PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Eneias de Almeida Prado

Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2010

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Eneias de Almeida Prado

Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado.***

SÃO PAULO
2010

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:______________________________ **Local e Data:** ____________________________

A minha avó Guilhermina, pela sua história de vida, que com paciência, sempre quando lhe peço, não cessa de me contar.

A meus pais, Antonio e Tereza, pelo amor, carinho e pela confiança depositados durante toda minha trajetória como estudante.

A minha esposa, Livian, pelo carinho, paciência, compreensão e dedicação.

AMO MUITO TODOS VOCÊS.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo direito de ter sua companhia em meu caminhar.

À Professora Doutora **Silvia Machado**, pela paciência, compreensão, ensinamentos, dedicação e o mais importante, muitos momentos de discussões que permitiram meu crescimento profissional.

Aos membros da banca, Professoras Doutoras **Angela Marta Savioli, Bárbara Bianchini e Karly Alvarenga**, que leram a primeira versão e contribuíram para a finalização deste trabalho.

À Professora Doutora **Maria Trigueiros**, pela oportunidade de tê-la conhecido e discutido aspectos sobre a Teoria APOS.

Aos sujeitos desta pesquisa, pela colaboração.

Aos colegas do GPEA, pelas inúmeras segundas-feiras, em que discutimos os trabalhos uns dos outros, proporcionando, assim, o crescimento de todos.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, pois aprendi muito com eles, seja em sala de aula, nas reuniões de colegiado ou em bate-papo pelo corredor.

Aos amigos, Jean, Maurício e Lucimar, com certeza, os vários sábados e feriados na PUC, em Embu-Guaçu ou em São Bernardo, serão inesquecíveis, aliás, o apoio de vocês durante o período em que me preparava para o casamento, foi fundamental, obrigado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – **CNPq** – pela bolsa concedida que possibilitou minha dedicação exclusiva a este trabalho.

Aos funcionários da PUC-SP, pelo zelo com a instituição, pois, com certeza, isso torna o ambiente favorável para exercer um bom trabalho. E claro, em especial, **ao Francisco**, pelas conversas e momentos de descontração.

Aos colegas de curso que compartilharam suas histórias de sala de aula e experiências de vida.

Aos amigos que fiz durante o curso, **Ana Rebeca, Gilson, Harryson, Juliano, Luciane e Rafael.**

Aos amigos e professores da Universidade Estadual de Londrina – **UEL** –, pois foram eles que me incentivaram a prosseguir nos estudos.

Aos amigos e professores, **Friaza, Milton e Wellington**.

A meus pais, com muito amor e carinho, sempre confiaram e acreditaram no meu sonho, amo vocês!

A meu amor, **minha esposa**, minha companheira de todos os dias que compreendeu e auxiliou-me nessa caminhada.

A meus irmãos e familiares que, de alguma forma, torcem por mim e também compartilham desse sonho.

À família Caetano que sempre me abraçou e torceu por mim.

Enfim, **a todas as pessoas que, de alguma forma, colaboraram na efetivação desse sonho**.

RESUMO

Este estudo teve o objetivo de identificar a concepção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado de alunos que concluíram um curso de extensão em Álgebra Linear. A relevância da pesquisa reside na importância atribuída a essa disciplina na formação de profissionais das Ciências Exatas e afins, e na necessidade de investigar seu ensino e sua aprendizagem, conforme opinião de vários pesquisadores, como Dubinsky (1991; 2001); Dorier *et al.* (1997); Machado e Bianchini (2009). Para tanto, utilizou-se o aporte da teoria APOS, desenvolvida por Dubinsky e colaboradores que permitiu o refinamento de uma decomposição genética para a noção de base que abordou os três pontos de vista dessa noção: conjunto maximal de vetores linearmente independentes; conjunto minimal de vetores gerador e a justaposição entre as duas anteriores. A coleta de dados foi realizada por meio de entrevistas semiestruturadas a 10 sujeitos concluintes de um mesmo curso de extensão, caracterizando-se como um estudo qualitativo de caso. A análise realizada indica que cinco estudantes construíram uma concepção objeto e incorporaram a noção de dimensão a seu esquema, utilizando indistintamente a dimensão a uma das três noções de base. Um estudante mostrou ter construído concepção processo e outro, concepção ação. Após dois cursos de Álgebra Linear, os estudantes concebem base, sobretudo, como sendo um conjunto gerador linearmente independente, e só dois dos entrevistados perceberam a equivalência entre os pontos de vista abordados.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Concepção de base; Estudantes;Teoria APOS.

ABSTRACT

The purpose of this study was to indentify the basis conception of the $\mathbb{R}$–vetorial space finitely generated by students who concluded an extension course in Linear Algebra. The relevance of the research is in the importance attributed to this discipline in the professional education of Exact Sciences and others, and in the need to investigate its teaching and its learning, according to the opinion of many researchers, as Dubinsky (1991;2001); Dorier et al (1997); Machado e Bianchini (2009). For such, the theoretical ground used was APOS, developed by Dubinsky and collaborators that allowed the refinement of a genetical decomposition for the notion of basis which approached three points of view from this notion: maximal group of vectorials linearly independent; minimal group of generating vectors and justaposition between the two latters. The data survey was held by semistructured interviews to 10 subjects graduating from the same extension course, characterizing it as a qualitative case study. The analysis held indicates that five students built an object conception and incorporated the notion of dimension to their scheme, using indistincvely the dimension to one of three notions of basis. A student was able to build a process conception and another, an action conception. After two courses of Linear Algebra, the studens conceived basis, mainly, with being the independent linearly generating group, and only two of the interviewed perceived the equivalence among the points of view approached.

Keywords: Linear Algebra, Basis Conception; Students; APOS Theory.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina Álgebra Linear no decorrer dos anos alcançou seu papel de destaque no estudo de Matemática. Segundo Dubinsky (2001), sua importância está atrelada às aplicações na própria Matemática, como por exemplo, no caso do *Cálculo com múltiplas variáveis*, no qual a derivada é quase incompreensível sem a utilização de matrizes e transformações lineares, no estudo das equações diferenciais lineares, na geometria diferencial e na análise funcional.

No entanto, essa disciplina traz consigo a teoria axiomática dos espaços vetoriais que, segundo Dorier (1990), é uma descoberta do final do século XIX que só teve seu desenrolar, após 1920, cujas noções imbricadas a Álgebra Linear assumiram um caráter polimórfico, pois elas apareceram, ainda que implicitamente em diferentes áreas, como por exemplo, nos sistemas de equações lineares, na geometria, na aritmética, nas transformações lineares, etc.

Assim, essa disciplina constituiu-se essencialmente em razões de uma organização, unificação e simplificação das áreas de estudo, com diferentes ferramentas e métodos semelhantes. Por isso,

> [...] não é de se espantar que seja difícil ao estudante compreender, desde o início de seu estudo de Álgebra Linear, a generalização e a unificação que o conceito de espaço vetorial trouxe para a Matemática como um todo, pois a forma axiomática da definição de espaço vetorial, por si só, não lhe revela esses aspectos (MACHADO e MARTINS, 2003, p.3).

Na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, há um grupo de pesquisa que desenvolve um subprojeto dedicado especificamente à Álgebra Linear, a saber, o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA –. Assim, ao ingressar no programa, incorporei-me ao GPEA e iniciei minha pesquisa que está atrelada ao subprojeto: "*Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear*". Esse subprojeto tem como objetivo desenvolver pesquisas relacionadas às noções elementares de Álgebra Linear, isto é, investigar o ensino e a aprendizagem dessa disciplina em cursos das Ciências Exatas e afins.

Desse modo, esta pesquisa foi organizada em seis capítulos, mais as referências e os anexos.

No capítulo 1, descrevo a problemática que me conduziu às questões de pesquisa e ao objetivo, ou seja, que foi identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial. Este objetivo é fruto de minhas reflexões sobre as questões: Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado? Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado? Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?

Para abarcar essa problemática, no capítulo 2, apresento o referencial teórico que dá suporte ao desenvolvimento deste estudo, isto é, a Teoria APOS de Dubinsky e seus colaboradores, sobretudo, baseei-me nos artigos de Dubinsky e Lewin (1986) e Asiala et al. (1996). Neste capítulo, também apresento resultados de pesquisas que utilizaram, como aporte teórico a ideia de alavanca-meta, sugerida por Dorier *et al*. (1997).

Já, no capítulo 3, apoiado em Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (2001), descrevo as escolhas metodológicas adotadas. Isto é, optei por uma pesquisa qualitativa, especificamente, por um estudo de caso que é característico desta metodologia. Os métodos utilizados na coleta dos dados foram: entrevistas semiestruturadas, mensagens trocadas, anotações feitas por mim e protocolos produzidos pelos entrevistados, ambos durante as entrevistas. Ainda nesse capítulo, descrevo os procedimentos metodológicos que segui durante a pesquisa.

No capítulo 4, apresento o desenrolar da noção de base de um espaço vetorial em dois livros de Álgebra Linear, Callioli *et al.* (1995) e o de Coelho e Lourenço (2001); a decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial proposta por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008); um refinamento dessa decomposição genética; uma expansão propiciada por esse refinamento; e, para finalizar, a descrição e análise do roteiro que utilizei durante as entrevistas.

No capítulo 5, descrevo e analiso cada uma das entrevistas realizadas. Primeiro, fiz uma análise “vertical” das entrevistas e, posteriormente, uma análise “horizontal”.

No capítulo 6, apresento as minhas considerações finais sobre o estudo, às respostas que obtive para minhas questões de pesquisa e as questões e reflexões que surgiram ao longo da elaboração deste texto.

Na versão impressa, destaco o anexo 4, nele o leitor terá acesso a dois encartes. No primeiro, apresento uma lista com todas as ações, processos e objetos que foram iluminados durante a análise teórica. No segundo, apresento o roteiro utilizado nas entrevistas. Já na versão digital, o leitor terá os anexos 2 e 3, também, listo essas ações, processos e objetos e apresento o roteiro utilizado para as entrevistas.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

"Um problema de pesquisa é um problema!"
(LAVILLE e DIONNE, 1999, p.85)

Neste capítulo, apresento a problemática que me levou a desenvolver este trabalho, isto é, o quadro no qual se situa o problema de pesquisa. Pautado nesta problemática, delimito os objetivos da pesquisa.

Motivações para o estudo

Minha descrição inicia-se, na época em que cursava o bacharelado em Matemática, pois, uma das poucas disciplinas em que sentia dificuldade era à Álgebra Linear, não via sentido naquele conteúdo! No entanto, com o desenrolar da graduação, percebi a importância das ferramentas que a Álgebra Linear fornecia ao tratar, por exemplo, dos problemas que envolviam equações diferenciais.

Dubinsky (2001) comenta a importância da Álgebra Linear em aplicações na própria Matemática, como por exemplo, no caso do *Cálculo com múltiplas variáveis*, no qual a derivada é quase incompreensível, sem a utilização de matrizes e transformações lineares, no estudo das já citadas equações diferenciais lineares, na geometria diferencial e na análise funcional.

Minha percepção, como estudante, foi a de que as ferramentas fornecidas pela Álgebra Linear, para o desenvolvimento de outras disciplinas da Matemática, não eram facilmente identificadas e, por conseguinte, não eram empregadas pelos estudantes da licenciatura que não lhe atribuíam a importância devida à disciplina.

Esses fatos despertaram meu interesse para investigar quais as contribuições da Álgebra Linear na formação inicial do professor de Matemática e, também, levaram-me a pensar, como podem ser superadas as dificuldades desses futuros professores em um curso inicial de Álgebra Linear.

Ao terminar a graduação, essas questões conduziram-me ao programa de pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP –, pois, nesta instituição, há um grupo de pesquisa que desenvolve um subprojeto dedicado especificamente à Álgebra Linear, a saber, o Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA –.

Desta forma, ao ingressar no programa, incorporei-me ao GPEA e tomei como orientadora Silvia Machado que desenvolve pesquisas ligadas ao subprojeto: "*Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos*[1] *básicos de Álgebra Linear*".

O grupo concentra seus estudos, sobretudo, na linha de pesquisa: "Matemática na estrutura curricular e formação de professores", visando responder à questão: **Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores?**

Na procura de elementos para responder a tal pergunta, um dos subprojetos que se constituiu no GPEA foi sobre *o desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial*, finalizado, em 2006. O objetivo deste subprojeto foi o de identificar os recursos-meta[2] utilizados por professores de Álgebra Linear, livros didáticos, vídeos e programas computacionais que pretendiam apresentar a noção de base de um espaço vetorial.

Após a identificação dos recursos-meta, buscava-se verificar quais deles teriam potencialidade de se tornar uma alavanca para a compreensão de alguma noção matemática pelo aluno. Caso se verificasse que algum recurso-meta auxiliou

[1] A palavra *conceito* (ou noção) é utilizada, assim como para Sfard (1991), para expressar uma ideia matemática em uso em sua forma 'oficial', ou seja, como uma construção teórica dentro do universo formal da Matemática. No que segue, ao me referir a essas ideias matemáticas, utilizo a palavra *noção*.

[2] O termo recurso-meta passou a ser considerado pelo GPEA, a partir do trabalho de Oliveira (2005), para designar o que o grupo francês coordenado por Jean Luc Dorier chamou, ora de metaconhecimento matemático, ora de metamatemática. Assim, a este termo, recurso-meta, considera-se "[...] as informações ou conhecimentos **sobre** a Matemática a ser aprendida que podem envolver as operações matemáticas, seu uso e a própria aprendizagem da Matemática" (OLIVEIRA, 2005, p.20). Por este motivo, de agora em diante, irei sempre me referir ao termo *metaconhecimento matemático (metamatemática)* como sendo *recurso-meta*, mesmo que o autor citado tenha utilizado o termo metaconhecimento matemático (metamatemática).

a compreensão de um ou mais alunos esse era chamado de “alavanca-meta” (DORIER *et al.*, 1997).

Conforme Machado *et al.* (2008), do ponto de vista dos recursos-meta que se tornam alavancas-meta para os estudantes, o subprojeto supracitado permitiu uma rica discussão sobre a noção de base de um espaço vetorial. Mas vale ressaltar que o assunto não se esgotou.

Com as reflexões proporcionadas pelo subprojeto descrito acima, constituiu-se o atual subprojeto: *Em busca de situações propícias para a aprendizagem de conceitos básicos de Álgebra Linear.* Por sua vez, este subprojeto tem como objetivo desenvolver pesquisas relacionadas às noções básicas de Álgebra Linear, isto é, investigar o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear em cursos das Ciências Exatas e afins.

Delimitação do problema

Para entender melhor a seara em que estava adentrando, passei a estudar os trabalhos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática que discutiam o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear. Assim, verifiquei que as dificuldades enfrentadas por meus colegas com o estudo de Álgebra Linear eram também experimentadas por alunos do mundo inteiro, conforme conclusões de pesquisadores, como Dorier *et al.* (1997), Machado e Martins (2003), Oliveira (2005), entre outros.

Constatei, também, que as questões que me conduziram ao curso de pós-graduação, eram um tanto quanto amplas e exigiam um refinamento. Na tentativa de identificar e minimizar essas dificuldades, muitas pesquisas foram e estão sendo desenvolvidas. Várias delas foram apresentadas no livro *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*[3] de Dorier *et al.* (1997).

Uma das dificuldades apontadas pelos autores desse livro é que os alunos, ao iniciarem um curso de Álgebra Linear, deparam-se com uma estrutura algébrica axiomática que utiliza registros próprios, o que gera muita dificuldade de compreensão durante a aprendizagem das noções elementares de Álgebra Linear.

[3] O ensino de Álgebra Linear em questão. (Todas as traduções apresentadas no decorrer deste trabalho são de minha autoria)

As noções elementares não são necessariamente as mais simples. No contexto da Álgebra Linear, o termo *elementar* significa que são noções essenciais para construir todas as demais noções de Álgebra Linear. Combinação linear, dependência linear, base e dimensão são noções elementares de Álgebra Linear, que, segundo Dorier *et al*. (1997), merecem a atenção dos pesquisadores em Educação Matemática.

Machado e Martins constataram, por exemplo, que:

> [...] não é de se espantar que seja difícil ao estudante compreender, desde o início de seu estudo de Álgebra Linear, a generalização e a unificação que o conceito de espaço vetorial trouxe para a Matemática como um todo, pois a forma axiomática da definição de espaço vetorial, por si só, não lhe revela esses aspectos (MACHADO e MARTINS, 2003, p.3).

Afinal, esses autores descrevem que “a história do desenvolvimento da noção de espaço vetorial revela as dificuldades vividas pelos estudiosos para passar da concepção operacional[4] (de processo) para a estrutural[5] (de objeto matemático)” (MACHADO e MARTINS, 1997, p.3). Segundo Sfard (1991), é a articulação entre essas concepções, que são complementares que permitirá a construção de um objeto matemático[6].

Além dessa “dificuldade epistemológica”, há a questão levantada por Dreyfus (1991), ao dizer que, um típico curso de Matemática, sobretudo no primeiro ano universitário, apresenta uma ementa elegantemente definida, e o professor, geralmente, demonstra conhecê-la bem. O professor inclusive pensa em diversas maneiras de abordar os conteúdos, de forma a estabelecer uma estrutura “logicamente clara”; mas, o que faz, na prática, é escolher um número de teoremas a serem provados e como suas aplicações podem ser desenvolvidas. O autor ainda destaca que esse professor

[4] Concepção operacional, termo cunhado por Sfard (1991), remete às construções dinâmicas, sequenciais e detalhadas, concebidas como um processo computacional.
[5] Concepção estrutural, termo cunhado por Sfard (1991), remete às construções estáticas, integradoras, concebidas com base em objetos abstratos, que são construídas por sua vez com o auxílio de outros objetos também abstratos.
[6] Objetos matemáticos, segundo Chevallard (1991), são noções construídas em forma de definição, ou por uma sequência de operações. Essas noções, geralmente, apresentam propriedades e oportunidades de uso na própria Matemática.

> [...] provavelmente distribui isso nas várias aulas disponíveis e falará durante parte considerável dessas aulas, fazendo uso extensivo de formalismos extraordinariamente convenientes, de domínio específico da matemática envolvida (DREYFUS, 1991, p. 26-27) [7].

Quando não, a abordagem pedagógica adotada é aquela citada por Dubinsky (1997), em que é apresentado um exemplo, e os alunos são convidados a realizar uma lista de exercícios similares. Conforme esse autor, o fato de os alunos não compreenderem as noções, deve-se a não terem oportunidade de construir tais noções. Isso vem corroborar com Dreyfus (1991), ao afirmar que um aspecto muito importante da Matemática se perde quando o professor apresenta somente o produto final, refinado e acabado, já que assim o aluno não tem consciência das abstrações que permitiram todo o desenvolvimento da Matemática.

Dubinsky afirma ainda

> [...] estar convencido de que os estudantes desenvolvem a compreensão conceitual, como resultado da reação a situações-problema, fazendo construções mentais de objetos matemáticos e de processos, e usando-os para dar sentido fora do problema e tentando resolvê-lo (DUBINSKY, 1997, p.5) [8].

O autor também menciona acreditar que existem evidências suficientes para torná-lo mais do que um ponto de vista plausível e explica que "[...] antes de se considerar estratégias pedagógicas, devem-se analisar epistemologicamente aqueles conceitos específicos que causam dificuldades para os estudantes de Álgebra Linear" (DUBINSKY, 1997, p. 5-6) [9].

Com isso, o autor cita que é:

> necessário determinar as construções mentais específicas que um estudante deve realizar, a fim de compreender tais conceitos. Então,

[7] [...] probably distribute these into as many class periods as are available and lecture during a considerable part of these class periods, making extensive use of the strikingly convenient formalisms of the specific domain of mathematics concerned.

[8] I am convinced that students develop conceptual understanding as a result of responding to problem situations by making mental constructions of mathematical objects and processes and using them to make sense out of the problem and trying to solve it.

[9] […] before pedagogical strategies are considered, the particular concepts that give students difficulty in linear algebra need to be analyzed epistemologically.

> devem ser desenvolvidas estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazer estas construções e usá-las para resolver problemas (DUBINSKY, 1997, p. 6) [10].

Dentre os trabalhos já realizados pelo GPEA, destaco o de Araújo (2002), que teve como objetivo verificar como se desenvolveu a noção de base de um espaço vetorial em três livros didáticos, utilizados por universidades tradicionais de São Paulo.

Seguindo a sugestão de Dorier *et al.* (1997), a autora buscou por recursos-meta que possam se tornar alavancas-meta para a aprendizagem de uma determinada noção matemática e, em suas considerações finais, afirmou existirem poucos recursos-meta sobre a noção de base de um espaço vetorial, passíveis de se tornarem alavancas-meta ao estudante.

O trabalho de Padredi (2003) verificou os recursos-meta que surgem no discurso de professores de Álgebra Linear sobre a noção de base de um espaço vetorial, e quais desses recursos-meta podem ser destacados, como possíveis alavancas-meta para o ensino e a aprendizagem dessa noção. Por meio de entrevistas, a autora identificou não só recursos-meta relativos à noção de base de um espaço vetorial, mas também recursos relacionados a outras noções elementares, isto é, combinação linear e dependência linear.

Sobre a noção de base de um espaço vetorial, considerada pelos entrevistados, como uma noção prioritária em um curso de Álgebra Linear, Padredi (2003) identificou recursos que permitem três abordagens: um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, um conjunto minimal de vetores geradores e uma justaposição entre um sistema gerador e vetores linearmente independentes.

Um dos professores entrevistados pela autora afirmou, também, que

> as noções introduzidas durante um primeiro curso, em especial a de base, vai ‘clareando’ aos poucos para alguns alunos como, por exemplo, quando trata de transformações lineares, sendo que cada um tem a sua hora certa para compreender essa noção (PADREDI, 2003, p.71).

[10] […] is needed to determine the specific mental constructions that a student might make in order to understand these concepts. Then, pedagogical strategies need to be developed that can lead to students making these constructions and using them to solve problems.

Assim como observado por Araújo (2002), Padredi (2003) identificou a retomada de uma noção matemática antiga para se ensinar uma nova, isto é, parte-se da Geometria Analítica para introduzir noções de Álgebra Linear.

Já na pesquisa de Oliveira (2005), o olhar dado à disciplina de Álgebra Linear é por outro ângulo, diferente dos que foram apresentados, ou seja, seu estudo buscou verificar se o professor utilizava, em sala de aula, recursos-meta que auxiliassem os alunos na apreensão das noções elementares de Álgebra Linear, e se esses recursos-meta tornaram-se alavancas-meta para alguns dos alunos em estudo.

O professor observado por Oliveira (2005) discutiu, nas primeiras aulas, algumas ideias relacionadas à noção de base de um espaço vetorial. O fato permitiu-lhe listar nove recursos-meta passíveis de se tornarem alavancas-meta aos alunos, por exemplo: o uso de contraexemplos para mostrar que um conjunto não é um subespaço de um espaço vetorial; a frase: "(...) umas das características mais importantes (...)" (OLIVEIRA, 2005, p.91), utilizada pelo professor para tentar chamar a atenção dos alunos para a importância da noção de combinação linear.

Outras pesquisas foram realizadas pelo GPEA, sendo dada ênfase à noção de base, em razão de seu papel essencial no estudo da estrutura de um espaço vetorial sobre um corpo. Segundo Machado e Bianchini (2009), essas pesquisas foram de cunho documental e diagnóstico, podendo ser agrupadas em quatro modalidades: estado da arte, análise de livros didáticos, análise do papel da Álgebra Linear em diferentes cursos e análise de intervenções didáticas.

No entanto, com as leituras, em parte apresentadas, pretendo colaborar com as pesquisas desenvolvidas no GPEA, ao verificar com as lentes de outro referencial teórico, o da Teoria APOS (action, processes, object e schema) [11] de Ed Dubinsky, a problemática existente no bojo da noção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, finitamente gerado.

Este referencial teórico define níveis de concepções relacionadas aos conjuntos de representações e articulações expressadas pelo indivíduo ao trabalhar com atividades matemáticas. Como afirma Sfard (1991, p.3) [12], "as construções em matemática avançada são totalmente inacessíveis aos nossos sentidos, ou seja, só

[11] Ação, processo, objeto e esquema.
[12] […] advanced mathematical constructs are totally inaccessible to our senses - they can only be seen with our mind's eyes.

podem ser percebidas com os olhos da nossa mente". A esse respeito, Dubinsky e Lewin, afirmam:

> [...] parece que nunca se terá acesso direto ao processo cognitivo – pois é uma atividade inconsciente da mente – mas, no melhor caso, acessa-se somente aquilo que um indivíduo pode articular ou demonstrar no momento da própria percepção. Precisamente o que ocorre no momento parece tão inacessível quanto essencial (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.57) [13]

Assim, o pesquisador deve ser atento e coletar informações que lhe permitam descrever o tipo de concepção que o indivíduo demonstra possuir naquele instante. No caso, da Teoria APOS, pode ser uma concepção ação, concepção processo ou concepção objeto[14].

Segundo Trigueros (2008), as construções dessas concepções não ocorrem, necessariamente, de forma linear, pois um indivíduo pode possuir por certo tempo concepções intermediárias ou ter uma concepção de um tipo para alguns aspectos de uma determinada noção e, de outro, para certos aspectos dessa noção.

As questões e o objetivo do estudo

Assim, à luz da Teoria APOS, deparei-me com as seguintes questões:

- Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial finitamente gerado[15]?
- Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial?

[13] It would seem one never has direct Access to cognitive processes – thought is an unconscious activity of mind – but, at best, only to what an individual can articulate or demonstrate at the moment of insight itself. Precisely what occurs at that moment seems as inaccessible as it is essential.

[14] No capítulo 2, deste trabalho, abordo e exemplifico os termos concepção ação, concepção processo e concepção objeto.

[15] De agora em diante, ao dizer *espaço vetorial* refiro-me a um *$\mathbb{R}$ -espaço vetorial finitamente gerado*. Quando não for esse o caso, especifico qual é o espaço tomado.

- Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?

Estas questões permitiram-me formular o seguinte **objetivo: identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial**.

Assim, com as questões e o objetivo desta pesquisa descritos, no próximo capítulo, apresentarei os pontos essenciais da Teoria APOS que me auxiliaram no desenvolvimento desta pesquisa, como também os resultados de pesquisas que forneceram subsídios às análises.

CAPÍTULO 2

ESCOLHAS TEÓRICAS

> Os professores de matemática sempre consideraram a compreensão, mais do que o conhecer ou ser habilidoso, como um objetivo importante. A compreensão, quando está acontecendo, é um processo que ocorre na mente do estudante; pode ser rápido, um “Eureca!”, um clique da mente; frequentemente está baseada em uma longa sequência de atividades de aprendizagem durante a qual ocorrem e interagem grandes variedades de processos mentais (DREYFUS, 1991, p.25) [16].

Neste capítulo, apresento o referencial teórico que dará suporte ao desenvolvimento do trabalho. O referencial – Teoria APOS – busca compreender o processo que ocorre na mente do estudante ao se construir uma noção matemática. Neste capítulo, também, apresento resultados de pesquisas relacionadas à problemática descrita no capítulo anterior.

A Teoria APOS

Dreyfus (1991, p.25) [17] apresenta a compreensão do que se passa na mente dos estudantes, como sendo uma das razões para se realizar investigações em Educação Matemática, pois “[...] não é suficiente, por exemplo, definir e exemplificar um conceito abstrato, como espaço vetorial. Os estudantes devem então construir as propriedades de tal conceito por meio de deduções a partir da definição”.

---

[16] Understanding, more than knowing or being skilled, has always been considered an important goal by mathematics teachers. Understanding, as it happens, is a process occurring in the student’s mind, it may be quick, an “Aha-Erlebnis”, a click of the mind; more often, it is based upon a long sequence of learning activities during which a great variety of metal processes occur and interact.

[17] [...] it is not sufficient, for example, to define and exemplify an abstract concept such as vector space. Students must then construct the properties of such a concept through deductions from the definition.

Ao se discutir a respeito dos processos envolvidos nas construções de conhecimentos matemáticos, tem-se o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado. Embora muitos processos de pensamento matemático avançado já estejam presentes no processo de pensamento matemático elementar, pode-se distingui-los quanto à capacidade do sujeito em apresentar definições e deduções formais. Para Dreyfus (1991), a diferença entre esses processos de pensamentos matemáticos é tênue, sendo a complexidade de como se trabalha com a noção uma das características que os distinguem.

Segundo Asiala *et al.* (1996), foi no seio do pensamento matemático avançado que se desenvolveu o referencial teórico que passo a descrever, pois a Teoria APOS constituiu-se da necessidade encontrada pelos pesquisadores que, atualmente, compõem o grupo de pesquisa *Research in Undergraduate Mathematics Education Community*[18] – RUMEC –, em "[...] considerar os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos" (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.55)[19].

Essa necessidade ocorreu pela percepção dos autores, Dubinsky e Lewin (1986), de que o professor ao tentar ensinar uma nova noção está, na verdade, induzindo o desenvolvimento cognitivo de seu aluno. Em razão da Epistemologia Genética de Piaget ser uma "[...] descrição de como a estrutura cognitiva se desenvolve ao longo do tempo de acordo com leis gerais" (p. 57) [20], em que o interesse é exclusivamente sobre o sujeito conhecedor que é tido como "sujeito epistêmico", os autores afirmam acreditar ser essa epistemologia, rica o suficiente para fornecer uma estrutura que permita uma psicologia geral de instrução para a Matemática pós-básica, universitária.

Dubinsky e Lewin, também, afirmam estar

> implícita na análise de Piaget, a ideia de que o conhecimento e a compreensão são adquiridos somente quando um sujeito epistêmico adapta sua estrutura cognitiva existente, a esta da qual se torna consciente, ao qual nos referiremos como 'alimento cognitivo'. Os alimentos são integrados fazendo as modificações necessárias em

[18] Comunidade de pesquisa em Educação Matemática Universitária.
[19] [...] to consider the mental processes by which new abstract concepts are acquired.
[20] [...] describing how cognitive structures develop over time according to general rules.

> uma ou mais estruturas cognitivas (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.58)[21].

A organização estabelecida pelo sujeito epistêmico para alocar o alimento cognitivo se dá por meio da equilibração. Isto é,

> a equilibração se refere a uma série de ações cognitivas realizadas por um 'conhecedor' buscando compreender os alimentos cognitivos. O alimento como tal, é experienciado como novo, resistente, perturbador, desequilibrador – termos que são 'a grosso modo' sinônimos – para o sistema cognitivo do conhecedor (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.60) [22].

Nessa experiência de desequilíbrio, o sujeito epistêmico é motivado a se reequilibrar. Nas palavras dos autores, esse processo chamado de assimilação, é como se fosse "uma coceira que precisa ser coçada" (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.60)[23].

Assim, o sujeito epistêmico em busca do reequilíbrio utiliza operações cognitivas previamente construídas, mas, "em geral, o alimento oferecerá resistência para a assimilação, levando o conhecedor a modificar suas estruturas cognitivas (um processo chamado de 'acomodação'), até que o alimento seja experienciado não mais como resistente" (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.60) [24]. Para os autores, nesse ponto, o sujeito epistêmico compreende o alimento, e o sistema cognitivo reequilibra-se, após ter se reconstruído e se reorganizado.

Para Dubinsky e Lewin (1986, p.59) [25], a interpretação dada por Piaget para o conhecimento, ou seja, o conhecimento, como interações do conhecedor com o alimento cognitivo, mediada pela estrutura cognitiva, "são construídas desde o princípio e sofrem mudanças sistemáticas de crescente diferenciação e integração hierárquica" e, ainda,

---

[21] [...] implicit in Piaget's analysis is the Idea that knowledge and understanding are acquired only as the epistemic subject applies its existing cognitive structures to that of which it become aware, which we will refer to as 'cognitive aliments'. Aliments are integrated by making the appropriate modifications in one or more cognitive structures.

[22] Equilibration refers to a series of cognitive actions performed by a knower seeking to understand cognitive aliments. The aliment as such, is experienced as novel, resistant, perturbing, disequilibrating – terms which are roughly synonymous – to the cognitive system of the knower.

[23] […] an itch that must be scratched.

[24] In general, the aliment will offer resistance to assimilation, leading the knower to modify its cognitive structures (a process called 'accommodation') until the aliment is no longer experienced as resistant.

[25] [...] are constructed from the outset and undergo systematic changes of increasing differentiation and hierarchic integration.

> são métodos de ação sobre o mundo como um sistema organizado de transformação. Elas são construídas progressivamente por meio de interação com os alimentos cognitivos e progressivamente reconstruídas como resultado das interações continuadas com os últimos alimentos cognitivos, em um processo chamado de 'abstração reflexiva'[26] (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.59) [27].

Por sua vez, a abstração reflexionante é tida por Dubinsky e Lewin (1986, p.61) [28-29] como "a forma de equilibração mais poderosa e cognitivamente mais interessante", pois "é aquela na qual uma estrutura cognitiva particular se reequilibra de um distúrbio, submetendo-se a um grau maior ou menor de reconstrução".

Dubinsky e Lewin descrevem duas facetas da abstração reflexionante, a saber:

> a primeira é um reflexo de uma ou mais estruturas sobre um plano mais elevado no qual as estruturas funcionam em maior generalidade, sendo aplicadas a novos alimentos que podem ser até mesmo estruturas funcionando em planos mais baixos. A segunda é a reconstrução dessas estruturas refletidas em novas estruturas que são diferentes das antigas, embora importantes similaridades possam continuar a ser evidentes (DUBINSKY e LEWIN, 1986, p.61)[30].

No que concerne à teoria APOS, discutirei somente os tipos de abstrações reflexionantes analisadas por Piaget, das quais Dubinsky (1991) seleciona quatro, pois as considera importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado, e uma quinta que Piaget não considera, como uma abstração reflexionante, mas Dubinsky (1991) acrescenta-a ao grupo, sendo elas: *interiorização, encapsulação, generalização, coordenação e reversibilidade.* Estas

[26] Abstração reflexiva também chamada de abstração reflexionante, conforme a chamou Piaget (1977-a e 1977-b): abstraction réfléchissante. No decorrer deste trabalho utilizo o termo abstração reflexionante para representar o processo que é dinâmico.

[27] [...] are modes of action on the world which function as organized systems of transformation. They are progressively constructed through interaction with cognitive aliments and progressively re-constructed as a result of continued interactions with later cognitive aliments in a process called 'reflective abstraction'.

[28] The most powerful, and cognitively, the most interesting form of equilibration.

[29] […] is that in which particular cognitive structures re-equilibrate to a disturbance by undergoing a greater or lesser degree of re-construction.

[30] The first is a reflection of one or more structures onto a higher plane in which the structures function in greater generality by being applied to new aliments which can even be structures functioning on lower planes. The second is a reconstruction of these reflected structures into new structures that are distinct from the old ones, although important similarities may continue to be apparent.

várias formas, nas quais a abstração reflexionante ocorre é, na verdade, alguma combinação das duas facetas supracitadas.

Os tipos de abstrações reflexionantes

A **interiorização** verifica-se quando o sujeito é capaz de "usar símbolos, linguagens, imagens e imagens mentais [...] para representar (...), isto é, para construir processos internos, como forma de dar sentido às percepções sobre os fenômenos observados" (DUBINSKY, 1991, p.101) [31]. No caso, o sujeito constrói uma série de ações sobre um objeto matemático que podem ser executadas, em sua mente, sem necessariamente realizar todas as indicações descritas durante a ação.

Um exemplo de interiorização ocorre na comutatividade da adição, na qual, inicialmente, o indivíduo precisa realizar os cálculos para verificar que dois números inteiros quaisquer, *a* e *b* adicionados, *a+b* e *b+a,* resultam no mesmo valor, e, posteriormente, interioriza o fato de *a+b=b+a*.

Outro exemplo de interiorização, apresentado por Parraguez (2009), ocorre quando inicialmente são dados uma operação binária[32] específica e os elementos específicos de um conjunto a um indivíduo. Este, então, aplica essa operação binária a esses elementos e observa seus efeitos, posteriormente, executa a operação com outros elementos desse mesmo conjunto. Assim, interioriza a ação no processo que lhe permite "pensar na maneira, como obtém os elementos calculados mediante a aplicação de uma operação binária a qualquer elemento de um conjunto" (PARRAGUEZ, 2009, p.62) [33].

A **encapsulação** é descrita por Dubinsky (1991) como sendo, talvez, a mais importante (na Matemática) e a mais difícil (aos estudantes), pois é a conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático). Para tanto, o indivíduo deve estar consciente desse processo, como uma totalidade.

Um exemplo de encapsulação, segue ao anterior, pois Parraguez (2009) afirma que um indivíduo ao pensar na maneira de obter os elementos de um

[31] use symbols, language, pictures, and mental images, […] to represent (...), that is, to construct internal processes as a way of marking sense out of perceived phenomena.
[32] Parraguez (2009) afirma utilizar a expressão *operação binária* em um sentido geral. E que, está consciente que em uma multiplicação por escalar, os elementos operados não provêm do mesmo conjunto.
[33] [...] pensar en la manera con que se están dando los elementos, resultante de aplicar una operación binaria a cualesquiera elementos de un conjunto.

conjunto, calculados por meio de uma operação binária, pode encapsulá-los em um objeto matemático, ou seja, um conjunto com uma operação binária. Isto é, o processo que era dinâmico, passou a ser estático, pois o indivíduo, agora, possui um conjunto com uma operação binária definida que lhe permite, por exemplo, verificar certas propriedades.

A **generalização**, segundo Dubinsky (1991, p.101) [34], ocorre quando um sujeito "aplica um esquema existente para uma ou para uma vasta coleção de fenômenos", isto é, com base nas particularidades, o indivíduo pode induzir e estender características comuns a um domínio de validade maior.

Um exemplo de generalização, segundo Parraguez (2009, p.52) [35], ocorre quando um indivíduo que conhece previamente os axiomas relacionados à operação binária da adição, utilizados para verificar se um dado conjunto é um espaço vetorial, toma o objeto conjunto com uma operação binária e percebe que "o esquema de axiomas pode ser generalizado para incluir este objeto", isto é, o indivíduo verifica se esse conjunto com operação binária satisfaz os axiomas, para assim, dar lugar ao novo objeto: conjunto com uma operação binária que satisfaz os axiomas.

A **coordenação** é "a composição ou a reorganização de dois ou mais processos para construir um novo" (DUBINSKY, 1991, p.101) [36]. Nesse caso, pode-se ter, também, a composição entre objetos para evidência um novo objeto (ou processo), a composição entre ações para construir uma nova ação (ou processo) ou, até mesmo, a composição de ações com processos (ou processos com objetos) para construir uma nova ação (ou processo, ou objeto).

Um exemplo de coordenação é o do estudante que demonstra ter construído o objeto conjunto com uma operação binária que satisfaz certos axiomas e o objeto corpo. Esse estudante coordena tais objetos e verifica a possibilidade de se definir uma nova operação binária, em que um elemento pertencente ao conjunto e um elemento pertencente ao corpo (multiplicação por escalar) são considerados, e o resultado dessa operação será um elemento pertencente ao conjunto. Segundo Parraguez (2009, p.62) [37], "isto é possível, pois o estudante construiu um conjunto como sendo um objeto, então, podem ser definidas novas operações".

[34] […] apply an existing schema to a wider collection of phenomena.
[35] […] el esquema de axiomas puede generalizarse para incluir este objeto.
[36] […] the composition or coordination of two or more processes to construct a new one.
[37] [...] esto es posible porque el estudiante ha construido un conjunto como un objeto, entonces puede definir nuevas operaciones.

Por último, a **reversibilidade** que foi incluída por Dubinsky (1991, p.102) [38], como uma forma adicional de construção, aparece definida como "um novo processo que consiste em inverter o processo original". Um exemplo de reversibilidade é o do indivíduo que manipula as operações de exponenciação e radiciação, ou ainda, a adição e a subtração.

Na Álgebra Linear, tem-se o caso de um indivíduo que, ao lhe ser apresentado um conjunto pertencente a um espaço vetorial, ele verifica se esse conjunto é uma base para esse espaço. Agora, o processo pode ser revertido, isto é, apresenta-se um espaço vetorial, e o indivíduo deve obter um conjunto que seja base desse espaço.

Esses tipos de abstrações reflexionantes foram apresentados de forma particionada, mas, segundo Dubinsky e Lewin (1986, p.62) [39], "é muito comum o caso em que diferentes formas de abstração reflexionante podem ser combinadas".

Mas em que consiste a Teoria APOS?

Segundo Asiala *et al.* (1996), a teoria APOS, também, pode ser adotada como uma metodologia de pesquisa para o ensino de Matemática e o desenvolvimento curricular. A abordagem pedagógica adotada por esta teoria, consiste no Ciclo ACE (Activities, Class discussion, Exercises) [40], em que os alunos trabalham em grupos colaborativos. No entanto, irei assumir somente as características que permitem explorar a problemática apresentada neste trabalho, isto é, o interesse sobre esse referencial está subjacente à possibilidade de identificar as concepções construídas pelos sujeitos desta pesquisa.

Contudo, os três componentes que compõem essa teoria, como metodologia, são: a *análise teórica*, o *planejamento e implementação* *e* a *observação e a avaliação*.

Conforme referem Asiala *et al. (1996, p.7)* [41]*, a* *análise teórica* consiste em propor um modelo cognitivo, isto é, "uma descrição específica das possíveis

[38] […] a new process which consists of reversing the original process.
[39] […] It is often the case that different forms of reflective abstraction can be combined.
[40] Atividades, Discussão em Classe e Exercícios.
[41] […] a description of specific mental constructions that a learner might make in order to develop her or his understanding of the concept.

construções mentais utilizadas por um aprendiz, a fim de desenvolver sua construção sobre um conceito". A esta análise, o grupo RUMEC denomina **Decomposição Genética** da noção investigada que, em outras palavras, é entendida como um conjunto de construções mentais que permitem ao indivíduo construir noções matemáticas.

Segundo Dubinsky e Lewin (1986), a decomposição genética não representa necessariamente a forma que um matemático praticante compreende as noções matemáticas, mas, sim, um mapeamento da forma com que os estudantes formulam empiricamente suas compreensões.

O componente – *planejamento e implementação* – está diretamente relacionado à *análise teórica*, pois a partir dela o investigador desenvolve interações que visam a fazer com que o aluno efetive tais construções. Em razão dos interesses desta pesquisa, não realizo esta etapa, pois não pretendo fazer com que os sujeitos construam uma noção, mas, sim, identificar quais noções eles podem ter construído.

Prosseguindo, tem-se *a observação e a avaliação*, que estão relacionadas com a coleta e análise de dados. Existem vários tipos de dados que podem ser recolhidos em estudos no âmbito da Teoria APOS. Podem ser informações sobre os alunos e do (s) curso (s) do qual participaram. Nos casos em que são reunidos dados sobre os estudantes que já tenham concluído um determinado curso de Matemática, a *preocupação é com as concepções que esses alunos possuem sobre uma noção matemática específica*. Nesta pesquisa, é a noção de base de um espaço vetorial.

Desta forma, a *análise teórica* serve de referência às observações e às avaliações *dos dados*, da mesma maneira que *as observações e as avaliações* servem para um possível refinamento da *análise teórica*. Assim, para Asiala *et al*. o principal objetivo da análise de dados é:

> estabelecer um paralelo entre as construções mentais, que vão desde aqueles que aparentemente construíram muito pouco, aqueles que construíram partes, e aqueles que demonstraram ter feito todas

> as construções propostas pela análise teórica (ASIALA *et al.*, 1996, p.27) [42].

A construção mental de uma noção matemática é descrita em Asiala *et al*. (1996), ao considerar que a compreensão começa na manipulação de objetos físicos ou mentais em forma de *ações.* As ações são, então, interiorizadas em *processos* que são encapsulados em *objetos* matemáticos. Os objetos podem ser desencapsulados nos processos com base, nos quais, foram formados e, finalmente, as ações, os processos e os objetos podem ser organizados ou reorganizados em *esquemas*. Vide Figura 1.

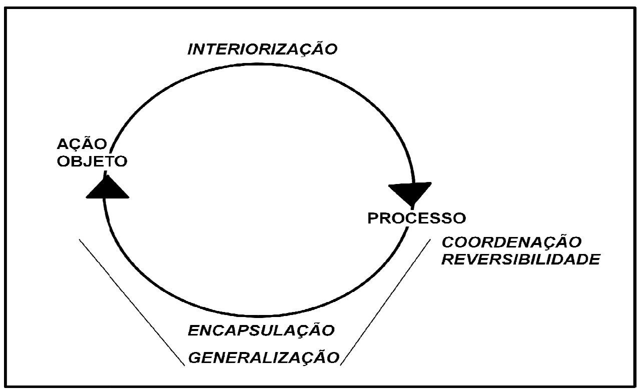


Figura 1: Construção de um esquema, segundo a teoria APOS (DUBINSKY, 1991, p.107)

Observa-se que, do ponto de vista dessa teoria, a construção do conhecimento matemático passa pelas etapas básicas: *ação*, *processo*, *objeto* e *esquema*, não necessariamente nesta ordem. Baseado em Dubinsky (1991) e Asiala *et al*. (1996), apresento a interpretação que adoto para essas etapas.

A **ação** é uma transformação executada pelo indivíduo sobre um objeto matemático. Esse tipo de transformação é percebida, como algo exterior a ele próprio, isto é, a transformação é compreendida, como sendo uma reação a indicações que fornecem informações precisas sobre os passos que devem ser realizados.

Um exemplo de ação é a do aluno que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, busca mais de dois pares ordenados que satisfaçam a lei descrita pela função.

[42] […] establish a parallel spectrum of mental constructions, going from those who appeared to construct very little, through those who constructed bits and pieces, to those who seemed to have made all of the constructions proposed by the theoretical analysis.

Outro exemplo de ação é apresentado em Oliveira (2005), quando o autor solicitou que os entrevistados verificassem quais, dentre os conjuntos, $A = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$, $B = \{(1,1,1),(3,-1,2),(0,-4,-1)\}$, $C = \{(7,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ e $D = \{(0,0,0,0,0)\}$, eram linearmente dependentes. Como resposta, obteve que era o conjunto A, pois ao "[...] somar o primeiro elemento do conjunto A com o segundo, a gente tem o terceiro" (OLIVEIRA, 2005, p.111). Isto é, o sujeito aparenta ter executado a ação em que verifica a possibilidade de escrever um vetor, como sendo combinação linear dos outros.

Um indivíduo pode executar uma ação, mas não está necessariamente limitado a operar com ações. Mas, se limitar sua compreensão de uma dada noção à realização de ações, diz-se que ele possui uma **concepção ação** para tal noção.

Um exemplo de um sujeito que demonstra possuir uma concepção ação, no caso, para a noção de dependência linear de vetores de um conjunto, é observado no seguinte trecho:

> [...] eu acho que era quando, a partir de dois, combinando dois, dois ou mais, combinando alguns elementos dentro do conjunto. Você podia formar alguns elementos que estão dentro do conjunto. A partir desse princípio, então, por exemplo, combinando esses dois eu posso formar esse. Eu acho que é só o A (OLIVEIRA, 2005, p.113).

Esse sujeito demonstra possuir uma concepção ação para a noção de dependência linear, pois, ao analisar os vetores pertencentes ao conjunto A, aparentou ter utilizado a ação que lhe permite verificar a dependência linear de vetores de um conjunto. No entanto, foram-lhe apresentados quatro conjuntos de vetores, sendo três linearmente dependentes[43], e ele deu indícios de reconhecer só o primeiro.

Uma concepção ação, embora seja limitada, constitui a essência da construção de uma noção matemática, pois o indivíduo ao executar a mesma ação, por várias vezes e refletir sobre ela poderá interiorizá-la em um processo.

O **processo** é caracterizado por uma construção interna que possibilita ao indivíduo realizar uma ação, ação essa não necessariamente conduzida por estímulos externos, isto é, o indivíduo passa a ter controle da transformação

[43] Entendo por conjunto linearmente dependente, um conjunto em que os vetores são linearmente dependentes. E, da mesma maneira, um conjunto linearmente independente, como sendo um conjunto em que os vetores são linearmente independentes.

realizada sobre o objeto matemático, podendo descrever os passos envolvidos e invertê-los quando necessário. Um exemplo de processo é o do aluno que, para esboçar o gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, obtém dois pares de números que lhe possibilitam traçar o gráfico da reta.

Outro exemplo observado no trabalho de Parraguez (2009), foi quando a autora apresentou a seguinte questão a um de seus sujeitos:

> Se definirmos sobre $\mathbb{R}^2$ às seguintes operações:
> $+: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
> $\big((x,y),(a,b)\big) \rightarrow (x,y) + (a,b) = (2y + 2b, -x - a)$
> $\otimes: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
> $\big(a,(x,y)\big) \rightarrow a \otimes (x,y) = (ax, -ay)$
> É o $\mathbb{R}^2$ com as operações anteriormente definidas um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? (PARRAGUEZ, 2009, p.83).

Assim, obteve como resposta: "não é espaço vetorial com as operações definidas, já que não existe um vetor nulo para a adição, tal que: $(x,y) + (*,*') = (x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$" (Parraguez, 2009, p.107) [44]. Isto é, o sujeito aparenta ter interiorizado o processo que lhe permite verificar se um conjunto com as operações binárias definidas é um espaço vetorial, sem a necessidade de verificar todos os axiomas.

Quando um indivíduo, ao resolver problemas, dá indícios de utilizar transformações do tipo processo, diz-se que possui uma **concepção processo** para a noção matemática em estudo. Por exemplo, os estudantes que demonstram ter uma concepção processo para a noção de operação binária, segundo Parraguez (2009, p.107) [45], "consideram a operação binária aplicada a todo um conjunto de maneira geral, isto é, eles podem pensar sobre a maneira com que eles estão tomando os elementos resultantes de uma operação binária aplicável a todos os elementos de um conjunto".

Assim, ao indivíduo que realiza transformações sobre um processo por meio de ações ou de outros processos e tem consciência dessas transformações e, ainda,

[44] No es espacio vectorial con las operaciones definidas ya que no existe un elemento neutro para la suma talque (sic.) $(x,y) + (*,*') = (x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

[45] [...] consideran la operación binaria aplicada a todo un conjunto de manera general, es decir, ellos pueden pensar en la manera con que se están dando los elementos, resultante de aplicar una operación binaria a cualesquiera elementos de un conjunto.

é capaz de construí-las e reconstruí-las, diz-se que encapsulou os processos envolvidos em um objeto, ou seja, o **objeto** é a encapsulação de um processo.

Um exemplo de encapsulação é quando o indivíduo reconhece um esboço do gráfico de uma função polinomial de primeiro grau, e é capaz de descrevê-la em linguagem algébrica da mesma maneira que, ao se deparar com a linguagem algébrica desse objeto, é capaz de esboçar seu gráfico.

Outro exemplo é observado no trabalho de Oliveira (2005), pois ao apresentar a seus sujeitos um quadro com quatro afirmações que definem a noção de base de um espaço vetorial e questioná-los sobre qual das afirmações melhor expressava a ideia de base, obteve como resposta que seria a alternativa D[46], com a seguinte justificativa

> [...] juntou tudo e fez uma bola só e melhorou bastante. A gente fala que ele é finitamente gerado, ele é um conjunto finito de vetores. Todos os outros vetores são uma combinação do que está junto e todos os vetores desse conjunto, realmente, são necessários, ou seja, eles são linearmente independentes (OLIVEIRA, 2005, p.116).

Esse sujeito demonstrou ter encapsulado a noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador de vetores linearmente independentes.

Diz-se de um indivíduo que encapsulou um processo e realiza tais reflexões que possui uma **concepção objeto** da noção em estudo. Um exemplo de concepção objeto para a noção de operação binária, segundo Parraguez (2009, p.108) [47], é o do aluno que considera a operação binária "como sendo uma componente da estrutura do espaço vetorial".

Conforme referem Asiala *et al.* (1996, p.12) [48], "uma coleção de processos e objetos pode ser organizada de uma maneira estruturada que forme um esquema. Os próprios esquemas podem ser tratados, como objetos e ser incluídos na organização de um esquema de nível superior".

Trigueros (2005) sugere que, ao utilizar a teoria APOS em uma investigação ou no desenvolvimento de material didático, seja feita uma decomposição genética

[46] Base de um espaço vetorial V, finitamente gerado, é um subconjunto finito de vetores de V, tal que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear dos elementos desse conjunto, e mais, que todos os vetores desse conjunto realmente sejam necessários para gerar V (OLIVEIRA, 2005, p.96).

[47] […] como una componente de la estructura del espacio vectorial.

[48] A collection of processes and objects can be organized in a structured manner to form a schema. Schemas themselves can be treated as objects and included in the organization of higher level schemas.

das noções de interesse. Essa decomposição pode não ser a única. Para a autora, o importante é que, qualquer decomposição genética de uma noção matemática seja um instrumento que dê conta de descrever o comportamento do sujeito observado, segundo as ações, processos e objetos que este venha a mobilizar.

A preocupação com os problemas envolvidos no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear, como exposto no capítulo 1, não é recente e já tem despertado a atenção de diversos pesquisadores. A seguir, apresento resultados de pesquisas, que auxiliaram nas *análises teóricas* e possibilitaram as *observações* e *considerações* realizadas nesta pesquisa.

Elementos observados em pesquisas afins

Como já foi dito, várias pesquisas foram e estão sendo realizadas objetivando identificar e minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao cursarem Álgebra Linear. Os referenciais teóricos utilizados são diversos, por exemplo, as Alavancas-meta de Dorier *et al.* (1997), os três princípios[49] de Harel (1997), a Teoria APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores, os Campos Semânticos[50] de Rômulo Lins, entre outros.

Analisei vários desses trabalhos, inclusive, o de Silva (2003) e o de Julio (2007) que utilizaram a Teoria dos Campos Semânticos. O primeiro fez um estudo a respeito do processo que ocorre durante a produção de significados para a noção de base de um espaço vetorial, por alunos de um curso de pós-graduação em Educação Matemática. O segundo, sobre a produção de significados para a noção de dimensão.

No entanto, nesta seção, faço um recorte e apresento elementos daqueles, dentre os trabalhos, que estudei que permitiram o desenvolvimento da análise

[49] Segundo Harel (1997), os três princípios são: concretização, necessidade e generalização. Isto é, o aluno deve reconhecer a noção matemática em estudo, como partindo de algo concreto, ver necessidade intelectual em estudá-la, para então, abstrair e generalizá-la. Um exemplo é a passagem do estudo da noção de base para o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, para o estudo da noção de base para o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, em que n é um inteiro não negativo.

[50] Segundo Silva (2005, p.21), a Teoria dos Campos Semânticos quando instituída visava a analisar os diferentes significados que poderiam ser produzidos para objetos matemáticos – “aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade” –. No entanto, em sua tese, focou no processo de construção de significados e não nos significados que poderiam ser produzidos.

teórica sugerida pela Teoria APOS. Havendo necessidade, trarei outros resultados para complementar as discussões proporcionadas ao longo desta pesquisa.

Inicio com o estudo de Parraguez (2009) que utilizou como aporte teórico a APOS, para investigar a evolução cognitiva da noção de espaço vetorial por estudantes de Álgebra Linear e as correlações estabelecidas por esses estudantes a outras noções, como por exemplo, dependência linear em um conjunto e base de um espaço vetorial. Com esse estudo, a autora afirma que, muitas vezes, os estudantes não reconhecem a série de requisitos que um conjunto deve possuir para ser um espaço vetorial. Considera o fato da noção de espaço vetorial ser uma noção unificadora e generalizadora, um aspecto crucial das dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Assim, a autora propõe uma decomposição genética, na qual descreve que para um indivíduo construir a noção de espaço vetorial e reconhecê-la, como uma estrutura geral, deve possuir esquemas formados sobre as noções de conjunto e operação binária. Dessa forma, o indivíduo ao encapsular o objeto conjunto com a operação binária que satisfaz axiomas, define a multiplicação por escalar, multiplicação de um elemento do conjunto (vetor), por um elemento pertencente ao corpo (escalar).

Esse objeto, o conjunto com a adição entre vetores e a multiplicação por escalar, segundo a autora pode ser coordenado pelo indivíduo com o esquema de axiomas, de forma que o sujeito obtenha o objeto espaço vetorial.

Para Parraguez (2009, p.69) [51], dependendo da maneira como o indivíduo organizou as ações, os processos e os objetos, ele poderá reconhecer vários exemplos de espaços vetoriais familiares e, no entanto, não realizar relações entre esses espaços vetoriais nem a seus subespaços, o que faz com que não exista “uma clara conexão entre as noções de espaço vetorial, independência/dependência linear e base, fato que se detecta nas aplicações concretas quando o estudante utiliza as noções de independência/dependência linear e base”.

Em outra situação, o estudante pode estabelecer relações entre diferentes espaços vetoriais e seus subespaços, fazendo uso de isomorfismos, transformações lineares e da dimensão. Neste caso, o estudante dependerá do contexto em que o

[51] [...] una clara conexión entre las nociones espacio vectorial, independencia/dependencia lineal y base, hecho que se detecta en las aplicaciones concretas cuando estudiantes utilizan las nociones de independencia/dependencia lineal y base.

problema estiver inserido para relacionar os objetos dependência linear de um conjunto e base e, ainda, podem existir algumas dificuldades.

Para Parraguez (2009, p.64) [52], o estudante pode, ainda, utilizar a noção de espaço vetorial de maneira coerente e estabelecer relações entre as noções elementares, sendo possível "determinar quando a estrutura é aplicável (a um problema) e quando, não". Com isso, a autora afirma que o indivíduo reconhece o espaço vetorial como sendo uma estrutura abstrata e é capaz de apresentar, trabalhar e identificar espaços vetoriais não familiares. Independente do contexto do problema, o indivíduo "coordena as noções de independência - dependência linear e base, e igualmente trabalha e compreende todas as técnicas diretas ou indiretas que estão relacionas a essas noções" (PARRAGUEZ, 2009, p.71) [53].

Outro resultado descrito por Parraguez (2009, p.150) [54-55-56] é "a não linearidade da aprendizagem", pois constatou que os estudantes podem "ir e vir entre diferentes concepções, para isso, basta que usem uma compreensão adequada". Assim, como também constatou que os estudantes podem apresentar outros caminhos durante a construção da noção de espaço vetorial. Afinal, os estudantes podem possuir "elementos de uma construção objeto (pode-se chamar assim porque mostram que há uma compreensão do conceito como uma construção objeto) sem executar algumas construções prévias".

Desta pesquisa, considero as noções de conjunto e operações binárias, como sendo necessárias à construção da noção de base de um espaço vetorial, pois para um estudante construir uma estrutura coerente para as noções elementares de Álgebra Linear, ele deverá estabelecer correlações entre essas noções.

Uma pesquisa de intervenção didática desenvolvida pelo GPEA é a de Padredi (2003) que investigou, por meio de entrevistas semiestruturadas, quais os recursos-meta sobre a noção de base de um espaço vetorial que são evidenciados no discurso de professores universitários.

Dentre os professores entrevistados, um afirmou que a noção de base de um espaço vetorial surge "da *necessidade* e do *lucro*: '...trabalhar esse conjunto com

[52] [...] capaz de determinar cuándo dicha estructura es aplicable y cuándo no.
[53] coordinan las nociones de independencia-dependencia lineal y base, e igualmente manejan y comprenden todas las técnicas directas e indirectas que se relacionan con esas mismas nociones.
[54] [...] la no linealidad del aprendizaje.
[55] [...] ir y venir entre diferentes concepciones, hasta que logren una comprensión adecuada.
[56] [...] elementos de la construcción objeto (se puede llamar así porque muestran que hay uma comprensión del concepto como una construcción objeto) sin lograr algunas construcciones previas.

menos elementos...' e 'quero ter o mínimo de trabalho possível...'[...]" (PADREDI, 2003, p.49).

Considero que, em seu discurso, esse professor apresenta a noção de base de um espaço vetorial, como sendo uma justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, pois ao buscar pelo menor conjunto que representa todo o espaço, tem-se o menor gerador, que, ao mesmo tempo, permite ao indivíduo identificar os elementos "extras", como vetores linearmente dependentes, ou seja, tem-se um conjunto maximal de vetores linearmente independentes.

Segundo a autora, o professor supracitado afirma que, com o apoio nas noções já estudadas na Geometria Analítica, procura estimular os alunos a refletirem primeiro sobre a noção de conjunto gerador, recorrendo, assim, aos conhecimentos anteriores para utilizá-los na nova estrutura, ou seja, a de espaço vetorial.

O entrevistado descreve da seguinte forma:

> [...] a gente quer buscar no conjunto, uma maneira de representá-lo usando elementos de modo a não ter que considerar os infinitos (o número infinito deles), já que têm alguns que eu consigo representar usando os outros. Como em Geometria Analítica, eles já têm um pouco dessas noções, aí eles começam... [...] quais os vetores que eu preciso para conseguir obter os outros? Então, trabalhando nisso vem a idéia de gerador. Então, a gente consegue achar geradores de um conjunto. Então, em geral, a gente trabalha primeiro no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, porque na Geometria Analítica foi onde eles trabalharam.Só que a gente vê que não tem uma maneira só, não tem só um conjunto de geradores" (PADREDI, 2003, p.51).

Assim, o entrevistado apresenta a lei da economia: "o mínimo de vetores possível" (PADREDI, 2003, p.52) de onde julga sair a noção de independência linear. E complementa, "então, a base vem como conseqüência: que é uma maneira de eu trabalhar o conjunto, de eu conhecer o conjunto, de eu representar o conjunto usando um mínimo de vetores" (PADREDI, 2003, p.52).

Penso que a noção de base ao ser concebida como sendo: um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, um conjunto minimal de vetores geradores e uma justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes permite ser a base, um conjunto que representa o espaço vetorial como um todo, o que pode conduzir o aluno a refletir sobre a vantagem de empregar uma ou outra abordagem, dependendo da situação.

Outro professor utilizou o termo “vetores bem comportados”, isto é, também recorreu à Geometria Analítica para discutir a noção de vetores linearmente independentes. Segundo Padredi (2003, p.63), este professor relacionou o termo “bem comportado” com “vetores não colineares, vetores que não estão na mesma reta”.

Nesse aspecto, ressalto a pesquisa de Costa e Catarino (2007) realizada em Portugal, em que é apresentado um diagnóstico da descontinuidade existente entre a noção de dependência linear, no ensino superior e a noção de colinearidade no ensino básico. Esta pesquisa vem corroborar com as falas dos professores entrevistados por Padredi (2003). Costa e Catarino, consideram:

> quer a invenção Matemática, quer a aprendizagem da Matemática, pressupõem o estabelecimento de conexões entre conceitos. Quanto mais finas forem as redes (matemáticas ou mentais) criadas, mais efectiva se torna a aprendizagem. Neste sentido, consideramos existir uma *descontinuidade* quando, nessa rede, não se realiza ligação explícita entre conceitos matemáticos interligados (COSTA e CATARINO, 2007, p.152, itálico dos autores).

Apesar das descontinuidades existentes, descritas por esses autores, serem por: mudanças de símbolos, mudanças de configurações e de significados. No caso particular da dependência linear, também, “é necessário entender como ocorre a reorganização intelectual de modo que este novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores (colinearidade, vector, entre outros)” (COSTA e CATARINO, 2007, p.155).

Ainda sobre a questão da descontinuidade existente entre as noções vistas no ensino básico e no ensino superior, Gueudet-Chartier (2000) afirma que, no caso da noção de base de um espaço vetorial, a passagem do que é estudado no ensino básico implicaria um grau elevado de generalização e não pode ser identificada, como uma extensão natural, pois

> na verdade, na escola os alunos sabem que uma base para um plano é um par de vetores não colineares, e que uma base para o espaço é uma terna de vetores não coplanares. Estas definições são específicas para o contexto: em particular, a dimensão do espaço é conhecida e a independência linear parece germinar. A transição para o conceito geral necessitará da introdução do conceito de

> família geradora e, portanto, uma importante mudança conceitual (GUEUDET-CHARTIER, 2000, p.8) [57].

Esses resultados são importantes no momento da elaboração da *análise teórica*, pois há uso por parte dos professores, conforme Padredi (2003) e, por parte de livros didáticos, conforme Araújo (2002), dos recursos provindos da Geometria Analítica para o desenvolvimento das noções de Álgebra Linear. E, ainda, as evidências apontadas por Costa e Catarino (2007) ao estabelecer conexões entre essas noções. No entanto, Gueudet-Chartier (2000) aponta para os devidos cuidados com a generalização abusiva dessas noções.

Retornando à pesquisa de Padredi (2003), um dos professores ao fazer uma analogia entre o processo de se construir uma parede e as noções de espaço vetorial, base e dimensão, afirma que:

> a noção de base é importante, mas não pode existir sozinha, separada do seu corpo, ou seja, da noção de espaço vetorial e de todas as propriedades, características desse espaço que está sendo construído: 'Então, a parede para mim é mais importante do que a base. Então, eu olho na parede... o meu propósito de olhar para construir a parede. Eu sei que tenho que fazer com as duas dimensões para construir a parede' (PADREDI, 2003, p.105).

Penso que esse professor considera, assim como Parraguez (2009), a dimensão como necessária durante a construção das noções elementares de Álgebra Linear, pois permite caracterizar um espaço vetorial. Sendo, assim, acredito ser importante considerá-la durante a *análise teórica*.

Já Oliveira (2005), observou 13 aulas de um professor que ministrava Álgebra Linear, em busca de recursos-meta que fossem passíveis de se tornarem alavancas-meta para alguns dos alunos.

O professor observado, após ter discutido com seus alunos as noções de espaço vetorial, subespaço vetorial, combinação linear, conjunto gerador e subespaço gerado, propôs uma lista que, segundo Oliveira (2005), permitia que os alunos observassem que um mesmo espaço vetorial poderia ser gerado por diferentes conjuntos geradores. A lista ainda permitia que os alunos refletissem

[57] En effet, les élèves savent au lycée que une base du plan est un couple de vecteurs non colinéaires, que une base de le espace est un triplet de vecteurs non coplanaires. Ces définitions sont spécifiques au contexte: en particulier, la dimension de le espace concerné étant connue à de indépendance linéaire y apparaît en germe. Le passage à la notion générale nécessitera le introduction de la notion de familie génératrice, et donc un important glissement conceptuel.

sobre a reversibilidade das noções, isto é, "todo conjunto de vetores gera um subespaço vetorial e, por outro lado, todo subespaço vetorial é gerado por um conjunto de vetores" (OLIVEIRA, 2005, p.67).

Em outra aula, o professor inicia com uma lista de exercícios em que o enunciado, segundo Oliveira (2005), pretendia despertar nos alunos a ideia de que conjuntos distintos que são geradores de um mesmo espaço vetorial, possuem alguma relação, no caso, um desses conjuntos possui um elemento a mais do que o outro e, ainda, o elemento "extra" pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto com um número menor de vetores.

Tal atividade proporcionou um diálogo que fez com que os alunos refletissem "sobre as vantagens de um conjunto gerador minimal, sugerindo a idéia de conjunto linearmente independente" (OLIVEIRA, 2005, p.70).

Mais uma vez, a noção de dependência linear surge da necessidade de se obter o menor conjunto gerador. Assim, questiono: será possível construir a noção de base de um espaço vetorial iniciando pela noção de dependência linear? Esta questão fica para ser verificada na análise teórica.

Em continuidade, o professor em aula apresentou aos alunos uma maneira de verificar a dependência linear em um conjunto de vetores, no seguinte comentário:

> [...] um deles como combinação linear dos outros, é uma diferença que eu vou ter que ficar olhando. (...) Essa é uma das características de um conjunto que a gente vai chamar de L.D., ou seja, linearmente dependente. Eu tenho alguém que está dependendo dos outros, lá dentro do meu conjunto (OLIVEIRA, 2005, p.71).

Segundo Oliveira (2005), após a discussão sobre esta afirmação o professor mostrou a definição formal para dependência linear; ou seja, sendo V um espaço vetorial e C um subconjunto de V, é dito que C é linearmente independente se $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$, para $v_i \in C$ e $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, implica que $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Na próxima lista de atividades propostas pelo professor aos alunos, foi apresentado o seguinte enunciado:

> queremos encontrar dentro de um espaço vetorial $V,$ finitamente gerado, um conjunto finito de vetores, tal que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear dele, e mais, que todos os vetores desse conjunto realmente sejam necessários para gerar V. A esse conjunto, daremos o nome de base (OLIVEIRA, 2005, p.74).

Penso que a citação acima permitiria que o aluno refletisse sobre a noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal linearmente independente. No entanto, o professor, ao apresentar na mesma lista de atividades a definição de base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, não permitiu tal reflexão.

Segundo Oliveira (2005), o professor propiciou vários momentos de discussão de maneira tal que levou os alunos a conceituarem a noção de dimensão e, ainda, que um conjunto possui infinitas bases. Assim, como conduziu os alunos a associarem as noções de dimensão e de conjunto linearmente independente para se obter a base de um espaço vetorial, ou verificar se um conjunto de vetores é uma base para um determinado espaço.

Desses resultados, observo que a base é uma representante fundamental de um espaço vetorial e pode ser abordada em sala de aula de formas distintas. Assim como observo a importância da dimensão que, correlacionada a noções de dependência linear ou de combinação linear, permite a construção da noção de base de um espaço vetorial.

Em síntese, na análise teórica, pretendo levar em consideração:

- As noções de operação binária e de conjunto;
- As correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear;
- Os três pontos de vista sobre a noção de base de um espaço vetorial;
- A articulação da noção de dimensão com as demais noções elementares; e
- A correlação entre a noção de colinearidade e dependência linear.

Com essas considerações, das questões e do objeto de pesquisa, no próximo capítulo apresentarei a metodologia adotada neste trabalho e os procedimentos metodológicos.

CAPÍTULO 3

ESCOLHAS METODOLÓGICAS

> O verdadeiro, em ciências humanas, apenas pode ser um verdadeiro relativo e provisório [...] O verdadeiro, em ciências humanas, é ainda mais relativo porque, com freqüência, não pode basear sua construção sobre uma medida objetiva dos fenômenos estudados (LAVILLE e DIONNE, 1999, p.35).

Apesar do verdadeiro, em ciências humanas, depender dos fenômenos imbricados à pesquisa nessa área, é imprescindível ao pesquisador “trabalhar com rigor, com método, para assegurar a si e aos demais que os resultados da pesquisa serão confiáveis, válidos” (LAVILLE e DIONNE, 1999, p.11).

Com esta perspectiva, neste capítulo descrevo a abordagem metodológica adotada, os métodos utilizados para a coleta dos dados e os procedimentos metodológicos que segui ao descrever e interpretar os dados coletados.

Abordagem metodológica

Para justificar a abordagem metodológica adotada, retomo as questões norteadoras:

- Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial?
- Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial?
- Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?

Estas questões permitiram-me formular o seguinte objetivo: identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial. Por ser, esse, o objetivo principal da pesquisa, ou seja, considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, optei por desenvolver uma pesquisa qualitativa, que permite “iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo” (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p.12).

A respeito desta abordagem, Bogdan e Biklen (1994, p.47), em seu livro “Investigação Qualitativa em Educação”, discutem as cinco principais características que determinam uma pesquisa ser qualitativa. Pois, uma pesquisa pode possuir essas características em sua integridade, ou não. Afinal, segundo esses autores, as investigações nem sempre “patenteiam estas características com igual eloqüência”.

As características a que Bogdan e Biklen (1994) se referem são: a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; a pesquisa é descritiva; o interesse é mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; a análise tende a ser indutiva; e a maneira como o sujeito observado encara as situações em estudo é de extrema importância.

Nesta pesquisa, a fonte dos dados é o ambiente natural, pois os dados foram coletados por meio de entrevistas com estudantes de um curso específico de Álgebra Linear, do qual o pesquisador também foi aluno. Os materiais foram coletados exclusivamente pelo pesquisador, tanto durante o curso como na efetivação das entrevistas, constituindo, assim, o pesquisador como o principal instrumento de coleta dos dados.

Dessa forma, a pesquisa também é descritiva, pois contempla dados recolhidos durante as entrevistas, transcrições das entrevistas, assim como as observações realizadas durante o curso do qual os sujeitos de pesquisa participaram.

Mesmo sendo o principal interesse desta pesquisa, identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial, não se pode esquecer, das questões de pesquisa, visto que, o objetivo emergiu das questões, e elas visam não só a um momento estanque, mas todo um processo de construção.

Já a maneira com que foram coletados os dados, sobretudo as entrevistas, pressupôs uma análise inicial que, posteriormente, orientou as inter-relações efetuadas nas análises dos dados. Isto é, as análises foram efetuadas de maneira indutiva.

Com essas considerações, em especial, a importância atribuída à maneira com que o sujeito observado encara a situação em estudo, afirmo que realmente esta pesquisa adapta-se às características descritas por Bogdan e Biklen (1994) ao se referirem a um estudo qualitativo.

Assim, descrevo e especifico os sujeitos da pesquisa, pois são alunos que concluíram um mesmo curso de Álgebra Linear, ou seja, é um grupo bem delimitado. Apesar de eles terem objetivos distintos que os levaram a participar do curso, todos vivenciaram uma mesma abordagem de ensino.

O curso de Álgebra Linear, do qual os sujeitos participaram, foi oferecido por uma Universidade de renome em São Paulo. É um curso de extensão com duração de 120 horas, que tem como público-alvo estudantes ou profissionais interessados em complementar sua formação.

Para a inscrição no curso, a única exigência foi que o interessado fosse graduado ou estivesse matriculado em um curso das Ciências Exatas. O curso foi ministrado nos meses de janeiro e fevereiro de 2009.

O sítio de divulgação dos cursos de extensão dessa instituição apresentava, no início de 2009, o seguinte programa para a disciplina de Álgebra Linear: vetores no $\mathbb{R}^n$, espaços vetoriais, subespaços, transformações lineares e matrizes, semelhanças e diagonalização.

No primeiro dia de aula, indicou-se a bibliografia a ser utilizada no curso: Callioli *et al.* (1995) e Coelho e Lourenço (2001). A metodologia de ensino do curso foi a tradicional, conforme exposto nas páginas 18 e 19 deste trabalho: dada a definição, passava-se a exemplos, lista de exercícios padrões, teoremas e proposições e aplicações.

Na realidade, no curso foram abordados os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais finitamente gerados, e os exemplos trabalhados no curso restringiram-se aos espaços vetoriais: das n-úplas de números reais – $\mathbb{R}^n$ –, dos polinômios de grau menor ou igual a n, com coeficientes reais – $P_n(\mathbb{R})$ –, das matrizes com n linhas e m colunas, com os elementos pertencentes aos reais – $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ – e o conjunto dos números complexo – $\mathbb{C}$ –.

Além da noção de espaço vetorial, foram abordadas outras noções que eram apresentadas no título das listas de atividades propostas aos alunos. Tal como apresentados aos alunos os títulos foram: Espaços vetoriais; Subespaços vetoriais; Combinações lineares e subespaços gerados; Dependência linear; Bases; Espaços finitamente gerados e dimensão; Sistemas de coordenadas; Transformações lineares; Inversa e núcleo de uma transformação; Transformações lineares e espaços de dimensão finita; Matrizes de transformações lineares, Matriz de mudança de base; O espaço $L(U,V)$[58]; Diagonalização; Produto interno e norma; e Ortogonalização e funcionais lineares versus produto interno.

Segundo Lüdke e André (2001), quando se estuda uma situação específica em que os sujeitos compartilham de uma mesma experiência, de maneira a evidenciar o que o grupo tem em particular, a pesquisa é caracterizada como sendo um *estudo de caso*.

Desta forma, a metodologia adotada é a qualitativa, sendo "o estudo de caso [...] uma escolha do objeto a ser estudado" (ANDRÉ, 2005, p.16), em que a particularidade consiste na abordagem dada ao desenvolvimento das noções de Álgebra Linear, comum a todos os sujeitos participantes do curso. Ressalto que o objeto de estudo foi identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial e não propriamente o curso.

Segundo André (2005), dentre os principais aspectos que qualificam um estudo de caso, estão: a particularidade, que já foi exposta, e a descrição minuciosamente do estudo que, neste caso, visa a identificar a multiplicidade de concepções que podem ter sido construídas pelos sujeitos, e as possíveis inter-relações entre as noções elementares de Álgebra Linear estabelecidas por eles.

O método de coleta de dados

Para responder as questões e atingir ao principal objetivo desta pesquisa, busquei por um método de coleta de dados que permitisse dialogar com o sujeito e o fizesse revisitar as noções elementares de Álgebra Linear, de maneira que mobilizasse seus esquemas mentais e possibilitasse identificar indícios de quais concepções eles possuem.

[58] O espaço $L(U,V)$ é o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das transformações lineares de U em V.

Segundo Lüdke e André (2001), para iniciar a pesquisa de campo o pesquisador deve ter bem estruturado seu instrumento de coleta, para que consiga obter os dados necessários para desenvolvimento de seu estudo. Com esta preocupação, procurei por vários métodos de coleta, optando pela entrevista, pois segundo Bogdan e Biklen (1994, p.134), na pesquisa qualitativa, a entrevista é "utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma idéia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo" e, ainda, "permite correções, esclarecimentos e adaptações que a tornam sobremaneira eficaz na obtenção das informações desejadas" (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p.34).

Para se desenhar uma entrevista individual, interesse desta pesquisa, Lüdke e André (2001) apresentam três tipos: *estruturadas*, *semiestruturadas* e *não estruturadas* (ou não totalmente estruturada).

Nas entrevistas não estruturadas, "não há a imposição de uma ordem rígida de questões, o entrevistado discorre sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém e que no fundo são a verdadeira razão da entrevista" (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p.33-34). No caso das entrevistas serem do tipo estruturada, "o entrevistador tem que seguir muito de perto um roteiro de perguntas feitas a todos os entrevistados de maneira idêntica e na mesma ordem" (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p.34). Já nas entrevistas do tipo semiestruturadas, que é um meio termo entre as estruturadas e as não estruturadas, tem seu desenvolvimento associado, "a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações" (LÜDKE e ANDRÉ, 2001, p.34).

Desta forma, para a coleta dos dados, optei pela entrevista semiestruturada, pois permite que o entrevistador tenha certa liberdade para, caso necessário, reconduzir a entrevista, ou seja, enfatizar, ou esclarecer, certas atitudes do entrevistado e, ao mesmo tempo, permite que o entrevistador não perca o foco de seu estudo, pois terá em mãos um roteiro que o guiará durante as entrevistas.

Apesar de todas as vantagens de se utilizar as entrevistas para a coleta de dados, os autores Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (2001) afirmam que se devem tomar certas precauções ao realizá-las; a primeira delas, o investigador deve estabelecer uma relação com o sujeito em que haja confiança mútua, o investigador deve informar ao sujeito os objetivos e garantir-lhe o anonimato e fazer com que o sujeito não fique apreensivo ao responder às perguntas.

Os autores citados afirmam que uma boa entrevista deve ser agradável para ambas as partes, o entrevistador deve ter a capacidade de ouvir e fazer com que a entrevista ocorra naturalmente. O entrevistador, também, deve atentar a todas as expressões do entrevistado e, ao mesmo tempo, evitar expressá-las; cada ação de ambas as partes pode alterar o andamento da entrevista. Outra questão não menos trabalhosa é que as entrevistas devem ser transcritas, isto é, passadas ao papel de forma clara e que reproduza o mais próximo possível, o que realmente ocorreu.

Caracterizado o estudo e apresentado como foram coletados os dados, na próxima seção, apresento os passos desenvolvidos no decorrer desta investigação, lembrando que esses se intercalaram de tal maneira que se torna, em linhas gerais, difícil precisá-los e separá-los.

Procedimentos metodológicos

Como o interesse desta pesquisa repousa na construção de uma noção matemática, base de um espaço vetorial, busquei por um curso de extensão promovido por uma instituição pública de renome em São Paulo. Este curso de Álgebra Linear ocorreu, no primeiro semestre de 2009, exigia ao efetuar a matrícula apenas que o aluno fosse graduado ou estivesse matriculado em um curso das Ciências Exatas.

Durante o decorrer do curso, fiz anotações e recolhi materiais que fornecessem informações da construção realizada para a noção de base de um espaço vetorial. Verifiquei, também, como era apresentada a noção de base de um espaço vetorial nos livros utilizados durante o curso, a saber: Callioli *et al.* (1995) e Coelho e Lourenço (2001).

Em paralelo ao curso, realizei leituras, em parte já descritas, para elaborar a análise teórica proposta pela Teoria APOS. Nesta fase, o primeiro passo foi conhecer a decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial, proposta por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008). “Aprender pelos exemplos de um campo de pesquisa envolve mais que aprender o conteúdo deste campo; é também saber olhar, pensar sobre e agir em relação ao mundo" (ROMBERG, 1992, p. 53)[59] e mais

> a identificação das relações entre os conceitos depende muito, por suposição, como em todos os estudos em educação matemática, da amostra de estudantes que se estuda e como eles aprenderam, entre outros fatores; pois sendo um caso particular, os estudos comparativos podem ser mais uma amostra para confirmar ou refutar os resultados. Esta possibilidade é o que torna possível estabelecer a educação matemática como uma ciência (TRIGUEROS, 2005, p. 18)[60].

Da leitura do material selecionado, efetuei uma análise preliminar que permitiu refinar a decomposição genética proposta por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008). Desse refinamento, dos resultados de pesquisa apresentados no capítulo 2 e de minhas concepções, apresentei uma expansão da decomposição genética de Euán (2007) e de Euán *et al*. (2008).

Separadamente da análise teórica, apresentei o roteiro de entrevista que foi desenhado, segundo os moldes de uma entrevista semiestruturada. A entrevista consta de duas partes: a primeira, em que se busca identificar certas características do entrevistado (formação acadêmica e atuações profissionais), e a segunda, identificar a concepção que o entrevistado demonstra possuir sobre a noção de base de um espaço vetorial, além de, verificar as correlações que o sujeito estabelece entre as noções elementares de Álgebra Linear.

As questões da segunda parte foram desenhadas de maneira que o sujeito as analisasse oralmente. Segundo Machado e Nogueira (2005, p.66), na argumentação "são utilizados modelos, visualizações e outros meios similares a fim de expressar algo sobre a Matemática". Assim, acredito que, ao permitir que o sujeito argumente sobre questões relacionadas a noções matemáticas, o número de elementos listados para esta análise será maior.

Além do que, segundo Machado e Nogueira (2005), o sujeito ao explicar o que concebe sobre uma determinada noção matemática, permite ao pesquisador

[59] […] learning the exemplars of a Field of inquiry involves more than learning the content of the Field; it is also learning how to see, think about, and act toward the world.

[60] […] la identificación de las relaciones entre conceptos depende mucho, por supuesto, como en todos los estudios en educación matemática, de la muestra de estudiantes que se estudia y de la manera cómo aprendieron, entre otros factores; pero una vez encontradas en un caso particular, pueden hacerse estudios con nuevas muestras para confirmar o refutar los resultados. Esta posibilidad es la que permite ir estableciendo la educación matemática como una ciencia.

avaliar como tal noção está estruturada. No entanto, as autoras alertam que argumentar é uma tarefa extremamente difícil aos alunos, mesmo àqueles considerados hábeis e com bom domínio da noção investigada.

Após ter elaborado o roteiro de entrevista, procurei o professor que ministrou o curso de Álgebra Linear, e obtive uma lista com os e-mails dos alunos que participaram da última prova, na lista constavam 14 e-mails.

Todos os 14 alunos foram convidados a participar da pesquisa. Mas, apenas oito responderam ao convite enviado por e-mail (anexo 1). Então, reenviei o e-mail, para os sujeitos que não haviam respondido ao primeiro convite e obtive a resposta de mais dois. Totalizando, assim, *dez sujeitos*.

Dos dez sujeitos, um deles por residir em outro Estado solicitou que a entrevista fosse realizada com o auxílio de ferramentas computacionais, e outro, por residir no interior de São Paulo e não encontrar tempo para efetuarmos a entrevista, solicitou que lhe enviasse o roteiro por e-mail. Os demais, oito, foram entrevistados individualmente, conforme acordo estabelecido entre as partes.

As entrevistas foram audiogravadas e transcritas, com exceção de duas, uma em que os dados foram coletados por meio de anotações durante a entrevista e outra em que o sujeito respondeu por e-mail.

Assim como combinado com os entrevistados, após transcrever as entrevistas, eu as enviei, para que eles pudessem verificar, caso quisessem complementar suas respostas.

Em seguida, analisei cada uma das entrevistas, ou seja, efetuei uma análise “vertical”. Para isso, utilizei a análise do roteiro e a decomposição genética das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial. Em cada entrevista, apresento sínteses sobre as considerações, nas quais identifico as concepções e as relações evidenciadas pelos entrevistados.

Por fim, analisei todas as entrevistas com um olhar “horizontal”, ou seja, um olhar panorâmico que permitiu tecer considerações sobre seu conjunto.

No próximo capítulo, apresentarei a análise teórica, isto é, a preparação para ida a campo. Nesta análise, identifico como se dá a noção base de um espaço vetorial nos livros utilizados no curso de extensão, apresento e analiso a decomposição genética de Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) e proponho uma extensão dessa decomposição genética. Além de apresentar o desenho e a análise do roteiro de entrevista utilizado.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE TEÓRICA

Este capítulo está subdividido em cinco seções. Na primeira, apresento o desenrolar da noção de base de um espaço vetorial nos livros utilizados no curso de que os sujeitos desta pesquisa participaram. Na segunda, apresento a decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial, proposta por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008). Na terceira, é feito um refinamento dessa decomposição genética. Deste refinamento, surge a quarta seção na qual apresento uma decomposição genética das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial, isto é, uma expansão da decomposição genética apresentada inicialmente. Para finalizar o capítulo, na última seção, descrevo e analiso o roteiro que utilizei nas entrevistas.

A noção de base de um espaço vetorial em dois livros

Durante o curso de extensão de Álgebra Linear, os livros textos utilizados foram os de Callioli *et al.* (1995) e o de Coelho e Lourenço (2001). Nesta seção, refiro esses livros por Livro 1 e Livro 2, respectivamente. O Livro 1, mais utilizado durante o curso, foi um dos analisados por Araújo (2002).

Livro 1

Embora o livro utilizado no curso tenha sido o de 1995 – 6ª edição[61] – sua primeira edição foi publicada em 1977. Está dividido em duas partes; na primeira de "teoria", são abordadas as noções elementares de Álgebra Linear, e na segunda, as "aplicações". Segundo Araújo (2002), até a 6ª edição desta obra, não foi realizada nenhuma alteração nos capítulos da "teoria", interesse desta pesquisa.

[61] Observo que essa não, necessariamente, foi à edição consultada pelo aluno.

Esse livro "foi elaborado quando a Álgebra Linear passou a ser reconhecida como uma disciplina importante, não só para a Matemática como também para outras áreas científicas" (ARAÚJO, 2002, p.28-29). Fato esse, que, segundo a Araújo (2002, p.29), "indica que os autores pretendiam atingir um grande número de leitores, das mais diferentes origens e interesses".

Araújo (2002), também, descreve que uma das premissas adotadas para elaboração do livro é que a aprendizagem em Álgebra Linear ocorre com base nos conhecimentos da geometria. Quanto à exposição dos conteúdos, foi feita da seguinte forma: "definição, exemplos das noções desenvolvidas na teoria, teoremas, exercícios resolvidos e exercícios propostos" (ARAÚJO, 2002, p.33), isto é, da forma tradicional.

No segundo capítulo, a noção de espaço vetorial é abordada, sendo todos espaços vetoriais finitamente gerados e sobre o corpo dos reais. Há um exemplo de espaço vetorial não finitamente gerado, no apêndice. Vale ressaltar que os espaços vetoriais abordados no Livro 1 são os mesmos que foram trabalhados pelo professor que ministrou o curso de extensão, veja página 47 deste trabalho.

Em alguns dos exemplos e demonstrações apresentados durante o texto, os autores afirmam ser resultados "óbvios", "fáceis de verificar". A esse respeito, Araújo, afirma que

> por um lado dizer que é fácil ou é óbvio, pode estar confirmando a um aluno que esteja compreendendo o assunto que o resultado obtido é de fácil acesso. Por outro lado, para aquele aluno iniciante e/ou com dificuldade, que não percebe a obviedade ou facilidade da verificação do assunto, esse discurso pode desmotivá-lo, por conta da impressão de incapacidade de perceber o que parece tão fácil ou óbvio ao outro (ARAÚJO, 2002, p.36-37).

Após os exemplos, os exercícios resolvidos e as propriedades relacionadas aos espaços vetoriais, os autores apresentam a definição de combinação linear, seguida de um único exemplo de espaço gerado, sendo o conjunto gerador um conjunto minimal. A próxima seção, espaços vetoriais finitamente gerados, também é iniciada com um exemplo em que o conjunto gerador utilizado é um conjunto minimal.

A esse respeito, concordo com Araújo (2002, p.38) ao afirmar que: "[...] as informações dadas não são suficientes para que o aluno atente para a existência de conjuntos finitos com diferentes números de elementos geradores de um mesmo espaço vetorial”. Para a autora, essa falta de informações pode, ainda, conduzir o aluno a pensar que todo conjunto gerador é minimal.

Dos seis exemplos de espaços vetoriais finitamente gerados, cinco constituem-se em base canônica. Segundo Araújo (2002, p.39-40), “esta escolha dos autores, [...] pode levar o aluno a conceber a idéia de que o espaço vetorial finitamente gerado só pode ser gerado por um conjunto minimal finito”, e ainda, “isto pode refletir na concepção de base do aluno, pois ele não atentará para o fato de que pode existir outro conjunto gerador e conseqüentemente, outras bases”.

A autora relata que, dos dez exercícios resolvidos sobre espaços vetoriais, apenas dois tratam de conjuntos geradores, sendo todos minimais. Quanto aos exercícios propostos aos alunos de um total de 25, nove solicitam ao aluno mostrar ou encontrar um conjunto gerador de um espaço vetorial.

Os autores iniciam o terceiro capítulo, Base e Dimensão, com um exemplo em que recorrem à geometria analítica para afirmarem que três vetores não coplanares formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Após esse exemplo, os autores apresentam, como sendo o objetivo do capítulo

> mostrar que em todo espaço vetorial finitamente gerado V existe um subconjunto finito B tal que todo elemento de V é combinação linear, de uma única maneira, desse subconjunto. E que todos os outros subconjuntos de V que têm também essa propriedade (sempre os há) possuem o mesmo número de elementos que B.
> Daí saíra então o conceito de ‘dimensão’” (CALLIOLI *et al.*, 1995, p.67).

Sem realizarem nenhum comentário, os autores iniciam uma seção com o título “Dependência Linear”. Para Araújo (2002, p.41), “a notável desarticulação da introdução com o assunto abordado em seguida [...] dificulta que o aluno perceba as intenções dos autores explicitadas nesta introdução”.

Nessa seção, são apresentadas as definições de um conjunto de vetores linearmente independentes e linearmente dependentes[62], exemplos e propriedades. Assim como, um exemplo de espaço vetorial gerado por três e por quatro vetores. No entanto, Araújo (2002, p.42) afirma que “o explicitado no texto, é que o exemplo

[62] A definição para um conjunto de vetores linearmente independentes é semelhante à apresentada na página 43, do segundo capítulo desta pesquisa. Já, um conjunto de vetores é chamado de linearmente dependente se não for linearmente independente.

se refere a uma determinada propriedade” e não ao fato de que “é interessante que o conjunto gerador seja o minimal”.

Logo após o exemplo, a definição de base é apresentada, como sendo um conjunto gerador de vetores linearmente independentes. Todos os exemplos são representados pelas bases canônicas. Segundo Araújo (2002, p.42), escolha tal “pode induzir alguns alunos à crença de que um conjunto gerador é suficiente para ser uma base de um espaço vetorial, além disso, pode causar a falsa idéia de que a base é única, e sempre a canônica” (grifo do autor).

Em seguida, é enunciado e demonstrado o fato de que todo espaço vetorial finitamente gerado admite uma base, mas não é feita uma abordagem que permita o aluno abstrair reflexivamente sobre o fato de haver mais de uma base.

Os autores encerram o capítulo com o Teorema da invariância[63], a noção de dimensão, o Teorema do completamento[64] seguido de duas proposições e, por último, um processo prático para determinar uma base, esse processo baseia-se em três observações que, segundo Araújo (2002, p.42), “tais observações [...] não passam de três propriedades de um sub-espaço gerado”.

Penso que a maneira como foi conduzida a construção das noções elementares de Álgebra Linear não permite que o aluno conceba essas noções como objeto matemático. Além de não proporcionar desequilíbrios, conforme sugerem Dubinsky e Lewin (1986), os autores do Livro 1 apresentam características particulares que dificultam a abstração reflexionante que poderia conduzir o aluno a uma generalização dessas noções e, assim, concebê-las como objeto.

Livro 2

Este livro foi utilizado no curso de extensão, como uma segunda fonte de pesquisa, não foi escrito com o objetivo “de suprimir um texto elementar de Álgebra Linear, mas, sim, um texto para um *segundo curso*, onde os conceitos algébricos pudessem ser amadurecidos e aprofundados para posterior utilização” (COELHO e LOURENÇO, 2001, p. 13-14).

[63] Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de vetores (CALLIOLI *et al.*, 1995, p.78).

[64] Seja V um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$. Se $\{u_1, u_2, \dots, u_r\} \subset V$ é um subconjunto L.I. com r vetores e $r < n$, então existem $n - r$ vetores $u_{r+1}, \dots, u_n \in V$, de maneira que $B = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ é uma base de V (CALLIOLI *et al.*, 1995, p.79).

Segundo os autores, o livro é oriundo de suas reflexões ao ministrarem as disciplinas de Álgebra Linear I e II, tanto nos cursos de graduação como nos de pós-graduação. O enfoque dado às noções abordadas, segundo Coelho e Lourenço (2001, p.14), é “principalmente algébrico, sem, porém, relegar a segundo plano os aspectos geométricos”.

Neste livro, são abordados os espaços vetoriais sobre um corpo qualquer, ou seja, não se restringe ao corpo dos reais. O livro está dividido em seis capítulos, e os dois primeiros tratam de assuntos referentes a esta pesquisa.

No primeiro capítulo, é feita uma espécie de revisão em que são retomadas as noções de corpo, matrizes e sistemas lineares. No segundo capítulo, são apresentadas as noções de espaço vetorial e de base.

No curso de extensão do qual os sujeitos desta pesquisa participaram, o professor tratou quase sempre dos $\mathbb{R}$–espaços vetoriais finitamente gerados. Apesar disso, descrevo a abordagem adotada por esse livro, pois alguns dos alunos podem tê-lo consultado.

Os autores iniciam o segundo capítulo definindo um espaço vetorial sobre um corpo qualquer, diversos exemplos são apresentados, entre eles, o corpo dos reais sobre o corpo dos racionais. A noção de base de um espaço vetorial é o título da segunda seção desse capítulo que Coelho e Lourenço (2001, p.41) afirmam ser “um dos conceitos mais importantes envolvendo a estrutura de espaço vetorial”. Após esta afirmação, os autores apresentam a definição da noção de combinação linear entre vetores e de conjunto gerador.

São apresentados exemplos e algumas propriedades, entre elas, que, qualquer subconjunto de um espaço vetorial que contenha um conjunto gerador desse espaço é também um conjunto gerador. Em um dos exercícios, sobre combinação linear, é solicitado que o aluno mostre que não existe nenhum conjunto gerador para o $\mathbb{R}^3$ que contenha menos de três elementos. Da maneira como os autores apresentaram as propriedades e os exercícios, acredito que o estudante já pode perceber a ideia de conjunto gerador minimal e de dimensão.

Após os exercícios sobre combinação linear e conjunto gerador, os autores afirmam que

> em geral, um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores e muitas vezes é importante termos um conjunto gerador que seja o

> *menor* possível. A situação ideal é que exista um conjunto gerador onde cada elemento de V se escreva de *maneira única* como combinação linear dos elementos deste conjunto gerador. Por trás dessa unicidade está o importante conceito de conjunto linearmente independente (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.43).

Nesta citação, penso ter um dos princípios de Harel (1997), isto é, o da necessidade: "[...] muitas vezes, é importante termos um conjunto gerador que seja o menor possível" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.43). Essa necessidade conduz à noção de dependência linear em um conjunto que os autores definem logo em seguida.

Mesmo os autores aparentemente tendo apresentado definições semelhantes às já descritas neste trabalho, penso que o aluno pode ser conduzido a abstrair reflexivamente, pois são feitas cinco observações, entre elas, um alerta, ou seja, que as definições apresentadas dependem do corpo base do espaço vetorial considerado. Para enfatizar, os autores apresentam, também, o exemplo: "seja $B = \{(1,0),\ (i,0),\ (0,1),\ (0,i)\} \subseteq \mathbb{C}^2$. Se considerarmos $\mathbb{C}^2$, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então, B é linearmente dependente" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.44).

Após os exemplos sobre dependência linear, os autores definem base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Nos exercícios, solicita-se que o aluno mostre que um conjunto é uma base, encontre uma base para um espaço vetorial sobre um corpo dado e, ainda, são apresentados espaços vetoriais finitamente gerados e que não são finitamente gerados. Nesses exercícios, também, é solicitado que o aluno mostre que o número de elementos de uma base para um mesmo espaço vetorial é invariante.

Na próxima seção, os autores definem um espaço vetorial finitamente gerado e mostram que todo espaço vetorial finitamente gerado possui uma base; no apêndice, os autores mostram que esse resultado vale para todo espaço vetorial e não só os finitamente gerados.

Alguns resultados são apresentados, entre eles: "seja V um K-espaço vetorial finitamente gerado não nulo e assuma que $\{v_1, \dots, v_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Então, todo conjunto linearmente independente de vetores de V tem no máximo m elementos" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.47). Penso que o estudante ao considerar a base de um espaço vetorial como sendo um conjunto linearmente independente com no máximo m elementos, pode vir a conceber a noção de base, como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes.

Em seguida, o resultado é apresentado: "Seja U um K-espaço vetorial finitamente gerado não nulo. Então, duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de elementos" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.48). É, confirmada, a existência de um invariante que, posteriormente, é definido, qual seja a dimensão de um espaço vetorial finitamente gerado.

Outros resultados são enunciados e demonstrados, retomando a ideia, até então tímida, de um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, isto é, os autores apresentam o seguinte resultado: "seja V um espaço vetorial finitamente gerado e seja B um conjunto linearmente independente em V. Então existe uma base de V contendo B" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p. 51).

Os autores descrevem que sendo V um espaço vetorial não nulo finitamente gerado, a demonstração do resultado "de que V possui uma base foi estender um conjunto linearmente independente, até chegarmos a uma base" (COELHO e LOURENÇO, 2001, p.51). Isto é, apesar de implícita, penso que a noção de base de um espaço vetorial pode ser concebida, como sendo um conjunto maximal linearmente independente. Diferente da maneira com que o Teorema do completamento foi enunciado e trabalhado pelos autores do Livro 1.

Assim, penso que o autor utilizou vários recursos-meta, entre eles: uso de contraexemplos – sobretudo nos exercícios – e os princípios de Harel (1997), pois mostrou resultados válidos para os espaços vetoriais de dimensão finita e generalizou-os para os de dimensão infinita.

Penso que um estudante ao utilizar esse livro pode refletir sobre a possibilidade de conceber a noção de base, como sendo: um conjunto maximal linearmente independente, um conjunto minimal gerador, a justaposição entre um conjunto maximal linearmente independente e um conjunto minimal gerador e correlacionada a noção de dimensão.

Apresentadas as abordagens utilizadas no Livro 1 e no Livro 2 para construção das noções elementares de Álgebra Linear, passo à exposição da decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial, elaborada por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008).

A decomposição genética de Euán (2007) e Euán et al. (2008)

Em sua dissertação de mestrado, Euán (2007) apresentou uma decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial. Durante a elaboração da dissertação, a autora tomou como orientadora a professora Asuman Oktaç e como coorientadora a professora Maria Trigueros. No ano seguinte, após concluir seu mestrado, a autora escreveu um artigo em conjunto com essas professoras, a saber: Euán *et al.* (2008).

Assim, ao descrever a decomposição genética de Euán (2007), apresento a versão proposta na dissertação e as considerações efetuadas no artigo Euán *et al.* (2008). No que segue, estabeleço o código, no qual ao enunciar pela primeira vez uma ação tal, indico por Ax, um processo tal, indico por Px e um objeto tal, indico por Ox[65], com $x \in \mathbb{N}$.

Euán (2007, p.28) [66] inicia propondo que, para um indivíduo construir a noção de base de um espaço vetorial, ele deve estar "[...] em um nível de processo para o conceito de espaço vetorial, e em um nível de ação para as operações entre vetores, incluindo a multiplicação por um escalar".

Já no artigo, é proposto que o indivíduo deve ter "uma concepção processo sobre o conceito de espaço vetorial, o que inclui um bom gerenciamento das operações entre vetores, incluindo a multiplicação por um escalar" (EUÁN *et al.,* 2008, p.71)[67].

Considero que, para Euán (2007), o indivíduo deve possuir uma concepção processo sobre a noção de espaço vetorial.

Euán *et al.* (2008, p.72)[68] afirmam que um estudante que possui uma concepção processo para a noção de espaço vetorial pode, por exemplo, "construir exemplos de conjuntos que são espaços vetoriais e exemplos que não são; também, pode decidir quais operações binárias podem ser definidas sobre um conjunto dado para que este seja um espaço vetorial".

[65] Tanto na versão impressa como na versão digital (no anexo 2), existe uma lista com tais códigos. Já, na versão impressa, o leitor poderá utilizar o encarte (anexo 4) na leitura.

[66] [...] en un nivel de proceso del concepto de espacio vectorial y en un nivel de acción con las operaciones entre vectores incluyendo la multiplicación por un escalar.

[67] [...] una concepción proceso del concepto de espacio vectorial, lo que incluye un buen manejo de las operaciones entre vectores, incluida la multiplicación por un escalar.

[68] [...] construir ejemplos de conjuntos que son espacios vectoriales y ejemplos de conjuntos que no lo son; también puede decidir cuáles operaciones binarias pueden definirse sobre un conjunto dado para que éste sea un espacio vectorial.

Dadas essas primeiras considerações, segundo Euán (2007), o indivíduo deverá realizar ações com os elementos de um espaço vetorial, isto é, deverá operar[69] com vetores pertencentes ao espaço vetorial tomado (A1).

O indivíduo prossegue executando a ação que lhe permite verificar se um dado vetor pode ser escrito como combinação linear de outros vetores (A2), e a ação que lhe permite verificar a dependência linear entre os vetores de um dado conjunto (A3), cada uma delas nos termos da aplicação de sua definição.

Euán *et al.* (2008, p.72)[70] afirmam que, segundo a teoria APOS, "um indivíduo que não mostra possibilidades de ir além da realização destas ações, demonstra possuir uma concepção ação sobre o conceito correspondente".

Para a construção da noção de base de um espaço vetorial, Euán (2007) exige que o indivíduo execute a ação em que deve repetir as ações **A2** e **A3** com vetores pertencentes a diversos espaços vetoriais (A4).

Dessa forma, o indivíduo, ao refletir sobre a ação **A4**, interioriza essa ação em um "processo que lhe permite estabelecer se um dado vetor ou um conjunto de vetores, pertencentes a um espaço vetorial podem ou não ser escritos como combinação linear dos vetores do conjunto original" (EUÁN, 2007, p.29, grifo do autor)[71] (P1).

Em relação à construção apresentada, Euán *et al.* (2008, p.72)[72], afirmam que, um indivíduo que possui uma concepção processo sobre a noção de conjunto gerador pode, por exemplo, "decidir sobre quais propriedades tem que ter os vetores pertencentes a um espaço vetorial gerado por um dado conjunto gerador".

A partir do processo interiorizado, **P1**, Euán (2007) refere que o indivíduo pode encapsulá-lo em um objeto matemático, ou seja, o indivíduo, ao considerar como um todo o conjunto de vetores que pode ser escrito em termos dos vetores dados, encapsula o objeto matemático conjunto gerador (O1).

Segundo Euán (2007), essa encapsulação implica um processo em que o indivíduo é capaz de reconhecer quais os subconjuntos do espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto de vetores desse espaço (P2).

[69] As operações a que a autora refere-se às operações binárias que definem o espaço vetorial.
[70] [...] un individuo que no muestra posibilidades de ir más allá de la realización de estas acciones muestra una concepción acción del concepto correspondiente.
[71] […] proceso que le permite establecer si un vector dado o un conjunto de vectores pertenecientes a un espacio vectorial pueden o no ser escritos como combinaciones lineales de los vectores del conjunto original.
[72] [...] decidir que propriedades tienen que tener los vectores pertencientes a un espacio vectorial generado por un conjunto generador dado.

Além disso, o indivíduo ao manusear a ação **A1** pode desenvolver uma nova ação, ou seja, ao lhe ser dado um conjunto de vetores, ele identifica dentre as possíveis combinações lineares, as que produzem o vetor nulo (A5). Assim como a ação que lhe permite identificar quais seriam os subconjuntos em que existe uma única combinação linear que resulte no vetor nulo (A6).

Dessa forma, para Euán (2007), as ações **A5** e **A6** são coordenadas no processo que permite ao indivíduo determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente (P3).

Euán *et al.* (2008, p.73)[73] afirmam que um indivíduo que possui uma concepção processo sobre a noção de dependência linear em um conjunto pode, por exemplo, “decidir os vetores que podem ser excluídos de um conjunto para reduzi-lo a um conjunto linearmente independente”.

O processo **P3** pode ser considerado como um todo, isto é, encapsulado em um objeto que permitirá ao indivíduo identificar os conjuntos de vetores que satisfazem tal propriedade, no caso, define a dependência linear em um conjunto (O2).

Construídos os objetos **O1** e **O2**, o indivíduo poderá reverter o trajeto percorrido para formar esses objetos e interiorizar o processo que lhe permite estabelecer as propriedades vetoriais que justificam a construção (P4), nas palavras da autora “o indivíduo pode, além disso, reverter os objetos nos processos que lhes deram origem, para verificar as propriedades dos vetores que os formam” (EUÁN, 2007, p.29)[74]

Para Euán (2007), esses processos **P1**, **P2**, **P3** e **P4,** ao serem coordenados, permitem a construção de um novo processo, este permitirá ao indivíduo reconhecer quais vetores de um determinado conjunto são linearmente independentes e quais vetores de um espaço vetorial podem ser gerados a partir deles. Para a autora, o processo inclui dizer se esse conjunto de vetores é indispensável para gerar todos os elementos de um determinado espaço vetorial (P5).

O processo **P5**, segundo Euán (2007), pode ser encapsulado pelo indivíduo, como um todo, isto é, o objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador linearmente independente (O3).

[73] [...] decidir cuáles vectores se pueden quitar de un conjunto para reducirlo a un conjunto linealmente Independiente.

[74] […] el individuo puede además revertir los objetos en los procesos que les dieron origen para verificar las propiedades de los vectores que los conforman.

A base permite ao indivíduo, "por um lado, caracterizar o espaço vetorial e, por outro, exercer novas ações, como por exemplo, compará-la com outras bases e conjuntos, tomá-la como ponto de partida para a mudança de base, etc." (EUÁN *et al.,* 2008, p.73)[75].

Assim, Euán (2007) afirma que o indivíduo ao ser capaz de relacionar essas ações, esses processos e objetos descritos começa a organizá-los em sua mente, a partir dessas relações, mais ou menos consistentes, é possível dizer qual concepção o indivíduo demonstra ter sobre a noção de base de um espaço vetorial, isto é, se é uma *concepção ação*, *concepção processo* ou *concepção objeto*.

Feita a decomposição genética, Euán (2007) descreveu um roteiro de entrevista. Com esse roteiro, entrevistou estudantes que haviam cursado Álgebra Linear e concluiu que, para um estudante construir uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial, além de uma concepção processo sobre a noção de espaço vetorial, é necessário que ele possua uma concepção processo sobre as noções de conjuntos e subespaços, pois os entrevistados não atentaram que os vetores de uma base para um espaço vetorial ou para um subespaço devem pertencer ao espaço vetorial considerado.

Ainda, em suas conclusões, Euán (2007), também, afirma que, com a parte empírica, foi possível verificar que a decomposição inicial deu conta de explicar as dificuldades que os alunos têm ao construir uma concepção processo sobre a noção de base de um espaço vetorial. No entanto, não foi possível observar a encapsulação dos processos em objetos matemáticos, pois nenhum dos estudantes que participou das entrevistas, mostrou tê-lo encapsulado.

A seguir, analiso a decomposição genética proposta por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008), para a noção de base de um espaço vetorial.

[75] [...] por una parte, caracterizar el espacio vectorial y, por la otra, ejercer sobre él nuevas acciones, como por ejemplo, compararlo con otras bases y conjuntos, tomarlo como punto de partida para cambiar de base, etcétera.

Refinamento da decomposição genética apresentada

Na seção anterior, descrevi a decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial elaborada por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008). Segundo Trigueros (2005), uma decomposição genética não é algo fechado, pronto, ela depende, geralmente, da maneira como o pesquisador concebe a noção em estudo.

No meu caso, minha concepção sobre a noção de base de um espaço vetorial era somente, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes. Mas, ao estudar os trabalhos, sobretudo, os desenvolvidos no âmbito do GPEA, essa concepção pôde ser ampliada e passei a conceber a noção de base, como sendo: um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e a justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes. Assim, analiso a decomposição genética de Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) sobre o ponto de vista dessas três concepções.

Euán *et al.* (2008) iniciaram afirmando que, para um indivíduo construir a noção de base de um espaço vetorial, ele deverá possuir uma concepção processo sobre a noção de espaço vetorial, conjunto e subespaço. As autoras, também, referem que o indivíduo, ao possuir uma concepção processo sobre a noção de espaço vetorial, deve ter um bom gerenciamento das operações binárias.

Nesse aspecto, concordo com as autoras e destaco que o indivíduo que possui uma concepção processo sobre a noção de **espaço vetorial** é capaz de, segundo Parraguez (2009), realizar as ações que lhe permitem identificar um espaço vetorial, citar exemplos de espaços vetoriais e de conjuntos que não são espaços vetoriais e, ainda, operar com vetores desses espaços, sendo as operações: a adição entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar pertencente ao corpo, no caso desta pesquisa, o corpo dos reais.

Outro ponto que observo é que todo subespaço vetorial é um espaço vetorial e, ainda, todo espaço vetorial é subespaço de si mesmo. Assim, no momento em que o principal interesse é a construção de uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial, não há necessidade do indivíduo possuir uma concepção processo sobre a noção de subespaço.

Quanto à noção de conjunto, é real a necessidade de sua inclusão, afinal Dorier *et al*. (1997) e Rogalsky (1997) já o apontavam, com a linguagem de conjuntos, como sendo noções essenciais para introdução das noções elementares de Álgebra Linear, assim como Parraguez (2009), também, descreveu em sua decomposição genética.

Pode-se, dizer que a não compreensão dessa noção permite que os alunos considerem como base de um espaço vetorial, um conjunto de vetores que não esteja totalmente contido no espaço ou, até mesmo, não possua nenhum vetor pertencente ao espaço em questão. Desta forma, apresento como o indivíduo que possui uma concepção objeto sobre a noção de **conjunto**, aquele que é capaz de reconhecer os elementos de um conjunto, apresentar exemplos de conjuntos e ter domínio da linguagem da teoria dos conjuntos.

Com a concepção objeto sobre a noção de conjunto, penso que o indivíduo deverá possuir, também, uma concepção objeto sobre a noção de subconjunto e sobre a pertinência de um elemento a um conjunto. Assim, considero que um indivíduo que possui uma concepção objeto sobre a noção de **subconjunto** é capaz, por exemplo, de dado um conjunto apresentar seus subconjuntos e dado um subconjunto dizer em qual conjunto ele está contido. Um indivíduo que possui uma concepção objeto sobre **pertinência de elemento a conjuntos** é capaz de identificar os elementos que pertençam a um dado conjunto.

Feitas essas considerações, **proponho como necessário** para a construção da noção de base de um espaço vetorial *que o indivíduo tenha concepção objeto sobre conjunto, subconjunto e pertinência de elemento a conjunto, a*lém de *concepção processo sobre espaço vetorial.* Nos dados do Quadro 1, sintetizo essas considerações.

Quadro 1: Concepções que um indivíduo deve ter para construir a noção de base

Propostas / Concepções	Euán (2007)	Refinamento
Processo	Espaço Vetorial; Conjunto; Subespaço.	Espaço Vetorial.
Objeto	----	Conjunto; Subconjunto; Pertinência de elemento a um conjunto.

Ao tecer as considerações sobre a inserção da concepção objeto sobre a noção de conjunto, acrescento que, para Dorier *et al.* (1997), uma das dificuldades que os alunos apresentam ao cursarem Álgebra Linear ocorre pelo formalismo exigido pela disciplina que, segundo Rogalsky (1997), não se deve só a linguagem conjuntivista, mas em parte ocorre também pelo uso do critério de verdade utilizado em Matemática, pela prática com a lógica elementar, pois constatou por exemplo,

> [...] que a implicação e a equivalência geram dificuldades, particularmente em álgebra, se as mesmas não forem diferenciadas; assim, os estudantes concluem frequentemente uma demonstração de independência por (se os a_i são nulos, mostra-se que $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$, por consequência u_i são independentes)! (ROGALSKY, 1997, p. 161) [76].

Ainda sobre o uso do critério de verdade em Matemática, Machado e Nogueira (2005, p.68) descrevem ser esse um ponto conflitante para o aluno, pois foge de sua prática cotidiana, foge do “senso comum”. Conduzindo, assim, a duas confusões epistemológicas. A primeira, está relacionada ao silogismo matemático “$A \Rightarrow B$”, aceito apenas formalmente pelos alunos, pois as autoras afirmam que “se em uma dedução o resultado obtido B é inverossímil, ainda assim é aceito, sem que a própria demonstração seja contestada”. A segunda, que essa confusão se dá pelo fato de, no cotidiano, o critério de verdade ser relacionado ao grande número de ocorrências encontradas. Isto é,

> uma das regras fundamentais da Matemática: um contra-exemplo é suficiente para determinar que uma propriedade é falsa, na vida cotidiana é transformada em uma regra paradoxalmente oposta que afirma que um fato que ocorre na maior parte dos casos, mesmo que não ocorra em todos os casos, é considerado verdadeiro (MACHADO e NOGUEIRA, 2005, p.69).

As autoras, também, afirmam que “para a maior parte dos alunos, tal forma de pensar não é adquirida ‘naturalmente’” (MACHADO e NOGUEIRA, 2005, p.69) e, em geral, nos cursos de Matemática “os alunos retêm apenas o discurso do professor e

[76] […] que le implication et le équivalence soulèvent des difficultés, particulièrement en algèbre, si on ne les distingue pas; ainsi, les étudiants concluent assez souvent une démonstration de indépendance par <<si les a_i sont nuls, on a montré que $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0$, donc les u_i sont indépendants>>!

reproduzem por imitação suas técnicas e maneiras de demonstração" (MACHADO e NOGUEIRA, 2005, p.70).

Assim, levando em conta que, durante o trabalho de um matemático, as formulações e resoluções de conjecturas são fundamentais, porque não utilizar a Álgebra Linear, que é um campo fértil de resultados a serem justificados, para estimular o uso dessa ferramenta, ou seja, o uso de contraexemplos?

Retornando a decomposição genética apresentada por Euán (2007), tem-se que o indivíduo constrói a noção de base de um espaço vetorial a partir das três ações, a saber, **A1**, **A2** e **A3**.

Discordo de Euán (2007), pois um indivíduo que aparenta possuir uma concepção processo sobre espaço vetorial, ao realizar a ação **A1** com vários elementos pode generalizá-la, e assim, construir a ação que lhe permite verificar a combinação linear entre vetores (A7).

Um exemplo dessa construção é o do indivíduo que, considerando três vetores $s = (1, 5, 0, \frac{1}{2})$, $t = (-1, 0, 1, \frac{-1}{2})$ e $u = (2, 5, -1, 1)$ pertencentes ao espaço vetorial com as operações binárias usuais $\mathbb{R}^4$, ao verificar se o vetor s pode ser escrito como combinação linear dos vetores t e u, utiliza a ação **A1**, ou seja,

$$(-1, 0, 1, \tfrac{-1}{2}) + (2, 5, -1, 1) = (-1 + 2,\ 0 + 5,\ 1 + (-1),\ \tfrac{-1}{2} + 1) = (1, 5, 0, \tfrac{1}{2}),$$

e conclui que o vetor s pode ser escrito como combinação linear dos outros dois vetores.

Nos dados do Quadro 2, sintetizo as ações que Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) consideram e as que percebo, como sendo necessárias para um indivíduo construir a noção de base de um espaço vetorial.

Quadro 2: Primeiras Ações proposta para a construção da noção de base

Proposta por Euán (2007)	Refinamento
A1: operar (operações binárias que definem um espaço vetorial) com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais.	A1: operar (operações binárias que definem um espaço vetorial) com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais.
A2: verificar se um dado vetor pode ser escrito como combinação linear de outros vetores, nos termos da definição.	A7: verificar a combinação linear entre vetores a partir da ação **A1**.
A3: verificar a dependência linear entre os vetores de um dado conjunto, nos termos da definição.	

As demais concepções que o indivíduo deve possuir, em parte, estão relacionadas à concepção processo sobre espaço vetorial e, em parte, servem de suporte para a construção da noção de base de um espaço vetorial.

Segundo Euán (2007), o indivíduo ao coordenar as ações **A1**, **A2** e **A3**, constrói a ação **A4** que é interiorizada no processo **P1**. Esse processo permitir-lhe-á estabelecer se um dado vetor ou um dado conjunto de vetores pertencentes a um espaço vetorial pode(m) ser escrito(s), como combinação linear de vetores pertencentes a um certo conjunto. Para a autora, esse processo – **P1** –, posteriormente, é encapsulado no objeto conjunto gerador – **O1** – que, por meio da reversibilidade, permite ao indivíduo construir o processo **P2**, ou seja, o processo em que é possível reconhecer quais os subconjuntos do espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto de vetores desse espaço. Esta construção está representada na Figura 2.

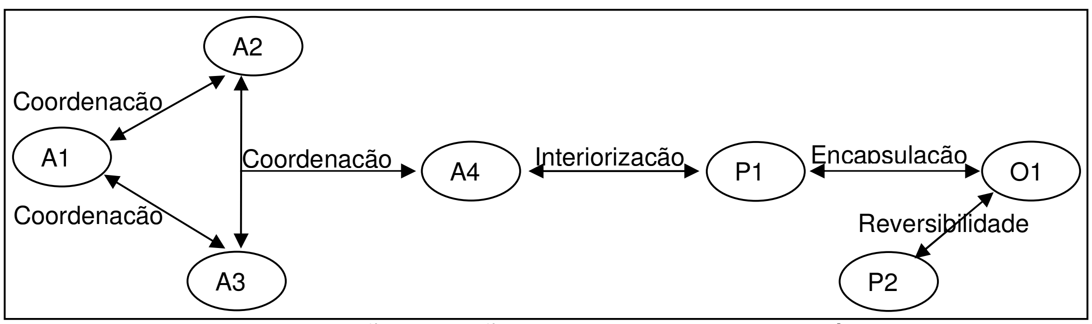


Figura 2: Construção da noção de Conjunto Gerador – Euán (2007)

Divergindo de Euán (2007), penso que, para esta construção, não há necessidade das ações **A2** e **A3**, pois o indivíduo ao generalizar a ação **A1** constrói a ação **A7** que pode ser interiorizada no processo **P1**. Esse processo pode ser encapsulado no objeto **O1** que, posteriormente, possibilita ao indivíduo abstrair reflexivamente e construir o processo **P2**. Assim, o **P2** poderá ser encapsulado no <u>objeto</u> matemático <u>Conjunto Gerador/Espaço Gerado</u> (O4). Afinal, da construção do objeto conjunto gerador tem-se, naturalmente, a noção de *espaço gerado.* A construção descrita está representada na Figura 3.

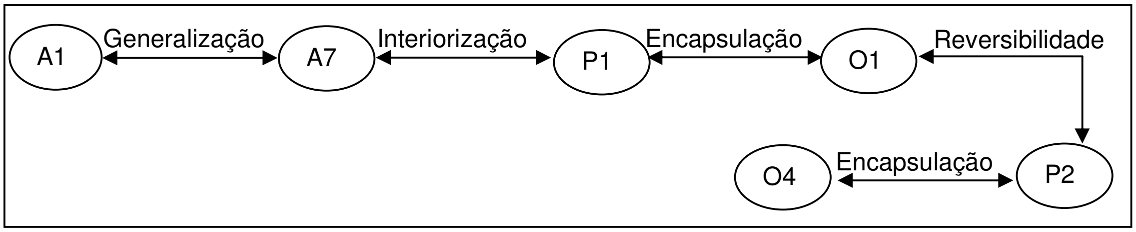


Figura 3: Refinamento – Construção da noção de Conjunto Gerador/Espaço Gerado

Um exemplo, desta construção proposta ocorreu na pesquisa de Oliveira (2005, p.66) durante a análise das aulas de um professor que questionou seus alunos sobre a possibilidade de substituir os "__" por números reais, de maneira que a seguinte igualdade fosse verdadeira $\_\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} + \_\begin{pmatrix}0 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ e, posteriormente, questionou-os sobre quais vetores poderiam ser escritos a partir desses vetores. Enquanto apresentava a questão, o professor comentou que "a idéia é ... combinação linear. O que seria combinação linear? ... A partir de alguns vetores dados, alguns vetores que eu tenho, eu produzir outros vetores".

Assim, o estudante ao verificar a validade da igualdade pode utilizar a ação **A1** que, posteriormente, poderá conduzi-lo à construção da ação **A7**. E, então, ao verificar quais vetores podem ser escritos a partir dos vetores dados, o estudante poderá, ainda, interiorizar essas ações no processo **P1** que, por sua vez, conduzirá à construção da noção de conjunto gerador e, consequentemente, o objeto **O4**.

Tendo o indivíduo construído o objeto **O4**, suponho, por meio da reversibilidade, que ele poderá construir o <u>processo</u> que lhe permitirá <u>obter um conjunto minimal gerador</u> (P6), pois como afirmam Coelho e Lourenço (2001, p.43), citados na página 57 e 58 deste trabalho, "[...] um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores e, muitas vezes, é importante termos um conjunto gerador que seja o *menor* possível".

O indivíduo, então, poderá encapsular o <u>objeto</u> base de um espaço vetorial, isto é, <u>base como sendo um conjunto minimal gerador</u> (O5). Este refinamento é interpretado na Figura 4.

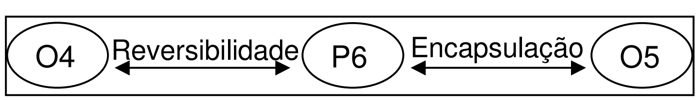


Figura 4: Refinamento – base: um conjunto minimal gerador

Em sua construção, Euán (2007) propõe que, a partir da ação **A1**, o indivíduo construa duas outras ações, **A5** e **A6**. Na primeira, deverá identificar dentre as possíveis combinações lineares de um conjunto de vetores quais resultam no vetor nulo; na segunda, deverá identificar dentre esses conjuntos, quais permitem obter combinações lineares que resultem de maneira única no vetor nulo.

Segundo Euán (2007), essas ações, **A5** e **A6**, são coordenadas no processo **P3** que permite ao indivíduo determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente. O processo, posteriormente, é encapsulado no objeto **O2**, dependência linear em um conjunto. Na Figura 5, apresento um diagrama para esta construção.

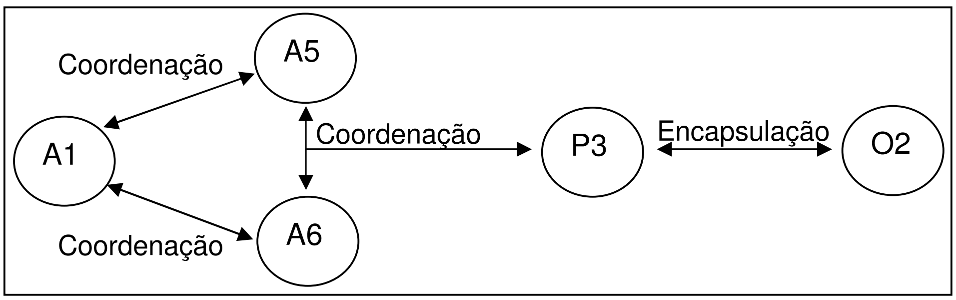


Figura 5: Construção da noção de dependência linear – Euán (2007)

Neste ponto, Euán (2007) descreveu o trajeto para construir o objeto **O2**, isto é, para esta construção o indivíduo executa sobretudo as ações **A5** e **A6**. No entanto, penso que a ação **A5** é desnecessária, pois a dependência linear da maneira como é proposta pela autora, está relacionada com o modo único de se obter o vetor nulo.

Assim, proponho que o indivíduo coordene o objeto **O4**, conjunto gerador/espaço gerado e o processo **P6** que lhe permite obter o menor conjunto gerador, de maneira que realize a <u>ação</u> em que deve <u>considerar vetores do conjunto gerador e verificar se esses vetores podem ser escritos, como combinações lineares um dos outros</u> (A8).

Caso nenhum dos vetores considerados possam ser escritos como combinações lineares uns dos outros, o indivíduo escolherá mais vetores no conjunto gerador e verificará se esses outros vetores continuam ou não sendo combinações lineares um dos outros. Caso haja vetores que possam ser escritos como combinação linear, o indivíduo realiza a <u>ação</u> em que deve <u>eliminar esses</u>

vetores (A9). Assim, o indivíduo repete a ação **A9**, até que todos os vetores desse conjunto não possam ser escritos, como combinações lineares entre si.

Desta maneira, o indivíduo ao coordenar as ações **A8** e **A9** constrói o processo **P3**, ou seja, o processo que lhe permite verificar a dependência linear em um conjunto de vetores. Esta construção diferencia-se da apresentada por Euán (2007), pois o indivíduo irá identificar os vetores que não formam combinações lineares entre si, como sendo vetores linearmente independentes e os que formam combinações lineares como linearmente dependentes. Assim, o processo **P3**, posteriormente, será encapsulado no objeto **O2**, veja a Figura 6.

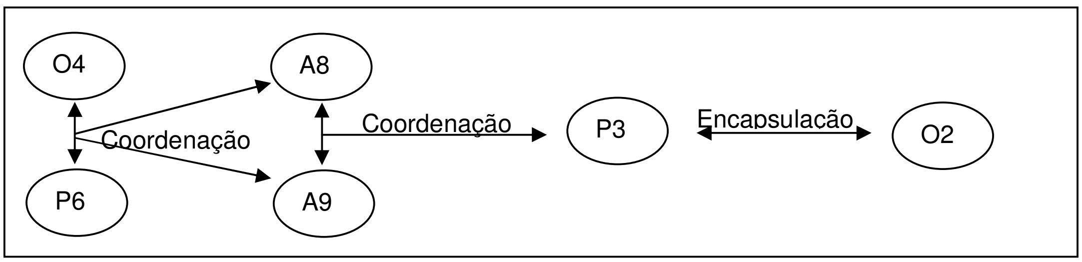


Figura 6: Refinamento – Construção da noção de dependência linear

Um exemplo dessa construção é o do indivíduo que obtém o conjunto $G = \{5, 2x, 3x^2 + 2, x^2\}$ e afirma ser um conjunto gerador do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$. Como o conjunto não é minimal, o indivíduo busca pelo menor conjunto gerador, ou seja, verifica que os vetores 5 e $2x$ não podem ser escritos um como combinação linear do outro. Assim, toma o vetor $3x^2 + 2$ e verifica que também não pode ser escrito como combinação linear de 5 e $2x$. O indivíduo, então, toma o vetor x^2 e verifica que, $x^2 = \frac{-6}{15}.5 + 0.2x + \frac{1}{3}.3x^2 + 2$, ou seja, afirma que o vetor x^2 é linearmente dependente. Dessa forma, obtém um conjunto gerador minimal, ou seja, o conjunto $\{5, 2x, 3x^2 + 2\}$.

Em seguida, ao reverter o objeto **O2** poderá construir o processo que lhe permite obter o maior conjunto de vetores linearmente não dependentes (independentes) (P7). E, posteriormente, encapsulá-lo no objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes (O6). Essa construção pode ser observada na Figura 7.

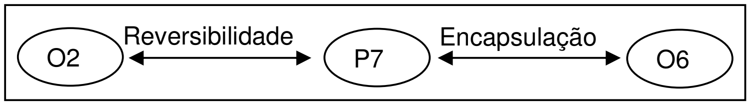


Figura 7: Refinamento – base: um conjunto maximal linearmente independente

Um exemplo de encapsulação da noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, poderá ser observado quando um sujeito ao justificar que o conjunto $\{5, 2x, 3x^2 + 2\}$ é uma base para o $P_2(\mathbb{R})$, afirma que esse conjunto é uma base, pois é um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e, qualquer outro vetor considerado no espaço vetorial, é linearmente dependente desses vetores.

Euán (2007) referiu que o indivíduo ao coordenar os processos **P1**, **P2**, **P3** e **P4** constrói o processo **P5**, que é encapsulado no objeto base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente – **O3** –, conforme representado na Figura 8.

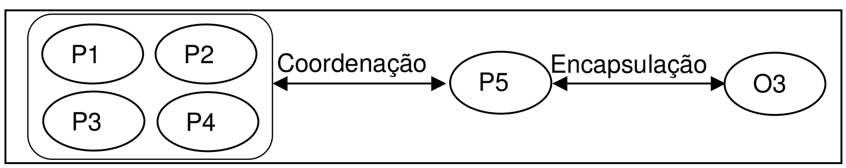


Figura 8: Base: um conjunto gerador linearmente independente – Euán (2007) –

No entanto, penso que um indivíduo, ao coordenar os processos **P6** e **P7**, poderá construir o processo que lhe permite identificar um conjunto minimal gerador, como sendo um maximal linearmente independente (P8). Esse processo poderá, ainda, ser encapsulado no objeto base de um espaço vetorial, como sendo uma justaposição entre um conjunto maximal linearmente independente e um conjunto minimal gerador, isto é, no objeto **O3**: base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente, veja Figura 9.

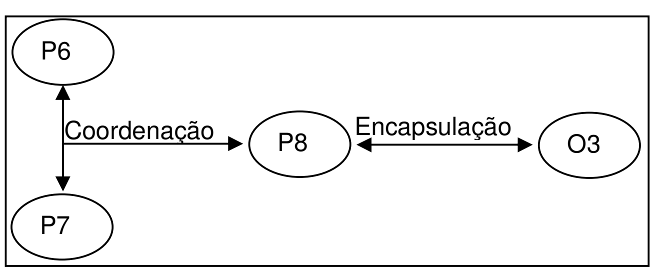


Figura 9: Refinamento – base: um conjunto gerador linearmente independente

Nesta seção, abordei as ações, os processos e os objetos que podem ser construídos pelo indivíduo (veja Figura 10). Mas não discuti as concepções que podem ser formadas, pois, em linhas gerais, um indivíduo com uma concepção ação sobre uma noção matemática está limitado a operar somente com ações, assim como um indivíduo que possui uma concepção processo sobre uma noção matemática, está limitado a operar com processos e um indivíduo que possui uma concepção objeto sobre uma noção matemática tem estruturado essas ações e processos de maneira que possa utilizá-los quando lhe for conveniente.

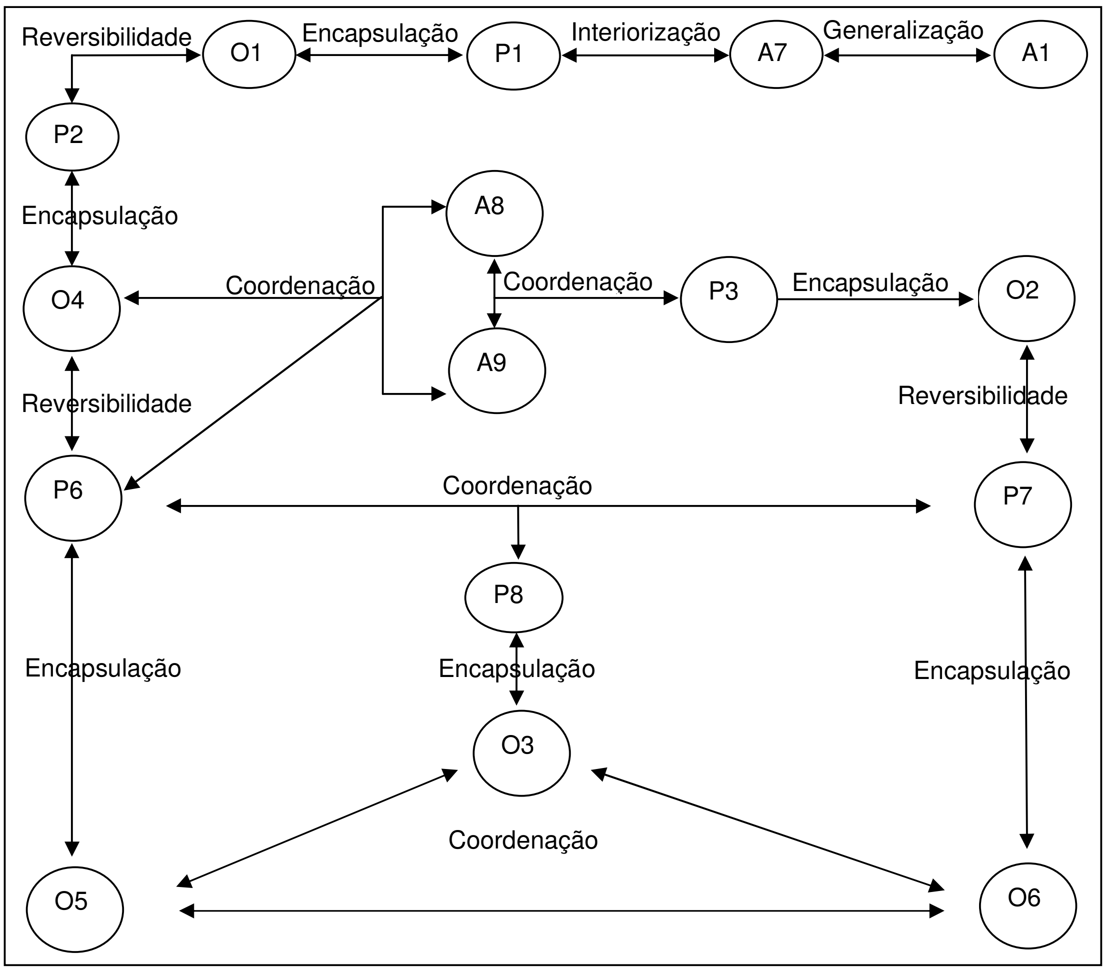


Figura 10: Refinamento

Na próxima seção, retomarei esse refinamento da decomposição genética da noção de base de um espaço vetorial, farei uma expansão para a noção de dimensão. Nesta decomposição, estabelecerei as correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear, assim como, definirei o que considero ser uma concepção ação, concepção processo e concepção objeto sobre essas noções.

Expansão da decomposição genética

Ao retomar a análise feita na seção anterior, descrevo e justifico a decomposição genética que proponho para as noções de base e de dimensão de um espaço vetorial. Essa decomposição é uma expansão daquela apresentada por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008), pois, além dos três pontos de vista que podem ser adotados ao se conceber a noção de base de um espaço vetorial, estabeleço correlações entre as ações elementares de Álgebra Linear, sobretudo, com o importante invariante dessa estrutura, a *dimensão*.

Para construir as noções de base e de dimensão de um espaço vetorial o indivíduo deve possuir:

- **concepção objeto** sobre as noções de conjunto, subconjunto e pertinência de elemento a conjunto; e
- **concepção processo** sobre a noção de espaço vetorial.

Conforme ilustrado na Figura 10, o indivíduo executa a ação **A1** com elementos de diferentes espaços vetoriais. Essa ação é generalizada, e ele constrói a ação **A7**. Essas duas ações sustentam a decomposição genética a qual proponho, pois, por meio delas, o indivíduo poderá construir a noção de base de um espaço vetorial, segundo os três pontos de vista: um conjunto maximal de vetores linearmente independentes; um conjunto minimal gerador; e um conjunto gerador linearmente independente.

O indivíduo após ter generalizado a ação **A1**, repete a ação **A7** com diversos vetores de espaços vetoriais distintos e a interioriza no processo **P1**. Tendo interiorizado esse processo, ele por meio da coordenação da ação **A1** com **P1**, poderá construir o <u>processo</u> que lhe permite <u>expressar todas as combinações lineares que podem ser obtidas a partir de um conjunto de vetores</u> (P9).

Um exemplo dessa construção é o do aluno que descreve os conjuntos de vetores que podem ser escritos como combinação linear dos conjuntos de vetores dados $U = \{(3,2)\}$, $S = \{(2,1),(0,1),(1,1)\}$ e $L = \{(1,0)(1,1)\}$. No caso, $A = \{(3a, 2a)\epsilon$

$\mathbb{R}^2: a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(2a + 1c, a + b + c) \in \mathbb{R}^2: a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $C = \{(a + b, b) \in \mathbb{R}^2: a, b \in \mathbb{R}\}$, respectivamente. A construção descrita está representada na Figura 11.

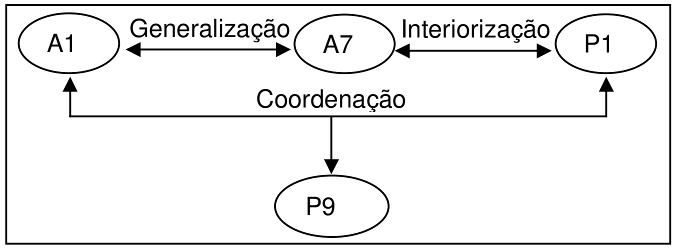


Figura 11: Construção do processo P9

O indivíduo revertendo o processo **P9** poderá construir o processo que lhe permite identificar subconjuntos de vetores de um espaço vetorial que são conjuntos geradores desse espaço (P10). Prosseguindo, o indivíduo coordena os processos **P9** e **P10** de maneira que possa construir o objeto matemático conjunto gerador e, consequentemente, o objeto espaço gerado – **O4** –, veja Figura 12.

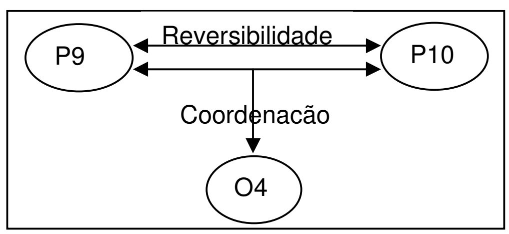


Figura 12: Construção do objeto O4

Um exemplo dessa construção segue ao anterior, pois o indivíduo reconhece que os conjuntos S e L, por exemplo, são conjuntos geradores do espaço vetorial com as operações binárias usuais em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, os conjuntos A, B e C são espaços gerados pelos conjuntos U, S e L.

Assim, o indivíduo tendo diversos conjuntos geradores para um mesmo espaço vetorial, procura "descartar" os vetores "desnecessários", pois são combinações lineares uns dos outros – **A8**/**A9** –. Desta forma, coordena **A8** e **A9** no processo **P6** que, posteriormente, é encapsulado no objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto minimal gerador – **O5** –, veja Figura 13.

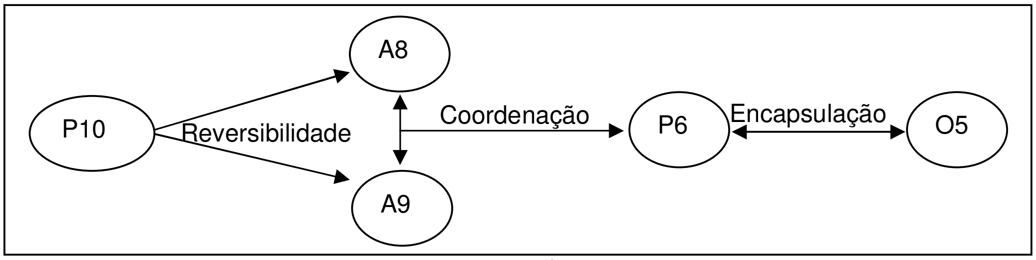
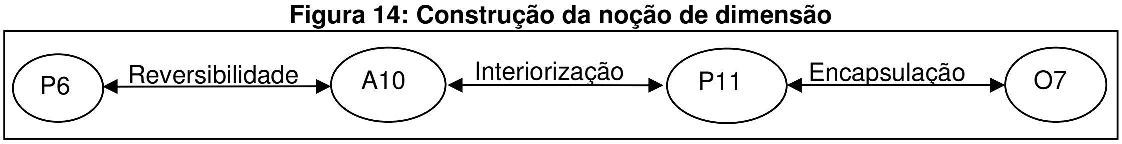


Figura 13: Construção do objeto O5

Ao reverter o processo **P6**, o indivíduo poderá construir a ação que lhe permitirá identificar vários conjuntos minimais geradores para um mesmo espaço vetorial e observar a existência de um invariante (A10). Esta ação é interiorizada no processo que lhe permitirá dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar tal espaço (P11). Esse número de vetores é, então, encapsulado no objeto Dimensão (O7). Esta construção é representada na Figura 14.

Figura 14: Construção da noção de dimensão



O indivíduo que construiu o objeto **O7**, poderá coordená-lo com o objeto conjunto gerador/espaço gerado **– O4 –** e construir o objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão desse espaço (O8), veja Figura 15.

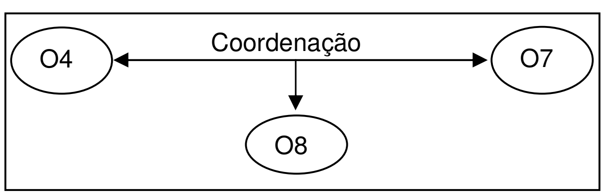


Figura 15: Base de um espaço vetorial correlacionada à noção de dimensão

Um exemplo é o do aluno que conhece a dimensão do conjunto das matrizes dois por três – $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ –, ou seja, a dimensão é seis. Esse indivíduo, então, busca, por um conjunto gerador para esse espaço com exatamente seis vetores, obtendo, assim, a base.

A construção da noção de base de um espaço vetorial, como um conjunto minimal gerador, da noção de dimensão e a correlação entre elas está representada na Figura 16.

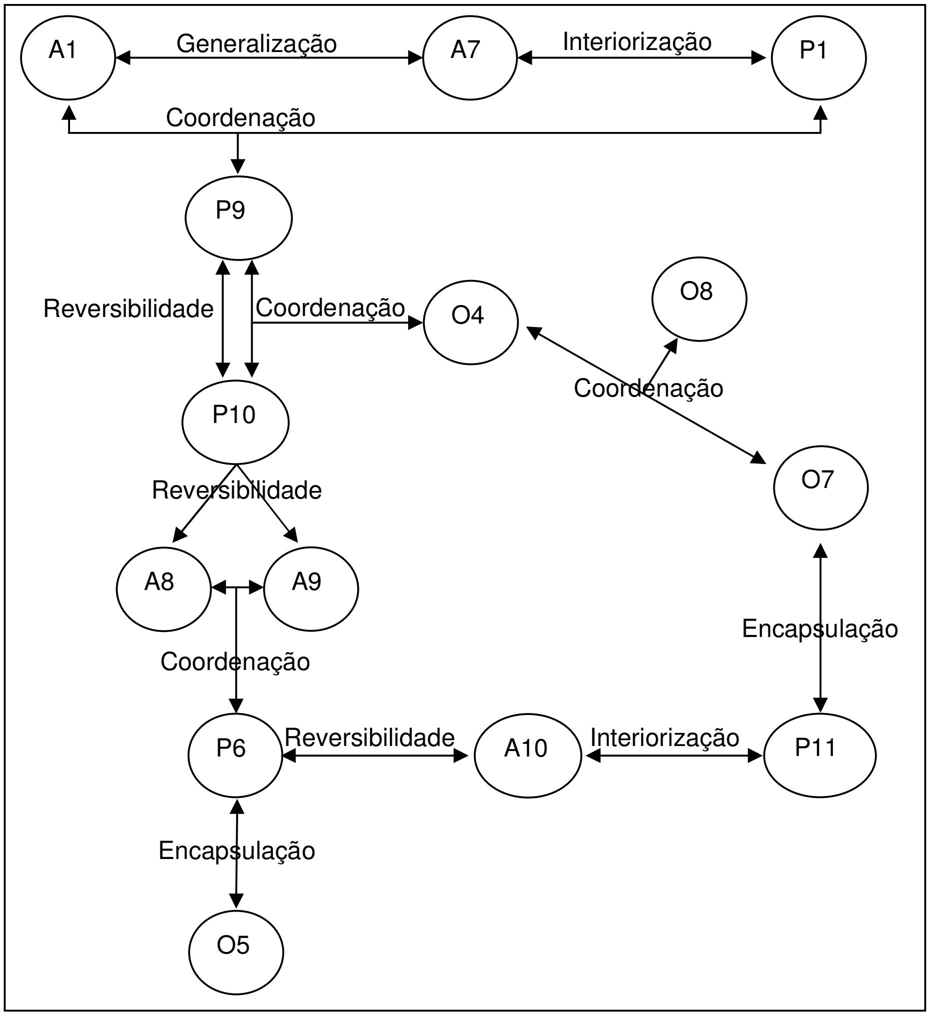


Figura 16: Construção das noções de base e de dimensão de um espaço vetorial

Essa construção permitiu o desenvolvimento das noções de: combinação linear, conjunto gerador/espaço gerado, dimensão e base de um espaço vetorial. Como a noção de dependência linear de um conjunto está implícita nessa construção, no que segue, descrevo-a de maneira explícita e, consequentemente, apresento a construção de outro ponto de vista para a noção de base de um espaço vetorial, ou seja, como sendo um conjunto maximal linearmente independente.

Para iniciar tal construção, retomo a ideia de Costa e Catarino (2007) que se assume o fato da aprendizagem em Matemática pressupor a conexão de novas noções a noções já estudadas. O fato, também, foi discutido nos trabalhos de Araújo (2002), Padredi (2003) e Oliveira (2005). Mas, Costa e Catarino (2007) centralizaram em seu estudo a descontinuidade existente entre as noções de colinearidade e dependência linear.

Penso que sempre a noção de dependência linear em um conjunto aparenta estar atrelada à necessidade de obter um conjunto minimal gerador, ou a necessidade de se escrever combinações lineares de uma única maneira. Assim, também, retomo a questão apresentada na página 43 deste trabalho: será possível construir a noção de base de um espaço vetorial iniciando pela noção de dependência linear?

Na tentativa de minimizar a descontinuidade descrita por Costa e Catarino (2007) e responder à questão, proponho que o indivíduo retome a ação **A1** em que deve operar com vetores pertencentes ao espaço vetorial em estudo. No entanto, o ele executará a ação com vetores pertencentes ao $\mathbb{R}^2$ e ao $\mathbb{R}^3$. Posteriormente, generalizará essa ação de maneira que possa construir a ação **A7**, para esses espaços.

Então, deverá recorrer à Geometria Analítica e retomar os objetos vetores colineares e vetores coplanares. Não estou interessado no vetor com sua representação "geométrica", pois esta poderá ser um obstáculo para o indivíduo, assim como verificou Gueudet-Chartier (2000).

Dessa forma, com o uso da coordenação entre a ação **A7** com a ação que lhe permite verificar se os vetores são colineares (ou coplanares) (A11), o indivíduo constrói o processo que lhe permite dizer se um vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) depende do outro ou não (P12). Esta construção está representada na Figura 17.

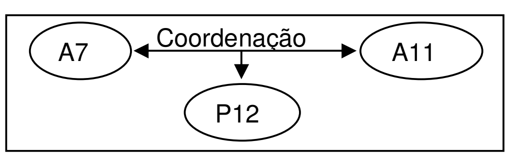


Figura 17: Construção do processo P12

Há, agora, a necessidade de o indivíduo generalizar esta definição para todos os espaços vetoriais, porém Dreyfus afirma que

> na transição do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ concreto para um espaço vetorial abstrato, o foco de atenção repousa nas relações entre os vetores [...]. A fim de fazer essa transição, é necessário que o sujeito seja capaz de conceber o objeto ‘vetor’ em termos puramente de suas relações com outros objetos semelhantes, ou diferentes (vetores ou escalares), e aceite que o próprio objeto não é mais especificado por mais nenhuma outra propriedade intrínseca. Considerando somente essas relações, possibilita o sujeito tirar conclusões a partir delas que geralmente serão válidas, independentemente das propriedades intrínsecas específicas desses vetores (DREYFUS, 1991, p.36)[77].

Assim, o indivíduo, ao generalizar a ação **A11** e o processo **P12**, constrói o objeto **O2**, isto é, a dependência linear para qualquer conjunto.

Como exemplo dessa generalização, é o do aluno ao expressar: os vetores de um conjunto são ditos linearmente independentes, se nenhum deles for escrito em função dos outros, ou ainda, for proporcional aos outros vetores do conjunto.

A partir do objeto **O2**, o indivíduo utiliza-se da reversibilidade e constrói a ação que lhe permite encontrar subconjuntos de vetores que não sejam linearmente dependentes, isto é, obtém os vetores linearmente independentes e, com isso, observa a existência de subconjuntos com diferentes números de vetores (A12). Esta ação é, então, interiorizada no processo **P8**, ou seja, no processo que lhe permite obter o maior subconjunto de vetores linearmente independentes. Posteriormente, esse processo será encapsulado no objeto matemático base de um espaço vetorial, como sendo um subconjunto maximal de vetores linearmente independentes **– O6–**, veja Figura 18.

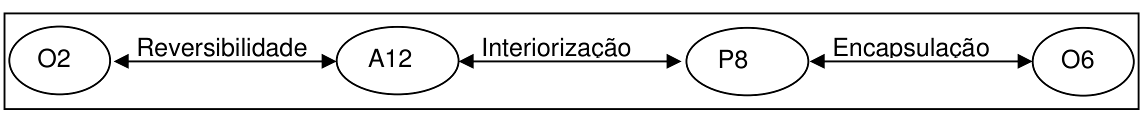


Figura 18: Construção do objeto O6

Dessa maneira, o indivíduo vai considerar o conjunto de vetores obtido, como sendo o maior conjunto de vetores linearmente independentes, quando qualquer outro vetor considerado no espaço e incluído ao conjunto torná-lo um conjunto linearmente dependente.

[77] In the transition from the concrete vector space $\mathbb{R}^3$ to the notion of an abstract vector space, the relationships between the vectors become the focus of attention […]. In order to make this transition, one needs to be able to conceive of the object “vector” purely in terms of its relationships to other similar or different objects (vectors or scalars), and accept that the object itself is not further specified by any intrinsic properties. Considering only these relationships, enables one to draw conclusions from them which will be generally valid, independently of the specific intrinsic properties of the vectors.

Depois, o indivíduo, assim como fez para os conjuntos geradores, reverte o processo **P8** e constrói a ação que lhe permite identificar para um mesmo espaço vetorial, distintos conjuntos maximais de vetores linearmente independentes e, consequentemente, observar a existência de um invariante (A13), isto é, esses subconjuntos distintos têm a mesma dimensão.

A ação **A13** é interiorizada no processo que lhe permite dizer qual o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser obtido em um determinado espaço vetorial (P13). Esse processo é, então, encapsulado no objeto Dimensão **– O7–**, veja Figura 19.

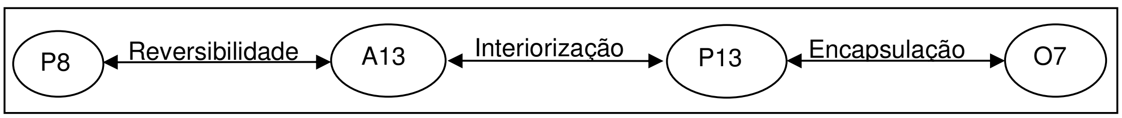


Figura 19: Construção do objeto O7

Um exemplo é o do indivíduo que obtém os conjuntos, pertencentes ao espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$, $A = \{1, 3x^3\}$, $B = \{\frac{1}{2}x, x^2, -x^3 + 2\}$, $C = \{x, x^2, x^3\}$, $D = \{1, 1 + x, x^2,\ 3x^3\}$ e $E = \{1, x, x^2, x^3\}$, todos linearmente independentes e observa que eles possuem quantidades diferentes de vetores. Esse indivíduo procura pelo maior conjunto linearmente independente e, então, observa que os maiores conjuntos linearmente independentes são os conjuntos D e E, com quatro vetores. E mais, qualquer outro conjunto maximal de vetores linearmente independentes desse espaço vetorial terá, exatamente, quatro vetores.

Assim, o indivíduo coordenando o objeto Dimensão **– O7–** com o objeto conjunto linearmente independente **– O2–**, poderá construir o objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão desse espaço (O9), Figura 20.

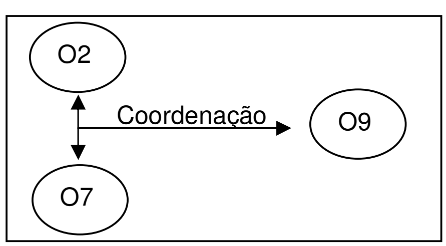


Figura 20: Construção do objeto O9

A construção da noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal de vetores linearmente independentes, da noção de dimensão e a correlação entre essas noções é representada na Figura 21.

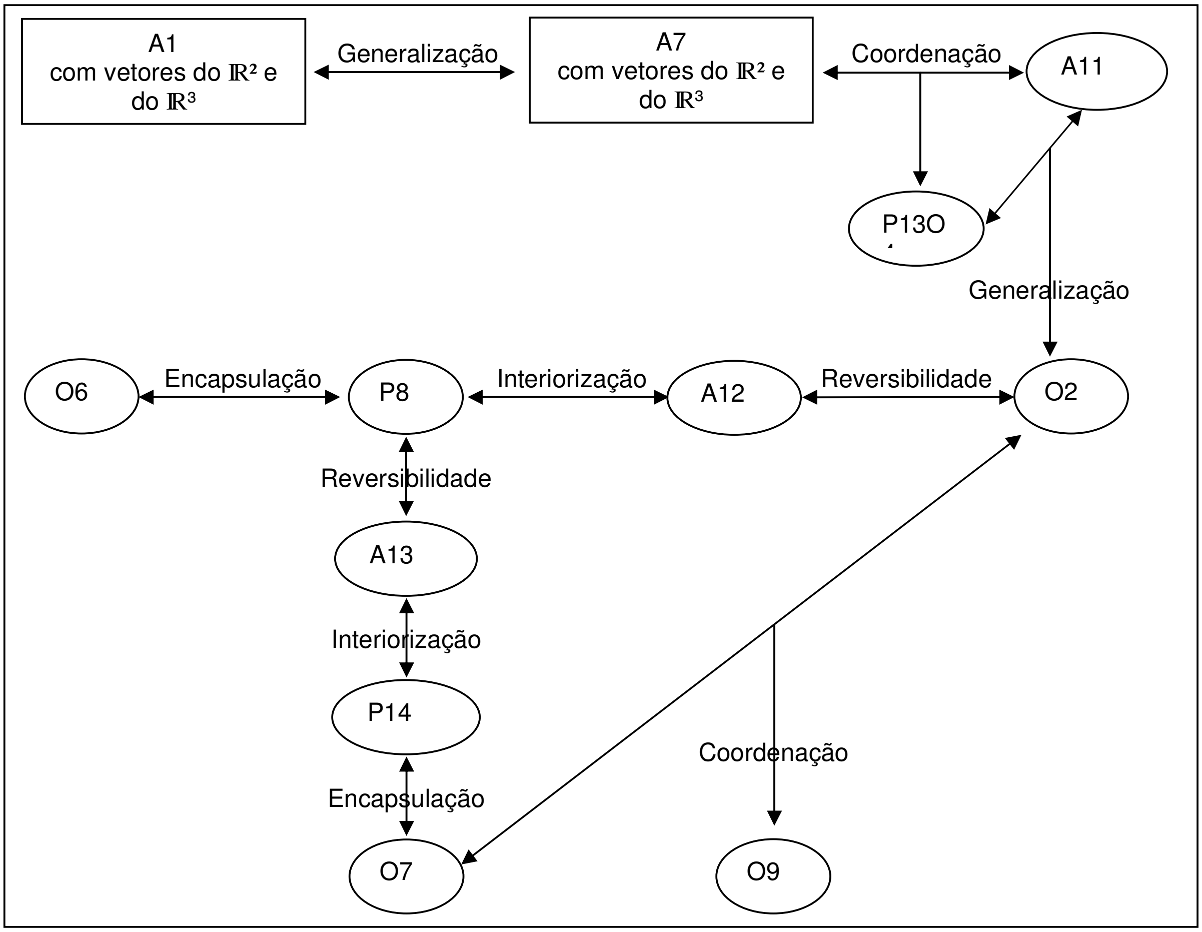


Figura 21: Base: um conjunto maximal linearmente independente

Descrevi a construção da noção de base de um espaço vetorial sob dois aspectos principais, base como sendo um subconjunto maximal de vetores linearmente independentes e como sendo um subconjunto minimal gerador, assim como a correlação com a noção de dimensão.

Sendo a *intuição* um dos processos que permeia o pensamento matemático avançado, pois, segundo Dreyfus (1991, p.40) [78], é a que "ocorre imediatamente da cognição direta, sem evidência de pensamento racional". O indivíduo intui que: ou as duas definições para a noção de base de um espaço vetorial são complementares ou são equivalentes (P14).

[78] by immediate direct cognition without evidence of rational thought.

Esta indagação visa a conduzir o indivíduo a um segundo processo, o de *verificar* (P15), que Dreyfus (1991, p.40) [79] define, como sendo o ato de "utilizar recursos para se convencer de que um resultado realmente responde à questão que foi feita e se responde corretamente. Um caminho útil é verificar com o uso de um procedimento inverso".

Aqui vale salientar que, segundo Dreyfus,

> comumente, a verificação não é vista pelo estudante como uma parte essencial da atividade matemática. Embora a verificação possa lhe dar muita segurança, a maioria dos estudantes parece não estar muito interessado nessa segurança. Isto pode e deve ser modificado pela transferência de mais responsabilidade pelo processo de aprendizagem do professor para o estudante [...] (DREYFUS, 1991, p.40-41) [80].

Com esta abordagem, proponho que a primeira ação que o indivíduo irá realizar para verificar suas hipóteses, será obter um subconjunto maximal de vetores linearmente independentes do espaço vetorial. Feito isso, o indivíduo irá verificar se esse subconjunto é um subconjunto minimal gerador do espaço em questão (A14). Posteriormente, executará a ação em que deve obter um subconjunto minimal gerador do espaço vetorial e verificar se esse subconjunto é maximal linearmente independente (A15).

O indivíduo realiza essas ações para diversos espaços vetoriais, tanto considerando um subconjunto maximal linearmente independente como considerando um subconjunto minimal gerador, que o conduzirá à ação em que conjectura a existência de uma equivalência entre **O5** e **O6** (A16) e, utilizando os processos mais formais, o indivíduo provará que todo conjunto maximal linearmente independente é, ao mesmo tempo, um conjunto minimal gerador **– P15 –**.

O processo **P15** é, então, encapsulado no objeto matemático, base de um espaço vetorial, em que a base é concebida, como sendo um conjunto gerador linearmente independente **– O3 –**, conforme é ilustrado na Figura 22.

[79] taking actions to convince oneself that a result indeed does answer the question that was asked, and does answer it correctly. One useful way of checking is to use an inverse procedure [...]

[80] All too often, checking is not seen by students as an essential part of mathematical activity. Although checking could give them a lot of security, most students appear not to be very interested in this security. This could and should be changed by transferring more of the responsibility for learning processes from the teacher to the student […]

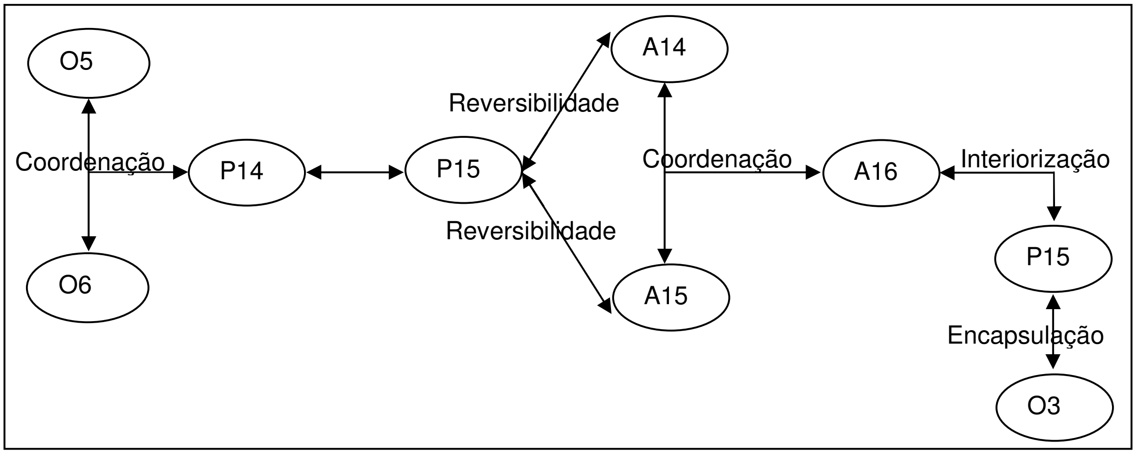


Figura 22: Base: um conjunto gerador linearmente independente

Observo que, embora tenha apresentado separadamente a construção da noção de base, segundo os pontos de vista adotados nesta pesquisa, não há uma “desarticulação”, mas uma preferência por um deles. Cabe salientar que a consistência de uma concepção objeto se dá quando estas construções estão completamente imbricadas.

A partir dessa decomposição genética, apresento o que considero ser uma concepção ação, uma concepção processo e uma concepção objeto sobre as noções de base e de dimensão de um espaço vetorial.

Saliento que a instituição de categorias é necessária, pois é um meio provisório para organizar um conjunto de dados. Como afirmam Dubinsky e Lewin (1986), essas categorias constituem-se em um instrumento indispensável para a análise de processos formativos que, segundo a epistemologia genética, ocorrem de maneira dinâmica.

Assim, retomo o que foi apresentado na página 34 deste trabalho, ou seja, um indivíduo que demonstra possuir uma concepção ação sobre uma noção matemática, tem sua compreensão limitada à realização de ações, isto é, necessita de informações precisas sobre os passos que devem ser realizados ao manipular essa noção.

Dessa forma, considero que um indivíduo que possui uma **concepção ação sobre a noção de base** é, capaz de, por exemplo, operar com vetores pertencentes a um espaço vetorial; verifica se um vetor poderá ser escrito como combinação linear de outros vetores. Quando o espaço vetorial em estudo for o $\mathbb{R}^2$ ou o $\mathbb{R}^3$ correlacionar a dependência linear com a noção de vetores colineares ou coplanares, assim como verificar se um espaço vetorial poderá ser escrito em função de um conjunto de vetores.

E, considero que um indivíduo que possui uma **concepção ação sobre a noção de dimensão** é, capaz de, por exemplo, identificar que vários conjuntos minimais geradores de um mesmo espaço vetorial possuem o mesmo número de vetores e, que distintos subconjuntos maximais de vetores linearmente independentes, também, possuem o mesmo número de vetores. Ou seja, que a quantidade de vetores de uma base de um espaço vetorial é invariante.

A próxima concepção é a concepção processo, conforme foi descrito na página 35, é evidenciada quando o indivíduo ao resolver problemas dá indícios de utilizar transformações do tipo processo. Isto é, quando passa a ter controle da transformação realizada sobre o objeto matemático, podendo descrever os passos envolvidos e invertê-los quando necessário; no entanto, ainda não o concebe como um todo.

Assim, um sujeito que demonstra possuir uma **concepção processo sobre a noção de base** é, capaz de, por exemplo, identifica e expressa conjuntos geradores de um espaço vetorial; identificar os espaços gerados a partir de um subconjunto; obter o menor conjunto gerador, decidir quais propriedades têm os vetores pertencentes a um espaço vetorial gerado por um dado conjunto; verificar a dependência linear em um dado conjunto de vetores; identificar as propriedades que permitem obter conjuntos de vetores linearmente independentes; obter um maior conjunto de vetores linearmente independentes; assim como verificar se os vetores de um conjunto dado são linearmente independentes e se esse conjunto de vetores é indispensável para gerar todos os elementos de um determinado espaço vetorial.

Assim, um indivíduo que possui uma **concepção processo sobre a noção de dimensão** é, capaz de, por exemplo, dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão e, também, qual o maior número de vetores linearmente independentes que podem ser obtidos para um determinado espaço vetorial.

Por último, tem-se a concepção objeto, quando o indivíduo considera o objeto encapsulado, como um todo, sendo capaz de manipulá-lo e utilizá-lo quando necessário.

Desse modo, o indivíduo que demonstra ter uma **concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial** tem construído os objetos conjunto gerador, espaço gerado, dependência linear e pode conceber a base, como sendo: um conjunto minimal gerador, ou um conjunto maximal linearmente independente, ou um conjunto gerador linearmente independente.

O indivíduo que possui uma **concepção objeto sobre a noção de dimensão**, pode conceber a dimensão como um invariante, ou seja, reconhecer que todas as bases de um mesmo espaço vetorial, possuem o mesmo número de vetores. Além disso, poderá correlacionar a noção de dimensão ou com a de conjunto gerador ou com a de dependência linear, para dizer quantos vetores esses conjuntos deverão possuir para ser uma base.

Feito isso, após a análise dos livros utilizados no curso de extensão, dos quais os sujeitos desta pesquisa participaram e, apresentada a decomposição genética para as noções de base e de dimensão de um espaço vetorial. Na seção que segue, descreverei a elaboração do roteiro utilizado nas entrevistas.

Roteiro utilizado nas entrevistas

Nesta seção, apresento o roteiro que foi utilizado nas entrevistas, elaborado com o objetivo de identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial.

O roteiro contempla duas fases. Na primeira, com quatro questões, objetivei identificar certas características do entrevistado, por exemplo, formação acadêmica e atuações profissionais, assim como "quebrar o gelo inicial", isto é, procurar uma oportunidade para começar a construir uma relação. Na segunda parte, composta por duas situações, a intenção foi coletar elementos que auxiliassem a responder às questões de pesquisa, ou seja: Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial? Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial? Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?

Apresento as situações propostas aos entrevistados, assim como uma análise dessas situações, ou seja, identifico o objetivo, as variáveis didáticas[81] envolvidas e as possíveis soluções de cada uma das situações.

O presente roteiro segue o modelo de uma entrevista semiestruturada, pois permite ao entrevistador adaptar e reformular o percurso da entrevista durante seu desenvolvimento. O tempo previsto para a realização de cada entrevista individual, será de, aproximadamente, 30 minutos.

I PARTE: Características do entrevistado

Nesta primeira parte da entrevista, inicio promovendo um diálogo com o entrevistado sobre temas que não estejam diretamente relacionados com a pesquisa, de maneira que o ambiente torne-se agradável para ambas as partes. Após essa interação, apresento brevemente o objetivo que tenho com o estudo, aproveitando para garantir ao entrevistado que todas as informações serão tratadas confidencialmente. Sendo assim:

1. **Solicitei se poderia audiogravar a entrevista**

Pois, a gravação depende de autorização do entrevistado.

2. **Solicitei que o entrevistado comentasse sobre sua formação acadêmica e profissional**

Necessito identificar qual a formação do sujeito para contextualizar o curso em relação à sua individualidade. Assim como identificar a atuação profissional e quais relações (se existem) entre as funções exercidas e as noções de Matemática e Álgebra Linear, especificamente.

3. **Solicitei que o entrevistado comentasse o(s) motivo(s) que lhe fez (fizeram) participar do curso de extensão de Álgebra Linear**

[81] Variáveis didáticas, Termo cunhado por Guy Brousseau, “são aquelas para as quais a mudança de valor provoca modificações nas estratégias [...]” (ALMOULOUD, 2007, p.36).

Preciso coletar indícios que justifiquem certas atitudes no decorrer da entrevista, por exemplo: um aluno que já cursou Álgebra Linear pode buscar por uma nova abordagem de ensino ou suprir certas fragilidades enfrentadas em seu primeiro curso.

4. **Solicitei que o entrevistado comentasse se suas expectativas com o curso foram alcançadas**

Necessito coletar elementos que descrevam seu comportamento como aluno, por exemplo, se participava das monitorias, se dedicava um tempo aos estudos, entre outras coisas.

Ao perceber que o entrevistado encontra-se à vontade, retomo aspectos relacionados ao curso de extensão de Álgebra Linear, como por exemplo, que os estudos realizados, geralmente, eram sobre os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais finitamente gerados. Para, então, iniciar a segunda parte da entrevista.

II – PARTE: Identificar as concepções do entrevistado sobre as noções elementares de Álgebra Linear

Esta parte da entrevista é composta por duas situações, que foram apresentadas ao entrevistado, conforme anexo 3[82].

Assim, ao entregar a folha com a primeira situação para o entrevistado, contarei que se trata de uma questão extraída de uma prova (fictícia) de Álgebra Linear. Nesta questão, o professor afirmou que **os vetores $\mathbf{x_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$, $\mathbf{x_2} = (\mathbf{4}, \mathbf{5})$ e $\mathbf{x_3} = \left(-\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)$, formam uma base para o $\mathbb{R}^2$**. E, solicitou que os alunos verificassem se tal afirmação era verdadeira ou falsa.

Contarei, também, que das respostas dadas pelos alunos, que realizaram essa prova, selecionei quatro das quais gostaria que ele comentasse a respeito.

[82] Na versão impressa, o leitor terá um encarte (anexo 4) com as situações propostas.

A) Verdadeira, eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$.

B) Falsa, porque a base do $\mathbb{R}^2$ é $\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$.

C) Falsa, porque tem três vetores.

D) Verdadeira, porque esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$.

Após a apresentação da situação ao entrevistado, dar-lhe-ei tempo para que analise cada uma das respostas, pois, espero com esta situação coletar indícios do que o entrevistado concebe, como sendo base de um espaço vetorial e quais as ações, os processos e os objetos que são mobilizados, ao verificar se um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial.

Nesta situação, as variáveis didáticas são: a maneira como a questão foi apresentada, pois o título "Extratos da prova do dia 16_06_2009", visa a fazer com que o sujeito não seja pressionado; afinal, estará analisando a resposta de outro aluno que no caso é fictício. Além disso, são apresentadas noções e elementos para que o entrevistado possa argumentar sobre. O entrevistado deverá conhecer o assunto para então verificar cada uma das respostas, podendo, no caso de ser verdadeira, justificar e, no caso de ser falsa, apresentar um contraexemplo.

Outras variáveis didáticas envolvidas são: o espaço vetorial considerado, no caso o $\mathbb{R}^2$, pois acredito que este seja um espaço familiar aos sujeitos desta pesquisa, a representação utilizada para descrever os vetores; o vetor x_3 que em suas coordenadas apresenta valores negativos, além de uma delas ser um número racional, representado por uma fração; e, a maneira como as respostas dos alunos foram dispostas no protocolo (Anexo 3), porque permitem ao indivíduo ter uma noção do assunto para então argumentar.

A seguir, apresento a análise de cada uma das quatro respostas.

Na resposta do aluno **A** (*Verdadeira, eles formam uma base do* $\mathbb{R}^2$ *porque são do* $\mathbb{R}^2$), o objetivo é verificar se o entrevistado considera, como sendo condição necessária, mas não suficiente, os vetores de uma base de um espaço vetorial pertencerem a tal espaço. O entrevistado poderá:

- Afirmar que os vetores formam uma base para o $\mathbb{R}^2$, pois pertencem ao $\mathbb{R}^2$.
- Afirmar que necessita de uma definição sobre a noção de base de um espaço vetorial para, então, analisar a resposta do aluno.
- Afirmar que o conjunto apresentado não se constitui em uma base para o $\mathbb{R}^2$, pois para ser base deve ser um conjunto gerador linearmente independente, ou um conjunto minimal gerador, ou um conjunto maximal linearmente independente, ou utilizar o fato da dimensão ser dois e o conjunto possuir três vetores, ou ainda, apresentar uma base para esse espaço.

Nas duas primeiras possibilidades, há indícios de que o entrevistado não tenha construído uma concepção objeto para a noção de base de um espaço vetorial. Já na terceira, há indícios de que reconhece o fato que, para ser base de um espaço vetorial, o vetor deverá pertencer ao espaço, e ainda, utiliza em sua argumentação correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear.

Na resposta do aluno **B** (*Falsa, porque a base do* $\mathbb{R}^2$ *é* $\{(1{,}0),(0{,}1)\}$), o objetivo é verificar se o entrevistado reconhece a base canônica, e o fato de existir distintas bases para um mesmo espaço vetorial. O entrevistado poderá ter como possíveis respostas:

- Não concordar com a afirmação do aluno, pois acredita que o conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$.
- Afirmar que a resposta dada pelo aluno é verdadeira, pois a base canônica é a base desse espaço vetorial.
- Afirmar que a resposta dada pelo aluno está errada, pois a base de um espaço vetorial não é única, podendo até apresentar outras bases.

Na primeira afirmação, há indícios de que o entrevistado concebe base, como sendo um conjunto gerador ou que basta o conjunto estar contido no espaço vetorial. Na segunda afirmação, o entrevistado apresenta indícios de não reconhecer outros subconjuntos de vetores de um espaço vetorial que sejam bases desse espaço, podendo, até mesmo, supor que exista uma única base. Já na terceira afirmação, há indícios de que o entrevistado reconheça a base canônica e que existem distintas bases para um mesmo espaço vetorial.

Na resposta do aluno **C** (*Falsa, porque tem três vetores*), o objetivo é verificar, como o entrevistado correlaciona a noção de base de um espaço vetorial com a noção de dimensão. O entrevistado poderá ter como possíveis respostas:

- Afirmar que a resposta do aluno é falsa e alegar que não existe nenhuma relação entre a base e o número de vetores. Ou não concordar com a afirmação, pois acredita que o conjunto apresentado é uma base para o $\mathbb{R}^2$.
- Afirmar que a resposta do aluno é verdadeira.
- Afirmar que a resposta do aluno é verdadeira e justificar com o fato de a dimensão do $\mathbb{R}^2$ ser dois, e o subconjunto apresentado possuir três vetores.

Na primeira afirmação, há indícios de que o entrevistado não estabelece correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear; ou que concebe base, como sendo um conjunto gerador. Na segunda afirmação, há indícios de que o entrevistado utilizou a noção de dimensão, mas não argumentou a respeito. Por fim, na terceira afirmação, há indícios de que o entrevistado correlacionou a noção de base de um espaço vetorial com a noção de dimensão.

Na resposta do aluno **D** (*Verdadeira, porque esses vetores geram o* $\mathbb{R}^2$), o objetivo é verificar se o entrevistado concebe base, como um conjunto minimal gerador ou se o entrevistado considera o fato do conjunto de vetores ser gerador, como condição necessária, mas não suficiente. Assim, o entrevistado poderá ter como possíveis respostas:

- Afirmar que a resposta do aluno é verdadeira.

- Afirmar que a resposta do aluno é falsa, pois concebe a noção de base, como sendo um conjunto minimal gerador ou como um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.
- Afirmar que a resposta do aluno é falsa, pois para ser base, além de ser um conjunto gerador, tem de possuir exatamente dois vetores.
- Afirmar que a resposta do aluo é falsa, pois para ser base acredita que o conjunto tem de ser formado por vetores linearmente independentes ou porque acredita que a noção de base não tem relação alguma com a de conjunto gerador.

Na primeira afirmação, há indícios de que o entrevistado concebe base, como sendo um conjunto gerador. Na segunda, que concebe base, como sendo um conjunto minimal gerador ou como um conjunto gerador com vetores linearmente independentes. Na terceira, há indícios do entrevistado ter correlacionado a noção de conjunto gerador com a noção de dimensão; na quarta afirmação, o entrevistado apresenta indícios de conceber base, como sendo um conjunto linearmente independente.

A seguir, apresento e analiso a segunda situação (anexo 3), que elaborei, pois viso a coletar indícios que me permitam inferir sobre a concepção que o entrevistado possui sobre a noção de base de um espaço vetorial. Ele poderá responder de maneira a opinar por uma das noções de forma exclusiva, correlacionar as três noções, ou não concordar com nenhuma das apresentadas.

Assim, ao entregar ao entrevistado a folha com essa situação, contarei que se trata de uma discussão em sala de aula, em que um aluno apresenta um problema e seus colegas dizem o que pensam a respeito. O entrevistado deverá, então, analisar a argumentação desses alunos. Considerando A, B, C e D os alunos e P o professor, segue a transcrição dessa discussão.

A- Professor, esse conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$ é base do conjunto dos polinômios de grau 2?

P- (dirigindo-se à classe) O que vocês acham?

B- É sim! Porque é o maior conjunto LI (linearmente independente) de $P_2(\mathbb{R})$.

C- É. Porque é o menor conjunto de vetores que gera todo esse espaço.

A- O quê?

D- É uma base sim, pois é um conjunto de vetores linearmente independentes e gera esse espaço.

Nesta situação, as variáveis didáticas envolvidas são: o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ que embora tenha sido esta a representação utilizada no curso de extensão, poderá não ser tão familiar aos entrevistados; a base que não é a trivial $\{1, x, x^2\}$; e a maneira como as noções: dependência linear, conjunto gerador, base, conjunto maximal e conjunto minimal estão correlacionadas. Assim como a maneira que a situação foi apresentada, pois pretendo que o sujeito não se sinta obrigado a resolver uma atividade, mas, sim, analise a produção de outra pessoa.

A situação permite que o entrevistado analise a noção de base de um espaço vetorial baseado em três pontos de vista. E, também, estabeleça correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear, dependência linear, combinação linear, conjunto gerador, espaço gerado, dimensão e base. Assim, penso que o entrevistado, ao argumentar sobre essas noções matemáticas, apresentará elementos que possam ser confrontados com os que evidenciarem durante a argumentação da situação anterior.

Espero, também, que o entrevistado argumente sobre o fato do conjunto apresentado não ser base do conjunto de polinômios de grau igual a 2, mas, sim, do conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2, mais o polinômio nulo. Tal argumentação apresentará elementos que permitirão identificar se o entrevistado está familiarizado com os espaços vetoriais $P_n(\mathbb{R})$.

No caso em que o entrevistado não esteja familiarizado com os espaços vetoriais dos polinômios de grau menor ou igual a n, ele poderá associar erroneamente o índice 2 da representação $P_2(\mathbb{R})$ à base desse espaço, ou seja, que a base deva conter apenas dois vetores, podendo até citar exemplos de conjuntos que acreditam ser base para esse espaço vetorial, um deles seria o conjunto $\{1, 4\mathrm{x}^2\}$.

Quanto às demais concepções sobre a noção de base de um espaço vetorial, o entrevistado poderá verificá-las, explicitando as concepções que possui sobre a noção de base. Tal ato permitirá identificar as ações, os processos e os objetos mobilizados pelo entrevistado e, então, supor qual concepção ele tem para as noções elementares de Álgebra Linear, base, especificamente.

A análise do roteiro foi apresentada de forma fragmentada. Mas, para identificar a concepção que um sujeito demonstra possuir, é necessário uma combinação dessas análises que, no entanto, não é simples! Afinal, Dubinsky e Lewin (1986, p.57)[83] afirmam ser possível acessar "somente aquilo que o indivíduo pode articular ou demonstrar no momento da própria percepção", pois até mesmo a maneira como interpreto a concepção que um entrevistado demonstra possuir, estará atrelada à descrição e organização da entrevista, pois a análise será resultado do conjunto dessas percepções.

Assim, no próximo capítulo descreverei as entrevistas e apresentarei suas análises.

[83] [...] only to what an individual can articulate or demonstrate at the moment of insight itself.

CAPÍTULO 5

AS ENTREVISTAS E SUAS ANÁLISES

Neste capítulo, descrevo e analiso cada uma das entrevistas realizadas e eventuais trocas. Para isso, utilizei as anotações feitas durante os encontros, as transcrições das audiogravações, os protocolos produzidos pelos entrevistados e as mensagens trocadas por e-mail.

O capítulo está dividido em 11 seções. As dez primeiras correspondem a uma análise "vertical" sobre as entrevistas, isto é, apresento uma análise em que procuro identificar aspectos particulares de cada um dos entrevistados. Já a última seção, corresponde a uma análise "horizontal" sobre as entrevistas, isto é, apresento uma análise em que viso a identificar similaridades entre as argumentações realizadas pelos entrevistados.

Os nomes atribuídos aos entrevistados são fictícios, sendo eles: Carol, Rodolfo, André, Bruno, Lucas, Mariana, Fernando, Daniel, Juliano e Thaís. A ordem segue, em parte, àquela em que as entrevistadas foram realizadas.

Entrevista com Carol

"E se eu colocar o cinco? Olha! Está sobrando!"
(CAROL)

A descrição desta entrevista pautou-se em minhas anotações e no protocolo produzido pela entrevistada, ambos durante o encontro e, também, nas mensagens trocadas. Embora tenha levado dois gravadores nenhum deles funcionou.

A primeira a responder ao convite enviado por e-mail (anexo 1) foi Carol; em que sugeriu que marcássemos a entrevista no IME-USP[84] na semana seguinte, pois residia em Santo André, cidade próxima a São Paulo e precisaria vir a São Paulo para resolver alguns problemas.

Assim, na data combinada encontramo-nos na biblioteca e como todas as saletas de estudo estavam ocupadas, procuramos uma sala de aula no IME-USP que estivesse vaga.

Por ser a primeira entrevista que realizava, estava preocupado e mais tenso fiquei quando Carol disse que havia vindo a São Paulo para conversar com seu orientador de doutorado.

Ao encontrarmos uma sala desocupada, procurei me acalmar ao lembrar da sugestão de Lüdke e André (2001) sobre a importância de tornar aquele um momento agradável para ambas as partes. Acomodamo-nos à mesa do professor e comecei a explicar a finalidade de minha pesquisa à entrevistada, ela, por sua vez, fez algumas questões sobre minha formação.

Quando senti que estávamos mais à vontade, pedi autorização para audiogravar a entrevista. Carol concordou com a solicitação, liguei os dois gravadores. A entrevista durou quase 30 minutos.

A entrevistada contou que se licenciou em Matemática no final de 1980; após a conclusão, exerceu sua profissão durante alguns anos na escola básica. Tendo decidido dar aulas no Ensino Superior, no início de 1990, buscou por um curso de especialização em Matemática em uma universidade pública do Estado de São Paulo.

[84] Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Na época, resolveu fazer o maior número de disciplinas que pudesse, pois deslocava-se de Santo André, o que lhe exigia muito tempo. Como o curso de especialização em Matemática oferecia poucas disciplinas por semestre, cursou algumas disciplinas da área de Estatística. A partir do contato com professores de Estatística, interessou-se por fazer o mestrado nessa área, que a levou, posteriormente, ao doutorado em Estatística, este concluído ao final de 2008.

O motivo alegado pela entrevistada para fazer o curso de extensão de Álgebra Linear foi que estava se dedicando exclusivamente a estudar para prestar concursos públicos, esse assunto é um dos principais temas exigidos. Como em sua graduação cursou Álgebra Linear, porém "muito superficialmente e com uma abordagem um tanto diferente, pois o foco era nas técnicas para se resolver os exercícios".

Carol, também, relatou que tanto no mestrado como no doutorado em Estatística "utilizou muito dos resultados de Álgebra Linear, pois os dados coletados são interpretados como vetores". No entanto, enfatizou que nunca foi instada a fazer qualquer demonstração, "como por exemplo, verificar se um dado conjunto é um espaço vetorial". Assim, o curso de extensão em foco foi realmente seu segundo curso de Álgebra Linear.

Após obter as informações sobre o perfil da entrevistada, quando já nos mostrávamos mais à vontade, retomei à questão de meu interesse para melhor entender as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao trabalhar com os assuntos de Álgebra Linear, apresentei a **primeira situação** a Carol.

Carol mostrou-se receosa e brincou, "você disse pelo e-mail que seria somente uma conversa". Expliquei que era para ela só comentar sobre as quatro respostas dadas pelos alunos que fizerem uma prova de Álgebra Linear. Assim, a entrevistada leu, pensou durante um tempo e afirmou: "o terceiro aluno (***C***)[85] está correto, pois a dimensão desse espaço é dois".

Após essa afirmação, Carol não fez nenhum comentário sobre as outras respostas, o que me conduziu a pensar que a entrevistada interpretou a situação como sendo de múltipla escolha e, por conhecer a dimensão do $\mathbb{R}^2$, optou pela resposta do aluno **C**.

[85] (*C*) – frase inserida pelo entrevistador para facilitar a compreensão do leitor.

Como queria que Carol argumentasse cada uma das quatro respostas, pedi para que retomasse e justificasse, o que poderia estar por trás de cada resposta.

Carol retomou a situação e analisou cada uma das respostas; na do aluno **A**, afirmou: “o aluno não tem claro a noção de base de um espaço vetorial, pois utilizou somente o fato de os vetores serem do $\mathbb{R}^2$”.

Na fala, “[...] pois <u>utilizou somente</u> o fato de os vetores serem do $\mathbb{R}^2$” (grifo do autor), Carol enfatiza que os vetores de uma base de um espaço vetorial devem pertencer ao espaço.

Prosseguindo, ao argumentar sobre a resposta do aluno **B**, afirmou: “esse aluno conhece a base do $\mathbb{R}^2$, como é mesmo o nome? ... Canônica, mas se esqueceu de que a base não é única”. Nesta afirmação, a entrevistada apresentou indícios de utilizar, pelo menos, um dos processos que lhe permite obter conjuntos que sejam base de um espaço vetorial, assim como reconhece a base canônica.

Na resposta do aluno **C**, a entrevistada retomou sua fala inicial e alegou: “como eu disse, ele deve ter pensado na dimensão”.

Até o momento, Carol utilizou a noção de dimensão para determinar se um conjunto dado é uma base para um espaço vetorial, isso pode ser observado nas falas: “a dimensão desse espaço é dois” e “como eu disse, ele deve ter pensado na dimensão”. Isto é, a entrevistada aparenta utilizar um processo implícito na análise teórica, ou seja, o <u>processo em que sendo conhecida a dimensão do espaço vetorial, qualquer candidato à base desse espaço deve possuir o número de vetores exatamente igual à dimensão</u> (P16). No entanto, observo que o **P16** deverá ser interiorizado, como sendo uma condição necessária, mas não suficiente. Pois, o número de vetores pertencentes a um conjunto deverá ser correlacionado à noção de conjunto gerador ou de conjunto linearmente independente.

Por fim, na resposta do aluno **D**, Carol pensou por um instante e afirmou que os vetores geravam o $\mathbb{R}^2$, mas ficando, em dúvida, fez algumas anotações, conforme a Figura 23.

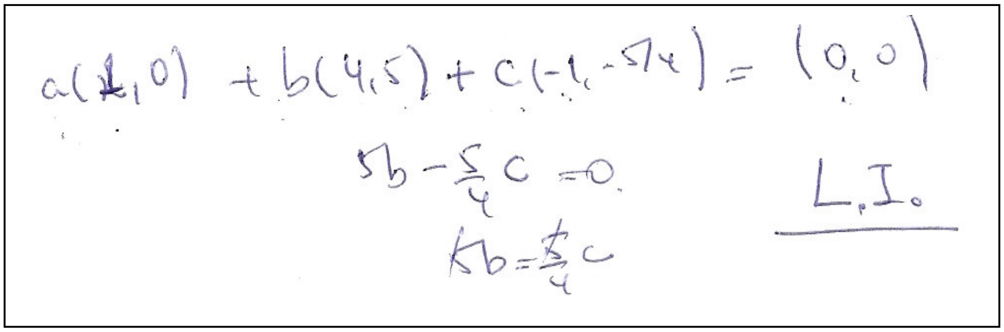


Figura 23: Anotações realizadas por Carol durante a análise da primeira situação

Enquanto escrevia, a entrevistada comentava: “é, eles geram o $\mathbb{R}^2$, mas um é combinação linear do outro”. Após pensar por um instante, disse: “hum! isso (a combinação linear entre os vetores) deve ser igual a zero” e rindo, comentou: “você está me fazendo estudar!”.

Apesar de Carol recorrer às anotações para verificar que os vetores geram o $\mathbb{R}^2$, na fala: “é, eles geram o $\mathbb{R}^2$, mas um é combinação linear do outro”, aparenta ter coordenado as ações **A7** e **A8** no processo **P10**, em que identifica subconjuntos de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão.

No momento, em que Carol diz: “hum! isso (*a combinação linear entre os vetores*) deve ser igual a zero”, recorre à ação **A6** para determinar se a partir desse conjunto ela poderia obter o vetor nulo de uma única maneira. O fato é explicitado quando Carol obtém b em função de c e verifica se é possível obter $a, b, c \in \mathbb{R}$, tais que, $a = b = c = 0$.

Esta última verificação foi feita oralmente (a sequência seguida por Carol está representada nos círculos da Figura 24, da esquerda para a direita), no caso, ela verifica que estando b escrito em função de c a combinação linear que resulta no vetor nulo não é única. Ao concluir seus cálculos, Carol afirma: “Isso! Esses vetores são LI... quer dizer são LD”.

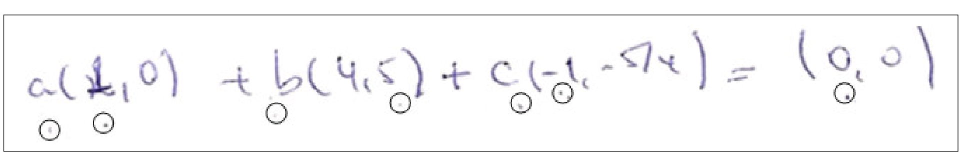


Figura 24: Sequência utilizada por Carol para verificar a dependência linear entre os vetores

Carol concluiu sua argumentação dizendo que os vetores não podiam ser base e que o aluno havia se confundido, pois não verificou se o conjunto de vetores apresentado era linearmente independente.

Desta situação, penso que Carol reconhece o fato que, para um conjunto ser base de um espaço vetorial, o conjunto deve estar contido no espaço e deve ser um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, isto é, considera o fato do conjunto ser gerador, como sendo uma condição necessária, mas não suficiente.

Apresentei a **segunda situação** para Carol logo, após ela ter concluído sua argumentação sobre a primeira. Ela leu, pensou durante um tempo e disse: "olha, o ***aluno B*** e o ***aluno C*** são complementares. Não, não! Essas afirmações são opostas... Ai meu Deus! Eu deveria ter estudado".

Penso haver indícios de que Carol reconhece a noção de base, como sendo um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal linearmente independente. Mas, por demonstrar ter dúvidas sobre essas afirmações, ela aparenta verificá-las, e isso se evidencia na fala: "o ***aluno B*** está correto, pois...". A entrevistada a medida que dizia, escrevia (Figura 25).

"... um polinômio de grau dois tem a cara, hum..."

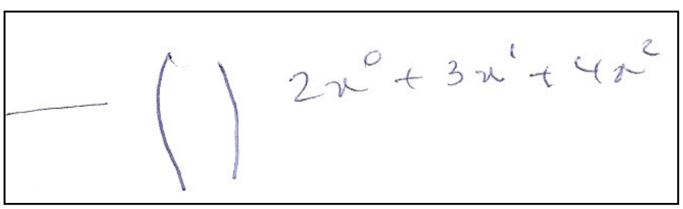


Figura 25: Anotação realizada por Carol para representar um polinômio de grau dois

"Ah! E se fosse de grau três?", veja Figura 26.

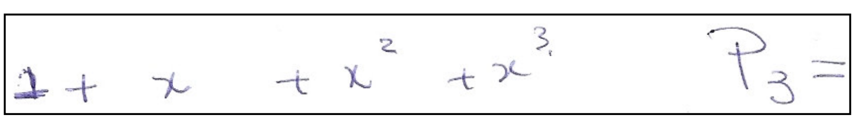


Figura 26: Anotação realizada por Carol para representar um polinômio de grau três

Carol após representar os polinômios de grau dois e três (Figuras 25 e 26) afirmou: "é isso mesmo! Esses vetores (*referindo-se ao conjunto* $\{2, 3x, 4x^2\}$) formam um polinômio de grau dois".

A entrevistada afirmou que o ***aluno B*** estava correto e apresentou indícios que iria verificar essa afirmação. No entanto, concluiu que o conjunto apresentado gerava o espaço vetorial e não que esse conjunto é um maximal linearmente independente.

Em suas afirmações, penso haver indícios de que Carol articulou sobre as ações que lhe permitem construir o processo **P2**, mesmo não tendo se atentado para o fato de o conjunto $P_2(\mathbb{R})$ ser o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a dois.

Outra consideração, Carol utiliza o verbo “formar”, ao dizer que um conjunto gera um determinado espaço.

Em continuação, Carol tentou verificar se a afirmação do ***aluno C*** estava correta, para isso, escreveu os vetores dados e disse: “e se eu colocar o cinco? Olha! Está sobrando!”, neste momento (Figura 27), ticou o cinco como se estivesse excluindo-o.

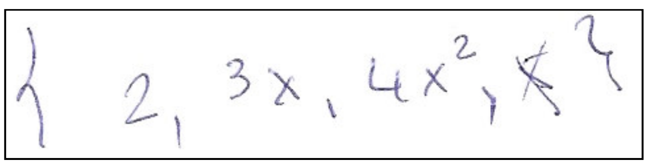


Figura 27: Exemplo utilizado por Carol para verificar a afirmação do aluno C

Mas, com receio, afirmou: “não sei, eu ficaria com o ***aluno D***”.

A entrevistada ao acrescentar o vetor 5 e depois excluí-lo do conjunto original demonstrou abstrair reflexivamente, ou seja, aparentou coordenar os processos em que intui e verifica, para assim, concluir sua afirmação. Mas, em razão de apresentar dúvidas optou pela resposta dada pelo aluno **D**.

Síntese das observações da entrevista

Carol fez a licenciatura e a especialização em Matemática. Já, o mestrado e o doutorado, em Estatística. Procurou pelo curso de extensão, por ter tido necessidade de estudar Álgebra Linear para prestar concursos. Assim, o curso de extensão, efetivamente, foi o segundo curso de Álgebra Linear do qual foi aluna.

Durante a entrevista, apresentou indícios de ter utilizado em suas argumentações as ações **A1**, **A3**, **A6**, **A7**, **A8** e **A9**, pois, como apresentado, operou com os vetores para verificar a dependência linear em um conjunto de vetores, assim como para verificar se um conjunto gera um determinado espaço vetorial. Destaco a iniciativa de acrescentar um vetor ao conjunto dado na segunda situação e depois verificar que esse vetor não era necessário para gerar o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$.

Já os processos que identifiquei durante a entrevista, foram: **P1**, **P2**, **P3**, **P7**, **P11** e **P12**. O processo **P15**, em que a entrevistada intui que os objetos base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente e um conjunto minimal gerador, ou são complementares, ou são equivalentes, foi citado. No entanto, aparenta não estar completamente interiorizado, além desses, penso que ela também utilizou o **P16**.

Quanto aos objetos, Carol tem construídas as noções de conjunto gerador, dependência linear, base e dimensão. A noção de base de um espaço vetorial aparenta ser concebida, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes–**O3**–, como um conjunto gerador com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço vetorial considerado –**O8**–.

Contudo, penso haver evidências de que Carol possua uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial. Assim como sobre as demais noções elementares de Álgebra Linear que foram citadas, pois, demonstrou em suas argumentações estabelecer correlações entre essas noções matemáticas, sobretudo, a correlação entre a noção de dimensão e de base de um espaço vetorial. Dessa forma, parece que, após dois cursos de Álgebra Linear, Carol pôde incorporar a noção de dimensão ao esquema que construiu para a noção de base de um espaço vetorial.

Entrevista com Rodolfo

“O aluno D usa para justificar justamente a definição de base,
ou seja, que os vetores sejam linearmente independentes
e que gerem o espaço”(RODOLFO)

A descrição desta entrevista pautou-se em minhas anotações e no protocolo produzido pelo entrevistado, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Rodolfo logo após ser convidado por e-mail (anexo 1), respondeu-me agradecendo o convite, mas alegou que seria difícil me ajudar, a não ser que realizássemos a entrevista via o MSN Messenger[86], pois residia em outro Estado.

Marquei a data e o horário para a entrevista, pois acreditei ser essa uma experiência interessante. No entanto, na data combinada estava chovendo em São Paulo e, por esse motivo, a conexão com a internet foi comprometida. Mesmo assim, ela foi realizada e durou cerca de 45 minutos. Durante a entrevista, aproveitamos os recursos de áudio e de vídeo que o MSN Messenger oferece.

Nas primeiras tentativas de conexão, o áudio do entrevistado não funcionou, então, cogitamos a possibilidade de fazer a entrevista mais à noite, mas não foi necessário, pois na terceira tentativa conseguimos reparar os problemas.

Com os equipamentos funcionando, agradeci a colaboração e apresentei os objetivos desta pesquisa. Em seguida, solicitei autorização para gravar a entrevista. Com o aceite do entrevistado, iniciei a audiogravação.

Rodolfo é aluno de um curso de licenciatura e bacharelado em Matemática e está matriculado no oitavo semestre, de um total de dez. Nos quatros primeiros semestres do curso, os alunos, tanto do bacharelado como da licenciatura, participam do chamado núcleo comum que são disciplinas ofertadas para ambos os cursos. No quinto semestre, os alunos podem optar por uma das duas habilitações (bacharelado ou licenciatura); no entanto, Rodolfo optou prosseguir matriculado nos dois cursos.

---

[86] O MSN Messenger é um programa computacional que permite o envio e/ou recebimento de mensagens instantâneas pela Internet.

A opção de Rodolfo deu-se por ter realizado trabalhos relacionados à Matemática Aplicada e ao Ensino de Matemática. Segundo ele, a Matemática Aplicada:

> aconteceu devido no início do curso, por ser um curso comum aos alunos do bacharelado e da licenciatura e, o fato de os professores em sua maioria serem Doutores em Matemática Pura ou em Matemática Aplicada, focarem bastante as disciplinas para suas respectivas áreas, deixando de lado a parte de ensino de quem deseja a licenciatura.

Para o entrevistado, os quatro primeiros semestres fizeram com que ele se acostumasse a estudar, em suas palavras: “a me esforçar bastante, até mesmo a ser autodidata para acompanhar certas disciplinas”. O que fez com que

> [...] nós, alunos, estudássemos bastante e nos acostumássemos com as cobranças. Assim, uma parte dos que entram no curso de Matemática acabam escolhendo o bacharelado, porque é mais ou menos o caminho, pois no quarto semestre quando devemos optar já se passaram 2 anos estudando bastante Matemática Pura e Matemática Aplicada, ou seja, muita matéria abstrata e nada da Licenciatura!

Rodolfo iniciou o curso com a intenção de fazer a licenciatura, mas ao cursar as disciplinas do núcleo comum interessou-se em prosseguir matriculado, também, no bacharelado. Para ele, essa escolha é comum entre os alunos, pois só após os quatro primeiros semestres é que, os alunos, têm contato com disciplinas relacionadas ao ensino de Matemática. Além disso, também, participa de uma iniciação científica em Teoria Econômica dos Jogos.

Já, o interesse em participar do curso de extensão de Álgebra Linear surgiu pelo incentivo de seus professores. A escolha pelo local, ocorreu por ter conhecidos em São Paulo que o hospedariam. E, também, por acreditar que teria a possibilidade de aprender e melhorar seu currículo. No entanto, Rodolfo alegou que “esperava, por ser São Paulo, que seria muito difícil!”.

Retomei alguns aspectos do curso, como por exemplo, que trabalhamos com espaços vetoriais finitamente gerados sobre o corpo dos reais. Enquanto conversávamos, tentei enviar a primeira situação para ele. Mas, em razão da oscilação do sinal da internet, meu computador finalizou o programa. Abri-o, novamente, na segunda tentativa de enviar o arquivo, o programa finalizou. Então, reconectei o MSN Messenger e utilizei a janela de conversação para enviar a **primeira situação**.

Enquanto digitava a situação, expliquei que era uma questão extraída de uma prova e quatro respostas de alunos para essa questão. Ele deveria comentar essas respostas.

Em razão dos problemas da conexão com a internet, a transferência das falas passou a ser interrompida, dificultando a compreensão do que era dito. Então, combinamos falar mais devagar, pausadamente. Assim aconteceu, até o final da entrevista.

Rodolfo iniciou sua argumentação pela resposta do aluno **B**: “ele (*o aluno*) confundiu a base canônica com o conceito de base [...] Na verdade, base canônica é uma base, mas não é a única”. Nesta afirmação, há indícios de que o entrevistado reconhece a base canônica do $\mathbb{R}^2$, como também a existência de diferentes bases para um mesmo espaço vetorial.

“Já na terceira resposta (*a do aluno* ***C***): Falsa, porque tem três vetores. Parece que...”, Rodolfo parou, pensou durante um tempo e continuou, “o $\mathbb{R}^2$ só necessita de dois vetores LI na base. Mais do que dois vetores nesse conjunto resulta que um ou mais deve ser combinação linear de um ou dos dois vetores LI”.

Ao argumentar a resposta do aluno **C**, o entrevistado apresentou indícios de utilizar, ou o processo **P13**, ou o processo **P16**, pois, parece ter tido inferência da noção de dimensão em sua argumentação, isto é, por conhecer a dimensão desse espaço correlaciona-a com a noção de vetores linearmente independentes. Ele demonstrou conceber a noção de vetores linearmente dependentes, como sendo vetores que podem ser escritos, como combinação linear de vetores linearmente independentes.

Na resposta do aluno **D**, Rodolfo alegou que “alguma coisa tem a ver com o conjunto gerador e acho que está certo. Não fiz as contas, mas me parece que esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$...”.

Nesta afirmação, faço duas considerações. A primeira, Rodolfo aparenta recordar que existe alguma relação entre a noção de base de um espaço vetorial com a de conjunto gerador. Segunda, apesar de não ter feito as “contas”, há indícios de que ele utiliza a ação **A1** e tem interiorizado o processo **P2**, pois aparenta reconhecer que o conjunto dado gera o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Rodolfo, após uma pausa, disse:

> já a primeira (*a resposta do aluno* ***A***), que eu tinha pulado, Verdadeira, eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$. Aqui não está correto, pois não são todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ que vão formar o $\mathbb{R}^2$. Ah... São diferentes, não é? Cada um pensou uma coisa. Eu agora fiquei até em dúvida se é a terceira ou se é a última, pois...

Não consegui compreender o que Rodolfo disse, pois a conexão com a internet ficou muito ruim. Então, pedi para que ele repetisse. Rodolfo afirmou que na resposta do aluno **C** "[..] realmente, é isso mesmo, pois se tem três vetores um é linearmente dependente dos outros dois. Assim, a terceira resposta está correta, mas está incompleta".

Rodolfo demonstrou que reconhece a condição dos vetores pertencerem ao espaço vetorial em estudo, como sendo necessária, mas, não suficiente. Ao retomar a argumentação sobre a resposta do aluno **C**, ele demonstrou, também, estabelecer correlações entre as noções de conjunto linearmente independente com a de dimensão. Assim, considero que ele utilizou o processo **P16**.

Rodolfo aparenta ter interpretado essa situação, como sendo uma questão de múltipla escolha, "eu agora fiquei até em dúvida se é a terceira ou se é a última". Apesar do entrevistado ter dito: "não são todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ que vão formar o $\mathbb{R}^2$", ele dá indícios de considerar a resposta do aluno **D**, como sendo correta e, ainda, considerar o verbo "formar", como sendo o verbo "gerar".

Enviei a **segunda situação** da mesma maneira que fiz com a primeira, expliquei que se tratava de uma discussão em sala de aula da qual gostaria que ele comentasse.

Rodolfo leu, pensou por um tempo e disse: "a resposta do ***aluno D*** é a que define base....".

Mais uma vez, houve queda na conexão com a internet. Reconectei e Rodolfo prosseguiu: "o ***aluno D*** usa para justificar justamente a definição de base, ou seja, que os vetores sejam linearmente independentes e que gerem o espaço".

Penso que Rodolfo ao analisar a segunda situação coordenou os argumentos utilizados na primeira situação, de maneira que afirmou: "o aluno D usa para justificar justamente a definição de base". Isto é, o entrevistado concebe base como descrito em **O3**.

Questionei as outras afirmações, e ele disse:

> Ah! Sim. O ***aluno B**:* é o maior conjunto LI, acredito que tem que ser o maior conjunto, que tem que ter três vetores. Porque o espaço dos polinômios de grau menores ou iguais a dois tem dimensão três, então, no máximo tem três vetores LI, acho que ele quis dizer isso.

Embora Rodolfo não questionasse o enunciado, aparentou reconhecer que o conjunto apresentado não é base somente do conjunto de polinômios de grau igual a dois, mas, sim, do conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a dois e, ainda, mais uma vez, correlacionou a noção de dimensão com a noção de base de um espaço vetorial. Por conhecer a dimensão, ele utilizou o processo **P13**.

Rodolfo demonstrou conceber a noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente, só quando a dimensão do espaço vetorial é conhecida, pois afirma "o espaço dos polinômios de grau menores ou iguais a dois tem dimensão três, então, no máximo tem três vetores LI".

Quanto ao ***aluno C***, Rodolfo pensou por um tempo e disse: "é! Agora eu não consigo entender exatamente o que ele estava pensando". O entrevistado releu, pensou por mais um tempo e afirmou: "realmente, agora não consigo dizer o que ele estava pensando".

Apesar de Rodolfo ter dito na primeira situação, "não são todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ que vão formar o $\mathbb{R}^2$", ou seja, indicar que existe um conjunto gerador que seja minimal; na segunda situação, aparentou não reconhecer base como sendo um conjunto minimal gerador.

Questionei o entrevistado sobre a relação entre a Álgebra Linear e a Matemática, e ele respondeu:

> as noções de transformação linear, autovalor, autovetor, o trabalho com matrizes, mas, principalmente, transformações lineares, sempre dão amparo para o desenvolvimento da Matemática. Mas não da maneira como são tratadas, com muitas demonstrações, pois pode ser que, para alguns alunos, não seja tão necessária.

Rodolfo citou as relações que considera importantes entre Matemática e Álgebra Linear no desenvolvimento da própria Matemática. No entanto, ao afirmar que "da maneira como é tratada, com muitas demonstrações, [...] pode ser que para alguns alunos não seja tão necessária", aparenta não considerar importante o uso de teoremas e demonstrações.

Por não ter citado as noções de base de um espaço vetorial e dimensão, questionei-o, ele alegou que nos problemas de Teoria dos Jogos ao combinar

> as estratégias de todos os jogadores temos um produto cartesiano que gera um espaço, as possibilidades de um jogador contra as possibilidades de muitos outros [...] esse espaço que está sendo gerado admite base, assim, é necessário um mínimo de conhecimento de Álgebra Linear. É muito comum utilizar matrizes para representar os ganhos associados às estratégias escolhidas por cada jogador, sendo mais uma vez necessário o conhecimento de Álgebra Linear.

Síntese das observações da entrevista

Rodolfo faz licenciatura e bacharelado em Matemática e participa de uma iniciação científica em Teoria dos Jogos. Procurou o curso de extensão de Álgebra Linear por incentivo de seus professores, assim, efetivamente, esse foi seu segundo curso de Álgebra Linear.

Dos elementos evidenciados durante a análise dessa entrevista, Rodolfo demonstrou ter construído a ação **A1** e os processos **P2**, **P3**, **P13** e **P16**, pois, percebeu que os espaços vetoriais considerados poderiam ser gerados a partir do subconjunto de vetores dado. Determinou quando um conjunto de vetores é linearmente independente, utilizou a dimensão do espaço vetorial para determinar um conjunto maximal linearmente independente, e ainda, correlacionou a noção de dimensão com a de vetores linearmente independentes, para determinar se um conjunto é base de um espaço vetorial.

Quanto aos objetos, há indícios de que Rodolfo tem construído as noções de dependência linear, conjunto gerador, espaço gerado, base e dimensão. A noção de base de um espaço vetorial aparenta ser concebida, como sendo um conjunto linearmente independente, com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço, e, como um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Rodolfo mostrou ter uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial, como também sobre as noções elementares que foram citadas. Após dois cursos de Álgebra Linear, parece que pode incorporar a noção de dimensão ao esquema que construiu para a noção de base de um espaço vetorial.

Entrevista com André

"[...] se o espaço é o $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão dois, então precisamos somente de dois vetores linearmente independentes e não três" (ANDRÉ).

A descrição desta entrevista baseou-se em minhas anotações e no protocolo produzido pelo entrevistado, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

André respondeu ao convite feito por e-mail (Anexo 1) poucas horas, após ter recebido. Em sua resposta, demonstrou disposição para participar da pesquisa, mas solicitou que aguardasse alguns dias, para que a agendássemos, pois estava em período de provas na Universidade.

Ao concluir suas provas, enviou-me um e-mail solicitando que marcássemos a data e o local para a realização da entrevista. Marcamos na biblioteca do IME-USP.

Na data escolhida, cheguei antes do horário combinado e reservei uma das saletas de estudo para o encontro. Assim, quando André chegou, encontramo-nos no saguão da biblioteca e dirigimo-nos à saleta.

Na saleta, após os cumprimentos de praxe e estarmos acomodados, expliquei-lhe a finalidade da pesquisa e pedi autorização para audiogravá-la. André concordou e, então, liguei dois gravadores. A entrevista durou, aproximadamente, 30 minutos.

O entrevistado é aluno de Matemática Aplicada de uma Universidade pública do Estado de São Paulo, iniciou o curso, após ter se aposentado, como professor do departamento de Química de uma Universidade. Pois, é bacharel, mestre e doutor em Química. Concluiu a graduação, em 1970; o mestrado, em 1976, e o doutorado em 1988, ambos em Universidades públicas do Estado de São Paulo.

Durante sua trajetória, tanto profissional como acadêmica alegou que se deparou por várias vezes com as noções de Álgebra Linear; no entanto, o processo de aprendizagem dessas noções ocorreu "individualmente [...] por este motivo ficou muitas falhas, não aprendi quase nada!", pois, no mestrado e no doutorado, ele declarou ter visto aplicações de Álgebra Linear, afinal

> ao falarmos de partículas pequenas, tipo: os elétrons e os átomos, que são os objetos de estudo da Química, utilizamos para descrevê-las um modelo, cuja base é a equação de Schrödinger, que é uma equação diferencial parcial. Vamos pensar nesta equação, como sendo independente do tempo, que é uma situação mais simples! Então, toda vez que você vai tentar entendê-la, você tem que pensar em espaço de funções, não tem jeito! Então, o pessoal da Química precisa de Álgebra Linear!

Na licenciatura e no bacharelado em Química, a disciplina Álgebra Linear não é oferecida, sendo este um dos motivos pelos quais André alegou que “os químicos são pessoas que entendem pouco de estruturas atômicas. Os químicos entendem muito menos do que eles deveriam entender!”

O entrevistado disse que a Álgebra Linear é muito importante para se trabalhar com reações químicas, pois “para entender a Química a pessoa deve trabalhar basicamente com as reações químicas, e com as estruturas atômicas e moleculares”. Com isso, afirma não estar dizendo que os outros assuntos não sejam importantes, mas quer enfatizar que

> nós (*químicos*) não escapamos da Álgebra Linear, pois uma reação química é no mínimo uma equação diferencial, mesmo que a equação seja simples, nós damos um jeitinho de simplificar ainda mais, por exemplo, não mexe na temperatura, hem! Temperatura constante! Mas, quando a reação química acontece na natureza ou quando você mesmo programa a temperatura para variar e aquela equação simples passa a depender da temperatura, as coisas não se resolvem mais assim, como uma equação bem simples! A equação se torna bem mais complicada e, então, recorremos à Álgebra Linear.

André contou que, na Química analítica, sempre são usadas ferramentas da Álgebra Linear e apresentou o exemplo:

> vamos supor que eu seja um farmacêutico e vou trabalhar em um laboratório. Um cliente me traz um frasco de perfume com massa de tomate e pede para que eu o analise. Bom! Vou tentar fazer uma análise clássica, usando métodos clássicos e depois vou fazer uma análise, usando métodos modernos, digamos que irei fazer a análise da cor, da luminosidade, do carboidrato, da proteína, etc. Farei estas análises uma a uma e depois todas de uma só vez, por exemplo, usando infravermelho próximo, que é uma faixa de comprimento de onda característica. Com todas essas análises, posso, então, relacionar minha espectroscopia com certos parâmetros, e através de uma matriz para tal comprimento de onda efetuo a análise. Agora, se mudarmos um pouquinho essa amostra e fizermos a análise

> novamente podemos relacioná-las. Quer dizer, na Química analítica, que é imprescindível para o presente da Química, você sempre usa a Álgebra Linear, resumindo, não temos por onde escapar! (risos)

Em razão do interesse desta pesquisa, repousar na construção das noções elementares de Álgebra Linear, sobretudo, a noção de base de um espaço vetorial, questionei se na graduação em Matemática Aplicada, André já havia cursado Álgebra Linear. O entrevistado contou que, no primeiro semestre, teve uma disciplina chamada *Matemática e Modelagem*; assim, afirmou já ter trabalhado com noções relacionadas à Álgebra Linear, mas não declarou que noções foram essas.

Além da disciplina *Matemática e Modelagem*, contou que, no segundo semestre de 2008, teve um curso de Álgebra Linear que “foi pouco (risos). Com o passar do tempo, percebi que ficou faltando muita coisa, por exemplo, a noção de espaço dual”. André disse que o fato de não ter sido ensinado essa e outras noções deixou-o curioso,

> pois, nós (*alunos da Matemática Aplicada*) não aprendemos, não deu tempo! Os cursos, tanto o do primeiro semestre quanto o de Álgebra Linear do segundo semestre, foram ótimos! Mas foram bem corridos e mesmo nos tomando muito tempo com muito material para entregar, faltaram coisas! Para se aprender Cálculo, se tem quatro semestres e Álgebra Linear, não! Álgebra Linear você tem, vamos dizer uma e meia, entendeu? Muito pouco! Esse é um dos motivos da dificuldade, pois fica faltando, não é?

Pela curiosidade em aprender certas noções que não foram abordadas nos cursos do qual participou, procurou o curso de extensão em Álgebra Linear. No entanto, ao questioná-lo se suas expectativas com o curso de extensão foram alcançadas, alegou que “muita coisa ficou faltando ou trabalhamos pouco, por exemplo, com os funcionais que são importantes para se compreender equações diferenciais... Praticamente, não deu tempo, ficou faltando muita coisa de Álgebra Linear”.

Traçada a trajetória acadêmica e profissional de André, apresentei-lhe a **primeira situação** e dei-lhe folhas para possíveis anotações. André leu todas as quatro respostas, pensou um pouco, riu e referindo-se à resposta do aluno **A**, disse: “não sei se isso forma uma base para o $\mathbb{R}^3$, mas para o $\mathbb{R}^2$, sim, isso é uma base para o $\mathbb{R}^2$, só que preciso somente de dois vetores, o terceiro é linearmente dependente”.

Nesta afirmação, embora justificasse que, “para o $\mathbb{R}^2$ [...] preciso somente de dois vetores, o terceiro é linearmente dependente”, ele não explicitou que, para um conjunto ser base de um espaço vetorial, uma das condições necessárias é que os vetores pertençam ao espaço, pois a afirmação: “não sei se isso forma uma base para o $\mathbb{R}^3$”, aparenta ser uma dúvida. Penso que essa dúvida pode se referir ao fato de o $\mathbb{R}^3$ ter dimensão três e, terem-lhe sido apresentados três vetores.

Em linhas gerais, André demonstrou reconhecer a dimensão dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, assim como correlacionou a noção de dimensão com a de base e de dependência linear em um conjunto.

Para a resposta do aluno **B**, afirmou: “Não! Isso daqui (*apontando para o conjunto {(1,0), (0,1)}*) é a base canônica, e não precisa ser a base canônica!”, parou, pensou por um instante e rascunhou, conforme a Figura 28.

$$a_1(1,0) + a_2(4,5) = (0,0)$$
$$a_1 + 4a_2 = 0$$
$$5a_2 = 0 \;\therefore\; a_2 = 0$$

Figura 28: Anotações realizadas por André durante a análise da primeira situação

Enquanto escrevia, André disse: “eu responderia que são necessários somente dois vetores para formar uma base, por exemplo, x_1 e x_2 são suficientes. Esse daqui (*referindo-se ao vetor x_3*) pode ser escrito como uma combinação linear dos outros dois, não é?”

Observo que, ao rascunhar, André demonstrou utilizar o processo que lhe permite determinar se um vetor dado, pode ser escrito como combinação linear de outros vetores **– P1 –**, com isso, determina a dependência linear entre os vetores, ou seja, utiliza o processo **– P3 –**.

André demonstrou reconhecer a base canônica e, ainda, que a base de um espaço vetorial não é única. Além disso, a correlação entre as noções de dependência linear e dimensão são evidenciada, pois como afirmou: “são necessários somente dois vetores para formar uma base [...] esse daqui (*referindo-se ao vetor x_3*) pode ser escrito como uma combinação linear dos outros dois”.

Dessa forma, demonstrou conceber a noção de base, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço vetorial em estudo **– O9 –**.

Em continuação, o entrevistado parou, leu e referindo-se à resposta do aluno **C**, disse: “verdade, pois basta tomarmos dois vetores e não três!”. Neste caso, mais uma vez, André utilizou a dimensão em sua argumentação.

André retornou seu comentário sobre a resposta do aluno **B** e disse: “esse aqui pensou que a única base é a base canônica! (risos)”; em seguida, parou, pensou e afirmou: “neste caso (*resposta do aluno **C***), não precisamos de três vetores, basta dois. Aqui mesmo, temos mais de uma base! Eu poderia fazer esse aqui, e esse aqui (*referindo-se aos vetores x_2 e x_3*) e, também, formar uma base, não é?”.

Com esses elementos, penso que André tem interiorizado o processo que lhe permite dizer, qual o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser obtido em um determinado espaço vetorial **– P13 –**.

Como André não argumentou sobre a resposta do aluno **D**, prossegui interrogando-o sobre o que poderia estar por de trás de cada uma das quatro respostas, ou seja, o que os alunos poderiam ter pensado ao responder à questão apresentada pelo professor, então, disse:

> tem mais informações, só que isso no curso de extensão nós deveríamos ter aprendido melhor, não é? Por exemplo, poderíamos ter aprendido que se o espaço é o $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão dois, então precisamos somente de dois vetores linearmente independentes e não três. Por isso, que o *aluno **B*** deve ter feito esta confusão, ele não percebeu que a base não é única. Outra coisa é que se o espaço é o $\mathbb{R}^2$ e tivermos três vetores, um deles é linearmente dependente dos outros, não é?

Embora no curso de extensão, o Teorema da invariância tenha sido enunciado e demonstrado, André mostrou não o ter correlacionado ao processo citado, “se o espaço é o $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão dois, então precisamos somente de dois vetores linearmente independentes e não três”. Esse fato é evidenciado quando ele afirma que “no curso de extensão nós deveríamos ter aprendido melhor [...]”.

Como André, mais uma vez não citou a resposta do aluno **D**, prossegui a entrevista pedindo para que lesse e comentasse a **segunda situação**. André leu, pensou durante um tempo e afirmou: “para mim, esse conjunto é uma base para o espaço dos polinômios de grau dois. E o aluno que acredito estar correto é o ***aluno D**,* pois é esse exatamente o caso, um conjunto de vetores linearmente independentes que gera esse espaço".

Ao afirmar: "para mim, esse conjunto é uma base para o espaço dos polinômios de grau dois", há indícios de que André não esteja familiarizado com o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, pois aparentou não ter se atentado para o fato do conjunto apresentado ser base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a dois. Por outro lado, afirmou que, para ser base, deve ser "um conjunto de vetores linearmente independentes que gera esse espaço", ou seja, ele mostrou conceber o objeto base de um espaço vetorial, como descrito em **O3**.

Para coletar mais elementos, pedi para que argumentasse sobre o que levou os outros alunos a responderem de tal maneira, e ele disse: "o ***aluno B.*** Não existe esta questão de maior conjunto. É um conjunto de vetores LI que gera o espaço". O entrevistado olhou à resposta dada pelo ***aluno C*** e não fez nenhum comentário.

Penso que André concebeu a noção de base, como um conjunto gerador de vetores linearmente independentes e não reconhece as outras abordagens, no caso, base como um conjunto maximal linearmente independente e um conjunto minimal gerador.

Ao se referir à base de um espaço vetorial, André afirmou: "é esse exatamente o caso, um conjunto de vetores linearmente independentes que gera esse espaço", prossegui a entrevista, pedindo para que retomasse a **primeira situação**, assim, após pensar André disse:

> Na resposta do aluno **A**, o aluno não pensou que para formar uma base para esse espaço você não precisa de três vetores, você precisa somente de dois, não é? Então, está faltando ele dizer quem é esse conjunto e, também, está faltando, ele utilizar aquele teoremazinho que diz: se a dimensão for n e se ele tiver $n+1$ vetores, um deles é combinação linear dos outros vetores.

Ao dizer "se a dimensão for n e se ele tiver $n+1$ vetores, um deles é combinação linear dos outros vetores", enfatiza o fato de conceber base, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço vetorial.

Ao afirmar que

> o aluno **B** só conhece a base canônica (risos). Já o aluno **C**, tem uma lógica, pelo menos, está falando que tem vetor a mais, não é? Eu acho que nenhuma das respostas está completa. Agora o aluno **D**, os vetores geram o $\mathbb{R}^2$, mas não precisa dos três vetores, pois dois vetores já são suficientes. Cada um deles está faltando alguma coisa! Talvez o conceito foi discutido rapidamente, e os alunos não perceberam que são necessários apenas dois vetores!

André demonstrou ter interiorizado o processo **– P11 –**, conceber a dimensão, como sendo um objeto e, ainda, correlaciona-a com as noções de base de um espaço vetorial e dependência linear em um conjunto.

Síntese das observações da entrevista

André é bacharel, mestre e doutor em Química. Após se aposentar iniciou um curso de Matemática Aplicada, em que participou de um curso de Álgebra Linear. Pelo, seu interesse para estudar certas noções de Álgebra Linear, não abordadas no primeiro curso, fez o curso de extensão que, efetivamente, foi o segundo curso de Álgebra Linear do qual participou.

As ações e os processos identificados durante a entrevista foram **A1**, **A7** e **A9** e, **P1**, **P3**, **P11** e **P13**. André para verificar a combinação linear existente entre os vetores apresentados na primeira situação, utilizou as operações binárias que definem esse espaço vetorial. E eliminou um dos vetores para tornar o conjunto em um conjunto linearmente independente.

Em vários momentos, André utilizou a dimensão do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ para argumentar sobre a base desse espaço vetorial, ou seja, o entrevistado demonstrou correlacionar a noção de dimensão com as noções de base de um espaço vetorial, dependência linear e conjunto gerador, como por exemplo, na fala: "agora o aluno ***D***, os vetores geram o $\mathbb{R}^2$, mas não precisa os três vetores, pois dois vetores já são suficientes". Essa correlação, também, pode ser observada quando André afirma: "está faltando ele utilizar aquele teoremazinho que diz: se a dimensão for n e se ele tiver $n + 1$ vetores, um deles é combinação linear dos outros vetores".

Assim, penso que André tem construído, como sendo objeto as noções: dependência linear, conjunto gerador, base e dimensão.

Contudo, André demonstrou ter concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial. Assim como, sobre as noções elementares de Álgebra Linear que foram citadas. Afinal, o entrevistado demonstrou correlacioná-las durante sua argumentação. Além das evidências de ter incorporado a noção de dimensão ao esquema que possui sobre a noção de base de um espaço vetorial.

Entrevista com Bruno

"Não lembro! Só lembro que tinha um negócio de maior e menor, mas agora que estão juntos, não dá para saber qual é ...."
(BRUNO)

A descrição desta entrevista apoiou-se nas minhas anotações, no protocolo produzido pelo entrevistado, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Bruno, no mesmo dia em que recebeu o convite por e-mail (anexo 1), tentou realizá-la já no dia seguinte. Solicitei que ele esperasse por mais uma semana, pois a análise do roteiro da entrevista ainda não havia sido finalizada, tendo obtido sua concordância.

Passados alguns dias, reatei o contato com o aluno e marcamos um encontro na praça de alimentação do Shopping Metrô Tatuapé[87]. A entrevista ocorreu às dez horas da manhã, horário em que há pouco movimento nos shoppings o que possibilitaria não sermos incomodados por barulho.

Após nos acomodarmos em uma mesa isolada entabulamos uma conversa na qual expliquei em linhas gerais, o objetivo de minha pesquisa, aproveitando para solicitar sua permissão para audiogravar a entrevista. Após seu aceite, liguei dois gravadores. A entrevista teve duração de quase 20 minutos, sem qualquer interrupção.

Bruno contou que obteve seu título de bacharel e licenciado em Matemática em uma Universidade particular de São Paulo. Durante a graduação fez uma iniciação científica em Estatística. Comentou, também, que estava fazendo um curso de especialização em Educação Matemática.

Quanto ao curso de extensão de Álgebra Linear em questão, o entrevistado se declarou um aluno que sempre desejou fazer parte da Instituição promotora. Explicou que procurou tal curso com a intenção de complementar sua formação e "conhecer outras formas de ensino". Para ele, o curso foi "[...] interessante. Afinal, não esperava muito do curso. Era apenas para conhecer. Mas, gostei e pretendo fazer outros".

[87] Shopping localizado na zona leste da cidade de São Paulo.

Prossegui a entrevista, e apresentei a **primeira situação** para que Bruno a analisasse. Após ler e pensar por um tempo, ele riu e disse: “você deveria ter me falado para que eu tivesse estudado!”. Então, tentei tranquilizá-lo, afirmando não ser um teste, mas, sim, um guia para conversarmos. Assim, enquanto eu separava folhas e uma caneta para o caso dele querer escrever, ele prosseguiu dizendo: “apesar de já ter feito a disciplina, pois (*quando fiz o curso*) já era formado, não tinha visto nem a metade do que o professor passou”.

Solicitei que ele comentasse as respostas dos quatro alunos A, B, C e D. Bruno, após ler e pensar por um tempo, perguntou: “tenho que escolher uma?”. Percebendo que o entrevistado supunha que uma das respostas estava certa e as outras erradas, expliquei-lhe novamente que era para ele comentar cada uma das quatro respostas dadas. Após observar de novo a atividade o entrevistado perguntou: “tenho que escrever?”. Expliquei que era para ele comentar cada resposta, mas se precisasse, poderia escrever.

O entrevistado continuou a observar a atividade entregue e disse: “Não entendi!”. Nesse momento, decidi ler o enunciado em voz alta, explicando que a questão foi dada aos alunos em uma prova, que eu escolhi quatro respostas de alunos diferentes. Assim, gostaria de saber sua opinião sobre como e por que cada um dos quatro alunos interpretou-a.

O entrevistado eu a resposta do aluno **A** e disse: “não é especificamente por que eles são do $\mathbb{R}^2$ que eles irão formar uma base para o $\mathbb{R}^2$ [...] você deveria ter falado para eu estudar”. Nesse momento percebi que o entrevistado estava constrangido, pois parece que se sentiu avaliado. Esse fato me desconcertou, mas resolvi continuar com a entrevista assim mesmo.

Apesar dos indícios de que Bruno estava com receio de argumentar sobre as respostas dos alunos, “você deveria ter me falado para que tivesse estudado!”, “tenho que escolher uma?”, “tenho que escrever?”, e ainda, “não entendi!”, ele ao dizer: “não é especificamente, porque eles são do $\mathbb{R}^2$ que eles irão formar uma base para o $\mathbb{R}^2$”, mostrou reconhecer a condição de que para um conjunto ser base de um espaço vetorial, ele deve estar contido no espaço vetorial.

Como Bruno não prosseguiu em sua análise, pedi-lhe para que observasse as próximas respostas dadas não, necessariamente, na ordem apresentada na situação proposta. Então, ele leu a resposta do aluno **B** e disse: “essa daqui é falsa, pois é a base canônica e pode ser outra base, ou não? Não tem nada a ver!”. O entrevistado parou e aguardou que eu o auxiliasse, mas, como não disse nada, Bruno me questionou: “não vai me ajudar?”

O entrevistado demonstrou lembrar as noções estudadas no curso de extensão, mas, não as correlacionou, e ainda, por apresentar ter dúvidas, sempre pedia para que eu o auxiliasse. No entanto, continuei em silêncio enquanto Bruno lia e relia a situação proposta. Assim, após um tempo, ele rascunhou conforme a Figura 29.

$$\alpha\cdot(1,0)+\beta\cdot(4,5)+\gamma\cdot\left(-1,-\frac{5}{4}\right)$$

Figura 29: Anotações realizadas por Bruno durante a análise da primeira situação

Mais uma vez o entrevistado disse: “vai, me ajude!” Então, retomei sua fala e no momento em que repetia sua afirmação sobre a resposta do aluno **B**, ele me interrompeu e disse: “ele falou (*o aluno* ***B***) que é falsa, mas pode ser uma base sem ser a base canônica”.

Ao rascunhar, Figura 29, Bruno demonstrou recorrer, ainda que vagamente, à ação **A3**, na qual verifica a dependência linear nos termos da definição. Quando afirmou “[...] é falsa, mas pode ser uma base sem ser a base canônica”, mostrou que reconheceu o fato de existir diferentes bases para um mesmo espaço vetorial.

Como Bruno novamente não argumentou, questionei-o sobre a resposta do aluno **C**, e ele olhando para sua anotação, Figura 29, disse: “não, porque eu zero qualquer um desses aqui (α, β *e* γ) e zera do mesmo jeito”. Nesta fala, há indícios de que o entrevistado, utilizando-se da ação **A3** identificou que os vetores são linearmente dependentes.

O entrevistado não disse mais nada, então, acreditei que, ao apresentar a segunda situação, ele teria acesso a afirmações sobre a noção de base de um espaço vetorial e, assim, poderia retomar suas argumentações. No entanto, antes mesmo de lhe entregar a segunda situação, ele me interrompeu dizendo: “eu acho que o aluno **D** está correto, pois os três vetores geram o $\mathbb{R}^2$”. Nesta afirmação, Bruno aparenta reconhecer que os vetores geram o $\mathbb{R}^2$.

Mas, por ele, novamente não argumentar, apresentei-lhe a **segunda situação**. Bruno, após ter lido, disse: “uma hora, eu chego lá, está processando [...] Tenho que comentar o que cada aluno disse?”. Confirmei que sim, e ele voltou a ler a situação.

“Minha cabeça está toda confusa. Se você tivesse me perguntado perto do curso de extensão, talvez eu lembrasse ...”. Bruno, então disse: “o ***aluno A***, quer saber se isso é uma base [...] então, o ***aluno B***, fala que é o maior conjunto e o ***aluno C*** que é o menor conjunto ...”.

O entrevistado voltou a pensar e gesticulou com as mãos sobre as falas dos ***alunos B*** e ***C***. Após um tempo, afirmou: “não lembro! Só lembro que tinha um negócio de maior e menor, mas agora que estão juntos não dá para saber qual é ...”.

Questionei que se fosse para ele definir a noção de base de um espaço vetorial, qual dos alunos acreditava que estava correto. Ele releu os itens, pensou e disse: “é uma base porque é um conjunto linearmente independente que gera esse espaço”.

Bruno finalizou sua argumentação sobre a segunda situação e, então, retomou a **primeira situação**: na resposta do aluno **A**, “eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$, mas não é só isso que precisa”; na resposta do aluno **B**, “não é falsa, porque ele fala da base canônica, mas porque não necessariamente tem que ser a base canônica”, na resposta do aluno **C**, “não é falsa, pois eu posso zerar uma letra aqui (*referindo-se à Figura 29*), e ele continua sendo uma base” e, na resposta do aluno **D**: “acredito que esses três vetores geram o $\mathbb{R}^2$”.

Bruno reconheceu que os vetores da base devem pertencer ao espaço vetorial, assim como, existem diferentes bases para um espaço vetorial. No entanto, ao afirmar, “não é falsa, pois eu posso zerar uma letra aqui (*referindo-se à Figura 29*), e ele continua sendo uma base”, há indícios de que admite o conjunto dado, como sendo uma base para o $\mathbb{R}^2$, o que pode ser observado, também, na fala: “eu acho que o aluno **D** <u>está correto</u>, pois os três vetores geram o $\mathbb{R}^2$”.

Ao analisar a segunda situação, mostrou conceber a noção de base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente. Mas, ao retomar sua argumentação sobre a primeira situação, não a utiliza.

Por fim, Bruno disse:

> eu acostumei a fazer isso daqui (*referindo-se à Figura 29*). Eram tantos exercícios, aquele monte de listas, e eu não estava acostumado a fazer aquele monte de lista na faculdade. Então, eu passava a tarde com o professor tirando dúvidas, pois eu não estava acostumado a fazer tantas demonstrações e daí a gente se pega tanto na demonstração que acaba se esquecendo do conceito, não é?

Bruno ao dizer "... eram tantos exercícios, aquele monte de listas ...", remete-se a abordagem pedagógica citada no primeiro capítulo, em que é apresentado um exemplo, e os estudantes são convidados a realizar uma lista de exercícios similares. O que vem colaborar com as afirmações de Dubinsky (1997) e Dreyfus (1991), nos quais os autores dizem que os estudantes não compreendem as noções por não terem oportunidade de construir tais noções.

Ainda nesta perspectiva, perguntei-lhe sobre seu desenvolvimento no curso de extensão, e ele disse: "em termos de Matemática, eu fiquei mais familiarizado com o processo de demonstrar". E ainda,

> da minha parte, foi bem construtivista, pois eu tive que buscar, pensar e descobrir. Afinal, eu fazia de um jeito e estava errado, então, precisava fazer de outra maneira. Se eu fosse direto para a prova, não teria como fazer, pois não estava acostumado com aquelas atividades...

Apesar de Bruno citar o processo em que teve de "... buscar, pensar e descobrir. Afinal, eu fazia de um jeito e estava errado, então, precisava fazer de outra maneira...", assim como cita Dubinsky (1997), o entrevistado não era convidado a fazer, mediante a situações-problema, construções mentais de objetos matemáticos e de processos, usar esses resultados para dar sentido fora do problema, e quando o entrevistado afirma, por exemplo, "eu não estava acostumado a fazer tantas demonstrações e, daí, a gente se pega, tanto na demonstração que acaba se esquecendo do conceito", aparenta inverter um processo, isto é, a demonstração como consequência da organização e coerência de definições e propriedades de uma noção.

Síntese das observações da entrevista

Bruno é licenciado em Matemática. Faz um curso de especialização em Educação Matemática. Para ele, o curso de extensão, efetivamente, foi o segundo de Álgebra Linear do qual participou.

Durante a entrevista, mostrou-se receoso com as situações apresentadas, sempre aguardando por uma confirmação de suas respostas. Apesar de citar algumas noções elementares de Álgebra Linear, combinação linear, conjunto gerador e dependência linear, apresentou indícios de não ter concepções ação sobre essas noções. Isto é, mesmo após dois cursos de Álgebra Linear o entrevistado não pôde construí-las.

Entrevista com Lucas

"Bom, o aluno [...] está com a base canônica presa na cabeça (risos). Base para ele só pode ser a base canônica e isso aí é um erro" (LUCAS)

A descrição desta entrevista baseou-se em minhas anotações e no protocolo produzido pelo entrevistado, ambos durante o encontro, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Dois dias após Lucas ter sido convidado por e-mail (anexo 1) para participar da pesquisa, respondeu indicando quais datas e locais possíveis para sua realização. Combinamos realizar a entrevista na Biblioteca do IME-USP.

Cheguei antecipadamente à biblioteca e, assim, reservei uma das saletas para a realização da entrevista. Em seguida, Lucas chegou carregando giz e dois livros de Álgebra Linear, o de Callioli *et al.* (1995) e o de Coelho e Lourenço (2001).

Nós nos dirigimos à saleta, após os cumprimentos de praxe, expliquei-lhe a finalidade de minha pesquisa e perguntei se poderia gravar a entrevista. Com seu aceite, iniciei a audiogravação que durou cerca de 35 minutos.

Lucas é aluno de um curso de bacharelado em Física de uma Universidade pública de São Paulo, participa de um grupo de iniciação científica no departamento de Física Nuclear e de um grupo teórico na Matemática.

A procura pelo curso de extensão em Álgebra Linear deu-se por vários motivos, sendo um deles, "adiantar conceitos", pois o entrevistado alegou saber que no semestre seguinte iria cursar Álgebra Linear. Outro motivo foi por considerar a Álgebra Linear, em Física, uma ferramenta importante, Lucas, inclusive, apresentou um exemplo: "na Física Quântica, a Mecânica Quântica mexe muito com Análise Funcional, que é um assunto que junta Análise Real com Álgebra Linear".

Lucas comentou que: "gostei muito do curso, foi um nível legal, aliás, foi até mais do que eu esperava. Eu imaginava que fosse alguma coisa do tipo: vamos dar palestra a respeito de, no entanto, foi até melhor, foi aula mesmo".

Prossegui a entrevista, comentando que no curso de extensão tínhamos trabalhado com espaços vetoriais finitamente gerados, Lucas me interrompeu dizendo: “isso! Sobre o corpo dos reais também, não é? O professor não estendeu para outros corpos...”.

Sabendo que, após o curso de extensão Lucas havia participado de um curso regular de Álgebra Linear na Física, questionei-o se, nesse segundo curso de Álgebra Linear, o professor tinha abordado outros corpos, além do corpo dos reais. O entrevistado contou que trabalhou com as noções de espaço vetorial, de operador linear, funcional linear, entre outras. No entanto, a ênfase dada no segundo curso foi sobre as aplicações das noções estudadas em Álgebra Linear. Lucas considerou que “foi um curso mais voltado à Física. Por exemplo, uma coisa que não teve no curso de extensão, mas teve no curso deste semestre foi o método dos mínimos quadrados”.

Prossegui apresentando a **primeira situação**. Lucas após ler e pensar, disse:

> Na resposta do aluno **A**, dá para ver que ele confundiu dois conceitos, o de conjunto gerador com o de base. Base é um conjunto LI e gerador, não é? Só que, como você pode ver, é só multiplicar o vetor $x_3 = (-1, -5/4)$ por menos quatro que obtemos o $x_2 = (4, 5)$. Então, eles já não são linearmente independentes. Aqui, o aluno mostrou que está confundindo o conceito de base com o de conjunto gerador. Esses três vetores se você botar para gerar o $\mathbb{R}^2$, eles geram sim, com certeza, sem dúvida! O problema foi que ele confundiu dois conceitos.

Lucas apresentou o que concebe, como sendo uma base de um espaço vetorial, “base é um conjunto LI e gerador”. Em seu comentário, utilizou o processo **P1** para verificar a dependência linear, assim como, identificou o conjunto dado como sendo um conjunto gerador do $\mathbb{R}^2$.

Apesar dos elementos apontados, Lucas aparenta não ter se atentado para o que foi solicitado, pois o objetivo era verificar se o entrevistado reconhecia o fato de que para ser base uma condição necessária é que o conjunto esteja contido no espaço. Assim, penso que o entrevistado interpretou a palavra “formar” no sentido de “gerar”, pode ser por isso que, aparentemente, não compreendeu o que era solicitado.

Ao analisar a resposta do aluno **B**, o entrevistado disse:

> bom, o aluno **B** está com a base canônica presa na cabeça (risos). Base para ele só pode ser a base canônica e isso aí é um erro, porque até mesmo se eu pegar os vetores x_1 e x_2, eu tenho uma

> base para o $\mathbb{R}^2$. Esse aqui (*o aluno **B***) está dizendo que existe uma única base para cada espaço.

O entrevistado mostrou reconhecer o fato da base não ser única, e ainda, apresentou outra base para o espaço vetorial considerado.

Lucas prosseguiu sua análise, afirmando: "o aluno **C** está pior. Está com um problema aqui. O fato de ter três vetores não tem nada a ver. Por exemplo, eu posso ter os três vetores e gerar o $\mathbb{R}^3$...". Nesse momento, interferi questionando se ele poderia gerar o $\mathbb{R}^3$ e Lucas alegou:

> Ah! Não! Espera ai! O fato de ter três vetores não é suficiente para negar que seja base.... Uma parte ele entendeu! Como se está trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, é suficiente que hajam dois vetores para gerar, três vetores já virou um conjunto gerador, mas não uma base, certo? Ah!... esse fato dos três vetores foi uma afirmação boa, mas não foi completa.

Questionei como Lucas completaria a resposta, e ele disse:

> eu completaria assim, botaria mais defeito no conjunto, por exemplo, além de ter mais de dois vetores do $\mathbb{R}^2$, eu escreveria que uma base do $\mathbb{R}^2$ só pode ter dois vetores, isso significa que, por exemplo, o x_3 é combinação linear de x_2 e x_1. Assim, não é um conjunto linearmente independente. Pelas respostas dos alunos, eu acho que a que está mais próxima do correto é esta a **C***,* só que achei que está meio incompleta.

Assim, Lucas, por reconhecer a noção de dimensão e a utilizar nas afirmações: "como se está trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, é suficiente que hajam dois vetores para gerar, três vetores já virou um conjunto gerador, mas não uma base" e "uma base do $\mathbb{R}^2$ só pode ter dois vetores", mostrou correlacionar a noção de dimensão com as noções de base, conjunto minimal gerador e dependência linear.

Lucas prosseguiu analisando a resposta do aluno **D**, quando disse:

> a resposta dada pelo aluno na **D**, já contém um erro, pois é falsa. Esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$, mas gerar é uma condição necessária para ser uma base, não é uma condição suficiente, pois é necessário, também, que os vetores sejam linearmente independentes.

No início da entrevista, afirmou que “base é um conjunto LI e gerador” e, agora, retomou sua argumentação. Sendo assim, Lucas mostrou que concebe a noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador linearmente independente.

Prossegui a entrevista, apresentando a **segunda situação**. Lucas após ler e pensar, disse:

> tudo bem! O ***aluno B**,* não é? Ele deu uma consequência. O que ele falou é, na verdade, consequência de se tomar uma base, certo? Porque quando se trabalha com o conceito de dimensão, por exemplo, a dimensão do P_2 é três, quer dizer o conjunto mais compacto, no sentido de menor mesmo, o menor conjunto que você pode ter é realmente uma base. Acho que o único erro foi ele ter trocado a consequência pela causa. Essa afirmação é consequência da definição de base.

O entrevistado pensou um pouco e disse:

> mas vai depender de como o professor definiu a base, às vezes, ele pode ter definido desse jeito! Eu não consigo encontrar erro nisso! O conjunto está gerando, e é o maior conjunto de elementos linearmente independentes do P_2, pois, quando se toma o maior conjunto tem que ser com três vetores e, a partir deles, você consegue gerar os outros. O problema é que somente dizer “maior” fica uma coisa muito subjetiva. E, assim, eu não vejo erro! Simplesmente, o que ele fez foi trocar a definição por uma consequência da definição.

Penso que Lucas enquanto argumenta sobre a fala do ***aluno B***, está abstraindo reflexivamente, pois concebe base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente e reconhece a dimensão. A partir dessas noções, correlaciona-as para verificar se a fala do aluno está correta. Isso pode ser observado no trecho: “[...] pois, quando se toma o maior conjunto têm que ser com três vetores e a partir deles você consegue gerar os outros [...]”.

Lucas prosseguiu analisando a fala do ***aluno C***:

> o ***aluno C*** disse que é o menor conjunto de vetores que gera todo o espaço. Isso é verdade! Porque se você tiver um conjunto com o número de vetores menor, vai ter algum vetor que não vai ser gerado, por exemplo, se você só tiver um termo de grau zero e um de grau um, você não gera o P_2, não é? No caso, somente afirmar que é menor conjunto que gera todo o espaço, também, é uma consequência da definição. Assim, tanto o ***aluno B*** quanto o ***aluno C***

> estão corretos, pois base, também, é o menor conjunto de vetores que gera o espaço. Contudo, eles trocaram a causa pela consequência.

Mais uma vez, Lucas correlacionou os objetos que aparenta ter construído, para verificar a afirmação. Com isso, acredito que iniciou a construção do processo que lhe permite obter a base, como sendo um conjunto minimal gerador e/ou um conjunto maximal linearmente independente, pois há indícios de que concorda com as afirmações se a dimensão for conhecida.

Para finalizar sua análise, afirmou:

> na verdade, o ***aluno D*** apresentou a resposta mais completa. Ele trouxe a definição que o professor deu. Provavelmente, o professor deu a definição formal que nós conhecemos, e o aluno a utilizou. Ou seja, esse aluno mostrou que soube aplicar o conteúdo que o professor deu, não é? Aliás, é uma pergunta simples, e os três apresentaram respostas condizentes, mas se fosse para eu escolher optaria pelo que recorreu à definição. Certo?

Esta última afirmação vem corroborar com a evidência de que Lucas concebe base, como sendo um conjunto linearmente independente que gera o espaço. Embora dê indícios de ter construído o objeto base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, não se atentou que o conjunto apresentado na segunda situação é base do conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a dois mais o polinômio nulo.

O entrevistado prosseguiu argumentando que:

> uma grande dificuldade que vejo nas pessoas que estão aprendendo Álgebra Linear, por exemplo, é transpor a ideia de espaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para a ideia de espaço de funções. Para mim, a Álgebra Linear é uma linguagem, uma linguagem criada, assim como existe o inglês, o português, as línguas humanas. A Álgebra Linear é uma linguagem para ser usada dentro da Matemática que serve para tratar de problemas de natureza completamente diferentes, usando a mesma metodologia, entende? Os mesmos conjuntos de ideias que você teria com o $\mathbb{R}^n$, vai ter para um problema de equações diferenciais, vai ter quando no laboratório você encontra uma função, mas não quer trabalhar com ela e, então, a aproxima por uma outra função, por exemplo. São as mesmas ideias quando você trabalha com projeção, você trabalha com distância, você trabalha com operadores, está entendendo?

O exemplo citado por Lucas sobre a dificuldade enfrentada por um estudante de Álgebra Linear, “transpor a ideia de espaço vetorial do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ para a ideia de espaço de funções”, é tratado por Dreyfus (1991), citado na página 78, no qual o estudante deverá conceber o objeto ‘vetor’ desassociado do próprio objeto, isto é, sem considerar suas propriedades intrínsecas. Quando Lucas declara que concebe a Álgebra Linear, como sendo uma linguagem unificadora, “os mesmos conjuntos de ideias que você teria com o $\mathbb{R}^n$, vai ter para um problema de equações diferenciais [...]”, demonstra ter compreendido o que Dorier (1990), citado na página 11, descreveu sobre a constituição dessa disciplina.

Síntese das observações da entrevista

Lucas é aluno de um curso de Física e participa de uma iniciação científica em Física Nuclear. O primeiro curso de Álgebra Linear que fez, foi o de extensão. No entanto, quando realizei a entrevista, ele já havia participado de um segundo curso de Álgebra Linear.

Da análise dessa entrevista, Lucas mostrou ter construído as ações **A1**, **A7**, **A8**, **A9**, **A10** e **A13**. No entanto, não está restrito a elas, pois há indícios de já ter interiorizado os processos **P1**, **P2**, **P5**, **P6**, **P7**, **P11**, **P12** e **P13** que, aparentemente, o conduziu a encapsulação dos objetos **O2**, **O3**, **O4** e **O7**. Há, também, indícios de que Lucas ao conhecer a dimensão de um espaço vetorial tem encapsulado os objetos **O8** e **O9**. Quanto à noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente ou um conjunto minimal gerador, o entrevistado aparenta reconhecê-las, como sendo consequência da noção de base descrita em **O3**.

Lucas aparentou ter uma concepção estruturada sobre a noção de base de um espaço vetorial. Isto é, ele mostrou ter uma concepção objeto para a noção de base de um espaço vetorial, e, em razão das correlações, uma concepção objeto para as noções elementares de Álgebra Linear que foram citadas, sobretudo, a noção de dimensão.

Entrevista com Mariana

“Uma base do $\mathbb{R}^2$ é algo que pode gerar todo o $\mathbb{R}^2$, não é isso?”(MARIANA).

A descrição desta entrevista pautou-se em minhas anotações e no protocolo produzido pela entrevistada, ambos durante o encontro, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Após cinco dias de ter recebido o convite (anexo 1) por e-mail, Mariana respondeu-me solicitando maiores esclarecimentos sobre a pesquisa, pois alegou não dominar bem o assunto, e não ter tido um bom rendimento no curso de extensão de Álgebra Linear. Em resposta a seu e-mail, expliquei sobre minha preocupação com o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, realçando a importância de sua participação para o desenvolvimento desta pesquisa.

Passados 8 dias, Mariana respondeu-me com opções de horários e locais para que agendássemos a entrevista. Assim, acertamos o local e o horário.

Mariana compareceu à entrevista no horário combinado, e esta ocorreu no SESC[88] Vila Mariana e teve duração de, aproximadamente, 30 minutos. Como cheguei com meia hora de antecedência, procurei por um local para realizarmos a entrevista, mas todas as salas de estudo estavam ocupadas, com isso, sentamo-nos em um canto mais calmo da lanchonete do próprio SESC. No horário, não havia muitos clientes, como ficamos bem afastados, a entrevista ocorreu naturalmente, sem incômodos.

Após os cumprimentos de praxe, a entrevistada começou a relatar sua dificuldade com a Álgebra Linear e mostrou-me as anotações feitas durante o curso de extensão. Em meio a essa conversa, expliquei a finalidade de minha pesquisa, e perguntei-lhe se poderia audiogravar a entrevista. A entrevistada espontaneamente concordou com a solicitação e, então, iniciei a gravação.

Mariana é Engenheira Elétrica, concluiu sua graduação, em 1975, ela recorda ter sido um bom curso. Nos 4 anos teve apenas duas dependências. Ela contou, também, que em razão de seu interesse para fazer o mestrado em Engenharia

[88] Serviço social do comércio.

Elétrica, nos dias que antecederam à entrevista, foi rever o caderno utilizado durante o curso de extensão de Álgebra Linear, folheando o caderno relatou que:

> [...] fui re-estudar Álgebra Linear e me peguei com dificuldades, já no primeiro dia de aula. Tentei fazer os exercícios de novo. Quando é necessário fazer a soma de dois vetores tudo bem, mas, quando tenho que voltar para fazer uma demonstração, eu empaco! Não está no automático, bater o olho e falar! Nas somas, você pode separar em dois conjuntos e fazer a soma de dois conjuntos. No caso você tem dois conjuntinhos, dois elementos de cada espaço, faz a soma, você vai e faz o caminho direto. Mas fazer o inverso é uma forma diferente de ver as coisas, não é o comum da álgebra normal em que se faz rápido, pois você consegue enxergar a ida e a vinda. Na demonstração, parece que tem alguma coisa que nos prende. O professor fazia as demonstrações de maneira que pareciam óbvias, eram até ridículas de tão óbvias! Mas como que eu vou demonstrar isso numa prova, passo a passo? Então, a sensação que nos dá é que você tem que decorar, porque é tão óbvio! Então, em vários momentos eu interrompia a leitura, o estudo, e ia dar umas voltas. Eu penso que tem que ter outra forma de apresentar essa matéria que leve para o foco desde o início do curso.

Penso que uma das dificuldades já apontada em diversos trabalhos, como no de Dorier *et al.* (1997), é uma das enfrentadas por Marina, pois ao afirmar que "[...] quando tenho que voltar para fazer uma demonstração, eu empaco! Não está no automático, bater o olho e falar!" E ainda, "na demonstração parece que tem alguma coisa que nos prende. O professor fazia as demonstrações de maneira que pareciam óbvias, eram até ridículas de tão óbvias!", vem confirmar o que Dubinsky e Lewin (1986), Dreyfus (1991) e Dubinsky (1991) afirmaram, isto é, os estudantes devem participar do processo de abstração e não serem simples receptores do produto final. Além disso, vem, também, corroborar com Araújo (2002, p.37), pois a percepção de que um assunto, ou uma demonstração é fácil ou é óbvia, pode desmotivar um aluno com dificuldades, por "conta da impressão de incapacidade de perceber, o que parece tão fácil ou óbvio ao outro".

Outra dificuldade citada por Dorier *et al.* (1997) e Rogalsky (1997) penso que foi evidenciada na fala de Mariana, isto é, a linguagem matemática, pois, quando a entrevistada afirma "nas somas, você pode separar em dois conjuntos, fazer a soma de dois conjuntos. No caso você tem dois conjuntinhos, dois elementos de cada espaço, faz a soma, você vai e faz o caminho direto". Acredito que Mariana confundiu o termo coordenada de um vetor, com os termos conjunto e elemento.

Em continuação, Mariana ao me contar sobre o curso de Álgebra Linear que teve em sua graduação, disse:

> [...] tive um excelente professor, ele mostrava as coisas e não foi muito diferente do que nós aprendemos agora, pelo menos, o começo que eu lembrava, pois, na realidade, naquela época era apresentado de outra forma: era muita matriz! Neste aspecto o curso de extensão de Álgebra Linear foi mais abrangente, não é? Naquele tempo, tive dificuldade para entender a lógica da disciplina, sabia que se fizesse daquela forma, vamos dizer, seguisse a receita de bolo o resultado saia. Então, eu aprendi uma receita de bolo!

A entrevistada prosseguiu contando que, recentemente, participou de um curso em uma Universidade e, por ter tido necessidade de estudar Cálculo, recorreu, então, a ajuda de um professor seu amigo. Este indicou que ela se inscrevesse no curso de extensão de Álgebra Linear. Mariana acabou participando do curso, como ouvinte.

> Apesar de ter assistido como ouvinte, não faltei em nenhuma aula, se faltei foi só uma aula em que tive de levar minha mãe ao médico. Minha intenção em participar do curso de extensão foi realmente a de absorver aquela informação! Olha, se eu tiver novamente dificuldade e não conseguir me inscrever, mais uma vez irei pedir permissão para assistir, até eu dominar a matéria, pois agora virou questão de honra (risos), não é?

Destas afirmações, pode-se depreender que Mariana concebe a aprendizagem, como uma aquisição de um "produto", "minha intenção em participar do curso de extensão foi realmente a de absorver aquela informação", e ainda, ao se referir ao curso de Álgebra Linear que fez na graduação, "sabia que se fizesse daquela forma, vamos dizer, seguisse a receita de bolo o resultado saia. Então, eu aprendi uma receita de bolo!".

Mariana alegou que a Álgebra Linear não tem nenhuma relação com sua carreira profissional de engenheira, a importância surge "na hora de você fazer um mestrado".

Prossegui a entrevista comentando um pouco sobre o desenrolar do curso de extensão e apresentei a **primeira situação** para que Mariana analisasse.

Mariana leu todos os itens e disse: "Bom. Uma base do $\mathbb{R}^2$ é algo que pode gerar todo o $\mathbb{R}^2$, não é isso? Então, esses vetores (x_1, x_2, x_3), eu acho que não formam uma base, pois memorizei que a base deve ser composta por zero e um, você entendeu? Esse quatro e cinco...”

A entrevistada parou, pensou e disse:

> [...] ou, teria que ver se consigo gerar todo o contexto do $\mathbb{R}^2$ com esses três vetores. Mas eu acho que não vai gerar! Sabe? Comecei a estudar e estou bem no comecinho. Mas, é claro que uma base para o $\mathbb{R}^2$ tem que ser vetores do $\mathbb{R}^2$, certo? Assim, entendo que base é o que gera todo o $\mathbb{R}^2$. E, neste caso, como irei fazer para gerar todo o espaço do $\mathbb{R}^2$?

Embora Mariana dê indícios de que reconhece o fato de os vetores de uma base pertencerem ao espaço vetorial, “é claro que uma base para o $\mathbb{R}^2$ tem que ser vetores do $\mathbb{R}^2$”, e aparentar conceber base, como sendo um conjunto gerador, “uma base do $\mathbb{R}^2$ é algo que pode gerar todo o $\mathbb{R}^2$”, não demonstrou realizar a ação sobre combinação linear para gerar o espaço, como se pode notar em sua fala “neste caso, como irei fazer para gerar todo o espaço do $\mathbb{R}^2$?”. Além do que, ao afirmar, “[...] memorizei que a base deve ser composta por zero e um [...]”, penso que ela recorda as representações abordadas no curso de extensão e não associa a base como sendo um conjunto em que são válidas certas propriedades.

Mariana prosseguiu dizendo: “O aluno **A** está totalmente por fora, ele não sabe o que é uma base, nunca ouviu esse termo! O aluno **B** está com uma proposta interessante, pois a base do $\mathbb{R}^2$ é composta por zero e um. Agora, porque tem três vetores...”.

Nesse momento, parou, pensou por um instante e recorreu a seu caderno, enquanto o folheava, comentou: “tinha outra coisa envolvida, mas agora não vou saber dizer”. Então, fechou o caderno, leu o próximo item e disse: “já o aluno **D** está errado, pois esses vetores não geram o $\mathbb{R}^2$”.

Apesar de afirmar que base é um conjunto gerador, há indícios de que não possua concepção ação para a noção de base de um espaço vetorial. pois, afirmou que “uma base do $\mathbb{R}^2$ é algo que pode gerar todo o $\mathbb{R}^2$”, depois disse: “como irei fazer para gerar todo o espaço do $\mathbb{R}^2$?”, e ainda, o “aluno **D** está errado, pois esses vetores não geram o $\mathbb{R}^2$”. Mas em nenhum momento demonstrou ter verificado tal afirmação.

Mariana só reconhece a base canônica, pois no primeiro instante disse: “memorizei que a base deve ser composta por zero e um”, quando leu a resposta do aluno **B**, afirmou: "o aluno **B** está com uma proposta interessante, pois a base do $\mathbb{R}^2$ é composta por zero e um".

Dessa forma, penso que a entrevistada não interiorizou a ação que lhe permite identificar várias bases para um mesmo espaço vetorial.

Quanto à noção de dimensão, ao analisar a resposta do aluno **C**, Mariana deu indícios de existir algum resultado, mas não soube dizer qual.

Prossegui a entrevista apresentando a **segunda situação**, mas ela me interrompeu dizendo: "Aí não dá! Se você me falasse, eu ia estudar mais um pouquinho (risos)". Então, tentei contornar a situação explicando que era apenas uma conversa entre os alunos e, da mesma maneira, que na situação anterior era só para ela comentar.

Após ler a situação, Mariana disse: "já tinha até me esquecido do conceito de LI, não é?" Parou por um instante, referindo-se ao conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$, disse: "eu acho que ainda não é uma base. Não me lembro, teria que ter estudado um pouquinho mais..."

Voltei a dizer que era para ver o que os alunos tinham respondido. Mariana releu e pensou mais um tempo. "Maior conjunto LI... Não lembro, teria que ter dado uma estudada melhor".

Mariana deu indícios de se lembrar da noção de dependência linear quando afirmou "já tinha até me esquecido do conceito de LI, não é?". Mas não a associou com as demais noções. Quando disse "maior conjunto LI... Não lembro, teria que ter dado uma estudada melhor", penso que Mariana não concebe base como definido em **O6**.

Enquanto agradecia sua colaboração, Mariana disse-me: "que mico! Eu vou querer fazer a entrevista de novo. Daqui a duas semanas, por causa do exame para o mestrado, eu vou ter tudo isso digerido" e justificou

> se não estudei a primeira aula não dá para ir para a segunda, entendeu? Eu comecei a estudar, e ainda, estou na primeira aula. Já vi o que são vetores independentes e, normalmente, a base tinha aquela carinha de zero e um, zero e um, zero e um, entendeu? E você me mostra com outros números, será que pode? E aí, ao invés de multiplicar por valores, você multiplica pelas frações. Assim, a conta fica complicada, não é? Mas eu tenho que estudar mais um pouco.

Ao final da entrevista, afirmou que reviu “o que são vetores independentes” e que “normalmente a base tinha aquela carinha de zero e um, zero e um, zero e um”, ela demonstrou não ter construído a noção de dependência linear e, até mesmo, a base canônica, penso que não reconhece, pois da maneira como diz, acredito que ela se refere a vetores do $\mathbb{R}^2$, mas não a base canônica.

Síntese das observações da entrevista

Mariana é engenheira aposentada. Após a sugestão de um professor seu amigo, procurou o curso de extensão de Álgebra Linear que, efetivamente, foi o segundo de Álgebra Linear do qual participou. No entanto, mesmo tendo concluído um segundo curso de Álgebra Linear, ela mostrou não ter construído concepções ação para as noções elementares de Álgebra Linear.

Entrevista com o Fernando

> "Aparentemente, o aluno b) sabia que a base é formada por um conjunto LI [...]" (FERNANDO).

A descrição desta entrevista foi baseada nas mensagens trocadas por e-mail.

No mesmo dia que enviei o convite, por e-mail, Fernando respondeu-me dizendo que residia no interior de São Paulo e, por trabalhar o dia todo, seria melhor que fizéssemos a entrevista utilizando o Skype[89].

Agradeci seu contato e disse que pretendia realizar a entrevista no mês de julho. Mas, tive alguns problemas e só voltei a contatá-lo no início de agosto. Fernando respondeu que seria difícil agendar um horário, pois estava com muito trabalho a fazer, então, sugeriu que lhe enviasse as questões por e-mail.

Descrevi as situações e enviei-lhe. Na descrição, iniciei agradecendo sua colaboração, para com minha pesquisa e apresentei os objetivos do estudo. Garanti seu anonimato e passei as questões da primeira parte.

Fernando concluiu o curso de: Arquitetura e Urbanismo, em 1986; Direito, em 1988; Filosofia, em 1999; mestrado em Direito, em 1997; mestrado em Filosofia, em 2001; e, é aluno de um curso de Licenciatura em Matemática. Todos esses cursos foram realizados em universidades públicas do Estado de São Paulo.

O entrevistado trabalha há 34 anos:

> durante os 10 primeiros anos, trabalhou como garçom e ajudante de escritório. Durante 2 anos, aproximadamente, trabalhou como desenhista projetista. Depois, basicamente, foi servidor público. Trabalhou como agente de vistoria de bagagens na Secretaria da Receita Federal no Aeroporto Internacional de São Paulo (Cumbica). Depois passou a ser Técnico da Receita Federal na mesma Secretaria da Receita Federal. Por cerca de um ano, atuou como advogado. Depois ingressou na carreira da magistratura, inicialmente, na Justiça do Estado de São Paulo e, depois, na Justiça do Trabalho, onde permanece, mas está afastado das funções, desde 2005.

[89] Software que permite comunicação pela Internet por meio de conexões de voz.

O entrevistado disse não existir nenhuma relação entre as funções exercidas e a disciplina Álgebra Linear. Quanto ao curso de extensão de Álgebra Linear, ele disse que o procurou com “perspectiva de um curso de qualidade”. Mas, alegou que:

> as expectativas não foram atingidas, pois o curso foi muito aquém do esperado, com sérios problemas de ordem pedagógica e educacional por parte da docência, tanto quanto ao domínio do assunto, didática e sistema de avaliação. Imagino que respalda minha opinião o alto índice de abandono do curso, não obstante ser de pequena duração. Há quem diga que o abandono teria sido motivado pela dificuldade, mas isso é uma justificativa do ponto de vista, talvez, do docente, pois quanto aos alunos, pelo que pude observar e extrair das conversas, houve muitas queixas, sobretudo, da qualidade didática das aulas.

Quanto a **primeira situação**, Fernando respondeu: na resposta do aluno **A** “imagino que o aluno não estava sabendo a matéria e deu uma resposta qualquer”.

Penso que Fernando não se atentou para a condição de que, para um conjunto de vetores ser base de um espaço vetorial, deve, primeiramente estar contido no espaço vetorial. Por outro lado, o entrevistado aparenta possuir uma concepção sobre base de um espaço vetorial, mas, por enquanto, não se pode determiná-la.

Na resposta do aluno **B**, Fernando respondeu:

> aqui o aluno parece ter entendido, o que seria uma base para o $\mathbb{R}^2$, mas não foi capaz de verificar se a partir dos vetores dados seria possível concluir racionalmente se aqueles vetores, também, poderiam ser outra base. Depois, tive a impressão que o aluno poderia estar com a ideia de que os vetores que formam a base, devem ser necessariamente ortogonais.

No trecho, “o aluno parece ter entendido, o que seria uma base para $\mathbb{R}^2$, mas não foi capaz de verificar [...]”, há indícios de que o entrevistado possua uma concepção ação sobre a noção de base de um espaço vetorial. Mas não foi possível identificar quais ações descritas na decomposição genética ele utiliza. Já no trecho, “seria possível concluir racionalmente se aqueles vetores também poderiam ser outra base [...], o aluno poderia estar com a ideia de que os vetores que formam a base devem ser necessariamente ortogonais”, têm-se duas considerações: primeiro, há indícios de que reconhece que a base de um espaço vetorial não é única, ou seja, utiliza o processo **P5**; e ainda, há indícios de que Fernando estabelece uma correlação entre a base canônica e vetores ortogonais, assim como sugerido na decomposição genética e por Costa e Catarino (2007).

Na resposta do aluno **C**, Fernando afirma: “aqui, novamente, parece retornar ao problema do aluno **A**, ou seja, não parece ter entendido o que seria uma base e os subespaços possíveis dentro de um espaço vetorial com dimensão maior”.

Nesta afirmação, Fernando não explicitou o fato de que um subespaço do espaço vetorial, no caso $\mathbb{R}^2$, deve ter no máximo dimensão dois. O fato permite inferir que Fernando embora aparente ter uma concepção ação para a noção de base de um espaço vetorial, não a correlacionou com a noção de dimensão.

Na resposta do aluno **D**, “aqui o aluno aparentemente não sabe ou estava com preguiça de justificar”.

Da mesma maneira que nos itens anteriores, Fernando aparentou conhecer as ações sobre a noção de base de um espaço vetorial, mas não apresenta elementos que permitam identificar quais seriam as ações utilizadas por ele.

Descrevi a **segunda situação** e da mesma maneira que a primeira, expliquei que era para ele comentar as respostas dos alunos.

Fernando iniciou alegando que “a pergunta (***aluno A***) me pareceu boa enquanto exemplo didático”. Penso que, em sua afirmação, o entrevistado atentou a maneira de conduzir a discussão e não ao fato de a base apresentada, ser base dos espaços vetoriais dos polinômios de grau menor ou igual a dois.

Fernando ao analisar a fala do ***aluno B***, disse:

> aparentemente, o aluno b) sabia que a base é formada por um conjunto LI, mas, oralmente, talvez tenha dado uma resposta provisória, justificável, pois era um questionamento oral, já que tudo indicava que, para se assegurar, deveria ter sido feito alguns cálculos ou, eventualmente, o aluno já tinha bem claro o que respondia.

Penso que Fernando concebe a base, como sendo formada por vetores linearmente independentes. Mas, não permite dizer se para ser base de um espaço vetorial, um conjunto deve ser um maximal linearmente independente desse espaço.

Quanto à afirmação do ***aluno C***, Fernando alegou que a “resposta pareceu meio vaga, pois não se sabe ao certo o significado dos termos usados, quer dizer, pode ser que (*o aluno*) estava dominando o assunto, ou falou meio vago para aumentar as possibilidades de acertar”.

Fernando ao dizer "pode ser que (*o aluno*) estava dominando", aparentou conceber a noção de base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto minimal gerador, mas seria necessário esclarecimentos.

Ao analisar a resposta do ***aluno D***, o entrevistado respondeu:

> A mesma situação de b) aparentemente, repetiu-se com d); conhece o assunto. Mas, como estamos avaliando uma resposta oral, não teria muito sentido daí extrair uma certeza de se foi um chute ou uma resposta segura. Oralmente, mesmo para quem estivesse sabendo e dominando o assunto, as respostas são mais rápidas.

Penso que Fernando ao dizer: "a mesma situação de b) aparentemente repetiu-se com d); conhece o assunto [...]", aparentou conceber base como sendo o menor conjunto gerador e, também, a justaposição, isto é, um conjunto linearmente independente que gera o espaço.

Síntese das observações da entrevista

Fernando tem três graduações e dois mestrados concluídos e, é aluno de um curso de licenciatura em Matemática. O curso de extensão de Álgebra Linear, efetivamente, foi o segundo curso. No entanto, apresentou indícios de ter uma concepção ação sobre a noção de base de um espaço vetorial, e ainda, não ter uma concepção ação sobre a noção de dimensão, pois alegou que o aluno "não parece ter entendido, o que seria uma base e os subespaços possíveis dentro de um espaço vetorial com dimensão maior".

Entrevista com Daniel

"Uma Base é um conjunto linearmente independente
que gera o próprio espaço" (DANIEL)

A descrição desta entrevista baseou-se em minhas anotações feitas durante o encontro, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Daniel é aluno de um curso de Mestrado em Educação Matemática e, apesar de nos encontrarmos com frequência, também, enviei-lhe o convite por e-mail (anexo 1). Após 10 dias, ele me respondeu, sugerindo que agendássemos a entrevista para o início do segundo semestre de 2009, pois reside em outro Estado.

Como solicitou, agendamos a data e o local para realizar a entrevista. Daniel compareceu à PUC-SP e dirigimo-nos a uma sala de aula da instituição.

Após nos acomodamos, expliquei-lhe a finalidade de minha pesquisa, assim como solicitei se poderia audiogravá-la. Com seu aceite, iniciei a gravação. A entrevista durou cerca de 25 minutos.

Daniel fez a Licenciatura em Matemática no Estado onde reside. Segundo ele, apesar de ter trabalhado durante o período em que se graduou, pôde concluí-la "sem grandes problemas", sendo ele um dos nove alunos que terminaram no tempo regular, sem reprovação nem dependências.

Daniel contou que, após concluir a graduação, iniciou um curso de pós-graduação em Educação Matemática na própria Universidade em que se graduou, mas participou de apenas dois encontros, pois passou em um concurso público para ser professor de Matemática da rede municipal de uma cidade vizinha. Nesta cidade, participou de cursos promovidos pela prefeitura, todos voltados à Educação, mas nenhum especificamente ligado à Matemática, segundo o entrevistado, "eram mais voltados à parte educacional e pedagógica".

Ao iniciar o mestrado, Daniel afastou-se do trabalho para residir em São Paulo. Assim, aproveitou para participar dos cursos de extensão: Cálculo no $\mathbb{R}^n$ e Álgebra Linear.

Quando questionado sobre os motivos que o levaram a participar do curso de extensão de Álgebra Linear, alegou que "um profissional da Educação, principalmente por ser em Educação Matemática, tem que ter um bom conhecimento em Matemática", e por ter concluído a licenciatura há praticamente 4 anos, acreditou ser "interessante voltar e rever alguns conceitos que talvez possam ter sido deficientes", em sua formação. Além do que, acreditou que o curso poderia lhe "proporcionar uma preparação matemática", pois ele tem "a intenção de prosseguir na carreira acadêmica, inclusive, atuando como professor". Segundo ele, é essencial que sua "bagagem Matemática forneça subsídios para que possa assumir as aulas".

Além da preocupação com a carreira acadêmica, o entrevistado alegou que a Álgebra Linear possui uma nítida ligação com o restante da Matemática e disse: "antes do mestrado, eu via a Álgebra Linear mais ligada à Computação, com o tratamento de imagens... Mas no mestrado, percebi sua importância também nas Engenharias, principalmente na Elétrica".

Prossegui a entrevista, retomando alguns aspectos do curso de extensão, como por exemplo, o fato de que no curso de extensão temos estudado os espaços vetoriais finitamente gerados sobre o corpo dos reais e, em seguida, apresentei a **primeira situação** para que ele a analisasse.

Após ler toda a situação Daniel questionou-me: "o que devo fazer em relação a isso aqui?" Expliquei-lhe que era para comentar cada uma das quatro respostas. Ele releu, pensou por um tempo e disse: na resposta do aluno **A**: "essa pessoa pode ter tido um erro na hora de compreender o que seria uma base, ela viu três vetores e viu que dois deles poderiam gerar o $\mathbb{R}^2$". Nesse momento, Daniel apontou para os vetores como se calculasse e confirmou que eles realmente geravam o $\mathbb{R}^2$.

Daniel prosseguiu dizendo:

> ela pensou que se dois geram, então, o terceiro não deixa de gerar o $\mathbb{R}^2$, mas ela não viu que isso transformava o conjunto em um conjunto linearmente dependente, o que não é uma base. Uma Base é um conjunto linearmente independente que gera o próprio espaço, neste caso, o $\mathbb{R}^2$. Então, ela partindo deste princípio, sem atentar para o fato de o conjunto ser LI ou LD, afirmou que era uma base porque gerava o $\mathbb{R}^2$. Assim na resposta **A**, ela diz que é verdadeira porque esses vetores formam uma base do $\mathbb{R}^2$ e porque são do $\mathbb{R}^2$. Ah! Sim, tem essa outra parte... Não me atentei a essa outra parte, porque são do $\mathbb{R}^2$, não entendi porque ela colocou isso aqui.

Embora Daniel não tenha se atentado ao que lhe foi solicitado, ou seja, verificar se o aluno **A** considerava como sendo condição necessária, mas não suficiente, os vetores de uma base de um espaço vetorial pertencerem a tal espaço, pois penso que interpretou o verbo "formar" como sendo o verbo "gerar". O entrevistado aparenta utilizar o processo **P2**, em que verifica se um conjunto gera um determinado espaço, e ainda, o processo **P11**, em que identifica o menor número de vetores necessários para gerar o espaço, “ela viu três vetores e viu que dois deles poderiam gerar o $\mathbb{R}^2$”.

O entrevistado, também, considerou o conjunto gerador, como sendo um conjunto qualquer que lhe permite obter todos os elementos do espaço vetorial e, não, necessariamente, conjuntos minimais, “ela pensou que se dois geram, então, o terceiro não deixa de gerar o $\mathbb{R}^2$”. A esse fato, o entrevistado aparentou associar a noção de dependência linear, ou seja, utiliza o processo **P3**[90], “ela não viu que isso transformava o conjunto em um conjunto linearmente dependente”, pois identificou os vetores que não são escritos como combinações lineares entre si, como sendo vetores linearmente independentes, e os que são escritos como combinações lineares, como sendo linearmente dependentes.

O entrevistado mostrou conceber uma base de um espaço vetorial, como sendo “um conjunto linearmente independente que gera o próprio espaço”.

Prosseguindo, o entrevistado parou, pensou por um tempo e afirmou: “é que, neste exemplo, não se pode dizer, mas se fosse outro exemplo, de repente três vetores quaisquer que não gerassem o $\mathbb{R}^2$, aparentemente, ela diria que é uma base só porque os vetores pertencem ao espaço”.

Daniel aparentou reconhecer que, para ser base de um espaço vetorial, não é suficiente que os vetores somente pertençam ao espaço, pois ao considerar, mesmo que, implicitamente, o contraexemplo em que o conjunto será linearmente dependente, ele apresenta uma situação em que o conjunto não é um gerador; mesmo assim, seria considerado pelo aluno como sendo uma base para o $\mathbb{R}^2$.

Para a resposta do aluno **B**, Daniel disse: “aqui está nitidamente claro que o aluno não tem noção, que não existe uma única base para um espaço vetorial. Ele apresentou uma base, uma base verdadeira; no entanto, não relacionou que existem outras bases para o mesmo espaço”. Isto é, Daniel aparenta conhecer a base canônica, e o fato de a base de um espaço vetorial não ser única, ou seja, utiliza o processo **P5**.

Na resposta do aluno **C**, alegou:

---

[90] Conforme proposto no refinamento apresentado na página 70 desta pesquisa.

> aqui o aluno levou em consideração a dimensão do $\mathbb{R}^2$. E como foram apresentados três vetores, não pode ser uma base, logo ele descarta os vetores serem LI ou LD. Ele não quer nem saber disso! Têm três vetores, e o $\mathbb{R}^2$ tem dois, pronto acabou, não é uma base! Ele pensou somente na dimensão e se esqueceu do resto, pois é uma questão de verdadeiro ou falso, então, fez um comentário e se safou, pode não ser a resposta mais adequada, mas é considerável.

Penso que Daniel conhece a dimensão do $\mathbb{R}^2$ e estabelece correlações entre a noção de dimensão e as noções de dependência linear e conjunto gerador. Ainda, por ter utilizado o fato de o conjunto apresentado possuir um número de vetores maior do que a dimensão do espaço para tomar sua decisão, aparenta ter interiorizado o processo – **P16** – em que sendo conhecida a dimensão do espaço vetorial, para qualquer candidato, a base desse espaço deve possuir o número de vetores exatamente igual à dimensão.

Na resposta do aluno **D**, o entrevistado leu, pensou por um tempo e disse:

> sim! Eu estava confundindo com a primeira, neste caso é o comentário que estava fazendo equivocadamente na letra **A**. O aluno levou em consideração que os vetores geram o $\mathbb{R}^2$; no entanto, tenho três vetores, o que faz com que o conjunto seja LD, ou seja, a noção de base não ficou clara, pois, também tem que ser um conjunto LI.

Na afirmação, "a noção de base não ficou clara, pois também tem que ser um conjunto LI", o entrevistado, mais uma vez, apontou para o fato de conceber base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Para finalizar sua análise da primeira situação, Daniel releu e afirmou: "na letra **C**, o aluno só levou em consideração a dimensão. Na letra **D**, ficou claro que o aluno não tem uma ideia sobre base. Na letra **A**, não entendi o que ele quis dizer sobre ser do $\mathbb{R}^2$".

Acredito que apesar de ter dito: "na letra **A**, não entendi o que ele quis dizer sobre ser do $\mathbb{R}^2$", reconhece o fato de que os vetores da base devem pertencer ao espaço vetorial em questão, como afirmou "[...] de repente, três vetores quaisquer que não gerassem o $\mathbb{R}^2$, aparentemente, ela diria que é uma base só porque os vetores pertencem ao espaço".

Prosseguí a entrevista apresentando a **segunda situação**, para que Daniel analisasse. Ele pegou a situação, leu e pensou em cada item, após um bom tempo disse:

> a questão que o aluno fez não me parece pertinente, pois isso aqui (*apontando para o conjunto de vetores*) não é uma base do polinômio de grau dois, no caso, deveria ter somente a variável elevada ao quadrado. Agora se o aluno tivesse dito ser base de um polinômio de grau menor ou igual a dois, aí sim! Da maneira como está, às outras respostas ficam sem sentido.

Daniel discute sobre o conjunto apresentado não ser base somente do *conjunto de polinômios de grau igual a dois*, mas, sim, do *conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a dois.* No entanto, ao dizer "[...] não é uma base do polinômio de grau dois, no caso, deveria ter somente a variável elevada ao quadrado [...]", ele aparentou acreditar que existisse um subespaço do $P_2(\mathbb{R})$ que contesse somente os polinômios de grau 2! Assim, para prosseguir, o entrevistado assumiu que o conjunto fosse base dos polinômios de grau menor ou igual a dois e afirmou:

> o ***aluno B*** que disse ser uma base, pois é o maior conjunto LI. A resposta está correta, apesar de ele não ter levado em consideração se o conjunto gera ou não o $P_2(\mathbb{R})$. Aparentemente, ele tem implícito o fato de que se um conjunto LI é o maior que ele consegue obter no espaço, vai gerar esse espaço.

Acredito que o entrevistado conceba base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente, mas há indícios de que a noção de base, assim apresentada, para ele é consequência da noção de base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente, "aparentemente, ele tem implícito o fato de que se um conjunto LI é o maior que ele consegue obter no espaço, vai gerar esse espaço".

A respeito da resposta do ***aluno C***, Daniel afirmou:

> o ***aluno C***, respondeu de maneira parecida ao aluno B; no entanto, diferem, pois ele não pensa no maior LI, e, sim, no menor conjunto possível que gera o espaço, ou seja, ele pensou na menor quantidade de elementos necessários para gerar todo esse espaço. O que não deixa de ser uma base!

Penso que Daniel associou a noção de base, como sendo o minimal gerador à noção de dimensão, o que indica que, para assumir que um conjunto seja o menor gerador possível, ele deverá ter de antemão a dimensão do espaço.

Daniel prosseguiu lendo a resposta do ***aluno D*** e afirmou:

> os **alunos B**, **C** e **D**, disseram noções de base distintas, estando todas corretas. No entanto, a do ***aluno D*** é a mais comum de se encontrar nos livros de Álgebra Linear [...]. No caso do maior conjunto LI, temos que levar em consideração que o aluno conhece a dimensão, assim, um conjunto de vetores LI que tem a mesma dimensão do espaço, obviamente, é base. A mesma coisa com o aluno C, pois no item C, o aluno já tem a ideia de LI; no entanto a ideia de ser o menor gerador possível lhe permite, no caso de ser um conjunto LD, tirar um elemento... Não lembro o nome, mas sei que existe um teorema que garante que se tirarmos um vetor LD, o conjunto de vetores tomado, continuaria gerando o espaço.

Acredito que Daniel concebe base como sendo um conjunto gerador linearmente independente, e as outras vertentes, como sendo consequências, por exemplo, se ele conhecer a dimensão, é possível obter um conjunto maximal linearmente independente que seja base, “no caso do maior conjunto LI, temos que levar em consideração que o aluno conhece a dimensão”. Agora, a noção de base como sendo um conjunto minimal gerador, ele associou com à noção de dependência linear, “a ideia de ser o menor gerador possível lhe permite, no caso de ser um conjunto LD, tirar um elemento [...] (e) o conjunto de vetores tomado continuaria gerando o espaço”.

Dessa afirmação, penso que Daniel utiliza a ação **A9**, ou seja, a ação que lhe permite eliminar de um conjunto gerador os vetores que possam ser escritos, como combinação linear de vetores pertencentes a esse conjunto.

Para concluir sua análise, ele disse:

> apesar de ambos trazerem consigo a ideia de LI, nesse (*apontando para o **aluno B***) é explicito, nesse (*apontando para o **aluno C***) não. Olha, esse dá a ideia de LI, e esse dá a ideia de gerador. Ambos definiram base, mas cada um deles dá ênfase a uma noção.

As correlações que Daniel aparenta realizar, indicam que construiu o objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador linearmente independente. O fato faz com que o entrevistado considere os objetos **O5** e **O6**, como sendo consequência de **O3**.

Síntese das observações da entrevista

Daniel é licenciado em Matemática e está cursando o mestrado em Educação Matemática. O curso de extensão de Álgebra Linear, efetivamente, foi o segundo dessa disciplina do qual participou.

O entrevistado mostrou utilizar a ação **A9** e os processos **P2**, **P3**, **P5**, **P11** e **P16**, e ainda, demonstrou coordenar esses processos de maneira que obteve os objetos **O2**, **O3**, **O4** e **O7**.

Durante sua argumentação, também, utilizou a noção de dimensão para determinar se um conjunto é base, das seguintes maneiras: o conjunto apresentado possui o número de vetores maior do que a dimensão do espaço, então, não pode ser uma base; se o conjunto é um conjunto gerador e possui o número de vetores maior do que a dimensão, eliminam-se os vetores linearmente dependentes, obtendo, assim, o menor conjunto gerador; e conhecendo a dimensão, tomam-se vetores de maneira a obter o maior conjunto linearmente independente em um espaço vetorial.

Assim, Daniel demonstrou ter construído concepções objeto para as noções elementares de Álgebra Linear, pois utiliza das ações, dos processos e dos objetos, e ainda, estabelece correlações entre essas noções matemáticas.

Dessa maneira, após dois cursos de Álgebra Linear, mostrou ter incorporado a noção de dimensão ao esquema que possui sobre a noção de base de um espaço vetorial.

Entrevista com Juliano

"[...] acho que (*ele*) não aprendeu muito bem a definição de base,
que é um conjunto LI e que ao mesmo tempo forma
o espaço vetorial, não é?" (JULIANO)

A descrição desta entrevista baseou-se em minhas anotações durante o encontro, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Passados 20 dias após o primeiro convite, feito por e-mail (anexo 1), não obtive resposta de Juliano. Então, enviei-lhe um novo convite, também, por e-mail e, no mesmo dia, ele respondeu-me indicando a data e o local para a realização da entrevista.

Cheguei antecipadamente ao local combinado, a saber, a Biblioteca do IME-USP. Procurei por uma das saletas de estudo, mas, todas estavam em uso. Voltei, à entrada da biblioteca e aguardei por Juliano.

Assim que Juliano chegou, dirigimo-nos a uma sala de aula vazia do instituto, acomodamo-nos, agradeci sua presença e informei os objetivos da pesquisa. Conversamos por um tempo, ao perceber que Juliano estava tranquilo, solicitei se poderia audiogravar a entrevista. Com seu aceite, iniciei a gravação que durou cerca de 20 minutos.

O entrevistado estava no quarto semestre de um curso de licenciatura em Física de uma Universidade pública do Estado de São Paulo. Ele disse, também, ter a intenção de participar de uma iniciação científica, em que pretende estudar espectroscopia com íons leves, para então, elaborar materiais didáticos.

Outra intenção de Juliano é cursar o bacharelado em Física, pois, tem interesse em estudar certas disciplinas que não constam na grade curricular da licenciatura, por exemplo, Álgebra Linear.

Seguindo os conselhos de uma amiga, procurou por cursos de extensão, e por não ter feito Cálculo II, optou participar do curso de Álgebra Linear, pois acredita que "para quem quer completar fazendo o bacharelado, é uma boa ajuda", pois, apesar de não ter trabalhado com Mecânica Quântica, tem consciência da importância atribuída à Álgebra Linear nessa disciplina, pois "a Álgebra Linear é como se fosse o Cálculo para a Física. É muito útil". Isto é, efetivamente, o curso de extensão foi o primeiro curso de Álgebra Linear que Juliano participou. Segundo ele,

> esperava pegar bastante, como é que se fala? Absorver bastante conteúdo de Álgebra Linear, mas já sabia que era uma coisa meio complicada de se entender numa primeira vez. Então, não tinha a expectativa de passar, ia tentar, como tentei. Pois, o irmão da minha amiga, ele é bacharel em Matemática e fez três vezes o curso de extensão em Álgebra Linear, reprovando em duas delas. Então, já sabia o que podia acontecer.

Comentei sobre o desenvolvimento do curso de extensão de Álgebra Linear e, enquanto dizia que, embora o professor tivesse tratado, sobretudo, de espaços vetoriais finitamente gerados, ele apresentou um ou outro exemplo que eram considerados espaços vetoriais sobre outro corpo, Juliano interrompeu-me dizendo: "isso mesmo! E, foi sobre o corpo dos complexos".

Prossegui apresentando a **primeira situação**. Juliano após ler e pensar por um tempo, perguntou: "o que mesmo eu devo fazer?" Assim, pedi que olhasse para as quatro respostas dadas e comentasse sobre o que poderia ter conduzido-os a responder de tal maneira.

O entrevistado releu e disse:

> Bom! Esse aluno aqui (*aluno **A***), acho que não aprendeu muito bem a definição de base, que é um conjunto LI e que, ao mesmo tempo, <u>forma</u> o espaço vetorial, não é? Aqui no caso, o subespaço. Ele falou que isso é uma base, mas se esqueceu que isso daqui (*referindo-se aos vetores* x_1, x_2*e* x_3) não são vetores LI, eles são LD (Grifo do autor).

Juliano ao ler a resposta do aluno **A**, "verdadeira. Eles formam uma base [...]", aparenta ter interpretado o verbo "formar", como sendo o verbo "gerar" que, em Álgebra Linear é utilizado ao tratar da noção de conjunto gerador. Essa interpretação pode tê-lo conduzido em sua análise, pois não atentou ao fato de que um conjunto para ser base de um espaço vetorial, deve estar contido no espaço.

Por outro lado, apresentou, o que aparenta conceber como sendo base de um espaço vetorial, ou seja, "é um conjunto LI e que, ao mesmo tempo, forma o espaço vetorial". Além de, evidenciar o uso do processo **P3** que lhe permite dizer se um conjunto é linearmente independente, "isso daqui (*referindo-se aos vetores* x_1, x_2*e* x_3) não são vetores LI, eles são LD", Em continuação, Juliano afirmou que a questão feita pelo professor “é falsa”, assim como respondeu o aluno **B**, “mas, poderia ser outra base também! Tipo não precisava ser a canônica, ele (*aluno **B***) fixou bastante na canônica porque é a mais fácil, é a mais simples que tem!”

Juliano conhece a base canônica e, ainda, o fato de a base de um espaço vetorial não ser única. Com isso, penso que o entrevistado utiliza o processo **P5** que lhe permite reconhecer vetores linearmente independentes e se esse conjunto de vetores é indispensável para gerar o espaço vetorial em estudo.

O entrevistado prosseguiu analisando a resposta do aluno **C**: “o aluno está certo, ele utilizou o fato de ser o $\mathbb{R}^2$, e a dimensão ser dois. A dimensão do espaço vetorial é a quantidade de elementos da base... É, eu acho que ele pensou nisso!”.

Juliano demonstrou conhecer a dimensão do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, apresentou o que concebe, como sendo a dimensão de um espaço vetorial, ou seja, “é a quantidade de elementos da base”. Dessa forma, o entrevistado correlacionou à noção de base de um espaço vetorial com a noção de dimensão, pois utilizou o processo **P16**, isto é, a dimensão do espaço vetorial é conhecida e o conjunto apresentado possui um número de elementos maior do que a dimensão, logo esse conjunto não pode ser uma base para o espaço vetorial em questão.

Na resposta do aluno **D**, o entrevistado alegou ser “mais ou menos essa daqui de cima, a primeira, pois só pensou no sentido de formar o espaço vetorial e não pensou que os vetores que formam a base devem ser LI”.

Juliano considera o fato do conjunto de vetores ser gerador, como sendo condição necessária, mas não suficiente, pois ao afirmar que o aluno “[...] só pensou no sentido de formar o espaço vetorial e não pensou que os vetores que formam a base devem ser LI”, enfatiza o que concebe como sendo base de um espaço vetorial, ou seja, como apresentada em **O3**.

Após finalizar sua argumentação, apresentei-lhe a **segunda situação**. Ele leu, pensou durante um tempo e disse: “não entendi muito bem... maior conjunto...”, parou e voltou a pensar por mais um tempo.

O entrevistado releu e afirmou:

> o ***aluno A***, que pergunta se o conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$ é uma base dos polinômios de grau dois, estava só tentando confirmar, para ver se aprendeu. Agora, o ***aluno B***, é, sim, porque é o maior conjunto LI... Não entendi muito bem, o que ele quis dizer com maior LI de $P_2(\mathbb{R})$,

> mas acho que ele sabe mais ou menos... É, estou meio perdido... Eu, também, não sou muito bom... Mas acho que ele estava pensando que a base poderia ser menor, poderia só ter $3x, 4x^2$... É! $3x, 4x^2$, no máximo, se não, não seria de grau dois.

Juliano não está familiarizado com os espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$, e ainda, aparenta não reconhecer a noção de base de um espaço vetorial como definida em **O6**, ou seja, base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente.

Após pensar um pouco, afirmou:

> o outro, porque é menor conjunto que gera... o ***aluno C*** está ainda mais perdido, ele está tão perdido quanto eu, porque ele fala que é o menor conjunto que gera todo esse espaço, mas se tivesse mais um, mais um grau aqui, já não seria base do polinômio dois. Eu acho que ele não pensou muito bem nisso. Se tivesse mais outra coisa também não seria LI.

O entrevistado dá indícios de não conceber base como apresentado em **O5**, ou seja, como sendo um conjunto minimal gerador. Além disso, os elementos, do espaço vetorial apresentado, não são percebidos como sendo vetores, "[...] mas se tivesse mais um, mais um grau aqui já não seria base do polinômio 2 [...] se tivesse mais outra coisa também não seria LI" (Grifo do autor).

Juliano parou, leu novamente a resposta do ***aluno D*** e disse: "o **aluno D** está com a definição completa, ele explica que uma base é um conjunto de vetores linearmente independentes que acaba gerando o espaço do polinômio de grau dois, com todos os seus coeficientes". Mais uma vez, apresentou o que concebe como sendo base.

Síntese das observações da entrevista

Juliano é aluno de licenciatura em Física, pretende participar de uma iniciação científica e, posteriormente, cursar o bacharelado.

Seguindo a orientação de uma amiga, fez o curso de extensão que, efetivamente, foi o primeiro de Álgebra Linear que participou. Pretende refazer esse curso, pois acredita que o conhecimento é tido como um conteúdo que deve ser absorvido, pois "esperava pegar bastante, como é que se fala? Absorver bastante conteúdo de Álgebra Linear".

Quanto às percepções desta entrevista, julgo que ele possa ter interpretado o verbo “formar” como sendo o verbo “gerar”, o que possivelmente conduziu sua análise da primeira situação. Já na segunda situação, há indícios de que o espaço vetorial considerado não lhe seja familiar, pois os vetores desse espaço vetorial não são percebidos por ele, como sendo vetores.

Por outro lado, durante sua argumentação utilizou os processos **P3**, **P5** e **P16**. Desde o início, apresentou o que concebe como sendo base de um espaço vetorial e dimensão. Além disso, demonstrou estabelecer correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear, sobretudo, entre as noções de base e dimensão.

Após um curso de Álgebra Linear, acredito que Juliano tenha uma concepção processo sobre a noção de base de um espaço vetorial. Assim como para a noção de dimensão.

Entrevista com Thaís

"[...] como calcular a base, não lembro, não posso falar a respeito.
Como que calculo uma base?" (Thaís)

A descrição desta entrevista pautou-se em minhas anotações feitas durante o encontro, na transcrição da audiogravação e, também, nas mensagens trocadas.

Como Thaís não respondeu ao primeiro convite (anexo 1) feito por e-mail, passados 20 dias enviei-lhe um novo e-mail. Ela, então, respondeu-me indicando a data e o local para a realização da entrevista.

Cheguei ao local combinado, Biblioteca do IME-USP, com antecedência e, procurei uma saleta para a entrevista. Mas, todas estavam em uso, então, aguardei por Thaís para procurarmos por uma sala de aula vazia no instituto.

Todas as salas de aulas estavam ocupadas, por não encontrarmos outro local para realizar a entrevista, dirigimo-nos a uma das recepções do instituto. Durante todo o período, que estivemos ali, permaneceu vazia, proporcionando, assim, um ambiente favorável.

Enquanto seguíamos em direção à recepção, Thaís disse-me ter dificuldade na audição e na fala, assim, solicitou que eu falasse devagar e pausadamente para que ela compreendesse.

Já na recepção, sentamo-nos próximos, um de frente para o outro. Ao nos acomodarmos, agradeci a presença de Thaís e contei-lhe os objetivos desta pesquisa, como também pedi autorização para audiogravar a entrevista. Com seu aceite, liguei dois gravadores. A entrevista teve duração de, quase, 25 minutos.

Thaís fez Engenharia da Comunicação em uma universidade pública em outro Estado. Após se formar, em 2006, veio para São Paulo para trabalhar em um projeto de instrumentação. Depois, tentou fazer o mestrado em Astrofísica, mas mudou de ideia e iniciou o mestrado em Ciência da Computação.

Ela fez o curso de extensão em Álgebra Linear "mais para aprender a fazer provas, ter uma base teórica. Então, fiz o curso de extensão, mas não acompanhei direito...". Thaís disse, também, que durante o curso não alcançou seu objetivo, pois

> as provas vistas no curso de extensão de Álgebra Linear eram muito curtas, eram esboços de provas, depois quando fui tentar aplicar essas técnicas na Teoria de Grafos, o professor dizia que minha

> prova não estava completa. Acho que essa parte deveria ser um pouco melhor! Pois, o professor no curso de extensão foi direto sem explicar os tipos de provas, por exemplo, por indução, por contradição e outros... Então, acho que, na primeira aula, o professor deveria dar uma olhada nisso e não pressupor que todo mundo já sabia.

Em continuação, Thaís comentou que havia cursado Álgebra Linear em sua graduação, mas o nome dado à disciplina era Geometria Analítica. Quanto à existência de relações entre as noções abordadas em Álgebra Linear e os trabalhos que tem desenvolvido, a entrevistada alegou que

> por enquanto, não sei estimar, pois não iniciei a revisão bibliográfica. Mas, quando você precisa desenvolver um novo conceito matemático ou computacional, você precisa testar uma nova técnica, então, você testa isso matematicamente. Então, acho que a Álgebra Linear vai ser importante, no momento de se provar, ver se a matemática construída é consistente.

Prossegui a entrevista retomando aspectos do curso de extensão e apresentei-lhe a **primeira situação**. Thaís disse: "tudo bem! Só não me peça para demonstrar...". Novamente, expliquei que era para que ela comentasse as quatro respostas dadas pelos alunos.

Thaís leu toda a situação proposta e, após um tempo, disse: "preciso me lembrar sobre o que era mesmo base, não me lembro...". A entrevistada pensou por mais um tempo e questionou: "você quer que eu comente? Assim, que diga se está certo, errado, se é suficiente, se está próximo?". Confirmei com a cabeça que sim e ela após pensar disse: "achei a afirmação muito pouco desenvolvida, não é? Acho que primeiro eu precisaria de uma frase que resumisse o conceito de base, para daí pegar esse conceito de base e esses vetores e, então, dizer se é verdadeiro ou não".

Ela apresentou indícios de não recordar a definição dada durante o curso para a noção de base de um espaço vetorial. Aparentou demonstrar que não pode ter construído esta noção durante o curso. Esta percepção prosseguiu durante a entrevista, pois Thaís sempre aguardava que eu lhe apresentasse uma definição.

Para prosseguir a entrevista, perguntei-lhe sobre as afirmações apresentadas pelos alunos, ela disse que o aluno **A** mostrou-se "[...] redundante, é base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$. Aqui o aluno não especificou nada sobre o que é base do espaço

$\mathbb{R}^2$. Acho que é insuficiente. Agora como calcular a base, não lembro, não posso falar a respeito. Como que calculo uma base?”

Nesta afirmação, Thaís aparentou ter necessidade de calcular um resultado e não de obter um conjunto. Então, prossegui, repetindo sua questão “Hum! Como encontrar a base?” Ela interrompeu e disse: “É porque eu pego o vetor, me desculpe, mas esqueci de como que...”, ela parou e me olhou, então, li a questão feita pelo professor, e como ela afirmou que a resposta do aluno **A** era insuficiente, iniciei a leitura da resposta do aluno **B**, enquanto lia, ela me interrompeu e disse: “Ah!... Então, (*apontando para a base canônica*), eu acho que eu gostei mais disso, porque é o primeiro que pega a base, e a partir dessa base ele diz se é verdadeiro ou falso”.

Penso que Thaís reconheceu a representação da base canônica e, com isso, alegou: “é o primeiro que pega a base, e a partir dessa base ele diz se é verdadeiro ou falso”, mas não evidenciou como concebe a noção de base de um espaço vetorial.

Ela prosseguiu com a leitura da resposta do aluno **C** e disse: “esse, enumerar os vetores. Hum! Não sei...” Thaís, aparentou não ter construído a noção de dimensão, pois deu indícios de não recordar de tal noção.

Sobre a resposta do aluno **D**, afirmou: “este aluno que diz, por que esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$, dá para verificar matematicamente calculando a base. É isso?”

No momento da entrevista, pensei que, ao lhe apresentar a segunda situação, ela teria contato com a “definição” de base de um espaço vetorial, e assim, poderia retomar suas argumentações. Mas, ao apresentar a segunda situação, ela me interrompeu questionando: “qual é a resposta, eu não me lembro?”

Penso que Thaís identificou a situação, como sendo uma questão de múltipla escolha, sendo assim teria uma única resposta correta. Então, novamente expliquei que não se tratava de uma questão de múltipla escolha, e, sim, uma situação em que ela deveria analisar todos os itens.

Prossegui a entrevista, sugerindo que ela comentasse sobre a **segunda situação** e caso quisesse poderia retomar a primeira. Thaís leu, pensou durante um tempo e questionou: “Bom! Assim, você quer que eu comente sobre a forma de ensinar?”

Respondi que poderia ser, mas seria interessante que ela olhasse para o que cada aluno poderia ter pensado ao responder e Thaís disse: “achei interessante o professor perguntar primeiro para a classe. Mas, não teve muita participação”.

Thaís retomou sua leitura e disse:

> uma coisa que eu achei bem contraditório, é o maior conjunto LI e o menor conjunto de vetores. Isso não ficou muito claro. Ninguém corrigiu! Ninguém falou se era maior ou menor. Ninguém falou mais nada! É, gostei mais disso (**aluno D**), pois deu para entender bem. Mas, depois o professor não disse mais nada, por exemplo, quem estava certo. É mais ou menos isso que você queria?

Penso que Thaís associou a afirmação do ***aluno D*** com o que estudamos durante o curso de extensão; no entanto, aparentou necessitar de uma confirmação, pois apresentou ter dúvidas que a conduziram a dizer “[...] o professor não disse mais nada, por exemplo, quem estava certo”.

Enquanto agradecia sua participação ela me interrompeu dizendo:

> outra coisa, aquelas aulas foram uma “encheção de linguiça”, tem que ter uma definição um pouco mais concisa e depois partir para o exemplo. No meu caso, aprendo mais com exemplos, pois somente dando a definição não consigo desenvolver muita coisa. Outra coisa, nesse curso, quase não tinha exemplo numérico, somente na lista de exercícios apareceram alguns que nem sempre foram de grande ajuda; na hora de fazer a prova, vinha coisa numérica enquanto que na aula eu sofria.

Síntese das observações da entrevista

Thaís é engenheira formada e faz curso de mestrado em Ciências da Computação. Segundo ela, o curso de extensão foi o segundo de Álgebra Linear do qual participou.

Com os elementos evidenciados em suas argumentações, Thaís demonstrou não ter uma concepção ação sobre a noção de base de um espaço vetorial. Na primeira situação, por exemplo, buscava por uma definição; na segunda situação, em que a noção de base é apresentada sobre três pontos de vista, ela demonstrou recordar da definição dada durante o curso de extensão, mas, aparentou incerteza sobre a afirmação. Isto é, mesmo após dois cursos de Álgebra Linear, a entrevistada não construiu as noções elementares de Álgebra Linear.

Um olhar panorâmico das entrevistas

Na primeira parte, apresentei uma análise vertical das entrevistas. Agora, as analiso com um olhar panorâmico, em que viso a identificar similaridades ou discrepâncias entre as argumentações apresentadas pelos entrevistados.

Quanto à caracterização dos sujeitos de pesquisas

Nos dados do Quadro 3, destaco o resumo da formação acadêmica do grupo entrevistado:

Quadro 3: Formação Acadêmica dos entrevistados

Em curso / Concluído	Graduação		Pós-graduação		
	Licenciatura	Bacharelado	Strictu sensu		Lato sensu
			Mestrado	Doutorado	
André		Química/ Mat. Apl.	Química	Química	
Bruno	Matemática	Matemática			Edu.Matemática
Carol	Matemática		Estatística	Estatística	Matemática
Daniel	Matemática		Edu.Matemática		
Fernando	Matemática	Arq./Direito/Filosofia	Direito/Filosofia		
Juliano	Física				
Lucas		Física			
Mariana		Engenharia			
Rodolfo	Matemática	Matemática			
Tais		Engenharia	C. Computação		

Observo que dos 10 entrevistados, seis concluíram ou estão matriculados em um curso de pós-graduação. Dos quatro que não fizeram ou estão em cursos de pós-graduação, três são jovens que adentraram à Universidade recentemente. Ainda é interessante notar que seis dos dez sujeitos não vieram da Matemática, mas de áreas afins, como Arquitetura, Engenharia, Física e Química.

Dos entrevistados só Juliano, na época da entrevista, não havia ainda participado de outro curso de Álgebra Linear, pois o de extensão foi seu primeiro curso sobre o assunto. Os demais, efetivamente, ao serem entrevistados já haviam participado de, ao menos, dois cursos de Álgebra Linear.

1ª Situação proposta aos sujeitos entrevistados

A seguir, apresento a análise dos comentários dos sujeitos sobre a primeira situação proposta.

A análise dos comentários sobre a resposta do aluno **A**: *Verdadeira, eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$*. Nos dados do Quadro 4, sintetizo esses comentários.

Quadro 4: Primeira situação: comentários sobre a resposta do aluno A

Nome	Resumo dos comentários
Thaís	Está redundante [...] O aluno não especificou nada sobre o que é base do espaço $\mathbb{R}^2$. Acho que é insuficiente. Agora como calcular a base, não lembro, não posso falar a respeito. Como que calculo uma base?
Mariana	O aluno está totalmente por fora, ele não sabe o que é uma base, nunca ouviu esse termo!
Fernando	O aluno não estava sabendo a matéria e deu uma resposta qualquer.
Carol	O aluno não tem clara a noção de base de um espaço vetorial, pois **utilizou somente o fato de os vetores serem do $\mathbb{R}^2$**.
Bruno	Não é especificamente por que eles são do $\mathbb{R}^2$ que eles irão formar uma base para o $\mathbb{R}^2$ [...] **não é só isso que precisa**.
Rodolfo	Não está correto, pois **não são todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ que vão formar o $\mathbb{R}^2$**.
André	O aluno não pensou que **para formar uma base para esse espaço**, você não precisa de três vetores, **você precisa somente de dois**, não é? Então, está faltando ele dizer quem é esse conjunto e, também, está faltando ele utilizar aquele teoremazinho que diz: **se a dimensão for n e se ele tiver $n+1$ vetores, um deles é combinação linear dos outros vetores**.
Lucas	Ele confundiu dois conceitos, o de conjunto gerador com o de base. **Base** é um **conjunto LI** e **gerador** [...] Como você pode ver, é só multiplicar o vetor $x_3 = (-1, -5/4)$ por menos quatro que obtemos o $x_2 = (4,5)$. Então, eles já não são linearmente independentes. [...] Aqui o aluno mostrou que está confundindo o conceito de base com o de conjunto gerador. Esses **três vetores** [...] geram (o $\mathbb{R}^2$), sim, com certeza, sem dúvida!
Daniel	Ela pensou que se **dois geram**, então, o **terceiro** não deixa de gerar o $\mathbb{R}^2$, mas ela não viu que isso transformava o conjunto em um conjunto **linearmente dependente**, o que não é uma base. Uma **Base** é um **conjunto linearmente independente que gera o próprio espaço**, neste caso, o $\mathbb{R}^2$. Então, ela partindo deste princípio, sem atentar para o fato de o conjunto ser LI ou LD, afirmou que era uma base porque gerava o $\mathbb{R}^2$.
Juliano	Esse aluno [...] não aprendeu muito bem a definição de **base**, que é um **conjunto LI** e que, ao mesmo tempo, **forma** o espaço vetorial [...] (*ele*) se esqueceu que isso daqui (*referindo-se aos vetores x_1, x_2 e x_3*) não são vetores LI, eles são LD.

Nos dados do Quadro 5 sintetizei o conjunto desses comentários.

Quadro 5: Síntese do Quadro 4

Sem justificação matemática	Não é suficiente que o conjunto pertença ao espaço vetorial	Análises bem justificadas		
		Base: conjunto LI que gera	Base do $\mathbb{R}^2$: conjunto LI com 2 vetores	Base do $\mathbb{R}^2$: conjunto LI que gera e tem 2 vetores
3	3	2	1	1
3	3	4		

Em relação à resposta do aluno **A**, sete entrevistados comentaram que para um conjunto ser base de um espaço vetorial, além de estar contido no espaço vetorial, ele deverá atender a outras propriedades. Dentre esses casos, dois referiram-se à dimensão do $\mathbb{R}^2$, o que mostra que, para eles, a noção de base está fortemente associada à de dimensão, o que é natural, pois se trata do $\mathbb{R}^2$ que é um dos espaços vetoriais mais tratados em cursos de Álgebra Linear. Será que o mesmo aconteceria se fosse o espaço vetorial real dos polinômios de grau ≤ 7?

Análise dos comentários dos sujeitos sobre a resposta do aluno **B**: Falsa, *porque a base do* $\mathbb{R}^2$ *é* $\{(1,0),(0,1)\}$. . Nos dados do Quadro 6, sintetizo esses comentários.

Quadro 6: Primeira situação: comentários sobre a resposta do aluno B

Nome	Resumo dos comentários
Thaís	[...] Gostei mais disso (*indicando a base canônica*), porque é **o primeiro que pega a base**, e a partir dessa base ele diz se é verdadeiro ou falso.
Mariana	O aluno está com uma proposta interessante, pois **a base do $\mathbb{R}^2$ é composta por zero e um**.
Fernando	O aluno parece ter entendido o que seria uma base para o $\mathbb{R}^2$, mas não foi capaz de verificar se a partir dos vetores dados seria possível concluir racionalmente se aqueles vetores também poderiam ser **outra base**. Depois, tive a impressão que o aluno poderia estar com a ideia de que os vetores que formam a base devem ser necessariamente ortogonais.
Carol	Esse aluno **conhece a base do $\mathbb{R}^2$** [...], mas se esqueceu que **a base não é única**
Rodolfo	Ele confundiu a base canônica com o conceito de base [...] Na verdade, **base canônica é uma base, mas não é a única**.
André	[...] Esse aqui **pensou que a única base é a base canônica!** (risos).
Bruno	É falsa, pois é a base canônica e pode ser outra base, ou não? Não tem nada a ver! [...] Não é falsa porque ele fala da base canônica, mas porque **não necessariamente tem que ser a base canônica**.
Lucas	O aluno está com a base canônica presa na cabeça (risos). **Base para ele, só pode ser a base canônica e, isso, aí é um erro**, porque até mesmo **se eu pegar os vetores x_1 e x_2 eu tenho uma base para o $\mathbb{R}^2$**.
Daniel	[...] o aluno não tem noção que **não existe uma única base para um espaço vetorial**. Ele apresentou uma base, uma base verdadeira; no entanto, não relacionou que existem outras bases para o mesmo espaço
Juliano	É falsa, mas poderia ser outra base também! Tipo **não precisava ser a canônica**, ele fixou bastante na canônica porque é a mais fácil, é a mais simples que tem!

Dois dos entrevistados em seus comentários demonstraram recordar algumas das características da representação algébrica de uma base canônica. Os demais, oito, reconheceram a base canônica e comentaram, explicitamente, que ela não é a única e que existem diferentes bases para um mesmo espaço vetorial.

Análise dos comentários dos sujeitos sobre a resposta do aluno **C**: *Falsa, porque tem três vetores.* Nos dados do Quadro 7, sintetizo esses comentários.

Quadro 7: Primeira situação: comentários sobre a resposta do aluno C

Nome	Resumo dos comentários
Thaís	Esse enumerar os vetores. Hum! Não sei...
Mariana	Agora, porque tem três vetores... Tinha outra coisa envolvida, mas agora não vou saber dizer.
Fernando	O aluno [...] não parece ter entendido, o que seria uma base e os subespaços possíveis dentro de um espaço vetorial com dimensão maior.
Bruno	Não é falsa, pois eu posso zerar uma letra aqui (*α, β ou γ, referindo-se à Figura 29 apresentada na página 119*), e ele continua sendo uma base.
Carol	O terceiro aluno está correto, pois **a dimensão desse espaço é dois**.
André	Verdade, pois **basta tomarmos dois vetores e não três**! [...] O aluno tem uma lógica, pelo menos, está falando que tem vetor a mais, não é?
Juliano	O aluno está certo, **ele utilizou o fato de ser o $\mathbb{R}^2$, e a dimensão ser dois**. A dimensão do espaço vetorial é a quantidade de elementos da base... É, eu acho que ele pensou nisso!
Rodolfo	O aluno afirmou que é falsa, realmente, é isso mesmo, pois **se tem três vetores um é linearmente dependente dos outros dois**. Assim, a terceira resposta está correta, mas está incompleta.
Daniel	O aluno levou em consideração a dimensão do $\mathbb{R}^2$. E como **foram apresentados três vetores, não pode ser uma base**, logo **ele descarta os vetores serem LI ou LD**. Ele não quer nem saber disso! Têm três vetores e o $\mathbb{R}^2$ tem dois, pronto acabou, não é uma base! **Ele pensou somente na dimensão e se esqueceu do resto** [...].
Lucas	O fato de ter três vetores não é suficiente para negar que seja base.... Uma parte ele entendeu! Como se está trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, **é suficiente que hajam dois vetores para gerar, três vetores já virou um conjunto gerador, mas não uma base**, certo? Ah!... esse fato dos três vetores foi uma afirmação boa, mas não foi completa.

Seis dos entrevistados explicitaram que o aluno **C** utilizou a noção da dimensão do $\mathbb{R}^2$ em sua resposta. Destes entrevistados, dois, correlacionaram a dimensão com vetores linearmente independentes e, um, com a noção de conjunto gerador. Quatro entrevistados não usaram argumentos matemáticos para decidir se a afirmação do aluno **C** estava correta ou não.

Análise dos comentários dos sujeitos sobre a resposta do aluno **D**: *Verdadeira, porque esses vetores geram o* $\mathbb{R}^2$. No Quadro 8, sintetizo esses comentários.

Quadro 8: Primeira situação: comentários sobre a resposta do aluno D

Nome	Resumo dos comentários
Thaís	Este aluno que diz, por que esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$, dá para verificar matematicamente calculando a base. É isso?
Mariana	O aluno está errado, pois **esses vetores não geram o** $\mathbb{R}^2$.
Fernando	Aparentemente (*o aluno*) não sabe ou estava com preguiça de justificar.
Bruno	Está correta, pois os três vetores geram o $\mathbb{R}^2$.
Rodolfo	Não são todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ que vão formar o $\mathbb{R}^2$, pois **se tem três vetores um é linearmente dependente dos outros dois**.
André	**Os vetores geram o** $\mathbb{R}^2$, mas, **não precisa dos três vetores**, pois **dois** vetores já **são suficientes** [...] Talvez o conceito foi discutido rapidamente e os alunos não perceberam que são necessários apenas dois vetores!
Carol	[...] Eles **geram o** $\mathbb{R}^2$, **mas um é combinação linear do outro** [...] Isso! Esses vetores são [...] **são LD**".
Lucas	Esses vetores **geram o** $\mathbb{R}^2$, mas **gerar é uma condição necessária** para ser uma base, **não uma condição suficiente** [...] **É necessário, também, que os vetores sejam linearmente independentes**.
Daniel	[...] O aluno levou em consideração que **os vetores geram o** $\mathbb{R}^2$; no entanto, **tenho três vetores o que faz com que o conjunto seja LD**, ou seja, a noção de base não ficou clara, pois **também tem que ser um conjunto LI**.
Juliano	[...] Ele **só pensou no sentido de formar** o espaço vetorial e **não pensou que os vetores que formam a base, devem ser LI**.

Três entrevistados fizeram comentários não pertinentes em suas análises. Bruno, um dos entrevistados, parece que se dispersou e comentou que os três vetores geravam o $\mathbb{R}^2$, o que é verdade, porém não foi isso, o que lhe foi solicitado. Seis entrevistados comentaram que, para um conjunto ser base de um espaço vetorial, além de ser gerador, ele deverá ser um conjunto linearmente independente. Outros dois, ao comentarem, utilizaram a noção de dimensão.

Durante a análise dessa primeira situação, a noção de base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes foi evidenciada nos comentários de cinco entrevistados. Outra noção elementar que se evidenciou nas argumentações foi a de dimensão, utilizada por um dos entrevistados para argumentar sobre três das quatro respostas dos alunos e, por dois entrevistados, ao comentarem sobre duas das respostas. E ainda, na resposta do aluno **C**, seis entrevistados, explicitamente, utilizaram-na.

2ª Situação Proposta aos sujeitos entrevistados

A seguir, apresento a análise dos comentários dos sujeitos sobre a segunda situação proposta.

Análise dos comentários dos sujeitos sobre o espaço vetorial considerado, o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a dois. Nos dados do Quadro 9, sintetizo esses comentários.

Quadro 9: Segunda situação: comentários sobre o espaço vetorial considerado

Nome	Resumo dos comentários
Carol	Esses vetores formam um polinômio de grau dois.
André	[...] Esse conjunto é uma base para o espaço dos polinômios de grau dois.
Juliano	[...] O conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$ é uma base dos polinômios de grau dois.
Rodolfo	[...] o espaço dos polinômios de grau ≤ 2 tem dimensão três.
Daniel	A questão que o aluno fez, não me parece pertinente, pois isso aqui (apontando para o conjunto de vetores) não é uma base do polinômio de grau dois; no caso, deveria ter somente a variável elevada ao quadrado. Agora, se o aluno tivesse dito ser base de um polinômio de grau menor ou igual a dois, aí sim! Da maneira como está, as outras respostas ficam sem sentido.
Thaís Bruno Lucas Mariana Fernando	Não fizeram comentários sobre a forma do aluno se referir ao conjunto dos polinômios de grau ≤ 2

Pelo resumo acima, percebeu-se que nenhum dos entrevistados discutiram que o espaço vetorial real dos polinômios, ao qual o **aluno A** se referia, não é dos “polinômios de grau 2”, mas, sim, dos polinômios de grau menor ou igual a dois mais o polinômio nulo. Um deles até imaginou que existisse um subespaço do $P_2(\mathbb{R})$ que continha somente os polinômios de grau 2! No entanto, é conhecido que os registros de representação semiótica da Álgebra Linear são de difícil assimilação pelos alunos, ainda mais se o espaço vetorial tratado é diferente dos espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^n$.

Nos dados do Quadro 10, sintetizo os comentários da transcrição apresentada aos entrevistados

Quadro 10: Segunda situação: comentários sobre a transcrição apresentada

Nome	Resumo dos comentários
Mariana	[...] Acho que ainda não é uma base. **Não me lembro**.
Thaís	[...] Achei **bem contraditório, é o maior conjunto LI e o menor conjunto de vetores**. Isso não ficou muito claro. Ninguém corrigiu! Ninguém falou se era maior ou menor. Ninguém falou mais nada! [...] É, **gostei mais disso** (aluno **D**), pois deu para entender bem. Mas, depois o professor não disse mais nada, por exemplo, quem estava certo.
Carol	O aluno **B e** o aluno **C são complementares**. **Não, não!** Essas afirmações **são opostas** [...] Não sei, **eu ficaria com o aluno D**.
Juliano	O aluno **A**, [...] estava só tentando confirmar, para ver se aprendeu. Agora, o aluno **B**, [...] Não entendi muito bem o que ele quis dizer [...] O aluno **C**, está ainda mais perdido [...] O aluno **D está com a definição completa**[...].
Rodolfo	O aluno **B**:[...] Acredito que **tem que ser o maior conjunto**, que **tem que ter três vetores. Porque o espaço** dos polinômios de grau menores ou iguais a dois **tem dimensão três, então no máximo tem três vetores LI**, acho que ele quis dizer isso. [...] É! Agora eu **não consigo entender exatamente o** que ele (aluno **C**) estava pensando. [...] **A resposta do aluno D é a que define base**.... [...] (*ele*) usa para justificar justamente a definição de base, ou seja, que os vetores sejam linearmente independentes e que gerem o espaço.
André	O aluno **B**. **Não existe esta questão de maior conjunto**. É um conjunto de vetores LI que gera o espaço. [...] **O aluno que acredito estar correto é o aluno D**, pois é esse exatamente o caso, um conjunto de vetores linearmente independentes que gera esse espaço.
Bruno	**Não lembro! Só lembro que tinha um negócio de maior e menor**, mas agora que estão juntos não dá para saber qual é ... [...] **É uma base porque é um conjunto linearmente independente que gera esse espaço**.
Fernando	O aluno **B sabia que a base é formada por um conjunto LI**, mas, oralmente, talvez tenha dado uma resposta provisória, justificável, pois era um questionamento oral [...] A resposta (*do aluno **C***) pareceu meio vaga, pois **não se sabe ao certo o significado dos termos usados**, quer dizer, pode ser que (*o aluno*) estava dominando o assunto ou falou meio vago para aumentar as possibilidades de acertar. [...] (*O aluno **D***) **conhece o assunto**. Mas, como estamos avaliando uma resposta oral, não teria muito sentido daí extrair uma certeza de se foi um chute ou uma resposta segura.
Lucas	[...] quando se toma **o maior conjunto têm que ser com três vetores** e a partir deles você consegue gerar os outros. [...] **O menor conjunto de vetores que gera todo o espaço. Isso é verdade! Porque se você tiver um conjunto com o número de vetores menor vai ter algum vetor que não vai ser gerado** [...] Assim, tanto o aluno **B** quanto o aluno **C estão corretos** [...] Contudo eles **trocaram a causa pela consequência.** [...] O aluno **D apresentou a resposta mais completa**. [...] Os três apresentaram respostas condizentes [...]
Daniel	Os alunos **B, C e D, disseram noções de base distintas, estando todas corretas**. [...]. **No caso do maior conjunto LI, temos que levar em consideração que o aluno conhece a dimensão [...]. A mesma coisa com o aluno C, pois [...] já tem a ideia de LI, no entanto a ideia de ser o menor gerador possível lhe permite, no caso de ser um conjunto LD [...] se tirarmos um vetor LD, o conjunto de vetores tomado continuaria gerando o espaço. Ambos definiram base, mas cada um deles da ênfase a uma noção.**

Dos entrevistados, um demonstrou não ter construído ainda a noção de base, disse não se lembrar. Sete mostraram conceber base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, mas não atentaram ao fato das três definições de base serem equivalentes. Apenas dois entrevistados, perceberam a equivalência das três "definições" de base.

Quanto às concepções de base evidenciadas pelos sujeitos

Conforme citado na página 22 deste trabalho, realizei um estudo do que cada indivíduo articulou ou demonstrou utilizar durante a entrevista que se constituiu, realmente, em uma tarefa árdua, pois só tive acesso ao que os entrevistados expressaram em suas argumentações. Da análise de suas entrevistas, procurei identificar as concepções que os entrevistados demonstraram ter construído.

Os dados do Quadro 11 sintetizam as ações, processos e objetos evidenciados durante a argumentação dos sujeitos que demonstraram possuir **uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial:**

Quadro 11: Síntese das Ações, processos e objetos evidenciados pelos sujeitos

	Ação - A_i								Processo - P_i										Objeto - O_i						
	1	3	6	7	8	9	10	13	1	2	3	5	6	7	11	12	13	16	1	2	3	4	7	8	9
André	x			x	x	x			x		x				x		x		x	x	x		x		x
Carol	x	x	x	x	x	x			x	x	x			x	x	x		x	x	x	x		x	x	
Daniel						x				x	x	x			x			x		x	x	x	x	x	x
Lucas	x			x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x
Rodolfo	x									x	x						x	x		x	x	x	x		x
	4	1	1	3	3	4	2	2	3	4	4	2	1	2	4	2	3	3	2	5	5	3	5	3	4

Das 16 ações previstas na decomposição genética apresentada na análise teórica, só 8 foram evidenciadas no caso dos sujeitos que demonstraram ter uma concepção objeto. Dessas 8, as mais presentes foram a **A1**: operar (operações binárias que definem um espaço vetorial) com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais e **A9**: eliminar de um conjunto gerador os vetores que possam ser escritos, como combinação linear dos vetores pertencentes a esse conjunto.

Dos 16 processos previstos, 10 foram evidenciados por esses sujeitos. Entre tais processos, os mais presentes foram o **P2**: reconhecer subconjuntos de um espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto desse espaço, **P3**: determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente e **P11**: dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar um espaço vetorial.

Já dos 9 objetos, apenas dois não foram evidenciados. Desses 9, os mais presentes foram o **O2**: dependência linear, **O3**: base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente, **O7**: dimensão e **O9**: base, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço vetorial.

Na página 71, apresentei que um indivíduo ao coordenar o objeto **O4**, com o processo **P6** constrói as ações **A8** e **A9**. Desta maneira, esse indivíduo ao coordenar essas ações, **A8** e **A9**, constrói o processo **P3**, em que identifica os vetores que não formam combinações lineares entre si, como sendo vetores linearmente independentes, e os que formam combinações lineares como linearmente dependentes. Por sua vez, esse processo é encapsulado no objeto **O2**.

Dos dados observados, há indícios que, assim como proposto no refinamento, um indivíduo ao coordenar as ações **A8** e **A9** constrói o processo **P3** que é, posteriormente, encapsulado no objeto **O2**. Mas, além disso, há indícios de que o indivíduo a partir desta construção poderá coordenar os objetos **O2** e **O4** e, então, construir o objeto **O3**. Na Figura 30, represento essa consideração.

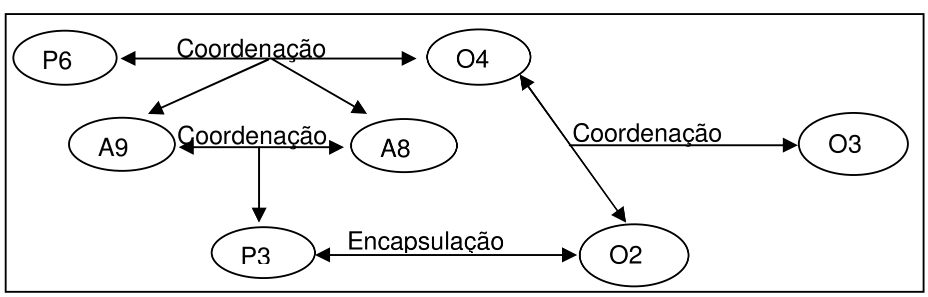


Figura 30: Construção da noção de base

Outra construção evidenciada foi apresentada na página 80, isto é, que um indivíduo ao coordenar o objeto dimensão **– O7–** com o objeto conjunto linearmente independente **– O2–**, poderá construir o objeto base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão desse espaço **– O2–**.

Desse conjunto de análises, evidencia-se a presença da noção de dimensão, sobretudo, quando incorporada ao esquema sobre base de um espaço vetorial de um indivíduo. Pois, quando isso ocorre, esse indivíduo demonstra conceber a noção de dimensão, como sendo um dos principais representantes de um espaço vetorial, o que lhe propicia a oportunidade de estabelecer correlações entre as noções elementares de Álgebra Linear.

Os dados do Quadro 12 sintetizam os processos e objetos evidenciados, durante a argumentação do sujeito que demonstrou possuir **uma concepção processo sobre a noção de base de um espaço vetorial:**

Quadro 12: Síntese dos processos e objetos evidenciados pelo sujeito

	Processo - P_i				Objeto - O_i	
Juliano	3	5	11	16	3	7

Os processos evidenciados na argumentação desse entrevistado foram **P3**: determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente; **P5**: reconhecer quais os vetores de um conjunto que são linearmente independentes, e se esse conjunto de vetores é indispensável para gerar todos os elementos de um determinado espaço vetorial; **P11**: dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar um espaço vetorial; e **P16**: sendo conhecida a dimensão de um espaço vetorial, qualquer candidato à base desse espaço, deve possuir o número de vetores, exatamente, igual à dimensão.

Há evidências que Juliano construiu o objeto base, como sendo um conjunto gerador linearmente independente e, ao incorporar a dimensão, coordena os objetos **O3** e **O7** no processo **P11**. No entanto, há indícios de que o espaço tomado na segunda situação proposta não lhe seja familiar, pois os vetores do espaço vetorial apresentado não são percebidos por ele, como sendo vetores.

Um dos entrevistados, Fernando, em suas argumentações apresentou indícios de conhecer as ações que lhe permitem construir a noção de base de um espaço vetorial, mas ele não as explicitou.

Dos outros três entrevistados, Bruno apresentou indícios de reconhecer algumas das noções elementares de Álgebra Linear, como por exemplo, combinação linear, conjunto gerador e dependência linear; no entanto, aparentou ainda construir uma concepção ação para essas noções matemáticas. Mariana e Thaís apresentaram indícios de reconhecerem alguns termos e/ou representações utilizadas em Álgebra Linear; no entanto, não construíram uma concepção ação para a noção de base de um espaço vetorial.

Como citam Laville e Dionne (1999, p.229), é o momento de “fechar o círculo, abrir novos horizontes”, sendo assim, no próximo capítulo, apresentarei as considerações finais, nas quais retomo o desenrolar desta pesquisa, destacando alguns dos pontos conclusivos evidenciados durante o texto.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

"Não existe nenhum tema que não precise de ser mais investigado; é esta crença que dá sentido à vida de investigador" (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 257)

Nesta pesquisa, o objetivo enunciado foi identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial. Esse objetivo foi fruto de reflexões sobre as questões norteadoras do estudo, a saber: Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial? Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial? Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona às noções elementares desta disciplina?

Em busca de respostas a estas questões, tomei como principal referencial teórico a APOS de Dubinsky e seus colaboradores, sobretudo, Dubinsky e Lewin (1986) e Asiala *et al.*(1996), assim como utilizei resultados de estudos que se basearam na ideia de alavanca-meta de Dorier e seus colaboradores, Dorier *et al.* (1997).

A teoria APOS foi utilizada para descrever um possível caminho para a construção da noção de base de um espaço vetorial. Essa descrição foi realizada por meio de uma decomposição genética que auxiliou a responder a primeira questão: **Qual o caminho que um indivíduo deve trilhar ao construir a noção de base de um espaço vetorial?**

Para a elaboração desta decomposição genética, diferente, do que Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) consideram, assumi que, para um estudante construir a noção de base de um espaço vetorial, ele deverá possuir uma concepção objeto sobre conjunto, subconjunto e pertinência de elemento a conjunto, além de concepção processo sobre espaço vetorial.

Com essas concepções, na decomposição genética que apresentei, descrevi a construção da noção de base de um espaço vetorial sob três pontos de vista, iluminados, sobretudo, por Dorier *et al.* (1997), Padredi (2003) e Oliveira (2005), a saber, base, como sendo um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de vetores linearmente independentes e um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, pois o estudante poderá, assim, refletir sobre a vantagem de empregar uma ou outra abordagem, dependendo da situação.

Na construção da noção de base, como sendo um conjunto minimal gerador, foi proposto que o estudante estabelecesse correlações entre as noções de: combinação linear, conjunto gerador/espaço gerado e dimensão. A noção de dependência linear aparece implícita nesta construção, pois, como citam Coelho e Lourenço (2001. P.43), "muitas vezes, é importante termos um conjunto gerador que seja o *menor* possível", tendo a ideia que o estudante, assim como cita Padredi (2003, p.49), perceba as vantagens de trabalhar com menos vetores, o que lhe propiciará "o mínimo de trabalho possível".

A construção da noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente, aparece implícita em Coelho e Lourenço (2001), nas entrevistas realizadas por Padredi (2003) e nas aulas analisadas por Oliveira (2005) e, ainda, surge da necessidade de se obter o menor conjunto gerador. Assim, busquei construir a noção de base de um espaço vetorial, segundo esse ponto de vista, iniciando pela noção de dependência linear e não pela de conjunto gerador.

Essa construção torna explícita a noção de dependência linear, para isso, retomo a discussão feita por Costa e Catarino (2007, p.155) ao tratarem da descontinuidade existente entre as noções de colinearidade e dependência linear, pois "é necessário entender como ocorre a reorganização intelectual, de modo que este novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores (colinearidade, vector, entre outros)". No entanto, não estou interessado no vetor com sua representação "geométrica", pois pode ser um obstáculo para o indivíduo, como verificou Gueudet-Chartier (2000).

Assim, com a noção de base tendo sido construída por esses dois pontos de vista, foi proposto que o estudante utilizasse o processo da *intuição* e o processo de *verificação*, ambos descritos por Dreyfus (1991), para construir a noção de base como sendo uma justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal linearmente independente, isto é, base como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Mas, ao descrever essas construções, identifiquei possíveis correlações que um estudante pode realizar entre as noções elementares de Álgebra Linear. Dentre estas correlações, um estudante, também, pode conceber base, como sendo um conjunto linearmente independente (ou gerador) com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço. Como cita Parraguez (2009), a dimensão é necessária durante a construção das noções elementares de Álgebra Linear, afinal, permitirá o estudante caracterizar um espaço vetorial.

Posteriormente, baseei-me em Bogdan e Biklen (1994) e Lüdke e André (2001) na escolha do tipo de entrevista a ser utilizada. Assim, optei por elaborar um roteiro que seguisse os moldes de uma entrevista semiestruturada. Ao todo, foram entrevistados dez estudantes. Todos participaram de um mesmo curso de extensão de Álgebra Linear que foi proposto por uma Universidade de renome em São Paulo.

A metodologia escolhida, a qualitativa, permitiu evidenciar e listar elementos que respondessem às questões de pesquisa. No entanto, na entrevista realizada com auxílio do MSN Messenger, houve perda de elementos em razão de problemas da conexão com a internet. Já, na entrevista realizada por e-mail, houve perda por não ter a oportunidade de obter esclarecimentos sobre os pontos listados pelo entrevistado. Nesta questão, ressalto a importância de o pesquisador ter estruturado seu instrumento de coleta, para que o método escolhido possa ser flexível e, assim, adaptar-se às situações que, porventura, evidenciarem no momento da coleta.

Quanto à análise das entrevistas, dentre os entrevistados, nove deles, participaram de dois cursos de Álgebra Linear, para apenas um, o curso de extensão foi o único do qual participou.

Assim, a questão: **Como os alunos, ao concluírem um curso de Álgebra Linear, concebem a noção de base de um espaço vetorial?** Pode ser respondida, com o auxílio da decomposição genética.

O único estudante que havia participado de apenas um curso de Álgebra Linear demonstrou ter construído uma concepção processo sobre a noção de base de um espaço vetorial. Dos demais, cinco demonstraram ter construído uma concepção objeto sobre a noção de base, um mostrou ter construído uma concepção ação e três, não terem construído, ao menos, uma concepção ação.

Entre os entrevistados que demonstraram não terem construído uma concepção ação para a noção de base de um espaço vetorial, há indícios de recordarem algumas das noções ou representações abordadas durante o curso de extensão. No entanto, essas noções ou representações são explicitadas de maneira fragmentada ou com generalizações indevidas. Um exemplo é o de Mariana que demonstrou recordar a representação utilizada para a base canônica ao dizer: "[...] memorizei que a base deve ser composta por zero e um [...] esse quatro e cinco...", e ainda, "normalmente, a base tinha aquela carinha de zero e um, zero e um, zero e um, entendeu? E você me mostra com outros números, será que pode?".

O estudante que demonstrou ter construído uma concepção processo para a noção de base, aparentou conceber base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes, "um conjunto LI e que, ao mesmo tempo, forma o espaço vetorial" (JULIANO). Em suas argumentações, demonstrou que utilizou processos que foram descritos na decomposição genética, assim como estabeleceu correlações entre as noções de base, conjunto gerador, vetores linearmente independentes e dimensão.

Já, dos cinco entrevistados que demonstraram ter construído uma concepção objeto sobre a noção de base, houve indícios que concebam base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Embora em um dos livros indicados para consulta durante o curso de extensão, Coelho e Lourenço (2001), o estudante ter a possibilidade de refletir sobre a noção de base como sendo um conjunto maximal linearmente independente e um conjunto minimal gerador, no curso de curso de extensão, esses pontos de vista não foram abordados. O fato pode ter refletido na concepção apresentada pelos entrevistados, pois, dois deles apresentaram essas concepções, como sendo consequência da noção de base, como sendo um conjunto gerador com vetores linearmente independentes.

Outros dois assumiram que "não existe esta questão de maior conjunto" (ANDRÉ) ou "[...] não consigo entender exatamente, o que ele estava pensando" (RODOLFO). Um dos entrevistados apresentou indícios de procurar demonstrar a validade de tais afirmações; no entanto, não conseguiu.

Isto é, mesmo os entrevistados tendo participado de dois cursos de Álgebra Linear e tendo demonstrado possuir concepções objeto sobre as noções elementares de Álgebra Linear, apresentaram indícios de não conceberem a noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente e como um conjunto minimal gerador.

A terceira questão: **Como um aluno que concluiu, pelo menos, um curso de Álgebra Linear correlaciona as noções elementares desta disciplina?** Pode também ser respondida, pois, das argumentações dos entrevistados, evidenciou-se correlações entre as noções de: combinação linear e dependência linear, “o x_3 é combinação linear de x_2 e x_1, assim, não é um conjunto linearmente independente” (LUCAS); base e dimensão, “ele utilizou o fato de ser o $\mathbb{R}^2$, e a dimensão ser dois. A dimensão do espaço vetorial é a quantidade de elementos da base...” (JULIANO); dependência linear e dimensão, “[...] se o espaço é o $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão 2, então, precisamos somente de 2 vetores linearmente independentes e não 3” (ANDRÉ); conjunto gerador e dimensão, “[...] como se está trabalhando com o $\mathbb{R}^2$, é suficiente que hajam dois vetores para gerar, três vetores já virou um conjunto gerador, mas não uma base, certo?” (LUCAS); conjunto gerador, dependência linear e base, “se dois geram, então o terceiro não deixa de gerar o $\mathbb{R}^2$, mas [...] isso transformava o conjunto em um conjunto linearmente dependente, o que não é uma base” (DANIEL).

Outra correlação evidenciada durante a análise das entrevistas foi em relação a um processo que não considerei explicitamente na decomposição genética, ou seja, o processo em que sendo conhecida a dimensão do espaço vetorial, qualquer candidato a base desse espaço deve possuir o número de vetores, exatamente, igual à dimensão. Este processo pode ser compreendido, como sendo uma condição necessária, mas não suficiente e está correlacionado à noção de dimensão construída pelo estudante.

O entrevistado que demonstrou ter construído uma concepção processo sobre base de um espaço vetorial, mostrou ter construído ações, processos e alguns objetos, pois como cita Parraguez (2009), os estudantes podem possuir concepções objetos sobre determinadas noções matemáticas, sem antes ter construído noções tidas como antecessoras.

Já os estudantes que demonstraram ter construído uma concepção objeto sobre a noção de base de um espaço vetorial, podem ser separados em dois grupos: os que estabelecem correlações entre diferentes espaços vetoriais e entre as noções elementares, no entanto, dependerá do contexto em que o problema estiver inserido, para que ele efetive tais correlações, pois, ainda podem existir algumas dificuldades. O grupo dos que demonstraram utilizar a noção de espaço vetorial de maneira coerente e estabelecer correlações entre as noções elementares e, assim como descreveu Parraguez (2009), é capaz de determinar quando a estrutura é aplicável a um problema e quando, não.

Como descrito, as escolhas teóricas e metodológicas permitiram responder às questões de pesquisa e, assim, alcançar o objetivo que foi identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial.

No entanto, durante a elaboração desta pesquisa surgiram novas questões e sugestões. A primeira questão estava relacionada à possibilidade de construir a noção de base de um espaço vetorial, iniciando pela noção de dependência linear, o que pode ter sido feito durante a construção da noção de base, como sendo um conjunto maximal linearmente independente. Já a sugestão foi utilizar a Álgebra Linear, que é um campo fértil de resultados a serem justificados, para estimular o uso de contraexemplo como ferramenta.

Outra questão, que não pôde ser verificada nesta pesquisa, está relacionada à decomposição genética apresentada, pois para confirmar os passos descritos penso ser necessário um estudo que implemente essa construção, e assim, valide ou proponha um refinamento.

Assim, espero que esta pesquisa possa contribuir com o GPEA na busca por *situações propícias para a aprendizagem de noções elementares de Álgebra Linear*, pois com base na decomposição genética apresentada pode-se implementá-la de maneira que venha propiciar estratégias pedagógicas que levem os estudantes a fazer as construções e usá-las na resolução de problemas.

Outras questões que surgiram deste estudo foram: Que concepção poderá construir um estudante de Álgebra Linear, ao serem elaboradas propostas pedagógicas que utilizem esta decomposição genética? Será possível elaborar uma proposta pedagógica, seguindo o ciclo ACE que permita fazer com que o estudante efetive as construções indicadas nesta decomposição genética? Quais adaptações, ou que refinamento seria necessário ser feito sobre a decomposição genética para estendê-la a um corpo qualquer?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Editora UFPR, 2007, 218 p.

ANDRÉ, Marli E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília: Líber Livro Editora, 2005, 68 p.

ARAÚJO, Cláudia C. V. B. **A matemática no livro didático de álgebra linear**. São Paulo, 2002. 110 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ASIALA, Mark., BROWN, Anne, DEVRIES, David. J., DUBINSKY, Ed, MATHEWS, David. e THOMAS, Karen. *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. *In:* KAPUT, J., SHOENFELD A. H. e DUBINSKY, E. (Eds) **Research in Collegiate Mathematics education**. 2. V. Editora: American Mathematical Society. 1996. p. 1-32. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em 30 mar. 2009.

BOGDAN, Roberto C. e BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução por: ALVAREZ, Maria J., SANTOS, Sara B. e BAPTISTA, Telmo. M. Portugal: Porto Editora, 1994, 336 p.

CALLIOLI, Carlos A., DOMINGUES, Hygino H. e COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 1995, p. 352.

CHEVALLARD, Yves. *<<Objets de Savoir>> et Autres Objets*. *In*: CHEVALLARD, Yves e JOHSUA, Marie-Alberte. **La Transposition Didactique: Du savoir savat au savoir enseigné**. França: La Pensée Sauvage Editions, 1991. p. 49-56.

COELHO, Flávio. U. e LOURENÇO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2001, p. 245.

COSTA, Cecília e CATARINO, Paula. *Da colinearidade no ensino secundário à dependência linear no ensino superior: Que descontinuidades?* **Quadrante***,* Portugal, v. 16, n. 1, 2007, p.147-159.

DORIER, Jean-Luc. **Analyse historique de l'emergence des concepts elementaires d'algebra lineaire**. França: Cahier de DIDIREM, v. 7, 1990. 96 p.

DORIER, Jean-Luc *et al.* **L'enseignement de l'algèbre linéaire em question.** França: La Pensée Sauvage Editions, 1997. 331 p.

DREYFUS, Tommy. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. *In:* TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

DUBINSKY, Ed e LEWIN, Philip. *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness*. *In:* **Journal of Mathematical Behavior***, 5. V., n. 1.* 1986. p. 55-92. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2009.

DUBINSKY, Ed. *Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. *In*: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 231-250.

DUBINSKY, Ed. **Some Thoughts on a First Course in Linear Algebra at the College Level**. 24 p. 1997. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2009.

DUBINSKY, Ed. **Teaching and Learning Abstract Algebra and Linear Algebra: A Unified Approach.** *In:* H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.) P*roceedings of the 12th ICMI Study Conference*, 1,2,3 v.: *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Melbourne: Melbourne University, 2001, p. 705-712.

EUÁN, Darly A. K. **Aprendizaje de la Base de un Espacio Vectorial desde el Punto de Vista de la Teoria APOE**. Distrito Federal - México, 2007. 336 p. Dissertação (Mestrado en Ciencias en Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados – CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional.

EUÁN, Darly A. K, TRIGUEROS, Maria e OKTAÇ, Asuman. *Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE.* **Educación Matemática**, México, v. 20, n.2, 2008, p.65-89.

GUEUDET-CHARTIER, Ghislaine. **Rôle Du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.** Grenoble 1 - França, 2000. 347 p. Tese (Doutorado em Didactique dês Mathematiques). Didactique Des Mathématiques, Laboratoire Leibniz- IMAG, Université Joseph Fourier.

HAREL, Guershon. *Sur Trois Principes D'aprentissage et D'enseignement: Le Cas de L'algèbre Linéaire*. *In:* DORIER, Jean-Luc *et al*. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 215-230.

JULIO, Rejane, S. **Uma Leitura da Produção de Significados Matemáticos e Não-matemáticos para "Dimensão".** Rio Claro, 2007. 118 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

LAVILLE, Christian e DIONNE, Jean. **A construção do saber: Manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas.** Tradução por: MONTEIRO, Heloísa e SETTINERI, Francisco. Belo Horizonte: UFMG, 1999, 340 p.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** 6. ed. São Paulo: Pedagógica e Universitária LTDA, 2001, 99 p.

MACHADO, Silvia. D. A. e MARTINS, José. G. **Após um primeiro curso de Álgebra Linear, como o licenciando concebe um espaço vetorial?** *In*: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003, Santos: PROEM, 1 v., p. 1-17.

MACHADO, Silvia D. A. e NOGUEIRA, Maria. T. de L. C. *A lógica elementar da matemática e o ensino superior*. **Educação Matemática Pesquisa***,* São Paulo, 7. v., n.1, 2005, p.63-80.

MACHADO, Silvia D. A., BIANCHINI, Barbara L. e MARANHÃO, Maria. C. S. de A. **GPEA's researches about the meta resources in teaching and learning the notion of basis of a vector space**. *In:* 15-TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL LINEAR ALGEBRA SOCIETY, 2008, Cancun – México, p. 40-41.

MACHADO, Silvia D. A. e BIANCHINI, Barbara L. **Noções básicas de Álgebra Linear: o que revelam as pesquisas do GPEA?** *In*: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2009, Goiás.

OLIVEIRA, Luis C. B. de **Como funcionam os recurso-meta em aula de álgebra linear?** São Paulo, 2005. 123p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).

Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PADREDI, Zoraide do N. **As “Alavancas Metas” no discurso do professor de Álgebra Linear**. São Paulo, 2003. 179 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PARRAGUEZ, Marcela G. **Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial**. Distrito Federal - México, 2009. 166 p. Tese (Doutorado en Matemática Educativa). Centro de Investigación y en Ciencia Aplicada y Tecnologia Avanzada, Instituto Politécnico Nacional.

PIAGET, Jean *et al.* **Recherches sur L' Abstraction Réfléchissante**. França: Presses Universitaires de France, 1977-a. 1. V.

PIAGET, Jean *et al.* **Recherches sur L' Abstraction Réfléchissante**. França: Presses Universitaires de France, 1977-b. 2. V.

ROGALSKI, Marc. **L'enseignement D'algebre Lineaire Experimente a Lille.** *In:* DORIER, Jean L. *et al.*; *L'enseignement de l'algèbre linéaire em question.* França: La Pensée Sauvage Editions, 1997, p. 159-184.

ROMBERG, Thomas. A. *Perspectives on Scholarship and Research Methods*. *In:* GROUWS, Douglas A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: National Council of Teachers of Mathematics – NCTM –, 1992, p. 49-64.

SFARD, Anna. *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*. **Journal Educational Studies in Mathematics**. Ed. Springer Netherlands, n.1, 22. v., p.1-36, fev. 1991. Disponível em: <httphttp://www.springerlink.com/content/j52u713714563151/>. Acesso em 14 out. 2009.

SILVA, Amarildo M. **Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática**. Rio Claro, 2003. 244 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

TRIGUEROS, Maria. *La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nível superior*. **Educación Matemática***,* México,17. v., n.1, 2005, p.5-31.

TRIGUEROS, Maria. **Teoria APOS de Dubinsky e pesquisas realizadas com esse referencial**. Seminários proferidos na PUC/SP, entre os dias 21 e 31 de out. 2008.

WELLER, K.; *et al.* **Learning Linear Algebra with ISETL.** 389p. 2002. Disponível em: <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf>. Acesso em 26 ago. 2009.

ANEXOS

ANEXO 1 – Convite para participar da entrevista

Caro colega,

Sou aluno do mestrado Acadêmico em Educação Matemática da PUC/SP.

O motivo de meu contato é que, em janeiro e fevereiro de 2009, também participei do CURSO DE EXTENSÃO de ÁLGEBRA LINEAR. Como minha pesquisa está inserida no contexto da Álgebra Linear, necessito, caso possível, marcar um horário para conversarmos sobre esta temática.

Esclareço desde já que sua participação será de grande importância para o desenvolvimento de minha dissertação.

O local e horário ficam a seu critério para que não o atrapalhe (estimo uma duração de 50 minutos). Peço que, caso haja interesse, responda a este e-mail com sua disponibilidade de dia e horário, para que possamos nos programar.

Atenciosamente,

Eneias de Almeida Prado

ANEXO 2 – Lista com as ações, processos e objetos.

As ações negritadas foram propostas por mim no refinamento ou na expansão apresentada. As sublinhadas foram propostas por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) e utilizadas por mim. Já, as demais, foram propostas por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008), mas, não consideradas no refinamento e na expansão. Para os processos e objetos, utilizo a mesma regra.

Lista de Ações

<u>A1: operar (operações binárias que definem um espaço vetorial) com vetores pertencentes a um espaço vetorial e com escalares pertencentes ao corpo dos reais.</u>

A2: verificar se um dado vetor pode ser escrito como combinação linear de outros vetores, nos termos da definição.

A3: verificar a dependência linear entre os vetores de um dado conjunto, nos termos da definição.

A4: repetir as ações A2 e A3 com vetores pertencentes a diversos espaços vetoriais.

A5: dado um conjunto de vetores, identificar dentre as possíveis combinações lineares as que produzem o vetor nulo.

A6: identificar quais seriam os subconjuntos em que existe uma única combinação linear que resulte no vetor nulo.

A7: verificar a combinação linear existente entre vetores, a partir da ação A1

A8: verificar se os vetores pertencentes ao conjunto gerador podem ser escritos como combinações lineares uns dos outros.

A9: eliminar de um conjunto gerador os vetores que possam ser escritos como combinação linear uns dos outros.

A10: identificar conjuntos minimais geradores para um mesmo espaço vetorial, e observar a existência de um invariante.

A11: verificar se os vetores são colineares (ou coplanares).

A12: obter conjuntos linearmente independentes e, observar a existência de conjuntos linearmente independentes com diferentes números de vetores.

A13: identificar para um mesmo espaço vetorial, distintos subconjuntos maximais linearmente independentes e, observar a existência de um invariante.

A14: obter um subconjunto maximal linearmente independente e verificar se esse subconjunto é um subconjunto minimal gerador.

A15: obter um subconjunto minimal gerador e verificar se esse subconjunto é maximal linearmente independente.

A16: conjecturar a existência de uma equivalência entre os objetos O5 e O6.

Lista de Processos

P1: estabelecer se um vetor dado, ou um conjunto de vetores, pertencentes a um espaço vetorial podem ser escritos como combinação linear entre vetores pertencentes a um conjunto dado.

P2: reconhecer quais os subconjuntos do espaço vetorial que podem ser gerados a partir de um dado subconjunto de vetores desse espaço.

P3: determinar a dependência linear em um conjunto.

P4: estabelecer as propriedades que permitem obter conjuntos geradores e conjuntos linearmente independentes.

P5: reconhecer quais os vetores de um conjunto que são linearmente independentes, e se esse conjunto de vetores é indispensável para gerar todos os elementos de um determinado espaço vetorial.

P6: obter um conjunto minimal gerador.

P7: obter um conjunto maximal linearmente independente.

P8: identificar um conjunto minimal gerador, como sendo um maximal linearmente independente.

P9: expressar todas as combinações lineares que podem ser obtidas a partir de um conjunto de vetores.

P10: identificar subconjuntos de vetores de um espaço vetorial que são conjuntos geradores desse espaço.

P11: dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão.

P12: dizer se um vetor pertencente ao espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) depende do outro ou não.

P13: dizer qual o maior número de vetores linearmente independentes que pode ser obtido em um determinado espaço vetorial.
P14: intuir que os objetos O5 e O6 ou são complementares, ou são equivalentes.
P15: verificar o processo P15.
P16: sendo conhecida a dimensão de um espaço vetorial, qualquer candidato à base desse espaço, deve possuir o número de vetores, exatamente, igual à dimensão.

Lista de Objetos

O1: Conjunto Gerador.
O2: Dependência Linear.
O3: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador linearmente independente.
O4: Conjunto Gerador/Espaço Gerado.
O5: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto minimal gerador.
O6: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto maximal linearmente independente.
O7: Dimensão.
O8: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto gerador com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço.
O9: Base de um espaço vetorial, como sendo um conjunto linearmente independente com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço.

ANEXO 3 – Roteiro para as entrevistas

1- Extratos da prova do dia 16_06_2009

Os vetores $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (4, 5)$ e $x_3 = \left(-1, -\frac{5}{4}\right)$ formam uma base para o $\mathbb{R}^2$. Verifique se essa afirmação é verdadeira ou falsa.

A	Verdadeira, eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$ porque são do $\mathbb{R}^2$.
B	Falsa, porque a base do $\mathbb{R}^2$ é $\{(1,0),(0,1)\}$
C	Falsa, porque tem três vetores.
D	Verdadeira porque esses vetores geram o $\mathbb{R}^2$

2- O seguinte trecho é a transcrição de uma gravação da conversa do professor com seus alunos neste semestre:

A, B, C e D são alunos e P é o professor.

A- Professor, esse conjunto $\{2, 3x, 4x^2\}$ é base do conjunto dos polinômios de grau 2?

P- (dirigindo-se à classe) O que vocês acham?

B- É sim! Porque é o maior conjunto LI (linearmente independente) de $P_2(\mathbb{R})$.

C- É. Porque é o menor conjunto de vetores que gera todo esse espaço.

A- O quê?

D- É uma base sim, pois é um conjunto de vetores linearmente independentes e gera esse espaço.

ANEXO 4 – Encartes

Os encartes correspondem: a lista com as ações, processos e objetos apresentados no decorrer da dissertação e, o roteiro que foi utilizado durante as entrevistas.

As ações negritadas foram propostas por mim no refinamento ou na expansão apresentada. As sublinhadas foram propostas por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008) e utilizadas por mim. Já, as demais, foram propostas por Euán (2007) e Euán *et al.* (2008), mas, não consideradas no refinamento e na expansão. Para os processos e objetos, utilizo a mesma regra.