Moacir Benvindo de Carvalho

CONCEPÇÕES DE ALUNOS SOBRE PROVAS E ARGUMENTOS MATEMÁTICOS: ANÁLISE DE QUESTIONÁRIO NO CONTEXTO DO PROJETO AProvaME

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

Moacir Benvindo de Carvalho

CONCEPÇÕES DE ALUNOS SOBRE PROVAS E ARGUMENTOS MATEMÁTICOS: ANÁLISE DE QUESTIONÁRIO NO CONTEXTO DO PROJETO AProvaME

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, sob a orientação da Profa. Dra. Ana Paula Jahn.

PUC/SP
São Paulo
2006

Banca Examinadora

Dra. Ana Paula Jahn

Dra. Sônia Pitta Coelho

Dra. Mônica Karrer

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e Data: ______________

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

JOSÉ BENVINDO DE CARVALHO

e

FRANCISCA DE BARROS CARVALHO.

In memorian

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela minha vida, saúde e disposição para a realização deste trabalho, sem o qual nada do que foi feito poderia ser alcançado. A Deus, pois toda glória!

Agradeço à minha amada esposa Keila e às minhas queridas filhas Paula e Lílian, que, além de me incentivarem, também me apoiaram nessa jornada empreendida, com muita paciência e renúncia de muitas oportunidades em que fomos privados uns dos outros.

Agradeço, em especial, à minha querida orientadora, Profa. Dra. Ana Paula Jahn, que durante todo o período de orientação sempre me atendeu com muita disposição e alegria, que é sua característica marcante. Foram momentos especiais de aprendizado.

Agradeço também às Professoras Dra. Sônia Pitta Coelho e Dra. Mônica Karrer, que compuseram com a Dra. Ana Paula a banca examinadora, pela preciosa colaboração, com idéias e sugestões importantes, que muito enriqueceram meu trabalho.

Agradeço aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por meio dos quais pude aprofundar meus conhecimentos teóricos e práticos.

Agradeço ao Professor Wilson Almeida Amaral, diretor da Escola Estadual "Tarcísio Álvares Lobo", que em muito me apoiou nesse período de estudo e pesquisa e também pela liberalidade em abrir as portas da Escola, para que pudesse realizar a aplicação dos questionários e as entrevistas com alguns alunos.

E, finalmente, agradeço aos alunos da Escola acima citada, pela disposição com que participaram do Projeto, tanto no momento da prova como no momento das entrevistas, contribuindo, dessa forma, sensivelmente na realização de nosso trabalho.

RESUMO

Nosso trabalho insere-se no contexto do ensino e aprendizagem de provas e argumentos matemáticos por alunos da Escola Básica e foi desenvolvido no âmbito do Projeto *Argumentação e Prova na Matemática Escolar* (AProvaME). O principal objetivo de nosso estudo refere-se ao mapeamento das concepções de alunos sobre prova, a partir dos resultados de um questionário aplicado a cerca de 2.000 alunos de 14-15 anos. Mais especificamente, nosso trabalho centrou-se na análise de duas questões de Álgebra (A1 e A2), as quais solicitavam escolhas de argumentos por parte dos alunos e avaliação destes em termos de sua validade e generalidade. A elaboração e discussão das respostas são baseadas principalmente nas pesquisas de Balacheff (1988) e Healy & Hoyles (2000), sobre argumentos empíricos e formais e sobre a complexa passagem da produção de provas pragmáticas para as conceituais. Os resultados mostram que a metade dos sujeitos analisados na amostra total (de 1.998 alunos) tem preferência por argumentos empíricos (verificações para alguns casos) e um quarto escolhe argumentos narrativos. Quanto à avaliação da generalidade de uma prova, verificamos inconsistência nas respostas dos alunos, que consideram um mesmo argumento “sempre verdadeiro” e, simultaneamente, válido “somente para alguns casos”. No grupo sob nossa responsabilidade, constituído por três turmas de 8ª série (70 alunos), esses resultados se mantêm. Algumas razões dessas escolhas foram esclarecidas nas entrevistas. Na visão dos alunos, evidências empíricas são provas e os argumentos em língua natural são considerados mais claros, com maior poder de explicação.

Palavras-chave: Prova, Argumentação, Concepção, Matemática Escolar, Aprendizagem.

ABSTRACT

This work is inserted in the context of teaching and learning proofs and mathematical arguments in school mathematics and was developed as part of the project AProvaME (Argumentation and Proof in School Mathematics). The main aim of the study relates to the construction of a panorama of students´ conceptions about proof on the basis of the results of a questionnaire applied to nearly 2000 students aged between 14 and 15 years. More specifically, the study centres on the analysis of two questions related to Algebra (A1 and A2), which solicited the selection of arguments by the students and the assessment of these arguments in terms of their validity and generality. The questions from the questionnaire, as well as the discussions of students' responses are informed principally by the research studies of Balacheff (1988) and Healy & Hoyles (2000), both of which consider empirical and formal arguments and the complex passage from the production of pragmatic to conceptual proofs. The results show that half of the 1998 subjects who completed the questionnaire had a preference for empirical arguments (verification through some cases) and a quarter chose narrative arguments. With respect to the analysis of the generality of proofs, students' responses were generally somewhat inconsistent, with, for example, those who considered the same arguments to be both "*always true*" and valid "*only for some cases*". In the group of students under our responsibility, made up of three 8th grade classes (70 students), the same results were observed. Some of the reasons motivating these choices were illuminated in the interviews. In the vision of the students, empirical evidence counts as proof and arguments in natural language are judged as clearer, with a greater explanatory power.

Keywords: Proof, Argumentation, Conception, School Mathematics, Learning.

SUMÁRIO

Lista de Quadros

Lista da Figuras

APRESENTAÇÃO DO CONTEXTO E TEMA DE ESTUDO

Nosso trabalho final de Mestrado Profissional insere-se no projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME). Trata-se de um projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico[1] (CNPq), sob a coordenação da Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy, desenvolvido no Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Esse projeto tem duração de dois anos e iniciou-se em agosto de 2005.

Tomando conhecimento do referido projeto, tivemos interesse em participar dele, pois consideramos a questão da aprendizagem da prova e/ou demonstração muito importante, constituindo uma temática relevante para a Educação Matemática. De fato, inúmeras pesquisas nessa área levantam um intenso debate a respeito da complexidade do desenvolvimento de práticas que incluam ou enfatizem a argumentação e a produção de provas pelos alunos nas situações matemáticas da Educação Básica. Além disso, algumas pesquisas discutem o *status* da prova nos currículos e como (ou se) estas têm sido implementadas. Citamos, em particular, o estudo de Pietropaolo (2005), o qual destaca o consenso, entre pesquisadores em Educação Matemática, de que a questão da prova deve ser abordada na escola desde as séries iniciais, mas também o entendimento de que essa não é uma tarefa fácil.

---

[1] Processo n. 478272/2004-9.

Considerando nossa experiência profissional nos níveis do Ensino Fundamental e Médio, verificamos que, nesse universo, pouca ênfase é dada a essa questão, tanto por nós e por outros colegas em sala de aula como pelos livros didáticos por nós adotados. Essa constatação reforçou nosso interesse em desenvolver, no âmbito do Mestrado Profissional, um trabalho final nessa temática, buscando uma qualificação no assunto, com perspectivas de implementar situações de ensino e estratégias que nos permitam melhor abordá-lo em sala de aula.

Após a apresentação do tema e do contexto do estudo, nosso trabalho está organizado em quatro capítulos, cujos conteúdos descrevemos brevemente na seqüência.

No Capítulo 1, apresentamos o Projeto AProvaME, situando nosso trabalho nesse contexto, bem como destacando o objetivo principal do nosso estudo.

O Capítulo 2 é dedicado à descrição e análise preliminar do instrumento de coleta de dados para o mapeamento das concepções dos alunos, ou seja, o Questionário sobre Prova. Mais especificamente, relatamos as principais referências teóricas das pesquisas que fundamentaram a elaboração das questões A1 e A2 que analisamos em detalhes no estudo.

A discussão dos resultados das questões A1 e A2 do Questionário está presente no Capítulo 3. Essa discussão refere-se à análise das respostas dos alunos da amostra total do Projeto (1998 alunos), bem como do grupo de sujeitos sob nossa responsabilidade e para o qual aplicamos os questionários (70 alunos). Após a análise dos resultados, complementamos a coleta de dados por meio da realização de entrevistas com sete alunos, selecionados nesse grupo. As considerações metodológicas para a execução das entrevistas, os critérios de escolha dos alunos entrevistados e a descrição das informações obtidas encontram-se no Capítulo 4.

Concluímos o trabalho com as Considerações Finais, sintetizando os principais pontos do estudo.

CAPÍTULO 1

O PROJETO AProvaME[1]
ARGUMENTAÇÃO E PROVA NA MATEMÁTICA ESCOLAR

1.1 Descrição e contexto do projeto

A principal justificativa para a escolha do tema da pesquisa refere-se ao fato de a prova ter uma importância essencial na Matemática. Ela pode ser vista como uma ferramenta que diferencia a Matemática das ciências experimentais, caracterizando um método dedutivo de validação de conhecimentos que contrasta com os processos empíricos.

O projeto destaca que, conforme reconhecido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deveria contemplar atividades de prova e argumentação, permitindo aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. No entanto, várias pesquisas mostram que isso não se faz sem dificuldades, pois os alunos são influenciados por vários fatores e confundem "justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo" (Anexo 1, p. 1).

O projeto AProvaME tem como objetivo principal a investigação de processos de ensino e de aprendizagem da prova e da argumentação na Educação Básica. Ele indica também a importância de identificar as concepções e as dificuldades dos alunos e de uma abordagem mais eficiente por meio de situações de aprendizagem inovadoras que explorem novos contextos e novas ferramentas

---

[1] Todas as considerações deste item estão baseadas no documento que descreve o Projeto (cf. Anexo 1).

para a produção de provas formais. Da mesma forma, enfatiza a necessidade de o professor apropriar-se dessas inovações e abordagem.

Outro propósito do projeto é investigar a possibilidade de se trabalhar em ambientes computacionais, para que os alunos aprendam a explicitar as propriedades e relações em uma linguagem formal, relativa aos sistemas com os quais eles interagem.

Em síntese, o projeto propõe investigar dois aspectos interligados:

1) a elaboração de situações de aprendizagem integrando ferramentas computacionais, a partir de um levantamento das concepções de alunos;
2) o estudo dos processos de apropriação dessas situações pelo professor.

Dessa forma, os principais objetivos do projeto podem ser assim descritos:

1) *Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo.*
2) *Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados* (Anexo 1, p. 2).

Para o desenvolvimento do projeto, foi organizada uma equipe com seis pesquisadores do grupo TecMEM[2] e vinte e nove professores-colaboradores, sendo

---

[2] Grupo de Pesquisa *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC/SP.

todos estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP.

Consoante os objetivos descritos anteriormente, o projeto organizou-se em duas fases, que têm a participação de toda a equipe. A primeira fase é relativa ao levantamento de concepções sobre prova de alunos na faixa etária de 14-16 anos. Os resultados obtidos na Fase 1 devem servir de subsídios para a Fase 2, que terá como foco a elaboração e a avaliação de situações de aprendizagem. Embora nossa participação ocorra ao longo de todo o projeto, nosso trabalho final de mestrado será desenvolvido mais especificamente no tocante à Fase 1, perseguindo o propósito de mapeamento das concepções dos alunos sobre prova.

O projeto começou a ser desenvolvido em agosto de 2005, com a elaboração do instrumento principal de coleta de dados da Fase 1 – o questionário sobre prova (cf. anexo 2). Para isso, foram realizados encontros de trabalho presencial, quinzenalmente, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores. Um espaço virtual foi criado para facilitar a comunicação da equipe, no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto.

O questionário sobre prova é fortemente inspirado naquele desenvolvido por Healy & Hoyles (2000). Essas autoras desenvolveram projeto semelhante, a respeito da mesma temática, na Inglaterra. Algumas questões do questionário usado nessa pesquisa foram aproveitadas e adaptadas e outras novas foram incluídas.

O questionário foi composto de dois cadernos que contemplam dois domínios matemáticos: Álgebra e Geometria. Cada parte compreende cinco questões de dois tipos: (1) avaliação de vários argumentos como prova de uma dada afirmação e (2) construção de provas. Salienta-se, ainda, que os estudos de Balacheff (1988) sobre tipos de prova e validação fundamentam a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário, em particular nas questões de múltipla escolha (A1 e G1).

Com esse instrumento, o que se esperava dos alunos é que se dedicassem à resolução das questões propostas, elaborando e testando conjecturas e, principalmente, tentando justificar suas conclusões. Pretendia-se também observar se os alunos seriam capazes de construir ou avaliar uma prova matemática.

Depois de aproximadamente três meses nesse trabalho, o questionário estava concebido e passou-se à sua aplicação. Cada professor-colaborador teve a incumbência inicial de indicar cinco turmas, das quais três foram selecionadas aleatoriamente. Cada professor aplicou os questionários a essas três turmas de sua responsabilidade.

No total, o questionário foi aplicado a setenta e nove turmas, para alunos de oitavas séries do Ensino Fundamental e de primeiras séries do Ensino Médio de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo. O total perfaz 1.998 questionários respondidos. Os alunos tinham em média cinqüenta minutos para responder cada caderno de questões.

No nosso caso, o questionário foi aplicado em três turmas de 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública. Embora trabalhemos nessa escola, as turmas não eram nossas, mas de colegas, que colaboraram com a aplicação. Em média, cada caderno de questões foi aplicado em cinqüenta minutos, no mesmo dia.

Após a aplicação desses questionários, cada professor-colaborador foi responsável pela codificação das respostas segundo critérios estabelecidos no trabalho em equipe (cf. será descrito no Capítulo 2). De certa forma, com essa codificação, os professores-colaboradores puderam avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguindo essas evidências de argumentos matematicamente válidos, se os alunos compreendem o domínio de validade de uma prova e se são capazes de construir argumentos válidos. Também serve para identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na escolha e compreensão dos argumentos.

Finalizando a coleta e a codificação do questionário, foi feita a análise para uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos. Em seguida passou-se à Fase 2 do projeto, a qual consiste em trabalhar na concepção de atividades, ou situações de aprendizagem, envolvendo objetos geométricos com a utilização de *software* Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (Excel), para explorar problemas algébricos.

1.2 Objetivo do estudo

Conforme citado anteriormente, nossa participação no projeto está inserida na Fase 1, particularmente no objetivo do mapeamento das concepções dos alunos sobre prova por meio da análise dos resultados obtidos mediante a aplicação do questionário. Num segundo momento, por decisão conjunta da equipe, ficamos responsáveis pela análise quantitativa e qualitativa das questões A1 e A2. Trata-se de duas questões do tipo “múltipla escolha”, que reproduzimos a seguir para conhecimento do leitor – essas questões serão detalhadamente descritas e examinadas em capítulos posteriores.

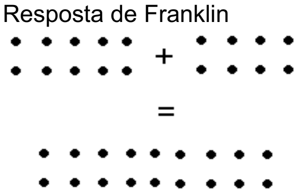
A questão A1 foi preparada com itens para avaliar a capacidade do aluno quanto à prova, partindo de vários pontos de vista, conforme descreveremos mais adiante. Os alunos deveriam fazer duas escolhas, a partir de alguns tipos de argumentos: qual ele (aluno) considera a que estaria mais próxima de seus próprios enfoques e para qual deles o professor daria a melhor nota. Essa questão será apresentada em detalhes no próximo capítulo.

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:
Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

> Resposta de Artur
>
> *a* é um número inteiro qualquer
> *b* é um número inteiro qualquer
> 2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
> 2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)
>
> *Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.*

> Resposta de Beth
>
> 2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
> 2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
> 2 + 6 = 8   4 + 6 = 10
>
> *Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.*

> Resposta de Duda
>
> Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.
>
> *Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.*

> Resposta de Franklin
>
> 
>
>
> *Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira.*

> Resposta de Hanna
>
> 8 + 6 = 14
>
> 8 = 2 x 4
> 6 = 2 x 3
> 14 = 2 x (4 + 3)
>
> 8 + 6 = 2 x 7
>
> *Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira.*

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:
Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.
Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

Figura 1: Questão A1 do Questionário sobre Prova

A questão A2 tem por objetivo avaliar a capacidade do aluno quanto à generalidade da prova, levando o aluno a refletir na questão A1, para responder A2, verificando que não é necessário construir uma nova prova.

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Figura 2: Questão A2 do Questionário sobre Prova

Esse estudo servirá para verificar, inicialmente, a visão do aluno sobre certos argumentos ou provas, sua generalidade e também um indicativo da competência do aluno na construção de provas. Assim, o objetivo do nosso estudo é complementar os dados obtidos no questionário, para que possa ser realizada uma análise mais detalhada do que pensam os alunos sobre as diferentes provas e argumentos apresentados.

Após o mapeamento e a análise das respostas do questionário (questões A1 e A2), o propósito é complementar o estudo com entrevistas clínicas individuais com os alunos que responderam ao questionário, visando obter mais dados e informações sobre as concepções dos alunos que as respostas do questionário não revelaram. Pretende-se, por meio das entrevistas, saber o que os alunos julgam ser a natureza de uma prova matemática; se eles vêem a prova como uma forma de verificação; como um meio de convencimento (para si próprio ou de outro) ou como explicação. Pretende-se, assim, que nosso estudo contribua para alcançar o objetivo da Fase 1 do Projeto. Além disso, com mais dados, para um mapeamento global, o estudo contribuirá para nossa formação, no sentido de ajudar a entender como os alunos pensam o que eles já sabem sobre prova e até que ponto pode avançar no tratamento de provas no contexto escolar.

Em síntese, desenvolveremos nosso trabalho final de mestrado no âmbito do Projeto AProvaME, assumindo o papel de professor-colaborador. Atuaremos especificamente na primeira parte do projeto (Fase 1), perseguindo o objetivo de mapeamento das concepções dos alunos sobre prova. Para tanto, não só analisaremos os dados obtidos no questionário, como os complementaremos com entrevistas individuais, conforme descreveremos mais adiante.

No capítulo seguinte será apresentado o questionário e serão detalhadas as questões A1 e A2, o nosso objeto do estudo.

CAPÍTULO 2

O QUESTIONÁRIO SOBRE PROVA

2.1 Introdução

Como mencionado no capítulo anterior, o questionário sobre prova foi inspirado em outro que fora aplicado na Inglaterra, em pesquisa desenvolvida pela Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), atual coordenadora do Projeto AProvaME. A versão original foi trabalhada pela equipe do projeto, durante o segundo semestre de 2005, modificada e adaptada para ser aplicada em alunos de 14-15 anos, brasileiros.

Esse instrumento, que serviu para coletar os dados, compreendeu questões sobre prova, em temas de Álgebra e de Geometria, mais precisamente cinco questões de cada.[1] O questionário buscou levantar dados sobre a visão geral do aluno concernente a argumentações e provas matemáticas, a sua generalidade das provas e também a competência do aluno na construção de provas.

As questões são de dois tipos:

- de múltipla escolha (A1, A2 e G1, G2). Nessas questões, vários argumentos são apresentados como provas de uma dada afirmação e os alunos devem avaliá-los;
- de produção de provas. Nesse caso, os alunos devem produzir provas ou justificativas de suas respostas, em geral, discutindo a validade de

1 O questionário, na íntegra, está reproduzido no Anexo 2.

> certas afirmações. É solicitado aos alunos que tentem explicar e escrever da maneira mais clara possível por que uma dada afirmação é verdadeira ou, se falsa, que contra-exemplos podem ser apresentados para refutá-las.

2.2 Pesquisas de referência para elaboração do questionário

Antes de discutirmos detalhadamente as questões, que são objeto do nosso estudo, apresentamos as principais considerações de pesquisas.

Os trabalhos de Balacheff (1988) sobre a aprendizagem de prova fundamentam os tipos ou a natureza dos argumentos apresentados nos itens do questionário, em particular nas questões de múltipla escolha (A1 e G1).

Do ponto de vista didático, Balacheff (1988) faz uma distinção entre prova e demonstração. A prova estabelece uma validação de uma afirmação de um modo mais amplo, mais geral, mais informal do que uma demonstração. A prova corresponde a um discurso sobre determinada afirmação que convence ou garante sua validade para um sujeito. Assim, a prova é menos formal do que a demonstração. A demonstração, por sua vez, é o desenvolvimento formal de um raciocínio (por passos dedutivos), com a utilização de um sistema de axiomas e/ou teoremas já provados, para se chegar a uma conclusão. É um tipo particular de prova, é a chamada prova formal.

No modelo hipotético-dedutivo em Matemática, essa distinção não ocorre, a prova é um desenvolvimento formal, pelo qual a partir da(s) hipótese(s) e, por meio de regras de inferência lógica, baseadas em axiomas e também com a utilização de teoremas já demonstrados, chega-se à tese. Esse processo é muito pouco conhecido pelos alunos, mesmo nos cursos superiores da área de Exatas, de acordo com Nasser&Tinoco (2001, p. 4), que afirmam: “O que se observa, atualmente, é que grande parte dos alunos não domina esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, e nem mesmo depois de alguns anos de exercício do magistério”.

Balacheff (1988) classifica as provas em pragmáticas e conceituais. Para esse autor, a evolução de provas pragmáticas para provas intelectuais (e para as demonstrações) não é marcada somente por uma evolução nas características de linguagem, mas também pelo *status* e natureza do conhecimento. As provas pragmáticas apóiam-se em saberes práticos essencialmente decorrentes de ações (aqui no sentido de ações concretas); as provas intelectuais exigem que o conhecimento seja colocado como objeto de reflexão ou de debate. Isso corresponde à clássica evolução descrita na teoria piagetiana (cf. Gravina, 2001).

Balacheff (1988) identifica os seguintes tipos de formas de validação:

- *empirismo ingênuo* : é o caso de se fazer experiência com alguns exemplos, para verificar se determinada propriedade é válida;
- *experiência crucial* : é um tipo de validação em que se propõe um exemplo com determinadas propriedades, buscando a validação em caso particular, e a partir daí considerando para o caso geral;
- *exemplo genérico*: em que se toma um exemplo que tenha propriedades próprias e que represente uma determinada classe. Daí, por meio de

operações e/ou transformações, ficam claras as razões da validade da afirmação para essa classe;

- *experiência mental* : é a validação de qualquer caso, com pensamentos que controlam toda a generalidade da situação e não somente por meio de casos particulares.

Gravina (2001) afirma que Balacheff considera as duas primeiras etapas como provas pragmáticas e a terceira como um marco de transição da prova pragmática para a prova conceitual. Assim, há entendimento de que o exemplo genérico pode ser reputado tanto como prova pragmática quanto como prova conceitual, dependendo da natureza efetiva da ação sobre o exemplo. Trata-se de uma etapa intermediária. A experiência mental, por sua vez, é classificada como conceitual. São as *provas pragmáticas* e as *provas intelectuais* que revelam o *status* do conhecimento em questão. As primeiras são explicações advindas de ações diretas sobre certas representações dos objetos matemáticos e as segundas já não dependem apenas da ação efetiva sobre a representação, mas tem nas ações interiorizadas e no discurso lógico-dedutivo o controle dos objetos e de suas relações.

Balacheff (1988) e outros educadores defendem a prova ingênua como uma argumentação aceitável no ensino, podendo ter várias escalas de rigor, dependendo do nível escolar do aluno que está envolvido no processo.

Rezende e Nasser (1994) citam Balacheff em seu trabalho e, mediante investigações, também classificaram alguns tipos de prova. Estes muito se aproximam dos de Balacheff, a saber: (a) justificativa pragmática, com a qual o aluno mostra que uma afirmativa é verdadeira para casos particulares. Seria a relativa ao empirismo ingênuo, a chamada “mostração”; (b) recorrência a uma autoridade, em que o aluno invoca a verdade pelo que o professor disse ou porque consta do livro didático. Nesse caso, o aluno não está produzindo uma prova, mas está remetendo ao “é verdade porque o professor disse ou está no livro”. Esse tipo de argumento não é mencionado por Balacheff; (c) exemplo crucial, em que o aluno desenvolve o raciocínio por meio de um exemplo que, para ele, serviria para qualquer outro caso, o que se aproxima ora da experiência crucial, ora do exemplo genérico, verificando-se, portanto, certa ambigüidade entre esses dois tipos; (d) justificativa gráfica, na qual o aluno mostra, por meio de um diagrama ou desenho, ou mesmo em Geometria, quando apresenta uma figura com algumas propriedades afirmando que o resultado é verdadeiro. Novamente, pode ser considerada como justificativa pragmática. Se por um lado, principalmente em Geometria, uma figura, desenho ou diagrama apresenta distorções ou imprecisões, podendo levar a erro no raciocínio, por outro lado, pode ajudar em relação à percepção de propriedades que garantem a validade (Nasser e Tinoco, 2001).

Segundo Gravina (2001), ao apresentar em duas categorias as provas produzidas por alunos, Balacheff (1987) indica uma necessidade de evolução cognitiva, levando os alunos a entenderem o significado de uma prova e se tornarem aptos a produzi-las. A questão é com quais abordagens, com quais atividades e como o ensino pode auxiliar essa passagem.

De Villiers (2001) assevera que os alunos têm dificuldades em compreender a necessidade da demonstração e que esse fato é bem conhecido dos professores do Ensino Médio e é identificado em toda investigação em Educação Matemática como um dos maiores problemas no ensino de demonstração.

De Villiers (2001) cita que o problema dos alunos com a demonstração não deve ser apenas atribuído a um desenvolvimento cognitivo lento (por exemplo, a uma falta de competência no raciocínio lógico), mas também ao fato de que os alunos não compreendem a função (o significado ou a finalidade) da prova.

Para esse autor, a função da prova tem sido vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correção das afirmações matemáticas. Nessa perspectiva, a idéia é de que a prova é usada principalmente para remover a dúvida pessoal ou a de céticos, idéia essa que prevaleceu e dominou sistematicamente a prática de ensino e a grande maioria das discussões ou da investigação referente ao ensino da prova.

Para Hanna (1989, apud De Villiers, 2001, p. 20), uma prova é um argumento para que uma afirmação seja validada, um argumento que pode assumir várias formas diferentes, desde que seja convincente.

Concluímos, então, que, para De Villiers (2001), a prova é um desafio para explicar, descobrir, sistematizar, comunicar para o desenvolvimento intelectual. Ele destaca o papel de explicação da prova, com o qual concordamos, podendo ser uma função mais significativa para os alunos (o porquê de ser verdade), do que a ênfase no papel de verificação.

Na elaboração do questionário, em termos de bases teóricas que determinaram as escolhas de argumentos inclusos em cada uma das questões de múltipla escolha, baseamo-nos na análise de Balacheff (1988). Descreveremos as questões que serão analisadas na seqüência deste capítulo.

Pelas respostas verificadas na questão A1 (vide Anexo 2), podemos afirmar que o argumento de Artur é do tipo experiência mental, pois valida a afirmação, não necessariamente em relação à forma apresentada, mas porque dá a estrutura genérica de número par, destacando efetivamente sua propriedade e com a representação por 2a fazendo um raciocínio nessa definição geral, que controla toda a generalidade de uma situação e não somente ilustra alguns casos particulares.

A resposta de Beth é baseada na experiência com alguns exemplos e, com isso, caracteriza-se como empírica ou, nos termos de Balacheff, ilustra um empirismo ingênuo. Essa resposta foi incluída por se tratar da resposta mais comum entre os alunos, conforme pesquisa concebida por Healy e Hoyles (1998).

Duda afirma que, se somarem dois números pares, o resultado vai sempre terminar em 0, 2, 4, 6, ou 8, e ser, portanto, um número par. Essa resposta evidencia uma propriedade própria dos números pares e que representa essa classe. A esse tipo de resposta podemos classificar de uma aproximação de experiência mental, pois usa uma definição de número par baseada no algarismo final, o que é genérico. No entanto, para ser considerada como prova completa, essa resposta teria de ser exaustivamente justificada, ou seja, dever-se-iam fazer as combinações para cada caso, justificando que a soma de números com essas terminações resulta sempre em número par. Isso não está justificado plenamente, pois a passagem da definição para a afirmação de que o resultado vai sempre ser par mereceria o que podemos chamar de prova exaustiva, isto é, a explicitação de todos os casos possíveis, que são em um número finito.

Franklin utiliza-se de um exemplo que apresenta uma subjetividade, que, dependendo do que levou o sujeito a dar essa resposta, pode ser considerada como experiência crucial. Há certa dificuldade em classificar esse tipo de prova pragmática, pois é necessário ter clareza do que o sujeito pensou, como considerou o exemplo e o que acredita ter mostrado com ele. Em discussões na equipe de pesquisa, esse argumento também foi visto ou classificado como exemplo genérico, pois parte de um exemplo que tem propriedades próprias, que representa uma classe quando mostra uma expressão com símbolos diferentes dos numéricos, mostrando que, ao se tomar um exemplo com determinadas características, busca-se a validação no caso particular.

Hanna parte de um exemplo envolvendo a soma de dois pares resultando em par (6 + 8 = 14). No entanto, o tratamento dado a esse exemplo, na seqüência, revela, assim como no caso de Artur, a estrutura de um número par como múltiplo de dois. Esse tipo de resposta Balacheff classifica como exemplo genérico.

Este trabalho centraliza a atenção nas questões de múltipla escolha A1 e A2, do caderno de Álgebra, que serão detalhadamente descritas a seguir, as quais servirão de base para nossa análise.

2.3 Descrição da questão A1 do questionário sobre prova

A questão A1 apresenta uma afirmação seguida de cinco respostas de alunos. Solicita-se ao aluno: (1) qual das respostas ele daria se fosse responder à questão, ou a que mais se aproxima de uma resposta pessoal; (2) no seu entender, para qual das respostas apresentadas o seu professor daria a melhor nota. Essa é a primeira questão apresentada e tem por objetivo subsidiar as demais, no sentido de os alunos terem uma idéia do tipo de resposta que podem dar, bem como o tipo de justificativa que se pode ter nessa situação. Abaixo é reproduzida a questão A1 (cf. Anexo 2).

Primeira parte da questão A1:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$

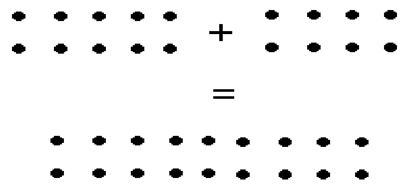
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Figura 3: Primeira parte da Questão A1 do Questionário sobre Prova

Os argumentos apresentados foram elaborados segundo alguns aspectos da classificação de provas de Balacheff, descritos anteriormente.

Além disso, pretendia-se identificar a influência da forma de apresentação da prova – língua natural, registro simbólico, representações visuais ou figurativas, etc. – na escolha dos argumentos, pelos alunos.

Na mesma questão A1, na sua segunda parte, propõe-se aos alunos pesquisados a escolha entre “sim”, “não” e “não sei” para “mostrar que a afirmação é sempre verdadeira” ou “mostrar que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares”.

A segunda parte da questão A1 foi reproduzida abaixo:

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer,
o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

Figura 4: Segunda parte da Questão A1 do Questionário sobre Prova

O objetivo é obter dados sobre a compreensão dos alunos a respeito da generalidade de cada prova, se vale para o caso geral ou para o caso específico. Também se pretende obter dados concernentes a coerência, se compreende efetivamente que ao responder “sim” para “sempre verdadeira” deve responder “não” para “verdadeira apenas para alguns números pares”. O que se quer, na realidade, é propor aos alunos que avaliem os argumentos relativos à generalidade de cada prova.

2.4 Descrição da questão A2 do questionário sobre prova

A questão A2 é complementar à segunda parte de A1 e propõe que o aluno analise o que é necessário para validar a afirmação de que “a soma de 2 números pares maiores que 100 é sempre par”, uma vez já provado que, “quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par”. O aluno deve decidir entre duas alternativas: (A) “Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada”, ou (B) “Zé precisa construir uma nova prova”.

Essa questão remete o aluno ao último item de A1, no sentido de solicitar a análise da generalidade de um enunciado e sua prova, ou seja, se realmente há necessidade, pelo já visto, de se construir uma nova prova, ou se, com base no que já foi trabalhado até aqui, é suficiente para o aluno responder (A).

A seguir, a reprodução da questão A2.

A2. Suponha que já foi provado que:

**Quando você soma dois números pares quaisquer,
o resultado é sempre par.**

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:
Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Figura 5: Questão A2 do Questionário sobre Prova

Pesquisadores como Balacheff (1988), Gravina (2001), Vaz (2004), Pietropaolo (2005), entre outros, mostram que muitos alunos não percebem que uma prova ou justificativa em Matemática tem que ser para o caso geral e não conseguem fazer essa relação particular-geral, ou, o que está compreendido num ou em outro caso. A questão A2 pretende verificar esse aspecto.

No capítulo seguinte, será feita uma descrição da amostra total (1998), bem como da amostra de 70 alunos relativa aos alunos da nossa escola. Além disso, apresentaremos um breve perfil desses alunos pesquisados e de sua escola.

Serão realizadas, também, uma análise dos resultados obtidos e uma comparação entre as duas amostras.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS DAS QUESTÕES A1 E A2 DO QUESTIONÁRIO SOBRE PROVA

3.1 Descrição da amostra

A amostra total é constituída de 1.998 questionários sobre prova, que corresponde ao grupo de alunos de 79 turmas de escolas públicas e particulares, sendo 34 da 8ª série do Ensino Fundamental e 45 da 1ª série do Ensino Médio. A idade dos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental é, em média, de 15 anos de idade, enquanto a dos alunos da 1ª série do Ensino Médio é de 16 anos.

Conforme descrito anteriormente, na primeira questão de cada caderno, o aluno deveria escolher uma entre as várias respostas. Nas seguintes, deveria produzir suas próprias respostas, apresentando justificativa para elas.

O grupo de alunos sob nossa responsabilidade, e ao qual aplicamos o questionário, é constituído de 70 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública, do período matutino, da periferia da Zona Norte da cidade de São Paulo. Esse grupo é composto de 46 meninas e 24 meninos, que correspondem a 66% e 34%, respectivamente, desse total. Essa amostra de 70 alunos representa 3,5% do total de 1.998 questionários aplicados. A idade dos alunos desse grupo é de, em média, 15 anos de idade, na mesma faixa que a amostra principal.

No que segue, organizamos os dados referentes às questões A1 e A2 do questionário, baseados na codificação das repostas obtidas. Primeiramente, para cada questão, apresentamos os resultados “gerais”, ou seja, relativos à amostra total

(1.998 alunos). Na seqüência, destacamos os resultados do grupo de 70 alunos, buscando algumas comparações.

3.2 Descrição dos resultados da questão A1

Fazendo uma análise dos resultados, verificamos que houve respostas variadas dadas pelos alunos, mas não muito distantes umas das outras. Os argumentos mais comuns e que representaram maioria nesse estudo foram os empíricos, como passamos a descrever.

Na questão A1 (primeira parte), houve o seguinte resultado entre o total dos alunos envolvidos no projeto (1.998 alunos)

A1						
Mais parecida						
Beth	Duda	Hanna	Artur	S/ resposta	Franklin	Total
1.057	524	122	112	112	71	1.998
52,90%	26,23%	6,12%	5,60%	5,60%	3,55%	100,00%

Quadro 1: Resposta ao 1º item da Questão A1 (Amostra Total)

Nessa mesma questão (A1), o resultado do nosso grupo de 8ª série foi o descrito abaixo.

A1						
Mais parecida						
Beth	Duda	Artur	Hanna	Franklin	S/ resposta	Total
29	27	7	4	2	1	70
41,43%	38,57%	10%	5,71%	2,86%	1,43%	100,00%

Quadro 2: Resposta ao 1º item da Questão A1 (grupo n = 70)

Comparando as porcentagens das respostas da amostra total com o outro grupo, a escolha do argumento de Beth apresenta um percentual de 51,76%, na amostra total, e 41,43%, na amostra deste estudo. Portanto, esses alunos decidiram por um argumento empírico, admitindo como prova o teste ou verificação da validade da proposição para alguns casos particulares. Com essa resposta, esses alunos estariam, segundo Balacheff (1998), no nível do *empirismo ingênuo*, admitindo como justificativa da validade o tratamento de alguns poucos exemplos.

O argumento de Duda, que obteve 26,23% das respostas na amostra total, teve esse percentual elevado para 38,57% no grupo menor. Isso revela que 27 dos 70 alunos aparentam ter condições de apresentar uma prova quase completa, do tipo *experimento mental* (cf. descrito no Capítulo 1).

Considerando os resultados globalmente, podemos observar que, na amostra total (n = 1.998), praticamente metade fica no *empirismo ingênuo* e somente um quarto escolhe um argumento narrativo (do tipo experimento de pensamento, segundo Balacheff), enquanto no nosso grupo (n = 70) cerca de 40% optou por um argumento empírico (no nível do empirismo ingênuo) e praticamente o mesmo percentual de alunos preferiu um argumento que caracteriza uma prova conceitual.

Surpreendeu-nos o fato de 5,60% da amostra total não responder esse item. No nosso grupo, apenas um aluno não respondeu essa questão. Esse protocolo será analisado com mais detalhes, a fim de identificar as possíveis causas desse comportamento (se deixou outras questões em branco) e, conforme o caso, isso poderá ser apurado melhor com a entrevista.

Optaram pela resposta de Artur 112 dos 1.998 alunos (5,60%) e 7 alunos (10%) do grupo menor. Conforme análise e classificação desse tipo de resposta pelos professores participantes do projeto – como correspondendo a uma prova formal do tipo experimento mental –, esses resultados já eram esperados. Assim, como afirmam Healy & Hoyles (2000), os alunos, em geral, não compreendem todo o conteúdo do argumento e não se sentem capazes de apresentar uma resposta desse tipo.

O argumento de Hanna tem percentuais de 6,12% na amostra total e 5,71%, do nosso grupo, próximos aos de Artur. Conforme descrito anteriormente, esse tipo de resposta corresponde ao que Balacheff denomina de “exemplo genérico”. Como se nota, esse tipo de resposta não é muito popular entre os alunos. As razões pelas quais isso ocorre – porque esse argumento se distancia do de Beth, por exemplo – podem ser exploradas nas entrevistas.

Por último, com menor percentual de escolha – 3,55% da amostra total e 2,56% do grupo menor –, aparece o argumento de Franklin. Ainda que possa ser considerado com certa generalidade e representando a estrutura de um número par, poucos alunos acreditam que esse argumento pode ser considerado como uma prova da afirmação. Esse resultado pode estar relacionado à forma do argumento – visual, com uma representação figural –, talvez não muito freqüente no trabalho com os números ou raramente apresentados pelo professor na sala de aula de Matemática. Novamente, temos aí um aspecto a ser aprofundado com as entrevistas.

Os quadros que seguem apresentam a situação da amostra total (quadro 3) e do nosso grupo (quadro 4), quanto ao segundo item da questão A1, a saber: qual argumento receberia a melhor nota por parte do professor, na opinião dos alunos pesquisados.

A1						
Melhor Nota						
Artur	Duda	Hanna	Beth	Franklin	S/ resposta	Total
777	467	329	288	75	62	1.998
38,39%	23,37%	16,48%	14,41%	3,75%	3,10%	100,00%

Quadro 3: Melhor nota que o professor daria (Amostra Total)

A1						
Melhor Nota						
Artur	Duda	Beth	Hanna	Franklin	S/ resposta	Total
28	26	10	6	0	0	70
40%	37,14%	14,29%	8,57%	0,00%	0,00%	100,00%

Quadro 4: Melhor nota que o professor daria no grupo de 8ª série (n = 70)

Tanto na amostra total (38,89%) como no nosso grupo (40%) a resposta de Artur foi a mais escolhida como aquela que alcançaria a melhor nota do professor. Isto sugere que os alunos identificam, entre as respostas, qual é a prova mais completa, talvez pelo fato de essa resposta apresentar-se na forma de um argumento algébrico-formal. Resta saber se essa escolha foi baseada na forma ou se os alunos realmente dominam seu conteúdo. Não somente a análise de sua generalidade na segunda parte da questão A1 pode dar esses indícios, mas se trata também de mais um aspecto a ser retomado nas entrevistas. Esse resultado é próximo daquele obtido por Healy & Hoyles (2000), que afirmam que em seu estudo ficou caracterizado que os estudantes pesquisados não são capazes de construir provas válidas. Além disso, a pesquisa mostrou que os alunos valorizam os argumentos empíricos, porém consideram também que os professores não dão melhores notas para esse tipo de argumento.

Do total, o argumento de Duda aparece em segundo lugar, com 23,37%, o que é coerente, pois é uma resposta parecida com a de Artur, conforme classificação de Balacheff, só que em forma de argumento narrativo. No nosso grupo essa porcentagem sobe para 37,14%, quase que se igualando aos 40% de Artur.

Uma hipótese para explicar isso é que os alunos do grupo menor podem não estar levando em conta somente a forma de argumento. Como mencionamos acima, é um ponto a ser aprofundado nas entrevistas.

Em seguida, aparece o argumento de Hanna, com 329 indicações, (16,48%) na amostra total, talvez pela coerência da seqüência desenvolvida nessa resposta, usando adequadamente um critério para provar que a soma de dois pares resulta em par, ainda que a partir de um exemplo. No grupo menor esse índice cai praticamente para a metade (8,57%), com 6 indicações em 70, mas mesmo assim mantendo o quarto lugar na preferência dos alunos.

Quanto à resposta de Beth, com 14,41% e 14,29% da amostra total e do grupo menor respectivamente, que obteve o maior índice quanto às escolhas pelos alunos, manteve praticamente o mesmo índice percentual, nos dois grupos, quanto a melhor nota a ser considerada pelo professor, abaixo de Artur, Duda e Hanna na amostra total, e abaixo de Artur e Duda na amostra menor, levando-nos a concluir que os próprios alunos têm consciência de que esta não seria a resposta valorizada pelo professor.

Da amostra total, 62 alunos, representando 3,1%, não responderam esse item, e da amostra menor, todos responderam. Conjecturamos que esses poucos sujeitos não responderam em virtude de não terem entendido e/ou de não saberem responder.

A seguir, é apresentado um quadro com dados do nosso grupo, identificando os sujeitos em suas escolhas. Pretendemos com isso obter mais informações no tocante aos comportamentos dos alunos, a fim de caracterizar tendências ou discrepâncias do grupo. Acreditamos que esse tipo de análise pode nos auxiliar na escolha dos sujeitos para as entrevistas.

	Mais parecida com a resposta que você daria.	Resposta que o professor daria a melhor nota.
Artur	**(7):** 13, 14, 24, 36, 48, 49 e 69.	**(28):** 3, 4, 11, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 27, 32, 35, 36, 37, 38, 40, 47, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 61, 66, 67 e 69.
Beth	**(29):** 4, 8, 16, 20, 25, 27, 28, 31, 32, 34, 35, 40, 44, 47, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65 e 67.	**(10):** 2, 5, 12, 13, 23, 34, 44, 48, 49 e 62.
Duda	**(27):** 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 26, 29, 30, 41, 42, 43, 45, 46, 51, 63, 66, 68, e 70.	**(26):** 1, 6, 7, 8, 9, 10, 17, 19, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 41, 42, 43, 45, 46, 55, 58, 60, 63, 68 e 70.
Franklin	**(2):** 12 e 23.	
Hanna	**(4):** 5, 37, 38 e 39.	**(6):** 25, 30, 39, 51, 64 e 65.
Resposta em branco	**33**	

Quadro 5: Respostas à 1ª parte da questão A1 no grupo de 8ª série (n = 70)

Como já mencionado, a resposta de Beth apresentou o maior número de indicações (29/70), como a mais parecida com a resposta que o aluno daria; e o argumento de Artur obteve o maior percentual de escolha (28/70), para o caso em que o professor daria a melhor nota. Isso caracteriza o fato de que os alunos se mostram capazes de apresentar uma resposta do tipo empírica (caso da resposta de Beth) para seus argumentos, enquanto entendem que o professor daria a melhor nota para um argumento do tipo *experimento de pensamento* (caso da resposta de Artur).

A seguir, são apresentados os resultados de cada argumento e a comparação da amostra total com o grupo de 8ª série, relativamente à segunda parte da questão A1.

Quanto às avaliações da amostra total (1.998 alunos):

Artur								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
1.220	375	311	92	439	832	295	432	1.998
61,06%	18,78%	15,56%	4,60%	21,97%	41,64%	14,76%	21,63%	100,00%

Quadro 6: Artur – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Beth								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
1.582	206	113	97	500	966	181	351	1.998
79,18%	10,31%	5,66%	4,85%	25,03%	48,35%	9,06%	17,56%	100,00%

Quadro 7: Beth – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Duda								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
1.352	311	222	113	496	906	248	348	1.998
67,68%	15,57%	11,10%	5,65%	24,82%	45,35%	12,41%	17,42%	100,00%

Quadro 8: Duda – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Franklin								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
1.099	441	333	125	477	798	368	355	1.998
55,00%	22,07%	16,67%	6,26%	23,87%	39,93%	18,42%	17,78%	100,00%

Quadro 9: Franklin – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Hanna								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
1.018	482	334	164	590	712	364	332	1.998
50,95%	24,12%	16,72%	8,21%	29,53%	35,64%	18,22%	16,61%	100,00%

Quadro 10: Hanna – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Quanto às avaliações da nossa amostra (n = 70), temos:

Artur								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
46	17	7	0	21	36	13	0	70
65,71%	24,29%	10%	0,00%	30%	51,43%	18,57%	0,00%	100,00%

Quadro 11: Artur – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Beth								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
57	6	5	2	20	38	2	10	70
81,42%	8,57%	7,13%	2,88%	28,56%	54,28%	2,88%	14,28%	100,00%

Quadro 12: Beth – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Duda								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
46	17	7	0	17	34	19	0	70
65,71%	24,29%	10%	0,00%	24,29%	48,57%	27,24%	0,00%	100,00%

Quadro 13: Duda – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Franklin								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
38	16	16	0	16	32	22	0	70
54,28%	22,86%	22,86%	0,00%	22,86%	45,71%	31,43%	0,00%	100,00%

Quadro 14: Franklin – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Hanna								
Sempre verdadeira				Às vezes verdadeira				
Sim	Não	N/sei	S/resp.	Sim	Não	N/sei	S/resp.	Total
33	25	12	0	21	34	15	0	70
47,14%	35,72%	17,14%	0,00%	30%	48,57%	21,43%	0,00%	100,00%

Quadro 15: Hanna – assertiva “sempre verdadeira” e “às vezes verdadeira”

Comparando os índices percentuais das respostas da amostra total (1.998) com as respostas da nossa turma (70), verifica-se que os valores são bastante parecidos, portanto mantendo-se uma mesma tendência em ambos os grupos, quanto à generalidade da prova nas respostas dos sujeitos.

	Mostra que a afirmação é sempre verdadeira.				
	Artur	Beth	Duda	Franklin	Hanna
Sim	(46): 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 59, 60, 63, 65, 67, 68, 69	(57): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 70	(47): 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 28, 29, 30, 31, 34, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 60, 63, 65, 66, 68, 69, 70	(38): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 27, 28, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 47, 50, 53, 55, 57, 60, 62, 64, 65, 66, 68, 70	(32): 1, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 35, 37, 39, 41, 44, 47, 50, 51, 52, 57, 64, 68, 69
Não	(17): 1, 2, 6, 7, 13, 16, 26, 31, 32, 41, 42, 43, 45, 58, 62, 64, 70	(6): 24, 29, 32, 46, 49, 69	(17): 5, 12, 13, 14, 23, 24, 25, 32, 40, 44, 49, 54, 56, 59, 62, 64, 67	(16): 13, 15, 16, 24, 26, 29, 38, 42, 43, 44, 45, 46, 52, 58, 59, 63	(26): 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 29, 30, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 49, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 62, 65, 67, 70
Não sei	(4): 17, 53, 61, 66	(5): 15, 17, 33, 54, 61	(4): 27, 35, 53, 61	(12): 1, 8, 12, 23, 34, 48, 49, 51, 54, 56, 61, 69	(8): 10, 15, 24, 36, 38, 53, 61, 66
Em branco	(3): 8, 33, 34	(2): 63, 66	(2): 33, 38	(3): 17, 33, 67	(4): 17, 33, 34, 63

Quadro 16: Afirmação sempre verdadeira (grupo n = 70)

No quadro 16, os alunos indicaram a generalidade dos argumentos, com 57 alunos afirmando que a resposta de Beth é sempre verdadeira. Em seguida, 47 e 46 alunos asseverando que as respostas de Duda e Artur, respectivamente, são sempre verdadeiras. Depois Franklin teve 38 indicações e Hanna, 32. O maior índice de alunos que asseguraram que a resposta não era sempre verdadeira foi para Hanna com 26 indicações.

	Mostra que a afirmação é verdadeira apenas para alguns números pares.				
	Artur	Beth	Duda	Franklin	Hanna
Sim	(20): 1, 2, 6, 7, 8, 18, 20, 23, 26, 31, 32, 34, 39, 42, 43, 45, 56, 64, 69, 70	(20): 15, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 39, 40, 46, 48, 49, 52, 58, 62, 63	(15): 3, 12, 14, 16, 22, 24, 25, 32, 39, 40, 52, 54, 56, 64, 67	(13): 15, 18, 20, 24, 26, 29, 39, 42, 45, 46, 49, 62, 65	(18): 4, 6, 7, 15, 22, 23, 29, 34, 39, 40, 42, 45, 46, 52, 58, 63, 67, 70
Não	(34): 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 36, 37, 40, 41, 46, 47, 49, 50, 54, 55, 57, 59, 60, 62, 65, 67, 68	(38): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 25, 26, 27, 28, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 45, 47, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 64, 65, 67, 68, 69, 70	(34): 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 29, 31, 33, 36, 37, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 50, 55, 57, 62, 65, 68, 70	(31): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 23, 25, 27, 28, 31, 32, 35, 36, 37, 40, 41, 43, 47, 50, 53, 55, 57, 59, 64, 68, 70	(35): 2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 50, 54, 55, 57, 59, 60, 62, 64, 65, 68, 69
Não sei	(5): 35, 52, 53, 61, 66	(2): 59, 61	(7): 27, 35, 49, 53, 59, 61, 69	(10): 1, 10, 12, 13, 17, 22, 52, 54, 56, 61	(7): 1, 20, 24, 36, 53, 56, 61
Em branco	(9): 17, 19, 21, 33, 38, 44, 51, 58, 63	(10): 8, 17, 19, 21, 33, 34, 38, 44, 51, 66	(12): 8, 17, 19, 21, 34, 38, 44, 51, 58, 60, 63, 66	(14): 8, 19, 21, 33, 34, 38, 44, 51, 58, 60, 63, 66, 67, 69	(8): 8, 19, 21, 33, 38, 44, 51, 66

Quadro 17: Verdadeira apenas para alguns números pares (grupo n = 70)

Comparando os dados do quadro 16 com os dados do quadro 17, constata-se que há uma consistência nas respostas do grupo, pois esperava-se uma coerência quanto ao número de “sim” para a generalidade do quadro 16, com o “não” do quadro 17, o que realmente aconteceu, apesar de algumas incoerências.

Os quadros a seguir apresentam as avaliações que o grupo menor fez sobre a generalidade (segunda parte de A1) da prova relativamente à resposta da primeira parte de A1, ou seja, se quando afirma que o argumento escolhido é o mais parecido com o que daria, se esse argumento vale para todos os casos, ou apenas para alguns casos. Por exemplo, no quadro 18, o aluno 14 respondeu que o argumento de Artur é o que ele responderia e afirmou que esse argumento é sempre verdadeiro.

No quadro 19, verificamos que, dos 29 sujeitos que escolheram Beth como a mais parecida e sempre verdadeira, somente o sujeito 32 declara que a resposta não mostra que a afirmação é sempre verdadeira, e os sujeitos 54 e 64 declaram não saber avaliar a questão. E o mais contraditório é que dos 26 restantes declaram que a resposta mostra que a afirmação é sempre verdadeira: 7 declaram ao mesmo tempo que a resposta indica que a afirmação é sempre verdadeira e verdadeira apenas em alguns casos; 2 declaram não saber se ela mostra que a afirmação é verdadeira apenas para alguns casos e 3 não responderam a questão. Podemos concluir que desses 29 sujeitos, apenas 16 declaram achar que a resposta mostra que a afirmação é sempre verdadeira e não mostra que é verdadeira apenas em alguns casos e aceitam evidências empíricas como provas.

Dos outros 13 sujeitos, 8 declaram que acham que a resposta mostra que a afirmação é verdadeira para somente alguns casos; 2 declaram não saber responder e 3 não responderam a questão.

	A mais parecida e sempre verdadeira	A mais parecida e verdadeira para somente alguns casos
Sim	(6): 14, 24, 36, 48, 49, 69	(1): 69
Não	(1): 13	(5): 13, 14, 24, 36, 49
Em branco	(1): 33	(2): 33, 48

Quadro 18: Artur – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

	A mais parecida e sempre verdadeira	A mais parecida e verdadeira para somente alguns casos
Sim	(26): 4, 8, 16, 20, 25, 27, 28, 31, 34, 35, 40, 44, 47, 50, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 64, 65, 67, 69	(8): 16, 20, 31, 32, 40, 52, 58, 62
Não	32	(16): 4, 25, 27, 28, 35, 47, 50, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 64, 65, 67
Não sei	(2): 54, 64	(2): 59, 61
Em branco		(3): 8, 34, 44

Quadro 19: Beth – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

Nos quadros 20 e 21 de Duda e Hanna, respectivamente, verificamos uma coerência, pois dos 27 sujeitos que escolheram a resposta de Duda como a mais parecida e sempre verdadeira apenas 2 sujeitos afirmaram que a resposta é também verdadeira para somente alguns casos; 19 responderam "não" para verdadeira para somente alguns casos e 6 deixaram a questão em branco. E, dos 3 que optaram por Hanna como a mais parecida e sempre verdadeira, apenas 1 declarou que também é verdadeira para somente alguns casos; 2 negaram essa possibilidade e 1 que respondeu que vale sempre, não respondeu que vale para alguns casos.

	A mais parecida e sempre verdadeira	A mais parecida e verdadeira para somente alguns casos
Sim	(27): 1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 26, 29, 30, 41, 42, 43, 45, 46, 51, 63, 66, 68, 70	(2): 3, 22
Não		(19): 1, 2, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 18, 26, 29, 30, 41, 42, 43, 45, 46, 68, 70
Em branco		(6): 17, 19, 21, 51, 63, 66

Quadro 20: Duda – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

	A mais parecida e sempre verdadeira	A mais parecida e verdadeira para somente alguns casos
Sim	(3): 5, 37, 39	39
Não		(2): 5, 37
Não sei	38	
Em branco		38

Quadro 21: Hanna – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

Quanto aos alunos 12 e 23, que optaram por Franklin como a mais parecida, responderam "Não sei", quanto à generalidade desse argumento. Isso parece indicar que eles têm dúvidas e não sabem avaliá-lo.

Os quadros a seguir apresentam as avaliações que o grupo menor fez sobre a generalidade da prova, em relação ao item concernente à melhor nota que o professor daria, ou seja, quando o aluno afirma que o argumento escolhido é o que o professor daria a melhor nota, se esse argumento vale para todos os casos, ou apenas para alguns casos.

Analisando o quadro 22 notamos que 6 sujeitos escolheram a resposta de Artur como a que o professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira e, destes, 3 escolheram, ao mesmo tempo, as duas possibilidades, ou seja, é sempre verdadeira e também é verdadeira para somente alguns casos, que juntamente aos outros 20 sujeitos escolheram essa segunda possibilidade. Concluímos que nesse caso verificamos uma incoerência.

	O professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira	O professor daria a melhor nota e é verdadeira para somente alguns casos
Sim	(6): 14, 24, 36, 48, 49, 69	(23): 3, 4, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 27, 35, 36, 37, 38, 40, 47, 50, 52, 54, 56, 57, 59, 67, 69
Não	13	(2): 16, 32
Não sei		(3): 53, 61, 66
Em branco	33	

Quadro 22: Artur – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

O mesmo ocorre com Beth no quadro 23, em que se tem que, dos 9 sujeitos que escolheram que é sempre verdadeira, 3 escolheram que é verdadeira para somente alguns casos, dos quais 2 escolheram as duas possibilidades ao mesmo tampo; 4 responderam negativamente para verdadeira para somente alguns casos e 3 não responderam para verdadeira para somente alguns casos, demonstrando certa incoerência nas respostas.

	O professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira	O professor daria a melhor nota e é verdadeira para somente alguns casos
Sim	(9): 2, 5, 12, 13, 23, 34, 44, 48, 62	(3): 23, 49, 62
Não	49	(4): 2, 5, 12, 13
Em branco		(3): 34, 44, 48

Quadro 23: Beth – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

Quanto a Duda e Hanna, podemos notar que há uma coerência, pois a maioria dos sujeitos que responderam que o professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira respondeu negativamente para a possibilidade de ser verdadeira apenas para alguns casos.

	O professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira	O professor daria a melhor nota e é verdadeira para somente alguns casos
Sim	(24): 1, 6, 7, 8, 9, 10, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 31, 41, 42, 43, 45, 46, 55, 58, 60, 63, 68, 70	(2): 22, 24
Não	24	(18): 1, 6, 7, 9, 10, 26, 28, 29, 31, 33, 41, 42, 43, 45, 46, 55, 68, 70
Em branco	33	(6): 8, 17, 19, 58, 60, 63

Quadro 24: Duda – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

Nenhum aluno optou pelo argumento de Franklin, como a prova para a qual o professor daria a melhor nota.

	O professor daria a melhor nota e é sempre verdadeira	O professor daria a melhor nota e é verdadeira para somente alguns casos
Sim	(4): 25, 39, 51, 64	39
Não	(2): 30, 65	(4): 25, 30, 64, 65
Em branco		51

Quadro 25: Hanna – Avaliação sobre a generalidade dos argumentos

3.3 Descrição dos resultados da questão A2

Os quadros abaixo apresentam os resultados da questão A2, já descrita anteriormente na página 39, em relação ao total dos alunos envolvidos no projeto (1998) – quadro 26 – e relativamente aos alunos da nossa amostra (70) – quadro 27.

A2				
Nada	Nova	Em branco	Não sei	Total
1.433	535	28	2	1.998
71,72%	26,78%	1,40%	0,10%	100%

Quadro 26: Respostas da questão A2 (Amostra Total)

A2				
Nada	Nova	Em branco	Não sei	Total
59	11	0	0	70
84,29%	15,71%	0%	0%	100%

Quadro 27: Respostas da questão A2 do grupo de 8ª série (n = 70)

Quanto ao nosso grupo, o quadro a seguir mostra os alunos que responderam “A” ou “B”, em A2.

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada.	(59): 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69
(B) Zé precisa construir uma nova prova.	(11): 3, 11, 18, 20, 24, 31, 35, 43, 53, 65, 70

Quadro 28: Respostas individuais da questão A2 do grupo de 8ª série (n = 70)

Em A2, a grande maioria dos alunos (71,72% na amostra total e 84,29% no nosso grupo) respondeu pela generalidade da prova, ou seja, os alunos entenderam que não é necessário produzir nova prova, uma vez que já havia sido provado para o caso geral (todos os números pares). Esse percentual elevado era esperado se comparado com a 2.ª parte da questão A1, tendo em vista que, tanto na amostra total como no grupo menor, a maioria optou pelo “sim”, quanto à generalidade da prova, de todos os argumentos.

Comparando esse resultado com a pesquisa apresentada no artigo de Healy & Hoyles (2000), a tendência mantém-se, pois a maioria (62%) dos estudantes ali pesquisados afirmou que não havia necessidade de construir nova prova, pois sua generalidade estava garantida.

3.4 Comparação entre os resultados das questões A1 e A3

Quanto às questões abertas, é possível que os alunos tenham dificuldade na compreensão. De fato, de acordo com Vaz (2004), em geral, a prova e sua elaboração são pouco, ou quase nada, solicitadas ao aluno. Assim, é observado que os aprendizes não compreendem e não sabem como trabalhar com questões envolvendo provas.

Nas questões abertas, nas quais os alunos deveriam produzir justificativas para suas respostas, a codificação foi baseada nos tipos de argumentos das questões A1 e G1 consoante os seguintes critérios:

0: resposta completamente errada, que não apresenta justificativa ou exemplo, ou resposta que simplesmente repete o enunciado, caracterizando um ciclo vicioso;

1: resposta que apresenta alguma informação pertinente, mas sem dedução ou inferência, ou apenas casos empíricos em sua justificativa, ou uma indicação de que concorda com a afirmação, ainda que simplesmente apresente uma justificativa, sem ter explicitado, conforme o caso: “sim”, “verdadeira”, etc.;

2: resposta em que há alguma dedução ou inferência, explicitação de propriedades pertinentes ou elementos que evidenciam uma estrutura matemática, sem contudo trazer todos os passos necessários para uma prova. Nesse caso, há uma subdivisão, ou seja: 2a, caso falta muito para o aluno chegar à prova (mais próximo de 1) e 2b, caso falta pouco para o aluno chegar à prova (mais perto de 3);

3: resposta apresentada corretamente, com a seguinte subdivisão: 3C quando o aluno apresenta resposta correta, totalmente justificada por meio de um cálculo, e 3P quando o aluno apresenta resposta correta, totalmente justificada com referência a propriedades pertinentes.

Como será exposto mais adiante, há necessidade de comparar a questão A1 com outras questões abertas (nas quais os alunos devem produzir suas próprias provas), razão pela qual esses códigos são apresentados.

Comparando as respostas de A1: "*Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par*", com a questão A3: "*Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par*" (cf. quadros 20 e 21), vemos que a tendência em ambas as amostras é a mesma, com a maioria das respostas indicando que as duas afirmações A1 e A3 são verdadeiras. Na A1, os alunos já sabiam que eram verdadeiras, bastava escolher um dos argumentos. Na A3, tinham que apresentar uma justificativa de a afirmação ser verdadeira.

Verdadeira ou falsa?			
Verdadeira	Falsa	Sem resposta	Total
1.640	233	125	1.998
82,08%	11,66%	6,26%	100%

Quadro 29: Respostas de A3 – Verdadeira ou Falsa? – (Amostra Total)

Verdadeira ou falsa?			
Verdadeira	Falsa	Sem resposta	Total
64	6	0	70
91,43%	8,57%	0,00%	100%

Quadro 30: Respostas de A3 – Verdadeira ou Falsa? – grupo de 8ª série (n = 70)

Justificativa						
0	1	2a	2b	3	Sem resposta	Total
563	1.109	84	44	13	185	1.998
28,18%	55,51%	4,20%	2,20%	0,65%	9,26%	100,00%

Quadro 31: Justificativas de A3 – (Amostra Total)

Justificativa						
0	1	2a	2b	3	Sem resposta	Total
29	38	2	1	0	0	70
41,43%	54,28%	2,87%	1,42%	0,00%	0,00%	100,00%

Quadro 32: Justificativas de A3 – grupo de 8ª série (n = 70)

Conclui-se que os alunos, embora tenham respondido um número significativo de “verdadeiro”, ou não apresentaram ou apresentaram poucas justificativas para essas respostas, significando que os alunos têm melhor desempenho na escolha ou avaliação de argumentos (questão A1), do que para construir suas próprias provas, justificando suas respostas (questão A3) (cf. quadros 31 e 32).

Com os dados coletados e tabulados, o próximo passo é a entrevista com alguns alunos que responderam ao questionário, visando ampliar as informações e complementar as respostas obtidas. As entrevistas serão do tipo semi-estruturado, com questões norteadoras sobre o que os alunos pensam a respeito de provas, relativas aos argumentos apresentados e referentes à função de uma prova. Na seqüência, serão introduzidas questões específicas concernentes às respostas de cada aluno, e em função das respostas novas perguntas serão formuladas ao entrevistado. Apresentaremos, no Capítulo 4, os sujeitos selecionados, bem como os procedimentos metodológicos para essa etapa do estudo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DAS PERSPECTIVAS DOS ALUNOS SOBRE PROVA NAS ENTREVISTAS

4.1 Considerações metodológicas

Para aprofundarmos as conclusões do nosso estudo, decidimos complementar os dados com a realização de entrevistas individuais com alguns alunos de nossa amostra de classes de 8ª série (n = 70 alunos).

A entrevista é um instrumento importante neste estudo, pois permite obter dados que não ficaram claros nos resultados apurados pela aplicação do questionário, ajudando a aprofundar a pesquisa e a complementar a coleta de dados de alcance superficial ou genérico (Fiorentini, 2006).

Trabalharemos com entrevistas do tipo *semi-estruturada*, comumente usada em pesquisas educacionais, as quais julgamos adequadas para obtermos mais evidências sobre como os alunos pesquisados pensam, tratam e convivem com a questão da prova em Matemática, no contexto escolar e, mais particularmente, no caso do questionário.

Tomaremos o cuidado, ao iniciar o processo de entrevista, de deixar o entrevistado bastante à vontade e descontraído, explicando a ele a natureza e o objetivo da entrevista e esclarecendo por que ele foi escolhido. Também informaremos que a entrevista será utilizada exclusivamente para efeito de investigação, sendo, portanto, sigilosa e com a identidade preservada. Usaremos, com autorização do entrevistado, gravações em áudio, para um melhor aproveitamento das respostas obtidas.

4.2 Critérios de escolha dos alunos para as entrevistas

A escolha dos alunos para as entrevistas foi baseada em alguns resultados que julgamos relevantes, indicativos de tendências ou discrepâncias em relação a nossa amostra total e aos resultados obtidos por Healy & Hoyles (2000).

Examinando o Quadro 5 do capítulo anterior (p. 46), vemos que dez alunos escolheram o argumento de Beth como aquele que receberia a melhor nota do professor. Isso não era esperado para esse item, e sim para o primeiro: escolha da resposta "mais parecida" com a do aluno pesquisado. Além disso, 9 desses 10 alunos afirmam que esse argumento "mostra que a afirmação é sempre verdadeira" (cf. quadro 16, p. 49). Apenas um aluno (sujeito 49) analisa corretamente a generalidade do argumento de Beth, assinalando que este mostra a validade somente para alguns casos. Assim, desse grupo, serão selecionados dois alunos para as entrevistas: os sujeitos 48 e 49.

No quadro 16, os alunos 16 e 32 escolheram Artur para a "melhor nota", mas erraram na avaliação desse argumento, colocando "não" para a alternativa "sempre verdadeira". É possível que esses alunos tenham atentado somente para a forma do argumento, mas não entendem completamente seu conteúdo e caráter genérico. Três outros alunos (sujeitos 53, 61 e 66), que também escolheram o argumento de Artur, declararam não saber analisar sua validade (resposta "Não sei" na segunda parte da questão A1). A partir desses resultados, julgamos pertinente selecionarmos mais dois sujeitos: o aluno 16 e o aluno 53, que inclusive assinalou de forma incorreta a alternativa B na questão A2.

O quadro 5 mostra que o aluno 48 escolheu o argumento de Artur como “mais parecido” com sua resposta, e o argumento de Beth para a “melhor nota do professor”. Essa resposta não era esperada, podendo ser considerada como uma escolha atípica. Esse mesmo aluno demonstra dúvida na análise do argumento de Franklin, respondendo “Não sei”. Por esses aspectos, esse aluno também será sujeito da entrevista.

Muitos alunos escolheram o argumento de Duda, tanto como a “mais parecida” como a que receberia a “melhor nota do professor”. A maioria desses alunos – com exceção de 6 – analisou corretamente a segunda parte da questão, respondendo que este argumento é “sempre verdadeiro”. Selecionaremos um desses alunos, de forma aleatória, para aprofundar essa questão do argumento narrativo e saber se para eles esse tipo de prova explica o porquê de a afirmação ser verdadeira, resultado obtido por Healy & Hoyles (2000).

O aluno 24 também participará das entrevistas, pois apresenta coerência e certa correção na análise dos argumentos na questão A1, mas erra na questão A2 ao assinalar a alternativa B, acreditando ser necessária nova prova.

Em síntese, os alunos selecionados para as entrevistas perfazem um total de sete, correspondendo à 10% de nossa amostra.

Como mencionamos, algumas questões da entrevista serão gerais, referentes ao questionário e ao que os alunos entendem por provas ou justificativas matemáticas. Na seqüência, serão formuladas questões específicas, a partir das respostas de cada aluno, ou seja, elaboraremos roteiros “personalizados”, com base nas respostas da parte de Álgebra dos questionários individuais (reproduzidos no anexo 3).

4.3 Realização das entrevistas

O cronograma das entrevistas foi organizado de comum acordo com os sujeitos, em dia e horário que melhor favorecia os alunos. Foram realizadas na biblioteca da escola em momentos em que não havia aluno, pois era período de aula. As entrevistas foram feitas individualmente, tentando evitar algum constrangimento por parte do sujeito entrevistado. A duração das entrevistas, em média, foi de 20 minutos. Elas ocorreram em três encontros. Contamos com a anuência e o apoio da direção da Escola e obtivemos as devidas autorizações dos alunos.

Apesar de nossa preocupação em deixar os sujeitos bem à vontade, num clima amigável e tranqüilo, em geral eles ficaram um pouco tensos e retraídos durante as entrevistas. Eles acabaram dando respostas curtas e objetivas, não se expressando com total desenvoltura, um pouco aquém do esperado. Esse comportamento pode ter alguma relação com o fato de que, embora sendo professor da Escola, não tínhamos contato com estes alunos. Além disso, percebemos que alguns alunos relacionaram a entrevista com aspectos avaliativos.

Um dos alunos não pôde comparecer à entrevista, por motivo de viagem, sendo substituído por outro que julgamos ter o mesmo perfil.

4.4 Discussão dos principais resultados

Pelas entrevistas realizadas, de modo geral, não obtivemos o volume de dados esperado e, conseqüentemente, as informações não se acrescentaram de maneira significativa aos resultados do questionário.

Quanto à avaliação da generalidade de um argumento, lembramos que, no questionário, as respostas não eram muito consistentes e o desempenho nesta parte da questão A1 foi baixo. Nas entrevistas, quando retomamos essa questão, solicitando aos alunos que justificassem suas respostas, percebemos que eles não estavam seguros para responder, hesitando bastante. Alguns alunos afirmaram "ter chutado" a resposta e resistiram em retomar a questão. O aluno A49, que havia afirmado que a resposta de Beth era verdadeira apenas para alguns casos, muda sua resposta, apresentando erro na nova avaliação. Ele explica que:

> "Eu acho que eu chutei no dia. A resposta de Beth é sempre verdadeira...".
>
> (A49, parte II da Questão A1.)

O aluno A16, quando perguntado por que havia respondido "não" para "sempre verdadeira" e também para "verdadeira apenas em alguns casos", afirmou que não se lembrava e também havia "chutado":

> "Eu não lembrei. Acho que foi chute mesmo... Não sei..."
>
> (A16, parte II da Questão A1.)

Alguns alunos evocam a questão da clareza do argumento, considerando que uns explicam mais que outros. Observamos ainda que eles atentam para a forma do argumento. É o caso do aluno 16, que afirma ser a resposta do Artur para o professor, pois é mais formal, apresentada com representação simbólico-algébrica. Ele declara o seguinte:

> "A resposta de Artur é mais para o professor mesmo. Ele especifica mais a resposta" [...] É porque eu achei que o professor vai entender melhor a resposta de Artur".
>
> (A16, parte I da Questão A1.)

Já o aluno A5, que respondeu que o professor daria a melhor nota para Beth, entendeu que essa resposta tem forma mais clara e afirma:

> "É porque eu acho, pra mim, que está mais explicado. Ela [Beth] colocou os números assim... digamos assim... não os melhores... mas essa forma está mais bem explicada, que nos outros. Acho que é uma forma mais clara".
>
> (A5, parte I da Questão A1.)

O aluno A49 também optou por Beth como aquela para a qual o professor daria a melhor nota, afirmando que:

> "Porque Beth fez bastante cálculo, começando com 2. Fez bastante cálculo... então ela provou. Então o professor daria a melhor nota".
>
> (A49, parte I da Questão A1.)

O aluno A48 seguiu a mesma linha de raciocínio de A49, escolhendo o argumento de Beth como a que receberia melhor nota pelo professor, pois apresenta mais exemplos para verificação da propriedade.

> "Porque Beth aqui está dando exemplos com mais números e só tem números pares e o resultado só dá números pares. Eu acho que o professor escolheria a Beth".
>
> (A48, parte I da Questão A1.)

O aluno A24 escolheu o argumento de Duda como a resposta a que o professor daria a melhor nota e, quando confrontado com a resposta de Artur, ele afirma que a resposta de Duda é mais clara que a de Artur:

> "Porque é assim, a resposta de Duda é mais clara. A resposta de Artur não é tão clara para o aluno, como a de Duda".
>
> (A24, parte I da Questão A1.)

Essas respostas vêm confirmar a dificuldade desses alunos na avaliação da generalidade de um argumento, já revelada na análise do questionário. Os alunos demonstraram insegurança nessa questão e não apresentaram explicações ou justificativas conceituais, ou seja, que expressam idéias ou propriedades matemáticas dos objetos em jogo. É provável que aceitem evidências como provas e, portanto, não atribuem muito significado a essas questões.

Cabe observar que a maioria dos alunos entrevistados acertou a questão A2 no questionário. Quando solicitados nas entrevistas, souberam explicar ou justificar suas respostas. Transcrevemos abaixo, a título de exemplo, a resposta do aluno A16.

> "Tipo assim ó, vamos supor 110+120 = 230, aí é par. Acho que, sempre que forem dois pares, o resultado sempre vai dar par. Mesmo que sejam menores ou maiores que 100, sempre vai dar par... porque vale para todos".
>
> (Aluno A16, questão A2.)

As respostas dos entrevistados também permitem verificar alguns elementos da perspectiva deles em relação a provas e atividades matemáticas. Os alunos declaram preferir fazer cálculos a justificar, e, quando tentam, apresentam dúvidas, não tendo clareza do que devem “colocar” em uma justificativa. Esse é o caso do aluno A5, cujo comentário transcrevemos abaixo.

> “Eu tenho enorme dificuldade em Matemática. Só que assim, para mim eu acho que é melhor fazer do que justificar... Não sei muito bem o que tem que colocar para justificar...”.
>
> (Aluno A5, questão A1.)

O aluno A48, quando questionado se estava acostumado com esse tipo de questão em Matemática, responde positivamente, declarando que já havia feito esse tipo de atividade, mas, “em geral, é mais cálculo mesmo”. Esse tipo de declaração confirma nossas hipóteses iniciais que de que esses alunos não têm uma cultura de prova e argumentação nas aulas de Matemática.

Ao aluno A68 foi perguntado o seguinte: “Beth usou somente números. Essa resposta é suficiente para se afirmar que é sempre verdadeira?”. A resposta desse aluno demonstra que uma ou algumas evidências são suficientes para provar, pois o resultado é muito familiar para esse aluno, sendo conhecido *a priori*. Ele responde:

> “Não sei, acho que sim, porque vai dar sempre par”.
>
> (Aluno A68, questão A1.)

As respostas de A53 também denotam que este aluno não dá significado à necessidade de justificar para o caso geral. Sua avaliação só considerou o fato de todas as respostas confirmarem o resultado da soma de dois pares resultarem par.

No próximo item, passaremos às considerações finais, sintetizando os principais resultados do nosso estudo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos nosso trabalho descrevendo nossa participação no Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME), que tem como objetivo principal a investigação de processos de ensino e de aprendizagem da prova e da argumentação na Educação Básica. Na 1ª fase do projeto, buscou-se identificar as concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo.

O nosso trabalho refere-se, especificamente, a esse objetivo concernente ao mapeamento das concepções dos alunos sobre prova, tendo como principal instrumento para obtenção de dados o questionário sobre prova. Esse questionário compreende questões de Álgebra e Geometria e foi elaborado com base naquele utilizado na pesquisa de Healy & Hoyles (2000), no contexto inglês. Ficamos responsáveis pela análise quantitativa e qualitativa das questões A1 e A2 de Álgebra, visando apurar detalhadamente o que pensam os alunos a respeito das diferentes provas e argumentos apresentados.

Esse questionário foi aplicado em escolas do Estado de São Paulo, a cerca de 2.000 alunos com faixa etária entre 14-15 anos (8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio). A partir da coleta de dados, as respostas dos alunos foram codificadas e analisadas criteriosamente. Para isso, apoiamo-nos em algumas pesquisas de referência da área, em particular nas idéias de Balacheff (1988) e no estudo de Healy & Hoyles (2000).

Em seguida, foi realizada uma discussão sobre os resultados obtidos por meio das respostas das questões A1 e A2. Os resultados mostram que os alunos são muito inconsistentes em suas respostas, apresentando um baixo desempenho. A preferência das respostas, na sua maioria, é pelos argumentos empíricos, que correspondem às provas pragmáticas segundo Balacheff (1988). Assim como os resultados obtidos na pesquisa de Healy & Hoyles (2000), os alunos preferem os argumentos empíricos, porém consideram que os professores não têm essa mesma preferência e que, conseqüentemente, não atribuiriam melhores notas a esse tipo de argumento. Nossas análises revelam também que, em geral, os alunos não compreendem todo o conteúdo de um argumento e não são capazes de avaliar a generalidade de forma adequada.

Verificamos também que os alunos não têm familiaridade com as respostas do tipo “exemplo genérico”, Balacheff (1988), ou seja, quando se toma um exemplo que tenha propriedades próprias e que represente uma determinada classe. Daí, por meio de operações e/ou transformações, ficam claras as razões da validade da afirmação para essa classe. Esse tipo de resposta não é popular entre os alunos.

Outro fato considerado em nosso trabalho foi o de que poucos alunos aceitam argumentos visuais (ou em registro figural), como no caso da resposta de Franklin na questão A1. Talvez esse tipo de argumento seja pouco freqüente no ensino de números, fazendo com que os alunos não estejam familiarizados com os mesmos.

Para obter maiores esclarecimentos sobre as respostas dadas pelos alunos, foram realizadas entrevistas com sete alunos do grupo de 8.ª série sob nossa responsabilidade (perfazendo um total de 70 alunos). Os alunos foram indagados quanto às suas respostas nas questões A1 e A2 do questionário sobre prova, bem como sobre suas experiências e compreensões sobre provas e validações nas aulas de Matemática. Com isso, obtivemos alguns esclarecimentos complementares, que confirmaram algumas hipóteses e ajudaram em nossas conclusões, como relatado no Capítulo 4.

Constatamos em nossa pesquisa que os alunos tiveram muitas dificuldades em trabalhar com prova e argumentação nas questões apresentadas, talvez por falta de hábito e convívio com esse tema.

O trabalho desenvolvido foi muito importante, pois pretendemos aproveitar os resultados obtidos para uma futura atuação em sala de aula. De fato, construímos algumas referências para abordar, com os alunos, a questão da prova e da argumentação, que sabemos que estão praticamente ausentes no ensino. Salientamos, ainda, que deveremos apresentar este trabalho aos nossos colegas da Escola, até mesmo por solicitação da Direção que sempre nos estimulou e nos apoiou.

Profissionalmente, o estudo nos fez refletir sobre a postura do professor diante de uma classe, no que se refere ao tema abordado no projeto, influenciando-nos a repensar algumas estratégias de ação em sala de aula, além de acrescentar muito para nossa formação.

Fica nosso desejo de que outros projetos como o AProvaME sejam apoiados e desenvolvidos, ampliando os estudos nessa temática. Sugerimos que os estudos e resultados obtidos no âmbito do Projeto sejam amplamente divulgados nos cursos de Graduação (formação inicial), servindo como indicações de leitura para discussões sobre o tema, de forma que os futuros professores tenham mais conhecimento da nossa realidade atual e das concepções dos alunos sobre provas matemáticas e tentem, de uma forma ou de outra, mudar esse quadro, desenvolvendo com seus alunos atividades sobre provas e argumentação, fazendo-os participar das diversas etapas do processo de prova, mudando a cultura da sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

BALACHEFF, N. Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18 (2), p. 147-176, 1987.

———. Aspects of proof in pupil's practice of school Mathematics. In: PIMM, D. (Ed.) *Mathematics teachers and children*. London: Hodder and Stoughton, 1988. p. 216-235.

———. Apprendre la preuve. In: SALLANTIN, J.; SZCZECINIARZ, J. J. (Ed.). *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. Paris: PUF, 1999. p.197-236.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática: ensino de 5ªa 8ªséries. Brasília, 1998.

DE VILLIERS M. An alternative approach to proof in dynamic geometry. In: LEHRER, R.; CHAZAN, D. (Ed). *New direction in teaching and learning Geometry*. 1998. p. 369-393.

———. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, n. 63, p. 31-36, June 2001.

FIORENTINI, Dario. *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. In: ———; LORENZATO, Sergio (Coord.). *Formação de professores* Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAVINA, M. A. *Os ambientes da geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo*. 2001. Tese (Doutorado) – Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HEALY, L.; HOYLES, C. *Justifying and proving in school Mathematics*. University of London: Institute of Education Technical Report, 1998.

———. A study of proof conception in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), p. 396-428, 2000.

NASSER, I.; TINOCO, L. (Coord.). *Argumentação e provas no ensino de matemática*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ – Projeto Fundão, 2001.

PIETROPAOLO, R.C. *(Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática*. 2005. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

VAZ, R.L. *O uso das isomerias do software Cabri-Géomètre como recurso no processo de prova e demonstração*. 2004. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

ANEXO 1

PROJETO AProvaME

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.
3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns (Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*.: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research*. London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

ANEXO 2

QUESTIONÁRIOS DE ÁLGEBRA E GEOMETRIA APLICADOS.

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

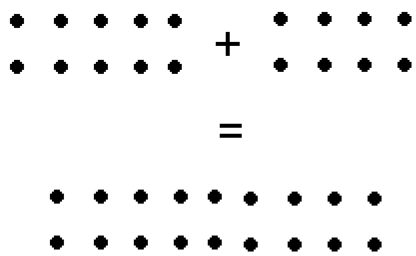
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. **A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?**

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma:.......................................

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

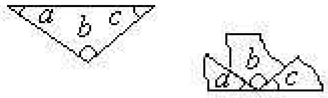
Projeto AprovaMe

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180°.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

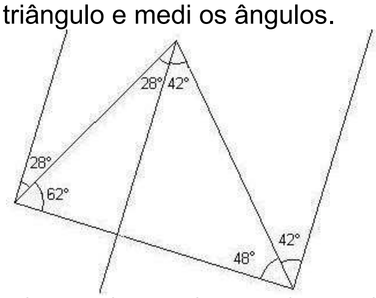
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180°.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

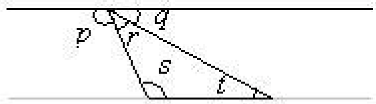
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^\circ - 28^\circ) + 28^\circ + 42^\circ + (90^\circ - 42^\circ) = 180^\circ$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:

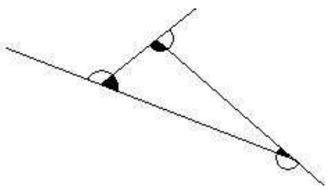


Afirmações	Justificativa
$p = s$.......................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^\circ$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^\circ$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter gir um total de 360°. Você pode ver que cada ângulo externo quand somado ao ângulo interno deve dar 180° porque eles formam um Isso faz um total de 540°. 540° – 360° = 180°.



Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180°.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

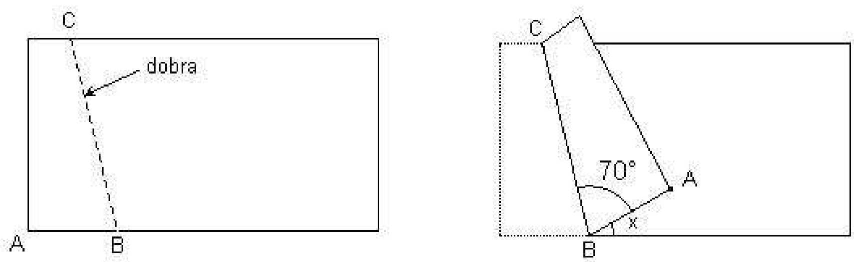
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°.

Justifique sua resposta:

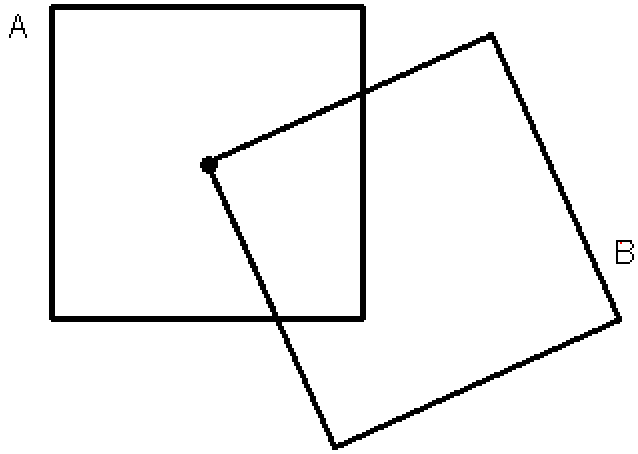
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

ANEXO 3

PROTOCOLOS DOS ALUNOS ENTREVISTADOS

5

Questionário sobre Prova

Nome: Luciana Oliveira da Mata

Masculino ou Feminino: F

Escola: E. E. Tarcísio Álvares Lobo

Turma:

Data de nascimento: 27/9/90

Data de hoje: 22/11/05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Pós-Graduação Educação Matemática

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

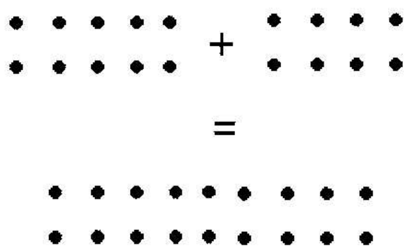
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Resposta de HANNA

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Resposta de Beth.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. A

(B) Zé precisa construir uma nova prova.

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

ex: 5x4 = 20x3 = 60 x 2 = 120

ou seja aqui só está comparando que quando somamos um número ímpar qual[...] resultado é sempre par

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

exemplo: 9+12 = 21 (3x7 = 21)

sim o resultado é sempre um múltiplo de três.

A5: Sabendo que:

Obs: não consegui fazer.

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

5 x 4 x 3 x 2 x 1

conclusão: essa multiplicação ~~conta~~ acima realmente é (par.)

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Questionário sobre Prova

Nome: Jayná R. P. Contini

Masculino ou Feminino: F

Escola: E. Estal.

Turma:

Data de nascimento: 29/07/1991

Data de hoje: 22/11/05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $4 + 6 = 10$

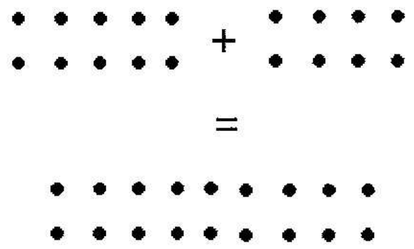
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Artur

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

(~~Artur~~) Beth

Escolhi Artur, pois 2 é um nº par e a e b são letras representativas como qualquer.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	~~Sim~~	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☒

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

Acho a 1ª pois ~~a~~ ele está afirmando ~~a~~ o que ele já ~~fez~~ fez cálculo p/ chegar a esta afirmação

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

Verdadeira, pois 1+3=4 → 5+3=8

sempre que colocamos 2 números ímpares quaisquer sempre dará positivo

Ex = 7+3=10 11+7=18
9+5 =14 21+11=32

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

Verdadeira, pois 12(múltiplo de 3 ... 9(múltiplo de 3)dá 21 = que é mú... de 3.

18 + 12 = 30 → multiplo 3
...tiplo 3 ↳ multiplo 3

... = 24 + 15 = 39 → multiplo de 3
30 + 18 = 48 → multiplo de 3

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique Sim pois 5 x 4 = 20 x 3 = 60 x 2 = 120 x 1 = 120

$\boxed{120}$

b) O que significa **8!** ?

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique não, pois o resultado ~~40326~~

40.326

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique Não

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique 6 Pq 2 x 3 = 6

16

Questionário sobre Prova

APROVAME

Nome: Leonardo da Rocha Silva

Masculino ou Feminino: M

Escola: EE Jardim Chaves Lobo

Turma: ....

Data de nascimento: 02 03 91

Data de hoje: 22 11 05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Pós-Graduação Educação Matemática

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

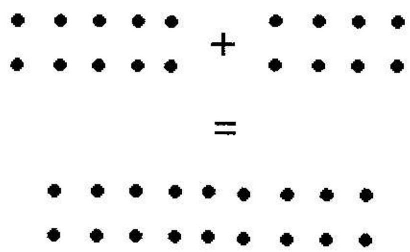
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Resposta da Beth

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Resposta de Artur

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☒

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

É falsa, porque por exemplo se você somar 3 + 5 = 9 o resultado é ímpar, e prova que nem todo número ímpar somado com o outro dá par; em alguns casos pode até dá par mais não é toda vez

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

É verdade, por que eles sempre são múltiplos e quan[do] é múltiplo é mais fácil de acertar

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

É porque se fazer essa conta o resultado é par.

5 + 5 = 10 é par

$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array}$ $\begin{array}{r} 9 \\ \times 3 \\ \hline 11 \end{array}$ $\begin{array}{r} 11 \\ +2 \\ \hline 13 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3 \\ \times 1 \\ \hline 14 \end{array}$

b) O que significa **8!** ?

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

~~[illegible] porque ele [illegible] direito~~
Não é por que 21 não é par como 8, mais se 8 fosse par
[illegible]

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Sim porque em alguns casos um número pode ser
par e o seu múltiplo impar.

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

É 23, por que eu acho que é do mesmo jeito
que espriça em cima da folha

G1

Questionário sobre Prova

APROVAME

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma: ....

Data de nascimento: .... Data de hoje: ....

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

Pós-Graduação Educação Matemática

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2\ (a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

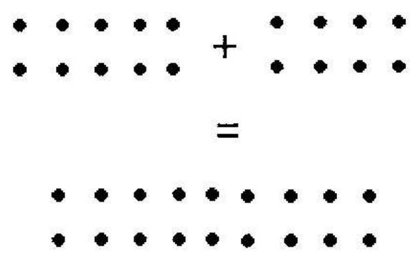
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

3+ [illegible]
13+13 [illegible]
[illegible]

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

[illegible]
[illegible] 12 [illegible]

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Questionário sobre Prova

APROVAME

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma: ....

Data de nascimento: 13/09/91 Data de hoje: 05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

Pós-Graduação Educação Matemática

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4$ $\quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6$ $\quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8$ $\quad 4 + 6 = 10$

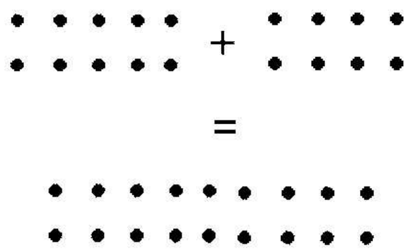
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Artur

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Beth

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☒

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

R: $3+3=6$

$13+13=26$

R: sim, pelo menos é o que parece que
te qualquer números ímpares somados
dão par

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

$12+18=30$

é verdadeira 12 é múltiplo de três e dezoito
é de seis e o resultado é de três.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

sim, porque ele multiplicans esses números dá um número par.

b) O que significa **8!** ?

é um número par
8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

não, pois o resultado é 40323

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

não

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

é 6

Questionário sobre Prova

Matheus martins Mato

Nome: ~~Matheus martins Mato~~ .... Masculino ou Feminino: M....

Escola: Etl... Turma:.......................................

Data de nascimento: 31/01/91........... Data de hoje: 23/11/05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

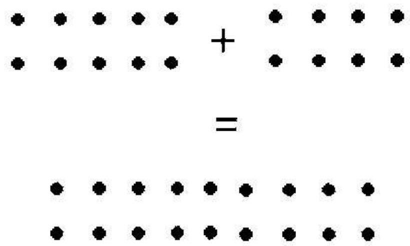
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Resposta de ~~[illegible]~~ Duda

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Resposta de Duda

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☒

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

R: Verdadeira porque somando dois numeros impares quaisquer vai sempre terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8

Exemplo

1+3 = 4 5+3 = 8

1+1 = 2 9+3 = 12

3+3 6 151 + 153 = 304

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

R: Verdadeira

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

Sim, Porque 5 x 4 = 20 x 3 = 60 x 2 = 120 x 1 = 120

120 é um numero par

b) O que significa **8!** ?

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Sim

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

5

24

Questionário sobre Prova

Nome: Bruna [illegible] da Silva | Masculino ou Feminino: F

Escola: [illegible] Lobo | Turma:

Data de nascimento: 18-4-91 | Data de hoje: 22-11-05

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Pós-Graduação Educação Matemática

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

aluno id:

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
$2a$ e $2b$ são números pares quaisquer
$2a + 2b = 2(a + b)$

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

$2 + 2 = 4 \quad 4 + 2 = 6$
$2 + 4 = 6 \quad 4 + 4 = 8$
$2 + 6 = 8 \quad 4 + 6 = 10$

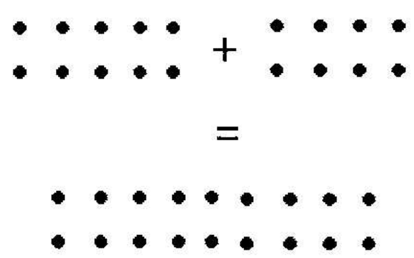
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

$8 + 6 = 14$

$8 = 2 \times 4$
$6 = 2 \times 3$
$14 = 2 \times (4 + 3)$

$8 + 6 = 2 \times 7$

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Resposta de ~~[illegible]~~ Artur

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

Resposta de Duda

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☒

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

5 + 7 = 12
11 + 9 = 20
3 + 5 = 8
Sim, a afirmação é verdadeira.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

9 + 12 = 21
3 + 6 = 9
9 + 36 = 45
porque
(3 x 3) = 9 + (6 x 2) = 12
9 + 12 = 21
21 = 3 x 7

(3 x 1) = 3 + (6 x 1 = 6
3 + 6 = 9
9 = 3 x 3

(3 x 3) = 9 + (6 x 6) = 36
9 + 36 = 45
45 = 3 x 15

A afirmação é verdadeira

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

5 x 4 = 20
20 x 3 = 60
60 x 2 = 120
120 x 1 = 120

Sim, porque 120 é par

b) O que significa **8!** ?

8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

8 x 7 = 46
46 x 6 = 276
276 x 5 = 1380
1380 x 4 = 5520
5520 x 3 = 16560
16560 x 2 = 33120
33120 x 1 = 33120

Não porque 8! é par e 21 ímpar

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Também não, porque 62! é par e 37 é ímpar

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

ANEXO 4

PROTOCOLOS DE ALGUMAS ENTREVISTAS

Entrevistas realizadas com alguns alunos pesquisados

Transcrição das entrevistas realizadas com os alunos previamente selecionados, conforme descrito no capítulo IV.

1. Entrevista com o aluno nº 5

Entrevistador: E

Aluno nº 5: A5

E: Você se lembra de ter respondido esse questionário, no ano passado?

A5: Lembro.

E: A questão A1 apresenta uma afirmação "Quando você soma dois números pares, o resultado é sempre par" e cinco alunos responderam, cada um de uma forma e você respondeu que a resposta que mais se aproxima da que você daria é a de Hanna. Certo?

A5: Certo.

E: E que o professor daria a melhor nota para a resposta de Beth. Por que você afirma que o professor daria a melhor nota para Beth?

A5: É porque eu acho, pra mim, que está mais explicado. Ela colocou os números assim... digamos assim... não os melhores... mas essa forma está mais bem explicada, que nos outros. Acho que é uma forma mais clara.

E: Você acha que a resposta de Beth é suficiente para provar que a soma de dois números pares quaisquer é sempre par?

A5: Como eu não entendo muito de Matemática... é, eu acho que dá sim.

E: Examine a resposta de Artur. O que você acha dessa resposta?

A5: É uma resposta concreta.

E: Compare com a resposta de Beth. As duas são válidas? Ou uma está mais bem explicada que a outra?

A5: Sim, na resposta de Beth, ela usou mais e somente os números e na resposta de Artur, ele colocou as letras, também. As duas estão explicadas.

E: A resposta de Artur pode ser considerada correta?

A5: Pode.

E: Na questão A2, você respondeu que Zé não precisa construir nova prova. Você mantém a sua resposta. Continua afirmando que Zé não precisa construir nova prova?

A5: É. Continuo afirmando sim.

E: Poderia acrescentar alguma coisa, por que você continua afirmando?

A5: Ah que nem você mesmo está falando, que se você vai somar dois números pares, o resultado vai ser sempre par.

E: Mesmo para números maiores que 100?

A5: É. Mesmo para números maiores que 100.

E: Você já respondeu algum questionário ou fez alguma atividade de Matemática desse tipo, de múltipla escolha e questões que tenham que ter justificativas?

A5: Já fiz, já.

E: Você acha que seja um bom método para se trabalhar, em Matemática, ou seja, responder e ainda ter que justificar suas respostas?

A5: É assim, como eu falei. Tem o pessoal que tem facilidade em determinada matéria. Eu tenho enorme dificuldade em Matemática. Só que assim, para mim eu acho que é melhor fazer do que justificar, o que seria a forma de você saber como você faz, qual é o seu pensamento. Eu penso assim. Realmente, para responder, se eu tenho certeza da minha resposta. Para mim, não. As duas estão de formas diferentes, então, na sua cabeça, você confunde as coisas e aí você acha que é a melhor, você coloca e nas de justificar, não, aqui você vai colocar e explicar.

E: Dê uma olhada na resposta do Duda. Você concorda com a resposta?

A5: Não. Nem sempre o resultado vai terminar em 0, 2, 4, 6, 8.

E: Você sabe qual é a característica do número par?

A5: Não sei. Nunca ninguém me fez essa pergunta.

E: Qual a diferença entre o número par e ímpar?

A5: Ah, eu não sei explicar.

E: Se eu te apresentar uma lista de números, você saberia identificar os pares e os ímpares?

A5: Sim, saberia, mas não sei explicar.

2. Entrevista com o aluno n° 49

Entrevistador: E

Aluno nº 49: A49

E: Você se lembra de ter respondido esse questionário, no ano passado?

A49: Lembro.

E: Por que você escolheu a resposta de Artur, para a resposta que você daria?

A49: Escolhi Artur, pois a pergunta fala que quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par. Achei a dele mais coerente porque só mostra número par, independente da... quantas letras tiverem juntas, sempre ia dar par. Aí eu escolhi a dele, pois eu achei a mais coerente com a minha.

E: Por que você acha que vai dar sempre par?

A49: É aqui (mostra no questionário, a resposta de Artur) ele deu o exemplo 2a+2b, deu 2(a+b)...ah deu par. Ele já começa com o número par.

E: Por que você diz que 2(a+b) é um número par?

A49: Porque tem o 2 fora do parênteses.

E: Por que você respondeu que o professor daria a melhor nota para Beth?

A49: Porque fez bastante cálculo, começando com 2. Fez bastante cálculo. Então o professor daria a melhor nota.

E: Explique porque você afirma que a resposta de Beth não é sempre verdadeira, ou seja, vale apenas para alguns números pares.

A49: Eu acho que eu chutei no dia. A resposta de Beth é sempre verdadeira.

Pergunta: Olha a questão A2. Você escolheu "A". Pode explicar?

Resposta: Ah, eu disse que Zé não precisa fazer nada, porque já foi provado e quaisquer números pares maiores que 100, vão sempre ser pares.

3. Entrevista com o aluno n° 16

Entrevistador: E

Aluno nº 16: A16

E: Você pode justificar por que você responderia o mesmo que a Beth?

A16: Eu pensei como aluno. A maioria dos alunos responderia dessa mesma forma.

E: E por que você afirma que o professor daria a melhor nota para o Artur?

A16: A resposta do Artur é mais para o professor mesmo. Ele especifica mais a resposta.

E: Você considerou que a resposta da Beth não é suficiente para provar que é verdadeira. Por que você respondeu "não"?

A16: Eu acho assim. Olhando agora melhor a resposta de Duda é bem... explica bem e a da Beth, não explica tudo. Explica um pouco, achei.

E: Qual é a diferença entre a resposta de Beth e de Duda?

A16: Porque a Beth usou, tipo a soma para fazer e o Duda explicou mais. Acho que foi isso.

E: Você acha que o professor daria a melhor nota para o Artur, por que você entende... (me interrompe e responde)

A16: É porque achei que vai entender melhor a do Artur.

E: Para o Artur você respondeu "não" para "sempre verdadeira" e para "verdadeira apenas para alguns pares". Pode explicar?

A16: Eu não lembrei. Acho que foi um chute mesmo.

E: Para a Beth você respondeu "sim" para os dois itens. Explique.

A16: Não. Acho que da Beth não é sempre verdadeira, vale apenas para alguns pares.

E: Para o Duda você também respondeu "sim" para os dois itens. E aí?

A16: É aí eu errei. Agora eu acho que a de Duda é sempre verdadeira.

E: Por que você acha que Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. Pode explicar?

A16: Tipo assim ó, vamos supor 110 + 120 = 230, aí é par. Acho que sempre que forem dois pares, o resultado sempre vai dar par. Mesmo que sejam menores ou maiores que 100, sempre vai dar par.