PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

José Zucco

FUNÇÕES MONOTÔNICAS: ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO FRENTE ÀS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

José Zucco

FUNÇÕES MONOTÔNICAS: ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO FRENTE ÀS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA,*** *sob a orientação da* ***Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori.***

São Paulo

2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.
Assinatura______________________________**Local e Data:**_______________

Dedico este trabalho a minha esposa Maristela Aguiar Zucco que nas horas difíceis soube me confortar com carinho, não deixando que eu desistisse de realizar esse meu grande sonho.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado sabedoria, saúde e inspiração para concluir esta pesquisa.

À Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori pelos ensinamentos, apoio e confiança.

A meu filho Vinicius, pelo incentivo, disponibilidade e atenção.

À minha querida esposa Maristela, pelo apoio nos momentos difíceis, sempre me incentivando a não desistir.

À minha filha Tainah, que é sempre uma inspiração e demonstra compreensão em todos os momentos.

À Secretaria do Estado de Educação pela concessão da bolsa mestrado.

Aos Professores Doutores Leila Zardo Puga e Armando Traldi Júnior, por fazerem parte da banca examinadora, pela atenção, comentários e valiosas sugestões que tanto ajudaram na construção desta pesquisa.

A meus pais Antônio e Olga e a todos meus irmãos, pelo incentivo e carinho.

O Autor

A vida é um grande espetáculo. Só não consegue homenageá-la quem nunca penetrou dentro de seu próprio ser e perceber como é fantástica a construção da sua inteligência.

Dr. Augusto Cury

Resumo

A presente pesquisa tem por objetivo analisar o desempenho de 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio da Rede Pública Estadual na resolução de quatro questões envolvendo o conceito de função monotônica (crescente e decrescente). As questões escolhidas foram propostas nas Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) de 2005, 2006, 2007 e 2008. É uma pesquisa de abordagem qualitativa. A análise do desempenho teve por referência teórica a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Nos protocolos analisados constavam tanto a resolução das questões quanto as justificativas apresentadas pelos alunos para suas respostas. As análises indicaram dificuldades na interpretação dos enunciados das questões bem como nas ações relacionadas aos tratamentos e mudança de Registros de Representação Semiótica. Este estudo também efetivou análise dos erros, a qual possibilitou classificar as questões em grupos quanto aos tipos de respostas. Os resultados revelaram que a maioria dos alunos não estava familiarizada com as questões propostas as quais exigiam transitar pelas diferentes representação de um mesmo objeto matemático.

Palavras-chave: Função monotônica. Olimpíadas. Análise de erros. Registros de Representação Semiótica, Aprendizagem.

Abstract

The goal of this research is to analyze the performance of 20 high school seniors in the State Public School System in the resolution of four problems involving the concept of monotonic functions (increasing and decreasing). The selected problems were proposed in the Public School Mathematical Olympiads (OBMEP) of 2005, 2006, 2007, and 2008. The study has a qualitative approach. The theoretical reference for analyzing the performance was Raymond Duval's theory of Registers of Semiotic Representation (2003). The analyzed protocols contained both the resolution of the problems and the justifications presented by the students for their responses. The analyses indicated difficulties in interpreting the problem statement, as well as in the activities related to handling and changing the Registers of Semiotic Representation. This study also performed an analysis of the errors, which allowed the questions to be classified in groups based on the types of answers. The results revealed that most of the students were not familiar with the proposed problems, which required them to move among the different representations of a single mathematical object.

Key words: Monotonic function. Mathematical Olympiad. Error analysis. Registers of Semiotic Representation, Learning.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Introdução

Nesta pesquisa objetivamos analisar o desempenho de alunos do Ensino Médio frente à resolução de questões propostas sobre funções monotônicas. Escolhemos questões propostas nas Olimpíadas dos anos: 2005; 2006; 2007 e 2008. Nossa pretensão era avaliar como os alunos enfrentavam situações que envolviam conversões de registros de representação semiótica levando-se em conta que tais conversões não estão presentes nos livros didáticos, de um modo geral. Essa proposta está relacionada ao nosso interesse como professor de Matemática.

A partir de 1985, passamos a atuar como professor de Matemática na Escola de Educação Básica, e nossa preocupação maior naquele momento era cumprir o programa definido pela escola. Os conteúdos, a serem desenvolvidos, eram apresentados em livros didáticos, em uma sequência preestabelecida. E desde o início começamos a identificar dificuldades dos alunos da 1ª série do Ensino Médio na aprendizagem do conceito de função. As dificuldades manifestavam-se na construção e interpretação de gráficos, e também na resolução de situação problema.

Nossas inquietações como professor das Escolas de Educação Básica da rede pública e particular, alimentaram a definição de nosso trabalho de pesquisa, aquela de analisar o desempenho dos alunos do Ensino Médio. Buscamos questões que envolvessem o conceito de função particularizando para o caso das funções monotônicas. A escolha de questões propostas nas Olimpíadas Brasileiras de Matemáticas das Escolas Públicas teve um objetivo metodológico por ser tratar de questões que tinham sido preparadas com a finalidade de avaliar desempenho. O interesse pela diversidade nos levou às Olimpíadas dos anos 2005; 2006; 2007 e 2008.

Em nosso curso de licenciatura em Matemática, observamos que os estudantes apresentavam certas dificuldades quanto ao estudo de função. Elas apareciam quando as noções de função eram necessárias para o estudo das noções de Cálculo Diferencial, integral, limites, derivadas, etc. Ao atuarmos como professor do Ensino Médio percebemos que os alunos apresentam dificuldades semelhantes àquelas encontradas durante meu curso universitário.

Segundo os PCNEM+ (2002, p.121), o estudo de função deve ser iniciado diretamente pela definição de função, descrevendo situações de dependência de duas grandezas, permitindo o estudo por meio de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

Nesta pesquisa assumimos o pressuposto de que o trabalho com diferentes registros de representação de um objeto matemático, bem como sua abordagem em situações contextualizadas, favorecem a compreensão, e que a utilização das definições muito formais e o uso de linguagem puramente técnica aumentam as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Assim sendo o referencial teórico para esta pesquisa é a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), a qual embasa as análise efetivadas dos protocolos dos alunos que registram as resoluções das questões propostas.

No capítulo 1 intitulado “Apresentação da pesquisa”, relatamos nossa trajetória profissional, a justificativa do trabalho, problemática e objeto matemático em estudo.

No capítulo 2, intitulado “Olimpíadas Brasileiras de Matemática”, descrevemos as Olimpíadas de Matemática, objetivos, participantes, premiação aos participantes como elas ocorrem no Brasil e no mundo.

No capítulo 3, intitulado “Referencial teórico”, apresentamos elementos referentes aos Registros de Representação Semiótica envolvidos nas Questões das Olimpíadas.

No capítulo 4, intitulado “Análise das Situações Problema” realizamos a análise das questões.

No capítulo 5, intitulado “Procedimentos metodológicos e aplicação das atividades”, apresentamos a descrição da escola onde foi realizada a pesquisa, o instrumento de pesquisa e os procedimentos da aplicação.

No capítulo 6, “Análise dos resultados”, encontram-se as análises dos resultados por questão, relacionando-as ao referencial teórico, análise dos erros e, as considerações finais.

CAPÍTULO I - Apresentação da Pesquisa

1.1 TRAJETÓRIA PROFISSIONAL E JUSTIFICATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Nossa trajetória profissional iniciou-se em 1998, depois de concluir a graduação, licenciatura plena em Matemática, na Universidade Hebraica Brasileira Renascença, na cidade de São Paulo. Começamos trabalhando como professor efetivo em uma escola pública estadual, com duas turmas de 8ª Série e três de Ensino Médio, sendo 1º, 2º e 3º séries.

Iniciamos o trabalho com muita disposição para os desafios. Apesar da pouca experiência, percebíamos que os professores, de modo geral, e os livros didáticos, apresentavam a noção de função em uma linguagem técnica e distante da realidade do aluno. Buscamos razões para isso. Hoje podemos dizer que, resultados da pesquisa podem contribuir para essa busca e que obstáculos de aprendizagem podem ser gerados pela ausência do uso de teorias sobre a aprendizagem como a dos registros de representação semiótica de Duval.

A busca de causas das dificuldades dos alunos nos levaram a nos aprimorar no tema e participamos de um curso de formação continuada, pela Secretaria de Educação – SEE (Secretaria Estadual da Educação) em parceria com a USP (Universidade de São Paulo) em 2004. O curso foi de extensão universitária na modalidade de atualização: PEC (Programa de Educação Continuada). Construindo Sempre Matemática – USP em 2004 Aperfeiçoamentos de Professor – PEBII (Professor de Educação Básica II).

Participamos, também, de um curso de extensão para professores de Matemática do projeto CNPq, sob a coordenação do IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) realizado no IMECC/Unicamp, em 2004, intitulado A Matemática do Ensino Médio.

Em 2006, tivemos conhecimento dos programas dos cursos de Pós Graduação da PUC-SP. No sítio desse Programa para o Mestrado Profissional, salienta-se que, “[...] seu caráter focalizando o ensino, a aprendizagem, o currículo, a escola e o sistema escolar, e também, contribuir efetivamente para a evolução do sistema de ensino, seja pela ação direta em sala de aula, seja pela ação em espaços educativos em que a atuação do professor é fundamental.” A identificação pelo Mestrado Profissional foi muito grande, pois ele vinha ao encontro de nossas necessidades intelectuais e profissionais.

No mesmo ano de 2006 tomamos conhecimento que a Secretaria de Estado da Educação, com a intenção de implementar alternativas para o resgate da qualidade do ensino, com base em uma política nacional de valorização e formação de professores, implanta o projeto Bolsa Mestrado (Decreto nº 48.298, de 03/12/2003, Resolução SE 131, de 04/12/2003 e Resolução SE 105, de 01/12/2004). Esse projeto oferece estímulo para que o professor faça o curso de mestrado, subsidiando sua mensalidade.

Em outubro de 2006, inscrevemo-nos no Mestrado Profissional na PUC-SP e participamos do processo seletivo. Iniciamos o curso em fevereiro de 2007. Dentre as linhas de pesquisas oferecidas, optamos pelo grupo de Álgebra, que está agregado ao projeto maior GPEA (Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica) da PUC/SP, cujo objetivo principal é investigar: Qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática?

Esta pesquisa de análise do desempenho de alunos de Educação Básica sobre função monotônica, está inserida no ramo “concepções acerca de relações”, que focaliza o ensino da álgebra na Escola Básica.

Motivado por nossas inquietações, ao atuar como professor da rede pública e particular dos ensinos Fundamental e Médio, resolvemos investigar o tema funções, mais especificamente as funções crescentes e decrescentes.

Os procedimentos metodológicos da pesquisa nortearam-se pela abordagem qualitativa, para a análise do desempenho de alunos da 3ª série do Ensino Médio por meio da resolução de questões sobre função monotônica (crescente e decrescente) propostas nas Olimpíadas de: 2005; 2006; 2007 e 2008.

Para tanto, assumimos a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). A proposta de pesquisa é: analisar os protocolos dos alunos; analisar seus erros e identificar suas dificuldades.

1.2 PROBLEMÁTICA

As diversas propostas de pesquisadores e professores para minimizar as dificuldades de aprendizagem da Matemática parecem não ter surtido o efeito desejado, pois persistem as dificuldades dos estudantes, e em especial relativamente à aprendizagem do conceito de função.

A dissertação de Simões (1995, p.250) destaca que, na 8ª série do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, a noção de função é apresentada nos livros didáticos de maneira formal e de forma estruturada. Cita ainda por meio da análise desses livros que a ênfase está na passagem da representação algébrica para a representação gráfica; isso pode gerar um obstáculo para a efetivação da passagem da representação gráfica para algébrica. Destaca ainda que muitos obstáculos e dificuldades já consagrados em pesquisas sobre o tema, não são levados em conta pelos autores dos livros didáticos.

Ainda na mesma pesquisa, a autora cita que na aprendizagem do conceito de função do 2º grau existem entraves que podem ser classificados como de natureza epistemológica, cognitiva e didática.

As orientações curriculares para o Ensino Médio (2008, p.72), recomendam apresentar aos alunos modelos diversificados de funções tomados em várias áreas do conhecimento, como por exemplo, consumo de energia elétrica, crescimento de bactérias, etc. Assim, os gráficos das relações de crescimento e decrescimento entre as variáveis devem ser traçados e entendidos de uma forma global e que a transcrição de dados de uma tabela numérica, sem saber sua origem, não determina avanço na compreensão de função.

Já os Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM destacam que:

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, é um instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, uma forma de desenvolver habilidades de pensamento. Defendem que aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz, em si, o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 1999, p.251).

A respeito do ensino de funções, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, apontam que:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 1999, p.255).

1.3 OBJETO MATEMÁTICO EM ESTUDO

O conceito de função é um conceito central e unificador na Matemática, como também relevante em outras áreas do conhecimento, tais como, a Física, a Química, a Biologia, a Economia, a Administração, a Engenharia e, também, em outras que surgiram na sociedade contemporânea, como a Informática, por exemplo.

Com o alvo já destacado de análise de desempenho escolhemos questões de Matemática que envolvem crescimento e decrescimento de função. A definição de função adotada é a apresentada em Guidorizzi, et al (1968, p.19) assim:

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Diz-se que se tem uma função *f* definida em A com os valores em B, e indica-se *f:* A→B, quando, para cada $x \in A$, está associado, de um modo bem determinado, um único $y \in B$.

Se *f:* A→B é uma função e se *x* é um elemento de A, o único valor *y* de B que está associado a *x* é indicado por $f(x)$ (lê-se: "f de x" ou "f calculado em x"). Podemos indicar f*:* A→B, também pela notação $x \rightarrow f(x)$, $x \in A$. O conjunto A denomina-se domínio de definição de *f* e é, também, indicado por $D(f)$. O conjunto $f(A) = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$ é denominado imagem de f, e o conjunto B é o contra domínio.

Para funções monotônicas, segundo Guidorizzi, et al (1968, p.66) temos:

Seja f: A → R e A ⊂ R.

Definição 1. Diz-se que f é crescente em B quando para todo x_1 e x_2 em B, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$. Nas mesmas condições, se $f(x_1) < f(x_2)$, diz-se que f é estritamente crescente em B.

Definição 2. Diz-se que *f* é decrescente em B, quando para todo x_1 e x_2 em B, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nas mesmas condições, se $f(x_1) > f(x_2)$, diz-se que f é estritamente decrescente em B.

Se f é crescente ou decrescente em B, diz-se que f é monotônica em B; se for estritamente crescente ou estritamente decrescente em B, diz-se que *f* é monotônica estrita em B.

A função constante é monotônica em R. (simultaneamente crescente e decrescente em R).

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio, aparecem:

> A importância do estudo de função monotônica. Este estudo pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude

> de movimento de um pêndulo, entre outras. Também é interessante provocar os alunos para que apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem qualitativamente os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (mais ou menos rápido). É conveniente solicitar aos alunos que expressem em palavras uma função dada de forma algébrica, por exemplo, $f(x) = 2x + 3$, como a função que associa a um dado valor real o seu dobro, acrescido de três unidades; isso pode facilitar a identificação, por parte do aluno, da idéia de função. (BRASIL, 2008, p.72).

Segundo pesquisa de El Jamal (2004, p.24), o aluno ao estudar funções, vai adquirindo a linguagem algébrica necessária para expressar as relações entre grandezas e modelar situações problema não só na Matemática, mas, sim, em todas as áreas do conhecimento.

Ainda na mesma pesquisa de El Jamal (2004, p.24), é afirmado que os problemas de aplicação de função devem ser estudados no início desse tema e não ao final, pois devem ser motivo de contextos para se aprender funções. Para que esse ensino estruture-se é necessário que seja permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas para descrever dependências entre grandezas em todas as áreas do conhecimento.

Os PCN+ a respeito do tema sequências indicam que:

> Há uma orientação no sentido de que é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. Assim, por exemplo, o estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as idéias de convergência e de infinito. O documento destaca que essas idéias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. (BRASIL, 2002).

Propõe também que o ensino do assunto deve se ater à lei de formação dessas sequências, mostrando as propriedades correspondentes aos alunos. A cada sequência deve-se associar a seu gráfico correspondente e relacionar os conceitos de sequências crescentes ou decrescentes aos gráficos correspondentes, com isso, o aluno acompanha o comportamento de uma sequência sem necessidade de ter informações apenas decoradas.

A dissertação de Ardenghi (2008, p.11) aponta, por meio de análise de 46 dissertações, as dificuldades que os alunos apresentam com o tema funções.

Segundo esse autor, as dificuldades aparecem, tanto na construção ou interpretação de gráficos, como também na resolução de situações problema no Ensino Fundamental e Médio, e de uma maneira mais acentuada quando a noção de função é necessária para o estudo das principais noções do Cálculo Diferencial e Integral, tais como limite, derivada, etc.

Em Ardenghi (2008, p.11) o interesse é levantar o que já havia sido produzido como meio de identificar consensos ao invés de realizar novas investigações, por considerar que muitos outros, também, tiveram interesse pela investigação do processo de ensino e aprendizagem de função e, por isso, poderia conhecer os resultados já apresentados.

Assim sendo nessa pesquisa, foi realizada uma investigação do tipo estado da arte que procurou investigar, sistematizar e avaliar a produção científica que tem por temática de investigação as dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem do conceito de função e estudo da possibilidade de superar e minimizar dificuldades por meio do ensino

O levantamento das dissertações e teses que foram produzidas no Brasil no período de 1970 a 2005 foi realizado. Dos trabalhos relacionados destacamos dois, por estarem mais diretamente relacionadas ao nosso interesse de pesquisa.

A dissertação de Schwarz (1995 p.37), com o título "Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau". Nessa dissertação o autor pretendeu verificar qual a concepção de função tem o aluno ao final do Ensino Médio.

O pesquisador apresentou um breve histórico sobre o desenvolvimento do conceito de função e, em seguida, fez uma análise epistemológica, apontando os obstáculos que se apresentam no desenvolvimento da concepção de função. Destacou os obstáculos, tais como: obstáculos relativos à crença de que a Matemática nada tem a ver com problemas práticos; obstáculos de que proporção é um tipo de relação privilegiada; obstáculo da crença que "tudo é número"; obstáculo de que os matemáticos decidiram por uma definição estrutural de função que lhes permitisse operar com espaços de funções e com conceitos modernos.

Para fundamentar o objetivo da pesquisa, o autor fez a mediação entre o professor e o livro didático para caracterizar a Educação Matemática, como campo científico a partir de um breve histórico de seu desenvolvimento no Brasil.

Nessa pesquisa, os instrumentos para as análises dos dados foram os conceitos de imagem propostos por Vinner (1989) e a ideia de perfil conceitual de Mortimer (1994).

Para Vinner, a organização da Matemática está distante da linguagem cotidiana e baseada em definições. Isso gera dificuldades de assimilação dos conceitos pelos alunos, pois a forma de assimilação desses conceitos não lhes é compatível. Para Mortimer, a ideia de perfil conceitual é "um modelo para descrever a evolução das idéias, tanto no espaço social da sala de aula, como nos indivíduos, como conseqüência do processo de ensino." (Machado, 1998 apud Mortimer, 1994, p.92).

Ainda na mesma pesquisa, foram aplicados testes a 21 alunos da 1ª série do Ensino Médio no estado de Belo Horizonte em uma escola municipal. Seis foram selecionados, com base no resultado de dois testes aplicados em três turmas da 1ª série do Ensino Médio e 15 foram indicados pelos professores. Todos os alunos tinham boas notas ou apresentavam dificuldades na resolução dos problemas matemáticos não escolares. A entrevista com esses alunos indicou que a Matemática era a disciplina preferida para a maioria.

Consta da pesquisa a análise de três livros didáticos e um breve histórico da evolução do conceito de função. Como resultado da análise desses, constam que as ideias de variação e dependência são pouco exploradas e o conceito de função é apresentado quase, exclusivamente, no conjunto de números reais.

CAPÍTULO II - Olimpíada Brasileira de Matemática

2.1 O QUE SÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA?

Neste capítulo, será feita uma breve descrição a respeito das Olimpíadas de Matemática, seu surgimento, o objetivo da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, seus participantes, suas fases, seu programa de Iniciação Científico Mestrado (PICME) e como elas ocorrem no Brasil e no mundo.

Conforme a dissertação de Burigo (1989, p.160), as Olimpíadas de Matemática, iniciaram-se durante o movimento da Matemática Moderna (MMM), em 1967, e foi uma iniciativa importante, também, de divulgação da Matemática Moderna em São Paulo. As Olimpíadas foram criadas, visando a valorizar o ensino de Matemática e do trabalho de renovação desenvolvido em várias escolas, coordenadas pelo GEEM (Grupo de Estudo do Ensino de Matemática) fundado em 31 de outubro de 1961.

Silva (2007, p.58), destaca que as Olimpíadas de Matemática no Estado de São Paulo (OMESP) foram uma iniciativa importante coordenada pelo GEEM (Grupo de Estudo do Ensino de Matemática). Assim, a primeira OMESP foi realizada, entre agosto e outubro de 1967, e contou com um número superior a 100, 000 estudantes. Já na segunda OMESP realizada, em 1969, o número de participantes foi superior a 300, 000. (BURIGO, 1989, p.160).

De acordo com o sítio da OBMEP[1], a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas é um projeto que propõe um ambiente estimulante de estudo da Matemática para estudantes e professores. Observamos que a OBMEP foi criada para ser de longa duração, tendo um conjunto de atividades que vão desde a aplicação e correção das provas até o Programa de Iniciação Científica.

[1] Sítio oficial da OBMEP: www.obmep.org.br

A Olimpíada Paulista de Matemática foi criada no Brasil, em 1977, pela Academia Paulista de Ciências. Dois anos após, iniciou-se a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). A OBM, com as Olimpíadas Regionais de Matemática envolve por ano a participação de quase 400 mil estudantes no País.

No Brasil, um bom número de alunos já conquistou medalhas de ouro, prata e bronze nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, IMO[2] (International Mathematical Olympiads). O Brasil está entre os 20 países de melhor rendimento, à frente da França, Canadá, Inglaterra e Alemanha, mostrando toda a capacidade dos estudantes brasileiros. Basta só lhes oferecer oportunidade e condições de expressar seu potencial.

No mesmo sítio encontramos que é importante o pensamento matemático na formação do aluno e do cidadão, decorrentes da participação nas Olimpíadas de Matemática, contribuindo para uma participação ativa na sociedade e um bom desempenho escolar, não só em Matemática, mas, inclusive, em outras áreas do conhecimento, vários deles são aprovados em vestibulares e instituições de ensino superior do Brasil.

Ainda no mesmo sítio consta que o aluno ao participar das Olimpíadas de Matemática, sai da rotina da sala de aula, interage com colegas e professores. Com isso ele cria novos vínculos com a escola e, também, efetiva mudanças de atitude com relação à Matemática. Ele descobre a Matemática, como linguagem viva da descrição de fenômenos naturais, científicos e tecnológicos, com seus métodos próprios de pensamento e beleza.

Cabe ressaltar que, o aluno ao desenvolver sua capacidade na resolução de problemas, cresce a autoconfiança e a autoestima, e com isso, aumenta suas habilidades de análise e crítica, constantemente enfatizadas no estudo da Matemática e criam uma nova disposição para o aprendizado de qualquer natureza.

[2] Sítio oficial da IMO: www.imo-official.org

De acordo com o sítio da OBMEP, as Olimpíadas de Matemática são competições que envolvem pouco conteúdo, mas exigem muita imaginação e criatividade, pois são problemas não convencionais resolvidos de forma individual.

A primeira Olimpíada Oficial Mundial que envolveu alguns países do Leste Europeu ocorreu em 1959, embora esse tipo de competição existisse já na Hungria, desde o fim do século XIX.

O Brasil participa da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), desde 1979, quando ocorreu a primeira Olimpíada Brasileira de Matemática.

A Comissão Nacional das Olimpíadas é responsável pela elaboração das provas da OBM, cuja secretaria encontra-se no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), no Rio de Janeiro. A OBM é patrocinada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), tem recebido apoio financeiro do Instituto do Milênio, Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira (IM-AGIMB) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ).

Para a realização da OBM, a SBM conta com o apoio de Coordenadores Regionais em todo o País. Em Florianópolis, a Coordenadoria Central encontra-se no Departamento de Matemática da UFSC que convida as escolas públicas e particulares para participar da OBM.

Inicialmente, as Olimpíadas foram idealizadas para estudantes pré-universitários, hoje, englobam, também, o nível universitário em diversos países e, entre estudantes desses países na Olimpíada Internacional Universitária, o Brasil está entre eles.

Para que se possa compreender a importância das Olimpíadas de Matemática, citamos alguns números significativos já que, atualmente, participam da Olimpíada Internacional equipes com alunos de mais de 150 países. Na OBM, competem mais de 150.000 alunos de todo o País.

2.2 OBJETIVOS E PARTICIPANTES

De acordo com o regulamento da OBMEP, os objetivos principais para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas são:

- Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas.
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas.
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
- Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e sociedades científicas.
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

A realização das Olimpíadas é feita em duas fases, a saber:

A primeira fase, a escola faz as inscrições dos alunos. Os participantes são os que cursam desde a 5ª Série do Ensino Fundamental até a 3ª Série do Ensino Médio.

A segunda fase, a escola seleciona 5% (cinco por cento) dos alunos inscritos em cada nível, essa seleção é feita considerando apenas as notas dos alunos da primeira fase.

Segundo a OBMEP, os alunos participantes serão divididos em três níveis, de acordo com o grau de escolaridade:

- Nível 1 - alunos matriculados na 5ª ou 6ª série (6º ou 7º ano) do Ensino Fundamental, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.
- Nível 2 - alunos matriculados na 7ª ou 8ª série (8º ou 9º ano) do Ensino Fundamental, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.
- Nível 3 - alunos matriculados em qualquer série do Ensino Médio, no ano letivo correspondente ao da realização das provas.

2.3 PREMIAÇÃO AOS PARTICIPANTES

A OBMEP premia professores, escolas, secretárias de educação e alunos; segundo as notas da segunda fase.

As Escolas Públicas serão premiadas com equipamentos de informática e biblioteca; os alunos, com medalhas de ouro, prata e bronze, certificados de menção honrosa e bolsa de Iniciação Científica Junior do CNPq; os municípios, com troféus e construção de quadras de esportes.

As universidades com Pós-graduação em Matemática credenciadas pela CAPES, que tiverem interesse em participar do Programa de Iniciação Científica Mestrado, deverão antecipadamente manifestá-lo à Direção Acadêmica da OBMEP.

De acordo com o sítio da OBMEP, a CAPES[3] e o CNPq[4] criaram o Programa de Iniciação Científica Mestrado (PICME) aos medalhistas da OBMEP e/ou da OBM. De acordo com o desempenho de cada aluno, o Programa de Pós-graduação decidirá se ele irá ingressar diretamente no Mestrado com bolsa da CAPES ou terá de fazer 2 anos ou menos de Iniciação Científica, com bolsa do CNPq.

Assim, um total de 3.000 (três mil) alunos com medalhas de outro, prata e bronze, de escolas públicas participarão do programa de Iniciação Científica.

---

[3] A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) desempenha papel fundamental na expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) em todos os estados da Federação. www.capes.gov.br/

[4] O Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) é uma agência do Ministério da Ciência e Tecnologia (MCT) destinada ao fomento da pesquisa científica e tecnológica. www.cnpq.br

2.4 AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL E NO MUNDO

Conforme o sítio oficial das Olimpíadas Paranaense de Matemática[5], em 1894, na Hungria houve uma prova entre os alunos que haviam terminado o Ensino Médio (na época, conhecido como Segundo Grau). Esse ano ficou, então, conhecido como o início das competições das Olimpíadas de Matemática.

Houve algumas mudanças em relação às formas que as Olimpíadas (nacionais e internacionais) eram disputadas. De 1979 até 1989, era apenas uma fase, com uma única prova contendo cinco ou seis questões discursivas, aplicadas aos alunos do Ensino Médio.

Em 1990, novas mudanças ocorreram, quando a OBM passou a ser disputada em duas fases; sendo a primeira, com 20 ou 25 questões objetivas e a segunda, com seis questões discursivas, tanto para alunos Sênior (Ensino Médio), como alunos Júnior (Ensino Fundamental).

Em 1998, houve algumas alterações. A OBM foi dividida em três níveis: Nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental), Nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental) e Nível 3 (Ensino Médio). A prova passou a ser disputada em três fases: 1ª fase (objetiva com 20 ou 25 questões), 2ª fase (discursiva com seis questões) e 3ª fase (discursiva com cinco ou seis questões). A diferença entre as 2ª e 3ª fases está no grau de dificuldade das questões. Na 2ª fase, o grau de dificuldade das questões é menor que na 3ª.

A Olimpíada Internacional de Matemática

De acordo com o sítio das Olimpíadas Paranaense de Matemática, essa Olimpíada teve início, em 1959. Atualmente, cerca de 100 países participam dessa competição, representados por equipes de no máximo seis alunos do Ensino Médio,

---

[5] Sítio oficial das Olimpíadas Paranaense de Matemática: http://www.olimpiadaparaensemat.hd1.com.br/

que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente na data da realização da Olimpíada.

No início da IMO (International Mathematical Olympiad), cada país inscrito, poderia participar no máximo com oito estudantes. Em 1982, a quantidade de participantes diminuiu de oito para quatro; no ano seguinte, foi aumentando para seis, número que permanece até hoje. Os competidores devem ter menos de 21 anos de idade e nenhuma escolaridade superior ao Ensino Médio. Não há limite para o número de participações de um mesmo aluno, lembrando que todas as condições impostas devem ser respeitadas.

Em 1979, desde a primeira participação, seis brasileiros conquistaram medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática e são eles:

- Nicolau Corção Saldanha (RJ/1981)
- Ralph Costa Teixeira (RJ/1986 e 1987)
- Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (RJ/1990)
- Artur Avila Cordeiro de Melo (RJ/1995)
- Rui Lopes Viana Filho (SP/1998)
- Gabriel Tavares Bujokas (SP/2005)

Em 2002, a 42ª IMO (International Mathematical Olympiads) foi realizada em Washington, Estados Unidos da América e, em 2003, a 43ª IMO foi realizada em Tóquio, Japão.

Olimpíada Paulista de Matemática

A OPM[6] tem como objetivo descobrir talentos na Matemática no Estado de São Paulo e incentivar os alunos a estudarem nessa área. A Olimpíada Paulista de Matemática tem 30 anos. Atualmente, é realizada em duas fases e dividida em três níveis: Alfa (5ª e 6ª série ou 6º e 7º ano do Ensino Fundamental), Beta (7ª e 8ª série ou 8º e 9º ano do Ensino Fundamental) e Gama (1º e 2º ano do Ensino Médio).

[6] Sítio oficial da OPM: www.opm.mat.br/

Impacto da OBMEP no currículo escolar

O artigo “Avaliando o impacto da OBMEP no desempenho de Matemática nas avaliações educacionais” de Roberta Loboda Biondi cita que a OBMEP quando comparada a outras avaliações existentes no País, é considerada entre os maiores concursos realizados com alunos das escolas públicas.

Nas quatro edições da OBMEP, o número de alunos na primeira fase era em 2005, 31.030 escolas com 10.520.831 alunos; em 2006, 32.655 escolas com 14.181.705 alunos; em 2007, 38.450 escolas com 17.341.732 alunos e, em 2008, 40.377 escolas com 18.326.029 alunos.

Uma análise, sobre o impacto da OBMEP na Prova Brasil, em 2007, foi realizada para verificar o desempenho médio em Matemática dos estudantes da 8ª série. Os resultados apresentados indicaram que esse impacto é crescente, conforme o maior número de participantes.

Só as escolas que participaram em 2007, obtiveram uma média inferior comparados àquelas que participaram duas ou três vezes.

3.1 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O objetivo desta pesquisa foi analisar o desempenho de alunos do Ensino Médio na resolução de questões sobre o conceito de função monotônica (crescente e decrescente) propostas nas Olimpíadas 2005; 2006; 2007 e 2008. Para tanto, assumimos a teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), para as análises das resoluções, das questões, apresentadas pelos alunos.

Neste capítulo citaremos a teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval (2003). Para esse autor, no conhecimento matemático, há uma grande necessidade de mobilizar os Registros de Representação Semiótica, diferentemente de outros domínios científicos.

A teoria sobre os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, permite analisar as atividades propostas aos alunos e suas possibilidades de efetuar tratamentos e conversões de registros.

A abordagem qualitativa, em Educação Matemática, é oportuna em estudos de aprendizagem em Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1988, p.116), a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático utilizando diversos registros de representação semiótica nos conceitos matemáticos.

Para estudar a importância dos registros de representação semiótica em Matemática, Duval (2003, p.11) indica que sua abordagem é cognitiva, no sentido do desenvolvimento geral dos alunos em suas capacidades de raciocínio, análise e visualização.

Para tanto, aponta duas categorias e quatro tipos de registros: língua natural e sistemas de escritas, pertencentes à categoria de representação discursiva;

figuras geométricas planas ou em perspectiva e gráficos cartesianos, pertencentes à categoria de representação não discursiva (2003, p.14).

Para Duval (2003, p.22), é necessário dispor de, pelo menos, dois registros de representação para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado. Como exemplo, podemos citar um fenômeno característico que é a conversão do Registro Figural para o Registro Gráfico.

As variações de congruência, referente àquelas em que o aluno conhece o mesmo objeto matemático por meio de, pelo menos, duas representações diferentes, por exemplo, a ideia ou noção de ponto pode ser conhecida pelos alunos por meio das duas seguintes representações:

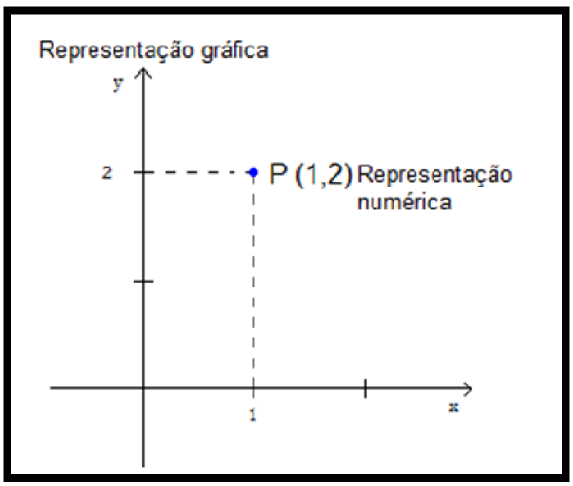


Figura 1: Representação gráfica e numérica

Normalmente, os alunos do Ensino Médio representam com facilidade um par ordenado no plano cartesiano. Da mesma maneira, o ponto do plano cartesiano é facilmente representado por um par ordenado. Temos, assim, um exemplo de variação de congruência.

Um exemplo de não equivalência entre os sentidos de conversão é o seguinte:

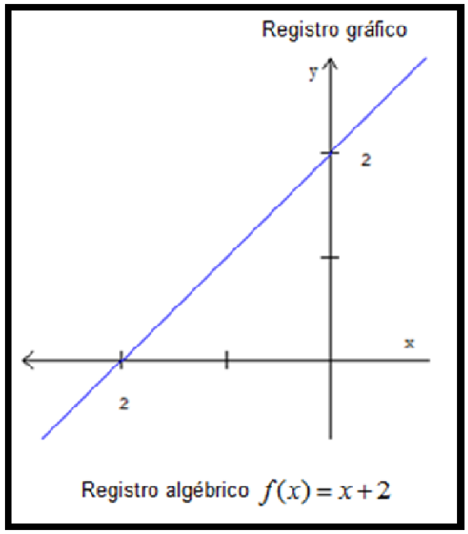


Figura 2: Registro gráfico e Registro algébrico

Nesta situação, o aluno pode ter dificuldade em identificar o mesmo objeto matemático representado em dois registros diferentes. O fato de não congruência pode acarretar dificuldades maiores, pois segundo Duval a não congruência causa maior custo cognitivo.

Em nossa prática pudemos perceber que, em geral, o aluno não encontra dificuldade para esboçar o gráfico da função, quando essa é dada por sua expressão algébrica. Mas, em contraposição o mesmo não acontece quando o sentido de conversão é do gráfico para o algébrico. Temos aqui, portanto, um exemplo de dificuldade pela não congruência da conversão.

A distinção entre o objeto matemático e sua representação é de fundamental importância para a compreensão matemática. E para isso é fundamental estudar um objeto matemático com diferentes registros de representações, segundo a teoria de Duval.

No domínio de conhecimentos matemáticos, diferente de outros domínios científicos, Duval (2003) aponta que há grande necessidade dos registros de representação semiótica, porque a Matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apresentação do uso de uma representação.

Damm (2002, p.137) cita que sem o auxílio de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos ou desenhos não existe conhecimento matemático mobilizado por uma pessoa. As representações permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, para as quais é necessário o uso de registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático.

Ao atuar como professor do Ensino Fundamental e Médio verificamos que os alunos conseguem fazer tratamentos[7] em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém o mesmo não ocorre nas conversões necessárias para a apreensão desse objeto. A maioria sente dificuldades de passar de uma representação à outra, quando é solicitada pelo professor, como, por exemplo, do registro figural para o registro gráfico. Em geral as conversões são pouco exploradas em aula.

De acordo com Duval (2003, p.22), quando passamos de um registro de representação a outro, não basta só mudarmos a forma de representação, devemos, também, explicar as propriedades ou os diferentes aspectos de um mesmo objeto. Isso significa que as representações de um mesmo objeto matemático, em dois registros diferentes, não têm sempre o mesmo conteúdo.

Segundo Duval (2003, p.15), os registros de representação semiótica podem sofrer dois tipos de transformações denominadas: tratamento e conversões. Por exemplo, fazemos um tratamento algébrico na equação polinomial do 1º grau $4x+6+6x=16$ ao aplicar o princípio de equivalência (redução de termos semelhantes) temos que $10x=10$. Outro exemplo de tratamento é quando convertemos graus de temperatura da escala Fahrenheit (°F) à escala Celsius (°C). A equação dada por $x°C=\dfrac{5(y°F-32)}{9}$ permite determinar *x* em graus na escala Celsius para uma dada temperatura *y* na escala Fahrenheit. Assim, por exemplo, se temos 50°F, então:

[7] Os tratamentos ocorrem quando a transformação permanece no mesmo registro.

$$x°C = \frac{5(50-32)}{9}$$

$$x°C = \frac{5(18)}{9}$$

$$x°C = \frac{90}{9} \rightarrow x°C = 10$$

As conversões ocorrem quando há mudança de registro, conservando-se as referências ao objeto estudado.

Por exemplo, ao resolver uma situação problema, a conversão ocorre quando mudamos o enunciado da língua natural para um registro numérico ou algébrico. A representação da sentença: “Qual é o número que, adicionando a 10 resulta em 16?” Fazendo a conversão para o registro algébrico, temos *x + 10 = 16* e para o registro numérico temos *6 + 10 = 16.*

Outro exemplo de conversão é a passagem do registro figural para o registro gráfico na situação exposta na figura a seguir. Na representação figural a formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez com velocidade constante o trajeto ilustrado. Representando-se a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t,* temos a seguir a representação gráfica.

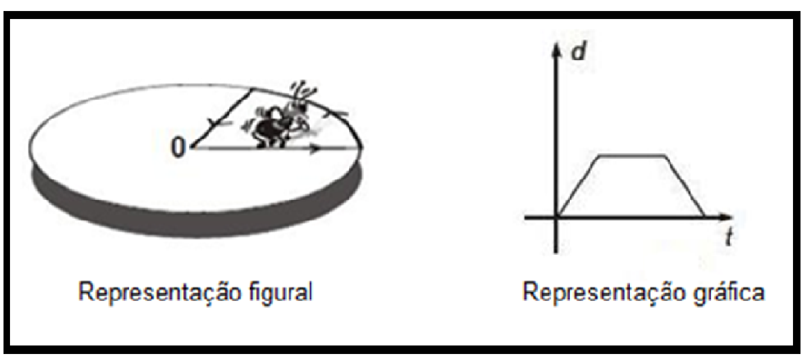


Figura 3: Representação figural e Representação gráfica

Para Duval (2003), do ponto de vista matemático, a conversão intervém na escolha do registro no qual os tratamentos serão efetuados. Isso porque são mais “econômicos”, “mais potentes”, ou ainda para obter outro registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos. Em outras palavras, a conversão exerce papel explícito nos processos matemáticos de justificação ou de prova.

O autor ainda afirma que a conversão não é só uma atividade paralela, evidente e prévia à “verdadeira” atividade matemática. Mas, do ponto de vista cognitivo, a conversão é uma atividade de transformação representacional fundamental, pois conduz mecanismos subjacentes à compreensão.

Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato dos alunos, normalmente, não terem dificuldade para converter o registro algébrico em registro gráfico, mas sentem dificuldades de converter o registro gráfico em registro algébrico.

A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam, conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é ou deve ser efetuada.

A distinção entre os aspectos matemáticos e o cognitivo não é, muitas vezes, levada em conta. É preciso, então, deter-se naquilo que é absolutamente necessário do ponto de vista cognitivo para a aprendizagem ou processos de compreensão.

Segundo Duval (2003, p.11), as dificuldades que os alunos têm na compreensão da Matemática, às vezes, são insuperáveis ou difíceis de ser superadas.

É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da Matemática, em formação inicial, não é formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhes serão eventualmente úteis muito mais tarde e, sim, contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, análise e de visualização.

Para esta pesquisa, lançaremos mão dos registros de representação semiótica, fazendo uma distinção entre o objeto matemático tratado e sua representação, por meio do processo que se estabelece entre a construção do objeto matemático de diferentes formas de representações.

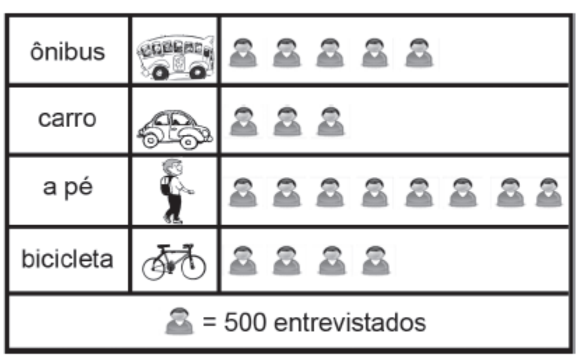
3.2 ALGUMAS QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A seguir, apresentamos alguns exemplos de questões de Matemática em diversas formas de Registros de Representação Semiótica, escolhemos para as funções as representações: tabela, gráfico, verbal, figural e algébrico.

Representação por meio de Tabela:

Questão 5 da 4ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2008 1ª fase, nível 1.

Veja na tabela o resultado da pesquisa feita em um bairro de grande cidade sobre os modos de ir ao trabalho.



Com base na tabela, qual a alternativa correta?

A) Metade dos entrevistados vai a pé ao trabalho.
B) O meio de transporte mais utilizado pelos entrevistados para ir ao trabalho é a bicicleta.
C) 50% dos entrevistados vão ao trabalho de ônibus.

D) A maioria dos entrevistados vai ao trabalho de carro ou de ônibus.
E) 15% dos entrevistados vão ao trabalho de carro.

Resolução:

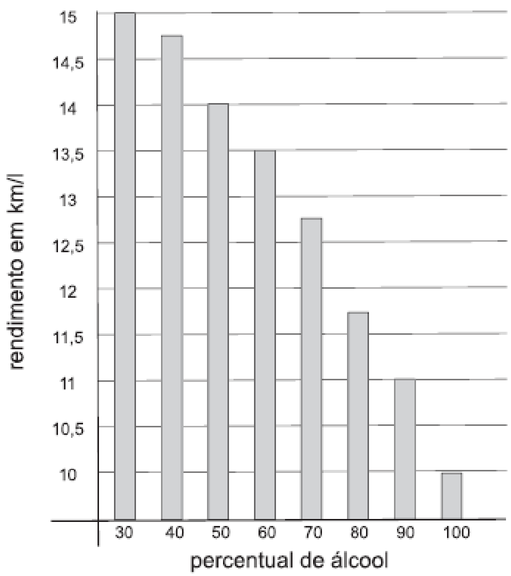
O número total de bonequinhos é 5 + 3 + 8 + 4 = 20. Vamos agora analisar as alternativas uma a uma.

A) O número de pessoas que vai ao trabalho a pé corresponde a 8 bonequinhos, menos da metade de 20. Logo essa alternativa é falsa.
B) O número de pessoas que vai ao trabalho de bicicleta corresponde a apenas 4 bonequinhos, que é inferior aos que optam pelo ônibus ou ir a pé. Logo essa alternativa é falsa.
C) O número de pessoas que vai ao trabalho de ônibus corresponde a 5 bonequinhos. Como $\frac{5}{20} = 0{,}25$, isto corresponde a apenas 25% dos entrevistados. Logo essa alternativa é falsa.
D) O número de pessoas que vai ao trabalho de carro ou de ônibus corresponde a 3 + 5 = 8 bonequinhos, que é menos do que a metade do total. Logo, essa alternativa é falsa.
E) O número de pessoas que vai ao trabalho de carro corresponde a 3 bonequinhos. Como $\frac{3}{20} = 0{,}15$, isto corresponde a 15% dos entrevistados. Logo essa alternativa é verdadeira.

Representação Gráfica:

Questão 16 da 3ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2007 1ª fase, nível 3.

O gráfico mostra a relação entre o percentual de álcool misturado com gasolina e o rendimento do carro de Cristina em quilômetros por litro. Cristina começou uma viagem com o tanque de 50 litros cheio de uma mistura com 30% de álcool. Depois de andar 300 km, ela parou em um posto, onde completou o tanque com álcool puro e continuou a viagem sem reabastecer até chegar a seu destino, com o tanque praticamente vazio. Aproximadamente, quantos quilômetros ela percorreu em toda a viagem?



A) 800
B) 900
C) 975
D) 1050
E) 1125

Resolução:

O gráfico mostra que, com uma mistura contendo 30% de álcool, o carro de Cristina rende 15 km/l. Para a primeira etapa de 300 km, ela gastou $\frac{300}{15} = 20$ litros de combustível, restando no tanque 50 – 20 = 30 litros com 30% de álcool. Desses 30 litros, 30%, ou seja, $\frac{30}{100}.30 = 9$ litros eram de álcool e o restante 30 – 9 = 21 litros de gasolina. Para complementar o tanque, ela colocou 20 litros de álcool; o tanque ficou, então, cheio com 9 + 20 = 29 litros de álcool e os mesmos 21 litros de gasolina. Nessa mistura, o percentual de álcool era de $\frac{29}{50}=\frac{58}{100}=58\%$, que é aproximadamente 60%. O gráfico mostra que, com essa mistura, o carro de Cristina rende quase 13,5 km/l. Como ela chegou a seu destino com o tanque praticamente vazio, percorreu aproximadamente 13,5 . 50 = 675 km. Logo, a viagem de Cristina foi de, quase, 300 + 675 = 975 km.

Representação Verbal:

Questão 8 da 3ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2007 1ª fase, nível 3.

Turmalinas são pedras semipreciosas, cujo valor varia de acordo com o peso; se uma turmalina pesa o dobro de outra, então, seu valor é cinco vezes o dessa outra. Zita, sem saber disso, mandou cortar uma turmalina que valia R$ 1.000,00 em quatro pedras iguais. Quanto ela irá receber se vender os quatro pedaços?

(A) R$ 160,00
(B) R$ 200,00
(C) R$ 250,00
(D) R$ 400,00
(E) R$ 500,00

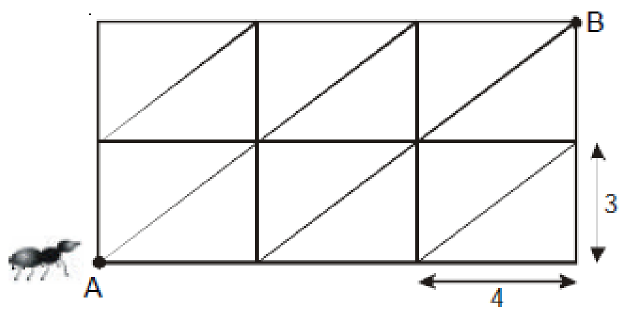
Resolução:

Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então, seu peso é cinco vezes o preço da outra; isto equivale a dizer que se uma turmalina pesa a metade de outra, então, seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividi-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2, também, iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma de valor $\frac{1000}{5}=200$ reais. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo $\frac{200}{5} = 40$ reais; estas 4 turmalinas juntas valem 4x40=160 reais. Logo a alternativa correta é (A).

Registro Figural:

Questão 8 da 1ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2005 1ª fase, nível 3.

Uma formiga está no ponto A da malha mostrada na figura. A malha é formada por retângulos de 3 cm de largura por 4 cm de comprimento. A formiga só pode caminhar sobre os lados ou sobre as diagonais dos retângulos. Qual é a menor distância que a formiga deve percorrer para ir de A até B?



(A) 12 cm
(B) 14 cm
(C) 15 cm
(D) 17 cm
(E) 18 cm

Resolução:

Para calcular os possíveis comprimentos dos caminhos que a formiga pode percorrer, é necessário saber o comprimento da diagonal dos retângulos da malha. Para isto, usa-se o Teorema de Pitágoras que diz que, em um triângulo retângulo de hipotenusa *a* e catetos *b* e *c,* temos $a^2 = b^2 + c^2$. Se *d* é a diagonal que queremos calcular, então, $d^2 = 32 + 42 = 25$, onde $d = 5$.

Note agora que existem apenas quatro opções de caminhos que a formiga poderá escolher para ir de *A* a *B*: *(i) Caminhos que não passam pelas diagonais:* Qualquer caminho desse tipo passa por, pelo menos, três lados de comprimento 4cm e dois lados de comprimento 3 cm.

Neste caso, o menor caminho tem comprimento 3 x 4 + 2 x 3 = 12 + 6 = 18 cm. *(ii) Caminhos que passam por apenas uma diagonal:* Todo caminho desse tipo passará, no mínimo, por um lado de comprimento 3 cm e dois de comprimento 4 cm. Portanto, neste caso, o menor caminho será de 5 + 3 + 2 x 4 = 16 cm. *(iii) Caminhos que passam por exatamente duas diagonais:* Note que existe um caminho que passa apenas por duas diagonais e, por um lado, de comprimento 4; o comprimento deste caminho é 5 x 2 + 4 = 14 cm.

Por outro lado, qualquer caminho que passe por duas diagonais terá de passar por um lado de comprimento 4 cm, logo seu comprimento será no mínimo igual a 14 cm. Logo, neste caso, o menor caminho tem comprimento 14 cm. *(iv) Caminhos que passam por mais de duas diagonais:* Qualquer caminho deste tipo terá comprimento no mínimo 15 cm. Portanto, a resposta é 14 cm, alternativa (B).

Com relação aos registros de representação semiótica, além do figural, também, observamos no enunciado e na resolução os registros: da língua natural, numérico e algébrico.

Notamos ainda que houve conversão da representação figural da questão para a representação algébrica na resolução.

Registro Algébrico e Figural:

Questão 15 da 4ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2008 1ª fase, nível 2.

Numa folha quadrada de papel de 30 cm de lado, branca de um lado e cinza de outro, marcou-se um quadrado ABCD em linhas pontilhadas, como na Figura 1. A folha foi dobrada ao longo das linhas pontilhadas e o resultado está mostrado na Figura 2, onde a parte cinza é um quadrado de área 144 cm². Qual é o comprimento do segmento PA.

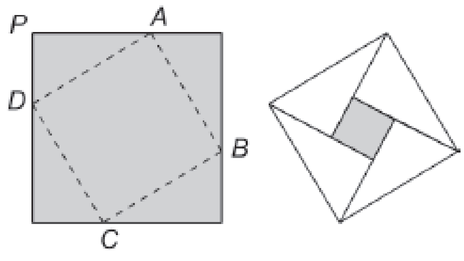
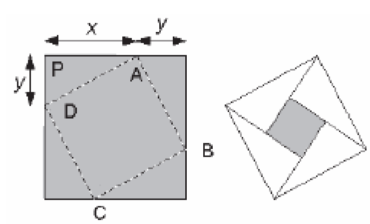


Figura 1 Figura 2

Resolução:

Sejam x e y as medidas (em centímetros) de PA e PD respectivamente. Vamos então, que $x + y = 30$ e que o lado do quadrado central da folha dobrada é $x - y$. Como a área desse quadrado é 144 cm², segue que seu lado mede 12 cm, ou seja, $x - y = 12$. Dessas duas equações, segue que $x = 21$.



Com relação aos registros de representação semiótica, além da representação do registro algébrico e figural, também, observamos no enunciado e na resposta os registros: da língua natural e numérico.

Notamos ainda que houve conversão da representação figural da questão para a representação algébrica na resolução.

CAPÍTULO IV - Análise das situações problema

As questões das Olimpíadas de Matemática para Escolas Públicas dos anos 2005; 2006; 2007 e 2008 foram obtidas do sítio da OBMEP. Após as leituras, selecionamos as questões que evidenciaram claramente tratar de função monotônica.

As questões selecionadas foram as seguintes:

Ano 2005 – Questão 10, 1ª fase, nível 3.

Ano 2006 – Questão 17, 1ª fase, nível 3.

Ano 2007 – Questão 18, 1ª fase, nível 3.

Ano 2008 – Questão 16, 1ª fase, nível 3.

No próximo item, apresentamos as análises dessas questões.

4.1 ANÁLISE DAS QUESTÕES

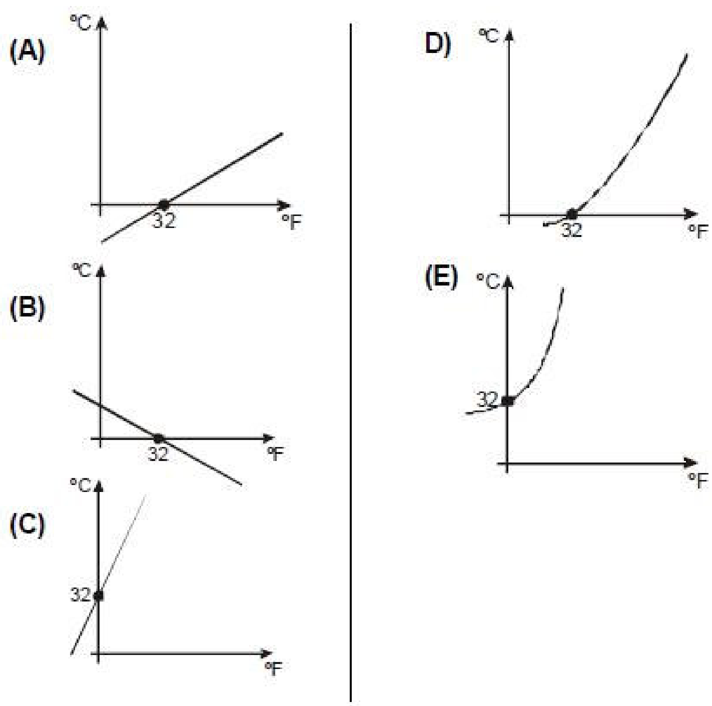
Fizemos a análise *a priori* das quatro questões selecionadas. Nessa análise, procuramos destacar os conhecimentos necessários para a resolução de cada questão, chamados aqui de conhecimentos mobilizáveis.

Destacamos, também, os registros de representação semiótica e o saber envolvido em cada situação problema. As questões foram escolhidas por serem ligadas ao tema função monotônica.

Neste item, apresentaremos nossas análises para as questões. Isso será feito por meio de uma análise em que apresentamos a resolução da questão, bem como a opção correta de escolha entre as alternativas. Para essa análise, vamos tratar dos seguintes aspectos: objetivos, conhecimentos mobilizáveis, registro de representação semiótica e os procedimentos de resolução.

Ano 2005, Questão 10:

No Brasil, usa-se a escala *Celsius* para medir temperaturas e, em outros países, usa-se a escala *Fahrenheit*. Para converter uma temperatura da escala *Fahrenheit* para a *Celsius,* subtrai-se 32 do valor da temperatura em graus *Fahrenheit* e multiplica-se o resultado por $\frac{5}{9}$. Qual dos gráficos representa a relação entre as medidas de uma mesma temperatura em graus *Fahrenheit* (indicados por ºF) e em graus *Celsius* (indicados por ºC)?



Análise da questão

A expressão que fornece a temperatura Celsius (ºC) em função da temperatura Fahrenheit (ºF) é $C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9}$, sendo F o valor numérico para a temperatura em graus Fahrenheit e C, em graus Celsius. Logo, o registro gráfico correspondente à representação algébrica é uma reta e, com isso, excluimos as opções (D) e (E). A reta é a representa gráfica da relação entre as medidas de uma mesma temperatura em graus Fahrenheit (ºF) em graus Celsius (ºC).

Se consideramos C=0 nessa expressão, então, obtemos que F = 32 e isso significa que a reta corta o eixo F em 32, o que elimina a opção (C).

Além disso, sendo $C = (F - 32) \cdot \frac{5}{9}$ então o coeficiente angular da reta é positivo, o que elimina a opção (B).

Portanto, resta apenas a alternativa (A) que é a única correta.

O objetivo: verificar se o aluno usa a conversão de registros para obter uma temperatura da escala Fahrenheit à escala Celsius.

Conhecimentos mobilizados:

• Compreender o significado de par ordenado;

• Saber localizar pontos no plano;

• Conversão do registro gráfico em algébrico e vice-versa;

• Conversão de temperatura nas escalas Celsius e Fahrenheit;

Nesta questão, os Registros de Representação Semiótica são: língua natural, registro algébrico, registro numérico e registro gráfico.

Justificativa de escolha: a atividade da Olimpíada de Matemática foi elaborada com o intuito de estabelecer relações entre duas grandezas que são: a temperatura

Celsius (C) em função da temperatura Fahrenheit (F), identificando o gráfico que representa a relação entre as medidas de uma mesma temperatura em graus Fahrenheit (ºF) em graus Celsius (ºC).

Procedimentos de resolução:

Existem, pelo menos, duas maneiras diferentes para se resolver a questão, a saber:

(I) Eliminando as alternativas

Portanto, espera-se que o aluno elimine as alternativas (D) e (E), já que os gráficos correspondentes não são retas nem a relação entre medidas de uma mesma temperatura em graus Fahrenheit (°F) em graus Celsius (°C). A expressão é da forma C = (F – 32) . $\frac{5}{9}$, portanto, o gráfico correspondente é uma reta.

Esperava-se também que o aluno eliminasse a alternativa (C), pois a reta corta o eixo F das ordenadas em F=32 para C=0, na alternativa (C), a reta corta o eixo C no ponto de ordenada C=32, quando F=0.

A mesma expressão mostra que o coeficiente angular da reta é positivo. Como a alternativa (B) não tem essa característica, deve ser eliminada.

(II) Equacionando a situação problema

Esperava-se também que o aluno utilizasse a expressão $C = (F - 32).\frac{5}{9}$ em que F é representado em graus Fahrenheit e C é representado em graus Celsius, para chegar à alternativa correta, na qual o valor em graus Celsius será sempre menor que o valor em graus Fahrenheit, referente à mesma temperatura.

Ele poderá atribuir valores diferentes na escala Celsius, convertê-los para a escala Fahrenheit, colocá-los em um plano cartesiano e unir esses pontos para esboçar o gráfico de reta.

Se considerarmos que os valores atribuídos para a escala Celsius são $C = 20°C$ e $C = 30°C$, então, temos:

a) Para $C = 20°C$ temos:

°F = (°C . 1,8) + 32

°F = (20 . 1,8) + 32

°F = 36 + 32

°F = 68

b) Para $C = 30°C$ temos:

°F = (°C . 1,8) + 32

°F = (30 . 1,8) + 32

°F = 54 + 32

°F = 86

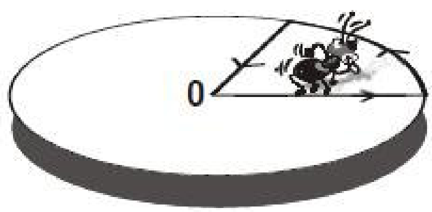
Esperamos que o aluno use a condição de alinhamento de três pontos no plano, que corresponde a calcular um determinante para constatar que se trata de uma reta. Assim, o calculo do determinante com os pontos (0,32), (20,68) e (30,86), fornece:

$$\begin{vmatrix} 0 & 32 & 1 \\ 20 & 68 & 1 \\ 30 & 86 & 1 \end{vmatrix} = 960 + 1720 - 2040 - 640 = 0$$

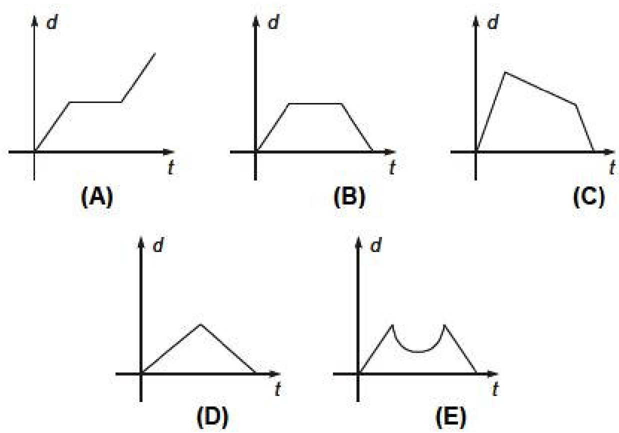
Como o resultado é igual a 0, temos que os três pontos estão alinhados, e o aluno deverá, portanto, esboçar o gráfico de uma reta.

Ano 2006, Questão 17

Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre de uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.



Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*?



Análise da questão

De acordo com o enunciado, a formiguinha parte do centro do círculo e afasta-se até chegar à extremidade deste, e anda sobre parte da circunferência. Com isso, eliminamos as alternativas (C), (D) e (E), porque esses gráficos representam que a formiguinha não andou sobre parte da circunferência. Finalmente, ela retorna ao centro, eliminando a alternativa (A), porque nesse gráfico a formiguinha não retorna ao centro. Restando, portanto, a alternativa (B) que é a correta, porque é a única que representa o trajeto ilustrado na figura.

O objetivo da questão foi verificar se o aluno possui as habilidades de localizar pontos no plano cartesiano, conhecer função crescente, decrescente e constante. É necessário, também, identificar corretamente na figura o trajeto percorrido pela formiguinha.

Os registros de representação semiótica envolvidos nessa questão foram: registro na língua natural, registro figural e registro gráfico.

Os saberes envolvidos na situação problema foram geométricos e relativos à função.

Essa atividade foi desenvolvida com o intuito de identificar qual dos gráficos representa a distância d da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo t com velocidade constante.

O aluno deveria mobilizar seus conhecimentos anteriores sobre círculo e circunferência, normalmente, estudados na 8ª série e, também, revistos no Ensino Médio, e função crescente e decrescente normalmente trabalhada nos 1º e 2º anos do Ensino Médio. Existem, pelo menos, duas maneiras diferentes para se resolver a questão.

1ª Forma: Eliminando as alternativas

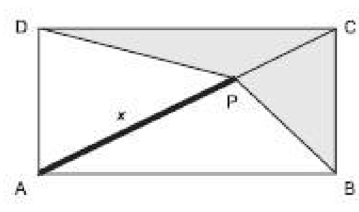
Se a formiguinha parte do centro do círculo e anda até a extremidade, então, a distância *d* aumenta em função do tempo *t;* a seguir, a formiguinha caminha sobre parte da circunferência e, portanto, a distância permanece a mesma em relação ao centro do círculo. Assim, os gráficos referentes às alternativas (C), (D) e (E) podem ser eliminados. Notamos que no item (C), a distância diminuiu; no item (D) a distância não se manteve constante em relação ao centro e no item (E), a distância diminuiu, depois aumentou. Depois a formiguinha andará novamente sobre o raio do círculo rumo ao centro, significando, então, que a distância deverá diminuir. Portanto, o gráfico proposto no item (A) deveria ser eliminado, pois, neste caso, a formiguinha estaria afastando-se do caminho do círculo. Logo a alternativa correta é (B).

2ª Forma: Analisando diretamente a figura e seu enunciado

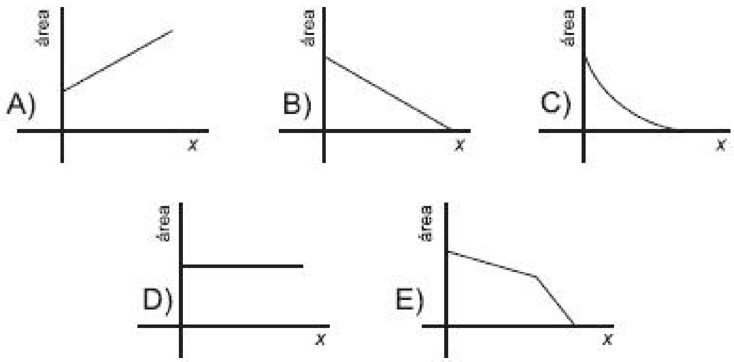
Esperava-se que o aluno, ao ler o problema, fizesse seu gráfico e representasse a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t*, e assinalasse a alternativa correta.

Ano 2007 Questão 18

Considere o polígono BCDP:



Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono *BCDP* em função da distância *x = AP*?



De acordo com a figura, notamos que a função é decrescente, pois à medida que a distância *x* cresce a área do polígono *BCDP* diminui. As alternativas (A) e (D) não representam funções decrescentes e já são, então, eliminadas.

Verificamos, também, que os triângulos *ACB* e *ACD* são congruentes (caso LLL), então, os triângulos *BCP* e *DCP* têm a mesma área.

Notamos ainda que a área do polígono *BCDP* pode ser representada por uma função afim, o que elimina as alternativas (C) e (E), restando apenas a alternativa (B), que é a correta.

O objetivo da questão era verificar se o aluno possui a habilidade para resolver uma situação problema, utilizando os conhecimentos de geometria, envolvendo a variação da área de polígonos, estabelecendo a relação entre duas grandezas em que a área varia em função da distância $x = AP$.

Para a resolução do problema é necessário mobilizar os conhecimentos:

• Compreender o significado de par ordenado;

• Saber localizar pontos no plano;

• Conhecer os casos de congruência de triângulos;

• Ter noções de cálculo de área de triângulo e quadriláteros.

Os registros de representação semiótica utilizados nessa questão foram: registro na língua natural, gráfico e figural.

Existem, pelo menos, duas maneiras diferentes para se resolver a questão.

1ª Maneira: Eliminando as alternativas

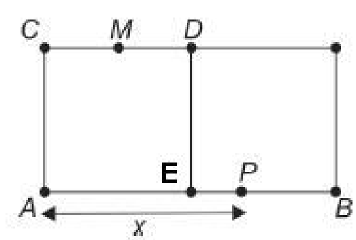
O aluno poderá eliminar as alternativas (A) e (D), por não serem respectivamente função decrescente e estritamente crescente, pois a medida que a distância *x* cresce, a área (BCDP) diminui.

Também, esperava-se que os alunos percebessem que as alternativas (C) e (E) eram falsas, já que não se tratavam de funções afim, pois verificamos que os triângulos ACB e ACD são congruentes.

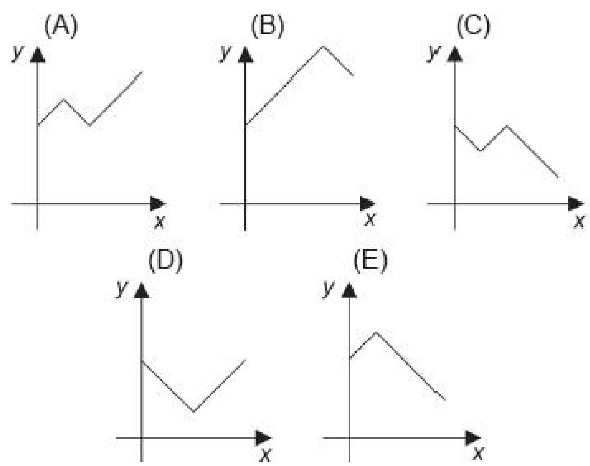
2ª Maneira: Analisando diretamente a figura e seu enunciado

Era esperado também que o aluno, ao ler a questão e observasse a figura dada chegasse à resposta de uma forma direta, comparando a distância *x* em função da área.

Ano 2008, Questão 16

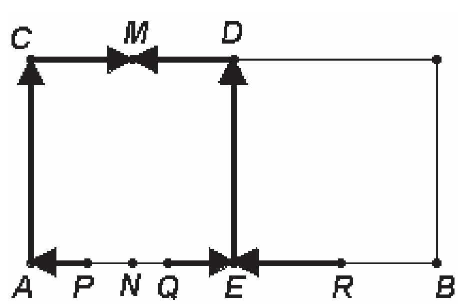


Na figura, vemos dois quadrados, sendo M o ponto médio de CD. Uma formiguinha parte de um ponto qualquer P do segmento AB e quer chegar ao ponto M, andando apenas sobre os lados dos quadrados pelo menor caminho possível. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a distância y que a formiguinha vai percorrer em função da distância $x = AP$?



Análise

Sendo N o ponto médio do segmento AE, vamos considerar três outros pontos P, Q e R que representam possíveis posições de partida da formiguinha. Para qualquer um desses pontos, sua distância ao ponto A será denotada por x. Temos três situações:



1ª) a formiguinha parte de um ponto P entre *A* e *N*. Nesse caso, o menor caminho será: $P \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow M$. Observe que se $x=AP$ aumenta (*P* se aproxima de *N*), o caminho a ser percorrido, também, aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que a função é crescente entre *A* e *N*.

2ª) a formiguinha parte de um ponto *Q* entre *N* e *E*. Nesse caso, o menor caminho é: $Q \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$. Observe que $x=AP$ aumenta (*Q* se aproxima de *E*), e o caminho a ser percorrido diminui no mesmo comprimento. Isso significa que a função é **decrescente** entre *N* e *E*.

3ª) a formiguinha parte de um ponto *R* entre *E* e *B*. Nesse caso, o menor caminho é: $R \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$. Observe que se $x=AR$ aumenta (*R* se aproxima de *B*), o caminho a ser percorrido, também, aumenta do mesmo comprimento. Isso significa que a função é **crescente** entre *E* e *B*. Assim sendo a única alternativa correta é (A).

O objetivo desta questão foi verificar se o aluno possuía as habilidades para operar com par ordenado, saber localizar pontos no plano cartesiano, conhecer função crescente e decrescente e comparar a distância *x* em função da distância *y* que a formiguinha vai percorrer.

Nesta questão, os registros de Representação Semiótica envolvidos são:

• Língua natural;

• Registro gráfico;

• Registro figural.

Essa atividade foi desenvolvida com o intuito de estabelecer relações entre duas grandezas que são: a distância *y* que a formiguinha vai percorrer andando apenas sobre os lados do quadrado pelo menor caminho em função da distância $x=AP$ dada na figura.

Existem, pelo menos, duas maneiras diferentes para se resolver esta questão.

1ª Maneira: analisando a partir do ponto *P*

Se o aluno analisar a formiguinha partindo do ponto *P,* conforme a figura da questão, então, o menor caminho será $P \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$. Se $x = AP$ aumenta (*P* aproxima-se de *B*), o caminho a ser percorrido, também, aumenta do mesmo comprimento (função crescente). Se $x = AP$ diminui para percorrer, também, $P \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow M$ a distância *y,* também, diminuirá (a função é crescente entre *E* e *B*).

Procedendo da mesma forma, esperava-se que o aluno analisasse também o comprimento de x entre os pontos *A* e *E*. Quando x cresce de *A* até a metade do segmento *AE,* a função é crescente. Depois que passa da metade desse segmento, a função é decrescente, pois x aumenta e a distância diminui. O único gráfico que corresponde a essa situação é o gráfico da alternativa (A).

2ª Maneira: Analisando diretamente a figura e seu enunciado

Era esperado que o aluno ao ler a questão e observar a figura dada, chegasse à resposta de uma forma direta, comparando a distância $x = AP$ com a menor distância y que a formiguinha vai percorrer e concluísse que a alternativa correta é (A).

CAPÍTULO V - Procedimentos metodológicos e aplicação das atividades

O objetivo do presente trabalho de pesquisa foi analisar o desempenho de 20 alunos da 3ª série do Ensino Médio, na resolução de 4 questões sobre função monotônica (crescente e decrescente), propostas nas Olimpíadas de: 2005; 2006; 2007 e 2008.

Esta pesquisa caracteriza-se pela abordagem qualitativa, na qual, na análise dos dados coletados, há uma prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos.

Segundo Bogdan e Biklen (1982), uma pesquisa qualitativa apresenta cinco características básicas que configuram este tipo de estudo; são elas:

1. *A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados, e o pesquisador como seu principal instrumento*

Segundo os dois autores, a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada. Como os problemas são estudados no ambiente em que eles ocorrem, naturalmente, sem qualquer manipulação intencional do pesquisador, esse tipo de estudo é também chamado de "naturalístico". Para esses autores, todo estudo qualitativo é também naturalístico. A justificativa para que o pesquisador mantenha um contato estreito e direto com a situação, onde os fenômenos ocorrem naturalmente é a de que estes são muito influenciados pelo seu contexto. Sendo assim, as circunstâncias particulares em que um determinado objeto insere são essenciais para que se possa entendê-lo. Da mesma maneira, as pessoas, os gestos, as palavras estudadas devem ser sempre referenciadas ao contexto onde aparecem.

2. *Os dados coletados são predominantemente descritivos*

Nessas pesquisas, o material obtido é rico em descrição de pessoas, de situações e de acontecimentos; inclui transcrições de entrevistas e depoimentos, fotografias, desenhos e extratos de vários tipos de documentos. Citações são, com frequência, usadas para subsidiar uma afirmação ou esclarecer um ponto de vista. Questões aparentemente simples, como: “por que as carteiras nesta escola estão dispostas em grupos nas primeiras séries e em fileiras nas terceiras e quartas séries?”, e outras, desse mesmo tipo, precisam ser sempre colocadas e sistematicamente investigadas.

3. *A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto*

O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar, como ele se manifesta nas atividades, procedimentos e interações cotidianas.

4. *O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador*

Nesses estudos, há sempre uma preocupação em capturar a “perspectiva dos participantes”, isso é; a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas.

5. *A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo*

Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações formam-se ou se consolidam basicamente a partir da inspeção dos dados, em um processo de baixo para cima. O fato de não existirem hipóteses ou questões específicas formuladas *a priori,* não implica a inexistência de um quadro teórico que oriente a coleta e a análise dos dados. O desenvolvimento do estudo aproxima-se de um funil: no início, há questões ou focos de interesse muito amplos que, no final, se tornam mais diretos e específicos. O pesquisador vai precisando melhor esses focos, à medida que o estudo se desenvolve.

A pesquisa qualitativa ou naturalística, segundo Bogdan e Biklen (1982), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e preocupa-se em retratar a perspectiva dos participantes.

Para Allevato (apud Romberg 1992, p.51), as atividades envolvidas em fazer pesquisa qualitativa englobam mais características de uma arte do que da disciplina puramente técnica. O autor citado destaca ainda dez atividades que considera essenciais para o desenvolvimento de uma pesquisa, salientando que, embora sejam apresentadas em sequencial, não, necessariamente, se realizam nessa ordem.

1. Fenômeno de interesse: é a curiosidade do pesquisador e representa o ponto de partida para um trabalho de pesquisa.

2. Modelo preliminar: é um dispositivo heurístico que ajuda a "clarear" um fenômeno complexo e serve como ponto de partida e orientação à pesquisa. O modelo preliminar reflete a ideia inicial do pesquisador sobre o que pretende estudar.

3. Relacionar com ideias de outros: o pesquisador procura conhecer as pesquisas já desenvolvidas relacionadas a seu tema. Conhece o que outros pesquisadores pensam e quais são suas ideias e concepções teóricas; identifica lacunas de pesquisa e sabe como tais ideias e concepções podem fundamentar ou modificar o modelo preliminar.

4. Questões ou conjecturas: essa seção foi dividida em três subseções intituladas "As conjecturas e a pergunta inicial", "A metodologia de pesquisa qualitativa" e "A pergunta definitiva".

5. Selecionar estratégias de pesquisa: é a parte de idealização da pesquisa. Resulta diretamente do fenômeno de interesse da pergunta de pesquisa e do modelo preliminar. A estratégia determina o que pesquisar.

6. Procedimentos de pesquisa: o pesquisador escolherá que procedimento será utilizado para levá-la a cabo, isto é, ele decidirá como colocará em prática as estratégias. Os procedimentos tornam exequíveis, o que foi idealizado.

7. Coletar evidências: nesse momento, são recolhidos os dados, que fornecerão subsídios para responder à pergunta norteadora da pesquisa.

8. Interpretar evidências: essa atividade envolve, entre outras coisas, selecionar, categorizar e organizar os dados coletados (ROMBERG, 1992).

9. Relatar resultados: comentários, críticas e sugestões são as fontes de novas questões para investigação de novas ideias, ou mesmo, reforçam e complementam as ideias.

10. Antecipar as ações de outros: comentários e sugestões serão fontes, também, de novas questões para investigação e são eles que criam, nas comunidades científicas as “cadeias de investigação”. (ROMBERG1992, p.53).

Como metodologia de pesquisa, vamos nos basear em quatro fases do processo da Engenharia Didática que resumiremos a seguir.

Na primeira fase, ocorre a análise preliminar, em que se considera o quadro teórico geral e os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão.

Na segunda fase, ocorre a análise *a priori* das questões que, em nosso caso, são questões das Olimpíadas de Matemática dos anos 2005; 2006; 2007 e 2008, referentes às funções crescentes e decrescentes e, também, as possíveis estratégias de resolução, destacando os conhecimentos prévios necessários para a resolução da questão.

A terceira fase destina-se à experimentação, que é realizada com certa população de alunos participantes desse experimento. Segundo Machado (1999, p.206), a experimentação supõe: o estabelecimento do contrato didático que é a relação entre professor e aluno, a aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc).

A quarta fase é caracterizada pela realização da análise *a posteriori*, na qual analisamos as resoluções das questões apresentada pelos alunos.

Da mesma forma que Alevatto (1992), que considera as dez atividades essenciais ao desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa, também, fizemos o desenvolvimento desta pesquisa. Levamos em conta essas atividades, porém, não na mesma sequência apresentada pelo autor.

Inicialmente, destacamos que o fenômeno de interesse se iniciou quando percebemos que os professores, de modo geral, bem como os livros didáticos apresentavam a noção de função em uma linguagem técnica e distante da realidade do aluno.

Após essa primeira fase, relacionamos nossa pesquisa com as ideias das propostas curriculares e orientações curriculares.

A seguir, selecionamos as estratégias para uma pesquisa qualitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1982) supõem o contato direto do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, sem qualquer manipulação intencional do pesquisador. Depois selecionamos quatro questões das Olimpíadas de Matemática para Escolas Públicas que envolviam a noção de função monotônica. Essas questões foram propostas a 20 alunos da 3ª série do Ensino Médio em uma Escola Pública Estadual onde trabalhamos. Após a coleta dos dados, fizemos a análise das questões e, finalmente, as análises dos resultados.

5.1 LOCAL DE REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada em uma Escola Estadual de Ensino de Educação Básica, onde atuamos como professor titular de cargo efetivo de Matemática. A Escola possui 520 alunos matriculados com uma média de 30 alunos por sala.

O corpo docente é composto por 22 professores, todos graduados e alguns pós graduados. A equipe pedagógica é composta por duas coordenadoras, uma diretora e uma vice-diretora.

De acordo com Lakatos e Marconi (1991, p.199), o pesquisador deve entrar em contato direto com o informante e estabelecer desde o primeiro momento, uma conversação amistosa, exemplificando a finalidade da pesquisa, seu objeto, relevância e ressaltar a necessidade de sua colaboração e acrescenta, quando o entrevistador consegue estabelecer certa relação de confiança com o entrevistado, pode obter informações que de outra maneira talvez não fosse possível.

Foi feita uma solicitação à diretora da escola para autorizar o desenvolvimento da pesquisa com os alunos. Outra solicitação, também, foi feita aos alunos, convidando-os a participarem do trabalho como voluntários.

Os alunos receberam explicações que se tratava de um trabalho para obtenção do título de Mestre na área da Educação Matemática, que seria realizado na própria escola, durante o horário de aula. Esclarecemos ainda que caso fossem participar, precisariam trazer a autorização (que lhes foi entregue), assinada por seus pais ou responsáveis.

Informamos que seriam quatro questões escolhidas das Olimpíadas de Matemática que deveriam ser resolvidas individualmente, tal como nas Olimpíadas. Dissemos, também, que o desempenho de cada aluno participante não iria interferir em suas notas escolares.

O estudo constituiu-se de 20 alunos de uma sala de 3ª série do Ensino Médio que se propuseram a participar da pesquisa. Após recolher a autorização de cada um, passamos a desenvolver a primeira etapa, que compreendeu a resolução de duas questões: uma de 2005, e outra de 2006, com duração de 2 horas aulas, durante o período de aula.

Em outro dia, ocorreu a 2ª etapa. Foram mais duas outras questões, sendo uma de 2007 e outra de 2008, também, com duração de 2 horas aulas durante o período de nossa aula. Em todas as quatro questões, constavam alternativas, da mesma maneira como foram propostas nas Olimpíadas.

O motivo da resolução das questões em duas etapas foi ter um tempo maior para esse fim, pois disponibilizávamos de apenas duas aulas em cada etapa, e as soluções deveriam ser justificadas.

5.2 INSTRUMENTO DE PESQUISA

O instrumento utilizado na primeira etapa foi composto por duas questões, as quais foram selecionadas, pois envolviam a noção função crescente e função decrescente.

Para isso, analisamos as questões das provas das Olimpíadas de Matemática para escolas públicas, aplicadas a 3ª série do Ensino Médio do período da manhã, que exigiam conhecer as representações da língua natural, gráfica, algébrica, figural e numérica.

5.3 PROCEDIMENTOS DA APLICAÇÃO

No dia combinado em nosso horário de aula, aplicamos as questões aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, utilizamos as duas primeiras aulas que correspondem a um total de 90 minutos. Na primeira etapa, estavam presentes 20 alunos e o pesquisador.

Procuramos criar uma situação em classe, semelhante à das Olimpíadas. Explicamos que as questões poderiam ser resolvidas a lápis, mas, no final, deveriam passar tudo a caneta. Quanto ao uso de corretivo, nada foi falado, ficando, assim, livre seu uso. Ressaltamos, também, a necessidade de justificar cada questão e não apenas assinalar as alternativas.

Pedimos que resolvessem as questões com calma e sem pressa, e que toda resposta fosse refletida e ponderada. Todos os alunos estavam cientes de que essa atividade não interferiria em suas notas escolares.

Ao término da primeira etapa, marcamos a segunda etapa para o dia seguinte. Os procedimentos da segunda etapa foram similares aos da primeira e, novamente, os questionamentos dos alunos não foram diferentes durante essa resolução.

Nas duas etapas, as aplicações das atividades tiveram início às 7 horas e término às 8h40.

Alguns alunos questionaram o porquê de estarem resolvendo as Questões das Olimpíadas de Matemática. As perguntas, de modo geral, foram as seguintes: “Por que essa atividade não vai valer nota para este bimestre?” ou “Professor, o Senhor pode me ajudar nessa Questão?”. Outros alunos afirmaram que: “Não entendi nada nesta Questão!” ou “Eu não dava atenção nenhuma durante as aulas de Matemática!”. Todas as indagações foram devidamente respondidas. Foi explicado que todas as regras utilizadas nas Olimpíadas de Matemática seriam usadas, também, nessa atividade, ou seja, a atividade não valeria nota para o ano letivo e não poderia interferir na resolução dos problemas.

No próximo capítulo, faremos a apresentação e análise dos resultados obtidos nas duas aplicações.

CAPÍTULO VI - Análise dos resultados

Nas duas aplicações de nosso instrumento de pesquisa, as questões apresentavam alternativas para serem assinaladas. Solicitou-se que os alunos justificassem todas as respostas às questões, inclusive, que as escrevessem a caneta, pois seriam objeto de análise.

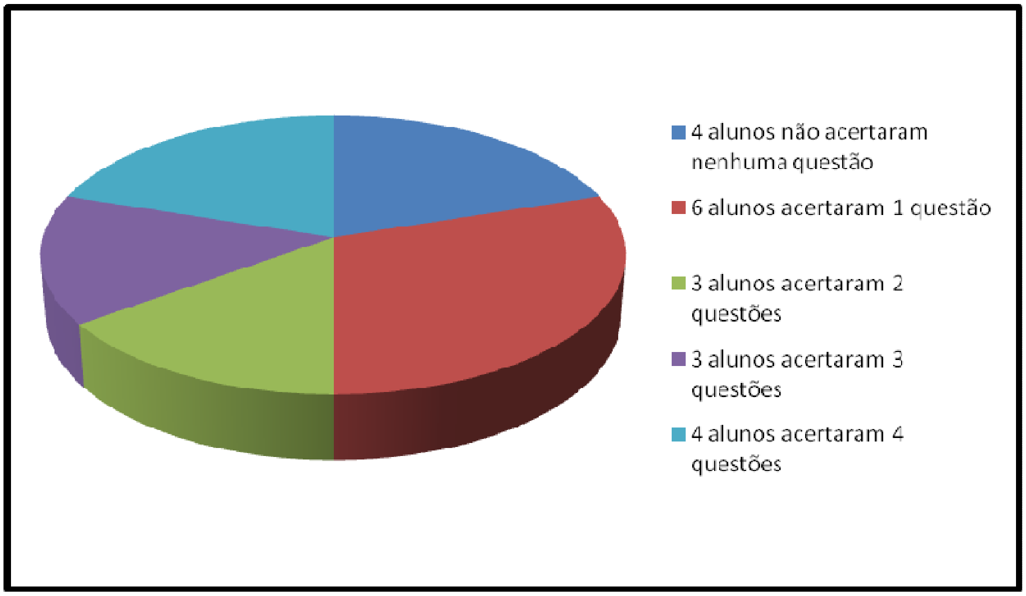
A seguir, apresentaremos o total de acertos em cada questão.

Tabela 1: Total de acertos por questão dos 20 alunos

QUESTÕES	TOTAL DE ACERTOS
10	10
17	9
18	9
16	9

Das quatro questões aplicadas, observou-se que: 20% dos alunos não acertaram nenhuma questão, 30% acertaram uma questão; 15%, duas questões; 15% três questões e 20% quatro questões.

Figura 4: Gráfico do percentual de acertos das quatro questões



De acordo com o gráfico, verificamos que dos 20 alunos que participaram dessas atividades, apenas quatro deles acertaram as quatro questões. A informação indica a condição que a grande maioria dos alunos apresenta para resolver questões das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas, envolvendo funções monotônicas. Esses alunos tiveram 1 hora aula para cada questão, ou seja, um tempo maior em relação ao tempo dado nas Olimpíadas que são 2h30 para resolver um total de 20 questões.

Ainda de acordo com o gráfico, verificamos que quatro alunos não acertaram nenhuma questão; seis alunos acertaram uma questão; três alunos, duas questões e três alunos, acertaram três questões.

Nos dados da Tabela a seguir, apresentaremos o índice de acertos, erros e justificativas dos 20 alunos da 3ª série do Ensino Médio. Consideramos acertos quando assinalada “alternativa correta” e “justificada corretamente”.

Consideramos erro o aluno que assinalou a “alternativa correta” com “justificativa incompleta”, “alternativa incorreta” com “justificativa correta” e “alternativa incorreta” e “justificativa incompleta”.

Tabela 2: Índice de acertos, erros e justificativas dos 20 alunos da 3ª Série do Ensino Médio

PROTOCOLO DO ALUNO	**QUESTÃO 10/2005**		**QUESTÃO 17/2006**		**QUESTÃO 18/2007**		**QUESTÃO 16/2008**	
	Alternativa	**Justificativa**	**Alternativa**	**Justificativa**	**Alternativa**	**Justificativa**	**Alternativa**	**Justificativa**
01	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
02	Correta	Incompleta	Correta	Correta	Correta	Incompleta	Correta	Incorreta
03	Correta	Correta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
04	Correta	Correta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
05	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta	Correta	Incompleta	Correta	Incompleta
06	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
07	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
08	Correta	Correta	Correta	Incorreta	Correta	Incorreta	Correta	Incompleta
09	Correta	Incompleta	Correta	Incompleta	Correta	Incorreta	Correta	Incompleta
10	Correta	Incompleta	Correta	Incompleta	Correta	Incorreta	Correta	Incompleta
11	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta
12	Correta	Incompleta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incorreta
13	Correta	Correta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta
14	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta
15	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
16	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta
17	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
18	Correta	Correta	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta	Correta	Incompleta
19	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
20	Correta	Incompleta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta	Incorreta
Total de acertos	5		9		9		9	

Após a análise das respostas dos 20 alunos que constam nos dados da Tabela 2, observamos que a grande maioria apresenta certa dificuldade para resolver questões que envolvam conceitos sobre; funções crescentes e decrescentes.

Análise dos resultados por questão

Cada aluno respondeu quatro questões e das 80 questões respondidas, apenas 37 foram assinaladas corretamente e, dessas, só seis com justificativas corretas e outras 22 com justificativas incompletas.

Para facilitar a análise dos resultados por questão, enumeramos os protocolos dos 20 alunos envolvidos na pesquisa.

A questão 10 das Olimpíadas, de acordo com nossa análise, envolvia saber localizar pontos no plano cartesiano, conversão de registro gráfico em registro algébrico ou vice-versa e converter temperatura das escalas Fahrenheit para a escala Celsius.

Levando em consideração as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução da questão, concluímos que dos dez alunos que assinalaram corretamente essa questão, apenas cinco justificaram corretamente as respostas, (são os alunos de protocolo 3, 4, 8, 13 e 18).

Análise dos erros encontrados na questão 10

Para a análise dos erros, dividimos em três grupos quanto aos tipos de respostas escritas nos protocolos dos alunos.

Chamamos de Grupo 1 os alunos que assinalaram a alternativa errada e justificaram de forma incompleta.

No Grupo 2, incluímos os alunos que assinalaram a alternativa correta, porém a justificativa ficou incompleta.

No Grupo 3, apenas aqueles alunos que assinalaram a alternativa correta e, também, justificaram corretamente.

Nessa questão, nenhum aluno assinalou a alternativa incorreta com justificativa correta ou incompleta, também, não houve aluno que assinalou a alternativa correta com justificativa incorreta.

Questão 10 – Tabela 3 – Grupo 1: Alunos que assinalaram e justificaram incorretamente

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
1	"Justificativa não disponível."	Não utilizou a fórmula dada no problema e analisou o gráfico incorretamente.
5	"[...] pois o grau ºC não se cruza com o grau ºF, entretanto a alternativa B passa da linha Fahrenheit (ºF) para Celsius (ºC), ou seja se cruzam pelo ponto."	Analisou que a reta passando pelo eixo de ºF e também pelo eixo ºC, esta alternativa deveria ser correta e não utilizou a fórmula dada.
6	"É a letra B porque a temperatura da escala, e não e cimentável para medir a temperatura uma a outra."	Não utilizou a fórmula dada.
7	"Letra B, por que é o mais compatível."	Não utilizou a fórmula dada e também não analisou o gráfico.
11	"[...] a resposta certa é B porque parte de Fahrenheit e cruza no ponto Celsius."	Como a reta cruza os dois eixos ºF e ºC seria a resposta correta e não utilizou a fórmula dada.
14	"[...] a alternativa correta é a B, pois parte do ponto Fahrenheit cruzando com o ponto de temperatura Celsius."	Não utilizou a fórmula dada e justificou incorretamente.
15	"Eu acho que é a resposta D, porque ela ta na temperatura para Celsius é numérico subtrai o valor da temperatura."	Não interpretou o gráfico corretamente e não utilizou a fórmula dada no problema.
16	"[…] para se chegar a temperatura Fahrenheit é a letra D representa resultado em Fahrenheit."	Não utilizou a fórmula dada e não desenvolveu corretamente as informações dadas no problema.
17	"[…] para converter a temperatura Fahrenheit para Celsius é necessário subtrair o valor da temperatura	Não utilizou a fórmula dada e também não interpretou corretamente o problema.
19	"$°F = 32 - °C \rightarrow \quad C.F = 32.\frac{5}{9} \rightarrow \quad CF = \frac{160}{9} \rightarrow$ $CF = 17,7$	Utilizou a fórmula dada no problema de maneira errada.

Tabela 4 – Grupo 2: Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incompleta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
2	"Porque quanto maior o Fahrenheit maior o Celsius, se a temperatura passa de 32°F para menos a temperatura em °C será negativa."	Não analisou o gráfico de forma correta.
9	"É a letra A, se a temperatura for menor que 32°F, ela será menor."	Não analisou o gráfico de forma correta.
10	"[…] subtraindo o valor da temperatura e multiplicando o resultado por $\frac{5}{9}$ mostra que o resultado é 22."	Utilizou a fórmula de modo incorreto.
12	Não justificou a alternativa assinalada.	Não justificou a alternativa assinalada, porém justificou as alternativas incorretas.
20	"Pelo que sei, Fahrenheit é mais alto que Celsius. E tudo indica a letra A."	Não atribuiu valores quando fez a análise da alternativa correta, pela sua justificativa poderia ser por exemplo a alternativa D que é incorreta.

Tabela 5 – Grupo 03: Alunos que assinalaram e justificaram corretamente a alternativa

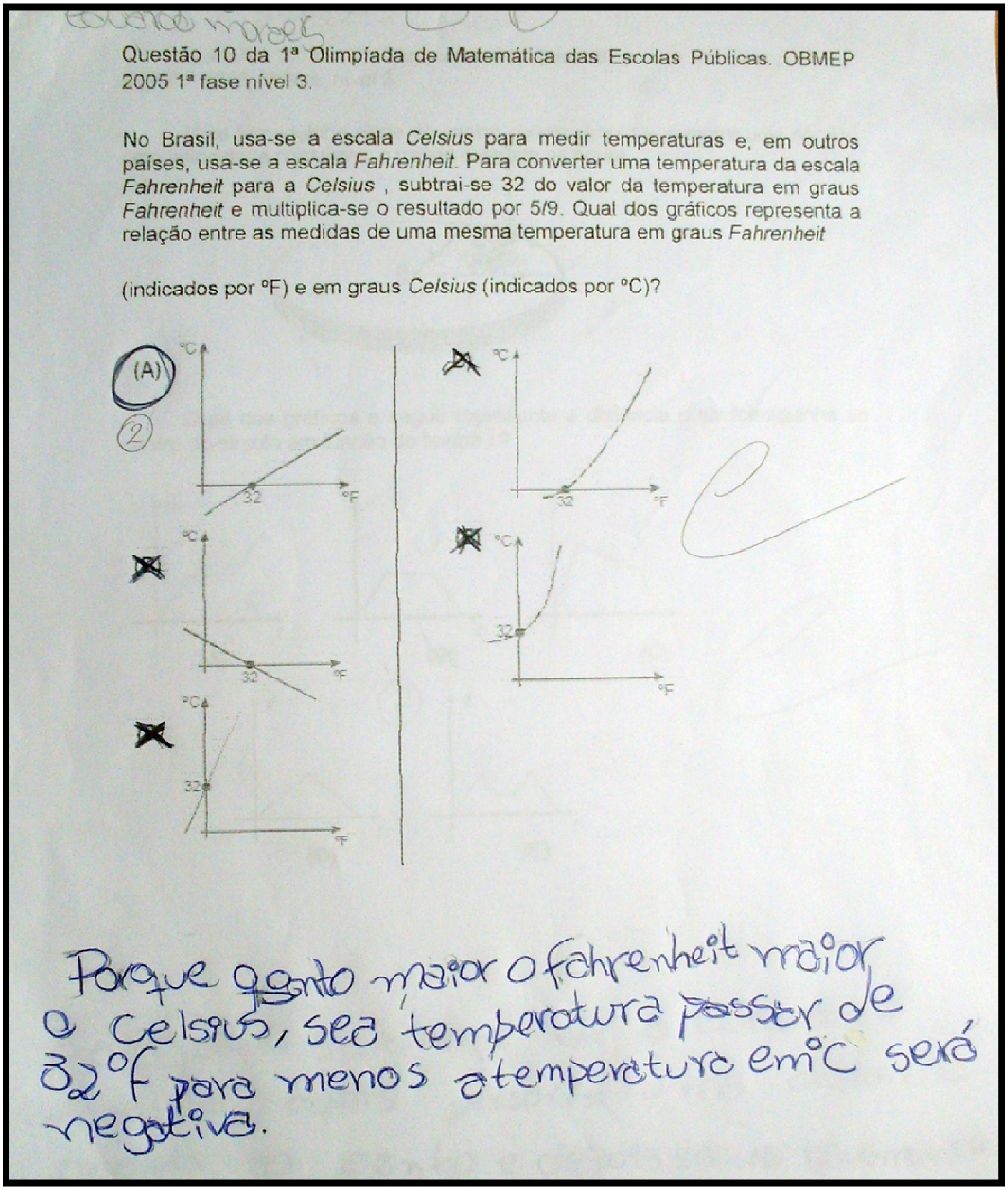
Aluno	Justificativa	Erro Cometido
3	"Não pode ser o gráfico D e E porquê não é constante. O B não é porquê a reta está decaindo. Só resta o gráfico A."	Nenhum
4	"A resposta é a letra a porque ela está subindo constante, conforme o Fahrenheit aumenta."	Nenhum
8	"Se a temperatura é menor de 32ºF, a temperatura em ℃ será negativa."	Nenhum
13	"A resposta correta é a letra A, porque 32℉ vale a 0℃, conforme aumenta na escala ℉, aumenta também na escala ℃."	Nenhum
18	"72℉ p/℃ → 72 – 32 = 40 → 40 . 0,55 = 22℃ Quando se subtrai 32 de um valor qualquer na escala Fahrenheit para transformar em Celsius, e depois multiplica-se o resultado por 0,55 (ou $\frac{5}{9}$) o número de Celsius é menor que na escala Fahrenheit.	Nenhum

Análise da Resolução da Questão 10

A seguir, selecionamos alguns protocolos de alunos sobre a resolução da Questão 10.

Protocolo do aluno 2:

Pela resolução da questão, podemos constatar na Figura 5 que existe grande possibilidade desse aluno ter conhecimento de par ordenado, de função crescente e decrescente e noção de transformação de temperaturas das escalas Fahrenheit para a escala Celsius, quando ele escreveu utilizando o registro da língua natural: "quanto maior o Fahrenheit maior o Celsius e se a temperatura passar de 32°F para menos a temperatura em °C será negativa."



Questão 10 da 1ª Olimpíada de Matemática das Escolas Públicas. OBMEP 2005 1ª fase nível 3.

No Brasil, usa-se a escala *Celsius* para medir temperaturas e, em outros países, usa-se a escala *Fahrenheit*. Para converter uma temperatura da escala *Fahrenheit* para a *Celsius* , subtrai-se 32 do valor da temperatura em graus *Fahrenheit* e multiplica-se o resultado por 5/9. Qual dos gráficos representa a relação entre as medidas de uma mesma temperatura em graus *Fahrenheit*

(indicados por °F) e em graus *Celsius* (indicados por °C)?

Porque qanto maior o fahrenheit maior o celsius, se a temperatura passar de 32 °F para menos a temperatura em °C será negativa.

Figura 5: Protocolo do aluno 2 – questão 10

Protocolo do aluno 3:

Na Figura 6, percebemos que o aluno tem noção de função crescente e decrescente, bem como de plano cartesiano, mesmo fazendo uso de outras palavras, utilizando o registro de representação da língua natural.

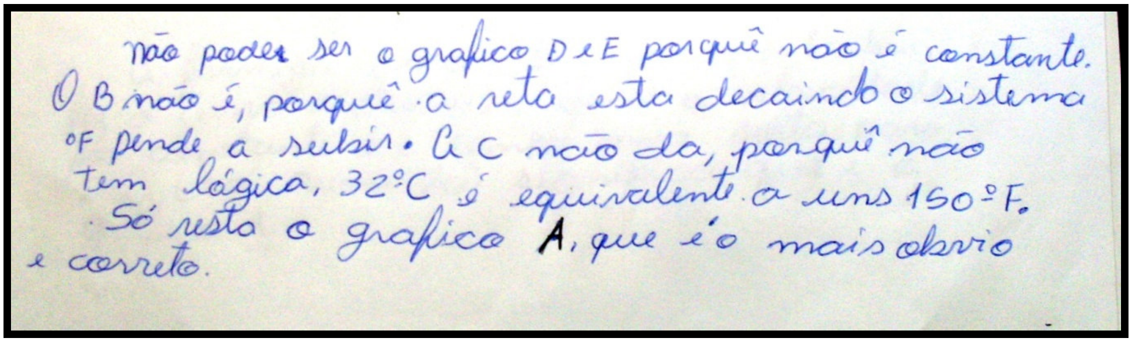

não poder ser o grafico D e E porquê não é constante.
O B não é, porquê a reta esta decaindo o sistema
ºF pende a subir. A C não da, porquê não
tem lógica, 32ºC é equivalente a uns 150ºF.
Só resta o grafico A, que é o mais obvio
e correto.

Figura 6: Protocolo do aluno 3 questão 10

Quando o aluno escreveu que “não pode ser o gráfico (D) e (E) porque não é constante” percebemos que ele tem noção de função monotônica, o aluno continuou escrevendo: “o B não é, porque a reta está decaindo, o sistema ºF pende a subir.” O aluno analisou que o gráfico (B) tratava-se de uma função decrescente (decaindo), portanto, não era este.

Quando o mesmo escreveu: “A C não dá, porquê não tem lógica, 32ºC é equivalente a uns 150ºF.” O aluno não calculou porque 32ºC equivale a 89,6ºF, mas ele imaginou que, o gráfico (C) não poderia ser de hipótese nenhuma, porque nesse gráfico 32ºC está equivalendo a 0ºF. O aluno finaliza escrevendo que, “só resta o gráfico A, que é o mais óbvio e correto.”

Protocolo do aluno 4:

O protocolo do aluno quatro revelou que, de uma forma direta, analisou que o gráfico (A) seria o correto, pois escreveu “porque ele está subindo constante.” Ou seja, é função crescente.

Com isso, percebemos que ele tem noção de função crescente e decrescente e função afim, justificando a resposta, utilizando o registro de representação da língua natural.

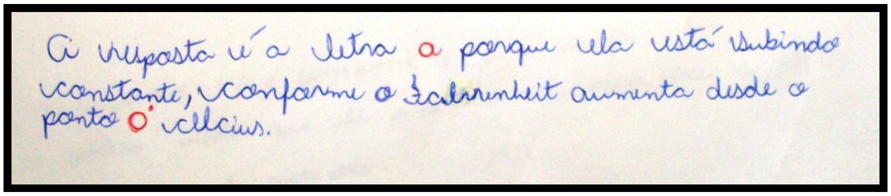


Figura 7: Protocolo do aluno 4 – questão 10.

Protocolo do aluno 8:

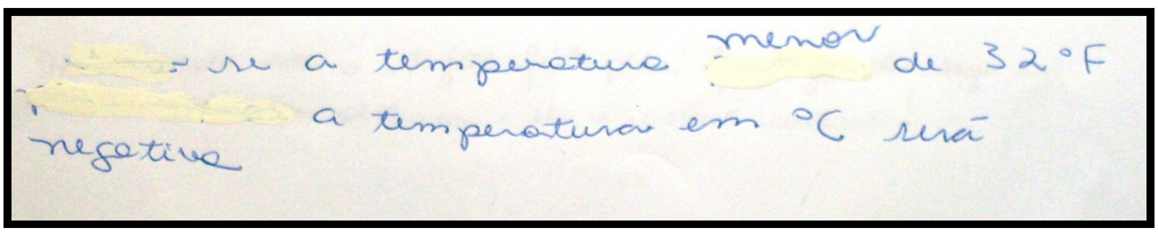


Figura 8: Protocolo do aluno 8 – questão 10

Pelas palavras escritas pelo aluno, percebemos que ele tem conhecimento de par ordenado, quando ele escreve utilizando o registro de representação da língua natural: “se a temperatura menor de 32°F a temperatura em °C será negativa.” Ele analisou que, uma temperatura de 0°C equivale a 32°F, então, uma temperatura menor que 32°F equivale a uma temperatura negativa na escala Celsius, com isso ele analisou diretamente a alternativa (A), que é o único gráfico que tal fato ocorre.

Nesse caso, podemos concluir que o aluno tem conhecimento de transformação de temperatura da escala Fahrenheit para a escala Celsius.

Protocolo do aluno 13:

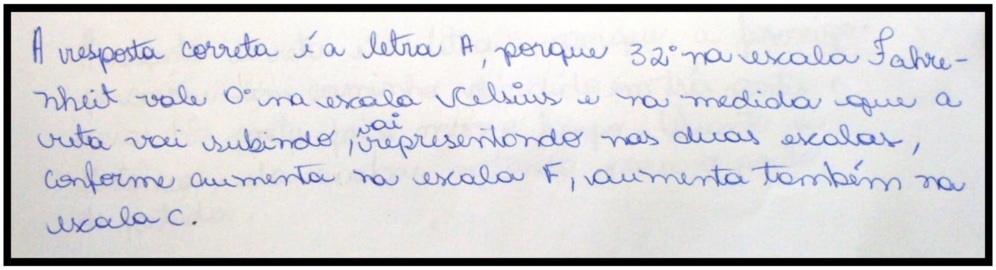

A resposta correta é a letra A, porque 32° na escala Fahre-
nheit vale 0° na escala Celsius e na medida que a
reta vai subindo, vai representando nas duas escalas,
conforme aumenta na escala F, aumenta também na
escala C.

Figura 9: Protocolo do aluno 13 – questão 10

Este aluno utilizou o registro de representação da língua natural para justificar a resposta desta questão, segundo o que ele escreve: "[…] na medida que a reta vai subindo, vai representando nas duas escalas, conforme aumenta na escala F, aumenta também na escala C." Percebemos que ele considerou que se tratava de uma função crescente (vai subindo) e, também, que se tratava de uma função afim, portanto, percebe-se que esse aluno parece ter conhecimento de plano cartesiano e noção de gráficos.

Protocolo do aluno 18:

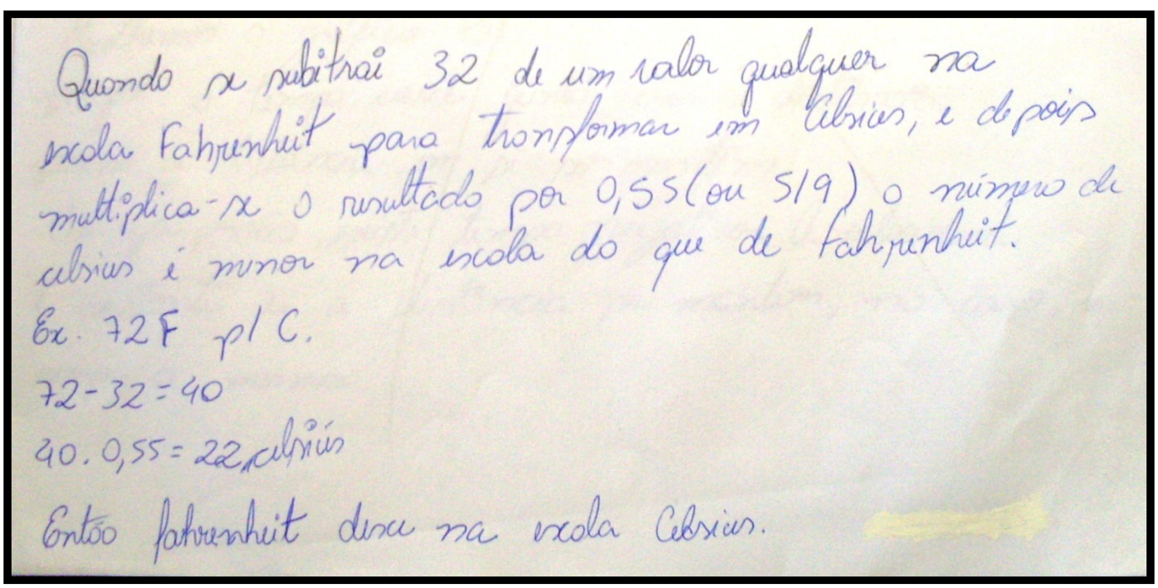
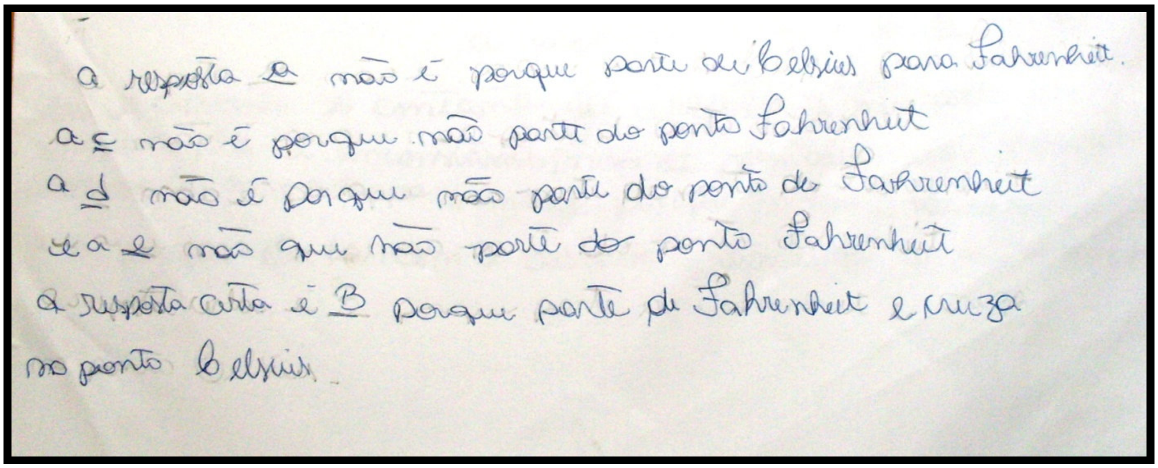

Quando se subitraí 32 de um valor qualquer na
escola Fahrenheit para transformar em Celsius, e depois
multiplica-se o resultado por 0,55 (ou 5/9) o número de
celsius é menor na escola do que de Fahrenheit.
Ex. 72F p/ C.
72-32=40
40.0,55=22 celsius
Então fahrenheit desce na escola Celsius.

Figura 10: Protocolo do aluno 18 – questão 10

Na Figura 10, percebemos que o aluno utilizou os registros de representação da língua natural e numérico. O mesmo realizou a transformação de 72°F em °C corretamente, depois com esses valores e analisando o gráfico, chegou à resposta correta, com isso podemos afirmar que ele tem conhecimento de gráficos no plano cartesiano e função crescente.

Protocolo do aluno 11:



a resposta a não é porque parte de Celsius para Fahrenheit.
a c não é porque não parte do ponto Fahrenheit
a d não é porque não parte do ponto de Fahrenheit
e a e não que não parte do ponto Fahrenheit
a resposta certa é B porque parte de Fahrenheit e cruza
no ponto Celsius.

Figura 11: Protocolo do aluno 11 – questão 10

Os tipos de erros foram diversos, porém percebemos que a maioria dos alunos possivelmente não interpretou de forma correta ou desconheciam o assunto.

Na Figura 11, percebemos que o aluno tenta justificar, utilizando o registro da língua natural, uma alternativa errada (B), quando escreve "[...] a resposta certa é B porque parte de Fahrenheit e cruza no ponto Celsius.". Provavelmente, o aluno não soube utilizar os conhecimentos prévios ou desconhecia o assunto.

Protocolo do aluno 19:

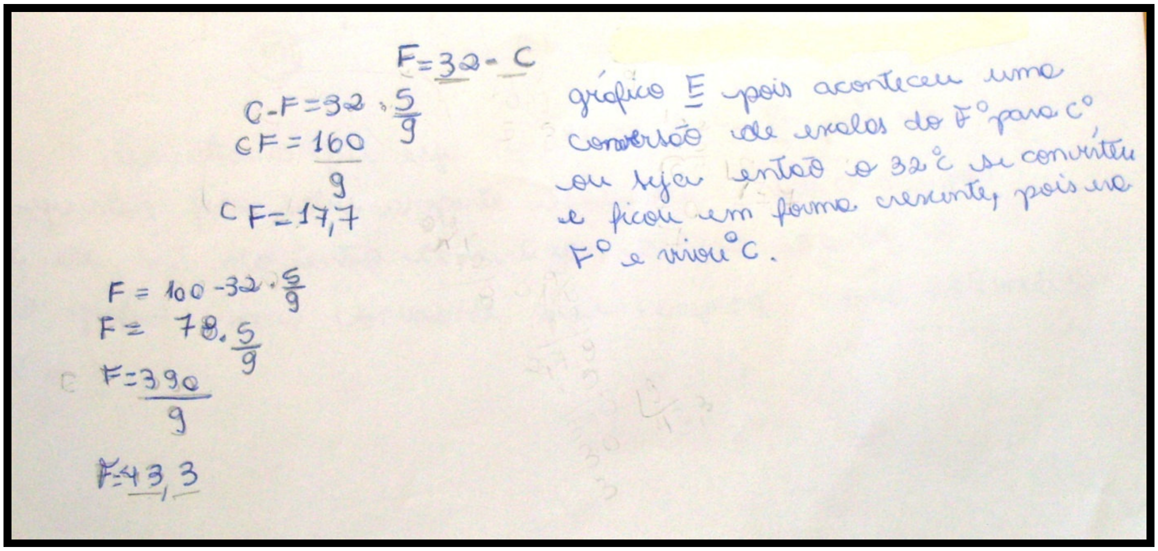


Figura 12: Protocolo do aluno 19 – questão 10

Percebemos que esse aluno utilizou os registros de representação da língua natural e numérico, que não interpretou corretamente o problema, porque não usou a fórmula adequada para converter ℉ para ℃, o aluno usou ℉ = 100 – 32 . $\frac{5}{9}$ e a formula correta é ℃ = (℉ – 32) . $\frac{5}{9}$ com isso, foram obtidos valores errados.

Além disso, ele assinalou o gráfico (E) que não é uma função afim, isso denota que, provavelmente, o aluno tem dificuldade para interpretar gráficos no plano cartesiano.

A questão exigia a habilidade para resolver a situação problema por meio da leitura e interpretação de gráfico de função monotônica. Podemos verificar que o índice de acertos foi baixo, levando em conta que essa questão foi aplicada no 3º ano do Ensino Médio. Nessa série, esses conteúdos já foram trabalhados, e o tempo disponibilizado para a resolução da questão foi de 45 minutos. Nas Olimpíadas de Matemática o tempo disponibilizado para a resolução de cada questão, é quase 9 minutos.

Ao analisar a justificativa do aluno, percebemos que o aluno não aplicou devidamente os conhecimentos de função e transformações de escalas termométricas[8].

Análise dos erros encontrados na Questão 17

Para a análise dos erros da questão 17, dividimos em quatro grupos quanto aos tipos de respostas. No Grupo 1, selecionamos os protocolos dos alunos que assinalaram a alternativa errada e justificaram de forma incorreta.

No Grupo 2, selecionamos os protocolos dos alunos que assinalaram a alternativa correta, porém a justificativa ficou incorreta.

No Grupo 3, selecionamos os protocolos dos alunos que assinalaram a alternativa correta e, também, justificaram corretamente.

No Grupo 4, selecionamos os protocolos dos alunos que assinalaram a alternativa correta e justificaram de forma incorreta.

[8] Escalas termométricas são escalas que permitem medir temperaturas. Estas escalas são mais conhecidas como Celsius, Fahrenheit e Kelvin.

Questão 17 – Tabela 6 – Grupo 1: Alunos que assinalaram a alternativa errada com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
1	"O gráfico que representa a distância da formiga é a (D) por ser o circuito mais curto. Os gráficos A, B, C e E, não manifestam condições alguma, os caminhos são desproporcionais um do outro, principalmente a (C) e (A) em que as extremidades são muito elevadas uma das outras. O único caminho que se compara ao gráfico (D) e (E)."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
3	"A formiga andou três pedaços (subiu, fez a curva e desceu). Como a velocidade foi constante e o tempo não volta para trás (só aumenta), significa que é o gráfico A."	O aluno não interpretou corretamente o gráfico da distância em função do tempo.
4	"É a C porque ela é constante e é a correta. E o gráfico mostra que ela anda ou sobe anda desce e no gráfico C, Ela sobe anda desce."	Não considerou que a distância percorrida pela formiguinha sobre o arco da circunferência se manteve a mesma em relação ao centro.
6	"É a letra D porque e trajeto, e o círculo percorre uma vez com a velocidade da formiguinha."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
7	"É a letra D por que é o trajeto mais curto e o correto. A letra B não por que esta errado. A alternativa A não é igual ao caminho e fica muito longo. A letra C não pode por que é um pouco longa demais. E a alternativa E não porque ela é muito desproporcional."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
13	"A resposta correta é a letra E, porque a formiga percorreu um caminho dividido em três partes e nessas três partes foi o mesmo tempo. Quanto a distância, ela acabou voltando para o ponto de partida.	Não considerou que, quando a formiguinha anda sobre o arco da circunferência, mantêm a mesma distância em relação ao centro.
15	"A resposta certa é o gráfico D devido a forma a velocidade para onde a formiguinha faz o seu percurso que está sendo representada em uma forma geométrica de um triângulo."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
16	"A letra D porque a formiguinha andou em uma velocidade constante nas extremidades do círculo e saiu do ponto 0 zero do círculo por isso que eu não acho as outras alternativas sejam corretas. As outras figuras não mostram o trajeto padrão, mas a letra D, demonstra que a formiga além de andar pela extremidade abriu uma área desde o centro formando uma figura geométrica."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
17	"A formiguinha percorre a velocidade constante em função do tempo e a distância é representado no gráfico D. Em forma de triângulo. Assim deixando o percurso mais rápido e objetivo. Não podendo ser representado nos outros gráficos."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
19	"Acredito que seja a alternativa D, pois na questão fala sobre a parte ilustrada, então concluímos se ela sai do centro com certeza voltará ao centro, e o gráfico mais convincente que comprova nossa alternativa é o D."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.
20	"É o que parece mais com o trajeto da formiga."	O aluno não escreveu o trajeto correto da formiguinha.

Questão 17 – Tabela 7 – Grupo 2 – Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incompleta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

5	"Nesse caso, as alternativas A, C, D, E não são verdadeiras pois na alternativa A ela não volta ao ponto t, no caso da alternativa C, não tem como ela fazer esse caminho, na D e muito óbvio que não seja, e na E porque não está em velocidade constante, entretanto a formiguinha não passou, então concluímos que seja a alternativa B porque ela é crescente e constante, e volta ao ponto t."	O aluno confundiu o centro do circulo com um ponto inexistente na questão.
9	"A letra B é a resposta correta, de acordo com o percurso que a formiguinha faz do ponto de partida até o final e por que ela é crescente e constante."	Considerou que o percurso da formiguinha é apenas "crescente e constante".
10	"Seria o B porque cujo o tempo é igual, porém a distância é a mesma. Não seria o A porque a distância não se mantêm e isso serve para todos os gráficos."	Não descreveu completamente o percurso da formiguinha.
11	"A resposta certa é a B, porque ela é crescente e constante. Já a resposta A não pode ser decrescente ao mesmo tempo, nem a D, porque só tem 2 variáveis, e nem a E porque ela também é crescente e decrescente ao mesmo tempo."	Considerou que o percurso da formiguinha é apenas "crescente e constante".
12	"Não pode ser o gráfico (A) porque a formiga não volta ao centro. Não pode ser o gráfico (C) porque está de forma decrescente. Não pode ser o gráfico (D) porque a formiga andou e voltou ao centro no mesmo percurso. Não pode ser o gráfico (E) porque está de forma variável do ponto da formiga. Então o melhor que representa (B) por tem percurso tempo, distância sem mudar o movimento."	O aluno não soube distinguir o que é função crescente e decrescente no gráfico.
14	"Concluímos que a alternativa A não está correta, pois não é uma reta constante, e não retorna ao ponto t.	O aluno confundiu o centro do circulo com um ponto inexistente na questão.
18	"Escolhi o gráfico (B), porque o tempo cresce junto com a distância porém a distância em si, se mantêm. Ou seja, não existe tempo negativo. A velocidade é constante e a distância se mantêm, no caso, é sempre a mesma."	Não descreveu todo o trajeto da formiguinha.

Questão 17 – Tabela 8 – Grupo 3 – Aluno que assinalou a alternativa correta com justificativa correta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

2	“E a B porque ela avança até a extremidade do círculo, depois percorre uma distância paralela ao centro e depois recua novamente ao centro.”	Nenhum

Questão 17 – Tabela 9 – Grupo 4 – Aluno que assinalou a alternativa correta com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
8	“De acordo com o trajeto feito pela formiguinha, ela segue um caminho reto sem obstáculos e ela é crescente constante.”	O aluno escreveu que o caminho feito pela formiguinha é reto.

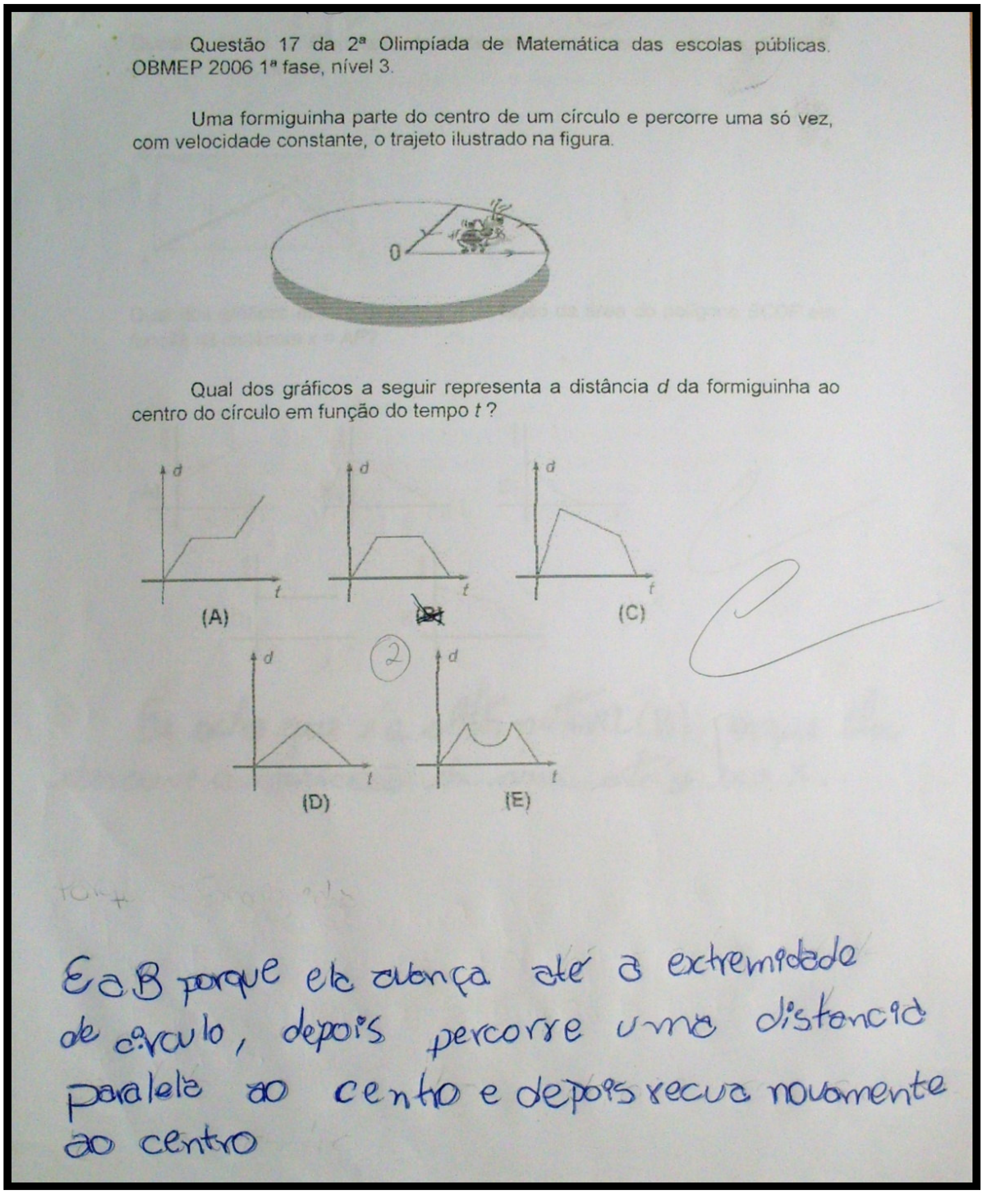
Análise da Resolução da Questão 17

A questão 17, da 2ª Olimpíada, de acordo com a análise envolve as habilidades de: localizar pontos no plano cartesiano, conhecer função crescente, decrescente e constante e ter conhecimento de círculo e circunferência.

Esperávamos que os alunos eliminassem as alternativas (C), (D) e (E), pois nessas a formiguinha não anda sobre o arco da circunferência. A alternativa (A) deve ser eliminada, também, pois a formiguinha nesse gráfico não retorna ao centro do círculo.

A seguir, selecionamos alguns protocolos de como os alunos resolveram a Questão 17.

Protocolo do aluno 2:


Questão 17 da 2ª Olimpíada de Matemática das escolas públicas. OBMEP 2006 1ª fase, nível 3.

Uma formiguinha parte do centro de um círculo e percorre uma só vez, com velocidade constante, o trajeto ilustrado na figura.

Qual dos gráficos a seguir representa a distância *d* da formiguinha ao centro do círculo em função do tempo *t* ?

(A) (B) (C)

2

(D) (E)

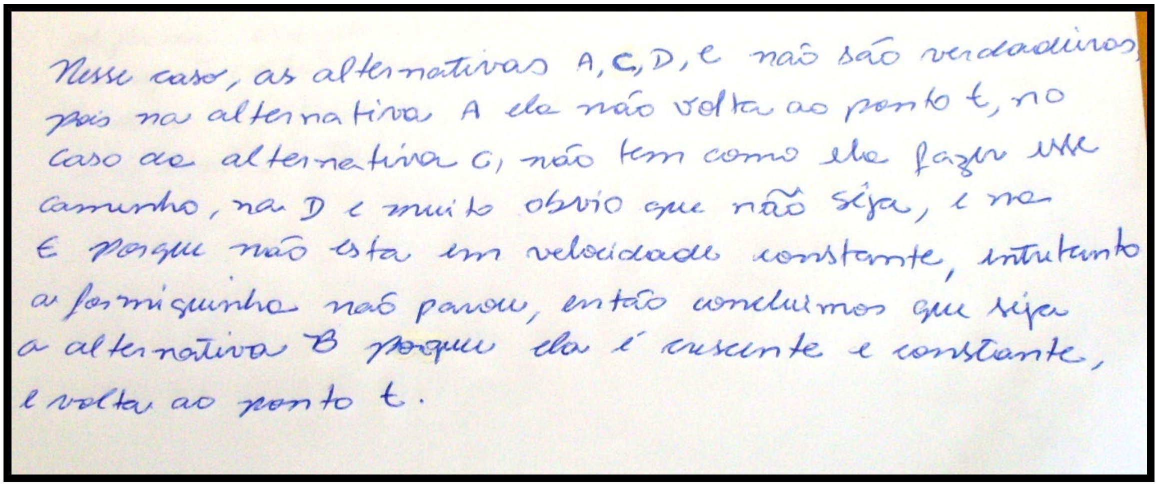
É a B porque ela avança até a extremidade de circulo, depois percorre uma distancia paralela ao cento e depois recua novamente ao centro

Figura 13: Protocolo do aluno 2 – questão 17

Percebemos que o aluno utilizou o registro de representação da língua natural e interpretou corretamente a figura. Realmente o gráfico (B) corresponde à alternativa correta. Quando ele escreve: “ela avança até a extremidade do círculo, depois percorre uma distância paralela ao centro e depois recua novamente ao centro.” Quando ele escreve que percorre uma distância paralela ao centro, não está correto afirmar isso, pois, nesse instante, a distância se mantém constante em relação ao centro do círculo em função do tempo.

Percebemos que, possivelmente, ele tem conhecimento de funções crescente, decrescente e constante, tem conhecimento de par ordenado e sabe localizar pontos no plano.

Protocolo do aluno 5:



Nesse caso, as alternativas A, C, D, e não são verdadeiros, pois na alternativa A ela não volta ao ponto t, no caso da alternativa C, não tem como ele fazer esse caminho, na D é muito obvio que não seja, e na E porque não esta em velocidade constante, entretanto a formiguinha não parou, então concluímos que seja a alternativa B porque ela é crescente e constante, e volta ao ponto t.

Figura 14: Protocolo do aluno 5 – questão 17

Aqui também o registro de representação foi da língua natural. O aluno assinalou corretamente a alternativa (B), mas nas justificativas constam alguns erros. Por exemplo, quando escreve que: “na alternativa (A), ela não volta ao ponto t.” Enquanto o correto seria não volta ao centro do círculo.

Ele escreve que: “no caso da alternativa C não tem como ela fazer esse caminho.” Enfim, as justificativas não estão, de acordo com o esperado, ou seja, não estão corretas.

Protocolo do aluno 8:

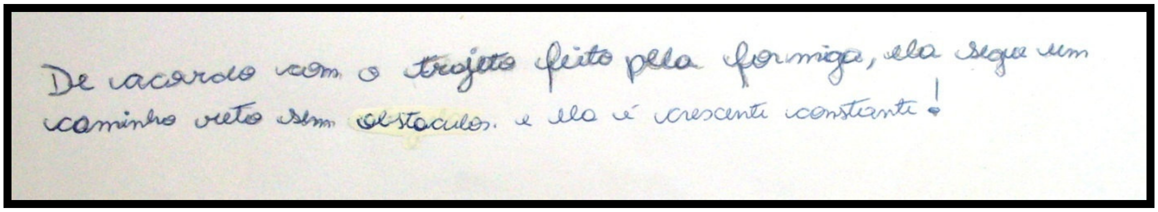
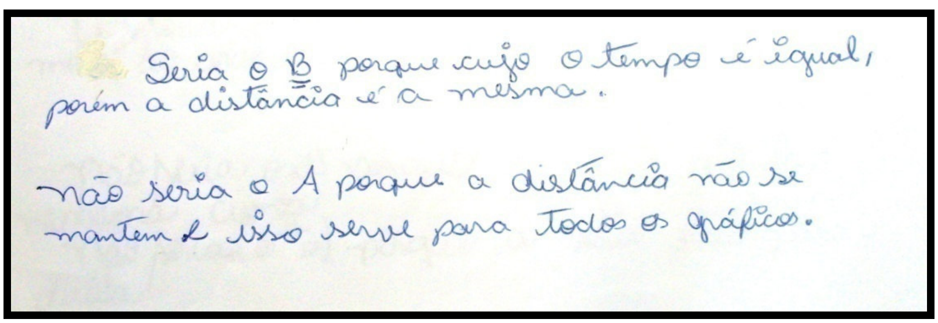

De acardo com o trajeto feito pela formiga, ela segue um caminho reto sem obstaculos. e ela é crescenti constanti!

Figura 15: Protocolo do aluno 8 – questão 17

Na Figura 15, verificamos que o aluno acertou assinalando a alternativa (B), mas a justificativa não está correta, quando escreve utilizando o registro de representação da língua natural: “De acordo com o trajeto feito pela formiga, ela segue um caminho reto sem obstáculos, e ela é crescente constante.” Verificamos que o caminho não é totalmente reto e não é constantemente crescente, portanto, as justificativas não estão de acordo com o esperado, conforme a análise.

Protocolo do aluno 10:


Seria o B porque cujo o tempo é igual, porém a distância é a mesma.

não seria o A porque a distância não se mantem e isso serve para todos os gráficos.

Figura 16: Protocolo do aluno 10 – questão 17

Verificamos que o aluno 10 assinalou a alternativa (B) corretamente, e as justificativas estão parcialmente corretas e, também, não estão completas, ou seja, esse aluno analisou apenas um ponto do gráfico, quando ele escreve: “Seria o B, porque cujo tempo é igual, porém a distância é a mesma.”

Esse aluno utilizou o registro de representação da língua natural, apesar das falhas nas justificativas, continua escrevendo, “Não seria o A, porque a distância não se mantém, e isso serve para todos os gráficos.” Com exceção das alternativas (A) e (B), realmente, nos demais, a distância em relação ao centro não se mantém constante.

Protocolo do aluno 11:

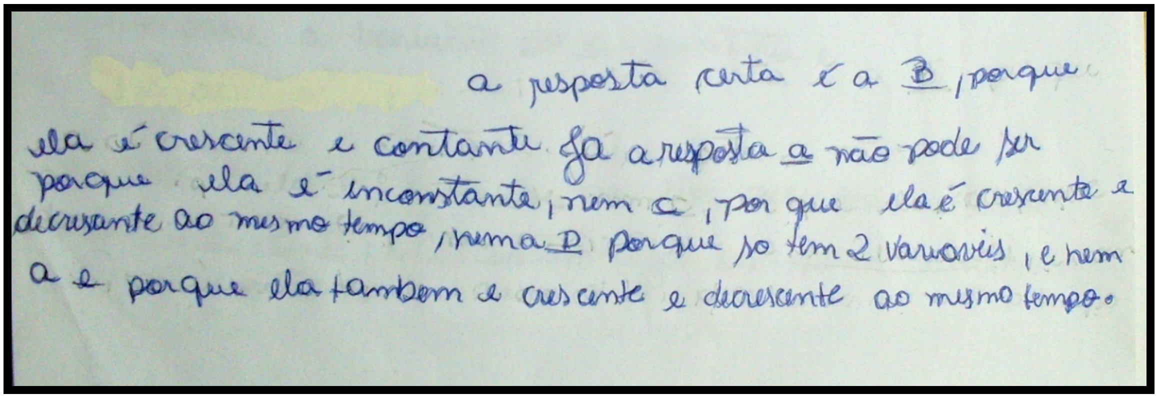

a resposta certa é a B, porque ela é crescente e contante. Ja a resposta a não pode ser porque ela é inconstante, nem c, por que ela é crescente e decrusante ao mesmo tempo, nem a D porque so tem 2 variaveis, e nem a e porque ela tambem é cres cente e decrescente ao mesmo tempo.

Figura 17: Protocolo do aluno 11 – questão 17

Quando ele escreve: “nem a D, porque só tem duas variáveis”, notamos que esse aluno não conhece o significado da expressão matemática “variável”. Por outro lado, o aluno parece não ter as habilidades necessárias de função crescente e decrescente, quando escreve, “nem a (E) porque ela também é crescente e decrescente ao mesmo tempo.” E escreve de igual modo referindo-se a alternativa (C).

O aluno utilizou o registro de representação da língua natural. Embora tenha assinalado a alternativa correta, não conseguiu justificá-la de modo coerente.

Protocolo do aluno 12:

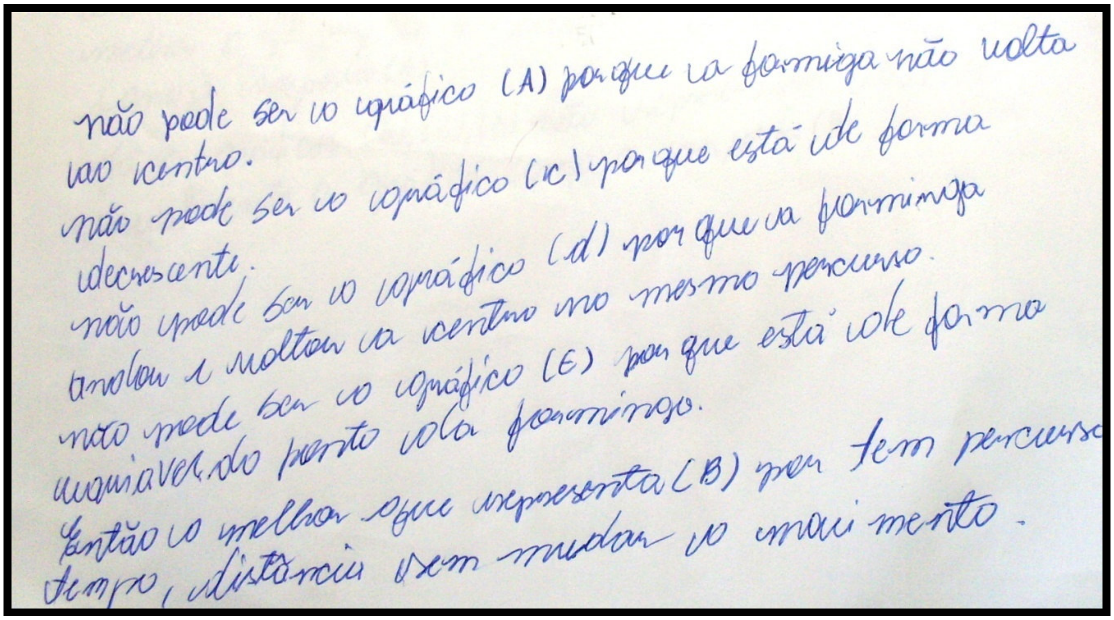

não pode ser o gráfico (A) porque a formiga não volta
ao centro.
não pode ser o gráfico (C) porque está de forma
decrescente.
não pode ser o gráfico (d) porque a formiga
andou e voltou a centro no mesmo percurso.
não pode ser o gráfico (E) porque está de forma
variável do ponto da formiga.
Então o melhor que representa (B) por tem percurso
tempo, distância sem mudar o movimento.

Figura 18: Protocolo do aluno 12 – questão 17

Notamos que esse aluno utilizou o registro de representação da língua natural, o mesmo relacionou a figura com o gráfico de forma correta, quando escreve: “não pode ser o (A) porque a formiga não volta ao centro.”, ele não conseguiu justificar de modo coerente, quando escreve: “não pode ser o gráfico (C) porque está de forma decrescente.” Ele não escreveu que, primeiro a função é crescente, constante e depois decrescente. Enfim, este aluno possui parcialmente as habilidades necessárias para a resolução dessa questão.

Protocolo do aluno 1:

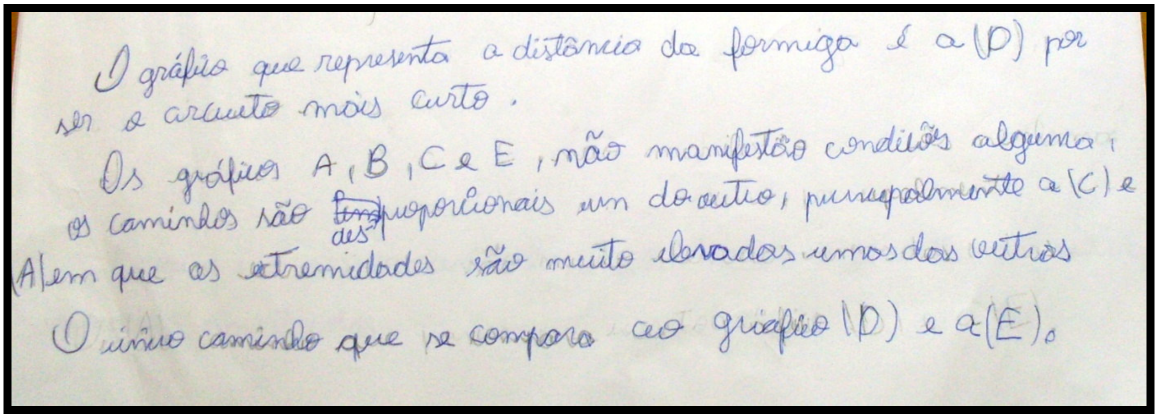

O gráfico que representa a distância da formiga é a (D) por ser o circuito mais curto.
Os gráficos A, B, C e E, não manifestão condições alguma; os caminhos são ~~tão~~ desproporcionais um do outro, principalmente a (C) e
Além que as extremidades são muito elevadas umas das outras
O único caminho que se compara ao gráfico (D) e a (E).

Figura 19: Protocolo do aluno 1 – questão 17

Protocolo do aluno 6:

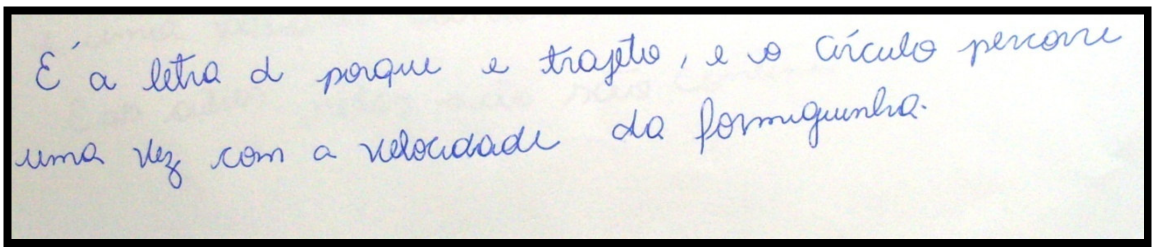

É a letra d porque e trajeto, e o círculo percorre uma vez com a velocidade da formiguinha.

Figura 20: Protocolo do aluno 6 – questão 17

Protocolo do aluno 7:

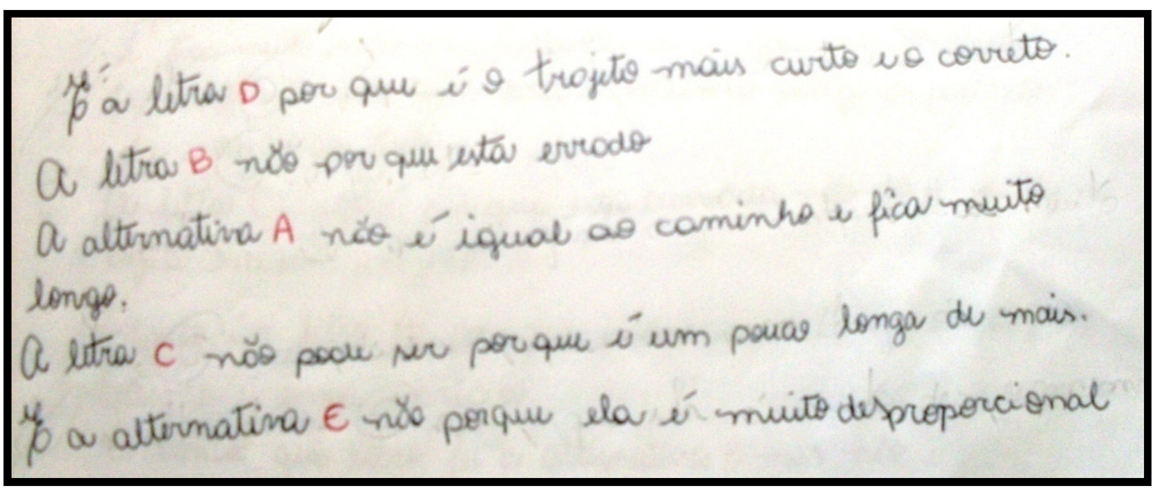
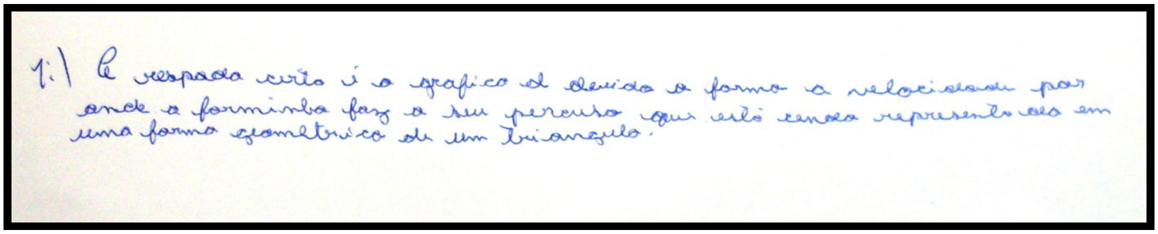

É a letra D por que é o trajeto mais curto e o correto.
A letra B não por que está errado
A alternativa A não é igual ao caminho e fica muito longo.
A letra C não pode ser porque é um pouco longa de mais.
E a alternativa E não porque ela é muito desproporcional

Figura 21: Protocolo do aluno 7- questão 17

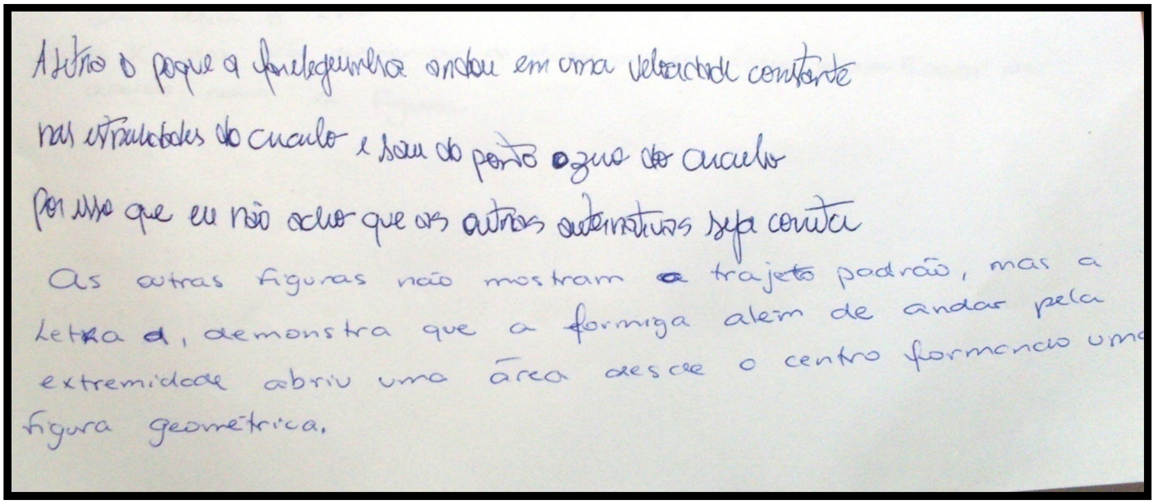
Protocolo do aluno 15:



1:) A resposta certa é o grafico d devido a forma a velocidade por onde a forminha faz o seu percurso que está sendo representado em uma forma geometrica de um triangulo.

Figura 22: Protocolo do aluno 15 – questão 17

Protocolo do aluno 16:



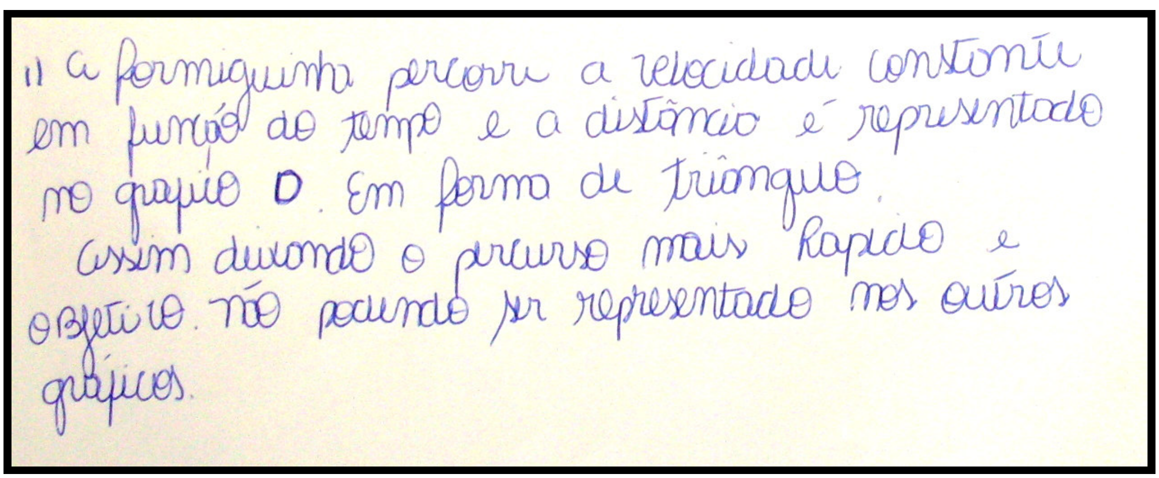
A letra d porque a formiguinha andou em uma velocidade constante nas extremidades do circulo e saiu do ponto o que do circulo

por isso que eu não acho que as outras alternativas seja certa

As outras figuras não mostram o trajeto padrão, mas a Letra d, demonstra que a formiga alem de andar pela extremidade abriu uma área desde o centro formando uma figura geométrica.

Figura 23: Protocolo do aluno 16 – questão 17

Protocolo do aluno 17:



1) a formiguinha percorre a velocidade constante em função do tempo e a distância é representado no grafico D. Em forma de triangulo.
assim durando o percurso mais Rapido e objetivo. não podendo ser representado nos outros graficos.

Figura 24: Protocolo do aluno 17 – questão 17

Protocolo do aluno 20:

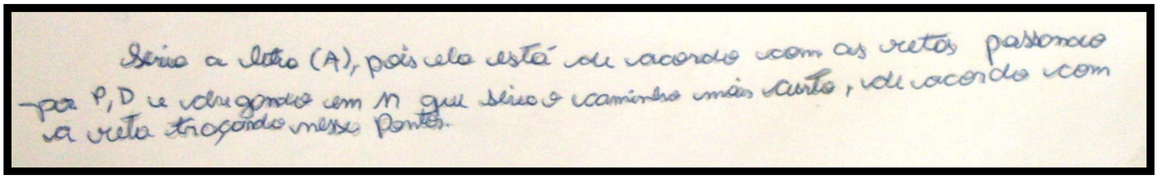

Seria a letra (A), pois ela está de acordo com as retas passando por P, D e diagonal em M que seria o caminho mais curto, de acordo com a reta traçando nesse ponto.

Figura 25: Protocolo do aluno 20 – questão 17

Ao fazermos a análise dos protocolos dos alunos da questão 17, notamos que dos 20 alunos que participaram, sete estão nas Figuras: 29, 30, 31, 32, 33, 34 e 35 assinalaram a alternativa D, porque simplesmente compararam a forma geométrica da figura que se assemelha com um triângulo, com o gráfico da alternativa (D), cujo formato é um triângulo.

Na Figura 24, o aluno 17 descreve: "a formiguinha percorre a velocidade constante em função do tempo e a distância é representada no gráfico D, em forma de triângulo.".

Notamos, assim, pelos protocolos desses alunos, que podem ter ocorrido pelo menos dois fatores que contribuíram para os erros. O primeiro fator é a má interpretação do texto; o segundo fator é a falta de conhecimentos anteriores para a resolução da questão.

Análise dos erros encontrados na Questão 18

Para a análise dos erros encontrados na Questão 18, dividimos em três grupos quanto aos tipos de resposta. Chamamos de Grupo 1, os alunos que assinalaram a alternativa errada e justificaram de forma incorreta.

No Grupo 2, selecionamos os alunos que assinalaram a alternativa correta porém a justificativa ficou incompleta.

No Grupo 3, selecionamos os alunos que assinalaram a alternativa correta e justificaram de forma incorreta.

Questão 18 – Tabela 10 – Grupo 1 – Alunos que assinalaram a alternativa errada com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
1	O aluno não justificou a questão.	O aluno não justificou a questão.
3	“Área é o espaço geométrico da figura (retângulo) e é diretamente proporcional a distância x, ou seja, quando aumenta, todos aumentam, e vice-verso. Portanto deve ser i gráfico A.”	Não analisou a distância x em função da área do polígono BCDP.
4	“Porque é a mesma variação e o percurso da reta da função.”	Não analisou a distância x em função da área do polígono BCDP.
6	“Porque é a mesma variação do polígono e o percurso da reta da função, e também é uma outra variante contínua. E as outras retas não são contínuas.”	Não descreveu a variação da área do polígono BCDP.
7	“É a alternativa A, por que está variada, com o polígono, portanto é uma variação.”	Não descreveu a variação da área do polígono BCDP.
11	“Conforme a variação do x aumenta e diminui a área. A resposta certa é a A, por ela pode variar tanto para o B, C, D e é constante, já as outras alternativas não são constantes.”	Não descreveu que a área do polígono BCDP é inversamente proporcional à distância x.
14	“Concluímos que é a alternativa A por que é uma função variável, que pode ser tanto crescente quanto decrescente.”	Não soube discernir entre função crescente e decrescente.
18	“Pode ser a E, pois é o único gráfico que a imagem original encaixa. Nessa alternativa a curva está sendo empurrada para cima também como na imagem original.”	Não fez menção da variação da área do polígono BCDP e também da distância x.
19	O aluno não justificou a questão.	O aluno não justificou a questão.
20	O aluno não justificou a questão.	O aluno não justificou a questão.

Questão 18 – Tabela 11 – Grupo 2 – Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incompleta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

2	“Eu acho que é a alternativa B, porque ela descreve a variação da área até o eixo x.”	O aluno não mencionou a variação da distância x=AP.
5	“Como a área varia e o x também, acredito que seja a alternativa B, por que as outras alternativas estão de forma irregulares.”	Faltou mencionar que a função é decrescente.
13	“A alternativa D não pode ser porque não tem variação. A alternativa B é a certa porque sua variação é constante.”	Não descreveu a variação da área do polígono BCDP em função da distância x.
16	“A letra B está de acordo, pois, qualquer variação da linha x seja para aumentar ou diminuir a área modificará de acordo com a figura.”	Não descreveu que a função é decrescente.

Questão 18 – Tabela 12 – Grupo 3 – Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

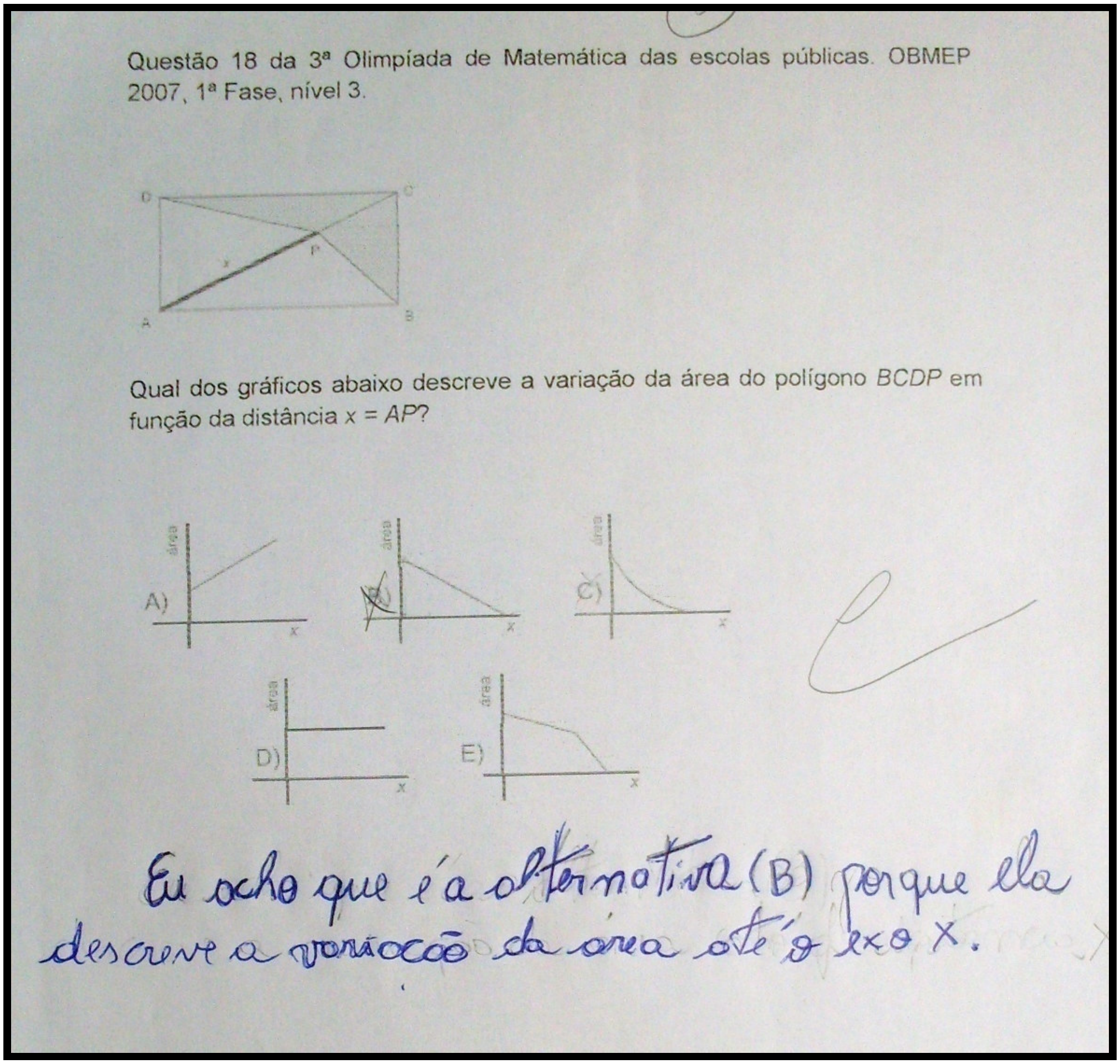
8	“É a letra B, pois as retas correspondem ao ângulo da figura. A reta x faz o mesmo movimento que o gráfico.”	Não fez nenhuma menção do polígono BCDP em função da distância x.
9	“É a B, pois ângulos correspondem ao modelo e a reta x faz o mesmo movimento e as outras opções não têm ângulos correspondentes ao modelo acima.”	Não fez nenhuma menção do polígono BCDP em função da distância x.
10	“Seria o gráfico B porque é o único que descreve a função do polígono. Não seria o A porque a reta começa no meio ao gráfico.”	Não fez nenhuma menção do polígono BCDP em função da distância x.
15	“Porque as pontas estão ligadas em pequenas distâncias e em diferença a altura. Os pontos estão ligados em AP.”	Não fez nenhuma menção do polígono BCDP em função da distância x.
17	“A área aumentando a linha ficará de acordo com o eixo x.”	Não fez nenhuma menção do polígono BCDP em função da distância x.

Análise da Resolução da Questão 18

Na questão 18 da 3ª Olimpíada, de acordo com a análise, são envolvidas as habilidades de resolver uma situação problema, utilizando os conhecimentos de geometria, envolvendo noções de cálculo de área de triângulo e quadrilátero, conhecer os casos de congruências de triângulos, saber localizar pontos no plano cartesiano e conhecer o significado de par ordenado.

Esperávamos que os alunos eliminassem as alternativas (A) e (D), porque não são funções decrescentes. Também é esperado que os alunos percebam que as alternativas (C) e (E) são falsas, já que não se tratam de função polinomial do 1º grau.

Protocolo do aluno 2:



Questão 18 da 3ª Olimpíada de Matemática das escolas públicas. OBMEP 2007, 1ª Fase, nível 3.

Qual dos gráficos abaixo descreve a variação da área do polígono *BCDP* em função da distância *x* = *AP*?

Eu acho que é a alternativa (B) porque ela descreve a variação da área até o eixo x.

Figura 26: Protocolo do aluno 2 – questão 18

Verificamos que o aluno 2 assinalou corretamente a alternativa (B) da questão 18, porém na justificativa utilizando o registro de representação da língua natural, ele não deixou muito claro quando escreveu: “[…] porque ela descreve a variação da área até o eixo x.” O aluno não deixou explícito que se tratava de uma função decrescente.

Protocolo do aluno 8:

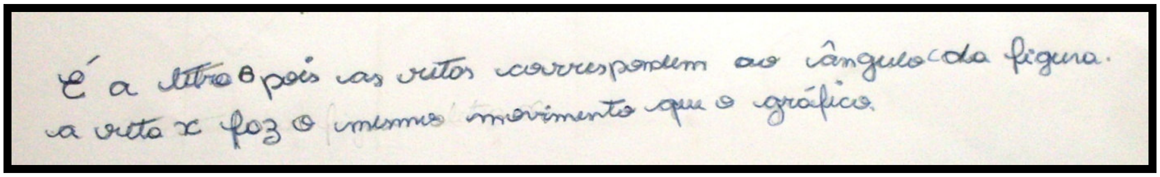
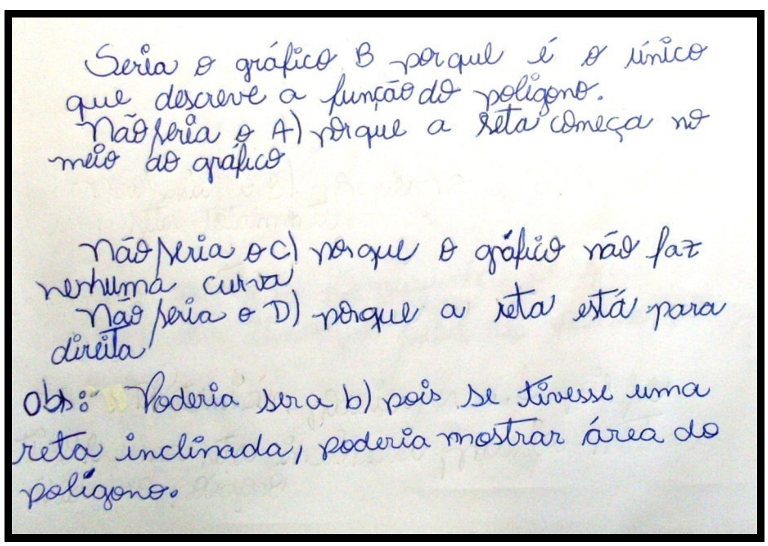

É a letra B pois as retas correspondem ao ângulo da figura.
a reta x faz o mesmo movimento que o gráfico

Figura 27: Protocolo do aluno 8 – questão 18

Neste protocolo, o registro de representação foi o da língua natural. Não observamos nenhuma tentativa de justificar, de maneira satisfatória, porque ele assinalou a alternativa (B) que é a correta. Quando ele escreveu: “É a letra B, pois as retas correspondem ao ângulo da figura.” Percebemos que o aluno está citando os ângulos da figura e do gráfico (B); nesta questão, não podemos fazer este tipo de comparação.

Concluímos que, possivelmente, o aluno tenha dificuldades com as habilidades necessárias para resolver essa questão.

Protocolo do aluno 10:


Seria o gráfico B porque é o único que descreve a função do poligono.
Não seria o A) porque a reta começa no meio do grafico

Não seria o C) porque o gráfico não faz nenhuma curva
Não seria o D) porque a reta está para direita

Obs: Poderia ser a b) pois se tivesse uma reta inclinada, poderia mostrar área do poligono.

Figura 28: Protocolo do aluno 10 – questão 18

Nessa questão, podemos perceber que o aluno utilizou o registro de representação da língua natural e tentou resolver apenas comparando a figura com os gráficos, quando ele escreveu: “Poderia ser a B, pois se tivesse uma reta inclinada, poderia mostrar área do polígono.” Vemos aqui que o aluno comparou a inclinação da reta da figura e procurou o gráfico que mais se assemelhava com essa inclinação, assinalou a alternativa sem utilizar nenhum conceito de função crescente e decrescente, conhecimento de par ordenado ou localização de pontos no plano cartesiano.

Percebemos também que esse aluno, provavelmente, não possua as habilidades necessárias para a resolução da questão.

Protocolo do aluno 13:

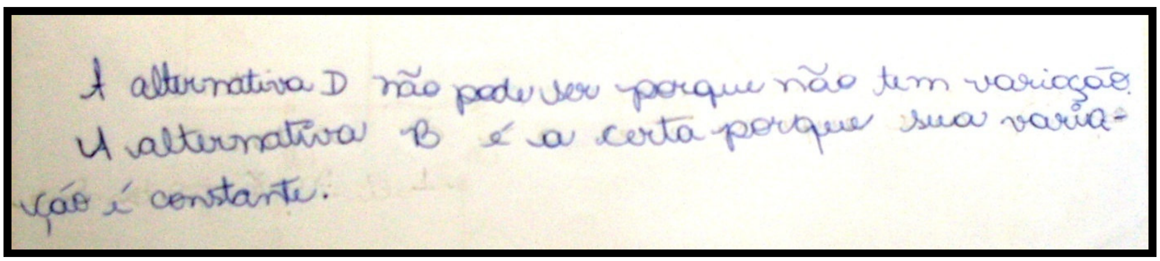

A alternativa D não pode ser porque não tem variação.
A alternativa B é a certa porque sua varia-
ção é constante.

Figura 29: Protocolo do aluno 13 – questão 18

Verificamos que o aluno tentou justificar apenas duas alternativas, a (D) foi justificada, quando ele escreveu utilizando o registro de representação da língua natural: “A alternativa D não pode ser porque não tem variação.” Aqui a função constante, ele escreveu que não tem variação, e a alternativa (B) foi justificada por ele quando escreveu: “a alternativa B é a certa porque sua variação é constante.” Percebemos que a função decrescente é chamada por ele de função constante.

Nessa função, concluímos que esse aluno, provavelmente, possua dificuldade para exercer as habilidades necessárias para resolver situação problema, utilizando os conhecimentos de geometria, envolvendo variação da área de polígonos.

Protocolo do aluno 4:

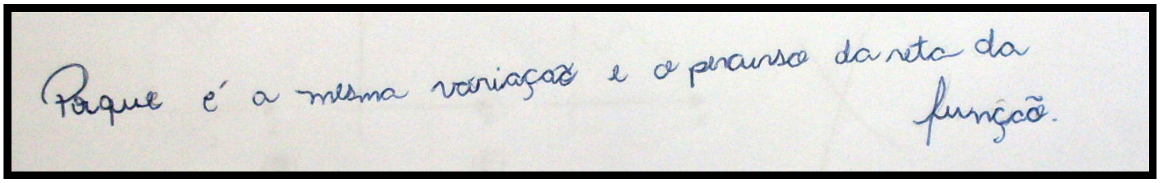


Figura 30: Protocolo do aluno 4 – questão 18

Notamos aqui mais uma vez o aluno fazendo comparação da figura com os gráficos e escolhendo a alternativa que mais se assemelha para fazer sua escolha.

Quando ele escreve utilizando o registro de representação da língua natural: "Porque é a mesma variação e o percurso da reta da função." Justificando, porque ele escolheu a alternativa (A), a alternativa correta é (B).

Aqui, também, percebemos que, provavelmente, o aluno possui dificuldade para exercer as habilidades necessárias para resolver situação problema, utilizando conhecimentos de geometria, envolvendo a variação da área de polígonos.

Análise dos erros encontrados na Questão 16

Para a análise dos erros da questão 16, dividimos em três grupos quanto aos tipos de respostas. Chamamos de Grupo 1, os alunos que assinalaram a alternativa incorreta e justificaram de forma incorreta.

No Grupo 2, selecionamos os alunos que assinalaram a alternativa correta, porém, com justificativa incompleta.

No Grupo 3, selecionamos apenas os alunos que assinalaram a alternativa correta e justificaram de forma incorreta.

Questão 16 – Tabela 13 – Grupo 1 – Alunos que assinalaram a alternativa incorreta com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido
1	"Porque é o menor caminho, e está muito diferente dos outros percursos mostrados."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
3	"O gráfico representa a quantidade que a formiga vai ter que caminhar a possibilidade do menor caminho pra chegar ao ponto (M e o P) partir no ponto A ou entre o (A e o B o meio da figura). Portanto ela caminharia um grande pedaço do caminho e um pequeno pedaço. Sabendo disso é provável que seja o gráfico B."	Não descreveu a análise do gráfico corretamente.
4	"Porque está o menor percurso e está diferente das outras."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
6	"Porque ela é diferente dos outros caminhos distância do ponto que percorrer a função do segmento."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
7	"A alternativa A não é por que sai do trajeto da perseguição. É a letra B por que é a única que não sei do trajeto e é o caminho menor."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
13	"A resposta é a B, porque teve duas variações no x."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
15	"Questão C porque é o gráfico que mais representa na distância que a formiguinha vai percorrer em função da distância x=AP. Pois os outros gráficos não correspondem à distância desejada."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
16	"A alternativa correta é a E, por e o menor caminho para a formiguinha percorrer até a distância M. E os demais gráficos só vai aumentar a distância para a formiguinha."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
17	"O gráfico C é o único que dá para ser percorrido pelos lados do quadrado e é o caminho mais fácil pelo qual a formiguinha irá percorrer."	Não descreveu a distância y em função da distância x.
19	O aluno não justificou a questão.	O aluno não justificou a questão.
20	O aluno não justificou a questão.	O aluno não justificou a questão.

Questão 16 – Tabela 14 – Grupo 2 – Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incompleta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

5	“Como não pode ter dois segmentos, fiquei dividido na alternativa A e C, porque ambos tem mais segmentos a alternativa A é crescente e a alternativa C é decrescente, então seria a alternativa A, pois a variação é contínua.”	O aluno não descreveu todos os passos que melhor representam a distância y em função da distância x.
8	“Seria a letra A, pois ela está de acordo com as retas passando por P, D e chegando em m que seria o caminho mais curto, de acordo com a reta traçando nesse ponto.”	O aluno destacou apenas o caminho mais curto, e não fez comparação da distância y com a distância x.
9	“A opção que a letra A pois o caminho mais curto passa pelos P, D e M de acordo com a reta que passa por esses pontos.”	O aluno destacou apenas o caminho mais curto e não fez comparação da distância y com a distância x.
10	“Porque para a formiguinha chegar ao ponto M ela tem que subir e passar por três pontos.”	O aluno não descreveu corretamente a variação da distância y em função da distância x.
11	“Conforme a variação do x, o ponto P muda de lugar B, D e E, nenhuma dessas é a resposta certa pois só tem 2 variações, a C, também não é pois termina decrescendo então só pode ser a A, porque tem 3 variações e termina crescente.”	Não existem três variáveis e também não descreveu corretamente a variação de y em função de x.
14	“Após analisar o gráfico, conclui que as alternativas B, D e E não estão corretas porque só tem duas variáveis e para percorrer o caminho até o ponto M são necessários três variáveis contudo acredito que as alternativas corretas é a A porque está em plano crescente partindo do ponto P com o segmento de AB até o ponto M.”	Aqui também o aluno escreveu que existem três variáveis, e também não comparou a distância y em função da distância x.
18	“A figura apresentam 3 variantes, sendo um deles uma subida (quando chega ao seu destino, ou seja M). A figura passa por 3 pontos. Atendendo a essas regras escolhi a letra A.”	Aqui o aluno escreveu que existem três variáveis, e também não comparou a distância y em função da distância x.

Questão 16 – Tabela 15 – Grupo 3 – Alunos que assinalaram a alternativa correta com justificativa incorreta

Aluno	Justificativa	Erro Cometido

2	“Não são as alternativas B, D, E pelo fato dos três só terem duas variáveis. Eu acho que a resposta certa é a (A).”	Não comparou a distância y que a formiguinha vai percorrer em função da distância x.
12	“Conforme o movimento da letra x, o ponto P muda de lugar (B), (C) e (E) não é pois termina decrescendo. Portanto é a questão (A), porque tem 3 variáveis e é crescente. Resposta (A).”	Não comparou a distância y que a formiguinha vai percorrer em função da distância x.

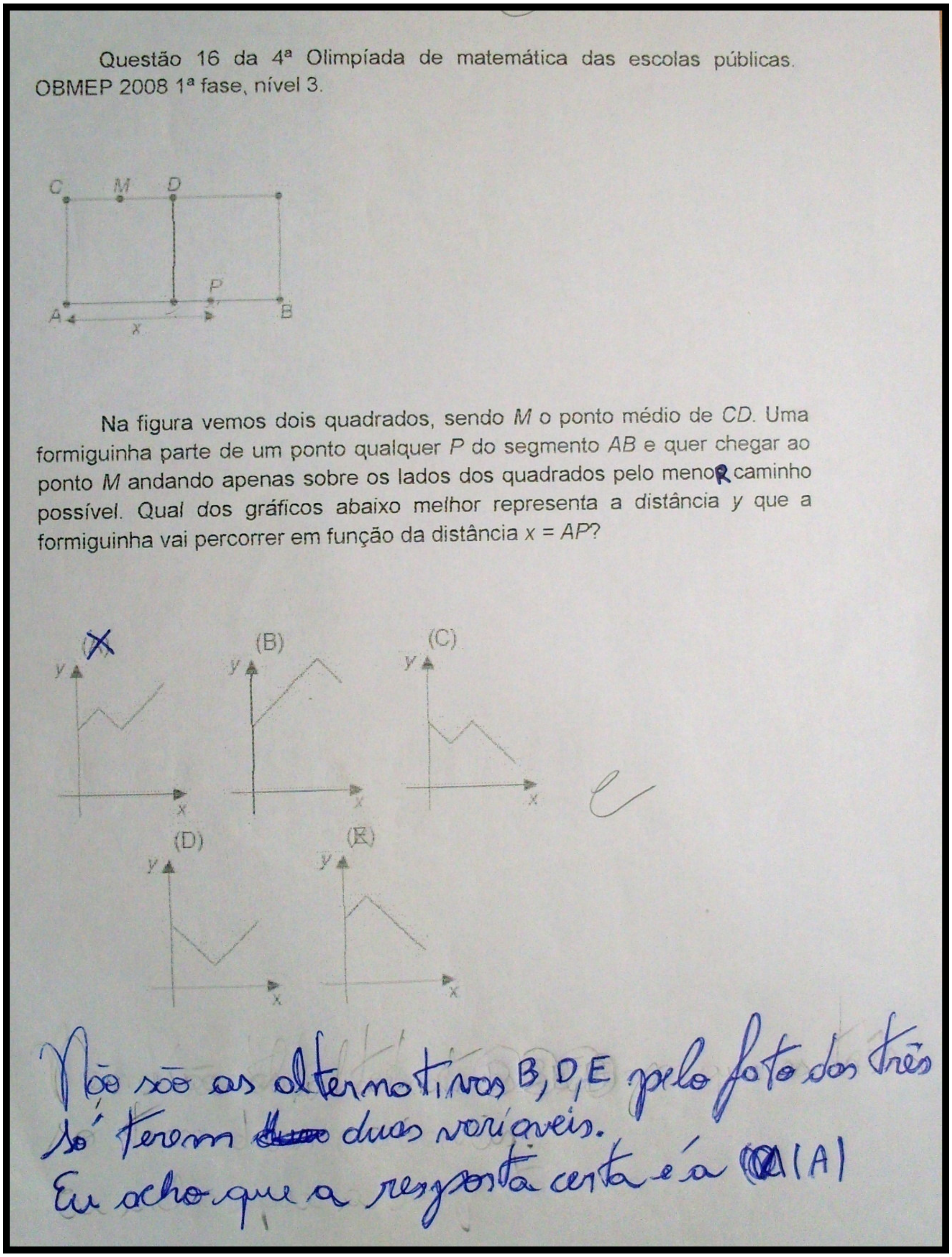
Análise da Resolução da Questão 16

A Questão 16 das Olimpíadas de Matemática, de acordo com a análise, envolve as habilidades de trabalhar com par ordenado, em saber localizar pontos no plano cartesiano, conhecer função crescente e decrescente, saber comparar a distância entre dois pontos e analisar a distância x em função da distância y que a formiguinha vai percorrer.

Esperávamos que o aluno analisasse as distâncias $x = AP$, em função das distâncias y que a formiguinha vai percorrer. Ele teria de comparar o que ocorre quando $x = AP$ aumenta ou diminui com o menor caminho, para chegar ao ponto M, verificando quais são os pontos que a função é crescente ou decrescente e assinalar a alternativa (A), justificando corretamente a resposta.

A seguir, selecionamos outros protocolos de como alguns alunos resolveram a Questão 16.

Protocolo do aluno 2:



Questão 16 da 4ª Olimpíada de matemática das escolas públicas. OBMEP 2008 1ª fase, nível 3.

Na figura vemos dois quadrados, sendo M o ponto médio de CD. Uma formiguinha parte de um ponto qualquer P do segmento AB e quer chegar ao ponto M andando apenas sobre os lados dos quadrados pelo menor caminho possível. Qual dos gráficos abaixo melhor representa a distância y que a formiguinha vai percorrer em função da distância $x = AP$?

Não são as alternativas B, D, E pelo fato dos três só terem ~~duas~~ duas variaveis.
Eu acho que a resposta certa é a (A)

Figura 31: Protocolo do aluno 2 – questão 16

Percebemos que esse aluno justificou sua resposta de forma incorreta, utilizando o registro de representação da língua natural, apesar de assinalar a alternativa certa. Quando ele escreve: “Não são as alternativas B, D, F, pelo fato das três só terem duas variáveis.” Notamos que o aluno utilizou a palavra “variável” de forma incorreta e não analisou se a função é crescente ou decrescente e quais os pontos que isso ocorre. Percebemos que ele não tinha certeza de qual seria a resposta certa, quando escreve: “Eu acho que a resposta certa é a (A).”

Protocolo do aluno 3:

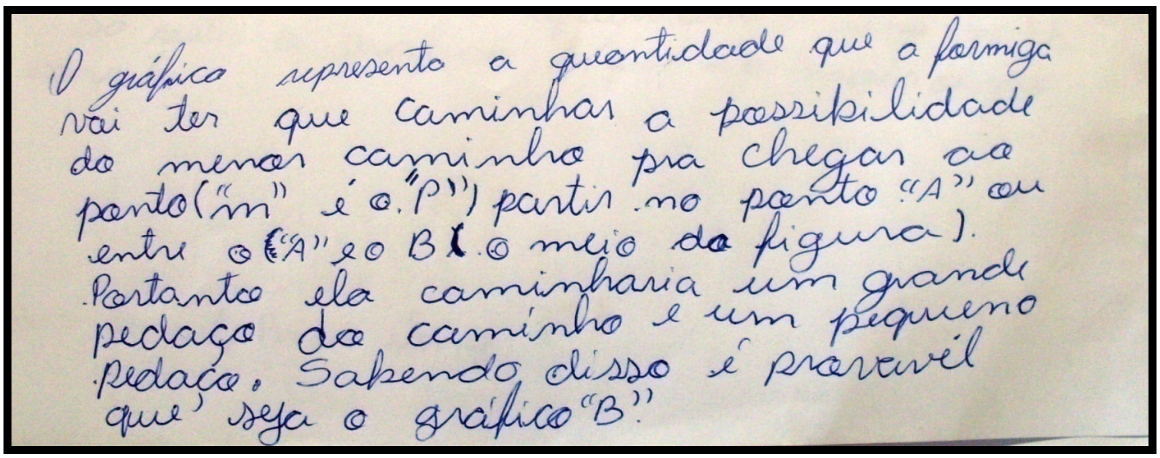

O gráfico represento a quantidade que a formiga
vai ter que caminhar a possibilidade
do menor caminho pra chegar ao
ponto("m" é o "P") partir no ponto "A" ou
entre o("A" e o B(o meio da figura).
Portanto ela caminharia um grande
pedaço do caminho e um pequeno
pedaço. Sabendo disso é provável
que seja o gráfico "B".

Figura 32: Protocolo do aluno 3 – questão 16

De acordo com a Figura 32, notamos que o aluno utilizou o registro de representação da língua natural e assinalou incorretamente a alternativa (B), quando tentou justificar sua resposta, escreveu: “Portanto, ela caminharia um grande pedaço do caminho e um pequeno pedaço.” Percebemos, então, que ele analisou as distâncias *x* = AP em função das distâncias *y* que a formiguinha vai percorrer. Quando ele escreve: “Sabendo disso é provável que seja o gráfico (B).” Podemos afirmar que o aluno estava em dúvida e ele analisou a questão do modo que achou ser o correto, sem fundamentos e sem conhecimentos prévios do assunto. Percebemos ainda que o aluno fez comparação entre o gráfico e a figura quando escreve “[...] a possibilidade do menor caminho para chegar ao ponto ‘m’ é o ‘P’ partir no ponto ‘A’ ou entre ‘A’ e o ‘B’, no meio da figura. Portanto, ela caminha um grande pedaço do caminho e um pequeno pedaço”, no item (B), segundo ele, era o gráfico mais semelhante. Notamos que esse aluno em momento algum fez relação entre as duas grandezas da distância $x = AP$ em função da distância *y* que a formiguinha vai percorrer.

Protocolo do aluno 8:

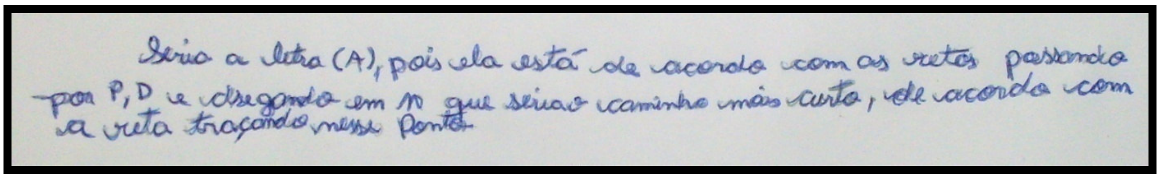

Seria a letra (A), pois ela está de acordo com as retas passando por P, D e chegando em M que seria o caminho mais curto, de acordo com a reta traçando nesse ponto.

Figura 33: Protocolo do aluno 8 – questão 16

Percebemos, analisando a Figura 33, que o aluno considerou a alternativa (A) como correta, porque considerou o caminho mais curto, simplesmente analisando a distância do ponto (P) ao ponto M, sem levar em conta a variável x = AP. Quando ele escreveu utilizando o registro da língua natural: “Seria a letra (A), pois ela está de acordo com as retas passando por P, D e chegando em M, que seria o caminho mais curto.”

Protocolo do aluno 10:

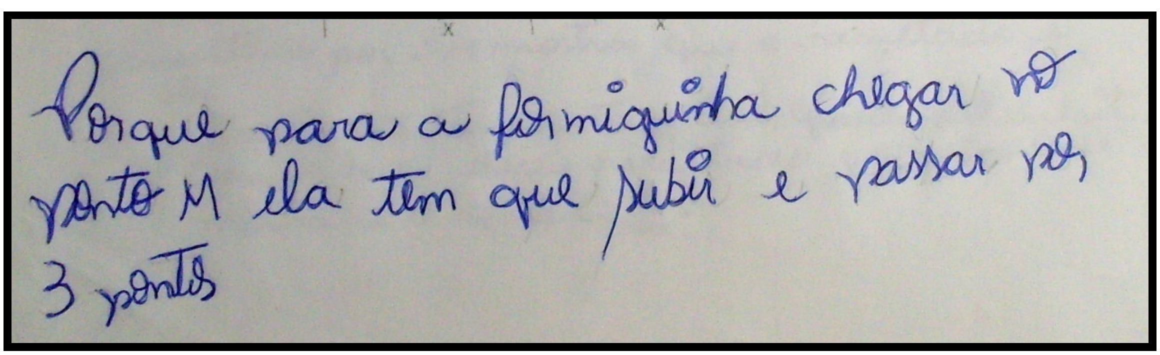

Porque para a formiguinha chegar no ponto M ela tem que subir e passar nos 3 pontos

Figura 34: Protocolo do aluno 10 – questão 16

Observamos que o aluno 10, semelhantemente ao aluno 8 utilizou o registro de representação da língua natural e analisou apenas a distância do ponto P ao ponto M, sem levar em conta a distância x = AP. Ele assinalou corretamente a alternativa (A), porém a justificativa está completamente incorreta, conforme o que está escrito na Figura 34.

Protocolo do aluno 12:

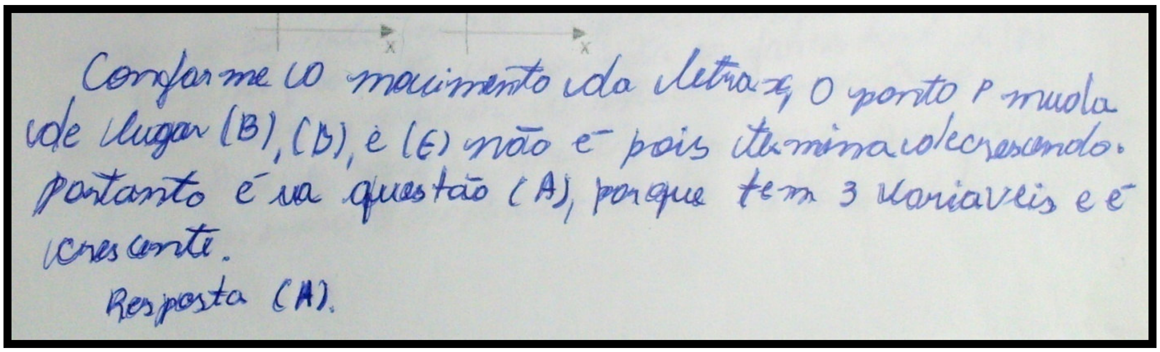

Conforme o movimento da letra x, o ponto P muda
de lugar (B), (D), e (E) não é pois termina decrescendo.
Portanto é a questão (A), porque tem 3 variaveis e é
crescente.
Resposta (A).

Figura 35: Protocolo do aluno 12 – questão 16

Verificamos que o aluno 12, utilizando o registro de representação da língua natural, justificou de forma incorreta o motivo que o levou a assinalar, como resposta a alternativa (A), pois considerou o que ele chama de três variáveis e não explicou o que seriam essas variáveis e acrescentou ainda “[…] é crescente.”

Protocolo do aluno 17:

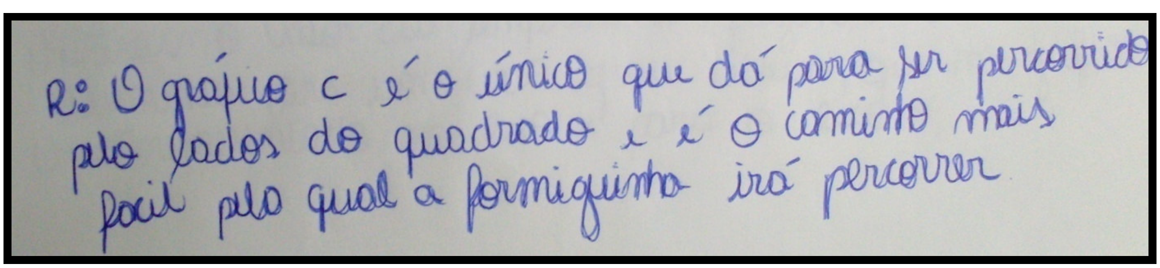

R: O grafico c é o único que dá para ser percorrido
pelo lados do quadrado e é o caminho mais
facil pelo qual a formiguinha irá percorrer

Figura 36: Protocolo do aluno 17 – questão 16

Notamos que esse aluno utilizou o registro de representação da língua natural. O mesmo verificou que, do ponto P ao ponto M, existem três segmentos de retas que ele chamou de: “caminho mais fácil pelo qual a formiguinha irá percorrer.”

Assinalou de forma incorreta a alternativa (C), pois tentou fazer uma comparação da figura com o gráfico que mais se assemelhava com o trajeto do ponto P ao ponto M.

6.1 Considerações finais

O objetivo desta pesquisa foi analisar o desempenho de alunos do 3ª ano do Ensino Médio da Rede Pública Estadual na resolução de questões sobre função monotônica (crescente e decrescente) proposta nas Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas.

Buscamos conhecer a respeito das Olimpíadas Brasileiras das Escolas Públicas, o que são Olimpíadas de Matemática, bem como as premiações aos participantes e o impacto da OBMEP no currículo escolar.

Para a elaboração do instrumento de pesquisa, analisamos as questões das Olimpíadas de: 2005; 2006; 2007 e 2008. Selecionamos quatro questões sobre função monotônica de forma explícita, nas quais o aluno deveria assinalar a alternativa correta e justificar sua resposta.

O ato de justificar as respostas foi solicitado, para que pudéssemos analisar os protocolos dos alunos quanto aos erros e acertos.

A pesquisa de Booth (1995, p.36), relata que um levantamento contínuo do que envolve exatamente o aprendizado de novos tópicos de Matemática, acompanhado por uma análise dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas, pode nos proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar às crianças a melhorarem sua compreensão da Matemática.

Levando em consideração nossa experiência em sala de aula e conhecendo as dificuldades que, muitos alunos, encontram na resolução de situação problema, sobre função monotônica, sobretudo naquelas que envolvem o conhecimento de diferentes formas de Registros de Representação Semiótica de um mesmo objeto matemático, escolhemos questões que tivessem essas características.

A maioria desses alunos teve dificuldades em solucionar as questões por não estarem familiarizados com mudanças de registros de representação semiótica, geralmente, não trabalhados nos livros didáticos.

Segundo Duval (2003, p.31), para compreensão da Matemática, é essencial ter diversos tipos de Registros de Representação Semiótica do mesmo objeto e fazer a articulação entre esses registros.

Durante a aplicação das questões, os alunos por várias vezes pediram explicação ao pesquisador sobre como resolver os problemas propostos, mas foram esclarecidos que seria como nas Olimpíadas, individual e sem consulta.

Das atividades propostas para os alunos, observou-se haver mais de uma possibilidade de estratégia de resolução, sendo necessário para isso, conhecer transformações do tipo tratamento e conversão.

Analisamos os protocolos dos alunos e notamos que podem ter ocorrido, pelo menos, dois fatores que contribuíram para os erros. O primeiro foi a falta de conhecimento dos diversos tipos de Registros de Representação Semiótica do mesmo objeto e, fazer articulação entre esses Registros.

Aprendemos com esta pesquisa de abordagem qualitativa das atividades realizadas pelos alunos, com as questões das Olimpíadas de Matemática, a diagnosticar as dificuldades e investigar a origem de possíveis erros, partindo, assim, para o planejamento de novos conteúdos e estratégias a serem ensinadas. Aprendemos que não basta dizer que um aluno acertou ou errou uma questão, o que é feito por muitos professores. É necessário instigá-los a descobrir onde e por que errou.

Para pesquisas futuras, sugere-se que as mesmas questões sejam aplicadas a professores de Matemática da Rede Pública, a fim de verificar se os professores estão familiarizados com questões contextualizadas, livre de definições técnicas e em uma linguagem acessível.

Durante a realização desta pesquisa, houve um crescimento muito grande do pesquisador. A participação no grupo de pesquisa, as novas conquistas na área do conhecimento e os obstáculos vencidos, foram evidências positivas desse progresso.

ARDENGHI, Marcos José. Ensino Aprendizagem do Conceito de Função. Pesquisas Realizadas no Período de 1970 à 2005 no Brasil. PUC/SP – São Paulo, 2008.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à Teoria e aos Métodos. Porto: Porto Editora,1982.

BOOTH, Lester R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F.(org). As idéias da Álgebra. São Paulo. Atual, 1995.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros curriculares nacionais PCN. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, 1999.

BRASIL. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Secretaria de Educação Básica. BRASÍLIA: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

BURIGO, Elizabete Zardo. Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

DAMM, R. F. Registros de Representação In: Machado, S. D. A. (org). Educação Matemática: Uma introdução. São Paulo: EDUC/2002.

DUVAL, Raymond. In MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. (org). Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

EL JAMAL, Roberto Miguel. Álgebra na Educação Básica: As múltiplas sinalizações do que se espera que devem saber os alunos. Pesquisas realizadas no BRASIL, 2004. Disertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifica Universidade Católica de São Paulo – São Paulo.

EVES, Howard. No século XX. In: _____ Introdução à história da matemática. Tradução por Higyno H. Domingues. 3 ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GUIDORIZZI, H. et al. Cálculo Diferencial e Integral (função de uma variável). Universidade de São Paulo – São Paulo, 1968.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. 3 ed. Ver. e ampl. Fundamentos de metodologia científica. São Paulo: Atlas, 1991.

MACHADO, Airton Carrião. A Aquisição do conceito de função: perfil das imagens produzidas pelos alunos. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

______. Ministério da Educação e do Desporto / Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

ROMBERG, Thomas A. Percurso Metodológico de uma Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática In: Allevato, N.S.G. UNESP Rio Claro, 1992.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: Ensino Médio, 1999.

SCHWARZ, Osmar. Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC/SP – São Paulo.

SILVA, Viviane da. Osvaldo Sangiori e “O Fracasso da Matemática Moderna no Brasil.” PUC/SP – São Paulo, 2007.

SIMÕES, Maria Helena Pinedo. Uma sequência para o ensino/aprendizagem de função do 2º grau. 1995. 259f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

VINNER, S.; Dereyfus, T. Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Educations, v. 20, n.4, p.356-366, 1989.

ANEXO 1: MODELO DE AUTORIZAÇÃO DA DIREÇÃO DA ESCOLA

À Sra. Diretora

Venho por meio desta, solicitar vossa autorização para que eu, José Zucco, possa desenvolver parte de meu trabalho de Mestrado, com os aos alunos da 3ª série do Ensino Médio desta Unidade Escolar.

A pesquisa consiste em dois encontros, no período de duas aulas cada, com aplicação de questões das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas. O objetivo é analisar o desempenho dos alunos em questões envolvendo função crescente e decrescente.

Informo que estou providenciando autorizações com os responsáveis para que os alunos participem desse trabalho.

Obrigado pela atenção, envio meus agradecimentos.

____

José Zucco
e-mail: zuccojose@gmail.com

ANEXO 2: MODELO DE AUTORIZAÇÃO DO RESPOSÁVEL PELO ALUNO

AUTORIZAÇÃO PARA A REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Guarulhos, março de 2009

Autorização do responsável legal do(a) aluno(a)_________________________ matriculado(a) no 3º ano do ensino médio a participar como voluntário(a) de uma pesquisa sob responsabilidade do pesquisador José Zucco, aluno do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-SP.

O Objetivo da pesquisa é analisar o desempenho dos alunos em questões das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas. Serão dois encontros, no horário de aula.

Conto com a autorização da Direção desta Instituição de Ensino e informo que todas as publicações realizadas a partir desse trabalho, serão feitas preservando a identidade dos alunos envolvidos.

____
Nome do responsável

____
Assinatura do responsável

____
José zucco
e-mail: zuccojose@gmail.com