tais como muros, torres, poços, morros, vales etc., para calcular a medida da área de terras e mapear cidades, e para obter a medida da capacidade de barris de vinho e calcular o peso de diferentes objetos.

É possível observar por meio dos frontispícios dos dois tratados, *Tectonicon* e *Pantometria*, o conteúdo a que cada um se refere. Em *Tectonicon* (figura 2) é evidente o apelo prático, próprio do agrimensor, visto que apresenta um báculo e as relações de medida. Por sua vez, em *Pantometria* (figura 3) a imagem de capa já mostra como medir a distância entre dois navios, o que não necessariamente se relaciona com a agrimensura, mas com questões de ordem teórica mais amplas que envolvem navegação, astronomia, geografia, cartografia e outras áreas em que o conhecimento matemático se tornava essencial.

A esse respeito, é necessário apontar que, embora tenham enfoques diferentes, esses dois frontispícios trazem indícios do profícuo diálogo que passou a se estabelecer entre o conhecimento de ordem prática e teórica. Isso, em grande medida, foi reflexo da valorização das artes manuais que levou a uma nova forma de abordar a natureza e o conhecimento em geral, o que trouxe implicações significativas não só para as matemáticas, mas também para o ensino em geral, que passava por reformulações que incorporariam muito dos saberes das artes mecânicas.[26]

Esse movimento foi ainda acompanhado por outro que também é notório em *Tectonicon* e em *Pantometria,* a preocupação na divulgação do conhecimento prático. Uma das formas de torna-lo mais acessível a um maior público era publicar em vernáculo, diferentemente do que era feito nas universidades onde o latin além de ser ensinado, era o idioma da literatura utilizada e difundida no meio. Leonard, seguindo

---

[26] A esse respeito consulte Goulding (2010) e Rossi (1989).

a tendência da época, publicou seus tratados em vernáculo, o que favoreceu sua ampla divulgação.

Entretanto, não podemos deixar de considerar as razões pelas quais alguns preceitos teóricos foram incorporados aos seus tratados. Um dos motivos está relacionado ao estatuto do conhecimento compartilhado pelos agrimensores naquela época. A incorporação de aspectos mais teóricos da geometria num tratado que basicamente abordava geometria prática tinha por objetivo valorizar não só o ofício do agrimensor, mas também as artes mecânicas em geral.

Nesse sentido, o *Tectonicon* e o *Pantometria* foram escritos em uma época em que a aplicação prática de conhecimentos matemáticos estava sendo cada vez mais requisitada, ou seja, não foram escritos somente para os agrimensores, mas também para uma fatia da sociedade interessada nos procedimentos práticos do ofício, uma vez que eram necessários para administrar seus negócios e suas terras. Mas, quem disseminava esse tipo de conhecimento eram os praticantes das matemáticas que não só publicavam tratados, como também instruíam os agrimensores. Desse modo, seguiu-se a tendência de incluir nesses tratados algumas considerações teóricas para valorizar a arte manual (ou mecânica) e assim torná-la reconhecida em diferentes setores da sociedade e do conhecimento, segundo Ash (2004),

> A fim de reivindicar o seu poder recém-descoberto e status, os matemáticos primeiro tiveram que tornar pública a sua experiência e anunciar os valiosos serviços que poderiam oferecer a seus patronos. A melhor maneira de conseguir isso era publicar manuais e tratados, prometendo tornar as artes matemáticas mais acessíveis e benéficas para quem quisesse aceitá-las sobre os termos dos matemáticos. (p.140, tradução nossa)[27]

No que diz respeito particularmente aos tratados *Tectonicon* e *Pantometria*, além de valorizar o ofício do agrimensor, também divulgavam as artes matemáticas. Mas devemos observar que esses dois tratados não eram meros manuais técnicos, uma vez que não bastava simplesmente ler as instruções para efetuar as medições

---

[27]Em inglês lê-se: *"In order to lay claim to their newfound power and status, the mathematicians first had to make their expertise public and advertise the valuable services they could offer their patrons. The best way to accomplish this was to publish manuals and treatises, promising to make the mathematical arts more accessible and beneficial to anyone who would accept them on the mathematicians terms."* (ASH, 2004, p. 140)

sugeridas ou construir e fazer uso do instrumento, ao contrário, eram necessários conhecimentos matemáticos específicos relacionados à prática do ofício para a realização das diversas mensurações abordadas, para o cálculo das medidas de áreas, volumes e outros tantos procedimentos. Assim, embora ambos façam referência à geometria prática, esses dois tratados incorporam conhecimentos teóricos de forma diferenciada.

Em *Tectonicon*, as primeiras orientações são voltadas para aqueles aspectos essenciais da arte de medir que o agrimensor deve estar familiarizado, a começar pela aritmética, como conhecer os caracteres numéricos, os algarismos, as frações e o que elas representam ao longo do tratado. Alguns elementos geométricos como a altura de triângulos, raio e diâmetro de círculo e a decomposição de diversos quadriláteros em triângulos, também são citados no tratado e, a partir desses conhecimentos, o autor explica quais cálculos devem ser feitos para determinar a medida da área da superfície de terrenos com formatos aproximados a essas figuras e como as tabelas fornecidas devem ser consultadas. Só ao final do tratado é que são descritos alguns instrumentos de medida que devem ser utilizados para medir comprimentos, larguras, profundidades e alturas. As técnicas de mensuração utilizadas com esses instrumentos se fundamentam na ideia da proporcionalidade associada à semelhança de triângulos.

Já, em *Pantometria*, além de encontrarmos as mesmas preocupações de ordem prática, notamos que a exposição do conteúdo geométrico é mais explícita, ou seja, Leonard dedica uma boa parte do tratado para o aprofundamento de conhecimentos geométricos, apresentado-os de forma mais elaborada e detalhada. As técnicas de mensuração apresentadas, estão intimamente relacionadas aos instrumentos de medida mostrados neste tratado, que diferentemente de *Tectonicon*, tratam da medida angular. Além disso, em *Pantometria*, Leonard discorre em todo o terceiro livro a respeito do cálculo de volume de diversos sólidos geométricos como prismas, cilindros, cones e pirâmides e também orienta no cálculo da capacidade de barris de vinho.

Dessa forma, observamos que os conhecimentos matemáticos relativos a medições lineares como distâncias, larguras, profundidades e alturas são abordados em ambos tratados, porém em *Tectonicon* com uma abordagem voltada ao interesse prático do ofício do agrimensor e em *Pantometria,* com o objetivo de instruir matematicamente seus leitores.

2.2 As medidas lineares e de áreas de superfícies

Os conhecimentos matemáticos abordados por Leonard nesses dois tratados nos dão indícios de quais eram os principais conteúdos matemáticos que deveriam ser conhecidos pelo agrimensor do século XVI, tanto para o desenvolvimento de seu ofício como para a fabricação e manuseio de seus instrumentos de medida utilizados nos processos de medição de propriedades.

Na época em que esses tratados foram publicados, o público ao qual essa literatura se destinava era muito variado. Além de agrimensores, outros como carpinteiros, medidores de terra, pedreiros e marinheiros, tinham grande interesse por seu conteúdo matemático. Não era uma tarefa fácil entender esses tratados, já que o público em geral não a tinha instrução necessária para compreender muitos dos termos técnicos e matemáticos neles contemplados. Até mesmo o agrimensor resistia em consultá-los, defendendo que seu ofício podia ser desenvolvido apoiando-se no conhecimento trazido pela experiência prática.

Leonard ao escrever o *Tectonicon* pareceu estar muito consciente a esse respeito, visto que considerou essas questões em seu tratado ao incluir breve texto dirigido ao leitor no sexto capítulo do tratado no qual enfatiza que esses artesãos têm que medir diversos objetos com diversos formatos e materiais como troncos e pedras que, muitas vezes, são imperfeitos em suas formas e que com o tratado buscaria instruir os leitores mostrando-lhes como proceder nesses casos. Alertava ainda, para que os artesãos não fossem, segundo ele, precipitados ou soberbos teimando em seguir regras corrompidas e se recusando a receber novos ensinamentos. Ou seja, a arte de medir deveria se pautar no conhecimento matemático e não na simples manipulação empírica das ferramentas que comumente estavam à disposição do agrimensor. Isso fica claro na organização de sua obra.

Assim, o primeiro capítulo da primeira seção de *Tectonicon* apresenta as noções matemáticas elementares que o agrimensor deveria ter em conta. São elas: os caracteres numéricos, as frações, e duas figuras, a saber: o triângulo e o círculo. Com relação aos caracteres numéricos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0) e as frações $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{9}{10}$, Leonard explica que as frações se referem a partes de um todo, que pode ser medido em *pearch* [28], polegadas ou qualquer outra unidade de medida. Para a última fração, por exemplo, destaca que são "[..] nove décimos de uma polegada, isto é, nove partes de uma polegada dividida em 10 porções". (DIGGES, 1605, I, 1, tradução nossa)[29].

Leonard não discorre sobre aritmética e nem explicita como utilizará essas frações, observa apenas que o artesão deve se familiarizar com elas, pois serão citadas no restante da obra, como destaca:

> Estas [frações] eu pretendo colocar em meus exemplos e em minhas tabelas, e nas margens a seguir, para representar partes de *pearchs* ou polegadas. Assim, então, eu deverei escrever meia polegada desta forma $\frac{1}{2}$. Três quartos de polegada, assim, $\frac{3}{4}$. Uma oitava parte de um *pearch*, desta maneira, $\frac{1}{8}$. Assim para o restante. (DIGGES, 1605, I,1, tradução nossa) [30]

Embora o leitor de seus tratados não fosse leigo em seu ofício, seus conhecimentos matemáticos se restringiam a sua prática, e o uso dessas frações, além de representar o fracionamento de uma medida, estava relacionado aos procedimentos para converter unidades de medidas, muito necessários à prática da agrimensura.

---

[28] O termo *pearch*, se refere ao atual *perch* que provém da França que por sua vez vem do Latin *pertica* que significa poleiro, vara onde as aves pousam. (Oxford English Dictionary, 1933 apud Richeson, 1966). Doravante neste trabalho, utilizaremos a mesma denominação "pearch", dada por Leonard.

[29] Em inglês lê-se: "*[...] is nine tenthes of an inch: that is nine partes of an inch, divided into ten portions.*" (DIGGES, 1605,I, 1)

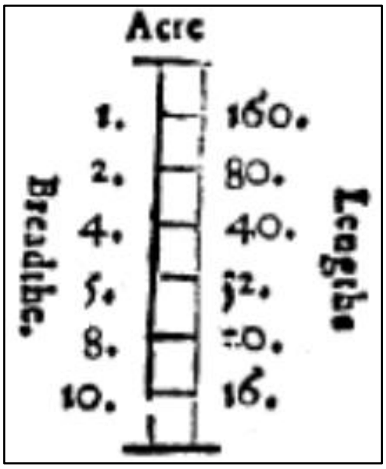
[30] Em inglês lê-se: "*These I doe intende to put in my examples, na in my tables and margines following, to represent parts of pearches or inches. As if I would write halfe na Inch, after this manner* $\frac{1}{2}$*. Three quarters of na inch thus* $\frac{3}{4}$*. One eight of a pearch, on this wise* $\frac{1}{8}$ *. So of the rest.*" (DIGGES, 1605, I,1)

Por isso a respeito dessas unidades, Leonard ainda as descreve com suas respectivas conversões e esclarece que, embora existam em diversos locais, muitas opiniões formuladas pelo uso que comumente é feito da medida do comprimento de um *pearch*, ele considerará aquele padronizado segundo o estatuto. Assim ele passa a descrever as conversões consideradas que contém o *pearch* e o *acre*, como podemos observar quando destaca no seguinte trecho:

> Onde são apontados 3 grãos de cevada, secos e arredondados, para fazer uma polegada: doze polegadas, um pé: três pés, uma jarda: cinco jardas e ½, um *pearch*: quarenta *pearchs* em comprimento e quatro em largura, um *acre*. Assim, um *acre* por estatuto deverá conter 160 *pearchs*: o meio *acre* 80 *pearchs*: um *rood*, comumente chamado de um quarto, 40 *pearchs*: um *daywork*, 4 *pearchs*. (DIGGES, 1605, I, 1, tradução nossa, grifo nosso) [31]

E na sequência apresenta uma figura (figura 4) em que considera as medidas do comprimento e da largura em *pearchs*, assim para 10, 8, 5, 4, 2 e 1 *pearch* de largura e respectivamente 16, 20, 32, 40, 80 e 160 *pearchs* de comprimento, essas medidas expressarão 1 *acre*.

Figura 4 - *Acre* expresso pelas medidas do seu comprimento e largura



Fonte: Digges (1605)

Segundo Richeson (1966), o *rod* era uma unidade de medida linear importante que se relacionava com outras, o *rood*, *pole* e *pearch,* com significado praticamente

[31]Em inglês lê-se: "*Wherein is ordained three barly cornes, drie and rounde, to make an inch: twelve inches, a foote: three foote, a yarde: five Yardes and ½ a pearch: fortie pearches in lenght, and foure in breadth, an Acre. So an Acre by statute ought to containe 160 pearches: the halfe Acre 80 pearches: a roode, commonly called a quarter 40 pearches, a day work 4 pearches."* (DIGGES, 1605, I, 1)

idêntico (haste, poste ou viga). O uso de um termo ou outro, entretanto, variou em diferentes épocas. No final do período saxônico (aproximadamente do 449 ao século XII), o termo era utilizado para designar a medida de distância. Esta medida era necessária para determinar os limites do que vinha a ser o *acre* e as faixas de *meio acre*, isto é, a medida de área dos campos no chamado sistema de agricultura de campo aberto em que a terra era dividida em faixas (com comprimento e larguras apropriados) para o cultivo e arado. Assim, no ano, durante o crescimento da lavoura as terras eram repartidas entre os camponeses e, no restante do ano, eram utilizadas comunitariamente para o pasto de animais (RICHESON, 1966). Por sua vez, no período compreendido entre os séculos XII e XVI, o termo *rood* [32] deixou de designar a medida linear e passou a ser utilizado algumas vezes para se determinar a medida da área de terra. Richenson observa que, nesse período, o termo *rood* passou a significar "vara com a qual medir". Contudo, diversas referências parecem indicar que o termo foi utilizado tanto como uma unidade para se medir comprimentos, bem como unidade de área de superfície. Em *Tectonicon*, Leonard o apresenta como um submúltiplo do *acre* e esta medida segundo Richeson (1966, p. 18, tradução e grifo nosso) "Desde os tempos mais remotos até o presente, a medida fundamental da área da superfície na Inglaterra foi o *acre*."[33]

Além de ressaltar a necessidade de conhecer as unidades e compreender suas partes, Leonard discorre sucintamente sobre algumas figuras geométricas, principalmente o triângulo e o círculo.

O triângulo é descrito por ele como "[...] uma forma de peça que tem (ou é imaginada tendo) três lados e três ângulos apenas, ou os lados são iguais ou diferentes [...]" (DIGGES, 1605, I, 1)[34]. Leonard não aprofunda, nem discorre a respeito das propriedades dos triângulos, nem os classifica conforme *Os Elementos* de Euclides. Isso porque para a arte da agrimensura, bastava apenas saber o que

---

[32] Doravante neste trabalho, utilizaremos"rood", a mesma denominação dada por Leonard.

[33]Em inglês lê-se: "*From the earliest times until the present, the fundamental measure of superficial area in England has been the* acre.*"* (RICHESON, 1966, p. 18)

[34]Em inglês lê-se: "*It is such a fashioned peece as hath (or is imagined to have) three sides, and three angles onely: whether the sides be equall or otherwise [...]*" (DIGGES, 1605, I, 1)

eram as figuras triangulares e reconhecer entre elas os triângulos com os lados de medidas iguais ou diferentes, uma vez que estes teriam características muito úteis que auxiliariam na obtenção da medida. Além disso, Leonard procura discorrer a respeito de particularidades dos triângulos uteis para o agrimensor, como o uso da medida de sua altura, pois a partir dela é possível calcular a medida da área de qualquer triângulo. Assim, apoiado em uma figura (figura 5), Leonard nomeia a altura da seguinte forma:

> Mais uma vez, note que uma linha é dita descendente sobre a base, quando ela corta qualquer coisa, ou qualquer lado de um triângulo, atravessando-o completamente (...): como a linha marcada a.b que cai sobre c.d., a linha de base do triângulo. Eis que ela corta a base ou a atravessa completamente no ponto b, e não como a outra linha a.e. o faz. (DIGGES, 1605, I, 1, tradução nossa)[35]

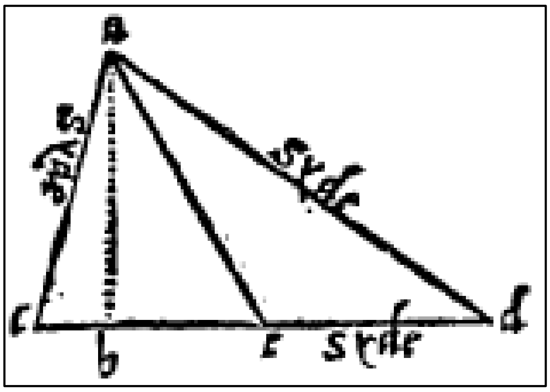
Observamos que Leonard, não especifica como a medida da altura deverá ser encontrada. É por meio da figura que ele instrui e mostra onde se encontra a altura, explicando tratar-se da linha[36] "ab" e não da "ae". Além de estabelecer, de forma empírica, o que é a altura, ele orienta, na sequência de seu texto, que a base de um triângulo pode ser considerada como qualquer um dos lados, desde que seja cortada pela linha que determina a altura.

---

[35]Em inglês lê-se: "*Againe, note that a line is said to fall Squire wise, when it cutteth any thing, or any side of a Triangle full crosse (…): As the hanging pricked line a.b. in c.d. the base line of the Triangle. Lo it cutteth the side squirewise, or full crosse in the poynt b. and not as the other line a.c. doth." (DIGGES, 1605, 1,1)*

[36] Quando o autor utiliza o termo "linha", está se referindo a segmentos de reta.

Figura 5 – Triângulo com a indicação da altura



Fonte: Digges (1605)

Em seguida, Leonard apresenta o círculo e se apoia em uma figura (figura 6) para mostrar o que vem a ser a circunferência, centro, diâmetro, semidiâmetro, arco e paralelo (corda):

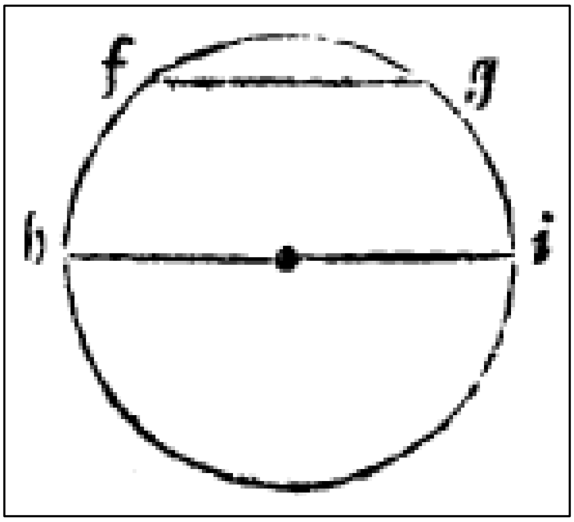
> No que diz respeito ao círculo, sabemos que o contorno de qualquer círculo é denominado circunferência: o ponto no meio nele é seu centro: a linha reta h.i. que passa através do centro, tocando a circunferência em ambos os lados, é seu diâmetro: a metade dessa linha, o semidâmetro. Também um arco é uma parte da circunferência cortada, como veis o arco acima da linha f.g. Também f.g. e h.i. neste círculo são chamados paralelos: por que eles diferem igualmente em todos os lugares, um do outro. (DIGGES, 1605, I, 1, tradução nossa) [37]

Leonard não fornece explicações mais detalhadas de como traçar um triângulo, ou uma círcunferência, e suas partes. As figuras são fundamentais para a compreensão ao que ele se refere. Observamos, por exemplo, que para explicar o que é uma corda, que o autor denomina como paralelo, ele relaciona a distância desse paralelo "fg", ao diâmetro "hi", que terá de ser a mesma (mesma medida) em qualquer ponto (lugar). Leonard não explicita, por exemplo, que o diâmetro pode ser qualquer

[37] Em inglês lê-se: "*Concerning a Circle, knowe that the compasse of anie Circle is named a Circumference: the middle poynt in him his Center: the right line h.i. that goeth overthwart that Center touching the Circumference on both sides is his Diameter: the halfe of that line, the Semidiameter. Also an Arch is a peece of the Circunference cut away, as ye see the Arch above the line f.g. Also f.g. h.i. in this Circle are named Parallels: for that they differ equally in all places, the one from the other.*" (DIGGES, 1605, I, 1)

segmento passando pelo centro com extremidades na circunferência e que qualquer segmento que seja paralelo a um diâmetro será considerado um paralelo.

Figura 6 - Círculo

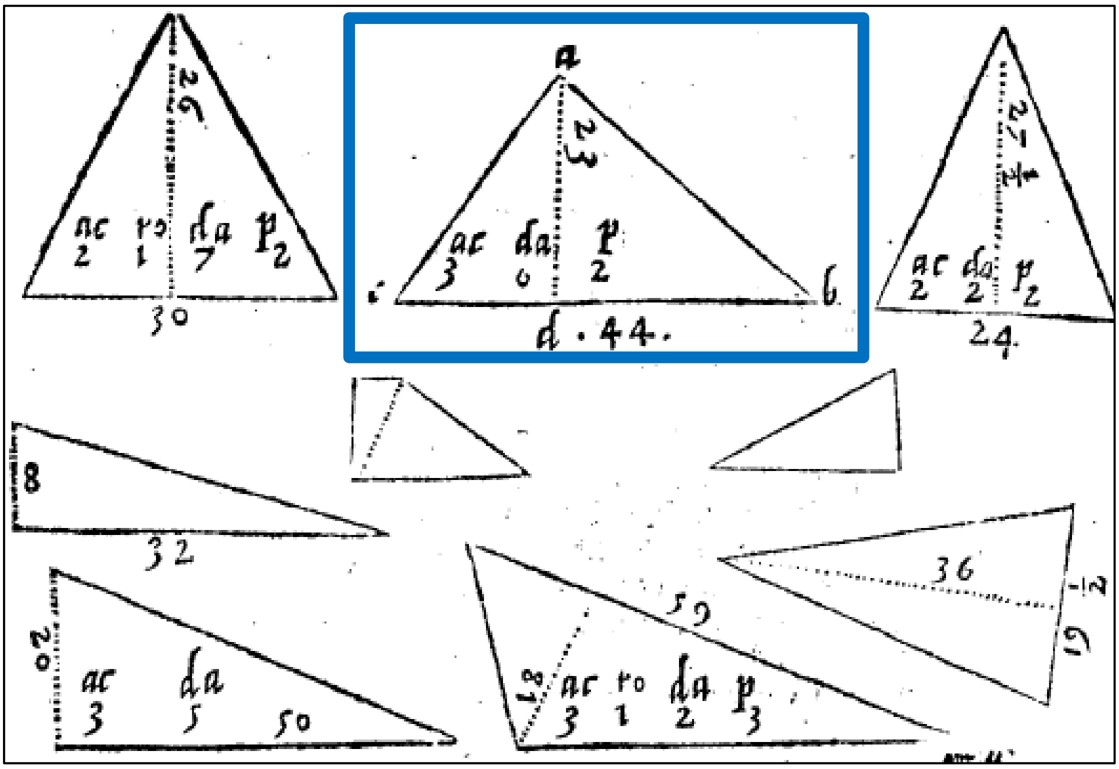


Fonte: Digges (1605)

Para finalizar o primeiro capítulo Leonard ressalta que os artesãos deveriam estar familiarizados com essas noções porque é com elas que o agrimensor poderá operar matematicamente. Ou seja, que o agrimensor poderá utilizar os números e as frações para realizar e expressar as medidas, e os triângulos e os círculos para medir as áreas. E, em seguida, anuncia que a prática e experiência lhe mostrou que a maior parte dos terrenos pode ser dividida em um ou mais triângulos e que por isso iniciará suas explicações com o triângulo.

Assim, no segundo capítulo embora não discorra sobre como traçar a altura de um triângulo, Leonard observa que ela é bem conhecida pelos agrimensores e explicita que ela corresponde à linha dada pelo fio de prumo (*plumbe line*), isto é, uma linha perpendicular (*hangynge or plumbe line*) que pode partir de qualquer vértice do triângulo até a base (*squirewise*). Para ilustrá-la, ele fornece uma figura (figura 7) com vários triângulos e suas alturas correspondentes, bem como as medidas de suas áreas sem, entretanto, explicar ainda como obtê-las.

Figura 7 - Triângulos com suas alturas dadas em diferentes unidades de medida



Fonte: Digges (1605, destaque nosso)

Esse tópico é introduzido por Leonard com o objetivo de mostrar aos leitores que qualquer terreno (cujos lados são retilíneos) pode ser decomposto em vários triângulos e, dessa maneira, a medida de sua área pode ser estimada. No caso de terrenos que podem ser divididos em diferentes triângulos, Leonard observa que é necessário conhecer a medida da altura de cada triângulo, para assim calcular a medida da área de cada um, que quando somadas, compõem a medida total da área.

Desse modo, no terceiro capítulo explica que se o leitor for um aritmético, poderá efetuar a multiplicação da linha suspensa (altura) pela metade da medida da base, mas caso não saiba como fazê-lo, ele fornece uma tabela onde a medida desejada poderá ser encontrada. As medidas destas áreas, dessa forma são encontradas em uma Tabela de Dados (*Table of accompt/Tabula Computationis*, ver Anexo A), fornecida no tratado *Tectonicon*. Apresenta assim, um exemplo no qual se remete à figura do segundo capítulo, com diversos triângulos (figura 7), e destaca a segunda figura da parte superior (destaque na figura 7). Propõe proceder da seguinte maneira:

> […] suponha que a segunda destas últimas nove figuras do outro lado, tendo escrito sobre ela abcd, seja um pedaço de terra, do qual eu deveria ter a verdadeira medida. Eu encontro, por uma corda, ou de outra forma, a linha suspensa [i.e. a altura] a.d. ser 23 *pearchs*; o lado b.c., que é cortado, é a base de 44 *pearchs*, cuja metade é 22. Com estes 22 e 23, comprimento e largura obtidos, eu vou na tabela de dados. Lá encontro, nessa tabela, no canto onde ambas as linhas do comprimento e da largura obtidos se encontram, 3 *Acres*, 6 *dayworks* e duas *pearchs* estando nesse triângulo. (DIGGES, 1605, I, 3, tradução e grifo nosso)[38]

Ou seja, Leonard orienta primeiro a encontrar a medida da altura do triângulo que, no caso, mede 23 *pearchs* e, depois, a medida da base que tem 44 *pearchs*, cuja metade é 22. Em seguida, orienta o leitor, com base nestes valores, a localizá-los nas margens da tabela de dados. A medida da área do triângulo é encontrada no cruzamento da linha (vertical), referente à altura, com outra linha (horizontal), relativa à metade do valor da base. Dessa forma, a fim de facilitar a atividade do agrimensor, Leonard forneceu em seu tratado essa tabela na qual quem a consultasse, conhecendo o formato e algumas dimensões da região da qual quisesse obter a medida da área, poderia consulta-la e assim encontrar a medida desejada já nas unidades de medida de área.

Essas tabelas eram comuns em sua época. Elas eram necessárias, tanto pelo desconhecimento de algoritmos de cálculo por quem efetuava as medições como pela inexistência, nesse período, de um padrão universal de unidades de medida. O procedimento de uso dessas tabelas, entretanto, por vezes conduzia a erros, principalmente quando eram utilizadas erroneamente e quando estavam envolvidos valores fracionados e diferentes unidades de medida.

A esse respeito, Cooper (1993) observa que, em geral, as tabelas exigiam duas medidas lineares para encontrar a área e muitos praticantes consideravam que eram suficientes para calcular a medida da área de terrenos com qualquer formato, não somente os retangulares, o que frequentemente levava a erros. Além disso, o

---

[38]Em inglês lê-se: *"[...] suppolse the second of these last nine figures of the other side, having written above it a.b.c.d. to bee a peece of land, whereof I would have the true measure, I finde by a Corde, otherwise, the pricked hanging line a.b. to bee 23. Pearches: the side b.c. which it cutteth squirewise 44. Pearches, whose halfe is 22. With these 22. And 23. the conveniente length and breadth, I enter the table account. There I finde by that Table at the corner where both the lines of conveniente length and breadth doo meete 3. Acres, 6. Dayworkes, and two pearches to be in that Triangle."* (DIGGES, 1605, I, 3)

regulamento da época segundo o autor, definia o *acre* como sendo obtido das medidas 10 x 16 *pearchs*, ou 20 x 8 *pearchs* ou ainda por 40 x 4 *pearchs* e assim por diante. Todavia, era muito frequente encontrar medidas fracionadas, o que segundo o autor "mostrava as dificuldades de cômputo naquele período, particularmente para encontrar raízes quadradas que misturavam unidades." (COOPER, 1993, p.76, tradução nossa)[39].

O uso das tabelas tornou-se necessário, como no caso de Leonard, porque a Inglaterra passou a prescrever em Estatutos as unidades de medida convencionais. Assim, para encontrar a medida da área na tabela de dados, fornecida no tratado, o autor dá a seguinte explicação:

> Busque ali o comprimento e o maior número de *pearchs* na margem superior que começa em 1 e termina na ala direita em 40. Olhe a outra soma de *pearchs* (me refiro à largura) no lado direito e margem suspensa a partir de 1 descendo até 30. Agora no encontro das linhas, onde uma responde a outra diretamente em um quadrado, você deve encontrar os *Acres, Roods, Dayworks* e *Pearchs*. Note que o primeiro número definido no lado esquerdo, e na parte superior em qualquer quadrado, indica o número de *acres*. A figura 1 localizada na parte superior, e do lado direito, indica um *rood*; na figura 2, há dois *roods*. E a figura do lado esquerdo abaixo, indica um *daywork*, […] Uma figura na parte inferior direita, declara os *pearchs*. (DIGGES, 1605, I, 6, tradução e grifo nosso)[40]

Aqui, Leonard, orienta que após a medição, o maior valor encontrado deverá ser localizado na margem superior da tabela (que vai de 1 à 40) e o outro valor, na margem vertical à direita (que vai de 1 à 30). Feito isso, o leitor deverá localizar os números que estão no cruzamento da coluna e linha referentes a esses valores. No ponto de encontro estarão as medidas em *acres*, *roods*, *dayworks* e *pearchs*. Ou seja,

---

[39]Em inglês lê-se: *"[...] illustrate the difficulties of computing at that time, particularly in finding square roots with mixed units."* (COOPER, 1993, p. 76)

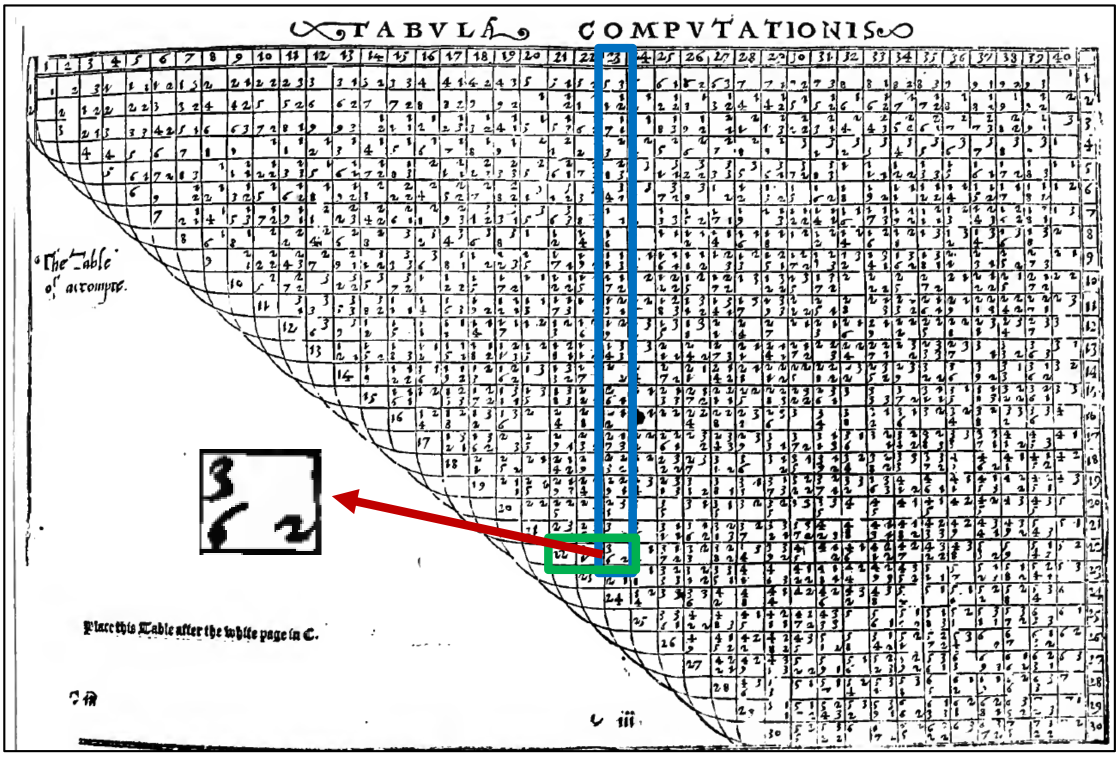
[40]Em inglês lê-se: *"Seeke there the Length, and most number of Pearches in the higher margine, which beginneth at 1. And endeth right ward at 40. Looke the other summe of Pearches (I meane the Breadth) in the right side and hanging margine, from 1. descending to 30. Now at the meeting of the lines, where the one answereth the other directly in a square, you shall finde the Acres, Roddes, Day workes, and Pearches. Note that the first number set on the lest side, and upper part in any square, signifeth the number of Acres. The figure 1. Set in the upper part, and right side, doth betoken a Roode: the figure 2. there two roodes. And the figure in the left side beneath, signifeth a Day worke, [...]. A figure in the lower part rightward, declareth pearches."* (DIGGES, 1605, I,6)

no espaço onde se cruzam as medidas da largura e comprimento está o resultado da medida da área, já organizada nas respectivas unidades de medida, da seguinte forma:

Acres	*Roods*
Dayworks	*Pearchs*

A seguir na figura 8 indicamos onde encontramos a medida da área do triângulo em destaque mostrado na figura 7, e ampliamos a medida citada para uma melhor visualização.

Figura 8 - Tabela de dados, consulta para os valores 23 e 22



Fonte: Digges (1605)

Ao efetuarmos conversões explicadas no capítulo um de *Tectonicon*, o valor da medida da área encontrado, 3 *acres*, 6 *dayworks* e 2 *pearchs* corresponde exatamente ao valor da medida da área em *pearchs* se a calculássemos, como Leonard inicialmente propõe no início do terceiro capítulo, multiplicando o valor da medida da altura, pela metade do valor da medida da base, o resultado é o mesmo como podemos ver no quadro 1 a seguir:

Quadro 1 - Cálculo da medida de área do triângulo

Cálculo da medida da área em *pearchs*	**Valores encontrados na tabela e as conversões para *pearchs***
Valor da medida da base: 44 Valor da medida da altura: 23 Valor da medida da área: 22 x 23 = 506	3 *acres* equivalem a 480 *pearchs* 6 *dayworks* equivalem a 24 *pearchs* 2 *pearchs* Valor da medida da área: 480 + 24 + 2 = 506

Fonte: Produção nossa

Esta forma de encontrar a medida da área de uma superfície triangular qualquer está descrita nos capítulos que vão de um ao cinco no segundo livro de *Pantometria*. Nestes capítulos, o autor não fornece os valores das medidas da área em unidades de medida pré-estabelecidas, apenas dá as instruções para o cálculo da área da superfície de diferentes tipos de triângulos, tendo somente a medida dos lados ou a medida dos lados e da altura. No primeiro capítulo, por exemplo, para o cálculo da medida da área da superfície de um triângulo isósceles de ângulo reto, escreve: “Multiplique um dos lados iguais por ele próprio, a metade do produto (*product*) é a área ou o conteúdo da superfície”. (DIGGES, 1571, II, 1, tradução nossa)[41]. Já no capítulo cinco, Leonard dá uma regra geral para calcular a medida de área de todos os tipos de triângulos, a partir da medida de seus lados. [42]

Em *Tectonicon,* Leonard orienta a respeito do cálculo da medida de área de forma semelhante, porém com menos detalhamento matemático em cada figura. Neste tratado é possível perceber que seu objetivo não é que o leitor adquira o

---

[41]Em inglês lê-se: “*Multiplie one of the equall sides in it selfe, the halfe of the product is the Area or Superficiall contente*.” (DIGGES, 1571, II, 1)

[42] Neste caso Leonard parece fazer alusão à fórmula que atualmente donominamos como Fórmula de Heron, em que dado um triângulo com medida dos lados sendo *a*, *b* e *c* e semipérimetro *p*, a medida da área (A) pode ser calculada por: A = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

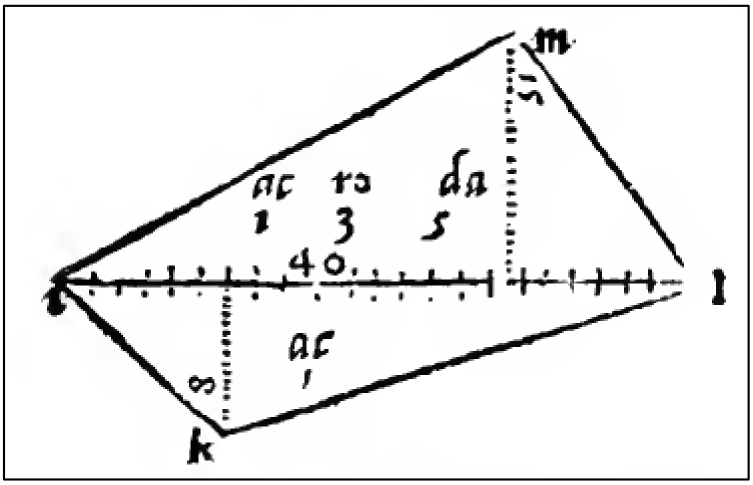
conhecimento matemático para o cálculo de medidas de áreas de figuras de formatos diferentes e sim que, ao efetuar a medição de um terreno e obter algumas medidas básicas, como comprimento e largura, consiga ao consultar a tabela, obter facilmente as medidas da área já nas unidades de medida desejadas. No capítulo quatro, por exemplo, mostra como um terreno de quatro lados (figura 9) pode ser dividido em triângulos:

> Admita o terreno i.k.l.m. a ser medido. Por não ser na forma triangular, ele deve ser imaginado, como já disse, em triângulo ou triângulos. Isso que é imaginado está aqui representado pela linha tracejada i.l. Em seguida, como acima é dito, deverá ser medido (de acordo com a regra de triângulos) em duas partes porque há dois triângulos no terreno. Então, por verificação vós encontrais no i.m.l. superior um *Acre*, 3 *roodes* e cinco *dayworks*; no outro i.k.l. um *acre*. Assim reúno todo o conteúdo dessa terra, sendo dois *acres*, três *roods*, e cinco *dayworks*. (DIGGES, 1605, I,4, tradução nossa) [43]

Ou seja, Leonard orienta o leitor a imaginar uma linha que divide o terreno em dois triângulos. A partir disso fornece a medida da área para cada triângulo e, em seguida, instrui para somá-las e obter a medida da área total. Contudo, devemos observar que ele não calcula a medida das áreas dos dois triângulos separadamente. Após apresentar a figura, ele explica que a medida da área correspondente a 2 *acres*, 3 *roods* e 5 *dayworks* é encontrada na tabela, no cruzamenteo entre a soma das medidas das alturas (*hanging lines*), 15 e 8, dos dois triângulos (que perfaz 23) e o valor correspondente à metade da linha “il”, isto é, 20.

[43] Em inglês lê-se: “*Admit i.k.l.m. land to be measured. Because it is no manner triangle, it must be brought by imagination, as I have said into a triangle or triangles. Which imagination is heere signified by the line dashed il Then as above is declared, it ought to bee measured (according to the rule of triangles) in two parts, because there are two triangles in that land. So by proofe ye shall finde in the upper i.m.l. one Acre, 3 Roodes, and five Dayworks: in the other i.k.l. one Acre. Thus I gather the whole contente of that Land, to bee two Acres, three Roodes, and five Dayworks.*” (DIGGES, 1605, I, 4)

Figura 9 – Terreno de quatro lados dividido em dois triângulos



Fonte: Digges (1605)

No caso de terrenos cujas bordas sejam curvas, Leonard procura orientar seus leitores a considerarem a medida de áreas circulares. Desse modo, a medida das áreas de terrenos mistos é calculada por meio de uma composição de triângulos e círculos. Assim, depois de tratar da medida da área de triângulos, que permite o cômputo de qualquer terreno que possa ser decomposto em triângulos, Leonard instrui sobre como calcular a medida da área de superfícies circulares.

Este tópico é abordado no quinto capítulo de *Tectonicon* e, nele, Leonard afirma que “Metade do diâmetro multiplicado pela metade da medida da circunferência mostra o conteúdo de qualquer círculo.” (DIGGES, 1605, I, 5, tradução nossa)[44]. Novamente, aqui, esses dois valores encontrados deverão ser localizados nas margens da tabela de dados e obter a medida da área:

[44]Em inglês lê-se: “*Half the diameter multiplied in half the circumference shewed the content of any circle.”* (DIGGES, I, 5)

> Suponha um pedaço de terra, cuja circunferência é 100 *pearchs*, a largura 32 *pearchs*. Eu gostaria de saber quanta terra há nesta figura. Entre em sua tabela com a metade da circunferência que é 50 e com metade da largura que é 16 *pearchs*. Como na tabela não encontro 50, pois o maior comprimento é 40, (portanto, eu entro com 40) e 16. Assim são encontrados quatro *acres*. Então entro novamente com 10 *pearchs* restantes e 16 de largura como antes: que resulta em 1 *acre*. Agora, para concluir, pela adição de 1 e 4, encontro 5 *acres* daquela terra redonda, cuja metade da circunferência é de 50 *pearchs*, e a largura de 16 *pearchs*. (DIGGES, 1605, I, 5, tradução e grifo nosso) [45]

O procedimento de consulta à tabela para se obter a medida de um pedaço de terra circular é o mesmo do caso anterior. Neste exemplo, entretanto, explica que em um pedaço de terra circular com medida de circunferência de 100 *pearchs* e medida de largura (diâmetro) de 32 *pearchs*, a medida da área será obtida em duas etapas. Como a metade de 100, isto é, 50, excede o valor máximo encontrado na margem da tabela, ele orienta buscar primeiro o valor correspondente para 40 *pearchs* e 16 *pearchs* e, em seguida, para os 10 *pearchs* e 16 *pearchs* restantes. A soma dos valores encontrados dará assim a medida da área final desejada.

Leonard observa que, neste caso, ele considerou somente valores inteiros. Porém, na prática, como é frequente encontrar casos em que as medidas não são inteiras, ele orienta que os cálculos sejam feitos da seguinte maneira:

[45] Em inglês lê-se: "*Suppose a peece of land, whereof the compasse is 100 pearches, the breadth 32 pearches, I would know how much Land is in this figure. Enter your Table with halfe the compasse, that is 50. and with halfe the breadth, that is 16. pearches. Because in the Table I cannot finde 50. for the greatest length is 40. (therefore I enter with 40.) and 16. So is found foure Acres. Then I enter againe with 16 pearches remayning, and 16 the breadth as before, that bringeth 1 acre. Now to conclude by addition of 1 and 4 I find five Acres in that round land, whose halfe compasse is 50 pearches, and the breadth 16 pearches.*" (DIGGES, 1605, I, 5)

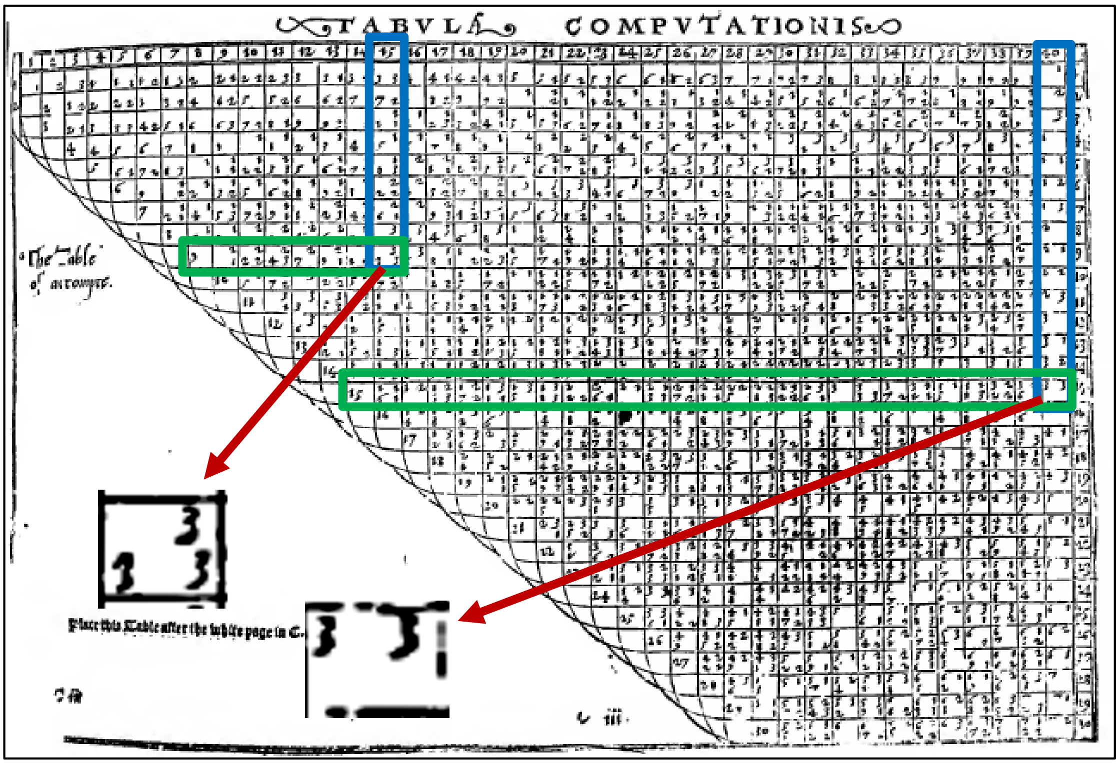
> Para deixar esse assunto claro, tomarei o exemplo dado anteriormente. O número com o qual eu deveria ter entrado em minha tabela era de 49 ½ o outro 15 $\frac{3}{4}$. Eu encontrei primeiro, entrando com 49 e 15 (omitindo as partes excedentes), 4 *acres*, 2 *Roods*, 3 *dayworks* e 3 *pearchs*. Agora, para o aumento das partes dos pearchs deixadas de fora, devo (como eu disse) contar do comprimento na largura e, ao contrário, da largura no comprimento. Metade de 15 $\frac{3}{4}$. são 7 *pearchs* e $\frac{7}{8}$, três quartos de 49 ½ são 37 *pearchs* e $\frac{1}{8}$, que adicionados, fazem 45 *pearchs*. Este adicionado ao número obtido anteriormente traz todo o conteúdo da figura redonda, que é 4 *acres* 3 *roods*, 4 *dayworks*, 3 *pearchs* e 3/8 de um *pearch*, […](DIGGES, 1605, I, 5, tradução e grifo nosso) [46]

Neste exemplo, Leonard supõe uma superfície de terra com forma circular com medida de circunferência de 99 *pearchs* e a metade da medida da largura (raio) de 15 *pearchs* e $\frac{3}{4}$. Orienta que devem ser considerados, primeiramente, os valores inteiros 49 e 15 sem, entretanto, fazer referência que o valor 49 ultrapassa o valor máximo que consta na margem da tabela de dados. Com esses valores, a medida da área encontrada na tabela será de 4 *acres*, 2 *roods*, 3 *dayworks* e 3 *pearchs*. Em seguida, com relação às partes fracionadas, ele orienta o leitor que como a medida da circunferência tem 99 *pearchs* de comprimento, devemos tomar sua metade para poder localizar o valor na tabela, que são 49 ½, o mesmo deve ser feito para o diâmetro, determinar a sua metade, que é 15 $\frac{3}{4}$. Como não é possível encontrar o valor 49 na tabela cujo limite é 40, teremos que encontrar primeiro os valores 40 e 15 e depois a diferença, 49 – 40, ou seja, 9 e 15. Desta forma, os pares serão localizados como podemos verificar na figura 10 a seguir:

---

[46]Em inglês lê-se: "*To make this matter plaine, I will take this last example before. The one number wherwith I should have entred my table, was 49 ½ the other 15 ¾ . I found first by entring with 49 and 15 (omitting the odde parts) 4 Acres, 2 Roods, 3 Dayworks, and 3 Pearches. Now for the encrease of the parts of pearches left out, I must (as I said) recken them of the length in the breadth, and contrari wise them of the breadth in the length. Halfe 15 ¾ is 7 Pearches, and 7/8. Three quarters of 49 is 37 Pearches, 1/8. Which added, makes 45 Pearches. This adioyned to the number afore gotten, bringeth the whole contente of the round figure, which is 4 Acres, 3 Roods, 4 Dayworks, 3 Pearches, and 3/8 of a Pearch, [...]*" (DIGGES, 1605, I, 5)

Figura 10 - Tabela de dados, consulta para os valores 40 e 15, e 9 e 15



Fonte: Digges (1605)

Ao adicionarmos os valores encontrados, teremos 3 *acres*, 6 *roods*, 3 *daywork* e 3 *pearch*.

$$\boxed{\begin{array}{cc} & 3 \\ 3 & 3 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ & \end{array}} = \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{array}}$$

Mas, como ele afirmara no capítulo um, é necessário converter 4 dos 6 *roods* em 1 *acre*, resultando em 4 *acres*, 2 *roods*, 3 *daywork* e 3 *pearch*, que chamaremos de resultado A.

$$\boxed{\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}} \text{ Resultado A}$$

Agora, considerando "as partes excedentes", que foram omitidas, o ½ e os $\frac{3}{4}$, devemos calcular a metade da medida da largura e $\frac{3}{4}$ de 49 ½:

$$\tfrac{1}{2} \text{ de } 15\,\tfrac{3}{4} = 7\,\tfrac{7}{8} \qquad \text{e} \qquad \tfrac{3}{4} \text{ de } 49\,\tfrac{1}{2} = 37\,\tfrac{1}{8}$$

Adicionando os resultados $7\frac{7}{8}$ e $37\frac{1}{8}$ chegamos em 45 *pearchs*, novamente utilizando as conversões citadas no capítulo um, podemos converter dos 45 *pearchs*, 40 em 1 *rood* e 4 em 1 *daywork*, assim:

$$45\ \textit{pearchs} \rightarrow \boxed{\begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & 1 \end{array}}$$

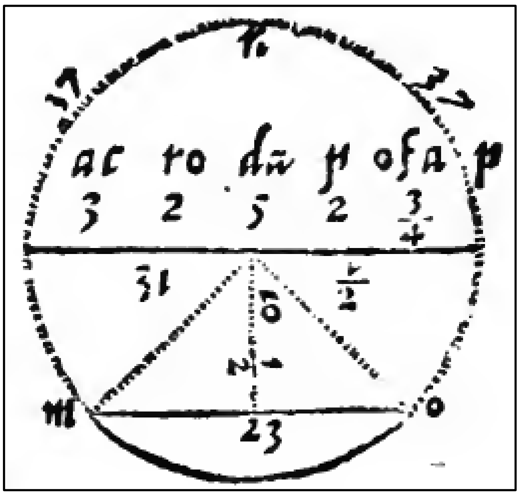
Ao somar essas medidas com o resultado A, temos:

$$\boxed{\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{cc} & 1 \\ 1 & 1 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{array}}$$

Em seu resultado Leonard chegou a 4 *acres* 3 *roods* 4 *dayworks* 3 *pearchs* e 3/8 de um *pearch*, uma diferença em *pearchs* que provavelmente é uma aproximação por conta do valor da medida do comprimento da circunferência, embora ele não faça referência a isso.

Leonard prossegue mostrando como é possível ainda calcular a medida da área da superfície do semicírculo, de porções e partes do círculo e de figuras mistas, no caso de quadriláteros e círculos. Para calcular, por exemplo, a parte do círculo localizada abaixo do triângulo (figura 11), Leonard orienta o leitor a calcular primeiro a parte delimitada pelo arco “mno”, cuja metade de sua medida é 37 e a medida do diâmetro é 31½, cuja metade é 15 ¾. Com base nesses dados, ao consultar a tabela, obtém-se 3 *acres*, 2 roodes, 5 daywoorkes, 2 *pearchs* e ¾ de um *pearch*. Feito isso, em seguida, é preciso calcular a medida da área do triângulo pela “regra de triângulos”, já explicada anteriormente, e da medida da área total do círculo. O valor da medida da área procurada é obtida subtraindo-se essas duas medidas de área.

Figura 11 - Cálculo da medida de área de partes do círculo



Fonte: Digges (1605)

Nos capítulos seguintes Leonard põe em prática as orientações dadas, para o cálculo da medida de área em diferentes tipos de terrenos. Além disso, instrui como medir a área da superfície de pedaços de madeira com variados formatos, fornecendo outras três tabelas (vide Anexos B, C e D) que auxiliam na conversão de unidades e também no cálculo de raízes. Na leitura dos capítulos subsequentes notamos que Leonard se preocupava em encontrar meios para medir diversos formatos de materiais de pequenas dimensões. Assim, além de procedimentos para medir terrenos, ele procurou orientar o leitor a obter medidas de das dimensões de pequenos pedaços de madeira e metais, sempre recorrendo ao uso de tabelas e a cálculos com submúltiplos do *pearch*, como pés e polegadas. Não iremos nos deter nas explicações fornecidas para estes cálculos por não se relacionarem com o objetivo de nosso estudo.

Podemos dizer que o *Tectonicon* traz diferentes situações e exemplos em que o conhecimento geométrico é mobilizado na prática. Contudo, diferentemente do que hoje estamos acostumados, calcular a medida de área não era uma tarefa simples. Embora o agrimensor soubesse como calcular a medida da área de um triângulo, ou mesmo de um círculo, o uso (ou talvez aplicação) desse conhecimento não ocorria de forma imediata. Em *Tectonicon*, não há menção do uso de algoritmos ou fórmulas, como as que hoje conhecemos, para efetuar os cálculos, nem de métodos ou procedimentos que permitiam, por exemplo, encontrar a medida da altura de um triângulo e medi-la. Como vimos, o *Tectonicon* apresenta diversos indícios de que os agrimensores utilizavam outras estratégias (e, portanto, outros conhecimentos) para obter tais medidas, próprias da tradição do saber fazer matemático de uma época, e os instrumentos desempenhavam um papel ativo na obtenção dessas medidas.

3 INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

Devemos ter em conta que todo o processo de construção e uso de instrumentos de medida mobiliza diversos conhecimentos matemáticos. Esta mobilização tece uma complexa rede de relações entre a ciência, as matemáticas, as artes e a sociedade em que estão inseridos.[47] Assim, compreender esse processo, desvelar a articulação de conhecimentos entre o saber e o fazer pode nos dar indícios da produção de conhecimento em um determinado período.

Na primeira metade do século XVI, a agrimensura era realizada com instrumentos simples como a vara ou a corda que mediam de forma direta comprimentos. Nesse processo, o olhar treinado do agrimensor desempenhava um papel fundamental e os cálculos envolvidos eram relativamente simples.[48] Ou seja, além do conhecimento matemático, o agrimensor necessitava de um conhecimento que era próprio de seu ofício.

Não bastava apenas saber calcular e medir, era preciso, também, saber escolher e posicionar o instrumento de forma a obter a medida com maior precisão, superar as dificuldades que uma medição em campo oferece, como desníveis no terreno e selecionar o instrumento mais adequado para cada situação. Embora o desenvolvimento na fabricação e uso de instrumentos tenha sido marcante no decorrer do século XVI e o instrumento neste período se tornasse um elemento central para a matemática prática, pois além de solicitar conhecimentos matemáticos para sua fabricação, seu uso também os requeria, nem sempre isso era explicitado nos tratados e isso se evidencia no decorrer do texto de *Tectonicon*, como veremos a seguir.

[47]Vide estudo de Saito (2013b)

[48]A esse respeito consulte Bennett (1991), McRae (1993) e Richeson (1966)

3.1 Os instrumentos matemáticos em *Tectonicon*

O papel dos instrumentos de medida durante o século XVI e início do XVII, provocou muitos debates. Para alguns estudiosos, o uso de um instrumento era um fator determinante para consolidar-se como um praticante das matemáticas, já para outros não passavam de meios para "exibição de truques". Além disso havia a questão de considerar se o uso de instrumentos levava a uma compreensão das matemáticas ou apenas fornecia respostas sem indicar de onde procediam (HIGTON, 2001).

Em meio a esses debates estavam os fabricantes de instrumentos que faziam parte de uma classe de artesãos que começava a se estabelecer em Londres. A partir do século XV, entre os refugiados religiosos, vieram da França e da Holanda fabricantes de instrumentos altamente qualificados, que para exercer seu ofício precisavam se registrar nas corporações de ofício ou guildas[49] muitas remanescentes do período medieval (TURNER, 1991, 1995). Uma característica dessas corporações era manter os segredos de ofício, passados de mestre para aprendiz. Mas nesse período, como já dissemos anteriormente, os conhecimentos matemáticos passaram a ser cada vez mais necessários no cotidiano dos ingleses. A esse respeito, Harkness (2007) observa que, após o lançamento da tradução de *Os Elementos* de Euclides feita por Henry Billingsley, professores, autores e fabricantes de instrumentos passaram a disseminar aos comerciantes e outros artesãos, os benefícios que uma instrução matemática traria. O objetivo era mostrar para os londrinos, que só tinham literatura que tratava da aritmética, como a ampliação do estudo das matemáticas os habilitariam na resolução de problemas e tornaria possível a precisão nas soluções encontradas. Entre essas soluções estavam as relacionadas às artes da navegação, militar e agrimensura.

Com as grandes navegações, os instrumentos para a localização em alto mar se tornaram muito populares. Durante o reinado de Henrique VIII, era praticada a

[49]As guildas eram associações que surgiram em torno do século XII e permaneceram ativas até o século XV, formadas por artesãos, tinham como objetivo proteger seus segredos de ofício que eram transmitidos de geração para geração com rígidos padrões para o ensino e aprendizado. Para mais informações consulte Belfanti (2004).

chamada navegação por cabotagem, que se faz em águas costeiras ou em águas marítimas que mantém a terra à vista, ou seja, é aquela realizada entre distâncias relativamente curtas. Os conhecimentos para esse tipo de navegação não eram suficientes para as necessidades que começavam a se fazer presentes na época. Os marinheiros precisavam se localizar em alto mar e ter como ponto de referência à costa nessas condições não era possível. Assim, os instrumentos que poderiam fornecer a localização de sua embarcação em alto mar, com a observação das estrelas, se tornavam imprescindíveis, como também saber manuseá-los (ASH, 2004).

Na artilharia a introdução da pólvora e a capacidade de fabricação de armamento pesado em apenas uma etapa de fundição em metal, proporcionou uma artilharia mais longa e com capacidade de fogo mais precisa, o canhão passou a ser muito utilizado e se tornou uma arma determinante para a obtenção de resultados favoráveis em conflitos militares. O desenvolvimento de carruagens que se moviam conforme a necessidade de direção, solicitava a previsão e cálculo de medidas de distâncias para atingir os alvos inimigos. Em todas estas mudanças o conhecimento matemático, em especial da geometria utilizada nos instrumentos matemáticos, se fazia necessário.[50]

Com a descoberta e conquista de novos territórios, o estabelecimento e demarcação de fronteiras se tornava urgente e com isso o cálculo de medidas de distâncias e de áreas era uma tarefa cada vez mais solicitada. Além disso, com a dissolução dos monastérios centenas de propriedades foram liberadas do poderio da igreja e as dispustas por propriedades passaram cada vez mais a ser decididas nos tribunais de Londres. Os adminstradores eram substituidos por advogados ou contabilistas provindos da corte e o agrimensor era um trabalhador temporário mais especializado que trazia para a propriedade novos padrões de conhecimento e de organização (MCRAE 1993).

Os praticantes das matemáticas responderam a estas demandas elaborando técnicas, projetando novos instrumentos e publicando tratados. Entre eles, Leonard

[50]Estudos a esse respeito podem ser consultados em Johnston (1995) e Walton (2000)

segundo Harkness (2007) foi um dos autores que direcionou seus trabalhos aos instrumentos matemáticos e aos conhecimentos geométricos necessários para sua fabricação e uso. Os instrumentos matemáticos são abordados por Leonard a partir do capítulo doze de *Tectonicon*. Ele apresenta a régua de carpinteiro (*carpenters ruler*), o esquadro de carpinteiro (*carpenters squire*) e o báculo (*cross-staff*)[51].

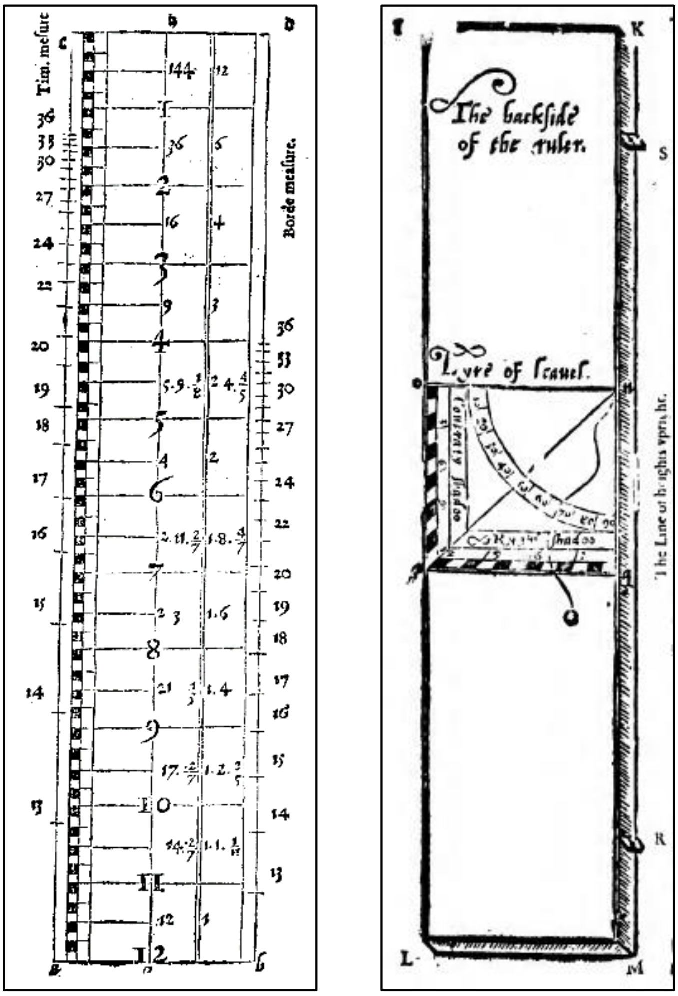
O autor primeiro descreve como construir o instrumento e na sequência como utiliza-lo fornecendo exemplos e, por vezes, figuras que explicam o uso e como são feitos os cálculos para determinar a medida.

Uma demanda atendida pelo tratado *Tectonicon* é quanto a como saber o nivelamento de um terreno em relação a um determinado ponto de observação, já que nos novos territórios descobertos, como os países baixos, e nos pântanos ingleses ter água corrente era de grande importância econômica, e para isso agrimensores com seu conhecimento eram solicitados no auxílio para delinear cursos d'água, construir diques e comportas de contenção para resgatar terras para o plantio.

O instrumento apresentado no tratado que atenderia a essa finalidade é a régua de carpinteiro (*carpenters ruler*), citada no capítulo doze de *Tectonicon* (figura 12), Leonard explica que é um instrumento já conhecido pelos artesãos e que não vai se deter em muitas explicações de como utiliza-la, vai apenas explicar como produzi-la e como nomear suas escalas, tanto na parte da frente como na parte de trás da régua.

[51]Leonard Digges se refere ao instrumento matemático báculo como *profitable staff*, ao invés de *cross-staff* como ficou conhecido na época.

Figura 12 - Régua de carpinteiro, partes da frente e de trás



Fonte: Digges (1605)

Leonard nomeia os cantos (vértices) da régua como “abcd”, explica que têm doze polegadas de comprimento, duas polegadas de largura e um quarto de polegada de espessura. Além disso, observa que na parte da frente o instrumento está dividido em doze partes iguais, chamadas polegadas, estas por sua vez estão divididas em duas partes iguais, estas metades divididas em dois quartos e estes, por sua vez, divididos em quatro ou duas partes. Para nomear cada uma das divisões Leonard orienta a consultar a tabela de medida de madeira (Anexo C), citada no capítulo dez. Com esta régua é possível medir pequenos comprimentos e larguras de toras de madeira por exemplo, utilizando as unidades de medida, pés e polegadas.

Para a parte de trás da régua, o autor orienta que na metade da medida do comprimento da régua deverá ser colocado um esquadro geométrico[52]. Nomeia seus vértices de "n o p q" e explica que todas as linhas "n o", "o p", "p q" e "q n" devem ter a mesma medida do comprimento e que este deve ter a mesma medida que a largura da régua. Nesse instrumento, deverá ser traçada uma linha de "n" até "p" que será chamada de "linha de altura", a linha "o n" é a linha de nível, a linha "q n" a linha de altura vertical. Orienta a traçar com o compasso com centro em "n" uma porção de uma circunferência que será o quadrante e deverá ser dividido em noventa partes iguais, que serão chamados de graus. As linhas "o p" e "p q" serão as escalas, a primeira denominada "sombra contrária" e a segunda "sombra reta" e poderão ser divididas em 12, 60 ou 100 porções iguais, notadamente estas escalas são lineares. Finaliza explicando que poderão ser fixadas quando necessário duas vistas de madeira que ele denomina de "R" e "S".

Os quatro capítulos seguintes são dedicados a mostrar como utilizar principalmente a parte de trás da régua que contém o esquadro geométrico. É com essa parte de trás da régua que poderá ser verificado quando um terreno está nivelado, e assim, quando podemos verificar se a água proveniente de uma fonte ou cabeceira pode ser conduzida a outro terreno e, como por meio da ideia de proporcionalidade, podemos determinar a medida da altura de um objeto.

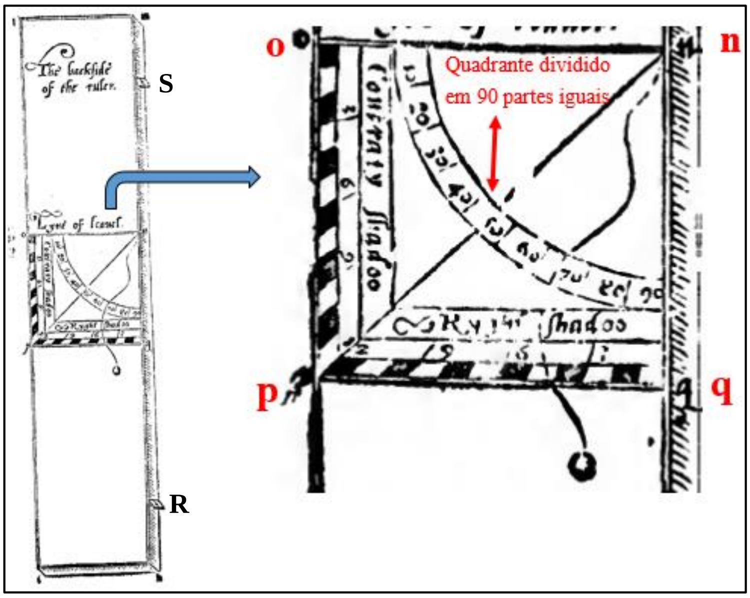
Vale ressaltar que embora o esquadro geométrico possua uma escala angular, Leonard não faz referência a ela. A forma de apresentar a medição angular é um conhecimento que é tratado de forma distinta nos tratados. Bennet (1991) destaca que os estudiosos matemáticos e muitos dos empreendedores fabricantes de instrumentos estavam promovendo a geometria como a base da agrimensura e o uso do ângulo como forma de medição, em vez da medição linear, como uma técnica básica de medida. Essa mudança na ênfase do trabalho com a escala angular é notória nos tratados de Leonard, pois em *Tectonicon* encontramos apenas essa breve referência

---

[52]Em *Tectonicon*, observamos que o autor chama o instrumento localizado na parte de trás da régua de carpinteiro de quadrante geométrico, mas na verdade está se referindo ao que na época era denominado de esquadro geométrico, inclusive em *Pantometria*, Leonard, explica no primeiro livro, a construção e uso dos dois instrumentos. Do esquadro geométrico no capítulo vinte e dois e do quadrante geométrico no capítulo sete. Assim, doravante trataremos por esquadro geométrico quando o autor no texto citar quadrante geométrico.

ao uso da escala angular presente no instrumento esquadro geométrico, fornecida como vimos anteriormente como uma breve orientação para a construção desse instrumento (figura 13),

Figura 13 - Detalhes do esquadro geométrico



Fonte: Digges (1605, destaque nosso)

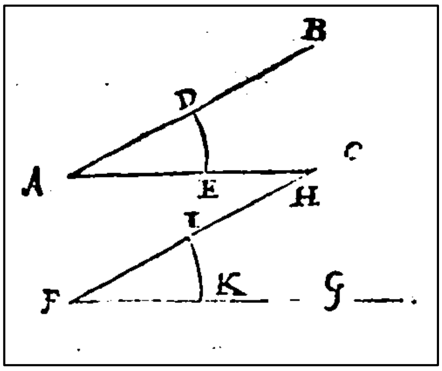
Somente em *Pantometria*, no capítulo vinte e dois do primeiro livro, é que serão fornecidos maiores detalhes para a fabricação desse instrumento. Além disso, neste tratado encontramos referências a ângulos em sete capítulos desse primeiro livro denominado *Longimetria*. No capítulo cinco, por exemplo, Leonard fornece as explicações de como traçar um ângulo “igual” a outro:

> Suponha BAC, o ângulo cuja similar ou igual que eu desejo, DE, o arco desenhado com um pé do meu compasso, enquanto o outro permanece em A, o compasso imóvel, eu defino um pé na linha FG, traçando com o outro o arco KI, isto feito, abro meu compasso à distância de DE, e colocando um pé em K, com o outro eu cruzo o arco, em que, eu finalmente, coloco a régua para I e F, desenho a linha FH e assim fiz o ângulo HFG. igual ao primeiro ângulo BAC. (DIGGES, 1571, I, 5, tradução nossa) [53]

[53]Em inglês lê-se: “*Suppose BAC, the Angle whose like or equall I desire, DE, the Arcke drawne with onefoote of my compasse, whyle the other remained in A, the compasse immooveable, I set one foote in the line FG, drawing with the other the Arke KI, This done, I open my compasse to the distance of DE, and placing one foote in K, with the other I crosse the Arcke, in I, finally, laying the Ruler to I and*

Estas orientações são para construir um ângulo congruente a outro, com régua e compasso, quando o autor cita o termo “pé” está se referindo às pontas do compasso, tanto a ponta seca como a ponta que contém o grafite para o traçado dos arcos. Junto com as orientações fornece a figura 14.

Figura 14 – Traçado de ângulos congruentes



Fonte: Digges (1571)

No capítulo sete o autor discorre sobre como produzir um quadrante geométrico, que também utiliza a escala angular. Os demais capítulos em *Pantometria* que abordam a medida angular são predominantes no primeiro livro, e são os que tratam da construção de outros instrumentos que utilizarão essa forma de medir e também nos que mostram como esses instrumentos serão utilizados.

Essa escasses de trabalho com escalas angulares em *Tectonicon*, além de mostrar a mudança no uso de conhecimentos matemáticos para aplicações práticas, também é explicada por Saito (2014) que destaca que alguns dos instrumentos matemáticos dessa época utilizavam as escalas angulares, porém não era comum, já que o uso das relações trigonométricas ainda não tinha se difundido e, além disso, também havia a dificuldade da divisão de um arco de círculo em partes iguais, esse conhecimento era mais elaborado que o traçado de escalas lineares e a instrução matemática dos fabricantes de instrumentos ainda não estava familiarizada com esse conhecimento. A este respeito Cooper (1993) destaca que ao olhar os tratados da época, fica claro que, embora o conhecimento matemático estivesse em plena

---

F, I drawe the line FH, and thus have I made the Angle HFG. equall to the first Angle BAC.” (DIGGES, 1571, I,5) expansão, artesãos e mecânicos em geral encontravam nos tratados para seus ofícios um texto denso e muitas vezes, para eles, incompreensível, mesmo sendo escritos em inglês. Segundo Bennet (1991) a escala angular pertencia às artes matemáticas tratadas em Astronomia no *Quadrivium*, e ao leva-la para a agrimensura, somente aqueles que conheciam as artes do *Quadrivium* é que deteriam esse conhecimento, e assim os fabricantes de instrumentos para a agrimensura dependeriam deles para obtê-lo.

O esquadro geométrico que Leonard orienta a posicionar na parte de trás da régua de carpinteiro é utilizado somente como um indicador da posição do fio de prumo em relação a um objeto observado, no capítulo quinze de *Tectonicon*, fornece as orientações quanto a como utilizá-lo para verificar se um objeto está no mesmo nível do observador ou não:

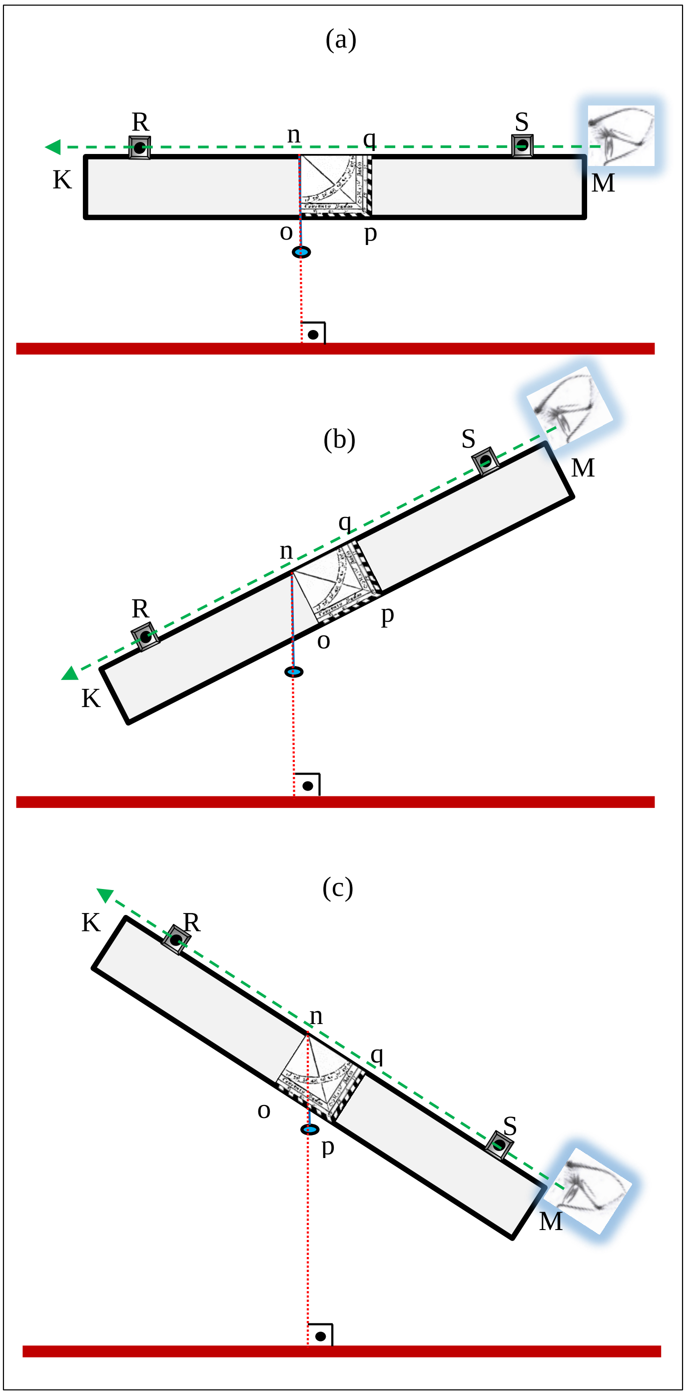
> Cabe a você lançar o olhar a olhar lançar suas vistas. r.s. colocado na espessura ou na linha de k.m. um fio fino e despencar caindo em liberdade fora do centro. n. Se este prumo e a linha perseguir precisamente sobre a linha de nível (que é n.o.) tudo o que vós veis através das vistas: está nivelado com seu olho: caso contrário, a coisa que estais olhando até agora não está nivelada, mais ou menos [em relação] à altura ou nível de seu olho: mais, se a queda do prumo estiver longe de você: menos, caso contrário. (DIGGES,1605, I, 15, tradução nossa) [54]

Nesta orientação Leonard, diz que ao olhar através das vistas “R e S”, se o fio de prumo “cair” precisamente sobre a linha “n o”, tudo o que é visto está nivelado com a posição do observador (figura 15a), se “cair” mais afastado do observador, o que estiver sendo observado estará abaixo do nível da posição do observador (figura 15b) e caso contrário, se “cair” menos afastado (figura 15c) estará nivelado acima da posição do observador.

---

[54] Em inglês lê-se: “*It behoveth you to look throw your sights. r. s. placed in the thickness or line k.m. a fine thread and plummet falling at liberty out of the centre. n. If this plummet and thread chaunce precisely on the line of level (which is n.o.) whatsoever ye see throw the sights, is level, with your eye if other wise, the thing that ye look unto is not level, either more or less the the height or level of your eye: More, if the plummet fall to you ward: less, if contrary.*” (DIGGES, 1605, I, 15)

Figura 15 - Níveis com a régua de carpinteiro



Fonte: Produção nossa

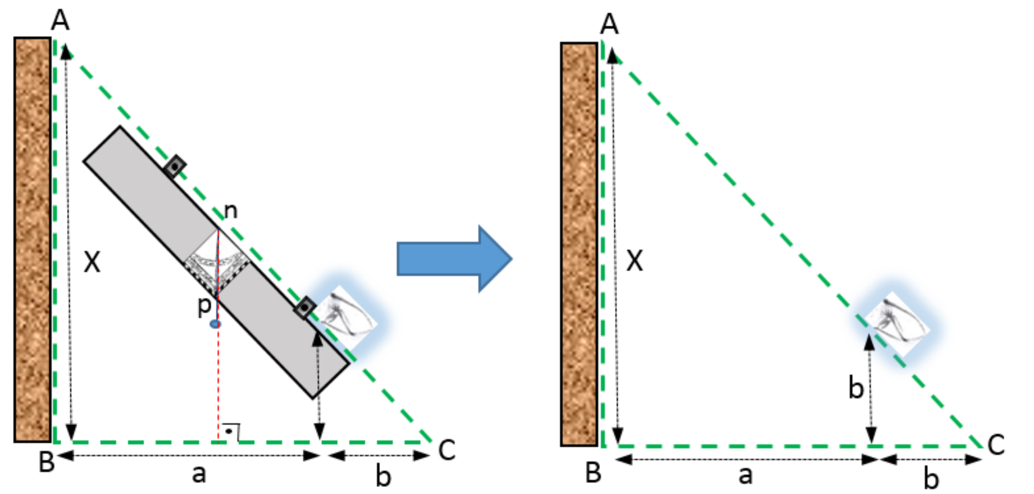
No capítulo dezesseis Leonard propõe utilizar a parte de trás da régua de carpinteiro para determinar a medida da altura de um objeto, explica sua utilização, da seguinte forma:

> Quando assim o fio de prumo cair justamente sobre a altura que é n p: a altitude ou altura que vedes é a mesma distância a partir do meio de seu pé para a parte baixa diretamente sob o topo, [é] igual à da sua posição, acrescentando a altura de seu olho para baixo. (DIGGES, 1605, I, 16, tradução nossa)[55]

Ao analisarmos essa orientação, notamos que o autor não fornece nenhuma justificativa matemática, mesmo porque não era necessária para a atividade do agrimensor, já que para sua prática ele apenas precisava saber como obter a medida da altura. Mas, se buscarmos a justificativa matemática do procedimento observamos que recorre à ideia de proporcionalidade, fundamentada em uma semelhança de triângulos formados pelo posicionamento do instrumento, especificamente em um ângulo de 45º, como podemos observar na figura 16. Nela utilizamos a linguagem matemática moderna para explicar o que diz seu texto,

Figura 16 - Justificativa matemática – medição de altura com a régua de carpinteiro

Considerando X a medida da altura que desejamos obter, segundo o autor se o fio de prumo cai em "n p", ele é perpendicular ao chão e paralelo ao objeto que se deseja obter a altura, assim podemos considerar que o triângulo ABC é isósceles, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto e $\hat{A} \cong \hat{C} \cong 45°$, assim o lado AB será congruente ao lado BC, ou X = a + b



Fonte: Produção nossa

Se o fio de prumo não cair em "np", o triângulo formado não será isósceles e não será possível afirmar a medida da altura recorrendo à propriedade do triângulo

[55]Em inglês lê-se: "*When soever the threde and plummet do chaunce iustly on the height whiche is n p: the altitude or height that ye see is even with the distaunce from the middle of your fote to the nether parte directly under the toppe equal with your standynge, addynge the height of your eye downwarde.*" (DIGGES, 1605, I, 16)

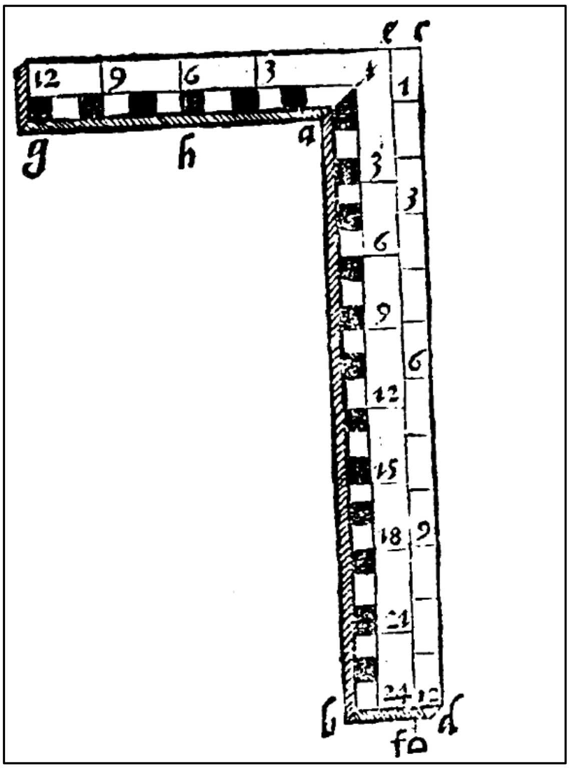
isósceles. Em uma situação hipotética, seria possível encontrar a medida da altura se o ângulo de inclinação fosse identificado e, a partir dele, o leitor recorreresse a relações trigonométricas para a obtenção da medida da altura, mas Leonard não fornece nenhuma indicação para isso. Ainda para encontrar a medida das alturas, no capítulo dezoito e dezenove fornece indicações, ajustando o instrumento em duas posições em relação ao que quer medir. A partir disso, onde o fio de prumo se posicionar nas escalas lineares “o p” e “p q”, Leonard explica que a medida da altura poderá ser calculada proporcionalmente às medidas encontradas nessas escalas. Embora não explique porque pode ser feito desta forma, observamos que novamente ele está usando a ideia de proporcionalidade em triângulos semelhantes.

Essa ideia de proporcionalidade também é utilizada quando o autor aborda o uso do esquadro de carpinteiro (figura 17) no capítulo vinte. Primeiro ressalta que não colocará a produção exata deste instrumento, já que é bem conhecido, assim na sequência fornece as medidas do instrumento, tendo um lado com dois pés e o outro com um pé. O lado maior, que Leonard denomina por “a b” deve ser dividido em 24 partes iguais e cada uma delas dividida em 10 minutos, a parte externa que chama de “c d” deve ser dividida em 12 partes iguais, cada uma destas dividida em 6 partes e estas por sua vez divididas em 10 minutos[56]. Um fio de prumo “cai” de “e” para “f” paralelo a “c d” e ”a b”. O autor ainda explica que poderão ser colocadas vistas móveis em uma das hastes do esquadro, para desta forma poder encontrar a medida das alturas, embora não dê orientações sobre o uso deste instrumento para essa finalidade.

---

[56]O autor faz referência à unidade de medida “minutos” como uma unidade de medida para uma escala linear, não fornece maiores explicações de como é estabelecida, e embora hoje sabidamente essa unidade de medida faça parte dos submúltiplos do grau, que é uma unidade de medida angular, não nos deteremos em aprofundar esta questão por não fazer parte dos objetivos de nosso trabalho.

Figura 17 – Esquadro de carpinteiro



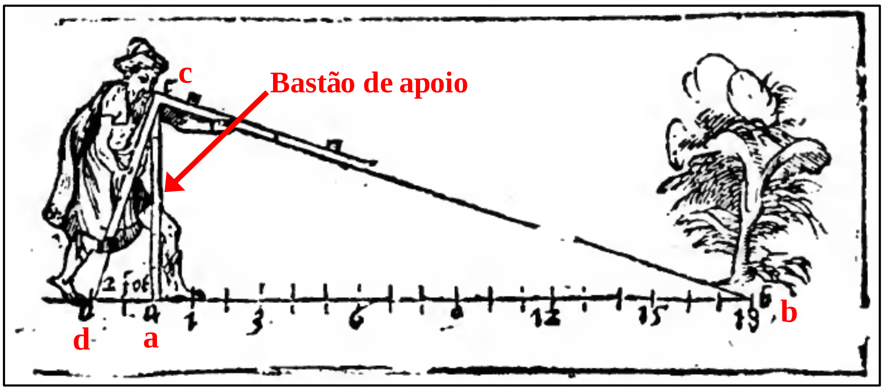
Fonte: Digges (1605)

No capítulo seguinte orienta a como utilizar o esquadro para medir um comprimento em um terreno plano, explicando que será necessário um bastão, no qual ficará apoiado o esquadro de carpinteiro, para que assim seja possível avistar através das vistas colocadas no esquadro o ponto mais distante da longitude que se deseja medir, e na sequência fornece uma figura ilustrativa (figura 18).

> O bastão ac nesta figura é imaginado [com] 6 pés, e o espaço ad [com] 2 pés, considerando agora que 6, o comprimento do bastão contém o 2 três vezes, portanto a longitude desejada, a b forçadamente deve conter três vezes o bastão (que o bastão é de 6 pés) que fazem 18 pés. (DIGGES, 1605, II, 21, tradução nossa)[57]

[57] Em inglês lê-se: "*The staff .a.c. in this figure is imagined 6. foote, and the space a.d. 2 foote. considering now that 6, the length of the staffe containeth 2. thrice, therefore the longitude desired, .a.b. of force must containe three times the staffe (which staffe is 6. foote) that maketh 18. foote.*" (DIGGES, 1605,II, 21)

Figura 18 - Esquema explicativo para do esquadro de carpinteiro na medição de larguras

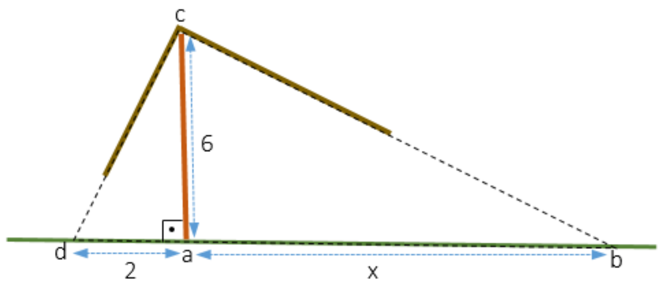


Fonte: Digges (1605, destaque nosso)

Observamos que para efetuar a medição com o esquadro de carpinteiro, da distância entre o observador e um ponto não muito distante, é necessário um bastão de apoio (destaque na figura 18), que Leonard em seu exemplo explica que terá 6 pés de comprimento, a partir disso o esquadro funcionará como um instrumento auxiliar para localizar o outro extremo da distância que se deseja medir. Como foi construído com um ângulo reto também possibilita, por meio dele, estabelecer as relações de proporcionalidade entre os valores das medidas “ad” e “ab” em relação à medida do bastão, como podemos verificar na justificativa matemática em linguagem moderna da figura 19 em que utilizamos os valores fornecidos no exemplo dado por Leonard.

Figura 19- Justificativa matemática – medição de distância com o esquadro de carpinteiro

Como o esquadro de carpinteiro possui o ângulo reto no vértice "c", e o bastão é posicionado perpendicularmente em relação ao chão, é possível estabelecer a relação de semelhança entre os triângulos formados, "adc" e "acb". Considerando x a medida da distância que desejamos obter, como o bastão "ac" mede 6 pés e a distância "ad" mede 2 pés, então $\frac{2}{6} = \frac{6}{x}$ *ou seja x = 18*



Fonte: Produção nossa

Também nestas orientações Leonard segue a ideia da proporcionalidade em triângulos semelhantes, porém faz uma ressalva quanto ao uso deste instrumento,

> Mas a experiência quiz me fazer confessar, que o esquadro não é conveniente para qualquer longa distância, mas sim o Instrumento Geométrico (cuja fabricação e uso vós podeis observar no tratado seguinte), a menos que vós ascendais a alguma árvore ou torre para sua ajuda, no lugar de seu bastão, para que o comprimento deva ser conhecido. (DIGGES, 1605, I, 21, tradução nossa) [58]

Observamos que Leonard reconhece a limitação do esquadro de carpinteiro para grandes distâncias e afirma que com o instrumento geométrico, que abordará no tratado que segue, isso é possível. Este instrumento ao qual o autor se refere é o báculo. Sua fabricação e uso são explicados em um pequeno tratado que Leonard acrescentou a *Tectonicon*, *A little treatise* como citado anteriormente.

[58]Em inglês lê-se: "*Ye experience willeth me this to confesse, that the squire is not conveniente for any long distance, but the Instrument Geometricall (whose making and use ye may perceive in the treatise following) unlesse ye ascend some tree or turret for your ayde, which length knowne, shall stand in stead of your staffe*." (DIGGES, 1605, I, 21)

3.2 O báculo

O báculo foi um instrumento muito popular e controverso durante o século XVI e início do XVII. Muitos o elogiavam e outros o criticavam. Segundo Roche (1981) era versátil, econômico em sua fabricação, fácil de construir, desmontar e transportar. Sua forma de uso também era de fácil assimilação, recorria a conhecimentos matemáticos muito difundidos na época como a proporcionalidade e semelhança de triângulos. Mas haviam aqueles que diziam que não era um instrumento preciso na determinação de medidas e alegavam também que para que fosse possível utilizá-lo, era necessário saber construí-lo respeitando as especificações de seus componentes e o posicionamento dos mesmos, e na época eram poucos os que tinham acesso a esses saberes.

Harkness (2007) explica que o matemático inglês que se dedicou a estudar os instrumentos matemáticos, Thomas Hood (1556-1620), em sua publicação de agrimensura, chamou a atenção dos leitores para a importância de posicionar corretamente o báculo em relação ao que se desejava medir e também ressaltou que mesmo os agrimensores experientes poderiam não prestar atenção aos erros que cometeriam se efetuassem uma medição com o instrumento visualizando com apenas um dos olhos o objeto a ser medido.

Segundo Roche (1981) há referências literárias a respeito do báculo na Inglaterra que indicam Nicholas Kratzer (1487-1550), matemático alemão, astrônomo do rei Henrique VIII, o responsável por trazer para a Inglaterra um manuscrito que descreve um bastão de agrimensor. Porém, segundo o autor, as referências ao instrumento só se tornaram frequentes após o retorno de John Dee em 1547 de Louvain, quando trouxe com ele diversos instrumentos inclusive um bastão astronômico de bronze. Ainda segundo Roche, foi em *Tectonicon* que Leonard em 1556 publicou a primeira descrição do instrumento para a agrimensura em inglês.[59]

---

[59] A esse respeito consulte tambémTurner (2003)

O design do báculo foi aperfeiçoado na Inglaterra, sendo muito usado na navegação e na astronomia, pois poderia ser facilmente aumentado para obter uma melhor precisão na leitura de suas escalas na observação astronômica e, no mar, oferecia menor resistência ao vento em relação ao astrolábio e quadrante com as mesmas dimensões. Inclusive, segundo Roche (1981), em 1573 Thomas Digges publicou em latin um trabalho que aborda o aprimoramento do bastão astronômico.

De acordo com Roche (1981), o báculo teve diferentes denominações, e na Inglaterra do período elisabetano não tinha uma denominação fixa definida, era chamado de “bastão astronômico” (*astronomer’s staff*), “haste do agrimensor” (*surveyor’s cross-staff*) e “bastão marítimo” (*sea staff*), expressões utilizadas para suas respectivas especialidades, cada qual demandando diferentes dimensões, graduações, materiais e peças complementares, bem como, diferentes métodos de uso para o instrumento. Em meados do século XVI, ele se tornou conhecido como “radius astronomicus”, e na agrimensura segundo o autor,

> O báculo do agrimensor variou de 3 a 6 pés em comprimento, e geralmente tinha apenas uma peça cruzada. Quando a forma primitiva deste instrumento primeiro apareceu no século XV, ele ficou conhecido como o “baculus geometricus” ou “baculus de Jacob”. Muitas modificações foram introduzidas no século XVI, e cada desenhista tendia a inventar sua própria descrição. Contudo, o nome “bastão de Jacob” continuou a ser frequentemente usado para todas as formas de instrumento de agrimensura até bem dentro do século XVII. (ROCHE, 1981, p.3, tradução nossa)[60]

Em *Tectonicon*, como vimos nos instrumentos apresentados, nem a régua, nem o esquadro de carpinteiro, possibilitavam obter medidas de larguras e comprimentos de superfícies extensas, segundo Leonard, outro instrumento seria mais apropriado, o (*profitable staff*).

Como apontamos anteriormente com a régua de carpinteiro, era possível obter a medida de pedaços de madeira e metal, ou seja, medidas de pequenas dimensões.

---

[60]Em inglês lê-se: “*The surveyor’s cross staff varied from about 3 to 6 feet in length, and generally had only one cross-piece. When the primitive form of this instrument first appeared in the fifteenth century, it was known as the ‘baculus geometricus’ or ‘baculus Jacob’. Many modifications were introduced in the sixteenth century, and each designer tended to invente his own description. However, the name ‘Jacob’s staff’ continued to be frequently used for all forms of the surveying instrument until well into the seventeenth century.*” (ROCHE, 1981, p.3)

Além disso, ela permitia verificar o nivelamento de terrenos e a medida da altura de objetos, mas sempre de pequenas dimensões. Já o esquadro de carpinteiro, Leonard explica que era apropriado para medir apenas pequenas distâncias em terrenos planos.

Dessa forma, pela facilidade de manuseio e transporte o báculo servia para os propósitos mais importantes do agrimensor que eram a mensuração de terrenos e propriedades de terra, precisando para isso se deslocar em campo percorrendo por vezes grandes distâncias para obter suas medições e com elas determinar as medidas de áreas de superfícies.

Em *Tectonicon* Leonard dedica a segunda seção, que chamamos de *A little treatise* para descrever a fabricação e o uso do báculo. Já em seu título, conforme já mencionamos, especifica que serão os medidores de terra, os carpinteiros e os artesãos que utilizarão este instrumento, e em uma breve carta ao leitor se dirige a eles destacando o instrumento como esplêndido, universal e agradavelmente útil e acrescenta:

> [...] vou deixar de tratar de sua ampla utilização e melhor forma de fabricá-lo e vou defini-lo adiante em poucas palavras: ou seja, de forma suficiente para os afazeres dos medidores de terras, ou para o propósito dos carpinteiros […] (DIGGES, 1605, II, carta ao leitor, tradução nossa).[61]

Assim, o autor justifica a brevidade de seu texto em relação à utilidade do instrumento e aproveita para ressaltar que o conhecimento em Geometria pode ser útil aos artesãos que utilizarão o báculo.

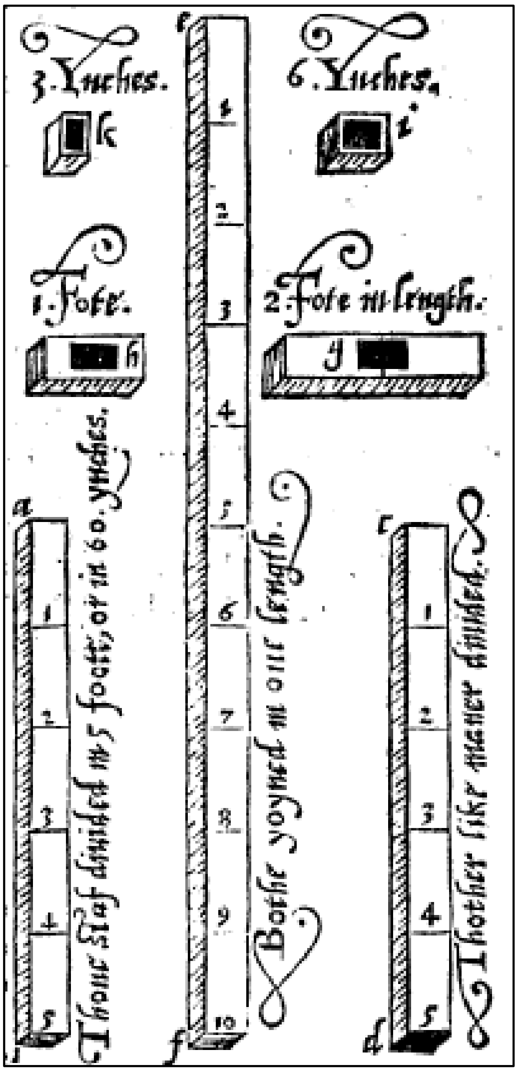
3.2.1 Construção e funcionamento

Após a breve carta ao leitor, Leonard inicia o tratado com orientações a respeito da constituição do báculo. Amparado por uma figura com as peças do instrumento (figura 20), explica que uma parte é composta por duas hastes retas que podem ser

[61]Em inglês lê-se: " *[…] I shall leave to intreate of his ample large vse and best making, and will set him forth in few words: yea sufficiently for the Land-meaters capacitie or Carpenters purpose […]*" (DIGGES, 1605, II, carta ao leitor)

de metal ou madeira, bem planas no comprimento e largura que deverão ter cinco ou pelo menos três pés de comprimento, sendo cada pé dividido em doze polegadas.

Figura 20 - Partes do báculo



Fonte: Digges (1605)

Na figura o autor mostra as duas hastes “ab” e “cd” com cinco pés cada, essas divisões em pés e polegadas embora não explicite, funcionarão como uma escala linear do instrumento; e orienta ainda a como montá-lo,

> […] Estas hastes devem ser forjadas com formato cúbico na sua extremidade, para facilmente se juntarem, em 10 ou 6 pés no comprimento, (quando a vez exigir) como a figura e. f. exibe. Também vós deveis obter (com a ajuda de algum artesão 4 outras hastes, a maior g de 2 pés: a próxima h de 1 pé: a outra i de 6 polegadas: então k de 3 polegadas: a última e mais curta lde 1 e ½, polegada destas devem ter em seu meio um orifício que, ao longo da haste de dez pés, podem ser colocadas atravessando-a, e estas se movem sobre ela à vontade por baixo sempre cortando a haste maior e f na base, e feita para ser arrastada sobre qualquer divisão como a ocasião o exigir: todas são fáceis de serem percebidas pela figura que segue […] (DIGGES, 1605, II, 1, tradução nossa) [62]

Ou seja, as duas hastes “ab” e “cd” de cinco polegadas, conforme a figura, deverão ser forjadas nas extremidades de tal modo que possam ser unidas formando a haste maior “ef”. E, além desta haste maior, outras quatro hastes de diversos comprimentos com medidas múltiplas em relação ao comprimento da haste maior, devem ser providenciadas. Estas hastes menores deverão ser encaixadas na maior perpendicularmente, formando uma “cruz” e poderão deslizar para frente e para trás como for mais conveniente.

Leonard finaliza a descrição do báculo ressaltando que o instrumento deverá ter dois pés de comprimento. Observa ainda que o instrumento possui “vistas artificiais”, como o autor denomina, que são os extremos da haste menor, que funcionarão como miradas por onde o observador deverá avistar as extremidades do objeto a ser medido.[63]

Na sequência Leonard fornece as orientações para a fabricação do báculo, dá instruções precisas quanto ao material e o formato das hastes, observando que: “Vós deveis preparar duas hastes pequenas, retas, rígidas, [...] de metal ou de madeira bem

---

[62]Em inglês lê-se: “*[...] These Rods must bee forged with a dice in the end of them to joyne readily tenne or sixe foote in length, (when time requireth) as the figure e.f. sheweth. Also yee must get (by the helpe of some Craftman) foure other like Rods, the longer g.2. foote: the next h. 1 foote: the other i. 6. Inches, then k.3. Inches, the last and shortest L. 1 Inh, and ½. Each of these must have in theri middest a hole, that the long staffe of tem foote may be put through tehm, and they moued on him at pleasure up and downe, alwaies cutting the longer staffe e.f. Squirewise, and make to carry on any division, as occasion shall be given: which all are easiiy to be perceiued by the figure following, [...]*” (DIGGES, 1605, II, 1)

[63]Em inglês lê-se: “*[...] that alwayes the shorte staffe shall runne squire upon the longer, and the syghtes distaunt, as ye lyst top lace them.*” (DIGGES, 1605, II,1)

planas [...]" (DIGGES, II, 1, tradução nossa)[64]. Estas indicações devem ser levadas em conta se considerarmos que os agrimensores levariam o instrumento a campo. Portanto, ele deveria ser feito de material rígido e durável para que não se deteriorasse conforme as intempéries climáticas. Além disso, o material deveria ser leve e de fácil manuseio para que diante de uma grande quantidade de medições e deslocamentos a atividade fosse a menos cansativa possível. O material deveria ser assim resistente de modo que quando posicionado pelo observador, na realização das medições, não se deformasse, pois se isso ocorresse a precisão das medidas obtidas ficaria comprometida.

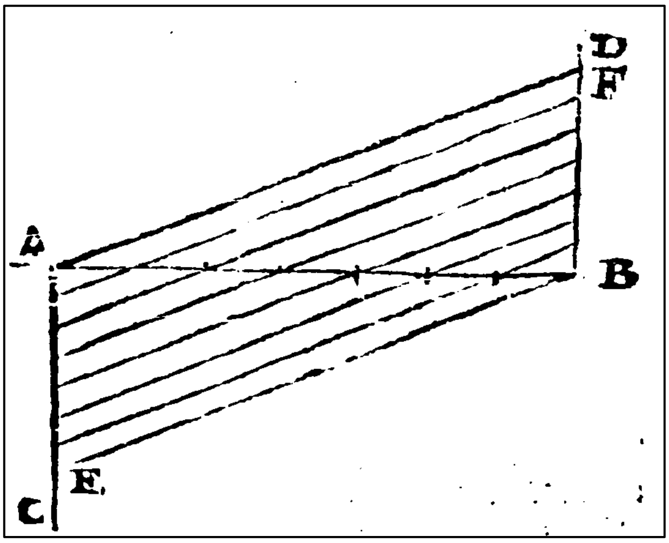
Leonard ainda sugere diferentes comprimentos para a haste menor que poderão ser utilizados conforme o que se queira medir. E embora não se aprofunde na explicação a respeito de quando utilizá-las, sabemos que as hastes de menor comprimento eram mais apropriadas para medições de distâncias localizadas mais longe do observador e as hastes de maior comprimento, para medições de distâncias mais próximas do observador.

Além dessas considerações, observamos que Leonard apresenta a escala da haste maior e das hastes menores do instrumento, e que a escala das hastes menores tem medidas equivalentes a múltiplos e submúltiplos das medidas da escala da haste maior. Mas ele não orienta o leitor em como proceder para efetuar a divisão em partes iguais dessas hastes, apenas orienta a buscar a ajuda de um artesão para construir o instrumento. Essas instruções são omitidas porque, provavelmente, o procedimento para construir as escalas era passado oralmente, visto que fazia parte do rol de conhecimentos do ofício. Entretanto, Leonard dá orientações a esse respeito em *Pantometria*, no capítulo quatro do primeiro livro (figura 21):

[64]Em inglês lê-se: "*Yo shall prepare two small, strayght, styffe, […] Roddes, of metal or of wodde wel playned, of lyke bygnes and lengthe.*" (DIGGES, 1605, II, 1)

> Admita a linha AB que dividirei em sete partes iguais. Eu levanto sobre A e B as perpendiculares AC e BD, como você pode ver na figura: e abrindo meu compasso, com uma abertura qualquer, eu meço sete partes que terminam em EF. Em seguida, traçando as linhas das divisões na outra (começando pela última em uma perpendicular, para a primeira, na outra), você verá na Figura a linha AB dividida em sete partes iguais. Você pode, dessa maneira, continuar infinitamente e dividi-la em tantas partes como você deseje. (DIGGES, 1571, I, 4, tradução nossa) [65]

Figura 21 – Esquema explicativo para a divisão de um segmento em sete partes iguais



Fonte: Digges (1571)

A omissão desse procedimento em *Tectonicon* e sua incorporação em *Pantometria* é mais um indício de que esses dois tratados estavam direcionados a públicos distintos. Para o artesão construtor do instrumento, essas instruções eram acessórias, visto que eram obtidas oralmente nas oficinas e se constituíam como um segredo de ofício. Já para o leitor leigo no ofício, este procedimento, entretanto, era necessário ser explicitado, e para os estudiosos de matemáticas mostrava uma fundamentação teórica, como o uso da proporcionalidade a que essa construção

---

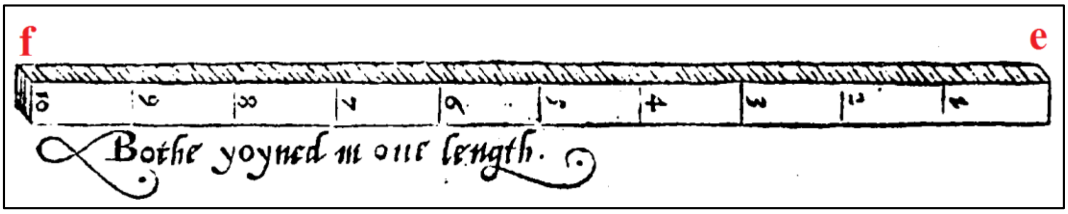
[65]Em inglês lê-se: "*Admit the line AB which I would divide into seaven equall portions, I creare upon A and B, the perpendiculars AC, BD, as you may behold in the figure: and opening my compasse at adventure, I measure out seaven partes ending at EF. then drawing lines from the divisions in the other (beginning from the last in one perpendicular , to the first in the other) you may behold in the Figure the line AB, parted into seaven equall portions, in this manner may you proceed infinitely to divide it into as many portions as you list.*" (DIGGES, 1571, I, 4)

recorre decorrente da divisão de um segmento qualquer em relação a outro quando ambos são interceptados por um feixe de retas paralelas.

Note que, para o agrimensor, esses conhecimentos matemáticos eram tácitos, ou seja, eram compartilhados entre seus pares, de modo que não havia necessidade de explicitá-los ou mesmo de justificá-los geometricamente. E muitos desses conhecimentos, incorporados no instrumento, estavam relacionados a outros ligados ao seu uso, ou seja, os procedimentos de construção e de uso estavam intimamente associados. Com efeito, após descrever o báculo e suas partes, Leonard passa a discorrer sobre seu uso.

Ele explica que as hastes menores deverão ser fixadas na haste maior considerando-se a distância do observador ao que se quer medir. Em uma nota, intitulada “Observar que o que segue é geral para todos os trabalhos”, Leonard orienta o observador a se posicionar de forma reta, ou seja, perpendicularmente em relação ao chão em que se localiza. Em seguida, ressalta que, ao se posicionar e observar o que quer medir, ele deve movimentar a haste menor na maior. Assim, posicionando-se num lugar, que ele chama “marca”, o observador deve fixar a haste menor de modo a ficar mais próxima do extremo “e” da maior e, à medida que se distancia do que se quer medir, a haste menor deverá ser deslocada e fixada mais próxima do extremo “f” (ver figura 22).

Figura 22 - Haste maior "ef"



Fonte: Digges (1605, destaque nosso)

No decorrer da leitura, das orientações de Leonard a respeito das atividades de fabricação e manuseio do instrumento, é possível perceber que o báculo incorpora conhecimentos matemáticos, tanto na sua construção, como na forma de manuseá-lo. Estes conhecimentos nem sempre são óbvios para quem lê o tratado, porém, devem ser conhecidos por quem quer produzir o instrumento e para que funcione de forma precisa. É nas orientações a respeito do uso do báculo que podemos identificar quais conhecimentos são esses, mas ressaltamos que isso só é possível quando o leitor possui certa instrução matemática. Vamos ver a seguir os dois usos do báculo propostos por Leonard e, a partir deles, inferir quais conhecimentos matemáticos e outras questões de ordem epistemológicas estão envolvidos no processo de construção e uso do instrumento.

3.2.2 Medição de alturas

Leonard, em linhas gerais, instrui o leitor a utilizar o báculo para medir larguras e alturas. Esse instrumento permitia medir altura de objetos, tais como muros, torres, montanhas etc., bem como, a medida da largura ou a da distância entre dois objetos.

Para medir a altura, Leonard orienta o leitor a posicionar a haste menor na divisão da haste maior equivalente ao seu comprimento, colocando um olho na extremidade da haste maior. O observador, dessa maneira, deve se posicionar de tal forma que as extremidades da haste menor (vistas artificiais) coincidam com as extremidades do objeto a ser medido (figura 23), ou seja, a base e o cume desse objeto; "[...] até que vos claramente percebas a parte superior dessa altitude, e também a extremidade inferior, pelos extremos de sua haste menor 'g'." (DIGGES, 1605, II, 3, tradução nossa)[66]. O autor, neste caso, afirma que a distância a partir do meio dos pés do observador até a base da altura a ser medida corresponderá à medida dessa altura.

Na edição de 1605, que estamos analisando, há uma referência à necessidade de posicionar o báculo na direção do ponto médio da altura do objeto que se deseja medir, garantindo, assim, o paralelismo da haste menor em relação a esse objeto e assim propiciar com essa posição a aplicação da propriedade de semelhança dos triângulos. Essa referência, porém, não consta na primeira edição de 1556 (DIGGES, 1556). Acreditamos que possa ter sido inserida por quem publicou postumamente essa edição, para garantir um posicionamento correto do observador em relação ao

[66]Em inglês lê-se: "*[...] untyll ye may playnely perceyve the very upper part of that altitude, and also the lower ende, by the extreames of your shorter staffe .g.*" (DIGGES, 1605, II, 3)

que se queria medir. A observação diz o seguinte: “Nas altitudes esta regra não é perfeita, exceto se o olho está nivelado com o meio da altitude”. (DIGGES, 1605, II, 3, tradução nossa)[67].

Além desse posicionamento do instrumento, também é ressaltada a necessidade de dispor a haste menor de tal modo que ela fique perpendicular ao chão. Para tanto, provavelmente, era utilizado um fio de prumo (destaque na figura 23), que não faz parte do báculo, porém ele parece ter sido mencionado na figura apenas como uma forma de enfatizar a necessidade da haste menor estar localizada perpendicularmente ao chão.

Mas Leonard observa que, se não for possível ao observador ficar nessa posição, ou seja, “se houver impedimentos”, poderá ser escolhida outra posição, e que a haste menor pode ser movida e posicionada na haste maior, na posição de duas vezes e meia a sua medida. Dessa forma, a medida da altura desejada será equivalente a duas vezes e meia a medida da distância do observador à base dessa altura. Leonard mostra que isso pode ser feito para qualquer posicionamento da haste menor na maior, mencionando as diversas possibilidades de posicioná-la na quarta, quinta ou vigésima parte da haste maior. Assim, ele apresenta um exemplo acompanhado de uma figura (figura 23):

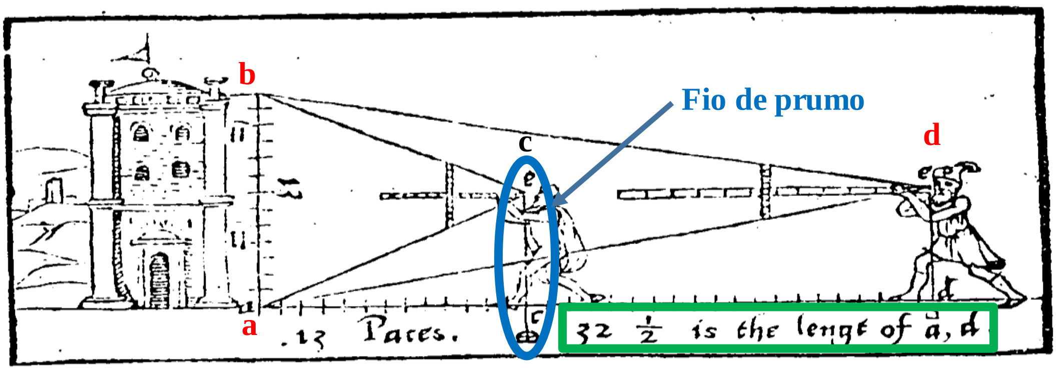
> […] observe o exemplo que se segue, como podeis ver pela figura apresentada, na qual a altura é imaginada a.b., a primeira estação *c*, e a haste menor *g*. é movida a partir de *e* apenas no seu comprimento. Sou forçado a concluir que a base da altura *ab* até minha posição *c*. é o seu comprimento exato. Então se vós medirdes a distância de *a.c*., que é 13 passos, tendereis à verdadeira altura de *a.b.* Na outra posição *d*., o bastão curto é fixado em e., o dobro do seu comprimento e uma metade: portanto eu devo afirmar a altura .*a.b*. está contida ou é encontrada na distância .*a.d*. duas vezes e meia o comprimento de .*a.d*. e é evidentemente 32 passos. (DIGGES, 1605, II, 3, tradução nossa) [68]

---

[67]Em inglês lê-se: “*In Altitudes this rule is not perfect, except the eye be levell with the middle of the Altitude.*” (DIGGES, 1605, II, 3)

[68]Em inglês lê-se: “ *[...] behold the example ensuing, as ye may see by figure declared, in the which the height is imagined a.b. the first station c. the short staffe g. is moved from e. just his length. I am forced to conclude, that the Base of the height a.b. is from my standing c. even his precise length. So then if ye measure that distance of a.c. being 13. Paces, ye have the true height of a.b. as many. In the other standing place d. the shorter staffe is found from c twice his length and a halfe, wherefore I must afirme*

Figura 23 – Esquema explicativo para o uso do báculo na medição de alturas

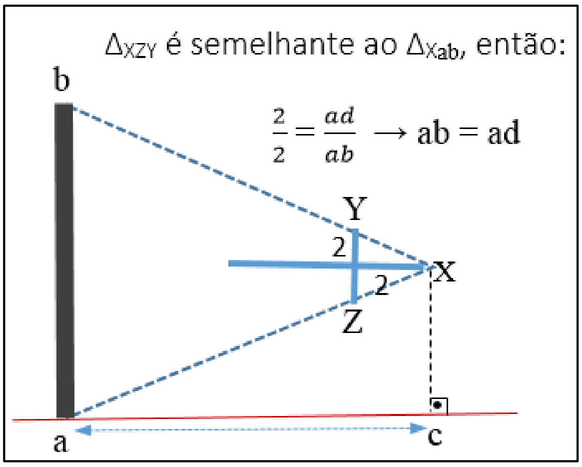


Fonte: Digges (1605, destaque nosso)

A justificativa matemática, que explica por que razão a altura que se deseja medir tem a mesma medida da distância da base dessa altura à posição do observador, pode ser feita por semelhança de triângulos. Na primeira posição que Leonard chama “c”, ele posiciona a haste menor “g”, com dois pés, na divisão da haste maior equivalente ao seu comprimento. Assim, as hastes formam um triângulo (figura 24) de base 2 (medida da haste menor) e altura 2 (primeira divisão da haste maior). Utilizando as denominações dadas por Leonard, chamaremos a altura do objeto a ser medido de “ab” e o deslocamento do observador em relação à base do objeto, de “ac”. Esta situação é apresentada na figura 24 em linguagem matemática moderna.

the height a.b. to be contained or found in the distance a.d. twice and a halfe: which length a.d. is apparant 32. passes.” (DIGGES, 1605, II, 3)

Figura 24 - Justificativa Matemática – medida da altura do objeto igual à medida da distância do observador ao objeto

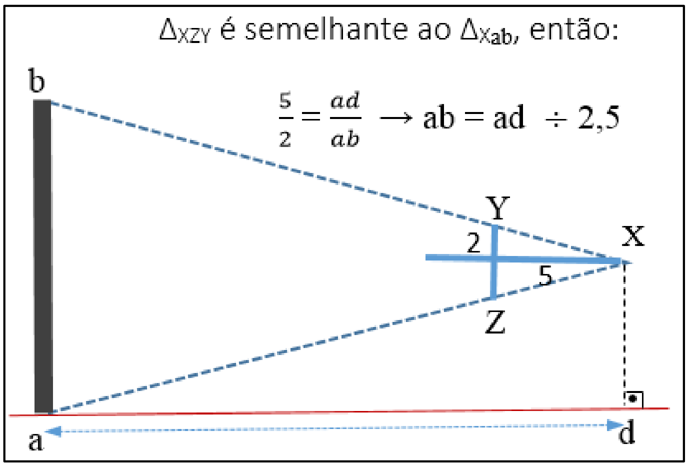


Fonte: Produção nossa

Como ele explica que a medida de “ac” equivale a 13 passos, então a altura “ab” também terá essa medida.

No exemplo seguinte, a justificativa matemática é análoga à anterior. Leonard explica que a haste menor deverá ser posicionada na divisão equivalente a duas vezes e meia o seu comprimento, ou seja, na divisão cinco da haste maior, como podemos verificar em linguagem moderna na figura 25.

Figura 25 - Justificativa Matemática- proporcionalidade da medida da altura do objeto em relação à medida da distância do observador ao objeto



Fonte: Produção nossa

Neste caso, o autor afirma que a medida da altura estará contida duas vezes e meia na medida da distância do observador à base da altura, “ad”. Como ele já encontrou a medida da altura, 13 passos, afirma então que a medida “ad” será de 32. Cabe observar que, ao fazermos os cálculos, o valor exato da medida dessa distância seria de 32,5 que é o valor citado na figura 23 (ver destaque verde).

3.2.3 Medição de larguras

Depois de explicar como a medida da altura de objetos são obtidas por meio do uso do báculo, Leonard orienta como medir larguras ou distâncias (longitudes, como ele se refere):

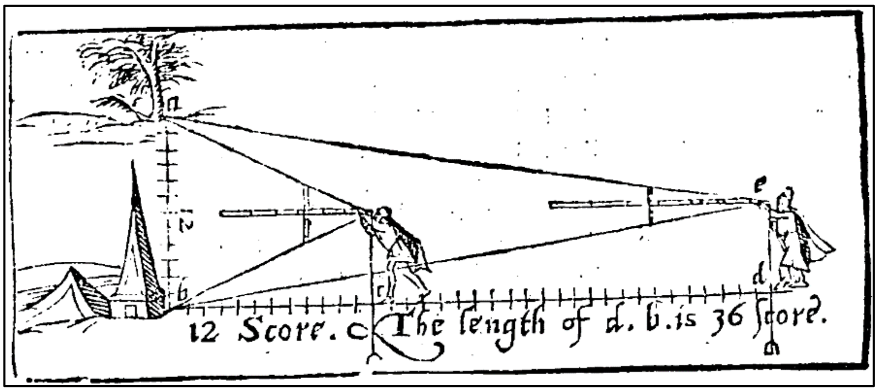
> Tudo o que eu instrui anteriormente sobre as alturas, deve ser aqui entendido da mesma forma para larguras, comprimentos, etc. Pois a largura e a amplitude não são encontradas de outra forma com este instrumento como dito anteriormente para as alturas, exceto pelo fato de que o bastão curto deve se situar na posição contrária [...]. (DIGGES, 1605, II, 4, tradução nossa) [69]

A seguir, Leonard apresenta um exemplo explicando que o observador posicionado em “c” deverá apontar o instrumento de tal modo a abarcar a largura da qual quer saber a medida, isto é, “ab” (figura 26). Ele observa que, como no procedimento anterior para medir alturas, se a haste menor for posicionada na parte da haste maior correspondente a uma vez o seu comprimento, a distância “bc” corresponderá à distância “ba” que se deseja medir. Ressalta ainda que, de outra posição “d”, também pode ser efetuada a medição indiretamente da distância “bd”, deslizando a haste menor três vezes o seu comprimento a partir do extremo da haste maior. Neste caso como a medida da distância utilizada na posição anterior foi 12, então a medida da distância “bd” será de três vezes esse valor, resultando em 36, como podemos visualizar na figura 26.

---

[69]Em inglês lê-se: “*Whatsoever I have instructed afore of Heights, the same understand here of widenes, lengths, etc. For none otherwise are Latitudes or widenesses searched by this instrument, then before is declared of Heights, onely this excepted, that the short staffe must lie contrarie (…).*” (DIGGES, 1605,II, 4)

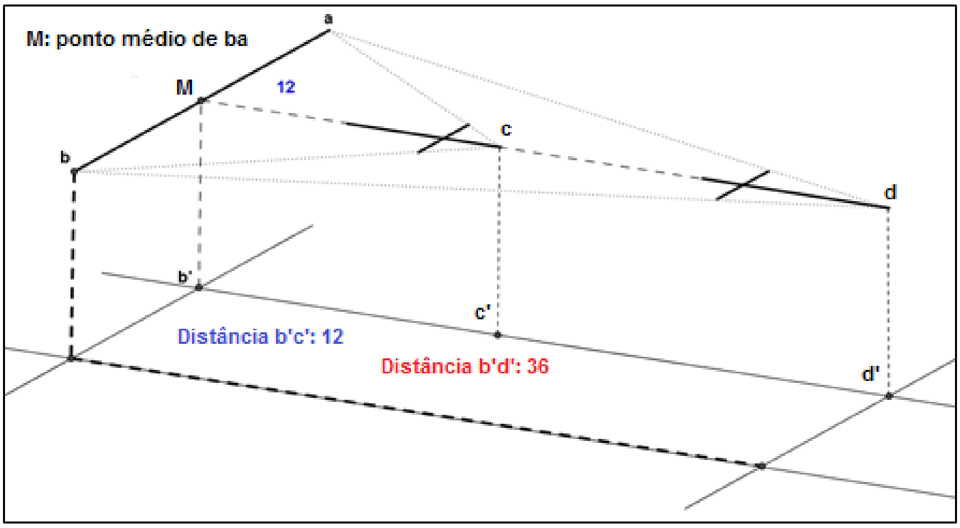
Figura 26 – Esquema explicativo para o uso do báculo na medição de larguras



Fonte: Digges (1605)

Observamos que, embora o autor explique que a haste menor deve ser colocada na “posição contrária” ao que foi feito na medição de alturas, ou seja, a haste menor deve acompanhar a direção da largura que se deseja medir, na figura fornecida (figura 26), isso não parece evidente. Além disso, também não há menção de que para obter essa medida com maior precisão, é necessário que o instrumento seja posicionado pelo observador no mesmo plano da largura que se deseja medir. Ou seja, na realidade o autor está considerando a situação apresentada na figura 27. A obtenção da medida “ba” se justifica matematicamente por meio de projeções ortogonais e semelhança de triângulo, da mesma forma como foi feito para a medição de alturas. Porém apenas com a figura que o autor fornece não visualizamos como podem ser obtidas as medidas “bc” e “bd”, que, na verdade, correspondem às medidas “Mc” e “Md”, para isso há que recorrer a algumas justificativas matemáticas que não são fornecidas nas orientações de Leonard.

Figura 27- Esquema explicativo da medida da distância do observador ao objeto



Fonte: Produção nossa

Na figura 27, se considerarmos que o observador posiciona o báculo no mesmo plano em que está a largura que deseja medir, é possível por construção considerar que b’ é a projeção ortogonal do ponto médio M de “ba” e também, como o observador está posicionado perpendicularmente em relação ao plano do chão nas duas posições “c” e “d” denominadas assim pelo autor, podemos considerar como projeções ortogonais “ c’ ” e “ d’ ”. A partir daí podemos inferir que “b’c’” é congruente a “Mc” e “ b’d’ ” é congruente a “Md”. Desta forma é possível obter essas medidas e, consequentemente, chegar à medida de “ba”.

3.2.4 Condições necessárias para o uso do báculo

Além dos conhecimentos matemáticos necessários para manusear o instrumento, há condições físicas e materiais necessárias para efetivamente realizar a medição e chegar a um resultado preciso. Entre elas, identificamos as que englobam as dificuldades em localizar o ponto médio da medida de uma largura ou altura com grandes extensões, estando o observador em um terreno que nem sempre ficará no mesmo plano do que se está medindo. Neste caso, soma-se ainda a impossibilidade de obter a variação angular de um plano a outro, já que o instrumento não prevê o uso de uma escala angular.

Outra questão que deve ser considerada é quando as medições forem de distâncias e/ou alturas inacessíveis, se isto ocorresse, o báculo como apresentado em *Tectonicon*, não poderia ser usado, já que nos casos que o autor indica, sempre considera a distância do observador ao que quer medir, conhecida. Além disso, há o caso de medir grandes alturas, para isso seria necessário um grande deslocamento, da base do que se quer medir até o ponto de observação, e ainda livre de obstáculos, para que mesmo de uma longa distância, o observador pudesse visualizar e alinhar os extremos da haste menor com as extremidades do que quer medir (base e topo).

Devemos ainda considerar as orientações de Leonard quanto ao próprio processo de medição e a noção de medida envolvida nesse processo, pois diferente dos instrumentos modernos que em geral realizam a medição com o mínimo de interferência de quem os manuseia (trena digital, por exemplo), o báculo exige a participação do sujeito que mede. Um exemplo dessa interferência é quando Leonard destaca que o observador deve se posicionar de forma perpendicular ao que quer medir, isso inclusive é apontado na figura quando acrescenta o fio de prumo.[70]

O posicionamento do instrumento em relação ao que se quer medir, envolve também condições que precisam ser analisadas. O alinhamento das “vistas artificiais” através da haste menor com os extremos do que será medido garante que uma linha reta imaginária possa ser traçada, já que por dois pontos sempre passa uma reta. A posição da haste menor, colocada paralelamente em relação ao segmento que contém a largura ou a altura do objeto que se quer medir, e a posição da haste maior, colocada no nível do ponto médio (como ele se refere) do segmento que contém essa largura ou altura.

A partir dessas questões, analisamos sob o ponto de vista matemático utilizando linguagem moderna, as condições para o posicionamento do instrumento, tanto as observadas por Leonard, com as que não são previstas por ele, mas que poderiam ocorrer.

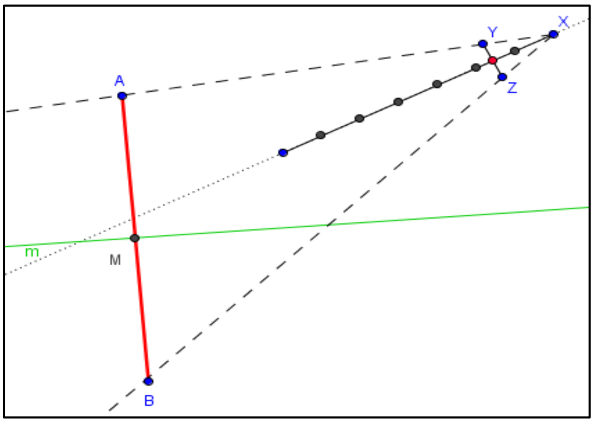
Se considerarmos $\overline{\mathrm{AB}}$ o segmento que contém uma largura que se deseja medir, “XYZ” o báculo, “m” a mediatriz do segmento e “M” o ponto médio desse

[70] A esse respeito, consulte Dias e Saito (2011) e Saito (2013a).

segmento, podemos prever oito situações de medição, considerando a posição da reta suporte da haste menor do báculo em relação ao segmento $\overline{AB}$ (paralela ou não), a posição da reta suporte da haste maior do báculo[71]em relação à mediatriz “m” (coincidente ou não) e também, se essa reta suporte da haste maior passa pelo ponto M ou não. Vale ressaltar que o ponto de vista considerado nas situações que aqui apresentamos é a vista superior e que podem ser validadas também para a medição de uma altura.

Situação 1 – Haste menor **não paralela** à $\overline{AB}$, haste maior **não coincidindo** com a mediatriz “m” e **não passando** pelo ponto M (figura 28).

Figura 28 – Situação 1



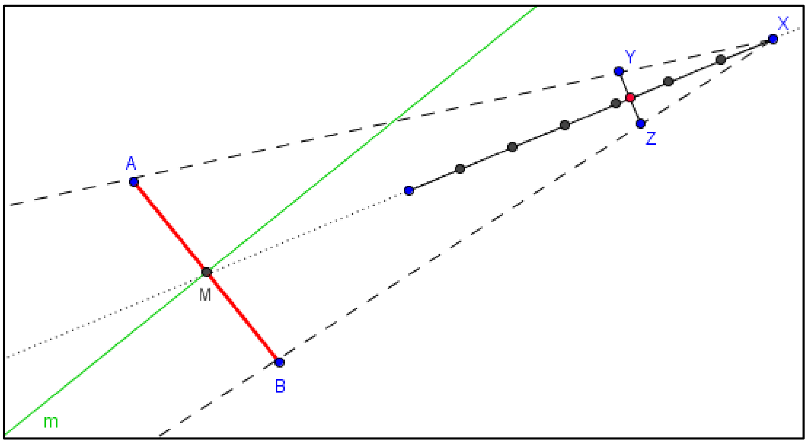
Fonte: Produção nossa

Nesta situação observamos que podemos determinar os triângulos XYZ e XAB, mas não é possível estabelecer relações de semelhança entre eles. Assim, não podemos determinar a medida do comprimento de $\overline{AB}$.

Situação 2 – Haste menor **não paralela** à $\overline{AB}$, haste maior **não coincidindo** com a mediatriz “m” e **passando** pelo ponto M (figura 29).

[71]Doravante relacionaremos a posição diretamente ao objeto, ou seja, diremos “haste menor paralela ao segmento” em vez de “reta suporte da haste menor paralela ao segmento”

Figura 29 – Situação 2



Fonte: Produção nossa

Nesta situação observamos que também podemos determinar os triângulos XYZ e XAB, mas novamente não é possível estabelecer relações de semelhança entre eles. Assim, novamente não podemos determinar a medida do comprimento de $\overline{AB}$.

Situação 3 – Haste menor **não paralela** à $\overline{AB}$, haste maior **coincidindo** com a mediatriz “m” e **não passando** por M.

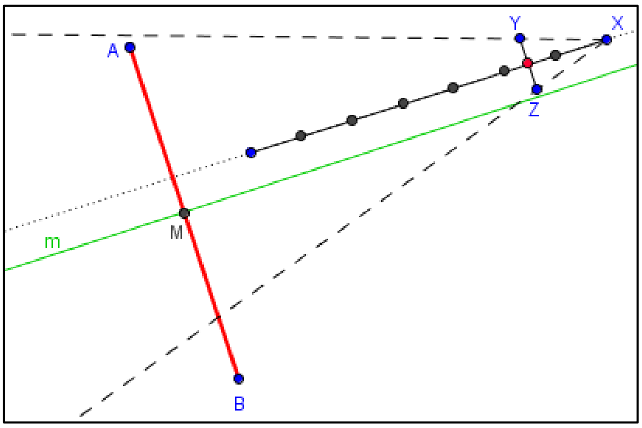
Esta situação é impossível de ser concretizada pois se a haste maior coincide com a mediatriz, por construção a haste menor será paralela à $\overline{AB}$.

Situação 4 – Haste menor **não paralela** à $\overline{AB}$, haste maior **coincidindo** com a mediatriz “m” e **passando** por M.

Esta situação também é impossível de concretizar, pela mesma justificativa da situação 3.

Situação 5 – Haste menor **paralela** à $\overline{AB}$, haste maior **não coincidindo** com a mediatriz “m” e **não passando** por M (figura 30).

Figura 30 – Situação 5



Fonte: Produção nossa

Nesta situação, não podemos determinar o triângulo XAB, por isso não é possível estabelecer relações de semelhança e também não podemos determinar a medida do comprimento de $\overline{\mathrm{AB}}$.

Situação 6 – Haste menor **paralela** à $\overline{\mathrm{AB}}$, haste maior **não coincidindo** com a mediatriz “m” e **passando** por M.

Esta situação também é impossível de concretizar, pois o ponto M pertence à mediatriz e se a haste maior não coincide com a mediatriz também não passa pelo ponto M.

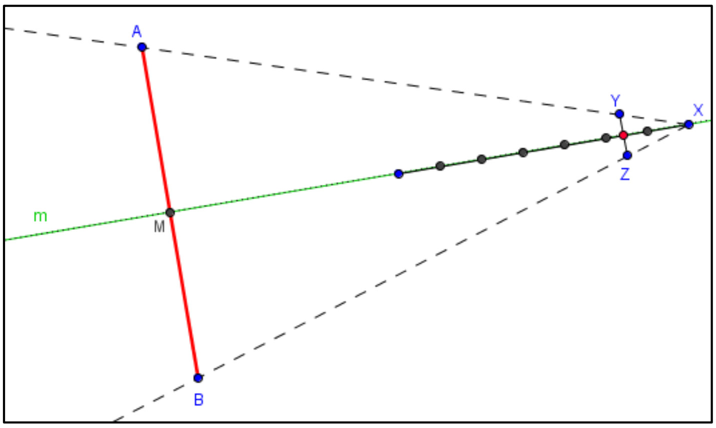
Situação 7 – Haste menor **paralela** à $\overline{\mathrm{AB}}$, haste maior **coincidindo** com a mediatriz “m” e **não passando** por M.

Esta situação também é impossível de concretizar, pois o ponto M pertence à mediatriz. Além disso, se a haste maior coincide com a mediatriz necessariamente, ela passará pelo ponto M.

Situação 8 – Haste menor **paralela** à $\overline{\mathrm{AB}}$, haste maior **coincidindo** com a mediatriz “m” e **passando** por M (figura 31).

Esta é a única situação que Leonard considera em *Tectonicon*, porém cabe observar, que os pressupostos considerados não são mencionados no tratado, como as posições relativas de paralelismo e coincidência, bem como as propriedades envolvidas.

Figura 31 - Situação 8



Fonte: Produção nossa

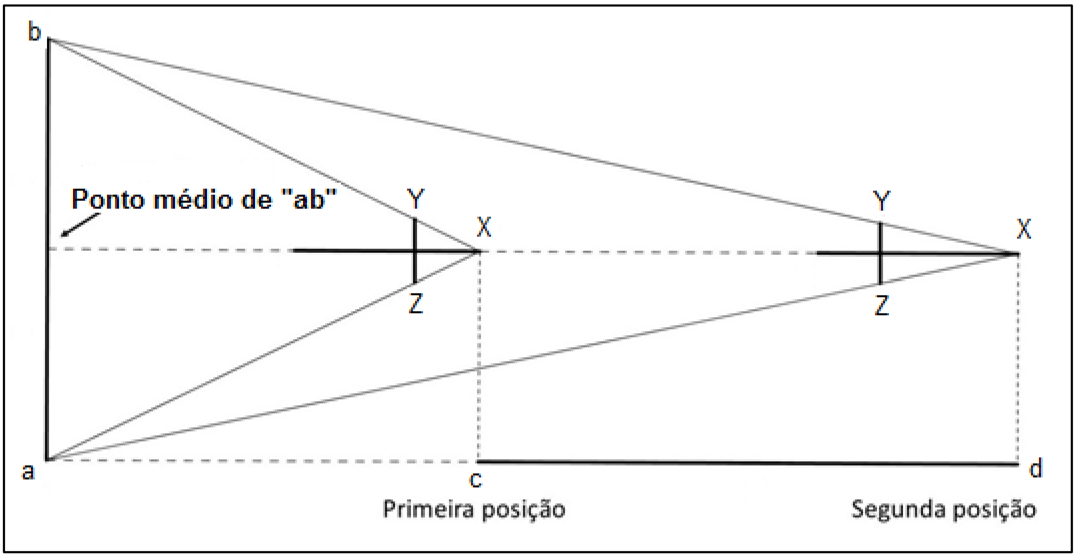
Essas situações nos mostram que, para efetuar a medição conforme as orientações de Leonard dadas em *Tectonicon*, além da necessidade de posicionar a haste menor paralela ao que se mede e a haste maior do báculo alinhada ao ponto médio da medida da largura ou altura mensurada, é preciso que tanto essa altura como essa largura estejam no mesmo plano que o báculo se posiciona na medição. Além disso, quando o autor, nas figuras 23 e 26, reforça a necessidade de o observador se posicionar perpendicularmente à base onde está apoiado, na realidade a ideia que está implícita nesse recurso é a coplanaridade necessária para efetuar a medição. Essa condição de perpendicularismo dependia de um aspecto físico que já era conhecido pelos artesãos da época, e isso é mostrado ao utilizarem o fio de prumo para garanti-la.

Embora o autor não oriente quanto à obtenção da medida de uma altura ou largura qualquer, quando a distância do observador ao se quer medir não é conhecida e, também, quando, por questões de espaço e deslocamento do observador, não é possível posicionar o instrumento no mesmo plano do que se quer medir, verificamos que é possível, nestes dois casos, efetuar essas medidas.

O primeiro caso, quando a distância do observador ao que se quer medir, não é conhecida, é prevista em Bartoli (1564). Para realizar esta medição também é necessário considerar que o observador esteja no mesmo plano do que quer medir e que as medições sejam feitas posicionando o instrumento em direção ao ponto médio do que está sendo medido, além disso é necessário que sejam efetuadas duas medições em diferentes posições, em ambas respeitando as condições anteriores. Na figura 32, apresentamos o procedimento para se medir uma altura, utilizando as denominações dadas por Leonard, porém utilizando os valores e o procedimento proposto por Bartoli.

O báculo utilizado por Bartoli, tem a mesma constituição do que é utilizado por Leonard, porém utiliza apenas uma haste menor e não várias, e ela serve como unidade de medida para as divisões da haste maior. Na primeira posição do observador, a haste menor está colocada na segunda divisão da haste maior e na segunda posição está posicionada na terceira divisão.

Figura 32 - Medição com báculo em duas posições



Fonte: Produção nossa

Em linguagem moderna, podemos dizer que: se $\overline{YZ}$ é paralelo a “ab” pelo Lema da Semelhança que diz que “Toda paralela a um dos lados de um triângulo que intersecciona os outros lados forma, com eles, um triângulo semelhante ao primeiro”. Na **primeira posição** podemos estabelecer que:

Δ_{XYZ} é semelhante ao Δ_{Xab}

Chamaremos de h_1 a altura de Δ_{XYZ} e de h_2 a altura de Δ_{Xab}

Temos que: $\frac{h_1}{\overline{YZ}} = \frac{h_2}{ab} \Longrightarrow \frac{2}{1} = \frac{h_2}{ab} \Longrightarrow h_2 = 2ab$ Resultado I

Analogamente na **segunda posição**, as mesmas relações de semelhança podem ser estabelecidas.

Chamaremos de h'$_1$ a altura de Δ_{XYZ} e de h'$_2$ a altura de Δ_{Xab}

Temos que: $\frac{h\prime_1}{\overline{YZ}} = \frac{h\prime_2}{ab} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{h\prime_2}{ab} \Rightarrow h'_2 = 3ab$ Resultado II

A medida da distância da primeira posição à segunda é "cd" e é dada por $h'_2 - h_2$

Dos resultados I e II, temos que $h'_2 - h_2 = 3ab - 2ab \Rightarrow$ **$h'_2 - h_2 = ab$**

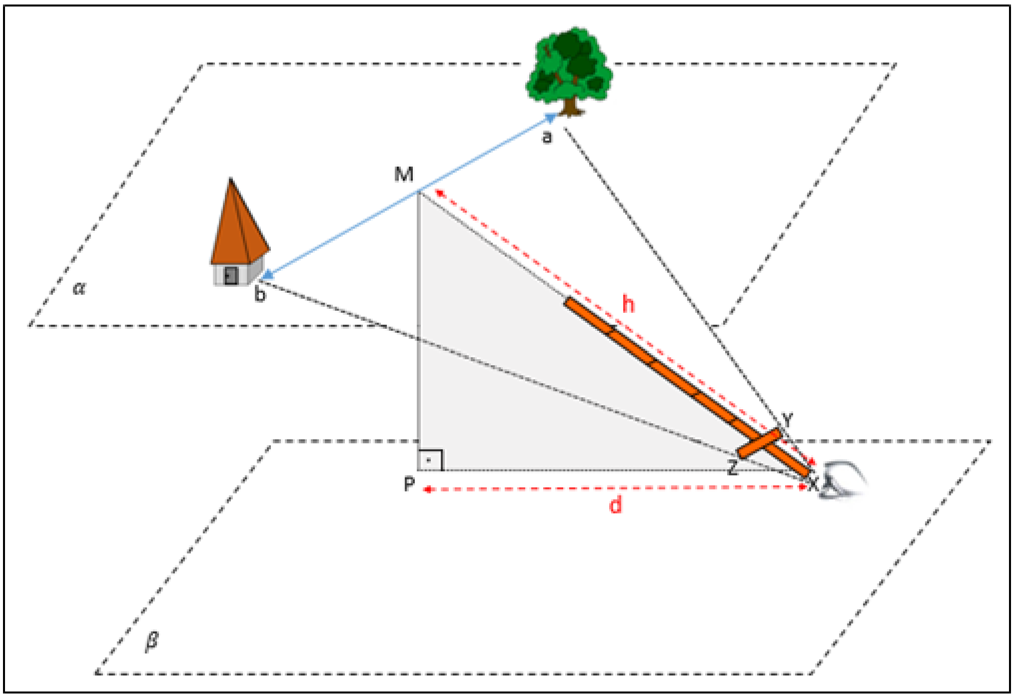
Ou seja, a medida "ab" que desejamos obter é a mesma medida do deslocamento do observador da primeira à segunda posição. Se for utilizado o báculo de Leonard, cujas hastes menores possuem medidas equivalentes a múltiplos e submúltiplos das divisões da haste maior, também é possível encontrar a medida desejada em função do deslocamento do observador em duas posições.

No segundo caso, se não é possível posicionar o instrumento no mesmo plano do que se quer medir, é possível recorrer às razões trigonométricas[72] para encontrar a medida desejada.

Supondo que queremos obter a medida da distância entre uma casa e uma árvore como Leonard sugere em *Tectonicon*, considerando que a haste menor está posicionada paralelamente à largura que será medida e que a haste maior está posicionada em direção ao ponto médio dessa largura, consideraremos em linguagem matemática moderna que a casa e a árvore estão localizadas em um plano α, que estão a uma distância "d" desconhecida e que o báculo do observador se localiza em um plano β. Vamos imaginar a situação de medição com o báculo, como proposto pelo autor, com a haste menor posicionada na primeira divisão da haste maior (ver figura 33).

[72]As razões trigonométricas já eram conhecidas na época da publicação de *Tectonicon* embora seu uso ainda não fosse amplamente difundido. As notações para essas razões não eram as mesmas que conhecemos hoje. Para esclarecer e dar uma melhor compreensão da situação proposta, recorremos à linguagem moderna para representar a razão cosseno.

Figura 33 – Medição de uma distância com o observador em outro plano



Fonte: Produção nossa

Para a haste menor posicionada na **primeira divisão** do báculo, temos:

$\Delta_{XYZ} \sim \Delta_{Xab}$

Altura do Δ_{Xab}: h

Altura do Δ_{XYZ}: 1

Distância da casa à arvore: ab

Distância do observador ao que quer medir, considerando a projeção ortogonal do ponto M no ponto P: d

$$\frac{1}{1} = \frac{h}{ab} \rightarrow h = ab$$

Δ_{XMP} é reto em P, portanto cos $\hat{X} = \frac{d}{h} \rightarrow h = \frac{d}{\cos \hat{X}} \rightarrow \boldsymbol{ab} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{\cos \hat{X}}}$

O mesmo raciocínio pode ser feito para a haste menor posicionada na 3ª divisão, teremos a relação: $\boldsymbol{ab} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{3 \cos \hat{X}}}$

Analisando os conhecimentos matemáticos envolvidos nas medições de alturas e larguras, cabe destacar que o autor quando aborda a construção e uso do báculo, não faz referência a medições angulares, mesmo porque o instrumento não possui escala angular. Da forma como são dadas as instruções em *Tectonicon*, do ponto de vista matemático, nas duas situações as orientações e os esquemas oferecidos por Leonard são claros e objetivos, porém é necessário considerar que mesmo que os procedimentos pareçam simples, executá-los na prática, não é tão fácil quanto parece, visto que temos que considerar as condições necessárias para efetivamente realizar a medição e chegar a um resultado preciso.

Devemos observar que o tratado não instrui nada a respeito dos casos acima descritos. As relações métricas nos triângulos são apresentadas por Leonard de forma bastante simplificada de modo que, com um só golpe de olhar, reconhecemos tratar-se de uma relação de semelhança de dois triângulos isósceles (figura 23 e 26). Contudo, como vimos nas oito situações de medição com o báculo, se a haste maior não coincidir com a mediatriz da largura ou altura do que se deseja medir, não estiver direcionada ao ponto médio dessa distância e se a haste menor não estiver posicionada paralelamente à essa distância, a relação de semelhança não poderá ser estabelecida e, consequentemente, a medida desejada não poderá ser encontrada.

Leonard não explicita essas condições em *Tectonicon*, mas sabemos que as instruções a esse respeito, bem como outras de ordem mais prática, faziam parte de uma tradição oral transmitida nas corporações de ofício de mestre à aprendiz e para aqueles que praticavam o ofício. Ao não serem citadas de forma evidente, isso mostra que o tratado não era um mero manual, suficiente o bastante para instruir o leitor na arte de medir. As instruções fornecidas por Leonard eram dirigidas para um público que tinha conhecimentos em geometria prática, além do conhecimento prático do ofício.[73] Outro exemplo que nos mostra isso é o procedimento que ele apresenta para medir a distância entre dois objetos, Leonard instrui para que o observador ajuste a haste menor numa das marcações da haste maior do báculo. Posicionado em "c", o

[73] Sobre *practica geometriae* e a prática do ofício, consulte os estudos de Homann (1991), Hugh of Saint Victor (1956, 1961 e 1991) e Shelby (1972). Sobre as diferentes vias de transmissão, consulte os estudos de Kusukawa e MacLean (2006).

instrumento deve ser apontado de tal modo a abarcar a largura (distância) da qual se quer saber a medida, isto é, “ab” (figura 26).

À primeira vista, esse procedimento é essencialmente o mesmo que aquele descrito anteriormente, para a medida de uma altura, a única diferença é a orientação da haste menor do instrumento que, no primeiro caso, era posicionada verticalmente, ou seja, paralela à altura procurada e no segundo caso, horizontalmente, paralela à largura desejada. Assim, todas as condições físicas e materiais, bem como o conhecimento matemático necessário para obter a medida no primeiro caso, se aplicam ao segundo. Contudo, a realização da medição no primeiro caso parece ser muito mais complexa do que a posterior, visto que posicionar perpendicularmente a haste maior no ponto médio da medida da altura de uma torre é muito mais difícil de ser executada na prática pelo posicionamento dos olhos em relação a haste menor. Quando a haste menor é posicionada horizontalmente os olhos acompanham essa direção, já na posição vertical, nota-se que é muito difícil alinhar os extremos da haste menor com os extremos da altura que se deseja medir, pois a direção dos olhos localiza-se perpendicularmente em relação à direção da haste menor. Embora o esquema apresentado por Leonard não ofereça nenhuma dificuldade de compreensão, do ponto de vista matemático, a obtenção da medida por meio do báculo encerra novas dificuldades de ordem prática, uma vez que as condições materiais para se obter a medida neste caso, não poderão ser satisfeitas.

Outra questão que vem à tona ao analisarmos o segundo caso (medição de distância entre dois objetos) é a dificuldade em efetuar a medição quando o observador não está no mesmo plano do que está sendo medido. Neste caso fica evidente que essas condições materiais não foram consideradas em uma situação real (figura 33). Para obter a medida, a situação exige o conhecimento da medida da distância do observador ao que se quer medir, e também, a abertura do ângulo de visão do plano do observador em relação ao plano onde se localiza o que está sendo medido.

Essas dificuldades, por sua vez, introduzem novos problemas matemáticos, conduzindo a discussões não só de ordem matemática, mas também prática, pois sua resolução requisitará a mobilização de outros conhecimentos matemáticos (razões trigonométricas) ou mesmo o uso de outro instrumento mais adequado (que possua escala angular) para se obter a medida de altura de objetos ou de distâncias entre objetos.

Além disso, esses casos devem ser considerados do ponto de vista epistemológico. As imagens apresentadas por Leonard ilustram situações em que as condições materiais e, portanto, espaciais, que são encontradas numa situação prática, são descartadas. Do ponto de vista matemático, as imagens não oferecem nenhuma dificuldade de compreensão e as relações matemáticas nelas implicadas são bastante óbvias. No entanto, do ponto de vista prático, essas situações teoricamente idealizadas não podem ser aplicadas a uma outra, real e concreta. O confronto dessas duas situações levanta interessantes questões de ordem epistemológica, relativas à relação entre conhecimento teórico e prático que ocorria na época em que o tratado foi escrito. Ou seja, duas situações, uma teórica interligada à uma prática, a primeira podendo facilmente ser resolvida em um contexto matemático, já a segunda, mostrando que essa resolução teórica envolve diversos fatores que não foram consideradas pelo autor.

Ainda do ponto de vista epistemológico e matemático, transformam um problema de geometria plana em outro, que deve considerar a geometria espacial de posição, enriquecendo assim as discussões didáticas. Os problemas práticos, nesse caso, reintegram a medida e o processo de medição ao seu lugar de origem, isto é, ao espaço tridimensional, ampliando o escopo de investigação didática, os conhecimentos matemáticos que podem ser aplicados a uma situação no plano nem sempre são suficientes a uma situação tridimensional. A medida deixa, desse modo, de ser mera definição e adquire amplo significado matemático, ou seja, o raciocínio espacial também deve ser considerado.

Assim, observamos que o tratado *Tectonicon* se mostra potencialmente rico naquilo que pode nos revelar ao explorarmos tanto suas técnicas de medida como as propostas de construção e uso de instrumentos de medição.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na leitura do tratado foi possível observar a intima relação entre o saber e o fazer matemático de uma época. O contexto social e político do século XVI nos mostrou que a valorização do conhecimento matemático foi uma consequência gradual do processo histórico ocorrido na Inglaterra. A astronomia, que inicialmente, tinha na observação celeste o interesse em entender como os astros influenciavam a vida do ser humano em suas práticas cotidianas, passou a ter outras preocupações entre elas, as relacionadas à navegação. Marinheiros precisavam obter modos de se localizar em alto mar e, para isso, os instrumentos astronômicos tiveram um papel fundamental.

Por outro lado, o desenvolvimento da navegação e a adaptação e aperfeiçoamento desses instrumentos para finalidades marítimas propiciou que viagens mais distantes da costa fossem possíveis e com isso a exploração de novos mares levou à descoberta de territórios, que poderiam prover os reinados de riquezas e poderio. Assim, aquele que detinha o conhecimento da arte de medir terras de forma a permitir a demarcação de fronteiras, passou a ser cada vez mais solicitado. Aliado a isso, processos políticos e religiosos, definiam uma nova ordem na sociedade inglesa do século XVI, o sistema de posse da terra sofrera uma profunda mudança com a dissolução dos monastérios promovida pela reforma protestante. A atividade do agrimensor tornou-se assim cada vez mais requisitada, mas os profissionais ainda praticavam seu ofício como no século anterior, com cordas e estacas.

Dessa forma, a necessidade de especialização levou ao aprimoramento de técnicas por parte daqueles que praticavam a medição de terras, tanto no sentido de aperfeiçoar suas técnicas quanto a necessidade de adquirir uma instrução matemática que possibilitasse o manuseio de instrumentos para aplicar essas técnicas e obter medidas mais precisas.

Essa necessidade por uma instrução matemática promoveu um rico diálogo entre os eruditos, que estavam nas universidades, e artesãos ligados a diferentes setores da sociedade, no que se refere aos conhecimentos matemáticos. Aspectos desse diálogo se fazem presentes no texto de *Tectonicon*.

No decorrer de nossa investigação foi possível identificar alguns conhecimentos matemáticos abordados no tratado e suas relações com com as práticas matemáticas. Notamos que os procedimentos da prática dos agrimensores do século XVI, são muito diferentes daqueles que hoje mobilizamos, por exemplo, para calcular a medida da área. Tais procedimentos, que mobilizam diferentes conhecimentos matemáticos, ora se aproximam e ora se afastam das atuais técnicas de medidas. O *Tectonicon* traz indícios de que a atividade do agrimensor nesse período era um elo entre a prática matemática e o conhecimento erudito da época. Técnicas de medida amplamente utilizadas pelos praticantes das matemáticas em seus ofícios começavam a ter suas justificativas matemáticas apresentadas e fundamentadas em conhecimentos matemáticos reconhecidos nas universidades.

No que diz respeito ao instrumento que analisamos, podemos dizer que o báculo foi mais que um simples dispositivo mediador entre quem o utiliza e o fenômeno que estuda. Sua função era bem mais complexa, pois já no processo de fabricação do instrumento estavam implícitos diversos conhecimentos que o fabricante deveria ter, como a divisão de um segmento em partes iguais, o perpendicularismo da haste menor em relação à maior e a demarcação das escalas em ambas as hastes. A relação entre o saber e o fazer neste caso se mostrava implícita no trabalho de fabricação dos instrumentos. Nesse sentido, foi possível identificar diversos conhecimentos matemáticos que em *Tectonicon* já aparecem nos primeiros capítulos, quando o autor elenca diversas técnicas de mensuração. Embora não se detenha em detalhes teóricos, Leonard começa suas orientações mostrando que é necessário encontrar a altura de um triângulo para determinar a medida de sua área, embora ele não explicite como ela poderia ser traçada a partir de qualquer vértice, apresentando apenas sua medida.

Para o cálculo da medida de área do triângulo, Leonard fornece apenas uma breve orientação de como obtê-la, no terceiro capítulo da primeira seção, a partir da multiplicação da medida da altura pela metade da medida da base, mas ressalta que isso pode ser feito se o leitor for um aritmético, e se não for esse o caso, a tabela de dados deverá ser consultada. Mas ao analisarmos os procedimentos de uso da tabela, observamos que na verdade está sendo feita a multiplicação dos valores das margens e que no cruzamento da linha e coluna da tabela é encontrado o resultado dessa multiplicação, já nas unidades de medidas de área, como vimos no quadro 1. Ou seja, aqueles que necessitavam dessa tabela, não possuíam o conhecimento de algoritmos para efetuar a operação, provavelmente esse era um conhecimento específico dos aritméticos como o autor destaca. Ainda no que diz respeito ao cálculo da medida de áreas de terrenos com formatos curvos ou mistos, Leonard não explicita os procedimentos para obter a medida das diagonais dos terrenos, para dessa forma dividi-los em triângulos, nem de como obter a medida dos diâmetros, o que provavelmente era um procedimento só conhecido por aqueles que praticavam o ofício.

Outro conhecimento matemático frequente no tratado que não é explicitado, mas é necessário para manusear os instrumentos do tratado é a propriedade de semelhança de triângulos. Tanto no uso da régua quanto no esquadro de carpinteiro, como no báculo esse conhecimento é mobilizado, que sabemos remontar aos conhecimentos matemáticos utilizados pelos agrimensores romanos em suas práticas de medição.

Além dessas questões, muitas outras surgem e mostram que embora o tratado apresentasse em suas orientações conhecimentos matemáticos para medições e cálculos, e figuras explicativas, nem sempre esses conhecimentos seriam suficientes para obter efetivamente a medida da área de uma superfície montanhosa, por exemplo. Como um terreno poderia ter seu formato decomposto em triângulos e como seria obtida a altura desses triângulos, utilizando um fio de prumo, não parece ser um procedimento simples e preciso de se fazer em um território de grandes extensões. Além disso, é preciso considerar que em *Tectonicon,* Leonard em momento nenhum faz referência explícita a escalas angulares, embora muito provavelmente ele tivesse conhecimento a seu respeito, como constatamos em *Pantometria*.

O conhecimento a respeito de escalas e conversões é mostrado em *Tectonicon.* As unidades de medida, bem como suas respectivas conversões eram necessárias para o traçado das escalas dos instrumentos que deveriam ser definidas de antemão para estabelecer as dimensões das peças que os comporiam. Leonard também apresenta em seu tratado algumas conversões de unidades de medida, o que era comum na época já que ainda não tinham sido padronizadas, e por isso eram feitas por meio de tabelas. Além disso, o autor, já no uso de instrumentos mostra como o conhecimento da proporcionalidade é utilizado na prática, porém observamos que tanto em *Tectonicon* como em *Pantometria*, não há informações quanto à reprodução do traçado do terreno em uma planta e isso era uma das atividades dos agrimensores.

Ao analisarmos *Tectonicon* observamos que o autor se detém nos primeiros capítulos a explicar como obter a medida de área de terrenos com formatos diversos, ou seja, a ênfase está nas técnicas de mensuração. Descreve a fabricação e uso de instrumentos a partir do capítulo dez, mas não fornece maiores detalhes quanto aos conhecimentos matemáticos necessários para essa fabricação e uso, diferentemente de *Pantometria* em que há uma maior preocupação com os apontamentos teóricos em relação ao conhecimento matemático, nas técnicas de mensuração, na fabricação dos instrumentos e no seu uso. Essa abordagem distinta em dois tratados escritos sobre o mesmo assunto e pelo mesmo autor sugerem dois diferentes públicos interessados em geometria prática.

Enfim, com este trabalho acreditamos que o estudo de um instrumento matemático utilizando fontes originais como o tratado *Tectonicon* é uma maneira de esclarecer e ampliar informações encontradas em fontes secundárias, além de propiciar descobertas que não seriam possíveis nessas fontes. Pois, por meio dele podemos reavaliar os conhecimentos matemáticos compartilhados por estudiosos de matemática, conduzindo-nos a refletir sobre o saber fazer matemático de uma época.

O estudo do instrumento, devidamente contextualizado, permite-nos compreender diferentes aspectos do conhecimento matemático. A sua compreensão em um contexto histórico nos dá acesso ao processo em que diferentes conhecimentos são mobilizados, colocando questões não só ligadas ao conhecimento matemático, mas também outras relacionadas ao próprio desenvolvimento e organização da área matemática. Dois exemplos dessas questões, foi possível observar: o crescente interesse dos eruditos pelos aspectos práticos da área de geometria, que embora esta área fizesse parte do *Quadrivium*, esses aspectos eram abordados de forma superficial e também as mudanças que começavam a ocorrer no currículo das universidades da época, passando a abordar os conhecimentos matemáticos com um viés humanista.

Dessa forma, consideramos que nossos objetivos foram alcançados pois identificamos o contexto em que a obra e seu autor estavam inseridos e a partir dele, verificamos e analisamos tanto os conhecimentos matemáticos que o autor abordou no tratado como os que provavelmente eram mobilizados na prática do ofício de agrimensor da época. Com o paralelo feito entre os conhecimentos implícitos nos procedimentos de medição abordados em *Tectonicon* com os conhecimentos matemáticos citados em *Pantometria* foi possível identificar as prováveis relações que começavam a se estabelecer entre as práticas matemáticas e o saber erudito da época. Foi também possível analisar esses conhecimentos a partir da construção e usos do báculo propostos por Leonard.

Assim ao voltarmos à nossa questão de pesquisa: **Que conhecimentos matemáticos emergem do estudo da construção e uso do báculo (cross-staff)?** Entendemos que foi respondida. Diversos conhecimentos matemáticos emergiram da construção do báculo, como o estabelecimento de unidades de medida para o traçado de escalas no instrumento (pés e polegadas), a relação dessas unidades de medidas, nas duas hastes do instrumento e a divisão de segmentos em partes iguais, para a demarcação das escalas nas hastes do instrumento.

Na montagem do báculo, percebemos a necessidade de saber que condições determinam o perpendicularismo, quando as hastes menores devem ser encaixadas na haste maior. Observamos, ainda, que era necessário mobilizar a propriedade geométrica que estabelece que uma reta é determinada por dois pontos, quando Leonard explica o alinhamento das “vistas artificiais” com os extremos da largura ou altura que se deseja medir.

Nos usos do báculo diversos conhecimentos matemáticos emergiram em nossas análises, como o posicionamento das hastes do báculo em relação ao que se está medindo (posições relativas entre retas e projeções ortogonais) e, também, da posição do observador em relação ao que se quer medir (perpendicularismo destacado com o fio de prumo e relações trigonométricas quando estão em planos distintos).

Ao levantar esses conhecimentos que não estão explícitos no texto do tratado, observamos que *Tectonicon* nos dá indícios que o báculo, bem como os outros instrumentos utilizados para agrimensura no século XVI, são mais que simples ferramentas específicas para uma finalidade de obtenção de medida e/ou prática de ofício. Esses instrumentos incorporavam conhecimentos que além de mostrar a profunda relação entre o saber e o fazer, apontam para questões epistemológicas no processo de construção do conhecimento científico e matemático da época, a relação entre a teoria e prática, presente nas situações idealizadas pelo autor e que podiam ser resolvidas em um contexto matemático, mas que nem sempre eram possíveis de efetivar em uma situação prática. Aspectos esses, que poderão ser explorados pelo educador matemático em pesquisas futuras.

Acreditamos que a partir desta pequisa será possível explorar em trabalhos que venham a ser desenvolvidos, além do báculo, também os outros instrumentos citados em *Tectonicon* e *Pantometria*, buscando não só identificar os conhecimentos matemáticos envolvidos no processo de construção e uso, mas também explorar esses instrumentos didaticamente empregando-os além de seu caráter meramente instrumental, ou seja, utilizando-os não só como ferramentas para confirmar uma medida ou se chegar a um resultado, empregando relações métricas em um processo de medição, mas também como construtores de conhecimento na época de sua fabricação e uso.

Além disso, outra possibilidade de investigação que poderá ser desenvolvida futuramente é verificar como efetivamente os conhecimentos matemáticos são mobilizados em situações reais de medição, para verificar se o sujeito que manipula o instrumento mobiliza esses conhecimentos, compreendendo-os em um processo histórico de construção de conhecimento.

Acreditamos que este trabalho não se esgota aqui. No decorrer de nosso estudo percebemos que em uma investigação histórica os objetivos serão sempre alcançados parcialmente e as evidências levantadas serão sempre relativas às lentes utilizadas por quem as observou. Hoje podemos dizer que alcançamos os objetivos propostos inicialmente e que a resposta à questão de pesquisa foi contemplada, mas compreendemos também que isso não representa o fim desta pesquisa. Sabemos que muitas possibilidades poderiam ter sido investigadas ou aprofundadas e entendemos que futuramente outros pontos de vista poderão identificar aspectos que fomos incapazes de enxergar ou entender, mas esperamos que mais do que considerar isso como uma falha ou carência, esses aspectos não abordados sejam percebidos como um fator inerente à nossa condição de observador de apenas um momento histórico e assim levem a outras investigações que acrescentem e complementem a narrativa da História da Matemática, pois nela entender o processo histórico como uma construção humana, deve ser uma prerrogativa.

REFERÊNCIAS

ALFONSO-GOLDFARB, Ana Maria. 2. Centenário Simão Mathias: Documentos, Métodos e Identidade da História da Ciência. **Circumscribere: International Journal for the History of Science**, v. 4, p. 5-9, 2008.

AMARAL, Izabel. Quase tudo que você queria saber sobre tectônica, mas tinha vergonha de perguntar. **Pós. Revista do Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo da FAUUSP**, n. 26, p. 148-167, 2009.

ASH, Eric H. **Power, knowledge, and expertise in Elizabethan England**. JHU Press, 2004.

ATLAS HISTÓRICO. Edição especial para Enciclopédia Britânica do Brasil Publicações Ltda. Barcelona: Editorial Marin S.A.. 1986

BARTOLI, Cosimo. **Del Modo Di Misvrare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le prouincie, le prospettiue, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere a gli huomini; Secondo le uere regole d'Euclide, & degli altri piu lodati scrittori**. Venetia: Francesco Franceschi Sanese, 1564.

BELFANTI, Carlo Marco. Guilds, patents, and the circulation of technical knowledge: Northern Italy during the early modern age. **Technology and culture**, v. 45, n. 3, p. 569-589, 2004.

BELTRAN, Maria Helena R., SAITO, Fumikazu, TRINDADE, Lais dos Santos P. **História da ciência para formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física; CAPES/OBEDUC, 2014

BENNETT, Jim A. Geometry and surveying in early-seventeenth-century England. **Annals of science**, v. 48, n. 4, p. 345-354, 1991.

BENNETT, Jim. Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for? **The British Journal for the History of Science**, v. 36, n. 02, p. 129-150, 2003.

BROMBERG, C.; SAITO, F. A história da matemática e a história da ciência. In: BELTRAN, Maria Helena R.; SAITO, Fumikazu; TRINDRADE, Lais dos Santos P. (Org.). **História da ciência: tópicos atuais.** São Paulo: Livraria da Física, p. 47-72, 2010.

BROOKS, Edward. **The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison containing also a history of arithmetic**. Lancaster, PA: Normal publishing company,1880.

BROWNE, John. **The triangular quadrant, or, The quadrant on a sector: Being a general instrument for land or sea observations...** London: [s.ed.]. 1662.

CHATSFEILD, John. **The trigonall sector: The description and use therof: Being an instrument most aptly serving for the resolution of all Right lined Triangles with great facility and delight...** London: Robert Leybourn. 1650.

COOPER, Michael Alan Ralph. EDWARD WORSOP; FROM THE BLACK ART AND SUNDRIE ERROURS TO TRUE GEOMETRICALL DEMONSTRATION.**Survey Review**, v. 32, n. 248, p. 67-79, 1993.

CROSBY, Alfred W. **A Mensuração da Realidade**. São Paulo: Unesp, 1999

DIGGES, Leonard. **A boke named Tectonicon**. London:Iohn Daye, 1556

DIGGES, Leonard. **A boke named Tectonicon.** London: Felix Kyngston, 1605 Disponível em: https://ia802707.us.archive.org/17/items/bookenamedtecton00digg/bookenamedtecton00digg_bw.pdf Acesso em: 28 jan. 2015

DIGGES, Leonard. **A geometrical practise, named Pantometria, divided into three bookes, Longimetria, Planimetria and Stereometria**. London: Abell Feffes, 1571 Disponível em: http://quod.lib.umich.edu/e/eebo/A20458.0001.001?rgn=main;view=fulltext Acesso em: 01 jan. 2016

FREEHAFER, John. Leonard Digges, Ben Johnson, and the Beginning of Shakespeare Idolatry.**Shakespeare Quarterly**, p. 63-75, 1970.

GILLISPIE, Charles Coulston (org.) **Dictionary of Sientific Biography**. Nova Iorque, Charles Scribner's son, 1981, 16 vols.

GOULDING, Robert. **Defending Hypatia:** Ramus, Saville, and the Renaissance Rediscovery of Mathematical History. Dordrecht: Springer, 2010.

HANKINS, Thomas L.; SILVERMAN, Robert J. **Instruments and the Imagination**. Princeton, Princeton University Press, 1997.

HARKNESS, Deborah. E. **The Jewel House: Elizabethan London and the scientific revolution**. England: Yale University Press, 2007

HIGTON, Hester. Does using an instrument make you mathematical? Mathematical practitioners of the 17th century.**Endeavour**, v. 25, n. 1, p. 18-22, 2001.

HOMANN, Frederick A. Introduction. In: **HUGH OF SAINT VICTOR. Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor**. Milwaukee/Wisconsin: Marquette University Press, p. 1-30, 1991

HUGH OF SAINT VICTOR. **Hvgonis de Sancto Vitore: Practica Geometriae**. Ed. R. Baron. **Osiris**, Philadelphia, v. 12, p. 186-224, 1956

______. **The *Didascalicon* of Hugh of St. Victor**: A medieval guide to the arts (Ed. J. Taylor). New York; London: Columbia University Press, 1961.

______. **Practical Geometry [Practica Geometriae] attributed to Hugh of St. Victor**. Trad. F.A. Homann. Milwaukee; Wisconsin: Marquette University Press, 1991.

JOHNSON, Francis R.; LARKEY, Sanford V.; DIGGES, Thomas. Thomas Digges, the Copernican System, and the Idea of the Infinity of the Universe in 1576. **The Huntington library bulletin**, p. 69-117, 1934.

JOHNSON, Francis. R. Astronomical thought in Renaissance England; a study of the English scientific writings from 1500 to 1645. **New York, Octagon Books, 1968 [c1937]**, v. 1, 1937.

JOHNSTON, Stephen. **Making mathematical practice: gentlemen, practitioners and artisans in Elizatethan England**. 1994. Tese de doutorado. University of Cambridge. Disponível em: http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/thesis/digges.htm Acesso em 22 de set. 2013

JOHNSTON, Stephen. **The identity of the mathematical practitioner in 16th – century England**. 1995. Disponível em: http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/texts/mathematicus.htm Acesso em: 01 de jan. 2016

KUSUKAWA, Sachiko; MACLEAN, Ian.**Transmitting knowledge: Words, images, and instruments in early modern Europe**. Oxford University Press, 2006.

LEWIS, Michael Jonathan T. **Surveying instruments of Greece and Rome**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

MCRAE, Andrew. To know one's own: Estate surveying and the representation of the land in early modern England. **The Huntington Library Quarterly**, p. 333-357, 1993.

PATTERSON, Louise D. Leonard and Thomas Digges: Biographical Notes. **Isis**, Chicago, v.42, n.2, p.120–121. Jun. 1951 Disponível em: http://www.jstor.org/stable/226968 Acesso em: 01 jan. 2016

POOLE, Kristen; BRUCKNER, Martin. The plot thickens: surveying manuals, drama, and the materiality of narrative form in early modern England. **ELH**, v. 69, n. 3, p. 617-648, 2002.

RICHESON, Allie Wilson. **English Land Measuring to 1800: Instruments and Practices.** Cambridge/London: The Society for the History of Technology/The MIT Press, 1966

ROCHE, John J. The radius astronomicus in England. **Annals of science**, v. 38, n. 1, p. 1-32, 1981.

RONAN, Colin A. Leonard and Thomas Digges.**Endeavour**, v. 16, n. 2, p. 91-94, 1992.

ROSSI, Paolo. **Os filósofos e as máquinas 1400-1700**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989.

ROUX, Sophie. Forms of mathematization (14th-17th centuries). **Early Science and Medicine**, v. 15, p. 319-337, 2010.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da S. **Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da S. INTERFACE ENTRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ENSINO: UMA ATIVIDADE DESENVOLVIDA COM BASE NUM DOCUMENTO DO SÉCULO XVI An interface between the history of mathematics and education: an activity based on a sixteenth-century document. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SAITO, Fumikazu. Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos "matemáticos do século XVI". In: **Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP**, v. 13, p. 1099-1110, 2012.

SAITO, Fumikazu. História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: **Actas VII Congreso Iberoamericado de Educación Matemática**. Montevideo, FISEM/SEMUR, p. 3979-3987, 2013a,.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101-112, 2013b.

SAITO, Fumikazu. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Rematec**, ano 9, n. 16, p. 25-47, 2014

SHELBY, Lon R. The geometrical knowledge of mediaeval master masons.**Speculum**, v. 47, n. 03, p. 395-421, 1972.

TAYLOR, Eva Germaine R. **The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England**. Cambridge: Institute of Navigation/Cambridge University Press, 1954.

TURNER, Anthony. John Dee, Louvain and the origins of English Instrument Making. In: M. Beretta, P. Galluzzi e C. Triarico (eds.), **Musa Musaei: Studies** in Scientific Instrument in Honour of Mara Miniati, p. 63-78, 2003

TURNER, Gerard L'Estrange. Introduction: Some notes on the development of surveying and the instruments used. In: **Annals of Science,** v. 48(4), p. 313-317, 1991.

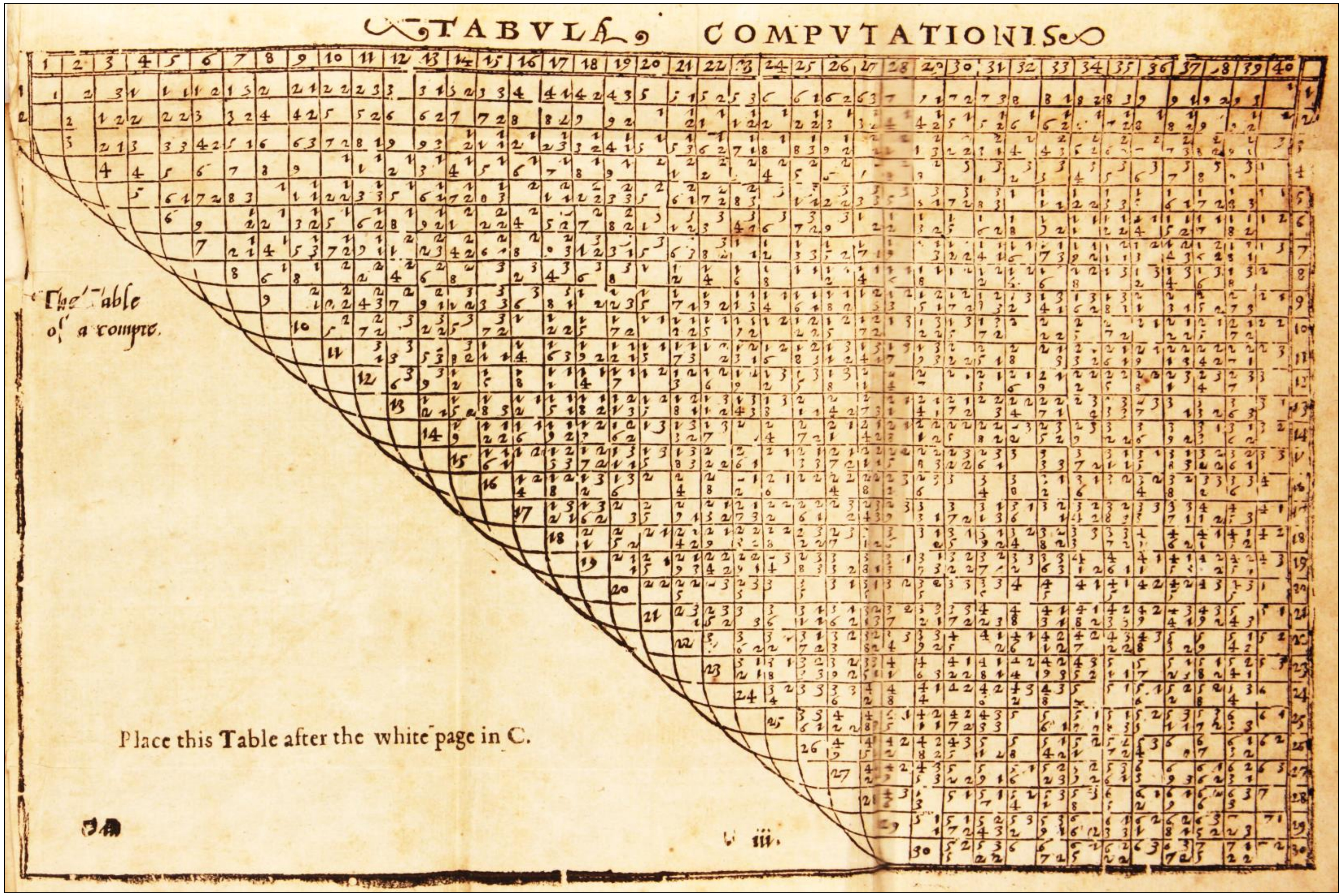
TURNER, Gerard L'Estrange. The instrument makers of Elizabethan England. **Sartoniana**, v. 8, 19-31, 1995

VAN DEN HOVEN, Birgit. **Work in ancient and medieval thought**: ancient philosophers, medieval monks and theologians and their concept of work, occupations and technology. Amsterdam: J. C. Gieben, 1996.

WALTON, Steven A. The mathematical and military sciences in Renaissance England. **Endeavour**, v. 24, n. 4, p. 152-156, 2000.

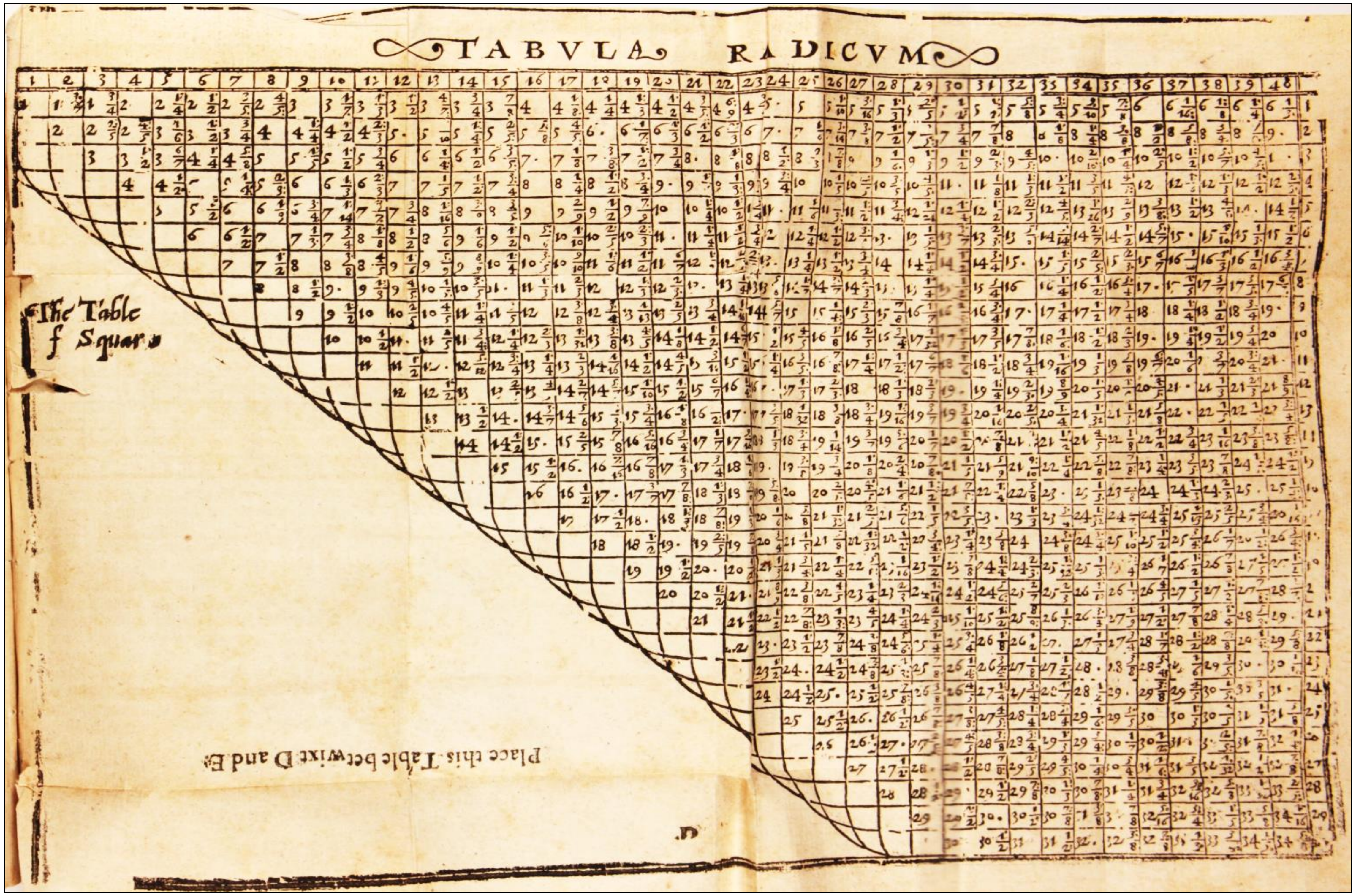
WEBB, Henry J. The Mathematical and Military Works of Thomas Digges, with an Accunt of his Life. **Modern Language Quarterly**, v. 6, n. 4, p. 389-400, 1945.

ANEXO A – TABELA DE DADOS



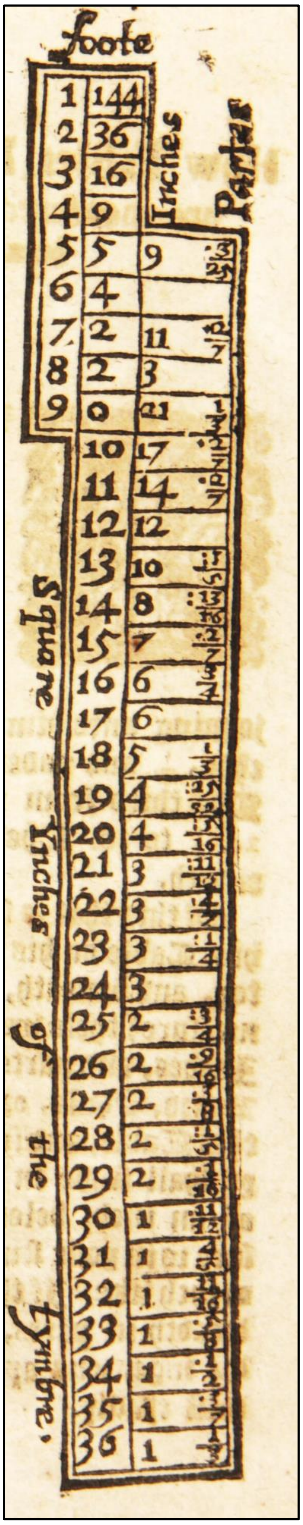
Disponível em: http://brbl-zoom.library.yale.edu/viewer/1300831
Acesso em 02 jan. 2016

ANEXO B – TABELA DE RAÍZES



Disponível em: http://brbl-zoom.library.yale.edu/viewer/1300837
Acesso em: 02 jan. 2016

ANEXO C – TABELA DE MEDIDA DE MADEIRAS



Disponível em: http://brbl-zoom.library.yale.edu/viewer/1300838
Acesso em: 02 jan. 2016

ANEXO D – TABELA DE CONVERSÕES

Disponível em: http://brbl-zoom.library.yale.edu/viewer/1300839
Acesso em: 02 jan. 2016