

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

Jacinto Ordem

**Prova e demonstração em Geometria: uma busca da
organização Matemática e Didática em Livros Didáticos
de 6^a a 8^a séries de Moçambique**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

**SÃO PAULO
2010**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Jacinto Ordem

**Prova e demonstração em Geometria: uma busca da
organização Matemática e Didática em Livros Didáticos
de 6^a a 8^a séries de Moçambique**

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como
exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE
PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob
orientação do **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud**.*

SÃO PAULO
2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

A minha mãe Munlohaua Uatanha (in memória)
A meu pai Ordem Niuhe Muassambi (in memória)
A meus irmãos, Rosário Ordem, Rafael Ordem
A meus sobrinhos, Daniel, Julieta, Anita
E a todos os outros familiares do primeiro grau

Dedico este trabalho

AGRADECIMENTO

A DEUS, por me iluminar em todos os momentos de minha vida e permitir a realização deste sonho.

Ao Professor Doutor Saddy Ag Almouloud, pela sua orientação competente, sugestões, comentários, estímulos positivos.

À banca qualificadora na pessoa das Professoras Doutoras Maria José Ferreira da Silva e Ana Chummo, pelas valiosas contribuições para a presente pesquisa.

À Fundação Ford, pela oportunidade que me proporcionou em fazer o mestrado por meio de apoio financeiro.

À Dr^a Célia Maria Rodrigues Diniz, representante do The Africa-America Institute, em Moçambique, pela atenção que me dispensou durante minha estada em São Paulo.

Aos Professores do Programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo por tudo que ensinaram.

A todos os colegas da turma de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, pela oportunidade de estudarmos juntos e acolhimento que recebi.

Ao Marcelo Marcos Bueno Moreno, pela amizade, companheirismo e compreensão inestimáveis que me dispensou ao longo do tempo que fiquei em São Paulo.

Ao Fernando Silveira, pela amizade e companheirismo que desfrutei desde que o conheci.

A Ana Jordão pelo apoio desinteressado que me providenciou quando precisei amadurecer os meus conhecimentos pela disponibilização de livros didáticos do Brasil que muito contribuíram para o esclarecimento de alguns conceitos geométricos.

A meu compatriota Guilherme Basílio, que muito amavelmente compartilhamos os momentos de convívio em um país que não é nosso e pelas valiosas contribuições para o meu trabalho.

A meus colegas do grupo de orientação, a saber: Messildo, André, Gastão, Márcia, Gilson, Flainer que muito contribuíram com suas ideias para que meu trabalho andasse nos momentos cruciais.

Aos Professores Doutores Benedito, Armando, Saddy, Zezé, Cileda, Celina, Ana Lúcia, Fumikazu pela oportunidade que tive de serem meus professores diretos e de aprender mais como estudante na PUC/SP.

Ao senhor Francisco analista Acadêmico-Administrativo do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, pela simpatia, compreensão e disposição para comigo que sempre teve.

A Maria das Dores.

Aos meus sobrinhos Títo e Eugênio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a materialização do meu sonho.

O Autor

RESUMO

Este estudo teve por objetivo compreender a abordagem da prova e da demonstração de propriedades de triângulos presentes em livros didáticos da 6ª a 8ª séries de Moçambique. As propriedades, objeto de estudo, são a soma dos ângulos internos, a relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes, bem como a relação de congruência entre triângulos. Desse modo, o estudo pretendeu responder à seguinte questão: Como os livros didáticos em uso nas escolas (de Moçambique) apresentam a organização matemática e didática do objeto triângulo, com enfoque na prova e demonstração. O estudo fundamentou-se nos trabalhos de Nicolas Balacheff sobre os processos de validação de provas, Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas e Yves Chevallard sobre a organização *praxeológica*. A pesquisa teve como procedimento metodológico a coleta e a análise de dados bibliográficos. Os resultados do estudo mostraram que nos livros didáticos analisados predominam provas pragmáticas. Os autores privilegiam os registros figurais e discursivos em línguas natural e simbólica e apresentam em tais livros tarefas claras com o discurso tecnológico-teórico disponível. Mas, os resultados do estudo mostraram que as conversões não são devidamente exploradas no estudo dos triângulos e a reconfiguração não é aproveitada para produzir argumentos que poderiam fundamentar provas intelectuais.

Palavras-chave: Livro didático de Moçambique. Prova e demonstração. Teoria Antropológica do Didático. Geometria da 6ª a 8ª series.

ABSTRACT

This study aimed to understand the approach of proof and proving of properties of triangles present in textbooks for the 6th to the 8th series of Mozambique. The properties, the object of study, are the sum of internal angles, the relationship between the external and the internal angle non-adjacent and the relationship of congruence between triangles. Thus, the study sought to answer the following question: How do the textbook in use in schools (Mozambique) present the organization of the study about triangles and how they teach this object with a focus on proof and proving. The study was based on the work of Nicolas Balacheff about the processes of validation tests, Raymond Duval works about records of semiotic representations and Yves Chevallard works about the praxeological organization. The research has methodological procedure as the collection and analysis of bibliographic data. The study results showed that in the textbooks examined predominantly pragmatic proof. The authors emphasize the records figural and discursive in natural and symbolic language in these books and they have clear tasks with the technological-theoretical discourse available. But, the study results show that conversions are not adequately explored in the study of triangles and the reconfiguration is not fully exploited to produce arguments that could support intellectual proof.

Keywords: Textbooks of Mozambique. Proof and Proving. Anthropological Theory of Didactics. Geometry for 6th to the 8th series.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1	19
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
1.1 Dissertações e teses defendidas na PUC/SP	19
1.2 Reflexões teóricas sobre argumentação, prova e demonstração	29
1.3 Contribuições e importância da revisão bibliográfica para nossa pesquisa ..	39
CAPÍTULO 2	41
PROBLEMÁTICA	41
2.1 Uma síntese das reflexões sobre os problemas de ensino e aprendizagem de Geometria com enfoque na prova e demonstração	41
2.2 Organização do currículo	43
2.3 O ensino da Geometria em escolas moçambicanas (do Ensino Primário e Secundário do 1º Ciclo) com enfoque nas demonstrações das propriedades dos triângulos	45
2.4 Descrição do problema, questão da pesquisa e objetivos do trabalho	48
2.5 Justificativa de escolha e sua relevância	51
2.6 Metodologia e Procedimentos de Pesquisa	51
2.7 Referencial Teórico	53
2.7.1 Balacheff e os tipos de provas	54
2.7.2 Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 2003)	58
2.7.3 CHEVALLARD: Teoria Antropológica do Didático (TAD)	64
CAPÍTULO 3	73
ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS	73
3.1 Critérios de escolha de livros para a análise	74
3.2 Os Livros objetos de Análise desta Pesquisa	75

3.3 Critérios de Análise dos Livros	75
3.4 Análise dos Livros	76
3.5 Descrição e análise da organização didática dos livros selecionados com enfoque nas atividades de introdução	79
3.6 Discussões dos resultados da organização didática com enfoque nas atividades de introdução dos conceitos	96
3.7 Descrição e análise da organização didática com enfoque nas atividades propostas aos alunos para exercício	108
3.8 Discussão dos resultados da organização didática com enfoque nas atividades de resolução de problema propostas aos alunos	122
CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS DESTA PESQUISA	127
REFERÊNCIAS	131

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Formulação da segunda atividade	15
Figura 2 - Transformação de uma representação semiótica	60
Figura 3 - Representação de um teorema em três registros de representação	61
Figura 4 - Procedimento sugerido para a validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo	81
Figura 5 - ilustração da técnica de dobradura para deduzir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo	81
Figura 6 - Ilustração figural de como se pode estabelecer a relação entre ângulo externo com os dois internos não adjacentes	85
Figura 7 - Reconfiguração que permite demonstrar a relação entre um ângulo externo e os dois internos não adjacentes	86
Figura 8 - extrato de como é abordado o teorema sobre ângulo externo de um triângulo	86
Figura 9 - Figuras congruentes em um quadriculado	87
Figura 10 - Extrato de como foi demonstrado o caso LLL de congruência de triângulos	88
Figura 11 - Demonstração do critério LAL da congruência de triângulos apresentada em um livro didático de Moçambique	90
Figura 12 - apresentação do critério LAL da congruência de triângulos em um livro didático de Moçambique	91
Figura 13 - demonstração do critério ALA da congruência de triângulos em um livro didático de Moçambique	92
Figura 14 - Extrato da demonstração do critério LAL da congruência de triângulos usada em L_4	100
Figura 15 - Figura de suporte para a demonstração do critério LAL da congruência de triângulos	103
Figura 16 - Reconfiguração que leva à conjectura	106

Figura 17 - Outra reconfiguração que leva à conjectura sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo	106
Figura 18 - Figura usada para a aplicação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo	110
Figura 19 - Procedimento de dobradura que os alunos devem fazer para deduzir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo	111
Figura 20 - Ilustração da dedução da relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo	111
Figura 21 - Ilustração da aplicação dos critérios de congruência de triângulos para demonstrar alguma relação geométrica	114
Figura 22 - Segunda ilustração da utilidade dos critérios de congruência de triângulos	115
Figura 23 - ilustração de como identificar os elementos correspondentes em triângulos congruentes	116
Figura 24 - um exemplo de aplicação dos critérios de congruência de triângulos ...	117
Figura 25 - Ilustração de um exercício	118
Figura 26 - Exercício de aplicação de casos de congruência de triângulos	119

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Diferentes formas de representar uma mesma propriedade	63
Quadro 2 - Resultados da análise e descrição da organização didática dos livros. quanto às atividades introdutórias dos conceitos	96
Quadro 3 - Tipo de atividades propostas aos alunos para a exercitação	120
Quadro 4 - Natureza de atividades de construção de triângulos propostas nos livros didáticos	123
Quadro 5 - Tipo de atividades relativas à propriedade da soma dos ângulos internos e/ou externos num triângulo presentes nos livros didáticos	124
Quadro 6 - Atividades propostas quanto às condições de existência de um triângulo	126

INTRODUÇÃO

Nosso interesse pelas questões relacionadas com a prova e a argumentação advém da experiência em sala de aula como professor de Matemática em Moçambique. No início, acompanhávamos as aulas de nossos professores nas diferentes disciplinas do curso de formação de professores de matemática para o Ensino Secundário dos primeiro e segundo ciclos – que no Brasil, correspondem às últimas séries do 3º ciclo do Ensino Fundamental até Ensino Médio.

Nesse período, constatamos que alguns professores evitavam demonstrações, apresentavam apenas os enunciados dos teoremas seguidos de exercícios de aplicação das regras contidas nas proposições, com raras demonstrações e outros que tinham formação eminentemente em Matemática pura ou aplicada com forte inclinação às demonstrações. No exercício profissional, esta diferença começou a criar certa curiosidade sobre o valor das demonstrações em Matemática e, sobretudo, o real significado das demonstrações no exercício profissional docente do professor de Matemática. Lecionamos uma disciplina denominada “Matemática Escolar”, disciplina de iniciação aos ingressantes no curso de formação de professores da Instituição onde estamos vinculados em Moçambique, cujo objeto de estudo é a matéria que, normalmente, deveria ser do Ensino Fundamental e Médio.

Mais uma vez, constatamos que quando se tratava de demonstrações, a maioria dos alunos não dominava esse tipo de tarefa, embora todos fossem graduados e tivessem um nível de escolaridade que teoricamente equivale ao nível pré-universitário. Os temas estudados eram mais voltados à trigonometria em triângulos ou círculo trigonométrico e à indução finita. Para os mesmos

ingressantes, a situação era mais alarmante quando se tratava de Geometria Plana.

As dificuldades dos novos ingressantes eram mais notórias quando o assunto a tratar envolvia pequenas provas e demonstrações que se caracterizavam mais pela manifesta falta de domínio de uma estrutura de demonstração, mas também nossa experiência apoiou-se na Geometria que recebemos na formação de professores na forma de postulados, teoremas, definições e demonstrações sem, porém, um envolvimento muito profundo com a estrutura das demonstrações, embora fosse um momento em que éramos preparados para entrar na sala de aula, como responsáveis pelo processo do ensino da Matemática.

Usiskin (1980, apud Herbst & Miyakawa, 2008, p. 469) salienta que os acadêmicos e professores têm visto o curso de Geometria como um lugar onde os alunos têm oportunidade de encontrar um sistema matemático de postulados, teoremas e definições e, por mais de um século, na Geometria do Ensino Médio os alunos aprendem teoremas e fazem provas e demonstrações.

O outro momento de reflexão e, provavelmente, o que mais nos levou a pensar profundamente nas argumentação, prova e demonstrações (em Geometria) foram as atividades que desenvolvemos nos Cursos “Tópicos de Geometria” e “TIC’s” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, no segundo semestre de 2008.

Com as atividades desenvolvidas naquele curso, começamos a ter mais consciência de que a Geometria é também um problema de ensino em nosso país, e este assunto merece ser estudado, particularmente, na vertente argumentação, prova e demonstração. Fizemos essa leitura, pela dinâmica como as aulas foram direcionadas, ligando as experiências que vivemos no passado não muito distante, chegamos à conclusão de que precisamos olhar as dificuldades constatadas, como prováveis resultados do tipo de ensino a que eles (e também nós) foram sujeitos. Mas por que enveredar por provas e demonstrações e não outro assunto?

Duas atividades foram discutidas nas aulas de “Tópicos de Geometria” que influenciaram decisivamente para as demonstrações em Geometria.

A primeira, está incorporada na ficha “Iniciação à demonstração em Geometria” e sua formulação é a seguinte: Seja ABC um triângulo e seja I o ponto médio de BC . Seja S o simétrico de I em relação à reta AB e seja T o simétrico de I em relação à reta AC .

a) Demonstre que os segmentos SB e TC têm o mesmo comprimento.

A segunda atividade, aparece também em um texto de apoio em que se discutiu em uma das aulas da mesma disciplina intitulado “As diferentes apreensões de uma figura na Geometria”, cuja formulação é a seguinte:

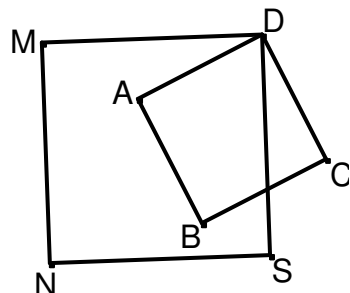
Atividade 4 $ABCD$ e $NSDM$ são quadrados. $MD = 3$ cm, $AD = 2$ cm e $MA = 2$ cm. Quanto mede SC?	
---	---

Figura 1 - Formulação da segunda atividade
Fonte: Texto de apoio de Tópicos de Geometria

A princípio, estes problemas intrigaram-nos muito, porque com papel e lápis foi difícil produzir figuras que facilitassem a atividade de demonstrar o teorema dado na atividade 4 e a obter o valor do segmento SC . Mas com apoio de um software de Geometria Dinâmica (Geogebra ou Cabri Geometry II Plus, por exemplo) constatamos ser fácil enxergar o caminho da demonstração do teorema ou achar o valor de SC .

Assim, quando se obtém a medida de SC por meio de um software e se faz o movimento de um dos pontos A ou B , constata-se que a relação entre SC e AM permanece inalterável. Então, começa o questionamento: por que será que permanece constante a congruência entre os segmentos SC e AM ?

Depois de uma longa discussão em sala de aula, entre mestrandos, aliada a uma exploração do problema por meio do software de Geometria dinâmica, propusemos argumentos para justificar o fenômeno observado.

Percebemos que nossa concentração não estava no uso do software para a apreensão das conjecturas que nos levaram às demonstrações dos dois teoremas, mas, na forma como chegamos às soluções dos dois problemas de prova na sala de aula: foi mediante a apresentação de prováveis argumentos que nos levariam à prova, refutações, nova apresentação de outros argumentos, discussão até a produção completa da demonstração. O episódio fez com que refletíssemos um pouco sobre o que nos intrigava: julgávamos que a produção de uma prova não envolvia tentativa, nem muito menos a procura de elementos que às vezes poderiam ser postos de lado. Tínhamos apenas em mente aquilo que aparece nos livros: tudo bonito, como se o produto final da demonstração não resultasse de um processo de produção que envolve refutações, refinações, inclusive, tentativas e erros, etc.

Com o curso “Tópicos de Geometria”, pudemos constatar que uma das preocupações da Educação no Brasil é o resgate do ensino da Geometria nas escolas, depois de se constatar, em avaliações feitas pelo SAEB/MEC, que o desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em Matemática é mais baixo quando se trata de Geometria.

Entre outras causas desse desempenho, destacam-se: grande parte dos professores que hoje está em atividade, teve uma formação precária em Geometria, em razão do Movimento da Matemática Moderna que relegou o ensino da Geometria para segundo plano; a formação inicial de professores no Brasil continua não prestando maior atenção à discussão com seus alunos sobre uma proposta mais eficiente para o ensino da Geometria; a formação continuada que vem sendo implementada, em forma de cursos de reciclagem, também não tem conseguido mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria (ALMOULOU; MELLO, 2000).

Esses autores ainda afirmam que: “Embora os currículos mais recentes destaquem a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, o professor não sabe o que fazer” (p. 2) e defendem a necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar com a demonstração em Geometria como forma de preparar o aluno a apropriar-se dos conceitos e habilidades geométricas.

Como reflexo da identificação dos problemas que o Ensino da Geometria enfrenta no Brasil, constatamos que existem várias pesquisas de Mestrado e/ou Doutorado que têm contribuído para a busca das formas adequadas para abordar a prova e a demonstração no ensino da Geometria.

Tudo isso contribuiu para que começássemos a ver a Geometria, como um campo para pesquisa, já que alguns dos problemas que são levantados relacionados com o ensino da Geometria são similares aos vividos no nível do sistema educacional de Moçambique: as reformas curriculares em Moçambique desde 2004 reconhecem que o sistema de ensino vigente mostra-se inadequado. Em um estudo realizado sobre o desempenho dos alunos do Ensino secundário constatou-se que

[...] os alunos revelam maiores dificuldades na expressão escrita particularmente na produção de textos bem estruturados, com sequência lógica e sem erros ortográficos fato que se reflete no desempenho dos mesmos nas restantes disciplinas. Os testes revelaram ainda haver problemas na disciplina de Matemática, por exemplo, na geometria, cálculo percentual, trabalho com radicais e em exercícios que exigem cálculo com números decimais ou notação decimal (INDE e MEC, 2007, p. 6, grifo nosso).

Nosso trabalho tem como objetivo descrever e analisar a organização matemática e didática do objeto triângulo com enfoque na prova e demonstração de algumas de suas propriedades.

Para esse estudo, tomamos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) a Teoria dos Registros de representação Semiótica de Duval e os tipos de prova propostos por Balacheff.

A metodologia adotada apoiou-se na pesquisa bibliográfica, tendo como fonte livros didáticos de Matemática do sistema educacional de Moçambique e que se encontram em uso desde 1986.

O trabalho está estruturado de seguinte modo:

No primeiro capítulo, fazemos revisão da bibliografia para delinear o problema de pesquisa.

No capítulo 2, apresentamos uma síntese das principais reflexões sobre a problemática de ensino e aprendizagem da Geometria com enfoque na prova e

demonstração; apresentamos a questão de pesquisa, bem como os objetivos e os procedimentos metodológicos da pesquisa; e também o referencial teórico que sustenta as análises dos resultados.

No capítulo 3, fazemos a descrição e a análise de livros didáticos, desmembrados da seguinte forma: apresentam-se os critérios de escolha dos livros contemplados no estudo; são mostrados os critérios que foram utilizados para analisar cada um dos livros contemplados na pesquisa; faz-se sua descrição e análise da organização didática quanto ao objeto “triângulo”, bem como a descrição e a análise matemática do mesmo objeto. Nas considerações finais, apresentamos as principais conclusões, perspectivas e limitações do trabalho. No final, destacamos as referências bibliográficas utilizadas no presente estudo.

CAPÍTULO 1

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As pesquisas voltadas à problemática de ensino e aprendizagem da Geometria, particularmente, da Geometria dedutiva são várias. De forma sucinta, passamos a apresentar algumas dessas pesquisas, particularmente, as que foram realizadas dentro da instituição onde estudamos.

1.1 Dissertações e teses defendidas na PUC/SP

1- Mello (1999)

A pesquisa de Mello incidiu sobre o ensino e aprendizagem da técnica de demonstração, com base na organização e aplicação de uma sequência didática a um grupo de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de um colégio da rede particular de ensino, da cidade de Mogi das Cruzes (SP). Em seu trabalho, a autora inspirou-se nos princípios da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e teve como fundamentação teórica os trabalhos de Balacheff sobre Explicação, Prova e Demonstração; Raymond Duval sobre os registros de representação semiótica, o processo de aprendizagem da Geometria e demonstração e Brousseau sobre Contrato Didático, Erros e Obstáculos.

Entre outros documentos, Melo (1999) analisou dez livros didáticos da 7ª série. Nessa busca, a autora constatou que apenas dois deles tratam da técnica da demonstração, mas de forma parcial. Em relação aos oito livros analisados, a autora afirma que não apresentam o estatuto de definição e de teorema; não

tratam da demonstração nem apresentam exercícios que exijam provas ou demonstração, nem mesmo fornecem os primeiros passos para o aprendizado da demonstração. Mesmo para os livros que tratam da prova e demonstração em Geometria, Mello (1999) afirma que não fazem distinção entre definição e teorema, não apresentam um esquema organizado de demonstração nem ferramentas de demonstração que permitam que mediante o preenchimento de espaços vazios o aluno possa completá-los e obter uma redação da demonstração.

Em relação à proposta curricular, Mello (1999, p. 72) afirma que:

A proposta curricular sugere que o aluno saiba demonstrar as propriedades relativas a triângulos e quadriláteros, teorema de Tales e teorema de Pitágoras, contudo não explica para o professor como desenvolver esta habilidade no aluno.

No estudo preliminar sobre a proficiência dos alunos em assuntos de Geometria das 7ª e 8ª séries, Mello (1999) conclui que os alunos apresentaram fraco desempenho quanto aos conceitos e habilidades geométricas. Em face dos resultados do estudo com os alunos, a pesquisadora levantou a seguinte questão, “As escolhas didáticas dos professores, quando ensinam geometria, favorecem a apropriação dos conceitos e habilidades geométricas?” como norteadora de seu estudo.

A autora adotou a resolução de problemas, como estratégia para a aprendizagem da técnica de demonstração. As atividades da sequência foram experimentadas em uma turma de 14 alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. A concepção da aprendizagem da técnica da demonstração baseou-se na ideia de que, por meio da discussão, distinção entre definição e propriedades, associação dos registros de representação e estabelecimento de um conceito usando uma definição ou uma propriedade, o aluno vai aprender a técnica de demonstração.

Depois da aplicação da sequência didática, Mello (1999) concluiu que houve evolução dos alunos quanto à compreensão do estatuto do teorema (identificação das hipóteses e conclusão), construção de figura, utilização de todas as informações em uma organização lógica e redação da demonstração.

Mas, a pesquisadora afirma que no teste final apenas dois alunos conseguiram elaborar a redação da demonstração com total sucesso e os restantes obtiveram um êxito parcial. A autora destaca ainda que:

- mesmo reconhecendo o estatuto de definição e teorema, conseguindo reconhecer a hipótese e a conclusão de um teorema, os alunos continuavam apresentando maiores dificuldades na mudança de registro da linguagem da figura para a linguagem algébrica; e o traçado de figuras sobrepostas também constituía uma dificuldade para eles;
- a mudança do tratamento de um registro de representação, de uma mesma propriedade (oferecida inicialmente na linguagem natural) para duas representações distintas no esquema (linguagem algébrica), era uma grande dificuldade para os alunos;
- os alunos apresentavam dificuldades na conversão e coordenação dos registros de representação, bem como na compreensão do tratamento interno a um registro.

Mesmo assim, a autora afirma que os alunos avançaram em seus conhecimentos em Geometria uma vez que passaram a reconhecer

- a figura como âncora dos entes matemáticos dados nas hipóteses;
- a utilização dos registros de representação;
- a ordenação lógica das informações que compõem a prova;
- o estatuto da definição e do teorema;
- a importância da demonstração para explicar logicamente as propriedades da geometria;
- a importância da figura geométrica como apoio “na economia de memória” durante o desenvolvimento da demonstração. (MELLO, 1999, p. 166)

2- Carlovich (2005)

Carlovich (2005) analisa o ensino da Geometria dedutiva nos livros didáticos dos 3º e 4º ciclos do Ensino *Fundamental, mais utilizados nas escolas públicas* do Estado de São Paulo, desde a década de 1990 até a de 2000. A autora subdividiu as coleções em análise em dois períodos históricos, tendo como

marco a implementação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 1995. Assim, definiu para sua pesquisa, o início dos anos 1990 – como primeiro período – e o início dos anos 2000 – como segundo período. Com relação a esses dois períodos, a autora procurou perceber nos livros de cada época, como os autores desses livros acompanhavam as discussões da Didática da Matemática no que se refere ao ensino e aprendizagem da Geometria dedutiva e qual diferença encontraria nessas coleções.

A autora definiu duas questões para sua pesquisa:

Em que medida os livros didáticos paulistas de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental acompanharam discussões da Didática da Matemática sobre o ensino da Geometria dedutiva nos períodos anterior e posterior à implementação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para este nível de ensino, em 1995?

O que distingue os livros didáticos paulistas de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental do período anterior daqueles do período posterior à implementação do PNLD (1995) quanto à incorporação dos resultados de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, mais especificamente sobre o ensino da Geometria dedutiva? (CARLOVICH, 2005, p. 35)

Carlovich (2005) utilizou como procedimento metodológico a pesquisa documental e usou como referencial teórico os trabalhos de Chervel (1990) sobre a história das disciplinas e a noção de “vulgata escolar”; a classificação das Geometrias proposta por Parsysz (2000) e os trabalhos de Chevallard (1999) sobre a Organização Praxeológica.

Da pesquisa, Carlovich (2005) conclui que:

- as coleções analisadas dos anos 1990 forneciam indícios de uma abordagem para a Geometria dedutiva em que as demonstrações são apresentadas como produto, cabendo ao aluno aplicar o raciocínio na resolução de exercícios.
- as coleções dos anos 2000 apresentam algum enfoque heurístico, isto é, incorporam atividades em que os alunos são solicitados a fazer validações empíricas e dedutivas.

3- Gouvêa (1998).

Em sua dissertação de Mestrado, Gouvêa (1998) procurou resgatar o ensino e aprendizagem da Geometria. O estudo teve como motivação os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP) de 1996, implantado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, pois os alunos matriculados naquele ano na 7ª série do Ensino Fundamental de todas as escolas da rede estadual foram avaliados nos componentes curriculares de Matemática. Constatou-se que o desempenho dos alunos foi baixo. A pesquisa teve a seguinte hipótese: os professores quando ensinam, não levam em consideração as exigências em relação ao ensino e aprendizagem da demonstração que, a partir da 7ª série, prevê que o aluno raciocine sobre conceitos e não mais sobre figuras, ou seja, que inicie a provar, a justificar e a demonstrar para tornar indiscutível certo resultado. Em face da hipótese levantada, Gouvêa (1998) desenvolveu uma sequência didática com um grupo de 12 professores da rede estadual em cinco sessões de 4 horas cada que ocorreram aos sábados.

No pré-teste realizado, antes da aplicação da sequência, a autora constatou que a metade dos professores verificava, por meio de exemplo, a veracidade de uma propriedade matemática e, para casos em que se exibia figura, deixavam-se levar por evidências falsas em lugar de se servirem da demonstração para verificá-la. Mas, em pós-teste realizado após a sequência didática, a pesquisadora observou certa evolução dos professores quanto à visão sobre a Geometria dedutiva, mas, ainda havia uma certa resistência por parte dos docentes para organizar um texto com um desenvolvimento dedutivo pautado nas propriedades já demonstradas.

Conforme refere a autora, o estudo fundamentou-se em Balacheff (1987) que considera a conjectura e a prova como estágios necessários dos processos pessoais relevantes na resolução de problemas e defende que o aluno não tem maturidade lógica para experimentar ou se conscientizar da necessidade das provas: é preciso ajudá-lo a sentir a necessidade de usar essa ferramenta baseando em situações-problemáticas.

A pesquisa de Gouvêa (1998) abordou também as demonstrações em livros didáticos, tendo constatado que o ensino da Geometria por meio do

processo de descoberta indutiva era negligenciado nos livros que foram analisados, como podemos perceber quando diz:

Nesses livros, a “dedutividade”, que está presente nos teoremas de Pitágoras e de Tales, não pode ser reinventada pelo aluno, porque tais demonstrações estão impostas aos alunos, os quais vêem somente o resultado final da descoberta matemática e devem assimilá-las para uma posterior repetição, impossibilitando-lhes a visão dos processos que as produziram. (GOUVÊA, 1998, p. 190)

No tópico sobre “livro didático”, Gouvêa (1998) fez o estudo, dividindo-o em períodos históricos relativamente à Matemática Escolar.

O primeiro período, “antes” do advento do movimento da Matemática Moderna, momento marcado por uma focalização excessiva dos conteúdos matemáticos. Segundo a autora, os livros didáticos que ela consultou, costumam conter todas as demonstrações organizadas; os teoremas eram numerados; os cursos de Geometria apresentavam os conceitos primitivos: ponto, reta e plano; discutiam e exemplificavam as definições de alguns conceitos indispensáveis a um sistema dedutivo: proposições, postulados, teoremas, hipóteses, teses e demonstração e, finalmente, propunham exercícios referentes aos assuntos estudados.

O segundo período foi da vigência do movimento Matemática Moderna em que se defendeu uma Matemática com ênfase na atividade do aluno; buscou-se a linguagem dos conjuntos, como a linguagem unificadora de toda a Matemática ensinada e, a organização das demonstrações “em duas colunas”- na primeira coluna, para apresentar os argumentos que se usam na demonstração e na segunda, as respectivas justificações. A característica dominante nos livros didáticos desse período foi dar ênfase maior aos conjuntos, às estruturas e aos morfismos.

O terceiro período tem como característica principal o abandono pelos professores, do ensino da Geometria; o surgimento de fortes críticas por parte de pedagogos e psicólogos contra formalizações na Matemática escolar e, por conseguinte, a aversão à dedução e à demonstração. A característica típica dos livros didáticos dessa época, segundo Gouvêa (1998, p. 46) é apresentarem

“somente as principais demonstrações, as mais usadas, quais sejam, as de Pitágoras e Tales”.

4- Tojo (2006)

Esta autora teve por objetivo analisar livros didáticos sobre a abordagem proposta para o ensino de alguns tópicos da Geometria. Tojo (2006) servindo-se da organização praxeológica de Chevallard (1988), centrou-se nas tarefas propostas, nas técnicas, tecnologias; nos discursos teóricos envolvidos no desenvolvimento do tema congruência e na organização de conteúdos em três livros didáticos recomendados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Nos resultados da análise, a autora destaca que:

- No livro “Educação Matemática” a abordagem da congruência de figuras é com base nas transformações geométricas; há valorização de atividades empíricas e de manipulação, o que faz com que a construção do conceito de congruência pelo aluno seja pela experiência. Afirma que não existe rigor no tratamento matemático, e os exercícios são para justificar em língua natural ou construir triângulos congruentes.
- No livro “Matemática é tudo”, a abordagem da congruência de triângulos foi feita na base de construções, servindo-se de régua e transferidor. São destacados os enunciados das propriedades ou teoremas; há rigor na apresentação dos conteúdos, no uso dos termos e símbolos; constam exercícios de demonstração e há mobilização de conceitos anteriores nas atividades de congruência; não usa a linguagem das transformações isométricas para tratar da congruência.
- No livro “Matemática, pensar e descobrir”, a apresentação dos casos de congruência de triângulos é direta, sem propostas de atividades empíricas nem de construção; serve-se da sobreposição e coincidência de lados e ângulos para a introdução da congruência. (TOJO, 2006, p. 73-74).

5- Pietropaolo (2005)

Pietropaolo (2005) investigou a necessidade e a acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica, bem como as implicações que essa inovação traz aos currículos de formação inicial de professores. O autor utilizou como metodologia a pesquisa bibliográfica e documental e a realização de entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática e com professores da Educação Básica, cuja prática profissional incluía algum tipo de trabalho envolvendo provas.

Assim afirma que, em outros países, há muita pesquisa envolvendo provas na Educação Básica, mas, segundo seu ponto de vista, não parecem estar alicerçadas em uma teoria consistente.

Os resultados de sua pesquisa mostram que os entrevistados eram favoráveis à inclusão das provas nas aulas de Matemática, desde o Ensino Fundamental, mas, outros defendiam um trabalho mais voltado às verificações empíricas para se chegar à formalização no Ensino Médio. O autor vê “a prova como um conteúdo e como recurso pedagógico bastante rico nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, desde que se admita um sentido mais amplo para essa palavra.”

Para o autor:

Não caberia a simples reprodução – pelo aluno ou professor – das provas presentes nos livros, mas sim o “fazer matemática” em sala de aula, envolvendo assim, experimentações conjecturas, argumentações. Mas, para tal, o professor precisaria ter uma formação que levasse em conta esse princípio. (PIETROPAOLO, 2005, p. 9-10).

Um dos aspectos que aborda em seu trabalho é a discussão sobre o significado de prova e demonstração à luz de alguns pesquisadores, como Godino e Récio, (apud PETROPAOLO, 2005); Reid, (apud PIETROPAOLO 2005) e outros.

Para Godino e Récio, (1997); Reid, (2002) citados por Pietropaolo (2005) as análises dos significados de prova e da demonstração para as pesquisas que envolvem essa temática, são fundamentais. Pietropaolo (2005, p. 49) refere que

esses pesquisadores distinguem as características de prova em diferentes contextos institucionais: no cotidiano, nas ciências empíricas, na Matemática escolar, na Matemática profissional, em lógica e em alicerces da Matemática. Mas, salienta que, em todos eles, há algo em comum: “a procura pela verificação de afirmações por meio de argumentos, ainda que estes possam ser articulados de maneiras distintas e por procedimentos diferentes”.

Afirma que, apesar de se usar o termo demonstração como sinônimo de prova, sobretudo em Matemática, alguns educadores fazem distinção entre os dois termos. Para tal recorre ao dicionário para nos apresentar o seguinte:

Prova (gr. *τεχνηριον*; lat. *Pobatio*; ingl. *Proof*; franc. *Preuve*; al. *Beweis*) Um procedimento próprio para estabelecer um saber, isto é um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: o mostrar ad óculos uma coisa ou um fato, o exhibir de um documento, o trazer um testemunho, o efetuar uma indução são P. como são P. as demonstrações da matemática e da lógica. O termo é, portanto, mais extenso do que demonstração (v): as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações (ABBAGNANO 1982, apud PIETROPAOLO, 2005, p. 49).

Pietropaolo (2005, p. 49) afirma que no âmbito da Matemática, *prova e demonstração* são, em geral, sinônimos e não precisam de adjetivação: “se uma prova foi plenamente aceita pela comunidade de matemáticos, então ela teria o *status* de rigorosa [...]”. O próprio autor em seu trabalho de pesquisa usa os dois termos *prova e demonstração* como sinônimos:

É importante assinalar que neste capítulo utilizaremos salvo indicação em contrário, as palavras prova e demonstração com os significados expressos no parágrafo anterior, ou seja, como sinônimos, uma vez que vamos recorrer a argumentos elaborados por matemáticos, não necessariamente professores. (PIETROPAOLO, 2005, p. 49).

A respeito das atuais tendências no ensino das provas matemáticas, Pietropaolo (2005) afirma:

Os mais recentes currículos de alguns países pretendem resgatar a importância das provas e implementá-las, visto que esse assunto foi sendo cada vez menos enfatizado nas salas de aula. Os currículos brasileiros também fazem indicações nesse sentido, embora de maneira bem mais tímida. Consideram que deve haver prudência, para não repetir erros passados, sugerindo também um

trabalho com as provas empíricas. Todavia, não assumem claramente se se deve chegar às provas formais na Educação Básica, contrariamente à posição dos antigos currículos brasileiros e a dos atuais de outros países como França e Inglaterra. (PIETROPAOLO, 2005, p. 209).

Pietropaolo (2005, p. 210) defende que “o ensino da prova deve ser desenvolvido como processo de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutações, de aplicação e de comunicação.” Baseando-se nos resultados de campo com professores da Educação Básica e de pesquisadores em Educação Matemática participantes da pesquisa, o autor defende um ensino da prova com enfoque heurístico, ou seja, um tratamento que encare a demonstração, como argumento convincente e como meio de comunicação entre os alunos, tratamento esse das demonstrações que foge de uma apresentação meramente dogmática do conteúdo.

Ainda o autor aponta (p. 210) que os educadores matemáticos que participaram de sua pesquisa defendem que o trabalho com provas deve ser um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação e comunicação, com sentido mais largo que não inclui necessariamente o *status* de rigorosa. Até os professores da Educação Básica chegaram a afirmar “[...] esse processo deveria começar pela informalidade, depois passar pelas provas “semi-formais” antes de se propor as “formais””. (PIETROPAOLO 2005, p. 212). A corroborar sua ideia Pietropaolo afirma:

[...] um dos critérios de análise de livros didáticos do plano nacional do livro didático do MEC é justamente verificar a existência ou não de articulação do trabalho com as verificações empíricas de teoremas e as respectivas demonstrações. Desse modo, existem no mercado brasileiro algumas publicações propondo caminhos para a construção de inferência e dedução matemática desde o Ensino Fundamental. (PIETROPAOLO, 2005, p. 212).

O autor não descarta a possibilidade de se discutir com os alunos algumas demonstrações rigorosas, defendendo que deve haver certa discussão nesse sentido sem, porém, ser o enfoque das atividades da prova no Ensino Básico.

O contato com alguns dos resultados das pesquisas faz-nos pensar na realidade do ensino e aprendizagem da Geometria em escolas moçambicanas,

quer dizer, até que ponto essas reflexões refletem-se na realidade educacional de Moçambique? Mas dadas as dificuldades em levar a cabo a pesquisa de campo neste momento, poderá ser útil como primeiro passo, pesquisar as propostas de ensino da Geometria em livros didáticos utilizados em escolas moçambicanas, sobretudo como por exemplo, as propriedades e teoremas de objetos geométricos, como os triângulos, são abordados.

1.2 Reflexões teóricas sobre argumentação, prova e demonstração

Investigações voltadas à problemática do ensino e aprendizagem da argumentação, prova e demonstração em Matemática têm conquistado espaço atualmente no seio da Comunidade da Educação Matemática. Essas pesquisas, tanto se concentram no prognóstico da cognição individual dos alunos como nas competências em produzir provas, no ensino e aprendizagem da prova matemática nas aulas regulares de Matemática, bem como na análise de material de ensino (HEINZE et al., 2008, p. 443).

Como salientam Mariotti e Balacheff:

O papel e a importância atribuída à argumentação e prova na última década levou a uma enorme variedade de abordagens de investigação nesta área. A vivacidade nesta área é testemunhada pelo número de contribuições apresentadas em conferências internacionais, dos artigos publicados em principais revistas especializadas e em dissertações e teses de doutorado abordando o assunto das demonstrações (MARIOTTI; BALACHEFF, 2008, p. 341)

Vários pesquisadores apontam o valor das provas e demonstrações, tanto em Matemática como em Educação Matemática. Desse modo, Rav (1999, apud HANNA e BARBEU, 2008, p. 346), considera que as demonstrações em Matemática são indispensáveis para a ampliação do conhecimento matemático que são “o coração da Matemática, o real caminho para a criação de ferramentas analíticas e catalisador do conhecimento”.

Conforme cita a autora, o próprio ato de conceber uma demonstração contribui para o desenvolvimento da Matemática. Provas e demonstrações produzem novos conhecimentos matemáticos, novas relações contextuais e novos métodos de resolver os problemas.

O ensino e a aprendizagem da argumentação, da prova e da demonstração vêm sendo objeto de muita discussão entre pesquisadores, sobretudo, quanto ao papel que a atividade deveria desempenhar na Educação Matemática (HANNA, 2000), e o tipo de enfoque que se poderia dar em sala de aula (HEINZE, 2004). Mas, para Hanna (2000), o maior foco de conflito nas discussões sobre o tipo de enfoque a dar à atividade das demonstrações está relacionado à visão do movimento dos anos 1950 e 1960, em que se defendia o ensino da Matemática voltado ao rigor, portanto, com a Matemática escolar carregada de muito rigor nas demonstrações.

Boero (1996 apud ALMOULOU, 2007a) na pesquisa que realizou com alunos da 8ª série, cujo problema consistia em verificar se a maioria dos alunos daquele nível de escolaridade poderia produzir teoremas (conjecturas e provas) se colocados em condições ideais para tal, o autor conclui que isso é possível desde que: (1) durante a produção da conjectura, o aluno trabalhe sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa entremeada de justificações da plausibilidade de suas escolhas; (2) se durante a etapa seguinte da prova, o aluno organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (“argumentos”) produzidas durante a construção de acordo com uma corrente lógica. (ALMOULOU, 2007a, p. 3).

Pesquisadores como Pedemonte (2007); Antonini e Mariotti (2009); Douek (2009), entre outros, defendem que a exploração da relação entre argumentação e demonstração é de extrema importância para o desenvolvimento da proficiência dos alunos em atividades de demonstração, desde que sejam preparados inicialmente a produzir conjecturas e avançar com algumas justificativas. Balacheff (1999) é contra essa posição, pois vê a argumentação como um obstáculo epistemológico para a aprendizagem da demonstração, dado que a argumentação é um processo social aberto, e a demonstração obedece a regras predefinidas.

Heinze (2004), em uma pesquisa empírica na qual o estudo era norteado por três questões, a saber: (1) *como as provas de Matemática estavam sendo ensinadas nas aulas na Alemanha*; (2) *Que aspectos eram enfatizados pelos professores nesse processo de prova, e, se* (3) *existiriam lacunas no processo de prova ou elementos que são menos enfatizados*, propõe um modelo para ser implementado em sala de aula para a produção das demonstrações que considera adequado. O modelo proposto comporta as seguintes fases:

Fase 1: exploração da situação-problema, geração de uma conjectura e a identificação dos diferentes tipos de argumentos para a plausibilidade dessa conjectura.

O autor considera essa fase: **bem-tratada**, se todos os elementos foram apresentados pelos estudantes; **tratada**, se alguns dos elementos forem dados pelo professor ou a fase é muito curta; **tratada-mal**, se for o professor quem realiza a primeira fase, e **não tratada**, para os outros casos.

Fase 2: consiste em uma formulação precisa das conjecturas, de acordo com as convenções textuais compartilhadas. Considera: **bem-tratada:** se os alunos formularam a conjectura (eventualmente, corrigidos pelo professor); **tratada:** se apenas for o professor quem dá a formulação das conjecturas; **mal-tratada:** se houver erros na versão final das conjecturas, e, **não tratada:** não há formulação da proposição a ser provada.

Fase 3: é de novo uma fase exploratória, baseada nas conjecturas formuladas, com o objetivo de identificar argumentos adequados à conjectura e ao planejamento de uma estratégia de prova. Para esta fase, o autor distingue quatro subcategorias:

- (1) Referência aos pressupostos, (2) a investigação das hipóteses, (3) coleta de informações e (4) a produção de uma ideia de prova.

Mais uma vez, o autor classifica em: **bem-tratada** se, pelo menos, três das subcategorias forem observadas; **tratada:** se duas dessas subcategorias forem

observadas; **tratada-mal**: há apenas uma dessas subcategorias; **não tratada**: em todos os outros casos.

Fase 4: com base no esquema montado para a prova e selecionados os argumentos da fase 3, segue-se a combinação desses argumentos em uma cadeia dedutiva que constitui um esboço da prova final. Esta fase pode ser realizada apenas verbalmente ou em conexão com algumas observações escritas. É classificada: **bem-tratada**: estudantes (apoiados pelo professor) dão contribuições substanciais; **tratada**: é apresentada na maior parte ou exclusivamente pelo professor; **tratada-mal**: há grandes lacunas ou outras deficiências na cadeia dedutiva; **não tratado**: em todos os outros casos.

Fase 5: o autor considera como sendo a última fase, para o processo de provar em Matemática escolar. Aqui, a cadeia de argumentos da fase 4 é escrita, segundo as normas combinadas na respectiva sala de aula de Matemática. O autor destaca ser importante que esta fase dê uma visão retrospectiva do processo. É classificada em: **bem-tratada**: todos os passos são escritos sequencialmente com uma retrospectiva sumária do processo da prova; **tratada**: os mais importantes passos são escritos sequencialmente e há um retrospectivo resumo; **mal-tratada**: há apenas alguns argumentos escritos, mas não o retrospectivo resumo; **não tratados**: em todos os outros casos.

Para seguir o modelo, é preciso medir o tempo gasto para as diferentes fases e determinar a qualidade de cada fase com relação às categorias descritas no modelo, conforme salienta o autor.

Mas também há outra discussão que envolve pesquisadores em Educação Matemática, que é a relação entre argumentação e processo de aprendizagem da produção de uma demonstração.

Vincent, et al (2005); Douek (2009) interessaram-se pelo significado dos termos *argumento* e *argumentação*. Para Vincent et al.:

Um argumento pode ser definido como uma sequência de declarações matemáticas que visam a convencer, enquanto *argumentação* pode ser considerada como um processo no qual uma lógica matemática conectando discurso é desenvolvido. (VINCENT et al., 2005, p. 281. Tradução nossa).

Douek (2009) considera o *argumento* como razão ou razões oferecidas a favor ou contra uma proposição, parecer ou medida no qual se incluem argumentos verbais, dados numéricos, desenhos, etc. A *argumentação* consiste em um ou mais argumentos logicamente ligados. Para a autora a prova em si é uma argumentação. Douek (2009) considera o processo de produção da prova, como uma atividade cognitiva e socioculturalmente situada que envolve quatro modos de raciocínio, a saber:

1. Exploração heurística – ocorre quando alguém tenta interpretar uma proposição ou produzir uma proposição ou um exemplo;
2. Organização do raciocínio tornando explícito o fio de raciocínio que conecta as proposições – tenta-se perceber se a proposição é pertinente, buscando-se, desse modo, uma ligação coerente para convencer o interlocutor ou tentar compreender a proposição, ou o raciocínio. As ligações podem ser razões teóricas de validade. Esse raciocínio está, normalmente, aberto a diferentes caminhos e essa organização tem em vista a busca de argumentos parciais ou toda a argumentação destinada à produção da prova;
3. Produção de um texto que segue normas dedutivas da Matemática. Isso significa que depois que as ideias da demonstração sejam trazidas à luz, elas devem ser organizadas em um raciocínio dedutivo; e
4. Estruturação formal do texto para aproximar uma derivação formal. Segundo a autora, este modelo pode não ser seguido na totalidade do contexto escolar.

Ainda, segundo a autora, metodologicamente poderia dizer-se que as fases são ferramentas didáticas para organizar situações de ensino e aprendizagem em sequências com objetivos didáticos claros e ferramentas cognitivas para a análise da atividade do aluno.

As etapas de produção de uma demonstração em aula de Matemática propostas por Douek (2009), sobretudo, por Heinze (2004) são de extrema importância para nossa pesquisa porque nossa ideia não deve ser apenas uma mera distinção semântica entre prova e demonstração, e sim, uma distinção entre o processo da constituição de uma prova a que chamamos de demonstração e o produto final dessa atividade a que chamamos de prova.

Segundo Montoro (2007), historicamente, a Matemática deixou de estar relacionada apenas a problemas práticos, para ser uma ciência dedutiva que trabalha com definições e conceitos, relações entre os conceitos e suas propriedades. A demonstração é o modo de argumentação aceito na comunidade matemática para confirmar essas propriedades. Para a autora, um aspecto que distingue a demonstração matemática de uma argumentação, em geral, é a necessidade de (a demonstração matemática) existir em relação a uma axiomática explícita. Desse modo, segundo a autora, para os matemáticos não haveria diferença entre demonstrar ou justificar uma afirmação, ambos os termos significariam deduzir a validade, mediante raciocínios logicamente válidos da axiomática pertinente.

O termo demonstração utiliza-se em âmbitos sociais e profissionais mais diversos. Um dos significados pode ser “realizar a ação efetiva que evidencia aquilo que se pretende ver” (MONTORO, 2007, p. 1), por exemplo, o movimento demonstra-se andando.

Montoro (2007, p. 1) salienta que, por outro lado, a argumentação vem-se convertendo em uma ferramenta muito utilizada na construção de aprendizados em ciências, em geral. Entendendo-se por **argumentação**, qualquer discurso que se emprega para tornar algo claro, deduzir como consequência natural, um raciocínio que se emprega para convencer alguém daquilo que se afirma ou nega. Outro termo que a autora salienta, como presente na Educação Matemática é a **justificação**, como significado de prova convincente de algo e **justificar**, como provar algo com razões convincentes, testemunhas ou documentos, quer dizer, **justificação** é a forma mais geral de argumentação que não necessariamente converge ao termo **demonstração** no sentido matemático.

Não há um consenso entre os pesquisadores da Educação Matemática sobre o real significado com que se usam os termos prova, demonstração e argumentação. (Godino, 1997; Reid, 2005; Pietropaolo, 2005; Balacheff 2008).

A respeito da importância da argumentação para a proficiência na produção de demonstrações, Vincente et al. (2005) defendem que, durante a produção das conjecturas, o aluno trabalha progressivamente sua declaração mediante uma atividade argumentativa funcionalmente entremeada com justificações da plausibilidade de suas escolhas. Na fase da produção da prova, o aluno liga-se ao processo de uma forma coerente, organizando algumas das justificações ('arguments'), previamente produzidas na construção do esquema da cadeia lógica.

A relação entre argumentação e produção de uma prova na perspectiva cognitiva foi detalhadamente analisada por Pedemonte (2007). Em sua tese de doutorado cita que o desenvolvimento da ideia de *unidade cognitiva* é definido como uma espécie de continuidade entre a produção de conjecturas e o processo de produção de uma prova.

Pedemonte (2007) mostra que uma prova é mais acessível para os alunos se uma atividade de argumentação for desenvolvida previamente para produção de uma conjectura. Segundo a autora, esta argumentação pode ser utilizada pelos alunos na construção de uma demonstração, mediante uma organização feita baseada na lógica argumentativa previamente produzida.

Boero et al. (1996 apud PEDEMONTE, 2007), também, defendem que o raciocínio que ocorre durante a argumentação desempenha um papel crucial na produção da prova.

Para Balacheff (1991 apud CABASSUT, 2005) argumentação e demonstração não são da mesma natureza, pois o objetivo da argumentação é obter o acordo dos parceiros da intenção, mas, não, em primeiro lugar, para estabelecer a verdade de alguma declaração.

Balacheff (1999) considera que a argumentação constitui-se em um obstáculo epistemológico para a aprendizagem da demonstração e, mais especificamente, da prova Matemática por causa do conflito entre a prova

Matemática (demonstração) que deve ter uma relação com um sistema de axiomas e a argumentação que implica a liberdade de escolha da forma de convencer.

Alguns autores, sem esquecer as diferenças entre argumentação e prova, defendem que o foco deve ser as analogias que existem entre os dois processos e as possíveis implicações didáticas (ANTONINI; MARIOTTI, 2009). Na verdade, concordamos quando Douek (2009) afirma que “para fins de ensino e aprendizagem, a argumentação é um meio frutuoso para controlar a validade do raciocínio”. A autora defende que as atividades exploratórias e a justificação devem ser introduzidas nas fases iniciais do processo de ensino e aprendizagem da prova.

Entendemos o esquema que Douek (2009) apresenta como ferramenta metodológica para o processo de ensino e aprendizagem das demonstrações, como uma adaptação, para o ensino, do modelo de Boero (1999, apud HEINZE et al., 2008). O modelo distingue diferentes fases e dá uma visão da combinação de passos exploratórios empírico-indutivos e hipotético-dedutivos durante a produção de uma prova.

Conforme aponta Boero (1999 apud HEINZE et al., 2008), a primeira fase, é a produção de uma conjectura. Isso inclui a exploração de um problema que conduz a uma conjectura, bem como a identificação de argumentos para sustentar a prova. A segunda fase compreende a formulação precisa da proposição; a terceira fase combina a exploração das conjecturas, a identificação dos argumentos matemáticos para a sua validação e a produção aproximada da prova.

Para o autor, essas três fases constituem o trabalho “privado” do matemático, exploração privada que, até pode levar a erro, um anteprojeto que não é tornado público. Apenas as fases seguintes estão sujeitas à comunicação pública e incluem: a seleção e a combinação de argumentos coerentes em uma cadeia dedutiva; a organização desses argumentos, de acordo com os padrões matemáticos e; por vezes, a proposta de uma prova formal.

Heinze et al. (2008) afirmam que o modelo proposto para a produção de uma demonstração em que parte do processo não é apresentada ao público, mostra-se apenas a parte limpa e ordenada, dá apenas uma representação incompleta das atividades realizadas durante o processo da prova, não reflete o processo de solução, mas, simplesmente, mostra o produto. Heinze (2004) salienta que os matemáticos sabem, por meio de seu próprio trabalho, que o processo de produção de uma prova e a prova como um produto desse processo são distintos.

Às vezes o processo de provar um teorema pode demorar anos e até pode incluir várias abordagens que podem ou não conduzir a um sucesso. Em geral nenhum desses esforços pode ser visto no produto final, que está na prova escrita formalmente. Por conseguinte, para o ensino e a aprendizagem das demonstrações não é suficiente mostrar apenas o produto. É mais importante salientar o processo de prova. [...] (HEINZE, 2004, p. 42 tradução e o grifo é nosso).

Somos de opinião que uma simples apresentação das demonstrações em livros didáticos sem questões que levem os alunos e os professores a refletirem sobre o processo complexo da constituição de uma demonstração, terá provavelmente pouco sucesso no desenvolvimento das competências dos alunos e dos próprios professores na construção de uma demonstração. Tal como mostram os precursores da problemática do processo de ensino e de aprendizagem das demonstrações como Pólya (1954 apud MONTORO, 2007, p. 2), Lakatos (1976, apud MONTORO, 2007), Schoendfeld (1992, apud MONTORO, 2007), é preciso destacar que a denominada “demonstração final” de um teorema é o culminar de um processo, a apresentação limpa e ordenada de uma larga investigação nunca isenta de intuição, provas, argumentos, justificações, erros, refinamentos, etc. É isto que se deveria privilegiar nos livros didáticos: estimular que os utilizadores pautem por mais atividades de cunho exploratório que estimulam a exploração de propriedades que levem à formulação de conjecturas seguidas de sua validação por meio de demonstrações do que simples apresentação das provas já acabadas.

Para além dos níveis de categorização da evolução cognitiva dos alunos na produção de uma demonstração em Matemática, Hanna (2000) defende que, quando se tenta definir o papel da demonstração em uma sala de aula de maneira

sistemática, é conveniente considerar toda a série de funções que desempenha a prática de uma demonstração. A autora afirma que, em sala de aula, seria de esperar que uma demonstração refletisse todas as funções, mas que elas não são todas necessárias para a aprendizagem da Matemática no mesmo nível de escolaridade. Manin (1977 apud HANNA, 2000) defende que uma melhor demonstração é a que também ajuda a compreender o significado do teorema ou a proposição a ser provado: a ver não só a verdade, mas também por que é verdade. Ainda segundo a autora a prova pode mostrar a necessidade de uma melhor definição ou um rendimento algorítmico útil. Ela pode contribuir para a sistematização e comunicação de resultados ou para a formalização de um corpo de conhecimentos matemáticos. A autora apresenta a lista das funções da prova e demonstração segundo Bell (1976, apud HANNA, 2008):

- 1- *Verificação* (preocupação com a verdade de um enunciado)
- 2- *Explicação* (fornecimento das razões por que é verdade)
- 3- *Sistematização* (organização de diversos resultados num sistema dedutivo de axiomas, principais conceitos e teoremas)
- 4- *Descoberta* (descoberta ou invenção de novos resultados)
- 5- *Comunicação* (transmissão de conhecimento matemático)
- 6- *Construção* de uma teoria empírica
- 7- *Exploração* do significado de uma definição ou as consequências de um pressuposto
- 8- *Incorporação* de um fato conhecido em um novo quadro e sua visualização a partir de uma nova perspectiva. (HANNA, 2000, p. 8, tradução nossa).

Embora a autora liste oito funções para as demonstrações, ela defende, para que o aluno possa entrar no mundo da Matemática, ele poderá começar por conhecer as funções fundamentais que são a verificação e a explicação. No domínio da educação, seria de esperar que se valorizasse primeiro a explicação e, nesse caso, as provas que melhor ajudam a explicar.

1.3 Contribuições e importância da revisão bibliográfica para nossa pesquisa

As pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem da argumentação, provas e demonstrações na educação contribuirão no que se refere às diferentes perspectivas de ensino e aprendizagem da demonstração na Educação Matemática. Primeiro, ajudaram a começar a formar nossa própria concepção de prova e demonstração com base nos diversos pontos de vista avançados pelos pesquisadores e a direcionar nossa pesquisa.

A pesquisa de Carlovich (2005), por exemplo, foi para nós um modelo de análise de conteúdos das coleções analisadas e de clareza de como elaborar os critérios de análise de livros didáticos.

A pesquisa de Pietropaolo (2005) nos trouxe informações sobre as provas e as demonstrações sob dois pontos de vista diferentes: o dos professores e o do currículo da Educação Básica. O trabalho nos revelou a necessidade da ampliação do significado da ação de provar no contexto educacional. Apesar de não ter avançado com propostas concretas sobre o processo de produção da prova em uma sala de aula como fez Heinze (2004), o trabalho de Pietropaolo nos permitiu começar a imaginar as primeiras ideias de como a produção de uma demonstração em uma sala de aula poderia ser. Por conseguinte, como a produção de livro didático de Matemática poderia contemplar esse conteúdo, visto que algumas pesquisas mostram que o livro didático exerce uma forte influência no professor em sua forma de dar aulas. Além disso, Pietropaolo (2005), ao analisar as concepções dos professores, mostrou a necessidade de mudanças curriculares nos cursos de graduação, já que professores e pesquisadores mencionaram durante a pesquisa a importância de se viver na graduação experiências de prova e demonstração similares às aquelas que vão ensinar aos alunos.

Mello (1999) traz contribuições valiosas sobre como deveria ser o planejamento de aulas cuja finalidade é o processo de ensino e aprendizagem da prova e demonstração em aulas de Matemática. A autora mostra que um trabalho que leva em consideração a formulação de conjecturas e as devidas justificativas

pode possibilitar a evolução do discurso do aluno frente às situações de provas ou demonstrações. Esta visão também foi enfatizada por Pedemonte (2007), Antonini e Mariotti (2009) e Douek(2009). Estes autores discutem a relação entre a argumentação e a produção da prova e a demonstração por parte de alunos. Mas, os autores, como Balacheff (1999), Duval (1999) mostram a diferença existente entre a argumentação (que é um processo socialmente aberto) e a demonstração (que é um processo ligado a um grupo socioprofissional) que exige observar certas regras de sua produção.

CAPÍTULO 2

PROBLEMÁTICA

2.1 Uma síntese das reflexões sobre os problemas de ensino e aprendizagem de Geometria com enfoque na prova e demonstração

A Geometria é um ramo importante da Matemática, tanto como objeto de estudo como instrumento para outras áreas, mas várias pesquisas apontam a Geometria como um dos problemas de ensino e aprendizagem (ALMOULLOUD, 2008).

Tradicionalmente, o curso de Geometria também é visto como o primeiro momento em que os alunos têm oportunidade de encontrar um sistema matemático de postulados, teoremas e definições e, por mais de um século, a Geometria vem sendo considerada o curso ideal para os alunos aprenderem a fazer provas e demonstrações. (USKIN 1980 apud HERBST; MIYAKAWA, 2008, p. 469). Mas, as demonstrações em Matemática constituem uma tarefa cognitivamente complexa (MONTORO, 2007), e é um dos temas mais difíceis para os alunos aprenderem (HEINZE, 2004).

Ao relatar a situação do ensino de Geometria no Brasil, Almouloud e Mello (2000), afirmam que a Avaliação Nacional Básica (SAEB), de 1993 constatou que apenas 3,1% dos alunos da 5ª série e 5,9% dos alunos da 7ª série conseguiram acertar entre 50% e 100% das questões propostas de Matemática; quanto ao corpo docente destacam que “Até a oitava série, embora quase todos os professores achem que a Geometria é importante para merecer um lugar em

todos os níveis do ensino, não há concordância quanto ao conteúdo ou à sequência do ensino da geometria.” (ALMOULOUD e MELLO, 2000, p. 2).

Como salientamos na revisão da literatura, Balacheff (1988, apud GRAVINA, 2001) categoriza as provas produzidas pelos alunos em dois grupos: provas pragmáticas e provas intelectuais. Defende que, para que os alunos entendam o significado de uma demonstração e sejam capazes de produzir uma demonstração, seja necessário que se garanta que passem por esses dois níveis. O autor reconhece que “A elaboração de uma demonstração requer uma organização e um *status* particular de conhecimentos, explicitados e aceitos por uma comunidade, que não se autoriza mais a buscar onde quiser os argumentos que utiliza. [...]” (BALACHEFF 1987, apud GRAVINA 2001, p. 66). Balacheff defende que

A exigência de provas precisa, portanto, poder encontrar seu lugar desde as práticas matemáticas das primeiras classes, aceitando que sejam reconhecidas como provas outras coisas que não as demonstrações no sentido estrito. Será preciso levar em consideração a natureza da racionalidade dos alunos e as condições de sua evolução, mas também encarregar-se da análise didática dos critérios aceitos de prova que podem evoluir no decorrer da escolaridade. (BALACHEFF, 1987, apud CARLOVICH 2005, p. 49)

Portanto, o autor afirma que, tendo em conta o nível de racionalidade dos alunos, as atividades das provas empíricas podem ser aceitas no 3º Ciclo do Ensino Primário (11-13 anos de idade) de Moçambique. Mas que da 8ª série em diante, já se deveria exigir que os alunos não se conformassem apenas com a verificação experimental para estabelecer a validade dessas propriedades. Isto é, dever-se-ia mostrar as limitações desse modo de validar as propriedades geométricas e considerar as demonstrações formais, como o único meio de validar as conjecturas estabelecidas. Então, utilizando a tipologia de prova proposta por Balacheff, pretendemos analisar, como são validadas as propriedades dos triângulos nos diferentes livros didáticos contemplados na presente pesquisa.

O livro didático é um elemento essencial nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Os documentos oficiais recomendam seu uso e, nossa experiência mostra a dependência que muitos professores têm dele ao dar

suas aulas. Desse modo, acreditamos que, perceber se os autores consideram as ideias discutidas pelos pesquisadores, pode ser uma das formas de observarmos quais são as qualidades e defeitos desse material, que é usado em escolas de Moçambique.

2.2 Organização do currículo

Nesta parte, passamos a apresentar de forma breve como está estruturado o sistema Nacional de Educação de Moçambique

Segundo a Lei 6/92 de 6 de maio de 1992 que reajusta a Lei 4/83 de 23 de março de 1983, o SISTEMA NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM MOÇAMBIQUE em seu Artigo 6 define que a Educação estrutura-se em ensino pré-escolar, ensino escolar e ensino extraescolar. O ensino pré-escolar é frequentado por crianças com idade inferior a 6 anos; o ensino escolar a partir dos 6 anos.

Segundo a mesma lei, em seu Artigo 8, o ensino escolar compreende: Ensino Geral, Ensino Técnico-Profissional e Ensino Superior. Considerado o eixo central do Sistema Nacional de Educação, o Ensino Geral compreende dois níveis, nomeadamente, Primário e Secundário.

Ainda a mesma lei estabelece que o Ensino Geral seja frequentado, em princípio, a partir do ano letivo em que a criança completa 6 anos de idade, sendo crianças com essa idade matriculadas automaticamente na 1ª classe (série).

O Ensino Primário prepara os alunos ao acesso ao ensino secundário, compreende as sete primeiras classes (séries) e está subdividido em dois graus: (1) Primeiro grau, da 1ª a 5ª classes (séries); (2) Segundo grau, da 6ª a 7ª classes (séries). (Artigo 11). A Reforma Curricular de 2004 subdivide o Ensino Primário em três ciclos, sendo: 1º Ciclo, da 1ª a 2ª séries; 2º Ciclo, da 3ª a 5ª séries e, 3º Ciclo, da 6ª a 7ª séries.

Por sua vez, o Ensino Secundário compreende cinco classes (séries) e, segundo o Artigo 12 da Lei 6/92 em referência, subdivide-se em dois Ciclos: 1º Ciclo, da 8ª a 10ª séries; 2º Ciclo, 11ª e 12ª classes (séries). Este nível de ensino é visto como visando à consolidação, ampliação e aprofundamento dos

conhecimentos dos alunos nas Ciências Matemáticas, Naturais e Sociais e nas áreas da Cultura, da Estética e da Educação Física.

Por outro lado, o Ensino Técnico Profissional é visto como constituindo o principal instrumento para a formação profissional da força de trabalho qualificado necessária para o desenvolvimento económico e social do país e compreende três níveis: Elementar, Básico e Médio.

No que tange à formação de professores, a Lei 6/92 estipula que se estruture em três níveis, nomeadamente:

1. *Nível básico*: realiza-se a formação de professores do Ensino Primário do 1º grau. As habilitações de ingresso neste nível correspondem à 7ª séries + 3 anos;
2. *Nível médio*: realiza a formação inicial de professores do Ensino Primário e dos professores das práticas de especialidade do ensino Técnico-profissional. As habilitações de ingresso neste nível correspondem a 10ª série de ensino geral ou equivalente, 10ª + 2 anos.
3. *Nível superior*: realiza a formação dos professores para todos os níveis do ensino. As habilitações para o ingresso neste nível correspondem a 12ª série do ensino secundário geral

Portanto, qualquer produção didática deve levar em consideração as características dos sujeitos professores em termos de sua formação académica.

Com exceção das escolas do Ensino Primário do 3º Ciclo (6ª e 7ª séries) e o Ensino Secundário, bem como outros níveis e subsistemas da Educação. Em Moçambique, as escolas do Ensino Primário do 1º e 2º Ciclos são de dois ou três turnos, conforme a demanda. Para as escolas de três turnos, o Plano Curricular do Ensino Básico (PCEB) prevê uma carga horária de 4,5 horas por semana, correspondendo a 6 aulas (tempos) de 45 minutos cada por semana na disciplina de Matemática. Para as escolas com dois turnos o PCEB prevê uma carga horária para a disciplina de Matemática de oito aulas de 45 minutos cada por semana. Para 3º ciclo (6ª e 7ª séries), o PCEB prevê uma carga horária de seis aulas de 45 minutos cada e em nível do Ensino Secundário Geral do 1º Ciclo (8ª, 9ª e 10ª séries) o Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (PCESG) prevê cinco e

quatro aulas de 45 minutos cada para 8^a série/classe e 9^a e 10^a séries/classes, respectivamente (INDE e MEC, 2007, p. 69-70).

Quanto ao 2º Ciclo do Ensino Secundário, a carga horária da disciplina de Matemática varia entre três e cinco aulas por semana de 45 minutos cada, conforme a área de concentração ligada ao curso superior a que se destina.

O calendário escolar em Moçambique compreende 178 dias úteis, equivalente a 37 semanas letivas. (Programas do Ensino Básico, 2003).

2.3 O ensino da Geometria em escolas moçambicanas (do Ensino Primário e Secundário do 1º Ciclo) com enfoque nas demonstrações das propriedades dos triângulos

Os programas do Ensino Primário (1^a a 7^a série/classes) para o Ensino da Matemática defendem que, na Educação Matemática, atualmente os conhecimentos matemáticos tomam pouco valor como resultados, mas mantêm seu valor, como modelo de desenvolvimento lógico-formal. Valorizam o desenvolvimento do raciocínio. Como consequência desse olhar, esses programas enfatizam, o que chamam de jogos matemáticos, bem como as questões sobre séries numéricas, números primos e, sobretudo, geometria dedutiva. (PCEB, 1º Ciclo, 2003, p. 230; 3º Ciclo, 2003, p.376). Quanto à perspectiva metodológica, os programas defendem que o aluno é o centro de todo o processo de ensino e aprendizagem, é o objeto que se pretende transformar.

No que diz respeito à introdução do ensino e aprendizagem da demonstração em Geometria, os programas em vigor assinalam seu início no final do 3º Ciclo do Ensino Primário, especificamente, na 7^a série/classe, sendo o teorema sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo o primeiro objeto de demonstração. Depois segue a identificação do ângulo externo em um triângulo, como o suplemento ao ângulo interno adjacente a ele; a verificação de que em um triângulo isósceles a altura, a mediana e a bissetriz são coincidentes; a verificação de que em um triângulo isósceles os ângulos da base

são congruentes (o documento usa o termo iguais), bem como a verificação de que em um triângulo equilátero, os três ângulos são congruentes.

Portanto, verificamos que, no final do terceiro ciclo do ensino primário, prevê-se que o aluno comece a ver as primeiras demonstrações de propriedades e teoremas envolvendo triângulos, mas os programas não especificam como essas propriedades e teoremas deverão ser abordados nesse nível de escolaridade.

Já no 1º Ciclo do ensino secundário – 8ª, 9ª e 10ª séries (classes) –, no prosseguimento ao estudo da Geometria plana e, particularmente, a Geometria dedutiva com enfoque nas propriedades dos triângulos, os programas prevêem que, na 8ª série/classe, entre outros tópicos da Geometria, os alunos vejam a congruência de figuras geométricas; os critérios de congruência de triângulos; o Teorema de Pitágoras e a respectiva demonstração via gravura; aplicação do Teorema de Pitágoras; aplicação dos critérios de congruência de triângulos na resolução de problemas. Mas não se faz nenhuma referência metodológica sobre como os critérios de congruência de triângulos deverão ser abordados.

- Na 9ª série /classe, na Geometria plana, prevê-se entre outros assuntos: o teorema sobre os ângulos internos de um quadrilátero e sua aplicação; as propriedades dos trapézios, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado; as homotetias: ampliação e redução de figuras planas (triângulo, retângulo, quadrado); o conceito de semelhança de triângulos; os critérios de semelhança de triângulos; o teorema de perímetro e áreas; o Teorema de Thales e sua aplicação; os casos de semelhança de triângulos retângulos; demonstração do Teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos; relações métricas em triângulo retângulo. Para além do Teorema de Pitágoras que, desta feita, será demonstrado recorrendo-se à semelhança dos triângulos, para os restantes teoremas o programa orienta que o professor envolva os alunos no processo experimental por medição e, em seguida, se institucionalize, com base nessas experimentações o teorema ou propriedade, seguida de alguns exercícios de aplicação.

Como destacamos ao longo da apresentação das propostas dos conteúdos relacionados com a prova e demonstração das propriedades de triângulos a serem ensinados em escolas de Moçambique, não há propostas claras nem aos autores de livros didáticos, nem aos professores, de como as demonstrações deverão ser apresentadas ou feitas e muito menos, há alguma discussão sobre o lugar que a argumentação, prova e demonstração devem ocupar na grade da Matemática escolar.

Os programas em referência contrastam com as principais correntes da Educação Matemática que clamam pela valorização do papel das provas e demonstrações em prol da formação multifacetada do aluno. Também fazendo algum paralelismo com os parâmetros curriculares de alguns países, notamos que os documentos da Educação de Moçambique quase não têm nada de especial quanto ao ensino e aprendizagem da Geometria. Por exemplo, notamos que, no Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) trazem algumas recomendações claras sobre como deve ser o ensino da Geometria nos diversos ciclos de Ensino: tornam claro que, até certo nível, deve-se mostrar ao aluno a limitação da verificação experimental para a validação de propriedades geométricas e a necessidade de considerar as demonstrações, como o único que garante a validação de propriedades geométricas, embora as atividades de natureza exploratória envolvendo experimentações sejam importantes em Geometria, apenas para o levantamento de conjecturas.

Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. (BRASIL, 1998, p. 26).

E o documento continua afirmando que:

Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. (BRASIL, 1998, p. 26).

Portanto, percebemos que os programas de ensino de Matemática em Moçambique ainda não contemplam essas reflexões tão necessárias quanto o próprio processo de ensino e aprendizagem.

2.4 Descrição do problema, questão da pesquisa e objetivos do trabalho

O papel e a importância atribuída à prova e demonstração são evidenciados por inúmeras pesquisas, congressos, conferências internacionais e edições especiais de revistas especializadas apenas abordando esse tema. Hanna (2000) na introdução de seu artigo “Proof, explanation and exploration: an over view” destaca que tem havido um aumento de artigos sobre o ensino e aprendizagem da prova entre 1990 e 1999. As principais revistas de Educação Matemática publicaram mais de uma centena de trabalhos de investigação sobre o tema, o que, segundo a autora, é indício de que a prova e a demonstração são certamente uma questão pertinente à Educação Matemática.

A autora afirma que uma das razões é com a própria natureza da prova, destacando que isso não é uma surpresa, visto que certas evoluções, tanto das Matemáticas como em Educação Matemática tem questionado o papel da prova. Hanna (2000) afirma categoricamente que a prova como atividade matemática continua a merecer um lugar de destaque no currículo da Matemática, “uma das nossas tarefas fundamentais como educadores matemáticos, porém, é compreender o papel da prova no âmbito do ensino, para que possamos melhorar a sua utilização em sala de aula” (HANNA, 2000, p. 5, tradução nossa).

Em seu artigo “The proving process in mathematics classroom: method and results of a vídeo study”, Heinze (2004) concorda com a ideia de Hanna (2000), ao afirmar que raciocínio, prova e argumentação na sala de aula de Matemática é uma questão importante de pesquisa na Educação Matemática. Segundo o autor, nos últimos anos, observa-se um crescente número de investigação empírica sobre o tema. Além disso, raciocínio e argumentação em Matemática foram incorporados aos estudos comparativos internacionais como TIMSS e PISA (cf.

BAUMERT et al., 1997; DEUTSCHES PISA-KONSORTIUM, 2001). Mas, o autor salienta que a demonstração em Matemática é um dos temas mais difíceis aos alunos para aprender. Pesquisas mostram que a opinião dos próprios alunos sobre demonstrações e suas habilidades para provar são significativamente influenciadas pela especificidade da salas de aula de Matemática.

Em sua pesquisa de mestrado, Mello (1999) afirma que um dos problemas que favorece o fraco desempenho de alguns alunos em conceitos e habilidades geométricas são as escolhas didáticas de seus professores quando ensinam Geometria.

Livros escolares, como recurso importante no suporte ao ensino e aprendizagem em muitos países, têm recebido crescente atenção da comunidade internacional de educação nas últimas décadas. Na Educação Matemática, esse interesse começou a destacar-se mais a partir de 2004 quando, no 10º Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME – 10) organizou-se um grupo de discussão especificamente centrado nos livros didáticos (DG10) com análise de livros e outro material didático de cerca de 50 países. (FAN; ZHU, 2007, p. 61-75). Os autores salientam que várias pesquisas vêm revelando que a forma de ensinar adotada pelos professores em salas de aula e aquilo que está incorporado nos livros usados em suas turmas são similares.

Os documentos oficiais da Educação em Moçambique, tais como o Plano Curricular do Ensino Secundário Geral (INDE e MEC, 2007), afirmam que, no nível do Ensino Secundário Geral (ESG), verifica-se fraca articulação horizontal e vertical entre os programas e as disciplinas; que a aprendizagem é baseada, fundamentalmente, na memorização de conceitos, fórmulas e procedimentos. Ainda o documento observa que a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento de competências por meio da observação, visualização, experimentação, dedução e generalização parecem não fazer parte da prática do dia a dia na sala na aula (INDE e MEC, 2007, p. 5-6). O documento também salienta que as pesquisas realizadas no âmbito das reformas curriculares em curso em Moçambique, desde 2004, mostram que existem problemas na disciplina de Matemática, por exemplo, em Geometria. Mas não especificam quais são os tipos de problemas; no entanto, acreditamos que um deles pode ser que a

observação, a visualização, a experimentação, a dedução e a generalização não fazem parte da prática do dia a dia em sala de aula e, na Geometria, atividades de natureza exploratória, não são devidamente exploradas.

Tendo em conta que alguns resultados de pesquisa mostram que alunos têm dificuldades para lidar com provas matemáticas e algumas análises estatísticas mostram que as competências dos alunos em construir a prova são substancialmente influenciadas por fatores de aula (HEINZE, 2004); ainda tendo presente que o livro didático exerce forte influência na prática de ensino e aprendizagem, como fonte de referência e validação do saber a ser ensinado (BRASIL, 1998; FAN, ZHU, 2007), propusemos fazer uma pesquisa em torno da seguinte questão que consideramos ter espaço dentro do âmbito da Educação Matemática:

Como os livros didáticos em uso nas escolas (de Moçambique) apresentam a organização matemática e didática do objeto triângulo com enfoque na prova e demonstração?

Acreditamos que lançar mão da compreensão da estrutura didática e matemática dos livros didáticos, em uso nas escolas moçambicanas, pode ser útil para a análise e compreensão dos fenômenos de ensino e aprendizagem que dependem muito dos livros didáticos, particularmente, nos casos em que o livro didático é visto como depositário de toda a verdade científica a ser consumida pelos principais atores do processo de ensino e aprendizagem – o professor e o aluno.

Assim, propusemos como objetivos para o presente trabalho:

1. Analisar como os autores dos livros didáticos de Matemática da 6^a a 8^a séries/classes tratam os “triângulos”, quanto à demonstração de algumas de suas propriedades, bem como a relação de congruência de triângulos;
2. Analisar a organização matemática que é proposta para o estudo de algumas propriedades de triângulos.

2.5 Justificativa de escolha e sua relevância

Escolhemos “triângulo”, como objeto de estudo por acreditarmos que os “triângulos” possuem muitas propriedades passíveis de ser objeto de atividades exploratórias e investigativas que podem levar à formulação de conjecturas que, posteriormente, poderão ser objeto de demonstração. Além disso, os casos de congruência de triângulos têm muita aplicação na validação de propriedades envolvendo quadriláteros, polígonos regulares, bem como no estabelecimento de algumas das propriedades da trigonometria no triângulo.

Recorremos ao livro didático, como fonte de pesquisa porque, como salientamos baseados nas reflexões que fizemos resultantes da literatura, o livro didático exerce forte influência na atuação do professor em sala de aula e, como afirma Leinhardt (1994, apud MATEUS 2007), o livro é amigo das ideias, é um andaime para professor e alunos. E afirma:

Se livros são limitados e com um pouco mais que algumas coleções de exercícios e entremeados com algumas figurinhas, então tais livros deveriam ser redesenhados e expandidos. Se um livro é limitado, então alunos e professores deveriam ser encorajados a usar vários livros ao mesmo tempo. (LEINHARDT 1994 apud MATEUS 2007, p. 41).

Neste trabalho, partimos da ideia de que a forma como os livros didáticos apresentam e/ou representam os objetos de estudo tem uma grande influência na maneira, como os professores ensinam e o que exigem de seus alunos. Desse modo, a hipótese do nosso trabalho foi a seguinte: os livros didáticos, atualmente em uso, não diferenciam prova como processo, de prova como produto, isto é, não há diferenciação entre demonstração e prova.

2.6 Metodologia e Procedimentos de Pesquisa

Com vista a estudarmos a problemática do ensino da prova e demonstração em Moçambique, utilizamos como procedimento metodológico, para a coleta de dados, a pesquisa documental.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), a Pesquisa Documental ou Pesquisa Bibliográfica ou Histórico-Bibliográfica é aquela que se faz basicamente sobre a documentação escrita. Para esses autores, os documentos escritos apresentam-se estáveis no tempo, são ricos em fontes de informação e incluem nessa categoria: filmes, fotografias, livros, propostas curriculares, provas (testes), cadernos de alunos, autobiografias, revistas, jornais, pareceres, [...], listas de conteúdo de ensino, planejamentos, dissertações ou teses acadêmicas, entre outros.

Para Marconi e Lakatos (1990), a pesquisa bibliográfica tem como finalidade colocar o pesquisador em contato direto com tudo que foi escrito, dito ou filmado sobre determinado assunto, inclusive, conferências seguidas de debates transcritos por alguma forma, quer publicadas, quer gravadas.

Já para Manzo (1971 apud MARCONI e LAKATOS, 1990, p. 66), a bibliografia pertinente “oferece meios para definir, resolver, não somente problemas já conhecidos, como também explorar novas áreas onde os problemas não se cristalizaram suficientemente” permitindo ao cientista o reforço paralelo na análise de suas pesquisas ou manipulação de suas informações.

Ainda segundo Marconi e Lakatos (1990, p. 66) “[...] a pesquisa bibliográfica não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras.”

Para nosso estudo, a fonte de pesquisa é o livro didático de Matemática.

Chervel (1990, apud VALENTE, 2007) no artigo *História das Disciplinas Escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa*, destaca a importância dos livros didáticos como fontes de pesquisa. Segundo o autor, em dado período temporal, para o ensino de uma disciplina, todos os livros didáticos “dizem a mesma coisa, ou quase isso”, resultando no que o autor chamou de *fenômeno de vulgata*. Para o autor, o fenômeno de *vulgata escolar* manifesta-se pela forma como os livros e edições didáticas são concebidos: os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a organização da sequência de ensino e dos capítulos, o conjunto de exemplos fundamentais utilizados, o tipo de exercícios incorporados

nos livros são praticamente idênticos ou quase os mesmos, apresentando pouca variação. Essas variações justificam as diferenças entre autores ou edições. Afirma que “A similaridade entre essas produções é tão grande que o tema do plágio é comum entre os textos didáticos”. (CHERVEL 1990, apud VALENTE, 2007, p. 42).

Assim, para nossa pesquisa analisamos um livro da 6ª classe (o equivalente a 6ª série no Brasil) de Matemática que se usou por muito tempo em Moçambique, desde os meados de 1986 até 2004; analisamos um livro de 7ª série/classe em vigor desde 2005; três livros da 8ª série/classe (sendo dois da década 1990 até os anos 2000 e outro com edição datada de 2007).

A análise dos livros baseia-se (1) na noção de praxeologia de Chevallard (1999), (2) nas noções de registro de representação semiótica de Duval e (3) na classificação de provas proposta por Balacheff (1998). Com base em nosso referencial teórico, realizamos um levantamento da forma como os autores dos livros didáticos abordam o objeto matemático “triângulo”, com enfoque na demonstração de algumas de suas principais propriedades, bem como a relação de congruência de triângulos. Fizemos o levantamento das principais atividades de prova e demonstrações propostas nos materiais de ensino aos alunos sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.

2.7 Referencial Teórico

Nosso estudo fundamenta-se nos trabalhos de Nicolas Balacheff sobre processos de validação de provas, Raymond Duval sobre os registros de representações semióticas e Yves Chevallard sobre a organização *praxeológica*.

Usamos as ideias de Balacheff para analisar o processo de validação das provas constantes dos livros didáticos contemplados na presente pesquisa. As ideias de Duval vão nos subsidiar na análise dos registros de representação semiótica utilizados pelos autores dos livros didáticos, para apresentar as propriedades dos triângulos, as ideias de Chevallard servirão para analisar as

praxeologias didáticas e matemáticas nos livros selecionados para o presente estudo.

Desse modo, passamos a apresentar as principais ideias que nortearam o presente estudo à luz dos três autores.

2.7.1 Balacheff e os tipos de provas

Balacheff (1982 apud GOUVÊA, 1998) interessou-se pela problemática da “prova” e pelo significado da “demonstração”, como meio de validação das ideias matemáticas, e preocupou-se com o significado dos termos *argumentação*, *explicação*, *prova* e *demonstração*. Neste autor buscamos o significado desses termos em nossa pesquisa.

Assim, de acordo com Balacheff, entenderemos por:

Argumentação, qualquer discurso destinado a obter o consentimento do interlocutor sobre uma afirmação;

Explicação, uma argumentação em que o consentimento se busca a partir da explicitação da racionalidade da afirmação, e não através de outros tipos de argumentação;

As provas são explicações em que a explicitação da veracidade de uma asserção se realiza sob regras ou normas acordadas por uma comunidade determinada em um momento dado. Na comunidade matemática, essas normas estabelecem a apresentação de uma sucessão de enunciados, cada uma das quais é uma definição, um axioma, um teorema prévio ou um elemento derivado mediante regras pré-estabelecidas de enunciados que lhe precedem. Nesse caso as provas recebem o nome de **demonstração**. (BALACHEFF 1987, apud MONTORO, 2005, p. 2).

Segundo Carlovich (2005)

Chama-se demonstração uma prova que só pode ser aceita no seio da comunidade matemática. Ela é uma sequência de enunciados organizada segundo regras determinadas. Um enunciado é considerado como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que o precedem com a ajuda de uma regra de dedução tomada em um conjunto de regras bem definido. (BALACHEFF, 1987, apud CARLOVICH, 2005, p. 13, grifo na fonte).

Almouloud (2007a) também se apoia em Balacheff para distinguir explicação, prova e demonstração. A *explicação* situa-se no nível do sujeito e visa comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático.

[...] A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição “verdadeira” ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, Balacheff a chama, somente neste caso, de demonstração.

- As *provas* são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter estatuto de prova para determinado grupo social, mas para outro não. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:
- São as únicas aceitas pelos matemáticos
- Respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras tomadas num conjunto de regras lógicas
- Trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência. (ALMOULOU, 2007a, p. 3).

Ainda segundo Balacheff (1988, apud GRAVINA, 2001), as provas produzidas pelos alunos podem ser subdivididas em duas categorias: *provas pragmáticas* e *provas intelectuais*. As pragmáticas apoiam-se em conhecimentos práticos, valendo-se dos recursos de ação, por exemplo, desenhos, observação de figuras; e as *provas intelectuais* são as que se compõem de argumentos que implicam propriedades e relações entre propriedades, sua comunicação está caracterizada pela linguagem matemática.

O autor identifica quatro níveis de validação, sendo os três primeiros (empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico) enquadrados nas provas pragmáticas e o quarto nível (experiência mental) na categoria de provas intelectuais.

O *empirismo ingênuo* (*empirisme naïf*): consiste na verificação de alguns poucos casos, sem questionamento de sua particularidade, para a validação de uma propriedade. É considerado o primeiro passo no processo de generalização e, resiste ao longo do processo do desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo as circunstâncias em que as categorias de prova foram propostas,

No *empirismo ingênuo*, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de um certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem peremptoriamente que um hexágono tem 6 diagonais. (BALACHEFF, 1988, apud GRAVINA, 2001, p. 66).

Experiência crucial (expérience cruciale): trata-se de um processo de validação de uma proposição depois de se verificar um caso especial, geralmente, não familiar, quer dizer, é aquela na qual se usa um exemplo cuidadosamente selecionado por quem argumenta, tomando como representante da classe de objetos. Este procedimento de validação surge de uma atividade em que explicitamente é apresentado um problema de generalização.

Na *experiência crucial* os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares. (BALACHEFF, 1988, apud GRAVINA, 2001, p. 66)

Exemplo genérico (exemple générique): trata-se de um processo de validação de uma propriedade, após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos; é um procedimento de validação mediante operações ou transformações sobre um exemplo. O objetivo é explicitar as razões que validem a propriedade.

No *exemplo genérico* os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: “num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9...” (BALACHEFF, 1988 apud GRAVINA, 2001, p. 66).

Experiência mental (expérience mentale): trata-se de um processo de validação em que é feita uma construção cognitiva mais complexa, não fazendo uso de casos particulares, quer dizer, consideram-se exemplos que não são tomados, como elementos de convicção senão para ajudar a organizar a justificação ou como suporte de argumentação.

E finalmente, na experiência mental os alunos se desprendem do caso particular o que transparece na argumentação: “em cada vértice o número de diagonais é o número de vértices menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isto que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal”. (BALACHEFF 1987 apud GRAVINA 2001, p. 66).

Para Balacheff (1998 apud GRAVINA, 2001), o nível de experiência mental marca a transição entre a prova pragmática e a prova intelectual. É no nível de experiência mental que as ações interiorizadas confluem-se à generalização, livres de concretizações particulares, em gênese cognitivo da demonstração. O nível exemplo genérico é intermediário: ora na categoria de prova pragmática, ora na categoria de prova intelectual, conforme a natureza efetiva da ação sobre o exemplo ou dependendo da concretização feita. A passagem das provas pragmáticas para as intelectuais é marcada por uma evolução dos meios de linguagem, e o autor defende que, para que os alunos possam entender o significado de uma demonstração e serem capazes de produzir uma demonstração, é preciso passar por esses níveis.

Montoro (2007) considera dois tipos de provas intelectuais: **a experiência mental** e **a dedução formal** e, nesta última, a justificação baseia-se em operações mentais sem recorrer necessariamente a exemplos específicos, fazem-se inferências na base dos conhecimentos de propriedades e definições, realizam-se operações sintáticas com os enunciados que permitem transcender ao exemplo. (SIÑERIZ; FERRARIS, 2005 apud MONTORO, 2007).

Ao usar as ideias de Balacheff a respeito do tipo de provas e a forma de validação das propriedades geométricas, pretendemos estudar como os autores abordam as propriedades relativas a triângulos por meio da organização praxeológica, segundo Chevallard (1999), ou seja, pretendemos estudar:

1. A forma como as propriedades são validadas;
2. As funções (principais) da prova que as atividades propostas pelos autores de cada livro preenchem; e

3. O tipo das provas (segundo a tipologia de Balacheff) presentes no estudo das propriedades dos triângulos e na relação de congruência de triângulos.

2.7.2 Registros de Representações Semióticas

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica fornece-nos o quadro teórico para a compreensão do papel das representações semióticas no desenvolvimento cognitivo e a origem das dificuldades enfrentadas pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Duval (2003 apud MATEUS, 2007) identifica os fenômenos intrínsecos aos registros de representação e sua influência na aprendizagem. Para o autor,

um modelo pertinente para explicar as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos por alunos deve estar prioritariamente centrado nas condições cognitivas de compreensão, isto é, nas condições específicas aos objetos matemáticos. Desse ponto de vista, as representações semióticas ou mais exatamente, a diversidade dos registros de representação semiótica, têm um papel central na compreensão. (DUVAL, 2003, apud MATEUS 2007, p. 46).

Segundo esta teoria, a aprendizagem de um conceito matemático e, conseqüentemente a compreensão em Matemática, supõem a coordenação de pelo menos dois registros de representação. Para Duval (2008), a diferenciação entre objeto matemático e a representação que se faz dele é de suma importância para o funcionamento cognitivo no intuito de possibilitar ao aluno compreender, efetuar e controlar, ele próprio, a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino. “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. (DUVAL, 2008, p. 14).

Mas o que é um “registro de representação”?

O autor define um registro de representação semiótica, como um sistema semiótico que permite três atividades cognitivas:

- 1) A identificação de uma representação;
- 2) A transformação em um mesmo sistema de representação (tratamento),
e
- 3) A transformação de um tipo de representação em outro (conversão)

Segundo Jesus (2008, p. 29), “Uma figura, um enunciado em língua materna, uma fórmula algébrica ou uma representação gráfica, por exemplo, são representações semióticas em registros semióticos diferentes”.

Em primeiro lugar, constituir um traço ou um conjunto de vestígios perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de algo num sistema determinado. Em seguida transformar as representações pelas únicas regras próprias ao sistema, de maneira a obter outras representações que podem constituir uma correspondência de conhecimentos em relação às representações iniciais. Por último, converter as representações produzidas num sistema de representações para outro sistema, de tal maneira que este último permita esclarecer outros significados relativos ao que é representado. Não são todos os sistemas semióticos que permitem estas três atividades cognitivas fundamentais [...] Mas as línguas naturais, as línguas simbólicas, as representações gráficas, as figuras geométricas, etc. permitem-nos. Falamos então de registro de representação semiótica. (DUVAL 1995 apud JESUS, 2008, p. 29)

Para Duval (2004), a compreensão do educando de uma determinada situação-problema ou um determinado conhecimento requer dois momentos: *semiosis* e *noesis*, que sempre estão interligados, sendo: **semiosis**, a representação realizada por meio de signos, e **noesis**, a aquisição conceitual de um objeto.

Para o autor, o sujeito só se apropria de um determinado objeto matemático se recorrer à noção de representação, uma vez que a Matemática trabalha com objetos abstratos, “os números, as funções, as retas etc., são objetos matemáticos; as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos etc., são algumas de suas representações”. (DUVAL, 2004, p. 14).

Duval (2008, p. 15) defende que, para que um conhecimento ou um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é preciso que o aprendiz apreenda-o não apenas com um registro, mas com, pelo menos, dois registros de

representação e que saiba coordenar esses registros. Salaria que existem dois tipos de transformações de representações semióticas radicalmente diferentes – *os tratamentos e as conversões*.

a natureza do registro semiótico impõe uma seleção entre elementos significativos [...] de conteúdo conceitual representado. Isso quer dizer que toda a representação é cognitivamente parcial em relação com o que ela representa e que as representações de registros diferentes não apresentam os mesmos aspectos de um mesmo conteúdo conceitual. Assim, as figuras, e de maneira mais geral todas as representações análogas, não podem representar mais que estados, configurações ou produtos de operações, e não ações ou transformações. (Bresson 1987, apud DUVAL 2004, p. 69).

Transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica

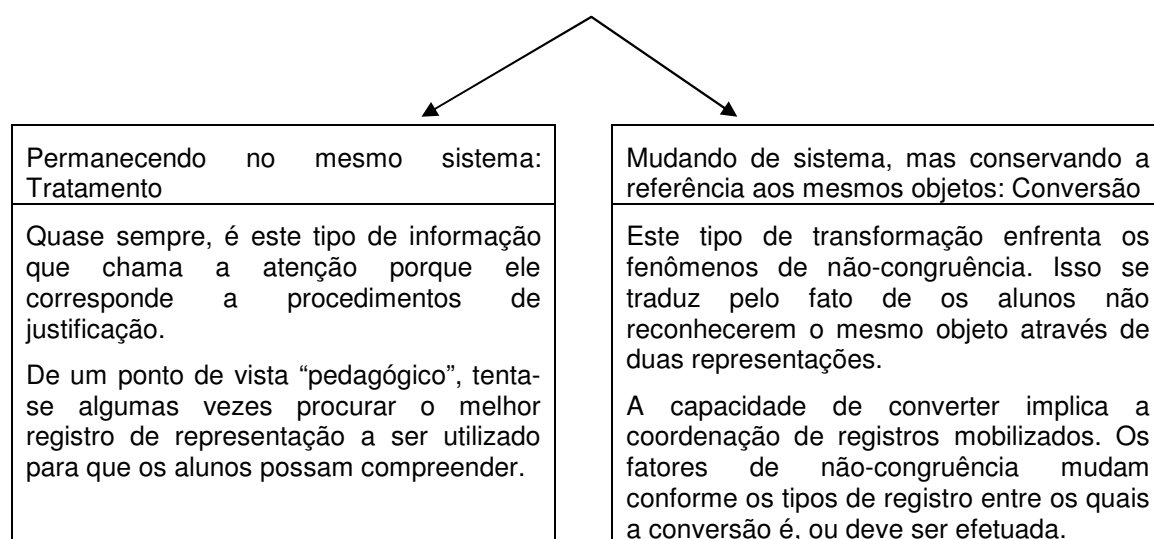


Figura 2-. Transformação de uma representação semiótica

Fonte: Duval (2008, p. 15).

Os tratamentos são transformações de representações dentro do mesmo registro, por exemplo, efetuar um cálculo sem mudar do sistema de numeração, completar uma figura, de acordo com critérios de conexidade e de simetria e conversões são transformações de representações que consistem na mudança de registro conservando os mesmos objetos, por exemplo, a passagem da descrição “um quadrilátero convexo com os lados opostos paralelos” para sua representação “figural”.

O autor enfatiza que a articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática e não o “enclausuramento” em cada registro. A compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro, pois não se deve confundir nunca um objeto e sua representação.

O autor distingue quatro tipos de registros de representação: dois relativos à representação discursiva: a língua natural e os sistemas de escritas (registro numérico, registro simbólico e registro algébrico); e dois relativos à representação não discursiva: registro figural e registro gráfico.

Exemplo de uma representação de um teorema de geometria plana em três registros de representação.

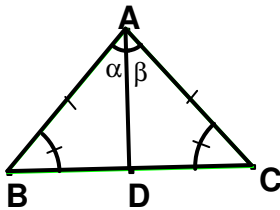
Registro discursivo	Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes
Registro simbólico	$\triangle ABC, AB \cong AC \Rightarrow \hat{B} \cong \hat{C}$
Registro figural	

Figura 3- Representação de um teorema em três registros de representação

Fonte: Adaptação do próprio autor

Nós acreditamos que uma apresentação de diferentes registros, conforme a Figura 3, seja muito importante para que o aluno comece a perceber a necessidade de uma coordenação de registros para um raciocínio geométrico.

Para Almouloud:

Falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar mais acessíveis a compreensão da matemática. A noção de registro permite salientar a importância da mudança de registro e considerar a necessidade de uma coordenação de registros. Uma mudança de registros tem vantagens do ponto de vista do tratamento, podendo facilitar a compreensão ou a descoberta. (ALMOULOU, 2007b, p. 72)

Portanto, o aluno precisa reconhecer um objeto matemático por meio de múltiplas representações semióticas, para que consiga transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante a resolução de um problema, o que pode permitir evitar identificar objetos matemáticos pelos conteúdos de certas representações. Segundo Duval:

Esta situação se faz em função das possibilidades e das dificuldades semióticas de cada registro. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação de uma figura ou diagrama. Isso quer dizer que toda a representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa. (DUVAL, 1993 apud JESUS, 2008, p. 31)

Para o autor, na aprendizagem da Matemática, o grau de dificuldades varia, conforme a natureza dos registros: nos tratamentos, dificuldades mais sérias observam-se nos registros plurifuncionais, como as demonstrações em Geometria feitas em língua natural e a utilização heurística de figuras; na conversão, quando há necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional.

Duval (2008) defende que a construção de sequências didáticas deve depender da natureza dos fenômenos que se deseja estudar. Assim, se o objetivo for a articulação entre dois registros relativos à representação de um objeto matemático, é preciso respeitar duas condições: primeiro, a sequência deve ser constituída de uma série de tarefas a respeito dos dois sentidos da conversão; segundo, para cada sentido da conversão, devem existir tarefas que comportem casos de congruência e casos mais ou menos complexos.

Se o objetivo é acentuar a compreensão de uma noção matemática, pode ser importante que tais sequências sejam constituídas por dois ou três pares de registros: de um lado, um par compreendendo um registro multifuncional e um registro monofuncional; de outro lado, um par compreendendo dois registros monofuncionais (DUVAL, 2008, p. 27).

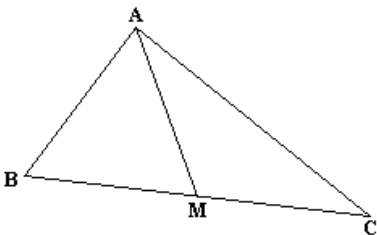
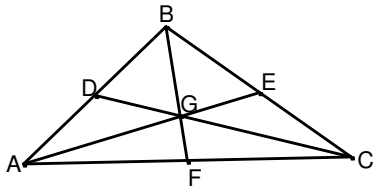
Quando as conversões são feitas nos dois sentidos, depreende-se que existe maior possibilidade de mobilizar os conhecimentos dos alunos com vista a aquisição de um conceito. O autor destaca:

Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. É enganosa a ideia de que todos os registros de representação de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros (Duval, 2008, p. 31).

Almouloud (2007b) chama a atenção sobre a operação “conversão”, destacando alguns aspectos que devem merecer consideração, a saber:

- 1- Toda conversão tem sentido a ser considerado. Efetuar a conversão em um sentido não significa que seja possível efetuá-la no sentido inverso. Por isso, é necessário sempre indicar qual o registro de partida e o de chegada; caso contrário, haverá risco de abuso de linguagem ou desvio conceitual.
- 2- Não se deve confundir o conteúdo da representação com o objeto representado, embora o registro permita revelar propriedades do objeto. Converter é, então, mudar o conteúdo e não somente a forma (ALMOULOU, 2007b, p. 73)

Por exemplo, achamos pertinente que as atividades como a que apresentamos no quadro 1 sejam necessárias aos alunos para que durante a fase em que os alunos demonstram propriedades geométricas, que sejam capazes de saber identificar o que é dado, qual o elemento a demonstrar, como representá-lo com base em uma figura como no exemplo:

Enunciado da propriedade em linguagem materna	Interpretação figural (linguagem figural)	Interpretação matemática (linguagem simbólica)
A mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto		<u>Hipóteses:</u> - ABC é um triângulo - M é ponto médio do lado $\overline{BC}$ <u>Conclusão:</u> $\overline{AM}$ é uma mediana do triângulo ABC
As medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto chamado baricentro .		<u>Hipóteses:</u> ABC é um triângulo e com AE , BF e CD medianas. <u>Conclusão:</u> AE , BF e CD interceptam-se em G .

Quadro 1 - Diferentes formas de representar uma mesma propriedade

Fonte: Adaptação do autor

Com esta teoria, pretendemos observar e avaliar o grau de articulação entre os registros de representação semiótica relativos aos triângulos com enfoque na prova e demonstração de algumas propriedades nos livros didáticos que vamos analisar. Assim, pretendemos analisar *como se realiza a articulação entre os registros de representação semiótica em atividades que envolvem prova e demonstração de propriedades de triângulo nos livros didáticos de Moçambique por meio da organização praxeológica*, segundo Chevallard (1999).

A seguir, apresentaremos, as principais ideias dessa teoria.

2.7.3 CHEVALLARD: Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Desenvolvida por Chevallard (1996), a Teoria Antropológica do Didático, doravante indicada por TAD, teve suas primeiras manifestações na teoria da transposição didática, teoria cujo objetivo era distinguir os diferentes saberes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Joshua e Dupin (1993, apud ALMOULOUD, 2007b, p. 112) Chevallard defendia a ‘necessidade de existência de uma matemática do professor, qualitativamente distinta daquela do matemático e da do aluno. Uma classe de objetos a ensinar é consequência de uma história particular, o resultado de um tratamento didático obedece a regras precisas. Estes mecanismos gerais que permitem a passagem de um objeto de saber a um objeto de ensino é que são vistos como transposição didática por Chevallard.

Para Almouloud (2007b, p. 113), a teoria da transposição didática tem em vista fazer uma análise epistemológica do saber sob o ponto de vista didático basicamente em termos de objetos de saber. Estes objetos classificam-se em:

- paramatemáticos – ferramentas utilizadas para descrever e estudar outros objetos matemáticos;
- matemáticos – instrumentos que para além de serem úteis, para estudar outros objetos matemáticos, tornam-se objetos de estudo em si mesmos;
- protomatemáticos – apresentam propriedades utilizadas para resolver alguns problemas sem, contudo, adquirir o *status* de objeto de estudo ou ferramenta para o estudo de outros objetos.

Em virtude das limitações de classificação da teoria de transposição didática, Chevallard propõe uma teoria que não só considera a classificação utilizada na transposição didática como teoria, bem como considera outros elementos para a análise surgindo, então, a Teoria Antropológica do Didático (TAD).

A TAD situa a atividade matemática e, em consequência, a atividade de aprendizagem em Matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Essa abordagem considera os objetos matemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas que existem em dadas instituições.

Desse modo, Chevallard (1999) propõe a elaboração de uma antropologia didática cujo objeto de estudo é a didática, com o objetivo de estudar, por exemplo, o professor e o aluno diante de um problema matemático. Essa teoria postula que “*tudo é objeto*”. O autor destaca três objetos específicos em sua teoria: *instituições (I)*, *peessoas (X)* e as posições que as pessoas ocupam nas instituições. Ao ocupar certa posição em uma instituição, as pessoas tornam-se sujeitos das instituições, sujeitos ativos que fazem com que a *instituição exista*. O conhecimento – o saber (O) como forma de organização – entra então em jogo com a noção de relação entre os principais elementos (instituição, objeto do saber e pessoa) da teoria.

Segundo o autor, um objeto **O** existe a partir do momento que uma pessoa **X** ou uma instituição **I** reconhece-o como existente. O autor explica:

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto O existe para X (respectivamente, para I) se existir um objeto que denotarei por $R(X,O)$ (resp. $R_I(O)$), a que chamarei *relação pessoal de X com O* (resp. *relação institucional de I com O*). Por outras palavras, o objeto O existe se existir ao menos para uma pessoa X ou para uma instituição I, isto é, se pelo menos uma pessoa ou uma instituição *tiver uma relação com esse objeto*. (CHEVALLARD 1996, p. 127).

Chevallard (1996) ainda introduz a noção de *conhecimento*. Assim, conhecer um objeto na Teoria Antropológica do Didático, é tanto para uma pessoa como para uma instituição ter uma relação com o objeto.

[...]. um objeto existe se for conhecido por pelo menos uma pessoa ou uma instituição (poderá mesmo existir apenas – o que constitui um caso limite – para essa pessoa ou para essa instituição). Um objeto só existe porque é *objeto de conhecimento*. (CHEVALLARD, 1996, p. 128).

O autor defende que

A cada instituição I está associado um conjunto de objetos O_1 , chamado conjunto dos objetos institucionais (para I), que é o conjunto dos objetos O que I conhece, ou seja, para os quais existe uma relação institucional $R_1(O)$. Um objeto O é institucional para I ou, dito de outro modo, existe para I , quando I define uma relação (institucional) com O .

Conforme autor:

Todo o saber é ligado ao menos a uma instituição, na qual é colocado em jogo, em um dado domínio real. O ponto essencial é, portanto, que um saber não existe *in vácuo*, num vazio social. Todo conhecimento aparece, num dado momento, numa dada sociedade, ancorado numa dada instituição. (CHEVALLARD, 1989, apud HENRIQUES, 2006, p. 8).

Para Chevallard (1996), a relação pessoal de um indivíduo com um objeto de saber só pode ser estabelecida quando o indivíduo entra nessa instituição onde esse objeto existe. De igual modo, uma relação institucional está estritamente relacionada com as atividades institucionais solicitadas aos alunos. Desse modo, é caracterizada por diferentes tipos de tarefas que os alunos devem realizar e por justificativas que fundamentam tais tarefas.

Portanto, a relação institucional a um objeto ($R(I, O)$) é descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam nessa instituição, envolvendo esse objeto do saber. Assim, do ponto de vista da teoria antropológica do didático, enquadrados, por exemplo, a argumentação, prova e demonstrações em Geometria na categoria de objeto O do saber e a disciplina de Matemática nas Escolas Fundamental e Média na categoria instituição I onde existe O .

Ao enquadrar a atividade matemática dentro do conjunto de atividades humanas e das instituições sociais, Chevallard (1999) toma a noção de *organização praxeológica* ou simplesmente *praxeologia*, como conceito-chave na

TAD, para estudar as práticas institucionais relativas a um objeto de saber e, em particular, as práticas sociais em Matemática.

Chevallard (1999) salienta que a noção de **tipo de tarefas** supõe um objeto relativamente preciso. As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que isoladamente caracteriza um gênero de tarefa, por exemplo, calcular, demonstrar, multiplicar, provar, justificar, etc., são gêneros de tarefas, porém demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , caracteriza um tipo de tarefa.

Especificamente, um gênero de tarefas só existe sob a forma de diferentes tipos de tarefas, que está estritamente especificado. Calcular ... diz-se, um gênero de tarefa, mas calcular o valor (exato) de uma expressão numérica que contém um radical é um tipo de tarefa, como o cálculo do valor de uma expressão que contém a letra x quando se dá a x um valor determinado. Durante os anos de escola, o gênero calcular, [...] é enriquecido com novo tipo de tarefas; o mesmo irá acontecer no instituto aonde o aluno vai, em primeiro lugar, a aprender a calcular com vetores e, em seguida, mais tarde, a calcular um integrante ou uma primitiva, e assim por diante. E vai-se repetir, evidentemente, com os gêneros demonstrar; [...] (CHEVALLARD, 1999, p. 2, tradução nossa).

O autor salienta que as tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas não são dados da natureza, são "artefatos", "construtos", construções institucionais, cuja reconstrução em tal instituição, por exemplo, em uma dada classe, é um problema completo, que é objeto da didática, isto é, objeto de ensino.

Segundo o autor, uma **técnica**, denotada por τ é uma maneira de resolver as tarefas de um tipo **T**. Para um determinado gênero de tarefa, normalmente, há uma técnica ou um número restrito de técnicas reconhecidas pela instituição que a concebeu (exceto as possíveis técnicas alternativas que por ventura possam existir em outras instituições). Uma técnica, ao menos, deve ser compreensível, plausível e ter justificação, para que possa permitir seu controle e garantir a eficácia das tarefas realizadas por meio dela.

O autor explica que a **Tecnologia θ** é um discurso racional a respeito da técnica e cumpre as funções de *justificar a técnica τ* , garantindo que ela permita realizar as tarefas do tipo **T**; *explicar* porque ela é correta; e, *produzir* as técnicas. Por exemplo, se um aluno memoriza uma determinada *tecnologia* (teorema ou

fórmula em Geometria), pode chegar a resolver certos tipos de exercícios com essa tecnologia, mas, de vez em quando, pode não saber explicar o porquê do resultado encontrado.

Desse modo, é preciso destacar que, se a primeira função da tecnologia – *justificar a técnica* –, consiste em assegurar que a técnica atinja, o que se pretende; a segunda função – *explicar* – expõe o porquê daquele procedimento. Vale ainda salientar que essas duas funções da tecnologia, *justificar e explicar*, podem ser vistas, de forma distinta, por uma dada *tecnologia*, quer dizer, um mesmo discurso sobre uma tarefa do tipo **T** pode assumir duplamente a função de técnica e tecnologia, que permite, por um lado, encontrar o resultado do que pede (função técnica) e justificar que o resultado esperado (função tecnológica) é correto.

No ensino da Matemática, um tema de estudo é, frequentemente, associado a uma tecnologia θ determinada (por exemplo, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales), ou ainda, o bloco de saber $[\theta/\Theta]$ correspondente a uma tecnologia que permite explicar e justificar técnicas relativas aos diversos tipos de tarefas.

As quatro noções: tipo de tarefa (**T**), *técnica* (τ), *tecnologia* (θ) e *teoria* (Θ) compõem uma organização praxeológica completa $[\mathbf{T}/\tau\theta\Theta]$ que se subdivide em dois blocos: (1) o bloco *prático-técnico* - $[\mathbf{T}/\tau]$ - formado por certo tipo de tarefas e por uma técnica, correspondendo ao *saber-fazer*; e (2) o bloco *tecnológico-teórico* – $[\theta/\Theta]$ - contendo uma teoria que justifica uma tecnologia.

Produzir, ensinar e aprender Matemática são ações humanas que podem ser descritas por um modelo prexeológico. Essa organização *praxeológica* é uma organização matemática.

Segundo Matheron:

Essa organização permite estudar uma mesma noção matemática designada com mesmo nome, mas com organização matemática de naturezas diferentes, se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo a um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição

onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar: como é ensinado um objeto identificado num livro didático? Que tipo de exercícios (tarefas) a realizar e com que tipo de técnicas disponíveis (ou não)? Qual é a organização matemática, e por consequência, que tipo de progressão considerar? (MATHERON 2000, apud HENRIQUES 2006, p. 12).

A citação acima é relevante para o propósito de nosso trabalho, pois é dentro da perspectiva de tentarmos perceber como o material didático disponível, tanto para os alunos como aos professores está estruturado que nosso estudo estará voltado.

Chevallard (1999, apud ALMOULOUD, 2007) introduziu também as noções de *habitat* de um objeto matemático, como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relativo ao objeto de estudo; a noção de *nicho* para determinar a função desse saber e *ecologia das tarefas* para indicar as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.

[...] a ecologia das tarefas e técnicas são condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e supõe-se que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada (...) essa necessidade ecológica implica a existência de um discurso e justificativo das tarefas e técnicas que chamamos de tecnologia da técnica [...]. (CHEVALLARD, 1999 apud ALMOULOUD, 2007b, p. 116).

Chevallard (1999) e Bosch (2000), ressaltam que as noções de "tarefa", "técnica", "tecnologia" e "teoria" são duplamente relativas. Primeiro, são relativos à instituição em referência, quer dizer, aquilo que é considerado, como um tipo de tarefa (ou uma técnica, ou tecnologia, ou uma teoria), em uma dada instituição não é forçoso que seja a mesma coisa em outra: em uma determinada instituição, muitas vezes, são consideradas apenas propriamente como "tipos de tarefas", aqueles para os quais se dispõe de alguma técnica (mesmo que esteja em fase embrionária), com um entorno teórico-tecnológico de forma mais ou menos explícita. Em segundo lugar, as noções de "tarefa", "técnica", "tecnologia" e "teoria" são relativas ao papel que desempenham em uma determinada atividade matemática. Desse modo, o mesmo objeto matemático (como por exemplo, o teorema sobre ângulos correspondentes ou alternos em retas paralelas cortadas

por uma secante), pode ser considerado como uma técnica para realizar um tipo de tarefa (por exemplo, para mostrar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°), ou servir como uma tecnologia comum para um conjunto de tipos de tarefas e técnicas (por exemplo, para mostrar várias propriedades sobre a semelhança de triângulos).

Chevallard (1999, p. 238) define *organização didática* como o conjunto de tipo de tarefas, de técnicas, de tecnologias, de teorias mobilizadas para o estudo concreto em uma instituição concreta; enquanto Bosch (2000, p. 2) dá o nome de *organização matemática* a uma entidade composta pelo tipo de problemas ou tarefas problemáticas, tipos de técnicas que permitem resolver os tipos de problemas, tecnologias ou discursos (“logos”) que descrevem e explicam as técnicas, uma teoria que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos.

Bosch (2000) defende que o modelo epistemológico proposto pela Teoria Antropológica do Didático, “fazer Matemática”, consiste em ativar uma organização matemática, quer dizer, resolver determinados tipos de problemas com certos tipos de técnicas (o “saber fazer”), de maneira inteligível, justificada e argumentada (mediante o correspondente “saber”). Segundo a autora, esse trabalho pode conduzir a construção de novas organizações matemáticas ou, simplesmente, a reprodução de organizações previamente construídas. Por isso, afirma que

O objetivo de um processo de ensino/aprendizagem pode formular-se em termos dos componentes das organizações matemáticas que se quer construir: que tipo de problemas tem de se ser capaz de resolver, com que tipo de técnicas, na base de que elementos descritivos e justificativos, em que marco teórico, etc. (BOSCH, 2000, p. 2).

Para a autora a Teoria Antropológica do Didático assume, como um de seus postulados fundamentais que toda atividade, em sentido estrito, todo “saber-fazer”, pressupõe a existência de um saber ou discurso justificativo-explicativo da atividade. Esse discurso, cuja função principal consiste em proporcionar à atividade descrições, explicações e justificações válidas (para a instituição onde tem lugar), também deve incorporar elementos de resposta das razões da atividade considerada e os resultados que ela produz.

A autora salienta que a “compreensão” deve incluir a busca de situações-problemáticas que estão (ou que poderiam estar na origem da organização matemática considerada). Por exemplo, para que servem os ângulos? E os triângulos? Por que é preciso aprender a [...]? (BOSCH,. 2000, p. 3). Conforme a autora, estes tipos de perguntas fazem parte do questionamento teórico-tecnológico e constituem um aspecto importante da exigência de justificação das atividades correspondentes.

Assim, com esta teoria, o foco de nossa atenção estará voltado às articulações entre as organizações matemáticas e didáticas que os livros didáticos apresentam quanto ao objeto “triângulo” com enfoque para as provas e demonstrações. Portanto, com esta teoria pretendemos estudar:

1. Quais os principais tipos de tarefas relativas às propriedades dos triângulos com enfoque na prova e demonstração?
2. Quais as principais técnicas mobilizadas para o estudo dessas propriedades?
3. A disponibilidade do discurso teórico-tecnológico que sustenta essas técnicas inerentes ao tipo de tarefas propostas.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos uma análise de livros didáticos, tomando por base a Teoria Antropológica do Didático. Realizar uma descrição e análise da organização matemática e didática de um livro é importante, pois, como salienta Choppin (2004) desde que existam programas de ensino, o livro didático é a fiel tradução do programa ou constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas, ou habilidades que um grupo social acredita que sejam necessários transmitir às novas gerações.

O livro didático põe em prática métodos de aprendizagem, propõe exercícios ou atividades que, segundo o contexto, visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas. (CHOPPIN, 2004, p. 553-554).

Além disso, nós acreditamos quando se afirma que o livro didático é um meio que “exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna, frequentemente, a única ferramenta disponível para o seu trabalho” (PNLD 2005, apud MIGUEL 2005, p. 76).

Chevallard (1999) afirma que o livro didático determina em grande parte a opção didática do professor com relação ao tipo de conteúdo a desenvolver em sala de aula, e a maneira como fazê-lo e para o aluno é uma das maiores fontes de aquisição do saber.

3.1 Critérios de escolha de livros para a análise

Uma leitura de algumas dissertações apresentadas e defendidas na PUC/SP como as de Carlovich (2005); Barbosa (2007); Silva (2007); Tojo (2006); Pasini (2007), etc., mostra que os autores desses trabalhos tiveram mais possibilidades de escolha, porque a demanda do livro didático no Brasil é bem forte. O historiador e pesquisador Choppin (2004) refere que o setor escolar assume um peso considerável na economia editorial de alguns países e, para o caso do Brasil, no início do século XX, os livros didáticos representavam dois terços dos livros publicados, ainda em 1996, significavam quase 61% da produção nacional.

Para estes casos, na verdade, para a escolha da coleção merece que se detalhem razões que motivaram este pesquisador a optar por esta ou aquela coleção ou grupo de coleções. A sustentar nosso ponto de vista sobre a necessidade de tornar claro o critério usado para a escolha dos livros didáticos de Matemática para objeto de estudo, Carvalho afirma:

Como existe atualmente uma considerável gama de livros didáticos de matemática para o ensino Médio, foi necessário um critério de seleção para iniciarmos nossa análise. Nosso critério é bem simples: escolhemos analisar os livros selecionados pelo Ministério da Educação do Brasil no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM/2006. (CARVALHO, 2007, p. 70).

Mas para o caso de Moçambique estas opções ficam muito limitadas, porque a produção do livro didático ainda é muito incipiente, pois tal como reconhecem os documentos oficiais, até há falta de manuais de professores e de livros do aluno (INDE e MEC, 2007, p. 7).

Assim, em função dos fatores limitantes, o critério que utilizamos para a escolha de livros didáticos a analisar foi simples: os livros oficialmente aprovados pelo Ministério da Educação e Cultura de Moçambique para uso nas escolas públicas nos últimos anos: da década 1990, até a atual década de 2000.

3.2 Os Livros objetos de Análise desta Pesquisa

Os livros que contemplamos para a pesquisa são os seguintes:

1. DRAISMA, J. & SOVERTKOV, P. **Eu gosto de Matemática. 6ª Classe.** Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE), 1991.
2. ZAVALA, C. A. M.; ISSUFO, D. S. **As maravilhas dos números. 7ª Classe.** Maputo, Texto Editores, 2005.
3. NHEZE, I. C. e Vi V. T. **Matemática 8ª classe**, 1991
4. NHÊZE, I. C. **Matemática: 8ª classe.** Diname, 1998.
5. CARVALHO, R. F. & MARTINS, Z. A. M₈ **Matemática 8ª Classe.** 6. ed. Maputo: Texto Editores, 2007.

3.3 Critérios de Análise dos Livros

Para termos consistência na forma de buscar o objeto de interesse neste estudo, em cada um dos livros contemplados na pesquisa, apresentamos os critérios que nortearam as buscas realizadas.

Ao considerar nossa questão de pesquisa e nosso referencial teórico que têm como base a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004, 2008), bem como a Topologia de Provas proposta por Balacheff (1988), como teorias que vão subsidiar nossa análise, em qualquer um dos livros didáticos em relação ao estudo do objeto “triângulo”, com enfoque para a prova e demonstração das propriedades, tais como: a soma dos ângulos internos, o ângulo externo, os critérios de congruência, as propriedades específicas dos triângulos isósceles, vamos observar o seguinte:

Critério 1: está voltado à análise de como as propriedades dos triângulos são validadas à luz da tipologia das provas propostas por Balacheff, isto é: na abordagem dos triângulos

1. Como as propriedades são validadas?
2. Que funções (principais) de prova preenchem as atividades propostas pelos autores de cada livro contemplados no presente estudo?
3. Quais tipo de provas (segundo a tipologia de Balacheff) estão presente no estudo das propriedades dos triângulos? e
4. Se os autores propõem atividades exploratórias (relacionadas com as propriedades dos triângulos) que possibilitam aos alunos a apreensão dos primeiros modos de raciocínio dedutivo, segundo Balacheff.

Critério 2: está voltado aos registros das representações semióticas presentes na abordagem das propriedades dos triângulos, quer dizer, com este critério pretendemos verificar em cada livro:

1. Como se realiza a articulação entre os registros (sobretudo o figural e o discursivo) na abordagem dos triângulos com enfoque para a prova e a demonstração de suas propriedades?

Critério 3: Com esse critério, pretendemos concentrar nossa atenção nas praxeologias didáticas e matemáticas na abordagem de triângulos por parte dos autores de livros didáticos, ou seja

1. Os principais tipos de tarefas relativas às propriedades dos triângulos, mas com enfoque para a prova e demonstração;
2. As técnicas mobilizadas para o estudo dessas propriedades; e
3. A presença do discurso teórico-tecnológico que sustenta essas técnicas inerentes ao tipo de tarefas propostas.

3.4 Análise dos Livros

Chevallard (1999) salienta que, por volta de um tipo de tarefas **T**, se encontra, em primeiro lugar, uma terna formada por uma *técnica* (ou ao menos), τ , por uma *tecnologia* de τ , θ , e por uma *teoria* de θ , Θ . O bloco $[T/\tau/\theta/\Theta]$ como salientamos em nossa fundamentação teórica, constitui-se o que se chama

praxeologia pontua. Trata-se de uma *praxeologia* relativa a um tipo de tarefas, T . Tal *praxeologia* ou organização *praxeológica* é composta por um bloco prático-técnico, $[T/\tau]$, e, por um bloco tecnológico-teórico, $[\theta/\Theta]$, sendo este último bloco habitualmente identificado com o *saber* e o primeiro, $[T/\tau]$ constitui um *saber-fazer*.

Ainda o autor afirma que, geralmente, em uma instituição dada I , uma *teoria* Θ responde a várias tecnologias θ_j , cada uma das quais, por sua vez, justificam e tornam inteligíveis várias técnicas, τ_{ij} , correspondentes a outros tantos tipos de tarefas T_{ij} .

As organizações pontuais vão assim, combinar-se, em primeiro lugar, com as organizações locais $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centradas em uma tecnologia θ determinada e depois em organizações regionais $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formadas de uma teoria Θ . Denominar-se-á de organização global ao complexo praxeológico obtido, $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$, em uma dada instituição, pela agregação de várias teorias Θ_k . (CHEVALLARD, 1999, p.226).

Assim, a passagem de uma *praxeologia* pontual $[T/\tau/\theta/\Theta]$ a uma *praxeologia* local $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ põe em marcha a tecnologia θ ; de igual modo, a passagem posterior a uma *praxeologia* regional $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ levará a *teoria* Θ (CHEVALLARD 1999, p. 226).

Conforme defende Chevallard (1999), dado um tema de estudo matemático θ , considerar-se-á sucessivamente:

- a) A realidade matemática que se pode construir em uma classe de Matemática onde se estuda o tema θ ;
- b) A maneira que pode ser construída essa realidade matemática, quer dizer, como pode ser realizado o estudo do tema θ .

O primeiro objeto – “a *realidade matemática que...*” – não é mais do que uma *praxeologia* matemática ou organização matemática que se chama OM_θ e, o segundo objeto – “a *maneira que...*” – denomina-se uma organização didática, e indicar-se-á por OD_θ . (Chevallard 1999, p. 229).

Assim, segundo o autor, o trabalho do estudo a realizar consiste, sobretudo, em dois tipos de tarefas: descrever e analisar a organização matemática OM_θ que se pode construir em uma classe de Matemática onde se estuda o tema θ (T_{21}); e descrever e analisar a organização didática OD_θ que pode ser posta em prática em uma classe de Matemática onde se estuda o tema, (T_{22}).

Neste estudo, trata-se de estudar as organizações matemáticas e didáticas dos livros didáticos de Matemática, segundo a Teoria Antropológica do Didático. Desse modo, para que nossa análise seja a mais completa possível, precisamos ter dois enfoques: um voltado à descrição e análise da organização didática e outro, à descrição e análise da organização matemática proposta nos livros selecionados. Segundo a mesma teoria, as duas organizações (praxeologias) – didática e matemática – podem ser caracterizadas e analisadas por meio de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Assim, tendo como aporte principal esta teoria, as teorias de registros de representação semiótica de Duval e os níveis de prova de Balacheff, como subsidiárias para a análise, direcionamos nossa atenção para dois tipos de tarefas:

1. Tarefas voltadas à introdução dos conceitos.
2. Tarefas desenhadas à realização de problemas e exercícios.

Por questões metódicas, fixaremos como nossa simbologia:

T_{dpdt} : Descrever e analisar a organização matemática, OM_θ , que pode ser construída no estudo da prova e demonstração de propriedades relativas a triângulos, onde θ é o objeto matemático “triângulos” com enfoque na prova e demonstração de algumas de suas propriedades;

$T_{\partial pdt}$: Descrever e analisar a organização didática $OD_{pdt} = \partial OD_{pdt}$ das propriedades que serão objeto de estudo.

Com as duas análises, uma voltada à organização matemática e a outra à organização didática, não se pretende emitir juízo de valor a respeito da qualidade

dos livros selecionados, mas apenas discutir o que foi estudado (objeto matemático) e como foi estudado (organização didática).

3.5 Descrição e análise da organização didática dos livros selecionados com enfoque nas atividades de introdução

Neste ponto, é nossa intenção descrever e analisar as escolhas didáticas presentes nos livros que selecionamos para estudo, com enfoque na prova, argumentação e demonstração dos conceitos e propriedades relacionados a triângulos. Nossa atenção estará focada para:

- A propriedade sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.
- A relação entre ângulo externo de um triângulo e os internos não adjacentes.
- A desigualdade triangular e,
- A congruência de triângulos.

Segundo Chevallard (1999), as *praxeologias* didáticas ou organizações didáticas são respostas a questões do tipo ...? “como estudar a questão $q = \tau T$?” ou, “como determinar ...?”, questionamentos esses que se traduzem em tarefas didáticas que, para efeitos de análise, vão nos conduzir para as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, como variáveis de foco de análise.

Já salientamos acima que, sob o ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático, existe uma codeterminação entre tarefas didáticas e tarefas matemáticas vice-versa. Assim, são

Principais conceitos norteadores:

Situação 1: Como é introduzido a noção de triângulo.

Tarefa 1: Introduzir a noção de triângulo

Técnica 1.1: Construção com régua, lápis e papel.

Técnica 1.2: Construção em ambiente de geometria dinâmica, servindo-se de pontos, segmentos de reta e circunferência.

Técnica 1.3: Construção em ambiente de geometria dinâmica apenas servindo-se de pontos e segmentos de reta.

Discurso teórico-tecnológico θ/Θ_1 : O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas, baseia-se no fato de que dados três pontos A, B e C, em um plano e não colineares, a união dos segmentos AB, AC e BC resulta em polígono ABC, denominado triângulo ABC.

As técnicas **1.1** e **1.3** apenas diferem pelo meio utilizado e, na possibilidade de em **1.3** poderem ser obtidas várias configurações do objeto “triângulo” com o arrastar de um dos pontos, porém a exploração de conjecturas que levem à classificação dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos não são destacáveis, porque facilmente as figuras que se obtêm perdem suas propriedades fundamentais com o “arrastar”. Isso também é mais notável com a primeira técnica que, pelas limitações do “papel, lápis e régua”, não permitem efetuar várias explorações nem conseguimos outras configurações: de cada vez, obtemos praticamente uma nova figura.

Mas já com a **técnica 1.2**, a função “arrastar” incorporada ao software permite explorar propriedades fundamentais do triângulo entre outras: a relação entre os lados, a relação entre os ângulos, permitindo, desse modo, a formulação de conjecturas e/ou a classificação de triângulos baseando-se em propriedades invariantes tais como: a relação entre os lados ou entre os ângulos independente do tamanho do triângulo que se tem, etc.

Situação 2: Como é introduzida e estudada a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo

Tarefa: Estudar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Técnica 2.1: Com régua, desenha-se um triângulo particular; com a ajuda do transferidor, medem-se os ângulos internos, somam-se os valores obtidos e,

por fim compara-se o resultado obtido com o dos outros para ver se existe algum fenômeno comum no resultado.

Técnica 2.2: Constrói-se um triângulo qualquer de papel, assinalam-se os vértices, com uma tesoura, recortam-se e justapõem-se sobre uma régua observando-se como vai ser a configuração se todos os vértices forem postos em um mesmo ponto e um dos lados de cada ângulo for justaposto a um lado do outro ângulo, por exemplo, a figura 4.

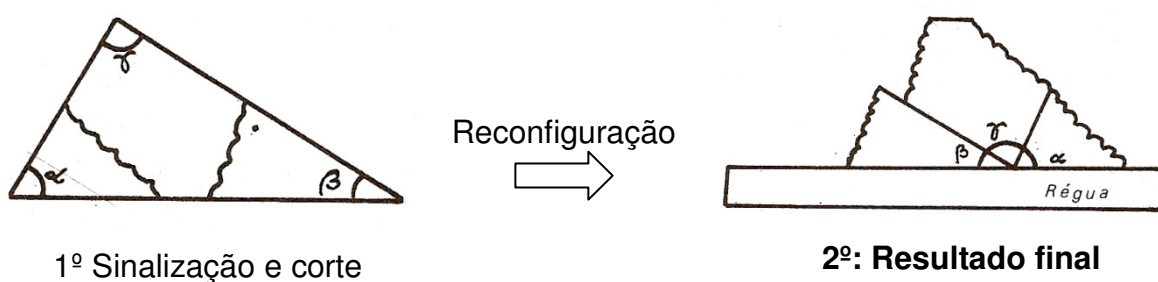


Figura 4- Procedimento sugerido para a validação da propriedade da soma dos ângulos internos num triângulo.

Fonte: Draisma e Sovetkov 1991, p. 62

Técnica 2.3: Constrói-se um triângulo ABC qualquer de papel e recorta-se. Em seguida, marcam-se os pontos médios de dois lados e, finalmente, dobra-se o triângulo recortado, de modo que todos os vértices estejam em um dos pontos do terceiro lado em que não se marcou o ponto médio controlando-se que tipo de ângulo forma as três regiões que constituem os ângulos internos do triângulo, como ilustra a Figura 5.

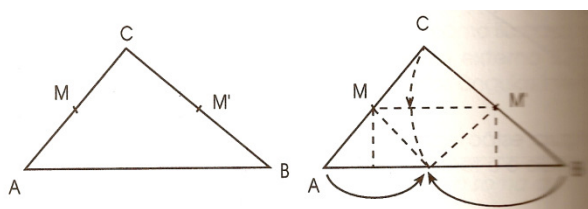


Figura 5- ilustração da técnica de dobradura para deduzir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Fonte: Nhêze (1998, p. 174)

Técnica 2.4: Com apoio de um software de Geometria Dinâmica, constrói-se um triângulo e determinam-se as medidas dos ângulos; somam-se os valores obtidos; por meio da função “arrastar”, vão-se obtendo outros triângulos e

controlando-se a soma, e, observando-se a invariância do resultado, conclui-se que vale 180° .

Técnica 2.5: Valendo-se de papel e lápis ou de um software, exploram-se alguns casos, levanta-se uma conjectura e com base na teoria das paralelas faz-se a validação do resultado observado por meio de uma demonstração.

Técnica 2.6: Sem nenhuma manipulação é enunciada a propriedade com ou sem validação dedutiva.

Discurso teórico-tecnológico: θ/Θ_2 : o discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas baseia-se no fato de que ângulos correspondentes e/ou ângulos alternos internos em retas paralelas intersectadas por uma transversal são congruentes; baseia-se, também, na propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

As técnicas **2.1**, **2.2**, **2.3** e **2.4** apenas diferem nos instrumentos a utilizar na validação da propriedade, mas em sua essência todas se baseiam em prova pragmática para validar a propriedade em estudo. Apesar desse traço comum para as quatro técnicas, as técnicas **2.3** e **2.4** não exigem que se meçam os ângulos internos, apenas a montagem dos recortes efetuados, de modo a formar um ângulo “material” que seja raso e uma manipulação material eficiente. A técnica **2.5** possibilita a exploração e o levantamento de conjecturas, atividade muito importante para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, pois como defendem Ponte et al. (2009), o trabalho com triângulos e/ou quadriláteros deve revestir-se de um cunho exploratório e investigativo. As tarefas, envolvendo, esses objetos geométricos no Ensino Básico devem permitir que os alunos formulem estratégias próprias e, ao mesmo tempo, mobilizem conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. Já a técnica **2.6**, é típica de autores de livros didáticos cuja preocupação é apenas apresentar o material didático sem o objetivo de envolver o aluno na produção de seu conhecimento (matemático).

Situação 3: Como é introduzida a relação entre a soma ou diferença entre dois lados de um triângulo com o terceiro lado, ou seja, como é abordada a relação conhecida por “desigualdade triangular”.

Tarefa: Introduzir ou abordar a propriedade da “desigualdade triangular”.

Técnica 3.1: Constrói-se um triângulo e, em seguida, pede-se que:

- Com a régua meçam os lados, procedendo-se depois a comparação da soma das medidas de dois lados menores com a medida do terceiro lado maior. Repete-se o procedimento com mais outros exemplos e, finalmente, institucionaliza-se a propriedade.

Técnica 3.2: São dados vários grupos de três números supostamente medidos de três segmentos de reta; com régua e compasso, pede-se que, para cada grupo, se tente construir um triângulo. Anota-se para cada caso qual a relação entre a soma de dois deles com o terceiro valor maior. Finalmente, institucionaliza-se, o que se constatou.

Técnica 3.3: São dados vários pauzinhos ou palitos com diversos tamanhos. Em seguida, pede-se que utilizando várias combinações de três deles tente-se construir um triângulo. Elabora-se uma tabela onde se registra em cada linha, o grupo de três pauzinhos em que foi possível ou não tal construção, controlando a relação entre justaposição entre dois pauzinhos de tamanho menor com o terceiro pauzinho de tamanho maior, institucionalizando mais tarde, o que é comum em todos os casos em que foi possível obter um triângulo.

Técnica 3.4: Sem nenhum processo experimental enuncia-se a proposição que encerra a propriedade e, em seguida, usando-se um processo dedutivo formal prova-se a validade da propriedade por meio de uma demonstração.

Discurso teórico-tecnológico θ/Θ : O discurso tecnológico-teórico baseia-se na ideia de que os segmentos podem ser comparados (ou por sobreposição, ou pela medida de seus comprimentos); na relação de ordem dos números reais e desigualdade triangular.

A diferença entre a **técnica 3.1** com as **técnicas 3.2 e 3.3** reside no fato de que nas duas últimas procura-se, com os dados fornecidos, quando é possível ter um triângulo, enquanto com a primeira já estamos em presença do objeto “triângulo”, procura-se estabelecer as condições que permitem ou permitiram sua existência. As três técnicas têm um ponto comum: uma verificação empírica das

condições de existência do objeto “triângulo”. Para a **técnica 3.4**, apenas visa-se ao estabelecimento de uma propriedade matemática independente de qualquer verificação empírica: visa, simplesmente, à validação matemática de um objeto que deve ser aceito como existente nos casos em que se tem um triângulo, trata-se aqui, de uma apresentação dedutivista da Matemática, estilo este que, segundo Lakatos (1976, apud CARLOVICH, 2005):

[...] começa com uma lista laboriosamente feita de axiomas, lemas e/ou definições. Os axiomas e definições frequentemente parecem artificiais e mistificadoramente complicados. A lista de axiomas e definições é seguida de teoremas cuidadosamente redigidos. Estes, por sua vez, estão carregados de pesadas condições, parece impossível que alguém jamais os tivesse suposto. O teorema é seguido de prova [...] O estudante de matemática é obrigado, de acordo com o ritual euclidiano, a assistir a esse ato conjuratório sem fazer perguntas sobre o assunto ou sobre como o ato mágico é praticado... (Lakatos 1976, apud CARLOVICH 2005, p. 46)

Conforme salienta Carlovich (2005, p. 46), no estilo dedutivista “A Matemática é apresentada como uma série crescente de verdades imutáveis e eternas.”. Isto é visível na técnica 3.4 na qual falamos que dado um triângulo, é enunciada a propriedade da relação da desigualdade triangular sem nenhum envolvimento dos alunos na atividade exploratória do fato.

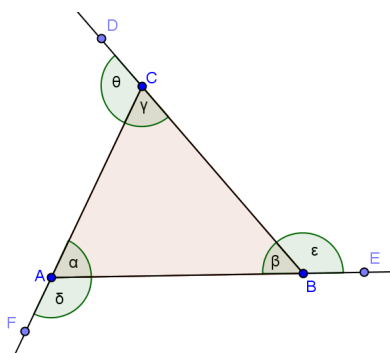
Situação 4: Como é introduzida a propriedade do ângulo externo de um triângulo.

Tarefa: Introduzir a propriedade do ângulo externo de um triângulo.

Técnica 4.1: Constrói-se um triângulo ABC qualquer. Marca-se um de seus ângulos externos. Determina-se a amplitude dos dois ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo assinalado e adicionam-se os valores obtidos. Em seguida, mede-se o ângulo externo marcado e compara-se o resultado obtido com a soma verificadaa. Procede-se de igual modo, para os outros ângulos externos, controlando se existe alguma regularidade nos resultados.

Técnica 4.2: Desenha-se um triângulo e assinalam-se os ângulos internos. Prolonga-se um dos lados de cada um dos ângulos internos e assinala-se um ângulo externo adjacente a cada um deles. Recorrendo-se à propriedade da soma

dos ângulos internos de um triângulo e à propriedade dos ângulos suplementares entre cada um dos ângulos internos com cada um dos ângulos externos adjacentes e mediante transformações algébricas, deduz-se a relação entre cada ângulo externo com a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes, conforme mostra a Figura 6.



Queremos deduzir a relação entre, por exemplo, ângulo externo ε com os ângulos internos α e γ .

1. $\varepsilon + \beta = 180^\circ$ (adjacentes suplementares)
2. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (soma dos ângulos internos de um triângulo)
3. $\varepsilon + \beta = \alpha + \beta + \gamma$ (substituição de 2 em 1)
4. $\varepsilon = \alpha + \gamma$ (resolução da equação 3 em ordem a ε)

Procede-se de igual modo para os outros ângulos externos, validando-se, desse modo, a propriedade.

Figura 6 – Ilustração figural de como se pode estabelecer a relação entre ângulo externo com os dois internos não adjacentes.

Fonte: O pesquisador

Técnica 4.3: Desenha-se um triângulo e assinalam-se um ângulo externo e dois internos não adjacentes. Em seguida, pelo vértice do triângulo que contém o ângulo externo traça-se uma semirreta paralela ao lado comum dos dois ângulos internos não adjacentes ao externo. Recorrendo-se à relação de ângulos correspondentes e/ou alternos em retas paralelas cortadas por uma transversal, deduz-se a relação. Na Fig. 7 podemos ver um procedimento de validação dessa propriedade que se baseia na técnica 4.3:

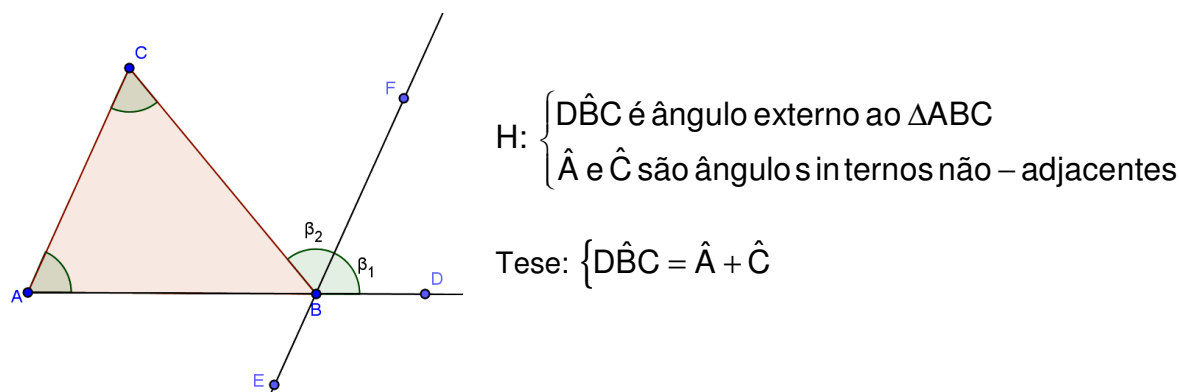


Figura 7 – Reconfiguração que permite demonstrar a relação entre um ângulo externo e os dois internos não adjacentes.

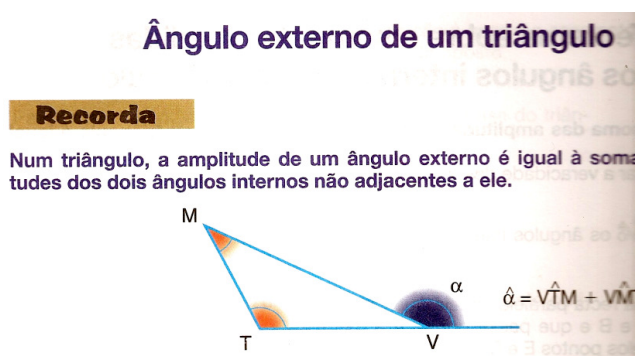
Fonte: O pesquisador

Demonstração:

Pelo vértice C, traçamos a reta suporte de EF paralela à AB. Temos, desse modo:

1. $\widehat{DBC} = \beta_1 + \beta_2$ (por construção)
2. $\widehat{A} = \beta_1$ (ângulos correspondentes em retas paralelas – AB e EF)
3. $\widehat{C} = \beta_2$ (por serem alternos em retas paralelas AB e EF)
4. $\widehat{DBC} = \widehat{A} + \widehat{C}$ (por substituição em 1 pelos membros esquerdos de 2 e 3), o que completa a demonstração.

Técnica 4.4: Enuncia-se apenas a propriedade e apresenta-se uma figura ilustrando essa propriedade, por exemplo, a Figura 8 ilustra isso.



A figura 8 ilustra como o livro L_2 da 7ª classe apresenta a propriedade sobre ângulo externo em um triângulo.

Figura 8 - extrato de como é abordado o teorema sobre ângulo externo de um triângulo.

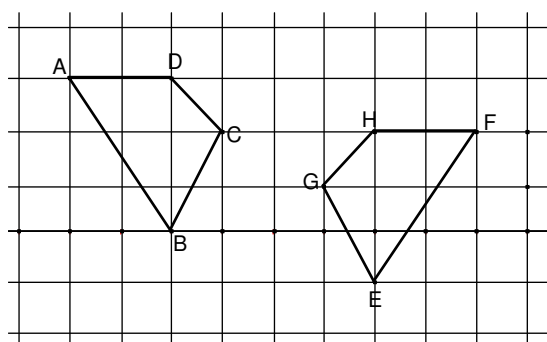
Fonte: Zavala e Issufo, (2005, p. 56)

Discurso teórico-tecnológico 0/0: O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas relativas à tarefa, é a soma de ângulos internos de um triângulo; ângulos adjacentes complementares; ângulos alternos internos e/ou correspondentes em retas paralelas.

Situação 5: Como se introduz o conceito de congruência de figuras.

Tarefa 5: Introduzir o conceito de congruência de figuras.

Técnica 5.1: Pelo desenho de duas figuras num quadriculado guiando-se pelo número de quadrículas e inclinações que se faz para traçar os lados de cada figura.



É fácil concluir que os polígonos [ABCD] e [EFHG] são congruentes com base em sua disposição no quadriculado.

Figura 9 - Figuras congruentes em um quadriculado.

Técnica 5.2: Pelo desenho de duas figuras de lados e ângulos respectivamente com medidas iguais seguidos de um movimento no plano, de uma das figuras de forma a fazer com que seus lados coincidam com os lados da outra figura.

Discurso teórico-tecnológico 0/0: O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas a usar, baseia-se em noções de deslocamentos no plano que deixam a figura invariante: translação, rotação e reflexão.

Entendemos que embora as duas técnicas **5.1** e **5.2** incorporem a ideia de sobreposição e coincidência dos elementos correspondentes, elas são diferentes: uma, a **5.1**, o controle da coincidência das partes correspondentes das figuras é por contagem das quadrículas e da inclinação no quadriculado; a outra, a **técnica 5.2**, exige que se execute (ou aparentemente se simule) o deslocamento.

Situação 6: Como se estabelecem os critérios de congruência de triângulos?

Tarefa 6: Estabelecer os critérios de congruência de triângulos.

Técnica 6.1: Observação de algumas condições mínimas que garantem a congruência de dois triângulos, validando-as com a demonstração.

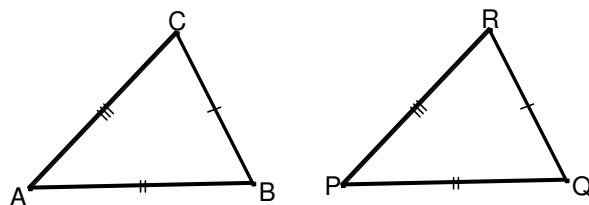
Dado que não existe apenas um critério para se concluir que dois triângulos são congruentes, por razões didáticas para análise, a partir da tarefa 6, vamos criar algumas subtarefas atreladas a cada um dos critérios de congruência e para cada subtarefa vamos identificar a respectiva técnica.

Subtarefa 6.a: Determinar a congruência de dois triângulos conhecidos os três lados.

Técnica 6.a-1: O critério é apenas enunciado sem alguma atividade exploratória nem demonstração.

Técnica 6.a-2: Apresentando duas representações figurais ilustrando os triângulos com a indicação (tanto simbólica como figural) dos lados congruentes, apresentam-se argumentos baseados na ideia de sobreposição dos lados de um sobre os lados correspondentes do outro (demonstração), validando o critério para quaisquer dois triângulos que satisfazem a condição, por exemplo, a demonstração que se apresenta baseada na Fig. 10 extraída de um livro didático.

Os autores começam por afirmar o seguinte: “Sejam os triângulos ABC e PQR nos quais $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$; $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ e $\overline{BC} \cong \overline{QR}$.



Provemos que os dois triângulos são congruentes.

Figura 10 - Extrato de como foi demonstrado o caso LLL de congruência de triângulos
Fonte: Nhêze, (1998, p. 178)

Eis os argumentos da demonstração que o autor apresenta:

Como $AB = PQ$, existe uma sobreposição do segmento $\overline{AB}$ em $\overline{PQ}$ do mesmo modo, $\overline{AC}$ sobrepõe-se em $\overline{PR}$, e, $\overline{BC}$ em $\overline{QR}$. Portanto, existe uma sobreposição do $\triangle ABC$ no $\triangle PQR$. Logo, os triângulos ACN e PQR são congruentes e denota-se por $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, c.q.d. (NHÊZE, 1998, p. 178).

Técnica 6.a-3: Baseando-se na ideia de construção de triângulos, dadas as medidas dos três lados, invoca-se uma isometria que pode transformar cada um dos pontos do vértice da figura desenhada em outro ponto do vértice de um outro triângulo, enunciando-se em seguida o critério.

Discurso teórico-tecnológico: O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas fundamenta-se na sobreposição de figuras por algum deslocamento no plano ou na noção de isometria no plano.

A técnica **6.a-2** baseia-se na verificação empírica, portanto, pode-se dizer que o critério é apresentado como um axioma; e as técnicas **6.a-2** e **6.a-3**, apesar de se começar com construções, a validação do critério baseia-se em dedução, o que se pode questionar é se o discurso teórico-tecnológico utilizado (sobreposição, isometria) está disponível em nível da instituição a que o livro didático está destinado.

Subtarefa 6.b: Estabelecer o critério de congruência de dois triângulos dados dois lados e o ângulo por eles formado.

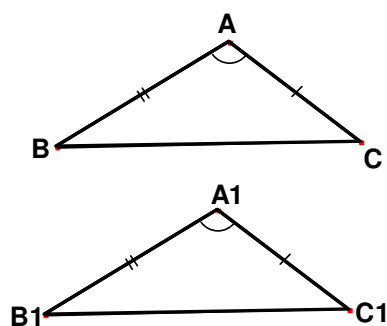
Técnica 6.b-1: O critério apenas é enunciado sem alguma atividade exploratória nem demonstração.

Técnica 6.b-2: Constrói-se, a partir de dois segmentos, e o ângulo por eles formado um triângulo. Em seguida, tenta-se construir outro triângulo diferente do inicial, usando as mesmas medidas anteriores. Controla-se se é possível isso ou não e depois se institucionaliza o critério LAL.

Técnica 6.b-3: Com régua e transferidor constrói-se um triângulo no qual se conhece a medida de dois lados e o ângulo por eles formado. Depois se compara a construção com as construções de outros que utilizaram os mesmos dados, verificando-se se são congruentes ou não. No fim, institucionaliza-se o critério LAL.

Técnica 6.b-4: Supõe-se a existência de dois triângulos distintos nos quais dois lados e um ângulo por eles formado são congruentes cada um a cada um. Por um encadeamento de argumentos que se baseiam em uma correspondência entre esses lado e ângulo demonstra-se que o terceiro lado de um triângulo é congruente ao terceiro lado do outro. Daí, institucionaliza-se o critério LAL. Eis um exemplo retirado de um livro didático.

“Sejam dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nos quais $\hat{A} \cong \hat{A}_1$, $\overline{AC} \cong \overline{A_1C_1}$ e $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$.



Demonstremos que estes dois triângulos são congruentes.

Como os ângulos A e A_1 são congruentes, existe uma correspondência entre eles, tal que o ponto A passa ao ponto A_1 e o lado AC ao lado A_1C_1 . Consequentemente, o ponto C passará ao ponto C_1 . Por sua vez o lado AB passará ao A_1B_1 e pela mesma razão o ponto B passará ao ponto B_1 . E como a imagem dum segmento através da congruência, ainda é um segmento, o lado BC passará ao lado B_1C_1 e, portanto a linha poligonal ABC passará à linha poligonal $A_1B_1C_1$. Através desta correspondência o interior da linha poligonal ABC passará ao interior da linha poligonal $A_1B_1C_1$. Isto quer dizer que através da correspondência estabelecida o triângulo ABC sobrepõe-se totalmente ao triângulo $A_1B_1C_1$, ou seja, eles são congruentes, c.q.d. (NHÊZE, 1998, p. 180-181)

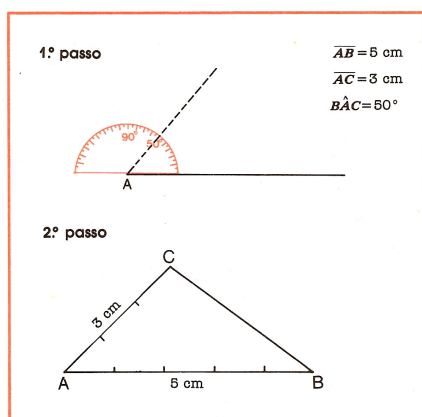
Figura 11 - Demonstração do critério LAL da congruência de triângulos apresentada em um livro didático de Moçambique.

Fonte: Nhêze, (1998, p. 180-181)

Técnica 6.b-5: Baseando-se na ideia de construção de um triângulo dados dois lados, e o ângulo por eles formado, recorre-se aos argumentos de isometria de que qualquer triângulo a construir com esses dados seria congruente ao inicial, institucionalizando-se, no final, o critério LAL. A Figura. 12 ilustra isso.

A demonstração do critério começa com a apresentação do problema de construção (Fig. 12).

2º Problema: Construir um triângulo conhecidas as medidas de dois lados e do ângulo por eles formado.



Depois da apresentação dos passos de construção de um triângulo dados dois lados e um ângulo por eles formado, os autores afirmam:

Se tivéssemos desenhado outro triângulo $A'B'C'$ com $A'B' = 5 \text{ cm}$ e $A'C' = 3 \text{ cm}$ e $\widehat{B'A'C'} = 50^\circ$, poderíamos assegurar a existência de uma isometria que transformaria o $\triangle ABC$ no $\triangle A'B'C'$, pelo que os triângulos seriam geometricamente iguais. (NHÊZE e VI, (1991, p. 62)

Figura 12 - apresentação do critério LAL da congruência de triângulos em um livro didático de Moçambique

Fonte: Nhêze e Vi, (1991, p. 62)

Discurso teórico-tecnológico θ/θ : O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas relativas a este critério de congruência de triângulos baseia-se na isometria no plano; na correspondência e sobreposição; condições de construção de triângulo dados dois lados e o ângulo por eles formado.

Observa-se que as técnicas **6.b-2** e **6.b-3** enquadram-se na categoria de provas pragmáticas, a diferença reside no fato de que a primeira baseando-se na ideia de argumentos por contradição tenta mostrar que não é possível construir um triângulo que seja diferente do inicial servindo-se dos mesmos dados. Na segunda técnica, a validação é sem nenhum questionamento da possibilidade de haver resultados diferentes. Já as técnicas **6.b-4** e **6.b-5** podem ser consideradas provas intelectuais, pois, nos argumentos não se faz menção a exemplos concretos. Mas, ambas as técnicas deixam por explicar um detalhe: não explicam, o que garante que o segmento BC será congruente ao segmento B_1C_1 , nem como se assegura a congruência entre os ângulos B e B_1 , ou entre C e C_1 .

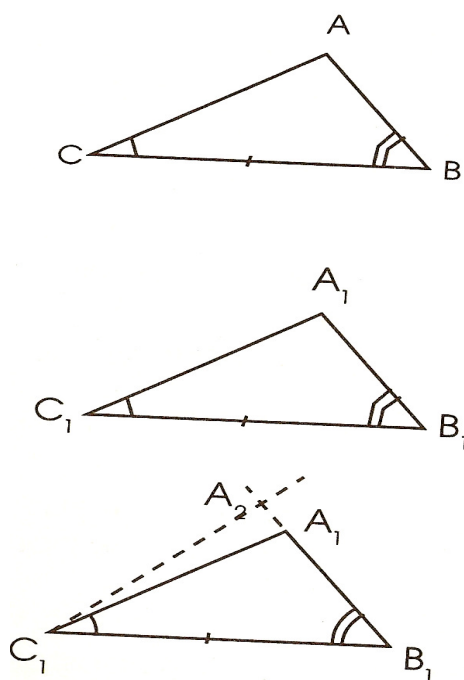
Subtarefa 6.c: Estabelecer o critério de congruência de dois triângulos, dado um lado e os ângulos adjacentes a ele.

Técnica 6.c-1: O critério apenas é enunciado sem alguma atividade exploratória.

Técnica 6.c-2: Constrói-se um triângulo, a partir de um segmento de reta e de dois ângulos que tem esse segmento como lado comum. Em seguida, tenta-se construir um triângulo diferente do inicial, usando as mesmas medidas.

Técnica 6.c-3: Constrói-se um triângulo, dados um segmento e dois ângulos que têm esse segmento, como lado comum. Depois se compara a construção obtida com as construções de outros que utilizaram os mesmos dados.

Técnica 6.c-4: Supondo-se que se têm dois triângulos em que um lado e os ângulos, adjacentes a esse lado são congruentes cada um a cada um; tenta-se demonstrar que o terceiro vértice de um triângulo vai corresponder com o terceiro vértice do outro triângulo, assegurando-se, desse modo, que o terceiro ângulo de um é congruente ao terceiro ângulo do outro, garantindo-se, assim, a congruência dos outros lados. Eis um exemplo tirado de um livro didático



O autor afirma o seguinte:

Sejam dados dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ nos quais $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$, $\hat{C} \cong \hat{C}_1$, $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_1$

Demonstremos que estes dois triângulos são congruentes.

Como os ângulos B e B_1 são congruentes, existe uma correspondência entre eles, tal que o ponto B passa ao ponto B_1 e o lado BC ao lado B_1C_1 .

Como BC e B_1C_1 são congruentes então C passará ao ponto C_1 .

Consideremos agora a imagem do lado AC , que será um segmento cujos extremos são $A_2 \in B_1A_1$ e C_1 : Os ângulos ACB e $A_2C_1B_1$ são congruentes pela própria correspondência que mantém as distâncias entre os pontos correspondentes. Por outro lado, pela hipótese, os ângulos ACB e $A_1B_1C_1$ e $A_2C_1B_1$ que são marcados do mesmo lado da reta C_1B_1 . Portanto, o lado C_1A_1 coincide com o lado C_1A_2 , de modo que os pontos A_1 e A_2 coincidem.

Tal como demonstração anterior, o triângulo ABC sobrepõe-se no triângulo $A_1B_1C_1$. Isto quer dizer que eles são congruentes, c.q.d. (NHÊZE, 1998, p. 182-183)

Figura 13 - demonstração do critério ALA da congruência de triângulos em um livro didático de Moçambique.

Fonte: Nhêze (1998, p. 182-183)

Técnica 6.c-5: Baseando-se nos procedimentos para construção de um triângulo, dados um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado, produzem-se argumentos apoiados em isometrias no plano, que vão mostrar que qualquer outro triângulo que for construído utilizando-se os mesmos dados será congruente ao triângulo inicial, institucionalizando-se, em seguida, o critério ALA da congruência de triângulos.

As técnicas atreladas a esta tarefa que visam a estabelecer o critério de congruência entre dois triângulos, dados dois ângulos e um lado comum, também não fogem das técnicas que discutimos para a tarefa anterior: umas baseiam-se em provas pragmáticas (**técnicas 6.c-2 e 6.c-3**) e outras em provas intelectuais (**técnicas 6.c-4 e 6.c-5**). Mas também notamos nestas duas técnicas que faltam algumas fundamentações nas demonstrações apresentadas: ambas as técnicas deixam por explicar um detalhe muito importante da demonstração – deixam de explicar que o mais importante é mostrar que o terceiro ângulo de um triângulo será congruente ao terceiro ângulo de outro triângulo e que os dois outros lados de um triângulo serão congruentes aos outros lados do outro triângulo cada um a cada um. Isto é que precisa ser provado.

Depois da definição dos itens que norteiam a análise de como os autores introduzem os conceitos relativos a triângulos com enfoque em prova e demonstração, nos dados do **Quadro.2**, apresentamos os resultados dessa descrição e análise.

Tarefa T_i	Técnica τ_j	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
	$\tau_{1.1}$ Construções com régua, lápis e papel		✓	✓		✓
T_1	$\tau_{1.2}$ Construções com software G D, usando pontos, segmentos de reta e circunferência.					
	$\tau_{1.3}$ Construções com apenas software de GD					
	$\tau_{2.1}$ Desenho, medição e comparação de resultados					

T_2	$\tau_{2.2}$ Desenho em papel/recorte/dobradura				✓	✓
	$\tau_{2.3}$ Como no $\tau_{2.2}$, mas com pontos médios nos lados				✓	
	$\tau_{2.4}$ Exploração com software de GD seguida de sua aceitação sem demonstração					
	$\tau_{2.5}$ Atividade exploratória seguida de validação por demonstração, usando a teoria das paralelas					
	$\tau_{2.6}$ Apenas a propriedade é apresentada sem atividade prévia de exploração, seguida de uma demonstração		✓			
	$\tau_{3.1}$ medição dos lados dado, um triângulo e comparação da soma com a medida do terceiro lado					
T_3	$\tau_{3.2}$ Dados três números tenta-se construir um triângulo usando esses números e verifica-se quando é possível			✓	✓	
	$\tau_{3.3}$ Tenta-se construir o triângulo com três pauzinhos, controlando-se quando é possível					
	$\tau_{3.4}$ A propriedade é apresentada como conhecida					✓
	$\tau_{3.5}$ Faz-se experimentação e depois valida-se a conjectura por uma demonstração formal					
	$\tau_{4.1}$ Por medição compara-se cada ângulo externo com a soma dos internos não adjacentes					
T_4	$\tau_{4.2}$ Explorações, por desenho e medição, de cada ângulo externo com a soma dos dois internos não adjacentes.					
	$\tau_{4.3}$ Tratamentos figural e algébrico da relação de cada ângulo externo com seu adjacente interno e a propriedade da soma dos ângulos internos de um Δ					✓
	$\tau_{4.4}$ Apenas apresentações da proposição com a visualização da propriedade por meio de uma figura		✓			

	$\tau_{4.5}$ Tratamento figural da relação entre ângulo externo e os internos não adjacentes por reconfiguração				√	
T_5	$\tau_{5.1}$ Uso de quadriculado				√	
	$\tau_{5.2}$ Uso de translações, rotações ou reflexões no plano					
	$\tau_{6a.1}$ O critério é apresentado como axioma					√
	$\tau_{6a.2}$ Com as mesmas medidas tenta-se construir dois triângulos de tamanhos diferentes					
T_{6a}	$\tau_{6.a-3}$ Utilizando os mesmos dados, cada um constrói um triângulo e compara sua construção com a dos outros					
	$\tau_{6.a-4}$ O critério é demonstrado, por meio da ideia de sobreposição de figuras				√	
	$\tau_{6.a-5}$ O critério é demonstrado, baseando-se na ideia de isometria			√		
	$\tau_{6.b-1}$ O critério é apresentado como um axioma					√
	$\tau_{6.b-2}$ Tenta-se construir dois triângulos diferentes com dois lados e o ângulo por eles formado congruente					
$T_{6.b}$	$\tau_{6.b-3}$ Utilizando os mesmos dados cada um constrói um triângulo e compara sua construção com a dos outros					
	$\tau_{6.b-4}$ O critério é demonstrado baseando-se na ideia de sobreposição de figuras				√	
	$\tau_{6.b-5}$ O critério é demonstrado, baseando-se na ideia de isometria que aplica um no outro			√		
	$\tau_{6.c-1}$ O critério é apresentado, como um axioma					√
	$\tau_{6.c-2}$ Tenta-se construir dois triângulos diferentes, mas com os mesmos dados: dois ângulos e o lado comum congruente cada um a cada um					

T _{6.c}	$\tau_{6.a-3}$ Utilizando os mesmos dados cada um constrói um triângulo e compara sua construção com a do outro					
	$\tau_{6.c-4}$ O critério é demonstrado, baseando-se na ideia de sobreposição de figuras				√	
	$\tau_{6.c-5}$ O critério é demonstrado baseando-se na ideia de isometria que aplica um no outro			√		

Quadro 2 - Resultados da análise e descrição da organização didática dos livros, quanto às atividades introdutórias dos conceitos.

Fonte: Dados do pesquisador

3.6 Discussões dos resultados da organização didática com enfoque nas atividades de introdução dos conceitos

Pela análise dos dados do Quadro 2, nota-se que:

(a) A propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo é tratada em quase todos os livros contemplados no presente estudo (em dois do Ensino Básico – 6^a e 7^a séries – e 2 da 8^a série), sendo o livro L₃ da 8^a classe (série) o único que não aborda essa propriedade, como objeto de estudo, senão uma ferramenta para a resolução de tarefas propostas. Mas, com exceção do livro L₂ da 7^a classe (série), que começa com uma demonstração pragmática por meio de visualização de como os três ângulos ficam quando juntados de modo que apenas um lado seja coincidente com o lado de outro ângulo sem nenhuma atividade exploratória (p. 49), seguida de uma validação por meio de uma demonstração formal, usando as propriedades das retas paralelas (p. 53), nos livros restantes, a propriedade é institucionalizada empiricamente pela manipulação – desenho, medição, recorte ou dobradura sem nenhum questionamento sobre as limitações desses procedimentos no estabelecimento de propriedades geométricas.

Nos quatro livros, observamos onde a propriedade é explicitamente tratada, três fazem-no por meio de prova pragmática, conforme a classificação de Balacheff (1998) preenchendo a função de descoberta; apenas o L₂, contemplou duas provas: uma pragmática e outra intelectual. Para este último livro,

consideramos que as duas provas apresentadas desempenham a função de explicação, pois não existem atividades que motivem o aluno a alguma ação que mostre que a demonstração visa a apresentar a descoberta.

Em relação aos três livros que validam a propriedade apenas por meio da atividade experimental, não levam o aluno a questionar sobre a validade desse procedimento. Balacheff (1998) afirma que esta forma de validação apresenta-se insuficiente, embora seja uma das formas de generalização, resiste ao longo do desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, autores como Pólya (1995), consideram a demonstração da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, como sendo indispensável para qualquer aluno que tenha visto Geometria. Pólya afirma que:

Se o estudante houver passado pelas aulas de Matemática sem realmente entendido algumas demonstrações semelhantes a esta, ele terá todo o direito de fazer as mais cáusticas censuras à sua escola e a seus professores. (PÓLYA 1995, p. 116).

O autor destaca a importância das demonstrações para o desenvolvimento intelectual dos alunos ao afirmar:

[...] se o aluno não tiver aprendido este ou aquele fato geométrico específico, não terá perdido muito. Mas se ele não houver familiarizado com as demonstrações geométricas, terá deixado escapar os melhores e mais simples exemplos das verdadeiras provas e perdido a melhor oportunidade de adquirir a ideia do raciocínio rigoroso. Sem esta ideia, faltar-lhe-á o verdadeiro critério para comparar argumentos de todos os tipos que se lhe apresentam na moderna vida cotidiana. (PÓLYA, 1995, p. 116)

(b) Propriedade da relação entre a medida de um ângulo externo com a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes (Tarefa T_4)

Dos cinco livros didáticos analisados, apenas três tratam dessa propriedade: são os livros L_2 , L_4 e L_5 . Os restantes não fazem menção a essa propriedade. O Livro L_2 apresenta a propriedade sem nenhuma dedução, nem atividade exploratória; mas em L_4 e L_5 a propriedade vem fundamentada, no primeiro, por uma reconfiguração e, no último, por meio de argumentos baseados na relação entre o ângulo externo, seu suplementar interno e a propriedade sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. O livro L_4 embora apresente uma

reconfiguração da figura por meio de uma reta paralela a um dos lados do triângulo, o fato não é aproveitado pelo autor, para produzir argumentos que validem a demonstração, portanto, a validação apoia-se na prova pragmática, segundo a classificação de provas propostas por Balacheff (1988). Apenas no livro L_5 , a validação que podemos considerar, enquadra-se na categoria de prova intelectual, podendo considerar-se que nesse livro a prova cumpre as funções de explicação e sistematização.

(c) Desigualdade triangular (T_3)

Dos quatro livros que tratam dessa propriedade, três fazem-na por meio de atividades experimentais assumindo, em seguida, como propriedade válida para qualquer triângulo, portanto, nas categorias de prova propostas por Balacheff (1988), podemos dizer que se trata de uma validação pragmática; o quarto livro apenas incorpora a propriedade, como uma ferramenta, portanto, já supostamente conhecida pelos alunos utilizadores do livro. O autor do livro L_2 da 7ª série não trata dessa propriedade, apesar de contemplar atividades de construção de triângulos que por força de circunstâncias, acabam contemplando tarefas em que não é possível construir o triângulo (tarefa 1.b da página 52). Essa tarefa é importante para a construção do conceito de triângulo, pois, como defende Retamal: “[...] um trabalho com a construção de figuras impossíveis, por exemplo, a de um quadrilátero com três ângulos retos, permitirá ajudar a tomada de consciência sobre as propriedades geométricas e as condições internas de uma configuração” (RETAMAL, 2009, p. 29).

Assim, os três livros que tratam da desigualdade triangular, fazem-no por meio de atividades de manipulação, mas sem nenhum questionamento se o que se constata nesta ou naquela figura triangular seja uma propriedade válida para qualquer triângulo. Hanna (2000) afirma que, alguns educadores matemáticos defendem que, o que se vê em sala de aula como ensino de prova, não passa de uma rotina de aprendizagem de provas matemáticas desprovidas de qualquer valor educativo. Para esses educadores, o papel educativo mais significativo são atividades de investigação, exploração, justificações informais e o uso de intuição do que a demonstração. Eles apoiam o cultivo nos alunos da percepção da

Matemática, como uma ciência heurística e enfatizam a abordagem indutiva. Pólya (1995) é dessa linha, ao afirmar que

[...] devemos acrescentar que muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental. (PÓLYA, 1995, p. 93)

O autor salienta, e nós concordamos com ele que, depois de se aceitarem as verdades geométricas com base na experimentação, é preciso mudar de ponto de vista: tendo em conta que o raciocínio que nos levou às ideias, foi apenas plausível, experimental, provisório, heurístico, é preciso tentar estabelecer definitivamente por meio de uma demonstração rigorosa. (PÓLYA, 1995, p. 93).

Portanto, acreditamos que a propriedade foi estabelecida apoiada em experimentações na 6ª série, nas séries seguintes, os autores deveriam questionar o método, levando o aluno a pensar em outras formas de validar propriedades geométricas que não fossem apenas por evidências resultantes de mera verificação experimental, levando o aluno a ver a necessidade das demonstrações formais, como o único meio aceite na Matemática para validar propriedades que se constata nas experimentações tal como defende Pólya (1995), e é apresentado pelos autores do livro L₂ da 7ª série/classe.

(d) Introdução dos critérios de congruência dos triângulos pelos autores dos livros didáticos

Uma leitura atenta dos dados do **Quadro 2** mostra que os três livros que tratam da congruência de triângulos, cada um deles introduz de forma diferente, mas os três critérios de forma igual: o livro L₃ com a ideia de isometrias no plano; o L₄ por meio da sobreposição de figuras e o livro L₅, simplesmente, enuncia os critérios como axiomas. Portanto, os dois livros L₃ e L₄ validam os critérios com base na prova intelectual e o L₅ considera os critérios, como axiomas, isto é, como proposições que não precisam ser demonstradas, mas, sim, ferramenta a usar para o estabelecimento de outras verdades que precisam de demonstração para sua validação.

Mas, enquanto os autores do livro L_3 deixam claro para o leitor com a linguagem de isometria que usam para demonstrar os critérios de congruência de triângulos, o autor do livro L_4 não deixa claro quais mecanismos devem ser usados para efetuar a sobreposição das figuras. Por exemplo, para deduzir o critério LAL da congruência de dois triângulos, apresenta a Fig. 14:

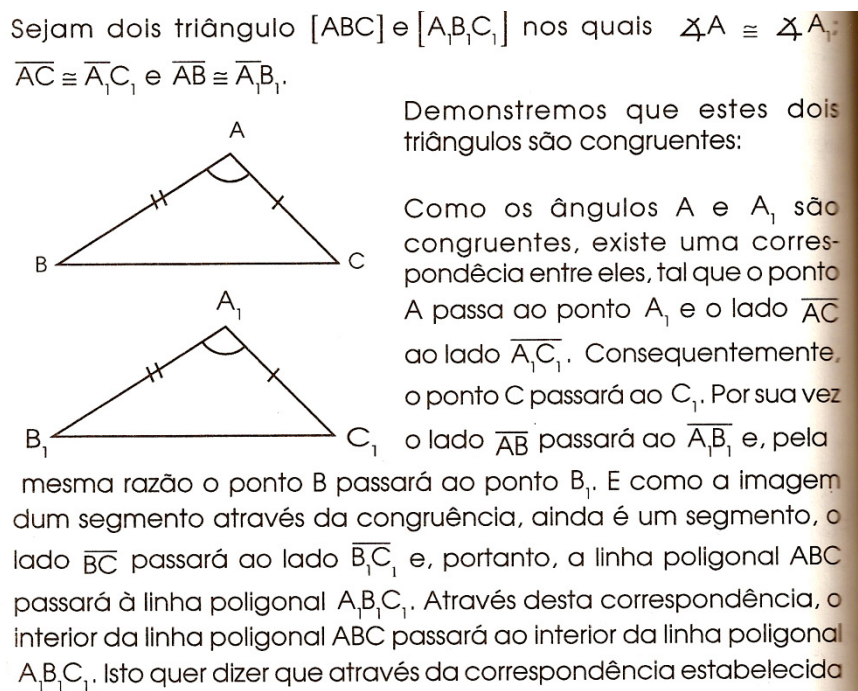


Figura 14 - Extrato da demonstração do critério LAL da congruência de triângulos usada em L_4
Fonte: Nhêze (1998, p. 180)

O autor termina a demonstração afirmando que “o triângulo ABC sobrepõe-se totalmente ao triângulo $A_1B_1C_1$, ou seja, eles são congruentes, c.q.d.” (NHÊZE, 1998, p. 181).

Esta “demonstração” envolve vários aspectos não levados em consideração pelo autor: o tipo de correspondência que estabelece a passagem do ponto A do triângulo ABC ao ponto A_1 do triângulo $A_1B_1C_1$ não foi explicitada pelo autor. Este afirma que “a imagem de um segmento através da congruência, ainda é um segmento”, deixando transparecer, segundo suas palavras, que congruência em Geometria é uma transformação, não uma relação.

Pesquisadores em Educação Matemática como Balacheff (1987, apud TOJO, 2005, p. 10) têm defendido que a construção dos fundamentos em Geometria deve iniciar com justificações empíricas e evoluir para validações

dedutivas, desde as séries iniciais, respeitando o nível de racionalidade dos alunos.

Freudenthal (1973, apud TOJO 2005) defende que no lugar de se levar a cabo com os alunos o formalismo rigoroso da Geometria axiomática, devem ser apresentadas ao aluno experiências de organização local em que algumas propriedades são estabelecidas sem demonstração, tomando os casos de congruência de triângulos, como exemplo de propriedades que poderiam ser apresentadas sem demonstração. Fetissov (1994) salienta que uma demonstração bem estruturada não pode basear-se senão em proposições já estabelecidas, sendo inadmissível qualquer alegação de evidências. Mas observamos que o autor do livro L_4 não usa este princípio ao incluir nos passos de suas demonstrações expressões que não foram previamente estabelecidas, com a exceção do critério LLL em que se baseia na definição das figuras congruentes que deu.

Fetissov (1994) faz uma discussão bastante circunstanciada sobre o conceito de *congruência* afirmando que as abordagens que se baseiam na ideia de superposição de figuras para explicar a congruência, estão implicitamente admitindo que as figuras geométricas podem ser transladas no espaço, sem sofrer nenhuma alteração, quer dizer, com esse enfoque, duas figuras geométricas serão congruentes se for possível transladar uma delas no espaço, fazendo-a superpor-se a segunda de tal modo que ambas coincidam em todas suas partes. Na verdade, o autor do livro L_4 usa essa ideia para produzir argumentos que fundamentam as “demonstrações” dos critérios LAL e ALA da congruência de triângulos, procedendo de igual modo. Mas sobre esse enfoque, Fetissov, afirma o seguinte:

À primeira vista, esse conceito de congruência parece totalmente compreensível, mas, mediante uma análise mais atenta, não é difícil encontrar nele um círculo vicioso. De fato, para estabelecer a congruência de duas figuras temos de fazer com que coincida uma com a outra; e, para fazer com que coincidam, temos de transladar uma delas no espaço, permanecendo essa última *invariante* durante o processo de translação. (FETISSOV, 1994, p. 64).

O autor continua com a explanação sobre o enfoque de transladação e sobreposição.

Mas o que significa *permanecer invariante*? Significa que a figura, durante todo o processo, mantém-se congruente à sua forma inicial. Isso mostra que se define o conceito de congruência mediante a ideia de translação de uma figura invariante e o conceito de *figura invariante* mediante o conceito de congruência (FETISSOV, 1994, p. 64-65)

Para evitar esse ciclo vicioso das demonstrações de congruência de triângulos por intermédio da ideia de sobreposição (ou superposição) de figuras, o autor defende que o conceito seja estabelecido, baseando-se em grupos de axiomas que envolvem a congruência de segmentos de reta, ângulos e triângulos, quer dizer, um dos critérios de congruência de triângulos deve ser assumido como um postulado ou axioma do qual outros critérios serão estabelecidos. Eis os axiomas que o autor apresenta:

- 1) Dados um segmento AB e uma semireta de origem A' , existe um e um só, ponto B' na semireta de maneira que $A'B' \cong AB$.
 - 2) A congruência de segmentos de reta é uma relação de equivalência, isto é: todo o segmento é congruente a si mesmo (propriedade reflexiva); dados dois segmentos de reta, se o primeiro é congruente ao segundo, então o segundo é congruente ao primeiro (propriedade simétrica); dados três segmentos de reta, se o primeiro é congruente ao segundo e este o terceiro, então o primeiro é congruente ao terceiro (propriedade transitiva).
 - 2) Se A, B e C são pontos colineares, com B entre A e C , e A', B' e C' também colineares, com B' entre A' e C' , e se, ainda, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.
 - 4) Dados um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semi-reta $\overrightarrow{O'A}$ contida na origem de um semi-plano também dado, então existe uma única semi-reta $\overrightarrow{O'B'}$ nesse semi-plano de maneira que $A'\hat{O}'B' \cong A\hat{O}B$.
 - 5) A congruência de ângulos é uma relação de equivalência
 - 6) Sejam $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ semi-retas coplanares tais que C é interior a $B\hat{A}D$ e $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'D'}$ semi-retas também coplanares e tais que C' é interior a $B'\hat{A}'D'$. Se $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$ e $C\hat{A}D \cong C'\hat{A}'D'$, então $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'D'$.
- i.e. se a ângulos congruentes somarmos ângulos congruentes, então as somas também serão iguais.

Afirma: “Finalmente, para fundamentar a congruência de triângulos, introduz-se mais um axioma”, a saber:

7) Se dois lados de um triângulo, bem como o ângulo formado por eles, são ordenadamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses lados, então os outros dois ângulos do primeiro triângulo também são ordenadamente congruentes aos outros dois ângulos do segundo triângulo (FETISSOV, 1994, p. 65-66)

Fetissov (1994) salienta que, com os sete axiomas, podem ser demonstrados os critérios de congruência de triângulos ou teoremas sobre a congruência de figuras sem precisar usar a ideia de superposição.

Para demonstrar o caso LAL da congruência, procedemos da seguinte maneira:

Sejam ABC e $A'B'C'$ os triângulos dados. Admitamos, por hipótese, o seguinte: $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\hat{BAC} \cong \hat{B'A'C'}$. Temos de demonstrar que os demais elementos desses triângulos são também congruentes entre si. O axioma 7 nos permite concluir imediatamente que $\hat{ABC} \cong \hat{A'B'C'}$ e $\hat{BCA} \cong \hat{B'C'A'}$. Resta-nos provar que $BC \cong B'C'$.

Com base no axioma 1, tomemos na semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ o ponto C'' tal que $B'C'' \cong BC$. Observando então os triângulos ABC e $A'B'C''$,

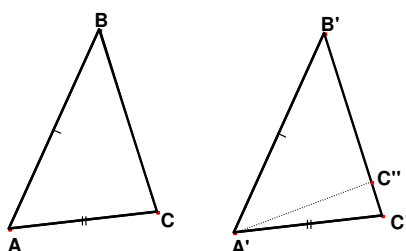


Figura 15 - Figura de suporte para a demonstração do critério LAL da congruência de triângulos
Fonte: Fetissov (1994, p. 66)

Notamos que $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C''$ e $\hat{ABC} \cong \hat{A'B'C''}$. Segundo o axioma 7, podemos concluir, então, que $\hat{B'A'C''} \cong \hat{BAC}$. Mas como $\hat{BAC} \cong \hat{B'A'C'}$, por

hipótese, da transitividade da congruência de ângulos (axioma 5) segue que $B'\hat{A}'C'' \cong B'\hat{A}'C'$. Temos, portanto, o seguinte: os ângulos $B'\hat{A}'C'$ e $B'\hat{A}'C''$ têm o mesmo vértice, o lado $A'B'$ comum, é congruente entre si e situa-se no mesmo semiplano. Considerando o axioma 4, somos forçados a concluir que $B'\hat{A}'C''$ e $B'\hat{A}'C'$ são os mesmos ângulos. Consequentemente, $\overrightarrow{A'C'}$ e $\overrightarrow{A'C''}$ devem coincidir e, assim, $BC \cong B'C''$. Onde, $B'C' \cong B'C'$. Isto completa a demonstração.

Portanto, temos aqui um exemplo de uma demonstração bem fundamentada baseada em um suporte teórico presente, ingrediente que tanto falta nas “demonstrações” que o autor do livro didático L_4 apresenta, como sendo demonstrações dos critérios LAL e ALA da congruência de triângulos.

Ainda Fetissov (1994) afirma que, seguindo o mesmo raciocínio utilizado para demonstrar o critério LAL da congruência de triângulos, demonstram-se os restantes critérios.

Nós já salientamos, ao longo deste trabalho, que autores como Fetissov (1994), Balacheff (1998) defendem que, em Matemática, uma demonstração bem estruturada deve apoiar-se em conceitos explicitados e aceites por uma comunidade, quer dizer, deve basear-se apenas em proposições já estabelecidas. Nessa ordem de ideias tendo em conta a definição que Nhêze (1998) deu de figuras congruentes, então, as demonstrações dos critérios de congruência deveriam ter suporte tecnológico nessa definição, o que conseguiu fazer para o critério LLL, mas não nos outros critérios. Também salientamos anteriormente, que alguns pesquisadores até chegam a questionar o real valor da forma, como são apresentadas algumas demonstrações em sala de aula.

Embora a pesquisa não esteja voltada ao ensino, na contextualização do problema, deixamos transparecer a grande influência que o livro didático exerce sobre os principais protagonistas do processo de ensino e aprendizagem – o professor e o aluno – visto como depositário dos saberes a transmitir e a assimilar.

Desse modo, argumentos como aqueles apresentados na tentativa de fundamentar o critério LAL ou outros critérios, que alguns conceitos ainda estão por estabelecer, acabam tornando essa tentativa quase que inútil, pois, para além

do que adiantamos anteriormente, pesquisadores como Hanna (2000), de Villier (2000), defendem a valorização de provas que explicam “porquê” e, por conseguinte, dar-se mais atenção inicialmente às provas que ajudam a explicar.

Nesse contexto, defendemos que os critérios de congruência de triângulos poderiam ser introduzidos por meio de atividades de experimentação em que, por meio de construções, são constatadas as condições mínimas para a garantia da congruência de dois triângulos e, posteriormente, são utilizadas para explicar propriedades ligadas a outros conceitos que têm correlação com esses critérios.

Os dados do Quadro 2 mostram que cada um dos livros didáticos que trata dos critérios de congruência de triângulos, privilegia apenas uma técnica, sem contemplar outras alternativas. Nenhum dos livros propõe mais de um método na introdução desses critérios. Na contextualização deste estudo, salientamos que os documentos oficiais da Educação de Moçambique reconhecem que a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento de competências por meio da observação, visualização, experimentação..., não fazem parte da prática do dia a dia na sala de aula. Assim como reportamos também nessa parte da pesquisa, estudos mostram que ambientes de ensino são fortemente influenciados pela forma como os livros didáticos são estruturados. Os livros objeto de pesquisa não contemplam muitas estratégias de estudo dos conceitos ligados às propriedades dos triângulos. Desse modo, podemos depreender o quanto esse material está limitando o desenvolvimento das habilidades e competências dos alunos que o utilizam.

Quanto à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, constatamos que:

Em geral, os cinco livros estudados privilegiam os registros figural e discursivo (na língua natural e simbólica). Quanto às provas e demonstrações, podemos destacar que no livro L_1 da 6ª série/classe observa-se que as principais propriedades relativas aos triângulos apresentadas (soma dos ângulos internos, a relação entre os ângulos opostos a lados congruentes em triângulos isósceles) são validadas mediante a coordenação entre os registros discursivo e o material (JESUS, 2008).

Normalmente, os autores pedem que se construa um triângulo de papel e por dobradura explore a conjectura que está relacionada ao conceito em estudo. Para os ângulos opostos aos lados congruentes em triângulos isósceles, os autores apresentam a seguinte atividade: “Construa um triângulo isósceles de papel. Recorta o triângulo. Compara, por dobragem, os ângulos opostos aos lados iguais. O que concluis?” (DRAISMA e SOVERTKOV, 1991, p. 114). Para a propriedade da soma dos ângulos internos, os autores apresentam uma atividade formulada da seguinte maneira:

2 Soma dos ângulos de um triângulo

- Constrói um triângulo qualquer de papel
- Marca os ângulos com as letras α , β , γ
- Corta os ângulos. Forma um ângulo igual dos três ângulos.
- Quanto mede esse ângulo?

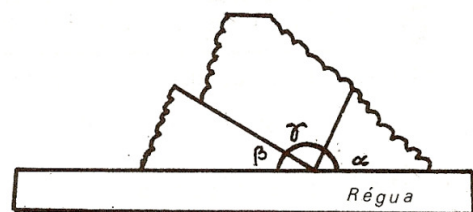


Figura 16 – Reconfiguração que leva à conjectura
Fonte: Draisma e Sovetkov (1991, p. 62)

Portanto, mais uma vez, notamos que a propriedade é validada, mediante a coordenação entre o registro discursivo e o registro figural. O mesmo procedimento de validação, recorrendo à coordenação entre os registros discursivos e a representação do registro material é apresentado no livro L_4 para validar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Observa-se este fato quando o autor propõe que se desenhe um triângulo qualquer e com uma tesoura recorte os três ângulos, colocando-os de modo a obter o que se reproduz a seguir e pergunta: “Que tipo de ângulo se forma?” (NHEZE, 1998, p. 170).



Figura 17 – Outra reconfiguração que leva à conjectura sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.
Fonte: Nhêze (1998, p. 170)

Quanto ao livro L_3 da 8ª série/classe, que não trata da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, nem da propriedade do ângulo externo de um triângulo, constatamos que, em relação à congruência de triângulos os casos de congruência são apresentados em dois registros: discursivo e figural. No registro discursivo, são apresentados os argumentos e a institucionalização, e no registro figural são apresentadas as construções que complementam e explicitam o discurso teórico.

Em relação ao livro L_4 da 8ª série/classe, já salientamos que a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo é validada por meio de desenho em papel, recorte e dobradura, (técnica $\tau_{2.2}$), portanto, no registro material (JESUS, 2008). No que se refere à propriedade do ângulo externo de um triângulo, é tratada pautada na reconfiguração figural que mostra sua relação com a soma dos dois internos não adjacentes (técnica $\tau_{4.5}$ do Quadro 2), portanto, o tratamento é feito em dois registros (figural e discursivo). Os casos de congruência de triângulos são apresentados em dois registros: discursivo e figural, a desigualdade triangular é mostrada em dois registros (figural e discursivo). Pela leitura das técnicas constantes do Quadro 2, podemos concluir que no livro L_4 as propriedades objeto de demonstrações são apresentadas em dois registros de representação.

Já o livro L_5 a dedução da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo é feita por meio do registro material. A propriedade do ângulo externo de um triângulo é apresentada por um lado com base na reconfiguração de uma figura e, por outro lado, por meio de uma atividade de medição que leva à conjectura sobre a soma dos ângulos externos de um triângulo. O registro discursivo é por meio da linguagem simbólica; mas os casos de congruência de triângulos todos são apresentados no registro discursivo por meio da língua natural.

Agora, analisaremos as atividades propostas pelos autores no intuito do aluno consolidar seus conhecimentos. Como salienta Brousseau (1996), saber Matemática é mais do que aprender definições e teoremas, a fim de reconhecê-los em ocasiões em que podem ser utilizados e aplicados, mas resolver um

problema é apenas uma parte do trabalho. Encontrar boas questões é tão importante como determinar suas soluções.

Assim, nesta parte do trabalho as questões que colocamos têm por objetivos criar critérios que nos guiarão na busca da **praxeologia** didática adotada pelo(s) autor(es) de livros didáticos para os alunos se exercitarem.

3.7 Descrição e análise da organização didática com enfoque nas atividades propostas aos alunos para exercício

Situação ∂_7 : Que atividades são propostas aos alunos relacionadas à construção de triângulos?

Tarefa $T_{\partial_7.1}$: Construir um triângulo:

- a) dadas as medidas dos três lados
- b) dados dois lados e o ângulo por eles formado
- c) dados dois ângulos e um lado comum aos dois

Técnica $\tau_1\partial_7.1$: Dependendo dos dados e condições do problema, poder-se-á fazer o apelo ao uso de apenas régua e compasso (situação do item a); de régua e transferidor (para o caso do item b); ou de régua, transferidor e compasso (situação do item c).

Técnica $\tau_2\partial_7.2$: Construção com apoio de software de Geometria dinâmica com recurso ou não à ferramenta “transferência de medidas” conforme os dados do problema.

Discurso teórico θ/Θ : As tarefas referentes a cada um dos itens acima têm a ver com as construções empíricas de triângulos. No caso do item a), esperamos que o aluno consiga construir triângulo, tendo presente que cada ponto será vértice de dois segmentos de reta e que a construção será possível se, ao usar régua e compasso, houver a intersecção dos arcos da circunferência e há duas soluções possíveis; para a condição do item b), espera-se que o aluno consiga construir um ângulo; em seguida, marque dois segmentos de reta em que

um dos extremos é o vértice do ângulo, e, finalmente, saiba que o terceiro lado do triângulo é obtido unindo os outros extremos não adjacentes ao ângulo dos dois segmentos. Finalmente, para o caso do item c), o aluno deverá perceber que os dois extremos de um segmento serão os vértices dos dois ângulos dados e que o terceiro lado do triângulo resultará da intersecção dos outros lados dos dois ângulos dados.

Situação ∂_8 : Quais atividades são propostas aos alunos relacionadas com a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo?

Tarefa $T\partial_{8,1}$: Determinar a medida de algum ângulo interno, dada alguma condição de partida, por exemplo:

- a) a medida de um ângulo interno
- b) a medida de um ângulo externo
- c) a relação entre ao menos dois ângulos internos

Técnica $\tau_1\partial_{8,1}$: Dependendo da formulação da pergunta, poderá ser por um cálculo em que o ponto de referência terá de ser 180° e trabalhar de modo que os dados fornecidos, para determinar sua soma seja 180.

Técnica $\tau_2\partial_{8,1}$: Poderá ser por meio de medição com transferidor.

Técnica $\tau_3\partial_{8,1}$: Poderá ser a mobilização inicial do conceito de ângulos adjacentes suplementares, seguida da aplicação da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Por exemplo, supomos que a atividade dada esteja relacionada com a Fig. 18:

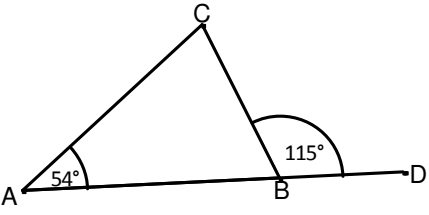
Tarefa: Determinar a medida dos ângulos internos do triângulo ABC da figura	Técnica possível:
	Pela figura, espera-se que o procedimento seja de primeiro calcular o ângulo B, pela relação $\hat{B} + 115^\circ = 180^\circ$; depois do cálculo da medida de $\hat{B}$, pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, calcula-se o valor de C.

Figura 18 - Figura usada para a aplicação da propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Fonte: O pesquisador.

Discurso tecnológico-teórico: Espera-se que o aluno aplique a relação entre os ângulos internos de um triângulo, em que sua soma seja 180° ; também, em alguns casos pode ser que se espere que o aluno precise trabalhar com o conceito de ângulos adjacentes suplementares para daí mobilizar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Tarefa T_{8.2}: Explicar ou justificar se pode existir um dado triângulo com algum tipo de ângulos, por exemplo, ter dois ângulos retos ou ter um ângulo reto e um ângulo obtusângulo, etc.

Técnica $\tau_1\partial_{8.2}$ Pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, poder-se-á verificar se a soma dos dois números fornecidos é inferior ou não a 180. Se for inferior, então o triângulo pode existir; caso contrário, o triângulo não existe. No caso de fornecimento de três ângulos, o processo de controle poderá ser simplesmente de ver se a soma é ou não 180° .

Discurso teórico tecnológico: Espera-se que o aluno tenha como base de fundamentação que um triângulo pode existir, se a soma dos ângulos internos for igual a 180° ; ou se a soma de dois de seus ângulos internos for menor do que 180° .

Tarefa T_{8.3} Deduzir a relação entre um ângulo externo de um triângulo com os dois internos não adjacentes ou a propriedade da soma de seus ângulos internos.

Técnica $\tau_{1\partial 8.3}$: Poderá ser por meio de construção e medição com transferidor que se chega a uma conjectura que mostra a relação seguida de uma validação ou não.

Técnica $\tau_{2\partial 8.3}$: Pode ser por meio de um desenho de triângulo de papel, seu recorte seguido da dobradura dos vértices, de modo que cada um dos lados fique junto de outro, como no caso do exemplo, da Figura 19, extraída de um livro didático.

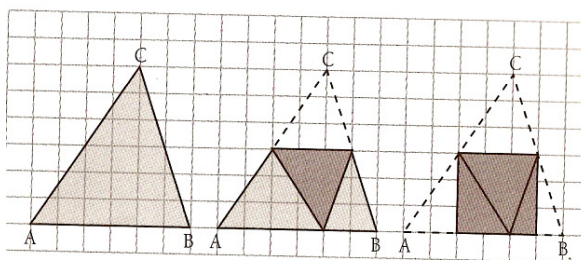
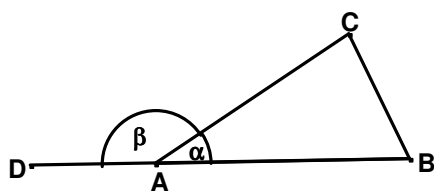


Figura 19 - Procedimento de dobradura que os alunos devem fazer para deduzir a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Fonte: Carvalho e Martins (2007, p. 92)

Técnica $\tau_{3\partial 8.3}$: Por meio de uma construção geométrica, da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e a noção de ângulos adjacentes suplementares, deduz-se a relação. Por exemplo: Dada a figura 20 mostre que, em qualquer triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.



Dedução

1. Pela figura $\alpha + \beta = 180^\circ$, mas por outro
2. $\alpha + B + C = 180^\circ$. Então,
3. $\alpha + \beta = 180^\circ = \alpha + B + C$
4. $\beta = B + C$.

A demonstração faz-se de igual modo se tomamos o ângulo interno B ou C com o respectivo externo adjacente, completando assim a demonstração.

Figura 20 - Ilustração da dedução da relação entre um ângulo externo e os internos não adjacentes de um triângulo.

Fonte: O pesquisador.

Discurso tecnológico-teórico: O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas relativas à tarefa baseia-se na propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, na relação entre dois ângulos adjacentes suplementares e/ou na regra de substituição.

Situação ∂_9 : Que atividades são propostas aos alunos relacionadas com as condições de existência de um triângulo.

Tarefa $T\partial_{9,1}$: Avaliar e justificar se dados três números (na mesma unidade) ou três segmentos podem ser medidas ou os lados de um triângulo.

Técnica $\tau_1\partial_{9,1}$: Com régua ou compasso (no caso de segmentos) verifica-se se não existe algum segmento que seja maior ou igual à soma de dois outros.

Discurso teórico-tecnológico: O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas relativas à atividade, baseia-se na propriedade que estabelece que, em um triângulo, a medida de qualquer lado é sempre menor que a soma das medidas dos dois outros.

Tarefa $T\partial_{9,2}$: Avaliar e justificar se dados três números (na mesma unidade), podem ser as medidas de ângulos internos de um triângulo.

Técnica $\tau_1\partial_{9,2}$: Verifica-se se a soma é igual ou não a 180° . Caso a resposta seja negativa, conclui-se que tal triângulo não existe.

Discurso teórico θ/Θ : O discurso tecnológico-teórico que justifica a técnica baseia-se na propriedade que diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Situação ∂_{10} : Que atividades são propostas aos alunos relativas à propriedade da desigualdade triangular?

Tarefa $T\partial_{10,1}$: Justificar se é sempre possível construir um triângulo, dadas as medidas de três segmentos.

Técnica $\tau_1\partial_{10,1}$: Com régua e compasso e utilizando a transferência de segmentos e/ou intersecção de arcos de circunferência, tenta-se construir o triângulo cujos lados têm como medidas os valores fornecidos. Se os arcos

construídos, tendo como centro os extremos do segmento, intersectam-se fora do segmento, então, o triângulo existe; se não se intersectam ou intersectam-se exatamente em um ponto contido no segmento, então, o triângulo não existe.

Técnica $\tau_2\partial_{10.1}$: Sem fazer a construção, compara-se cada um dos valores dados com a soma de dois deles, se qualquer deles for menor que a soma de outros dois, então, o triângulo existe; porém, se algum deles for maior ou igual à soma dos dois outros, então, o triângulo não existe.

Discurso teórico-tecnológico θ/Θ : O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas baseia-se na propriedade que diz que em um triângulo qualquer lado é menor que a soma dos outros dois.

Tarefa $T\partial_{10.2}$: Dizer em que valores a medida do terceiro lado de um triângulo pode variar, dadas as medidas de dois de seus lados.

Técnica $\tau_1\partial_{10.2}$: O intervalo obtém-se pela propriedade da desigualdade triangular.

Discurso teórico-tecnológico θ/Θ : O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as técnicas baseia-se na propriedade que diz que em um triângulo qualquer a medida de um lado é menor que a soma dos dois outros.

Situação ∂_{11} : Quais atividades são propostas aos alunos relacionadas com os critérios de congruência de triângulos?

Tarefa $T\partial_{11.1}$ Utilizar os casos de congruência de triângulos para provar determinadas afirmações em Geometria.

- a) Provar que dois segmentos ou dois ângulos são congruentes;
- b) Provar que os lados opostos paralelos de um quadrilátero são congruentes,
- c) Um quadrilátero com os lados opostos congruentes e ângulos opostos também congruentes tem as diagonais intersectando-se pelos seus pontos médios.

Por exemplo, na Figura 21, os segmentos AC e CE estão sobre a mesma reta suporte, bem como os segmentos BC e CD. Sabe-se que $AC \cong CE$ e que $BC \cong CD$. Prove que $AB \cong DE$.

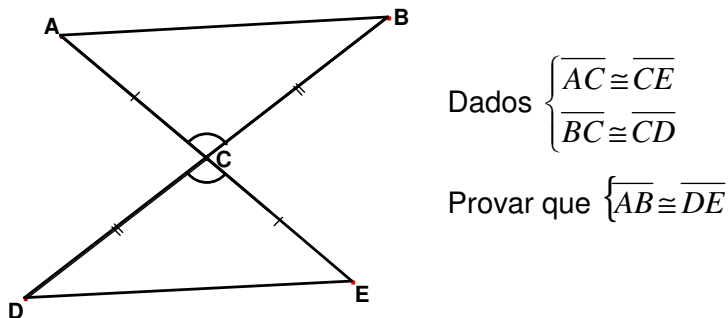


Figura 21 - Ilustração da aplicação dos critérios de congruência de triângulos para demonstrar alguma relação geométrica.

Fonte: Adaptado pelo autor dos livros didáticos.

Técnica $\tau_{1211.1}$: Pela observação das condições definidas, procura-se produzir argumentos que envolvam algum dos critérios de congruência de triângulos.

Para o exemplo dado, o procedimento pode ser como o seguinte:

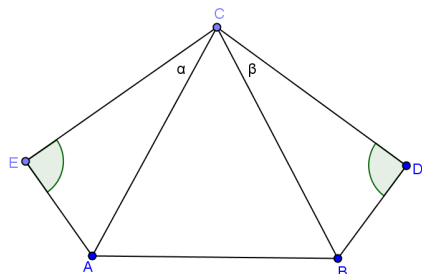
Afirmação	Justificações
$\overline{AC} \cong \overline{CE}$	Dado (L)
$\angle ACB \cong \angle ECD$	Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v) (A)
$\overline{BC} \cong \overline{CD}$	Dado (L)

$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle EDC$ (Caso LAL)

Se dois triângulos são congruentes, seus elementos correspondentes são congruentes.

Logo, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, c.q.d.

Outro exemplo que podemos dar é o seguinte: Na figura, ABC é triângulo isósceles com $AB \cong BC$; $\alpha \cong \beta$; $\hat{D} \cong \hat{E}$. Provar que $BD \cong CE$.



Dados: $\begin{cases} ABC \text{ é triângulo isósceles com } AB \cong AC \\ \alpha \cong \beta \\ \hat{D} \cong \hat{E} \end{cases}$

Pedido: Provar que $BD \cong CE$

Fig. 23

Figura 22 - Segunda ilustração da utilidade dos critérios de congruência de triângulos.

Fonte: Adaptação pelo autor de livros didáticos

O procedimento de resolução pode ser como o que segue.

Consideremos os triângulos ABD e ACE da Figura 22.

Argumentos	Justificações
1. $AB \cong AC$	Pelos dados (L)
2. $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$	Pelos dados (A)
3. $\hat{D} \cong \hat{E}$	Pelos dados (Ao)
4. $\triangle ABD \cong \triangle ACE$	Caso LAAo
5. $BD \cong CE$	Lados correspondentes em triângulos congruentes- c.q.p.

Discurso tecnológico-teórico: O discurso teórico-tecnológico para justificar os procedimentos está atrelado aos critérios de congruência de triângulos.

Tarefa T_{11.2}: Utilizar as relações em triângulos congruentes para justificar algumas afirmações.

Técnica $\tau_{11.2}$: Pela coordenação entre os registros em cada par de triângulos congruentes, identificam-se os elementos correspondentes obtendo, desse modo, os argumentos que vão fundamentar a resposta.

Por exemplo, suponhamos ter a seguinte atividade:

De dois triângulos ABC e DEF sabe-se que $AB = EF$, $BC = DE$ e $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$.

- Justifica que “ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ”
- Completa: $med(\hat{A}) = \dots$; $med(\hat{C}) = \dots$.
- Sendo $\hat{A} = 75^\circ$ e $\hat{B} = 42^\circ$, determina $\hat{D}$.

Como ponto de partida poderá ser preciso fazer um esboço de dois triângulos congruentes para melhor visualização dos elementos correspondentes. Assim poderá ser:

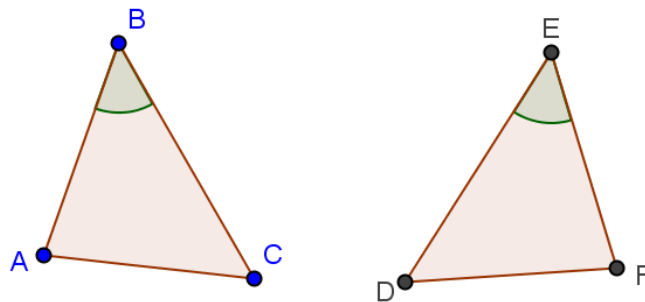


Figura 23 - ilustração de como identificar os elementos correspondentes em triângulos congruentes

Fonte: Próprio autor

- Assim, pela figura conclui-se facilmente que “ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ pelo critério LAL;
- Em triângulos congruentes, a ângulos congruentes opõem-se lados congruentes, então, como o ângulo A opõe-se o lado BC congruente ao lado DE que se opõe ao ângulo F no triângulo DEF, $med(\hat{A}) = med(\hat{F})$; $med(\hat{C}) = med(\hat{D})$.
- Pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo $med(\hat{C}) = 180^\circ - 75^\circ - 42^\circ = 63^\circ$, portanto, $med(\hat{D}) = 63^\circ$.

Discurso tecnológico-teórico: O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas baseia-se nas propriedades dos elementos correspondentes em triângulos congruentes.

Tarefa T_{11.3}: Aplicar os critérios de congruência de triângulos para provar a igualdade geométrica de dois triângulos, dadas algumas condições.

Técnica $\tau_{11.3}$: Análise dos dados e condições fornecidos na figura e na linguagem simbólica que permitem enxergar o critério de congruência que fundamenta a resposta.

Discurso tecnológico-teórico: O discurso tecnológico-teórico que fundamenta as tecnologias relativas ao tipo de tarefas em referência são os critérios de congruência de triângulos e outras propriedades geométricas inerentes às condições dadas nas atividades. Por exemplo,

1. Para resolver a seguinte questão:

Na Figura 24, sabe-se que $AB = BC$ e $AD = DC$.
Demonstre que o $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

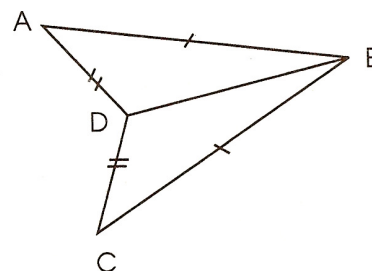
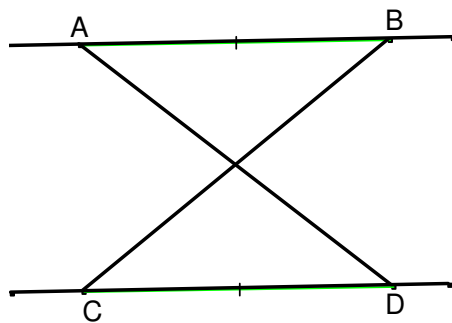


Figura 24 - um exemplo de aplicação dos critérios de congruência de triângulos
Fonte: Nhêze (1998, p. 185)

Pelas condições fornecidas na Figura, tem-se:

1. $AB = BC$ pelos dados – (L)
 2. $AD = DC$ pelos dados – (L)
 3. $DB = DB$ pela construção – (L)
- $\Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB$ pelo caso L.L.L.

Mas para a questão



Na Figura 25, sabe-se que $AB = CD$ e $AB \parallel CD$.

Mostre que $\triangle ABE \cong \triangle CDE$

Figura 25 – Ilustração de um exercício.
Fonte: Nhêze (1998, p. 185)

Aqui já é preciso levar em consideração os dados constantes da legenda, portanto, o procedimento pode ser o seguinte:

Argumentos	Justificações
1. $\hat{A} \cong \hat{D}$	1. Alternos em retas paralelas cortadas por AD (A)
2. $AB \cong CD$	2. Pelos dados (L)
3. $\hat{B} \cong \hat{C}$	3. Alternos em retas paralelas cortadas por BC (A)
4. $\triangle ABE \cong \triangle CDE$	4. Pelo critério ALA

As duas tarefas embora tenham como ferramenta os critérios de congruência de triângulos diferem no critério, em razão das condições impostas na Figura e nos dados.

Tarefa T_{11.4}: Demonstrar as propriedades dos triângulos isósceles, tais como:

- os ângulos da base (ângulos opostos a lados congruentes) são congruentes;
- A altura relativa à base de um triângulo isósceles, divide-o em dois triângulos retângulos congruentes;
- A bissetriz do ângulo oposto à base de qualquer triângulo isósceles é também altura e mediana relativa ao lado oposto.

Técnica $\tau_1\partial_{11.4}$ As técnicas a usar são várias, conforme a propriedade a estudar. Por exemplo, para a propriedade do item a, para além do uso dos critérios de congruência de triângulos, existe outra técnica em alguns livros didáticos, a saber:

Técnica $\tau_2\partial_{11.4}$: Por construção e recorte de um triângulo isósceles de papel, faz-se a dobradura, verificando-se como os ângulos opostos aos lados congruentes comportam-se na dobradura. (Prova pragmática).

Discurso tecnológico-teórico: O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas baseia-se nos critérios de congruência de triângulos ou na sobreposição de ângulos (para o caso da prova pragmática).

Tarefa $T\partial_{11.5}$: Completar as demonstrações, preenchendo alguns espaços vazios

Técnica $\tau_1\partial_{11.5}$: Baseando-se no esquema que comporta a demonstração, completam-se os espaços, de acordo com os passos dados. Por exemplo, se tivermos a seguinte tarefa:

Complete a demonstração que se segue

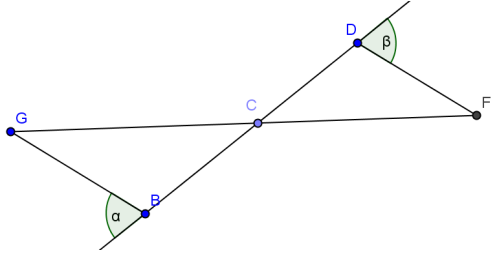
	Hipótese $\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha} \cong \hat{\beta} \\ \overline{BC} \cong \overline{CD} \\ \overline{BG} \cong \overline{CD} \end{array} \right.$ Tese: $\{\hat{G} \cong \hat{F}\}$
---	--

Figura 26 - Exercício de aplicação de casos de congruência de triângulos

Argumentos	Justificações
1. $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}; \overline{BC} \cong \overline{CD} e \overline{BG} \cong \overline{DF}$	1. Por hipótese
2. $\text{med}(\hat{\alpha}) + \text{med}(\hat{\beta}) = 180^\circ$	2. <u>Ângulos adjacentes suplementares</u>
3. $\text{med}(\hat{\beta}) + \text{med}(\hat{D}) = 180^\circ$	3. <u>Ângulos adjacentes suplementares</u>
4. $\hat{D} = \hat{B}$	4. <u>Já que por hipótese $\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$</u>
5. $\triangle GBC \cong \triangle CBF$	5. Pelo caso <u>LAL</u>
6. $\hat{G} \cong \hat{F}$	6. <u>Ângulos opostos a lados congruentes.</u>

Nota: O sublinhado corresponde aos espaços vazios que deveriam ser preenchidos.

Discurso tecnológico-teórico: O discurso que justifica a técnica, fundamenta-se conforme o conceito a usar como a ferramenta para completar a demonstração.

Os dados do Quadro 3 que se segue, apresentam os resultados das buscas da organização didática nos livros contemplados no estudo com enfoque nas atividades propostas aos alunos.

Quadro 3 - Tipo de atividades propostas aos alunos para a exercitação

Tarefa $T\partial_i$	Técnica $\tau_j\partial_k$	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
$T\partial_{7.1}$: Construir ou desenhar um triângulo dadas algumas condições	$\tau_1\partial_{7.1}$: pode ser por meio de um instrumento de medida	√	√	√	√	√
	$\tau_2\partial_{7.2}$: pode ser usando um software de GD.					
$T\partial_{8.1}$: calcular a medida de algum ângulo de	$\tau_1\partial_{8.1}$: Uso da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo	√	√	√	√	√

um triângulo	$\tau_2\partial_{8.1}$: medição com algum instrumento de medida		✓		✓	
	$\tau_3\partial_{8.1}$: uso das propriedades do ângulo externo e/ou da soma dos ângulos internos	✓	✓	✓	✓	✓
$T\partial_{8.2}$: explicar se dados 3 n° podem ser medidas de ângulos internos de um Δ	$\tau_1\partial_{8.2}$: uso da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo	✓	✓			
$T\partial_{8.3}$: deduzir a medida de um ângulo externo de um triângulo, ou a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo	$\tau_1\partial_{8.3}$: medição seguida de conjectura que se demonstra ou não					
	$\tau_2\partial_{8.3}$: dobradura de um triângulo de papel	✓			✓	✓
	$\tau_3\partial_{8.3}$: uso da soma dos ângulos internos e ângulos adjacentes suplementares					✓
$T\partial_{9.1}$: justificar se 3 n° podem ser medidas de lados de um triângulo	$\tau_1\partial_{9.1}$: tentativa de construção com régua e compasso	✓		✓	✓	✓
	$\tau_2\partial_{9.1}$: comparação de cada n° com a soma dos outros dois				✓	
$T\partial_{10.1}$: Justificar se 3 n° podem ser medidas de lados de um triângulo	$\tau_1\partial_{10.1}$: tentativa de construção	✓			✓	✓
	$\tau_2\partial_{10.1}$: uso de desigualdade triangular				✓	✓
$T\partial_{10.2}$: estimar entre que n° varia 3° lado Δ	$\tau_1\partial_{10.2}$: controle da soma e da diferença dos valores dados			✓	✓	✓

$T_{\partial 11.1}$: Usar casos de congruência de triângulos para provar afirmações	$\tau_1 \partial_{11.1}$: Observação de condições e produção de argumentos			√	√	√
$T_{\partial 11.2}$: Justificar prop usando relações em triângulos congruentes	$\tau_1 \partial_{11.2}$: Identificação e uso de elementos correspondentes			√	√	√
$T_{\partial 11.3}$: Usar critérios congr de Δ para provar propriedades geométricas	$\tau_1 \partial_{11.3}$: Análise dos dados e escolha de critério adequados segundo o caso			√	√	√
$T_{\partial 11.4}$ Demonstrar. Propriedades de triângulos isósceles	$\tau_1 \partial_{11.4}$: usando critérios de congruência de triângulos			√	√	√
	$\tau_2 \partial_{11.4}$: recorte e dobradura	√				
$T_{\partial 11.5}$: Completar demonstrações	$\tau_1 \partial_{11.5}$: Preenchimento de espaços em branco					√

Fonte: Dados do pesquisador

3.8 Discussão dos resultados da organização didática com enfoque nas atividades de resolução de problema propostas aos alunos

No início deste tópico, dissemos que alguns pesquisadores como Brousseau (1996) defendem que uma boa ação de aprendizagem do aluno depende da qualidade de exercícios que lhe são disponibilizados, tanto pelo professor como pelo material didático (por exemplo, o livro didático). Analisando as tarefas propostas para exercício dos alunos, tecemos as seguintes observações:

- a) Todos os cinco livros didáticos analisados contemplam as atividades de construção de triângulos para a apreensão do conceito de triângulo e/ou quanto às condições de sua existência. Apresentamos a seguir, o quadro que resume a ênfase dada pelos autores dos livros analisado.

Quadro 4 - Natureza de atividades de construção de triângulos propostas nos livros didáticos

Atividade proposta	L ₁		L ₂		L ₃		L ₄		L ₅	
	s.jf	c.jf	s.jf	c.jf	s.jf	c.jf	s. jf	c. jf	s. jf	c. jf
Construir um triângulo dadas as medidas dos lados		1	1		2		1		1	
Construir um triângulo dados os dois lados e um ângulo		1	1		1		1		1	
Construir um triângulo dados os dois ângulos e um lado			1		2		2		1	
Construir um triângulo dados os dois ângulos		1								

Fonte: O pesquisador

s.jf: sem justificativa c.jf: com justificativa

Os dados do Quadro 4 mostram que apenas o livro L₁ contempla as atividades de construção em que uma justificativa é solicitada. Os outros livros tratam essa atividade apenas como uma mera construção sem intenção aparente de desenvolver no aluno o espírito de argumentação.

Voltando ao quadro que apresenta o resumo das técnicas relativas às atividades desenhadas para o exercício dos alunos, verificamos que nenhum dos cinco livros didáticos contempla atividades de construção em ambiente de Geometria Dinâmica, mesmo o de edição mais recente (2007).

Ainda nos dados do Quadro 3, constatamos que os cinco livros didáticos contemplam, de um ou de outro modo, atividades relacionadas com a propriedade da soma dos ângulos internos. Sua diferença pode residir, talvez, no enfoque que oferecem: se apenas são atividades que pura e simplesmente têm por objetivo a computação, ou se essa propriedade é usada para fundamentar outras propriedades. Assim, o quadro que se segue apresenta o resumo do enfoque de cada livro didático quanto a isso.

Quadro 5 - Tipo de atividades relativas à propriedade da soma dos ângulos internos e/ou externos num triângulo presentes nos livros didáticos

Tipo de atividade	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
1. Atividades apenas para calcular a medida de algum ângulo dado ...	10	5	1	5	2
2. Atividades para deduzir propriedades/relações	6			5	4
3. Atividades para determinar a medida de algum ângulo usando a relação entre lado e ângulos, vice-versa	3	2		1	1
4. Atividades para justificar	2			4	2
5 Atividade para deduzir a medida do ângulo externo					1
Total de atividades envolvendo ângulos internos e/o externos	21	7	1	15	10

Fonte: O pesquisador

Os dados do Quadro 5 mostram que qualquer um dos cinco livros didáticos analisados contempla alguma atividade relacionada com os ângulos internos e/ou externos de um triângulo, sendo o L₁ o que mais contempla atividades, a maioria das quais pede a determinação do valor de algum ângulo interno. O quadro 5 também mostra que apenas um livro (L₅) faz apelo à propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo para deduzir a propriedade que mostra a relação entre um ângulo externo e os ângulos internos de um triângulo. O livro L₂ apenas preocupa-se com tarefas de cálculo sem outro tipo de tarefas que poderiam ser desenvolvidas com base no estabelecimento dessa propriedade, assim, a dedução de como determinar a medida de um ângulo externo, conhecidas as medidas dos ângulos internos em um triângulo; atividades de justificação ou verificação da existência de um triângulo, etc.

Os dados do Quadro 3 mostram ainda que três dos cinco livros (L₁, L₄ e L₅) utilizam a dobradura de um triângulo de papel como uma das técnicas para a dedução da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo por parte dos alunos. Já mencionamos autores que, embora defendam uma atividade exploratória no ensino da Geometria plana na escola, chamam atenção sobre as

limitações que isso acarreta no estabelecimento de conceitos geométricos e a necessidade de confiar nas demonstrações formais, como procedimento último para o estabelecimento dos teoremas.

Constatamos que o autor do livro L_4 , mesmo depois de demonstrar o teorema sobre os ângulos internos de um triângulo pelo procedimento pragmático (prova pragmática), ainda dá aos alunos duas atividades cuja finalidade é provar a mesma propriedade por medição, usando transferidor e outra por meio da dobradura de triângulo do papel (portanto, ambas as provas pragmáticas). E, também, em atividades envolvendo critérios de congruência de triângulos, após a “demonstração” de cada critério, segue-se uma atividade de construção de dois triângulos usando os mesmos dados, terminando-se com a medição dos lados e ângulos dos triângulos para se controlar se são ou não congruentes.

Acreditamos que o autor, ao propor essas atividades de construção com régua e transferidor, seguidas de uma verificação por medição e/ou dobradura, quer convencer o aluno da validade do critério/teorema visto. Em sua tese de doutorado, Gravina (2001) menciona que os alunos têm dificuldade para entender o significado de uma demonstração; tais alunos aceitam como verdade, após algumas medições, por exemplo, que “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus”. Além disso, depois de demonstrada a propriedade, só se convencem após uma verificação usando um exemplo concreto:

- Se eu testei num monte de triângulos e é sempre verdade então eu aceito o resultado... Se continuo testando mais e mais vezes, digamos 10 vezes, e sempre funciona, eu diria que, sem dúvida, tem que ser deste jeito...
- Esta demonstração dedutiva é para este triângulo (no desenho associado), mas o enunciado diz que é para qualquer triângulo. Eu tenho que pensar em todos os tipos de triângulos, poderia ser verdade. Eu não poderia garantir isto de imediato...
- Eu ainda tentaria num monte de triângulos diferentes. Mesmo que a gente tenha visto a demonstração, para ficar seguro, eu testaria nos triângulos. Com a prova dedutiva e sem exemplos, eu sempre fico em dúvida... Eu ainda me mantenho, de alguma forma, cético... (Harel, G. e Sowder, L., apud GRAVINA 2001, p. 65-66).

O outro tipo de tarefas contempladas nos livros didáticos analisados é quanto às condições de existência de um triângulo (desigualdade triangular) ou à

condição de existência do triângulo, baseando-se na soma dos ângulos. Os dados do quadro 6 resumem o resultado da busca efetuada no âmbito desse tipo de tarefas.

Quadro 6 - Atividades propostas quanto às condições de existência de um triângulo

Tipo de atividade	L ₁	L ₂	L ₃	L ₄	L ₅
1 justificar se sempre dados 3 n ^{os} , são medidas de lados de um Δ	1		1	2	1
2 justificar se 3 segmentos são sempre lados de um triângulo	1			1	
3 justificar se dados três n ^o são sempre ângulos de um triângulo			1	1	
4 dadas duas medidas de lados de um triângulo dizer entre que valores estará o terceiro valor			1	1	1

Fonte: Dados do pesquisador

Pelos dados do Quadro 6, constatamos que o livro L₂ não trata da propriedade sobre as condições de existência de um triângulo. Também pelo quadro verifica-se facilmente que apenas o livro L₄ chega a discutir as condições de existência em que são dados três números como medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Ainda, em relação ao Quadro 3, verificamos que os três livros do Ensino Secundário (L₃, L₄ e L₅) todos eles usam, de alguma maneira, os critérios de congruência de triângulos para validar propriedades ou afirmações em Geometria, porém, apenas um livro contempla atividades em que o aluno completa espaços em branco para obter uma demonstração.

Apesar dos cinco livros didáticos contemplarem atividades relacionadas com triângulos cujo enfoque são provas e demonstrações, mobilizando vários registros de representação, constatamos que, em nenhum deles, aparece alguma atividade de conversão de registros, o que pode ser uma limitação na apresentação dos conceitos pois, como salienta Duval (2008), a articulação dos registros constitui uma condição de acesso à compreensão em Matemática e não o “enclausuramento” em cada registro.

CONSIDERAÇÕES SOBRE OS RESULTADOS DESTA PESQUISA

Nesta seção do trabalho, apresentamos as principais conclusões à luz do referencial teórico que sustentou este trabalho.

Quanto à Teoria dos Registros de Representação Semiótica constatamos que:

Em geral, os cinco livros estudados privilegiam os registros figural, língua natural e linguagem simbólica. Quanto às provas e demonstrações, observamos que embora apareçam algumas reconfigurações que poderiam facilitar a obtenção dos argumentos que seriam utilizados para produzir provas e demonstrações, estas não são aproveitadas. O livro L_1 , por exemplo, aborda o teorema sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo por meio de dobradura e medições, utilizando transferidor. Na página 151 do mesmo livro, é apresentada uma reconfiguração por meio de uma paralela a um dos lados de um triângulo passando pelo vértice oposto a esse lado. Esta reconfiguração poderia ser utilizada para demonstrar a congruência entre os ângulos internos não adjacentes à reta com os ângulos que essa reta forma com os lados do triângulo. A reconfiguração não foi utilizada para desempenhar seu papel heurístico que Duval (2004) defende. O mesmo fato é observado no livro L_4 que apresenta reconfigurações que poderiam ser utilizadas para produzir argumentos que sustentariam a demonstração das propriedades da soma dos ângulos internos de um triângulo e da relação entre um ângulo externo e os dois internos não adjacentes. Apenas o livro L_5 serve-se da reconfiguração para demonstrar o teorema sobre a medida de um ângulo externo de um triângulo. A maior parte das atividades apresentadas aos alunos está em língua natural e/ou língua figural, quase nenhum dos livros estudados propõe atividades específicas que visem a

providenciar competências para demonstrar. Constatamos também que nenhum dos cinco livros contempla atividades que exigem a exploração de diferentes registros de representação de um mesmo objeto geométrico e, os tratamentos dentro do mesmo registro também não são significativos.

Tipos de provas propostas por Balacheff

Em relação à tipologia de provas propostas por Balacheff (1988), observamos que, em geral, os autores dos cinco livros validam as propriedades dos triângulos por meio de provas pragmáticas. Percebemos que o fato ocorre, tanto para os autores que privilegiam atividades que se pautam por ações de natureza exploratório-investigativa (L_1), como aos que aparentemente apresentam demonstrações formais para validar algumas das principais propriedades dos triângulos (L_4). Apenas o livro didático L_2 apresentou uma prova intelectual para validar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e, o L_5 o teorema sobre o ângulo externo.

Teoria Antropológica do Didático

Em relação à Teoria Antropológica do Didático, observamos que, em geral, os cinco livros analisados apresentam tarefas claras com o discurso tecnológico-teórico disponível, com a exceção do livro L_1 , que possui uma atividade que mobiliza os casos de congruência de triângulos para responder à questão, mas esse tópico não é objeto de estudo nesse nível de escolaridade. A atividade voltada à construção, pede que o aluno construa um triângulo dados dois de seus ângulos e, no final, questiona o que falta saber, para que os triângulos com essas medidas de ângulos sejam geometricamente iguais. A tarefa é formulada da seguinte maneira:

Constrói um triângulo ABC

$\text{med}(\hat{A}) = 25^\circ$ e $\text{med}(\hat{B}) = 60^\circ$

Podes calcular a medida do ângulo C?

Compara a teu triângulo com os dos teus colegas. Eles têm o mesmo tamanho?

O que falta saber para todos poderem construir o triângulo com o mesmo tamanho? (DRAISMA e SOVERTKOV, 1987, p. 62).

Acreditamos que a tarefa é desafiadora sob o ponto de vista da construção do conhecimento por parte do aluno, mas, dentro da Teoria Antropológica do Didático vemos que o discurso tecnológico-teórico que fundamenta a resposta da atividade ainda não está disponível aos alunos, pois não foi estudado anteriormente.

Observamos que os principais gêneros de tarefas que esses livros apresentam são:

1. L₁: medir, comparar (por dobragem ou medição), construir (usando régua e compasso ou transferidor), justificar, calcular (a medida de algum ângulo) e explicar, verificar (por construção), classificar.
2. L₂: classificar, calcular (a medida de algum ângulo), construir (com régua, compasso ou transferidor), traçar (altura, medianas, bissetrizes de um triângulo), copiar, observar.
3. L₃, L₄ e L₅: desenhar, calcular, justificar, demonstrar, completar e explicar.

Portanto, embora os livros do Ensino Secundário Geral de Moçambique apresentem provas de propriedades, tais como: a soma dos ângulos internos de um triângulo, a medida de um ângulo externo de um triângulo, propriedades relativas a triângulos isósceles, bem como os casos de congruência de triângulos, a maioria dessas provas é pragmática. Em quase todos os livros contemplados neste estudo com a exceção de um (o da 6ª série/classe), as atividades de natureza investigativa estão ausentes.

Mas percebemos que o livro L₁ embora seja o único que apresenta a Geometria com enfoque voltado às atividades investigativas, a validação de todas

as propriedades abordadas neste estudo é por meio de provas pragmáticas. Dado o nível de escolaridade a que o livro é destinado, as validações são aceitáveis. Em relação aos outros livros didáticos, notamos que na Geometria não são devidamente exploradas atividades que levem à produção de conjecturas. Podemos, então, fazer a hipótese de que, em Moçambique, nas práticas das séries dos professores que utilizam esses livros didáticos, prevalecem provas pragmáticas. Esta hipótese pode ser objeto de pesquisa para outros estudos para confirmá-la ou refutá-la, pois, tratando-se de livros didáticos, aceita-se que podem não dar conta de toda a prática que ocorre em sala de aula.

Nossa questão de pesquisa visava a estudar o quanto as atividades de prova e demonstração estavam presentes nos livros didáticos de Moçambique de 6^a a 8^a séries/classes, especificamente, provas e demonstrações de propriedades dos triângulos.

O estudo mostrou que nos livros analisados predominam provas pragmáticas para a demonstração da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo (L_1 , L_3 , L_4 e L_5), e que a prova atrelada ao teorema sobre a medida dos ângulos externos de um triângulo é pragmática (L_4), embora seu autor tenha apresentado uma reconfiguração que se apoia nas propriedades de ângulos em retas paralelas intersectadas por uma transversal. O estudo mostrou que as atividades de reconfiguração estão ausentes nos livros analisados e que quando há alguma oportunidade de se explorar a reconfiguração para produzir argumentos, os autores não exploram devidamente o fato, limitando-se apenas a evidências empíricas propiciadas pelas figuras.

O estudo também verificou que com exceção de um livro didático (L_1), os restantes não exploram muito algumas das propriedades relacionadas com a altura, a bissetriz dos ângulos internos de um triângulo e as mediatrizes.

Em relação à distinção entre prova como atividade e prova como resultado de uma ação humana, os livros didáticos não exploram devidamente situações de cunho exploratório.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 30, Caxambu, 2007a. Disponível em
<http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf>
Acesso em: 25 de maio 2008

ALMOULOUD, S.A. **Fundamentos da didática da Matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007b. 218 p. (Pesquisa; n. 121).

_____. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: Registros de representação semiótica.** 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2008. p. 125 – 147. (Coleção Papirus Educação).

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, Caxambu, 2000

ANTONINI, S., MARIOTTI, M. A. Abduction and the exploration of anomalies: the case of proof by contradiction. In: **Proceedings of 6th CERME, France 2009, Wg2.** Disponível em
<http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/09Hiver/wg2-Argumentation_Proof.pdf>. Acesso em 12 de julho de 2009.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In PIMM, D. (ed.) **Mathematics, Teachers and Children.** London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

BALACHEFF, N. Is argumentation an obstacle? **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Grenoble, n. 1, May-Juin 1999**. Disponível em <<http://www.lettredelapreuve.it>>. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 1999. Acesso em: 25 julho de 2008.

BALACHEFF, N. **The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof**, 2001. Disponível em <http://www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/reading/Balachef_Taiwan2002.pdf>. Acesso em: 18 de dezembro de 2008.

_____. The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof.. **ZDM Mathematics Education**, Vol. 40, Nº 3. p. 501-512, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/wp741844wn683g88/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de novembro de 2008.

BARBOSA, E. S. S. **Argumentação e prova no ensino médio: análise de uma coleção didática de matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2007.

BRASIL, Secretaria de educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais -1ª a 4ª séries** - Brasília: MEC/SEF, 1997

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais - 5ª a 8ª séries** - Brasília: MEC/SEF, 1998

_____. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio**- Secretaria de Educação Média e Tecnológica- 2000, v.3

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da Matemática. In BRUN, J. (Dir.) **Didática das matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget., 1996. Capítulo I, p.35-113 (Coleção: Horizontes Pedagógicos).

CABASSUT, R. Argumentation and proof in examples taken from French and German textbooks. In: **Proceedings of 4th Conference of the European Society in Mathematics Education**, Group IV: Internet-version, p. 391-400, 2005
Disponível em <http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG4.pdf>. Acesso em: 23 agosto 2008

CARLOVICH, M. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas de São Paulo para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2005.

CARVALHO, C. C. S.: **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de Álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio**. 2007, 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2007.

CARVALHO, R. F. e MARTINS, Z. A. **M₈ Matemática 8ª Classe**. 6. ed. Maputo: Texto Editores, 2007.

CASABÒ, M. B. **Un punto de vista antropológico: La evolución de los “instrumentos de representación” em La actividad matemática**. IV Simpósio SEIEM (Huelva 2000), 2000

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: In BRUN, J. (Dir.) **Didáctica das matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget., 1996. Capítulo II, p.115-153 (Coleção: Horizontes Pedagógicos)

CHEVALLARD, Y. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Tradução de Ricardo Barroso Campos. Recherches en Didactiques des Mathématiques, vol. 19, nº 2, p. 221-266, 1999.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. In: **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004. Disponível em: <www.scielo.br/scielo.php?pid=S1517...script...> Acesso em: 22 de janeiro 2010

DOMINGUES, H. H. **A demonstração ao longo dos séculos**. Boletim de Educação Matemática (Bolema), UNESP, Rio Claro, ano 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

DOUEK, N. Approaching proof in school: from guided conjecturing and proving to a story of proof construction. In: **Proceedings of 6th CERME, France 2009**, Wg2. Disponível em <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/09Hiver/wg2-Argumentation_Proof.pdf>. Acesso em 12 de julho de 2009.

DRAISMA, J. & SOVERTKOV, P. **Eu gosto de Matemática. 6ª Classe**. Maputo, Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE), 1991.

DUVAL, R. Questioning argumentation. **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof. Novembre/Décembre 1999**. Disponível em <<http://www.lettredelapreuve.it>>. Acesso em: 25 de julho de 2008.

_____. **Semiosis y Pensamento Humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuais**. 2.ed. Universidad Del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia. Grupo de Educación Matemática, 2004.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registro de representação semiótica**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2008. Capítulo 1, p. 11-33. (Papirus Educação).

FAN, L.; ZHU, Y. Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbook. **Educational Studies in Mathematics. Vol 66, Nº 1**, p. 61-75, 2007. Disponível em: <<http://www.springerlink.com/content/g420h4m725313x36/>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2009.

FETISSOV, A. I. **A demonstração em Geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. (Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando).

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e Ensinando Geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de Matemática do Ensino Fundamental**. 1998. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 1998.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 207 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001. Disponível em <<http://hdl.handle.net/10183/2545>>. Acesso em: 22 de março de 2009.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an over view. **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 44, Nº 1-2: p. 5-23, 2000. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/q21702846nv02615/fulltext.pdf>>. Acesso em: 22 março de 2009.

HANNA, G.; BARBEAU, E. Proof as bears of mathematical knowledge. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3: p. 345-353, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/l811525732721706/fulltext.pdf>>. Acesso em: 22 de março de 2009.

HEINZE, A. The proving process in mathematics classroom – Method and results of a video study. *In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, p. 41-48, 2004. Disponível em: <<http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip28-3/BSRLM-IP-28-3-25.pdf>>. Acesso em: 25 de julho de 2009.

HEINZE, A. et al. Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3: p. 443-453, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/4776x71346723546/>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

HEMMI, K. Students' encounter with proof: the conditional of transparency. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof Vol. 40, Nº 3: p. 413-426, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/2527r1k346329401/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

HENRIQUES, A. (2006): Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com auxílio do software Maple.

HERBST, P.; MIYAKAWA, T. When, how, and why prove theorems? A methodology for studying the perspective of geometry teachers. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3: p. 469-486, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/wu329522420726h1/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

JAHNKE, H. N. Theorems that admit exceptions, including a remark on Toulmin. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3 p: 363-371, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/6w3013k817h63067/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

JESUS, G. P. **Construções Geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca de demonstração em uma formação continuada**. 2008. 207f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

INDE e MEC. **Programas do Ensino Básico – I ciclo** (1ª a 2ª classes). Maputo: INDE-MINED, 2003.

_____. **Programas do Ensino Básico – III ciclo (6^a a 7^a classes).** 2003.

Maputo: INDE/MINED. 2003.

_____. **Plano Curricular do Ensino Secundário Geral: Objetivos, Políticas, Estrutura, Planos de Estudo e Estratégias de Implementação,** Maputo, INDE-MEC, 2007.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de Pesquisa: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 1990.

MARIOTTI, M. A; ANTONINI, S. Indirect proof: what is specific to this way of proving? **ZDM- The International Journal on Mathematics Education.** The Special Issue ou Proof. Vol 40, N^o 3: p. 401-412, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/mn70j2r6m4865k50/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

MARIOTTI, M. A.; BALACHEFF, N. Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspective on mathematical proof. **ZDM- The International Journal on Mathematics Education. The Special Issue on Proof.** Vol. 40, N^o 3: p. 341-344, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/u7301545611404vg/fulltext.pdf>>. Acesso em: 25 de outubro de 2008.

MARIOTTI, M. A. et al. Argumentation and proof'. In: M. Bosch. (Ed.). ***Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education_CERME IV.*** Sant Feliu de Guíxols 2005, Fundemi IQS – Universitat, Spain, 2006, p. 385-389. Disponível em: <http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG4.pdf>. Acesso em: 28 de julho de 2008.

MATEUS, P. **Cálculo Diferencial e Integral nos Livros Didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica.** 2007. 187f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2007.

MELLO, E. G. S. **Demonstração: Uma sequência Didática para a introdução de seu Aprendizado no ensino da Geometria**. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 1999.

MIGUEL, M. I. R. **Ensino e aprendizagem do Modelo Poisson: Uma experiência com modelagem**. 2005, 266f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

Ministério da Educação e Cultura (MEC). **Sistema Nacional de Educação: Lei Nº 6/92**. Maputo: MEC, 1992.

Ministério da Educação e Cultura/Instituto Nacional do desenvolvimento da Educação **Matemática: 9ª classe – Programa Intermédio**. Maputo: MEC-INDE, 2006.

_____. **Matemática: 10ª classe – Programa Intermédio**. Maputo: MEC-INDE, 2006.

Ministério da Educação e Cultura/Instituto Nacional do desenvolvimento da Educação. **Matemática: Programa da 8ª classe**. Maputo: MEC-INDE, 2008.

MISKULIN, R. G. S. **Reflexões sobre as tendências atuais da educação matemática e da informática**. 1999. Disponível em <www.cempem.fae.unicamp.br/...cronoed615.htm>. Acesso em: 20 de outubro de 2007.

MONTORO, V. **Concepções de estudantes de professorado acerca del aprendizaje de la demostración**. IN: REIEC Revista Electrónica de investigación em Educación Matemática. Disponível em: <dialnet.Unirioja.es//servlet/fichero_articulo?codigo=2875746 & orden=o>, 2007. Acesso em 21 de março 2010

NHÊZE, I. C. **Matemática: 8ª classe**. República de Moçambique, Printed in Canada, 1998

NHÊZE, I. C. & Vi, T. V.. **Matemática 8ª classe**, 1991

OLIVEIRA, A. M.; SILVA, A.: **Biblioteca da matemática moderna: tomo I**. Lisa – livros irradiantes, São Paulo, 1972, 5.ed., 391p. 1ª edição 1968.

PARZYSZ, B. **A geometria no ensino secundário e na formação de professores para séries iniciais: do que se trata?** *In*: Quaderni di Ricerca in Didática, n. 17. Tradução de Coutinho e Almouloud, 2006.

PASINI, M, F. **Argumentação e Prova: explorações a partir da análise de uma coleção didática**. . 2007. 164f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2007.

PEDEMONTE, B. Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in Algebra. *In*: **Working group 4. Argumentation and proof. Proceedings of CERME 4, 2007, p.643-652**. Disponível em: <<http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/CERME5Papers/WG4-Pedemonte.pdf>>. Acesso em: 25 de agosto de 2008.

_____. **Argumentation and algebraic proof**. ZDM- **The International Journal on Mathematics Education**. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3: p. 386-400, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/f44t829343745575/>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores**, 2005, 247f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2005.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P, OLIVEIRA, P. e CANDEIAS, N. **Triângulos e Quadriláteros: Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano**, 2009. Disponível em: <www.dgidc.min-edu.pt/matematica/.../triangulos_quadrilateros.pdf>. Acesso em 24 de Janeiro de 2010.

PONTE, J. P; BROCARD, J. e OLIVEIRA, H. Investigações geométricas. In: PONTE, J. P.; BROCARD, J. e OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. Capítulo IV p. 71-89.

REIS, K. M. et al. **Reasoning and proof in geometry: effects of a learning environment based on heuristic Word-out examples**. ZDM Mathematics Education (2008). Vol. 40, Nº 3: p. 455-467, 2008. Disponível em <<http://www.springerlink.com/content/d6j6t657n35134g0/fulltext.pdf> . Acesso em 25 de outubro de 2008.

REID, D. A. The meaning of proof in mathematics education. The meaning of proof in mathematics education, in M. Bosch. (ed.), **Proceedings of the 4th CERME**, Sant Feliu de Guíxols 2005, Fundemi IQS – Universitat 2006, p. 458-468.

_____. **Proof, proofs, proving and probing: research related to proof**. Proceedings of PME-XXV, Utrecht, 2001. Disponível em: <<http://www.acadiau.ca/~dreid/publication/proof/proof.htm>>. Acesso em: 21 de julho 2009.

RETEMAL, I. G. Actividades Geométricas en la enseñanza. Análise desde el punto de vista cognitivo. In: **UNIÓN – REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, Nº 19, p. 22-33, Septiembre de 2009. Disponível em: <http://www.fisem.org/descargas/19/Union_019.pdf>. Acesso em: 13 de janeiro de 2010.

SILVA, F. T. **Análise do processo de argumentação e prova em relação ao tópico “logaritmos”, numa coleção de livros didáticos e numa sequência de ensino**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2007.

SIU, M. K. **Proof as a practice of mathematical pursuit in a cultural, socio-political and intellectual context.** ZDM - The International Journal on Mathematics Education. The Special Issue on Proof. Vol. 40, Nº 3 p. 55-361, 2008. Disponível em <
<http://www.springerlink.com/content/0617128626848j20/fulltext.pdf>>. Acesso em 25 de outubro de 2008.

TOJO, B. N. **Concepção de uma seqüência didática para o ensino/aprendizagem da congruência.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2006.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. In: REVMAT – **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** V 2.2, p. 28-49, UFSC: 2007. Disponível em:
 <www.redmat.com.br/mtm.ufsc.br/...pdf/revista_2007_02_completo.PDF> Acesso em: 28 de janeiro de 2010

VILLIERS, M. **Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica.** Tradução de Rita Bastos para as actas do Prof Mat 2002. Disponível em
 <<http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html>> Acesso em: 25 agosto de 2008.

VINCENT, J; et al. Argumentation profile charts as tools for analysing students' argumentations. In: CHIC, H. L. & VINCENT, J. L. (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educational, vol. 4.** Melbourne: PEM 4: p 281-288, 2005. Disponível em
 <www.emisode/proceedings/PME29.../PME29vol4VincentEtAl.pdf> Acesso em 20 de maio 2009.

ZAVALA, C. A. M.; ISSUFO, D. S. **As maravilhas dos números. 7ª Classe.** Maputo, Texto Editores, 2005.