

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

PATRICK OLIVEIRA DE LIMA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM SOBRE
FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

PATRICK OLIVEIRA DE LIMA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM SOBRE
FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof. Doutora Célia Maria Carolino Pires.

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Dedico este trabalho aos meus filhos Júnior e Ana Beatriz presentes de Deus em minha vida, a minha esposa Ana Paula por todo apoio, compreensão e amor, a minha querida Mãe pelo amor e incentivo durante toda minha vida e a todos que compartilharam comigo o sonho de realizar essa pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a **Deus**, por mais uma etapa vitoriosa em minha vida.

À **Profª. Drª. Célia Maria Carolino Pires**, pela excelente orientação durante toda pesquisa, mas principalmente pelo carinho, amizade e paciência, meus sinceros agradecimentos.

Ao **Prof. Dr. Luis Carlos Pais** e a **Profª. Drª. Sônia Pitta**, pela participação na qualificação com valiosas contribuições.

Aos meus amados filhos **Júnior e Ana Beatriz** pela compreensão nos momentos em que não pude estar presente por conta da pesquisa.

A minha querida **Ana Paula** pelo amor e companheirismo dedicados a mim durante esses dez anos de casamento, que seja eterno, Eu te Amo!

A minha querida mãe **Nilma**, pelo amor incondicional, meu exemplo de vida, meu porto seguro, a melhor mulher que conheço!

Ao meu padrasto “**Seu Nego**”, mais que um Pai em minha vida, um companheiro de todos os momentos.

A minha querida irmã **Mirela**, meu cunhado **Leandro** e meus sobrinhos **Lucas e Arthur**, pelo carinho e incentivo demonstrados a mim e por fazerem parte da minha vida.

A minha cunhada **Delene** pelo incentivo, carinho e pelas leituras que tanto contribuíram para o desenvolvimento dessa pesquisa.

A minha amada sogra **Nice** pelo carinho, te adoro!

A minha querida tia **Nilda e Edézio**, pelo companheirismo e carinho demonstrados a mim e em especial aos meus filhos.

A minha grande amiga irmã **Rose**, pelo apoio e carinho. Que nossa amizade seja eterna, te adoro!

Aos meus amigos **Joceli e Paulo**, pelo apoio e participação direta na realização desse trabalho. Serei eternamente grato.

Aos **alunos** que participaram da pesquisa.

Aos companheiros da **Escola Estadual Nicéia e Instituto Educacional Stagium** em especial aos meus queridos alunos que são a razão da busca de meu aprimoramento profissional.

Aos meus amigos do **Grupo de Pesquisa**, que tanto contribuíram para realização desse trabalho com suas sugestões.

Aos **professores do programa**, que sem dúvidas colaboraram para meu crescimento profissional.

A **Secretaria da Educação de São Paulo** que propiciou meu crescimento profissional através da Bolsa Mestrado.

E a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram ou torceram por mim durante essa trajetória.

MUITO OBRIGADO!

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo contribuir para a reflexão sobre um momento importante do processo de implementação curricular, ou seja, aquele que se desenvolve em sala de aula, analisando como pode se dar seu planejamento e qual a participação do professor nesse processo. Tem como fundamentação teórica os trabalhos de Simon sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), expressão que ele utiliza tanto para fazer referência ao prognóstico do professor para ensinar como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, pois a preocupação com o processo é uma constante durante a pesquisa: o interesse principal da investigação é o de evidenciar como se dá o processo de planejamento e realização do ensino, numa perspectiva construtivista de aprendizagem. A pesquisa conta com a colaboração de dois professores de Matemática de uma escola pública estadual de São Paulo e sua atuação junto a 80 alunos de ensino médio. Em nossa pesquisa desenvolvemos uma THA sobre funções logarítmicas, buscando envolver situações contextualizadas, interdisciplinares e constituídas por atividades de resolução de problemas, envolvendo aplicações em situações do cotidiano, em outras áreas de conhecimento e internas à própria Matemática. Com nosso trabalho, pretendemos contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores de forma coerente com que se pretende que seja sua prática em sala de aula, mediante uma estratégia de articulação entre teoria, prática docente e pesquisa.

Palavras-chave: Função Logarítmica. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Currículo. Ensino Médio.

ABSTRACT

This work has as objective, contribute to the reflection about an important moment in the process of curriculum implementation, in other words, the one which is developed inside of the classroom, analyzing how its plan can be done and where is the teacher related to this process.

It has as a theoretician recital the Simon's works about hypothetical trajectories of learning (HTL), expression that he uses to refer to the prognostic from teacher to teach and he uses this expression to show the way that will make the learning process possible. It is a research of qualitative features, because the concern with the process is a constant during the research: the main interest of investigation is the one to evidence how is the planning process and the education accomplishment done, in a growing perspective of learning. The research counts on the contribution of two Math teachers of a public school from São Paulo and their performance among 80 students from high school. In this research, we developed a HTL project about logarithmic functions, searching to involve contextualized situations, interdisciplinary situations and made of activities of problems resolution, involving applications on daily situations, in another knowledge areas and main for the mathematics area.

With our work, we intend to contribute to the professional development of the teachers in a consistent way that is intended to be practiced in class, by an articulation strategy between theory, teaching practice and research.

Key words: Logarithmic Functions. Hypothetical Trajectories of Learning. Curriculum. High School.

SUMÁRIO

Apresentação da Pesquisa

I. Grupo de Pesquisa em que o trabalho está inserido.....	12
II. Escolha do Tema a ser pesquisado.....	17
III. Uso de Tecnologias.....	17
IV. Questões de Pesquisa.....	19

CAPÍTULO 1

Fundamentação teórica, revisão bibliográfica e escolhas metodológicas

1.1 Introdução.....	21
1.2 As formulações de Martin Simon e de outros autores.....	22
1.2.1 Recuperando aspectos da perspectiva construtivista.....	24
1.2.2 Trajetória(s) Hipotética(s) de aprendizagem – Simon.....	27
1.2.3 O Ciclo de Ensino de Matemática – Simon.....	28
1.2.4 Composição da Trajetória Hipotética de aprendizagem.....	30
1.2.5 Outras contribuições para reflexão sobre THAs.....	33
1.2.6 Considerações e reflexões do nosso grupo de pesquisa.....	36
1.3 Algumas pesquisas referentes a investigação sobre ensino e aprendizagem de Funções Logarítmicas e uso de <i>Softwares</i> gráficos.....	38
1.4 Escolhas Metodológicas.....	49
1.4.1 Abordagem qualitativa.....	49
1.4.2 Delineamento das pesquisas.....	49
1.4.3 Procedimentos de pesquisa.....	50
1.4.4 Papel do observador.....	51

CAPÍTULO 2

Construção da Trajetória Hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas e Análise de livros didáticos

2.1 O processo de construção da THA sobre Funções Logarítmicas.....	53
2.2 Análise de alguns livros didáticos e “Caderno do Estado”.....	54

2.2.1 Como é feita a abordagem do Tema?.....	55
2.2.2 Faz abordagem histórica no trabalho com Funções Logarítmicas?.....	56
2.2.3 Existe resolução de problemas contextualizados durante o desenvolvimento do Tema?.....	57
2.2.4 Existem questões em que o aluno deve estimar ou levantar hipóteses?.....	58
2.2.5 É sugerido o uso de calculadora ou tabela de logaritmos?.....	58
2.3 Expectativas para aprendizagem dos alunos.....	61
2.4 Hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos.....	61
2.5 Apresentação das atividades com os seus objetivos.....	65

CAPÍTULO 3

A Trajetória Hipotética de aprendizagem em sala de aula e a atuação dos professores e alunos

3.1 Professores e alunos envolvidos na investigação: Caracterização.....	88
3.2 Análise da THA pelos professores e modificações sugeridas	90
3.2.1 Discussões realizadas no dia 07/08/2008.....	90
3.2.2 Discussões realizadas no dia 14/08/2008.....	93
3.3 Descrição do desenvolvimento da THA pelos professores.....	95
3.4 Avaliação do conhecimento dos alunos após aplicação da THA.....	138
3.5 Algumas categorias de descrição e análise.....	147
3.5.1 Primeiro contato dos professores e alunos com o projeto.....	147
3.5.2 Clima dominante nas aulas e combinados com os alunos.....	148
3.5.3 A diferença de experiência no magistério existente entre os professores foi fator de distinção na aplicação?.....	149
3.5.4 Interesse dos alunos pelas atividades.....	150
3.5.5 Principais dificuldades observadas e possíveis causas.....	151
3.5.6 Interação Professor X Aluno e intervenções durante a aplicação das atividades.....	153
3.5.7 Adequação do tempo para aplicação da THA.....	154
3.5.8 Opinião dos alunos a respeito das atividades da THA.....	154

CAPÍTULO 4

Conhecimentos, reflexões e as indicações de mudanças para 3ª versão da THA	
4.1 Conhecimentos e reflexões dos professores colaboradores.....	156
4.2 Conhecimentos e reflexões do professor pesquisador.....	158
4.3 Reflexões e Indicações para mudanças na THA.....	159
4.3.1 Terceira versão da THA.....	161
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	186
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	191
ANEXOS	
Anexo A – Roteiro inicial para entrevista com professores participantes da pesquisa	195
Anexo B – Material utilizado pelo aluno durante o desenvolvimento da THA.....	196
Anexo C – Avaliação Parte I.....	212
Anexo D – Avaliação Parte II.....	213

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

I – Grupo de Pesquisa em que o trabalho está inserido

Nosso trabalho faz parte de um conjunto de pesquisas que têm como objetivo analisar como podem ser organizadas e desenvolvidas propostas didáticas em sala de aula, que explorem contextos do cotidiano, de outras áreas de conhecimento e da própria Matemática, objetivando sempre à construção de algumas expectativas de aprendizagem.

O projeto em que se insere nossa investigação denomina-se “Construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio” e faz parte do grupo de pesquisa “Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores”.

O projeto engloba pesquisas de mestrado e doutorado que se orientam por algumas referências teóricas comuns, sendo o objetivo das dissertações de mestrado construir, discutir e avaliar, para diferentes expectativas de aprendizagem do Ensino Médio, trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA), que consistem de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas que serão usadas para promover a aprendizagem dos estudantes e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, segundo Simon (1995). Essas THA procuram envolver resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares e aplicações de conceitos e procedimentos matemáticos a situações do cotidiano e em outras áreas de conhecimento, conforme prescrições curriculares atuais.

O objetivo das teses de doutorado desenvolvidas no grupo é o de elaborar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de Matemática, tais como: contextualização, interdisciplinaridade, eleição de critérios de avaliação de currículos, polarização entre aplicações práticas e especulações teóricas, caracterização histórica dos currículos de Matemática.

O interesse pela temática está ligado ao fato de que, desde 1998, a discussão curricular no Brasil está em pauta, estimulada especialmente pelo processo desencadeado pelo Conselho Nacional de Educação e pelo Ministério da Educação, por meio das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNEM).

As Diretrizes propõem que o currículo para o Ensino Médio seja organizado a partir de três áreas do conhecimento: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias; Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias.

No entanto, segundo Pires (2008), essa proposição, potencialmente rica no sentido de apontar para as conexões entre diferentes campos do conhecimento, com destaque para a abordagem interdisciplinar, precisa ser implementada com muita clareza para que a especificidade e a contribuição de cada um desses campos não se percam.

Outra idéia central é a que destaca a importância de exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas. Esta perspectiva de trabalho, embora tenha apoio teórico e uma gama considerável de experiências, é ainda pouco conhecida pela maioria dos professores, que tiveram uma formação exatamente na direção oposta.

Os PCNEM enfatizam que o papel da Matemática no Ensino Médio não é apenas formativo (que ajuda a estruturar o raciocínio dedutivo) ou instrumental (ferramenta que auxilia em todas as atividades humanas), mas que ela também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. Nesse sentido, o documento destaca a importância de o aluno perceber que definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Propõem ainda que cabe apresentar ao aluno o conhecimento matemático de modo que ele possa buscar novas informações e instrumentos necessários para que seja possível continuar aprendendo. Essas diferentes funções da Matemática devem ser discutidas e estimuladas para que sejam equilibradamente trabalhadas.

Além da seleção de conteúdos, outro ponto fundamental para discussão refere-se à sua organização. Tradicionalmente, a organização é linear, guiada por pré-requisitos internos que dificultam uma abordagem interdisciplinar. Além disso, há uma tradição de organização em que um dado tema é visto uma única vez, extensivamente.

Autores como Machado (1994) e Pires (2000) referem-se à organização curricular em rede. Para esses autores os caminhos percorridos, embora lineares, não devem ser vistos como os únicos possíveis; um percurso pode incluir tantos pontos quanto desejamos e, em particular, todos os pontos da rede. Desse modo, não existe um caminho logicamente necessário. Pires define:

Tal perspectiva implica que o processo de construção de um currículo só pode ser um processo em constante construção e renegociação, que leve em conta o princípio de metamorfose das redes. Ou seja, decisões e ações podem permanecer estáveis durante um certo tempo, mas esta estabilidade deve ser fruto de um trabalho pedagógico constantemente avaliado. Além disso ele subentende antecipação, isto é, referência ao futuro, e dimensionamento claro das possibilidades (PIRES, 2004, p. 75).

Outro aspecto que merece atenção são os chamados conteúdos atitudinais. Integrando o currículo, com o mesmo peso que os conceitos e os procedimentos, o desenvolvimento de valores e atitudes é fundamental para que o aluno aprenda a aprender. Omitir ou descuidar do trabalho com esse aspecto da formação pode impedir a aprendizagem inclusive da própria Matemática. Entre esses valores e atitudes, podemos destacar a iniciativa na busca de informações, a responsabilidade com sua aprendizagem, a confiança em suas formas de pensar, a valorização de fundamentar suas idéias e argumentações. A questão dos professores é: como fazer isso?

Em diferentes congressos, seminários, simpósios, grupos de pesquisa,¹ são apontados problemas a serem enfrentados no processo de

¹ No III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), ocorrido em outubro de 2006, em águas de Lindóia (SP), um dos grupos de trabalho intitulado “Educação

implementações de inovações curriculares para o Ensino Médio; entre esses problemas os mais freqüentemente destacados referem-se à predominância de uma prática de organização curricular em que os objetivos, os conteúdos, a metodologia e a avaliação aparecem desarticulados dificultando o trabalho do professor.

Há ainda o problema da falta de diálogo entre as instituições formadoras de professores (cursos de licenciatura) e o distanciamento entre elas e as escolas dos sistemas de ensino da educação básica. Geralmente, na formação inicial e continuada de professores não se consideram as especificidades próprias dos níveis e/ou modalidades de ensino em que são atendidos os alunos da educação básica (como o Ensino Médio). Há também problemas concernentes à desarticulação entre conhecimentos específicos e conhecimentos pedagógicos, assim como entre teoria e prática. Ressente-se a não-incorporação nos cursos das discussões e dos dados de pesquisas tanto da área da Educação como da área dos conhecimentos específicos.

Por outro lado, ao longo de sua formação, os futuros professores são expostos a uma prática em que se revela uma concepção de professor, exclusivamente como aquele que transmite/repassa conteúdos veiculados por livros-textos e outras fontes de informação. Em decorrência, o futuro professor vivencia como aluno situações em que “aluno” é agente passivo e individual no processo de aprendizagem.

Em função dessas constatações, justifica-se a proposição de projetos de pesquisa que envolvam mestrandos, doutorandos e professores de Ensino Médio, no sentido de constituir possibilidades de implementações de propostas de ensino mais condizentes com pressupostos curriculares inovadores.

Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio” discutiu sobre o assunto e encaminhou proposta para que fosse criado o subgrupo “Organização e Desenvolvimento Curricular”, coordenado pelas professoras doutoras Célia Maria Carolino Pires (PUC/SP) e Cláudia Lisete Groenwald (ULBRA/RS). Já no IX Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), realizado em julho de 2007, na cidade de Belo Horizonte, o assunto foi discutido em uma mesa redonda intitulada “O Currículo de Matemática na Educação Básica”.

II - A escolha do tema a ser pesquisado

Nossa participação no grupo se configura pela construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre o tema função logarítmica.

A escolha desse tema se deve ao fato de se tratar de um assunto que é abordado no Ensino Médio como um subitem do tópico funções, mas que ainda é desenvolvido de modo geral, mediante a apresentação de definições, propriedades, roteiro de construção de gráficos e exercícios ou, ainda pior, segundo os professores participantes da pesquisa, esse tópico é deixado de lado quando o tempo não é suficiente para trabalhar todos os conteúdos, e, nesse caso, os alunos passam pelo Ensino Médio sem trabalhar a função logarítmica. Geralmente, esse estudo quando é realizado não revela a ligação com acontecimentos naturais e sociais, nem as características matemáticas do chamado “crescimento logarítmico”.

Desta forma, temos como propósito elaborar uma THA que envolva situações contextualizadas, interdisciplinares e de construção por meio de atividades e resolução de problemas para que o aluno possa aplicar seu conhecimento em situações do cotidiano, em outras áreas de conhecimento e internas à própria matemática.

Além disso, visamos contribuir para o desenvolvimento profissional dos professores de forma coerente com que se pretende que seja sua prática em sala de aula, mediante uma estratégia de articulação entre teoria, prática docente e pesquisa.

III - Uso de tecnologias

O uso de tecnologias na educação vem se tornando muito comum entre os professores, apesar de inúmeras críticas de parte da sociedade, entre elas, alguns pais quando se fala no uso de calculadoras. No entanto, segundo os PCN, a escrita, a leitura, a visão, a audição, a criação e a aprendizagem, por exemplo, são cada vez mais influenciados pela informática. Nessa perspectiva, cabe à escola o desafio de incorporar essas novas tecnologias à sua prática de ensino de modo que venham colaborar com o processo de ensino aprendizagem. Para os PCN:

As tecnologias em suas diferentes formas de uso, constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas (PCNEF – 1998, p. 43).

Gracias e Borba (1998) relatam que nunca houve projetos educacionais que incorporassem as calculadoras por longos períodos, o que provocou dois tipos de opiniões a respeito do uso dessa tecnologia no ensino e que permanecem até os dias atuais. A primeira que considera a calculadora um instrumento de grande valor e de fácil aquisição, e a segunda que reputa a máquina como algo que cria dependência e reduz a capacidade de cálculo dos estudantes.

Karrer (1999), após verificar inúmeros trabalhos sobre o tema, concluiu que essas pesquisas:

[...] denotam claramente que tais instrumentos permitiram explorar aspectos do conteúdo que não seriam possíveis através da abordagem tradicional. Não se trata apenas de desenvolver um ensino mais atual, mas, sim, garantir ao aluno um ambiente propício investigar, conjecturar e verificar suas hipóteses de maneira prática eficiente e rápida (KARRER, 1999, p. 46).

Para nós, o uso de tecnologias no ensino, em especial calculadoras e *softwares* gráficos – pois serão utilizados em nossa trajetória –, pode servir como laboratório aos estudantes. Com esses instrumentos, eles podem realizar experiências, desenvolver suas idéias, levantar suas hipóteses sobre o tema e usar suas próprias estratégias matemáticas. Professor e aluno poderão se envolver num diálogo sobre a natureza do fenômeno em estudo sem se preocupar com cálculos e construções gráficas manuais, complexas e trabalhosas de realizar.

IV - Questões de pesquisa

Estudando o tema “funções logarítmicas”, buscaremos responder às seguintes questões:

- a) Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, no caso particular das funções logarítmicas?
- b) Como podem ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem, que explorem contextos do cotidiano de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática?
- c) Que atuação pode ter um professor de Matemática ao abordar o tema funções logarítmicas, quando se pretende que os alunos sejam protagonistas na construção de suas aprendizagens?

Estrutura do trabalho

Organizamos nosso trabalho em quatro capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos a fundamentação teórica que orienta esta pesquisa, as escolhas metodológicas que serão utilizadas em nosso trabalho e pesquisas que abordam o ensino e aprendizagem sobre o tema funções logarítmicas, que tanto nos auxiliou na elaboração da THA.

No segundo capítulo, trazemos o processo de construção da THA juntamente com os objetivos e hipóteses do professor pesquisador no processo de aprendizagem dos alunos sobre o objeto de estudo, bem como a primeira versão da THA elaborada pelo professor-pesquisador.

No terceiro capítulo, apresentamos a caracterização dos professores e alunos envolvidos no projeto, a análise da THA realizada pelos professores colaboradores com as modificações sugeridas por eles (segunda versão da THA) e o desenvolvimento da THA pelos professores colaboradores em sala de aula em forma de relatórios diários de aplicação, além da avaliação do conhecimento dos estudantes após o desenvolvimento das etapas da THA.

No quarto capítulo, expomos as observações, conhecimentos e reflexões do professor pesquisador e dos professores colaboradores, os

aspectos positivos e negativos estão presentes nesse capítulo, frutos do desenvolvimento da THA. Ademais, apontamos indicações para mudanças na THA, e uma terceira versão é elaborada pelo pesquisador a partir desses apontamentos com participação direta dos professores.

Por fim, apresentamos as conclusões pertinentes às atividades desenvolvidas junto aos professores e seus alunos, como os professores se apropriaram da THA e quais foram os diferentes caminhos tomados por diferentes profissionais, destacando as interações ocorridas dentro da sala de aula e que subsidiaram as indicações de mudanças na THA, bem com o relato do processo de aplicação desta.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA, ESCOLHAS METODOLÓGICAS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introdução

Neste capítulo, inicialmente analisamos formulações de Martin Simon (1995), que retoma aspectos da perspectiva construtivista de aprendizagem para apresentar a(s) Trajetória(s) Hipotética(s) de Aprendizagem (THAs). Discutimos ainda outras contribuições para a reflexão sobre THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação de professores. Para essas reflexões foram importantes os estudos realizados no grupo de pesquisa em que foram discutidos textos de autores como Doll e Bishop² e, em particular, Simon, Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez³.

Temos ainda como referência o artigo de Pires (2008), Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon, em que a autora faz referência ao nosso grupo de pesquisa e aos textos de Martin A. Simon, da Pennsylvania State University, de 1995, e ao de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez, de 2007, traduzidos internamente pelo grupo e que foram de grande importância para nossas reflexões.

Apresentamos algumas contribuições da dissertação de mestrado de Mônica Karrer (1999), que elaborou uma seqüência de ensino sobre o tema logaritmo e que foi fundamental para a construção de hipóteses de aprendizagem sobre o tema.

² Que apoiaram as reflexões do grupo sobre currículos.

³ Que subsidiaram as reflexões sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

1.2 As formulações de Martin Simon

Pires (2008) destaca que “não é exagero afirmar que debate e pesquisa sobre questões curriculares ainda não são uma tradição na comunidade de educadores matemáticos brasileiros”.

Fazemos tal avaliação com base na experiência de termos participado da equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais, quando analisamos pareceres advindos de docentes e pesquisadores de universidades de todo o país. Naquela oportunidade, observamos que as discussões se concentraram no problema da centralização *versus* descentralização das decisões sobre currículos e na necessidade e/ou adequação da existência de currículos prescritivos – em especial no âmbito nacional.

Para essa autora, são poucas as fontes teóricas no campo específico da organização e desenvolvimento curricular em Matemática:

Nas investigações que conduzimos no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, inicialmente nos apoiamos em trabalhos como os de Bishop (1991) e Doll (1997), que apresentam alguns princípios orientadores, os quais podem sustentar a construção de critérios de avaliação – autores estes que ainda são pouco discutidos entre nós.

Referindo-se às reflexões dentro do nosso grupo de pesquisa, Pires (2008) comenta que “é bastante freqüente certo desconforto quanto à discussão sobre ‘currículo’ – entendido como planejamento de uma trajetória a ser realizada por alunos, seja ao longo da educação básica ou durante o ensino superior”.

Na seqüência, Pires inicia o diálogo com Simon (1995), destacando que para ele “o construtivismo epistemológico tem sido fonte de pesquisas no ensino da Matemática e tem oferecido uma base para recentes esforços de uma reforma na Educação Matemática”. No entanto, ele considera que, embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da

Matemática, é necessário formular formas de ensino baseadas no construtivismo⁴.

Pires destaca que Simon “discute a tensão criativa entre a meta dos professores para o ensino e o compromisso de ser sensível ao pensamento matemático dos seus alunos”. Ela informa que o autor inclui em suas reflexões alguns outros temas, a saber:

a) as atividades de ensino estruturadas e implementas, tendo como ponto central a consideração do pensamento/entendimento dos alunos; b) o planejamento do ensino, gerado a partir de uma trajetória hipotética de aprendizagem dos alunos; c) a formação continuada dos professores, apoiada em reflexões sobre trajetórias hipotéticas de aprendizagem de seus alunos, num processo de permanente elaboração.

Simon ressalta que a perspectiva construtivista no ensino tem sido foco para muitos dos estudos empíricos e referenciais teóricos na Educação Matemática e que, como resultado, tem contribuído para inovações nas reformas do ensino da Matemática, como é o caso, nos Estados Unidos, das proposições do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM).

Pires ressalta que, no entender de Simon:

[...] embora o construtivismo tenha apresentado aos professores de Matemática caminhos proveitosos para o entendimento de como se processam as aprendizagens, a tarefa da reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática” baseada na visão construtivista é um desafio considerável, no qual a comunidade de Educação Matemática tem apenas começado a trabalhar. Na opinião de Simon, o construtivismo pode contribuir com importantes caminhos para o ensino da Matemática em sala de aula, embora não estipule um modelo particular.

Pires prossegue explicitando:

Ao referir-se à “Pedagogia da Matemática”, Simon explica que o termo pedagogia tem a intenção de significar todas as

⁴ Os dados apresentados no artigo de Simon foram coletados dentro de uma sala de aula experimental, de 25 alunos, em que o pesquisador acompanhou um professor de Matemática em tarefas sobre a construção do conceito de área; a partir da análise dos dados coletados, trabalhou numa fundamentação teórica visando à formulação de uma pedagogia da Matemática.

contribuições para a educação matemática na sala de aula. Dessa maneira, o autor inclui não apenas um trabalho multifacetado do professor, mas também o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino. Assim, o foco específico de seu trabalho está na tomada de decisão a respeito de conteúdos matemáticos e nas tarefas de ensino da Matemática em sala de aula.

Para expor sua proposta de Ciclo de Ensino de Matemática e de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem que serão definidos nas próximas páginas, Simon busca situar sua posição em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre construtivismo e pedagogia da Matemática, que resumiremos nos dois próximos itens.

1.2.1 Recuperando aspectos da perspectiva construtivista

Segundo Pires, um ponto importante no texto de Simon é a recuperação de aspectos da perspectiva construtivista. Para Simon, o interesse na difusão do construtivismo entre teóricos da Educação Matemática, pesquisadores e praticantes tem moldado o discurso para diferentes pretensões do construtivismo.

De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Conseqüentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada (SIMON, 1995, p. 4).

Do ponto de vista de Simon, a maior parte das informações que dividem os recentes debates epistemológicos sobre o conhecimento são, fundamentalmente, as que o identificam como um processo social e as que o tomam como um processo cognitivo.

A posição radical do construtivismo focaliza a construção individual para obter, desse modo, uma perspectiva cognitiva ou uma perspectiva psicológica. Embora a interação social seja vista como um contexto importante para o conhecimento, o foco está na reorganização cognitiva individual. Em contrapartida, a epistemologia com orientação sociocultural vê a construção mental como um processo socialmente determinado; o conhecimento individual origina-se da dimensão social. Para a perspectiva social, o conhecimento localiza-se na

cultura, insere-se num sistema – que é maior que a soma de suas partes.

Simon insiste que sua posição evita qualquer extremo e relata que a coordenação das duas perspectivas construtivistas é necessária para entender a aprendizagem em sala de aula. Ela não está somente no social ou na dimensão cognitiva, mas, preferencialmente, na combinação da análise dessas duas perspectivas.

Simon formula uma analogia à luz das teorias psíquicas:

Nenhuma teoria em particular acena um enfoque suficiente para caracterizar dados psíquicos. Porém cada teoria tem construído uma contribuição significativa para basear teoricamente a pesquisa; considerando ser um enfoque particular e considerando ser um enfoque que acena também para cada teoria em particular, coordena a descoberta que se origina de cada perspectiva moldada para avanços neste campo (SIMON, 1995, p. 6).

Do mesmo modo, para esse autor, a organização do desenvolvimento do conhecimento em sala de aula parece uma análise particular coordenada, baseada em perspectivas psicológicas (cognitivas) e sociológicas. A análise psicológica da aprendizagem da Matemática em sala de aula foca-se no conhecimento individual sobre a Matemática, seu entendimento para o outro e seu senso de funcionamento na aula de Matemática. A análise sociológica toma como ponto de partida o conhecimento e as normas sociais da sala de aula. As “normas sociais” referem-se àquilo que está entendido como a construção do conhecimento com efetiva participação dos alunos nas aulas de Matemática. Incluem também as expectativas que os membros da comunidade têm sobre professores e alunos, os conceitos dos meios empregados para a elaboração da aula de Matemática e o caminho utilizado para validar a aula de Matemática.

Para Simon, é proveitoso ter uma visão da Matemática como uma atividade cognitiva apreendida por processos culturais e sociais e como fenômenos sociais e culturais constituídos por uma comunidade altamente conscientizada.

No entender de Simon, a aprendizagem é vista como um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de

um trabalho estruturado – na qual se entende a aprendizagem dos alunos. Compreender o desenvolvimento da aprendizagem é extremamente útil e tal fato leva à questão de como o construtivismo poderia contribuir para a reconstrução de uma Pedagogia da Matemática.

Simon novamente faz referência a autores como Wood, Cobb e Yackel para os quais os professores devem ter como finalidade a construção de uma prática que capacite seus alunos a percorrerem o caminho da aprendizagem matemática. Este é o desafio fundamental que deve fascinar os professores de Matemática, o que implica a necessidade de reconstruir meios para fazer conhecer a Matemática na escola e, desse modo, meios para ensinar Matemática.

Simon pondera mais uma vez que, se o construtivismo é uma teoria epistemológica, ela não define uma orientação particular de ensino. O desenvolvimento do conhecimento está presente no professor ou no ensino realizado. Não existe uma simples função que mapeie a metodologia de ensino dentro de princípios construtivistas. *Ou seja: o construtivismo epistemológico não determina a apropriação ou inapropriação de estratégias de ensino.*

Para Bauertied, citado por Simon, a construção cognitiva, de natureza essencialmente humana, e a processual emergente dos temas, regularidades e normas entrecruzando Matemática, interação social – para trazer a cognição e o social juntos –, não podem ser construídas *com simples sumários prescritivos de ensino*. Assim, não há referências a respeito da operacionalização de uma perspectiva construtivista social, sem contradizê-la. Comumente é usada a denominação “ensino construtivista”. No entanto, o construtivismo não oferece uma noção de como resolver os problemas de ensino ou de como efetivá-lo.

Simon propõe que, para uma perspectiva teórica, a questão que necessita de atenção é a seguinte: “Em que o construtivismo contribui para o desenvolvimento de um proveitoso trabalho teórico estruturado pela Pedagogia da Matemática?”.

Pires destaca sua concordância com Simon, quando ele considera excessivamente simplista aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção de “deixar os alunos sozinhos e eles construirão seu conhecimento matemático”. Ou então: “Colocar alunos em grupos e deixá-los

socializar o modo como eles resolvem seus problemas”. E lembra que nas experiências educacionais brasileiras idéias como estas foram veiculadas de forma maciça e ocasionaram grandes problemas no que se refere ao papel do ensino e do professor.

Simon conta que em sua experiência com alunos perguntava-se: “Como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos? O autor conclui que, nessas experiências com alunos, ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades – e que conduzem à formulação da idéia de trajetórias hipotéticas de aprendizagem.

1.2.2 Trajetória(s) hipotética(s) de aprendizagem segundo Simon

Simon defende a idéia de que a consideração do objetivo da aprendizagem, as atividades de aprendizagem, pensamento e conhecimento dos estudantes são elementos importantes na construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem – parte-chave do que ele denomina Ciclo de Ensino de Matemática.

No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além das hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm, por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos a respeito de um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ou da própria experiência docente.

Durante o desenvolvimento de atividades pelos professores, um objetivo inicial planejado, geralmente, deveria ser modificado muitas vezes (talvez continuamente), durante o estudo de um conceito matemático particular. Quando os alunos começam a comprometer-se com as atividades planejadas, os professores deveriam “comunicar-se” com as observações dos alunos, nas quais eles formatam novas idéias sobre esse conceito. Assim, o ambiente de

aprendizagem envolveria resultados da interação entre o professor e os alunos e o modo como eles se engajam em um conteúdo matemático.

Simon refere-se a um comentário de Steffe (2004): um professor pode propor uma tarefa; contudo, *como* os alunos constroem suas tarefas e suas experiências é que vai determinar seu potencial de aprendizagem. Assim, por exemplo, se um aluno dá uma resposta a um problema elaborado pelo professor e, no entendimento do professor, não foi uma compreensão adequada sobre conceitos ou procedimentos envolvidos, isso deve resultar em um novo objetivo de ensino sobre o assunto. Este objetivo, temporariamente, substitui o original.

Simon afirma que, em suas experiências, a discussão na sala de aula o impulsionou a reexaminar diversos conhecimentos para favorecer a elaboração do seu “mapa conceitual” e destaca que o termo “mapa”, neste contexto, é usado para enfatizar que o conhecimento do professor serve como um mapa que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem.

Simon ressalta que aquilo que foi observando em relação aos alunos mudou sua perspectiva sobre o conhecimento dos alunos e quanto à concepção matemática envolvida (seu mapa interno). Esta reorganização de perspectivas contribuiu para a modificação de seus objetivos, planos para atividades de ensino/aprendizagem que ele havia elaborado anteriormente.

1.2.3 O Ciclo de Ensino de Matemática segundo Simon

A análise do episódio de ensino vivenciado por Simon contribuiu para o desenvolvimento do Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1), como um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento, tomada de decisões e atitudes do professor.

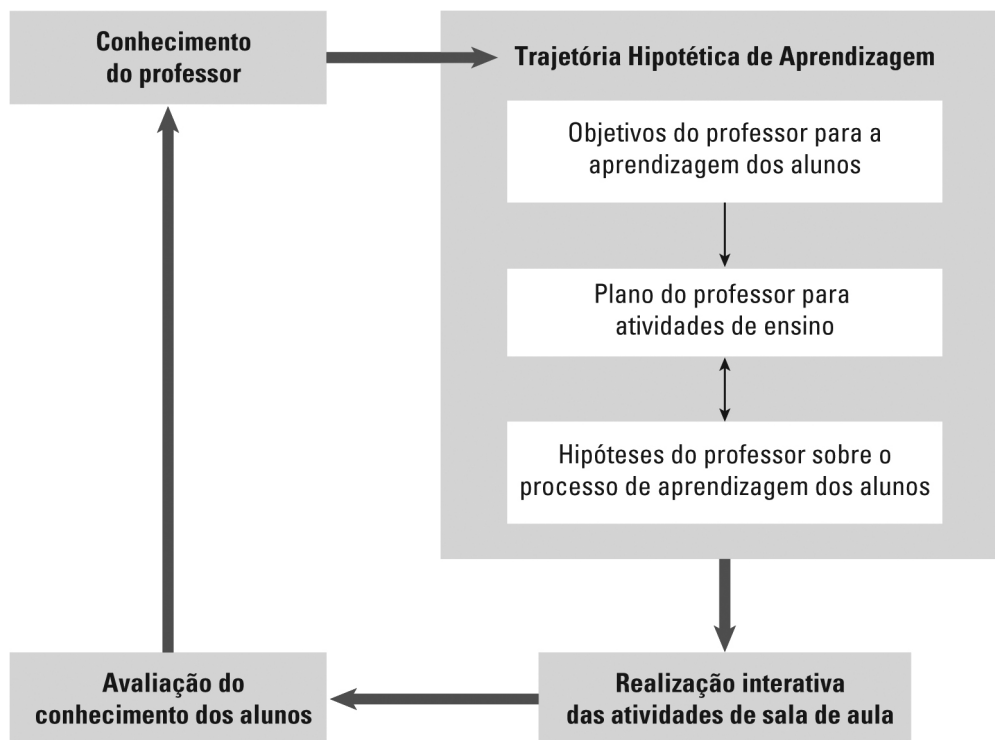


Figura 1: Ciclo de Ensino de Matemática abreviado (SIMON, 1995).

Simon refere-se a *hipóteses* sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que não temos acesso direto ao conhecimento deles. E destaca:

Como professor, minha concepção do conhecimento matemático dos alunos está estruturada pelo meu conhecimento da Matemática em questão. Convenientemente, o que observei no gosto pelo pensamento matemático dos alunos e meu entendimento das idéias matemáticas envolveram interconexões. Estes dois fatos são interessantes na esfera do ensino do professor (SIMON, 1995, p. 29).

E faz uma referência a Stefe (2004) para o qual, usando seu próprio conhecimento matemático, os professores de Matemática devem interpretar a linguagem e as ações dos seus alunos e tomar decisões sobre possíveis conhecimentos matemáticos destes e sua possibilidade de aprendizagem. Para Simon, a meta estabelecida pelo professor para aprendizagem de seus alunos é que possibilita uma direção para uma trajetória hipotética de aprendizagem:

Usaremos o termo trajetória hipotética de aprendizagem tanto para fazer referência ao prognóstico do professor, como para o caminho que possibilitará o processamento da aprendizagem. É hipotética porque caracteriza a propensão a uma expectativa.

O conhecimento individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora freqüentemente em caminhos similares. O conhecimento do indivíduo tem alguma regularidade (cf. Steffe, Von Glaserfeld, Richards e Cobb, 1983), que em sala de aula adquire com atividades matemáticas freqüentes em métodos prognósticos, e que muitos dos alunos em uma mesma sala de aula podem se beneficiar das mesmas tarefas matemáticas (SIMON, 1995, p. 34).

Para Simon, a trajetória hipotética de aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores suposições de como o conhecimento poderia ser processado.

1.2.4 Composição da trajetória hipotética de aprendizagem, segundo Simon

Uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) é composta por três elementos:

1. o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
2. as atividades de ensino;
3. o processamento hipotético de aprendizagem segundo o professor (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades).

A criação das possibilidades de modificações da trajetória hipotética de aprendizagem é a parte central do modelo abaixo diagramado.

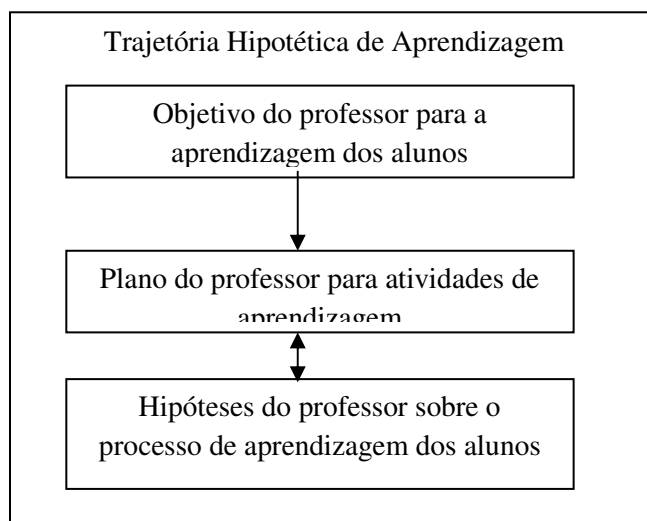


Figura 2: Parte do Ciclo de Ensino de Matemática (SIMON, 1995).

A noção da trajetória hipotética de aprendizagem, para Simon, pressupõe a importância da relação entre a meta pretendida e o raciocínio sobre decisões de ensino e a hipótese sobre esse percurso. Para ele, o desenvolvimento de um processo hipotético de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades dessa aprendizagem têm uma relação simbólica. A geração de idéias para atividades de aprendizagem é subordinada à hipótese do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e aprendizagem de seus alunos. A escolha da palavra “trajetória” é significativa para designar um caminho. Simon convida a uma analogia:

Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética” (SIMON, 1995, p. 35).

Pires explica que para Simon (1995) a geração de uma THA prioriza buscar a forma pela qual o professor desenvolve seu planejamento em atividades de sala de aula, mas também ajuda a identificar como o professor interage com as observações dos alunos, coletivamente, constituindo uma experiência e construindo novos conhecimentos.

Esta experiência pela essência da sua construção social é diferente das primeiras antecipações dos professores. Simultaneamente ocorre uma construção social de atividades em sala de aula e a modificação das idéias e conhecimento do professor, que ele vai construir em função do que está acontecendo ou do que aconteceu na sala de aula (SIMON, 1995, p. 36).

O diagrama da figura 1, mostrado anteriormente, indica que a avaliação do pensamento do aluno (com constantes idas no modelo de ensino apresentado) pode trazer muitas adaptações a respeito de qualquer conhecimento do professor, o que possibilita uma nova ou modificada trajetória hipotética de aprendizagem.

Simon destaca a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem e as interações com os alunos (figura 2). O conhecimento matemático do professor contribui para a identificação de um objetivo de ensino. Estes domínios de conhecimento, a meta de ensino e o conhecimento da representação das atividades matemáticas para o professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem individual do aluno, bem como a concepção de aprendizagem e ensino (ambos em geral dentro da Matemática), contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e processos de aprendizagens hipotéticas.

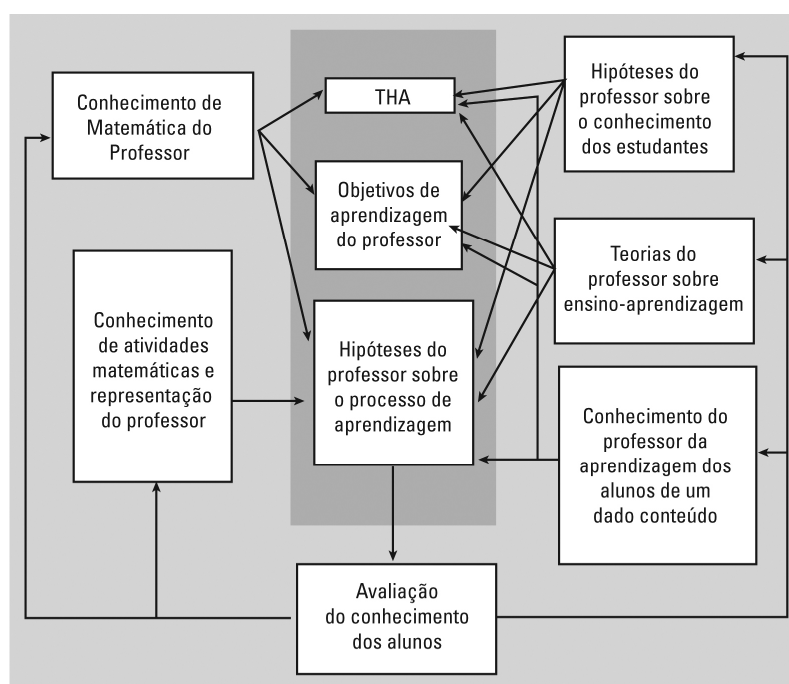


Figura 3: Ciclo de Ensino de Matemática e domínios de conhecimento do professor (SIMON, 1995).

Simon sustenta ainda que a modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é alguma coisa que somente ocorre durante o planejamento entre aulas.

O professor está constantemente comprometido em ajustar a trajetória de aprendizagem que “hipotetizou”, para melhor refletir seu aumento de conhecimento. Ele está constantemente percebendo a extensão das modificações e transformações que podem ser construídas por algum ou todos os componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o método, as atividades e o processamento hipotético da aprendizagem.

1.2.5 Outras contribuições para a reflexão sobre THAs

No artigo de Pedro Gómez e José Luis Lupiáñez, de 2007, intitulado *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*, os autores fazem uma análise sobre o interesse de diferentes pesquisadores sobre a noção de THAs, especialmente no que se refere ao processo de formação inicial de professores.

Os autores começam destacando que o interesse pelas THAs foi reconhecido com a publicação de um número de *Mathematics Thinking and Learning*, dedicado à sua discussão (CLEMENTS Y SARAMA, 2004). Steffe ressalta a relevância desta noção dentro da Educação Matemática da seguinte forma:

A construção de THAs dos alunos é um dos desafios mais urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais apaixonantes, pois é ali onde podemos construir nossa compreensão da matemática dos alunos e, de que forma, nós professores, podemos influir nessa matemática (apud GOMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2004, p. 130).

Não obstante, revelam, mesmo que os diversos investigadores reconheçam os três elementos centrais da THA (objetivos de aprendizagem, tarefas matemáticas e hipóteses sobre o processo de aprendizagem) e aceitem os quatro pressupostos mencionados anteriormente, cada um interpreta e usa a noção com propósitos e maneiras distintos. Para Gomez e Lupiáñez são perceptíveis dois usos claramente diferenciados: ferramenta de investigação e ferramenta para planejamento.

Os trabalhos de Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) e Clements, Wilson e Sarama (2004) são trabalhos essencialmente de investigação nos quais se explora a THA para temas específicos. Por outro lado, os trabalhos de Gravemeijer (2004) e Simon e Tzur (2004), mesmo explorando também THA, preocupam-se com maior ênfase por seu uso no planejamento do professor. Finalmente, o trabalho de Batista (2004) centra-se na avaliação (GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007, p. 81).

Gómez e Lupiáñez apontam que em todos os trabalhos se desenvolveram exemplos de THA em temas específicos. Para tanto, os investigadores assumiram o papel de professores em aulas reais.

Mesmo que haja professores que participam de alguns projetos, não são eles que produzem os resultados das explorações. De fato, alguns destes trabalhos, como o de Steffe (2004) e de Gravemeijer (2004), vêem a construção de THAs como um trabalho do investigador, cujos resultados podem apoiar o trabalho do professor (GÓMEZ Y LUPIÁÑEZ, 2007, p. 82).

E destacam que uma das principais diferenças de interpretação da noção entre esses investigadores tem a ver com o nível de concretização com que a utilizam: desde o planejamento de várias aulas até o trabalho com atividades específicas numa parte de uma aula. Vejamos algumas análises feitas por Gómez e Lupiáñez sobre alguns autores.

Gravemeijer (2004) indica que sua proposta de teorias locais de ensino é a “descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação a uma coleção de atividades de ensino para um tema” (p. 107). Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) também utilizam a noção para descrever a aprendizagem dos estudantes ao longo de várias sessões nas quais se trabalha um tema. Simon e Tzur (2004) vêem a THA como uma ferramenta para o planejamento de atividades matemáticas no dia-a-dia de uma aula. Finalmente Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugerem que a noção de THA pode ser utilizada para promover o “desenvolvimento microconceitual”, sendo esta a atividade central do ensino na aula.

Uma questão importante discutida por Gómez e Lupiáñez (2007) indaga sobre a relação que existe entre a atividade diária do professor e a noção de THA. Para eles, um aspecto ligado à atuação do professor tem a ver com o caráter reflexivo inerente à noção de THA: “[...] Há uma relação reflexiva em

que a THA é o subsídio de juízos e decisões locais que, por sua vez, modificam a THA” (GRAVEMEIJER, COBB, BOWERS E WHITENACK, 2000, p. 249-250, apud GÓMEZ E LUPIÁÑEZ).

Gómez e Lupiáñez destacam que, em seus trabalhos, Simon e Tzur (2004, p. 93) também enfatizam o papel do professor na construção e revisão permanente da THA. Entretanto, colocam um desafio: Como fazer compatível o propósito de que seja o professor quem construa a revisão da THA com o fato de que a totalidade dos exemplos que se têm de THA foi desenvolvida por investigadores que assumiram o papel de professor?

Para Gómez e Lupiáñez (2007), propostas como as desenvolvidas por Steffe (2004), Lesh e Yoon (2004) são tão complexas e técnicas que acabam sendo pouco práticas para os professores. Por outro lado, as propostas de Simon e Tzur (2004) e Gravemeijer (2004) têm um caráter essencialmente prático.

Gómez e Lupiáñez lembram que outro ponto essencial é referenciado por Baroody, Cibulskis, Lai e Li (2004, p. 233). Eles nos alertam para o fato de que a validade ecológica se conquista à custa da falta de universalidade: Se é comprovado que uma THA é válida em uma circunstância particular (em um contexto e com alguns estudantes e um professor particular), isto não quer dizer que essa THA tenha sentido em outras circunstâncias.

Gómez e Lupiáñez trazem ao debate preocupações como as expressas por Gravemeijer (2004, p. 107), que reconhece a dificuldade que teriam os professores para construir THA como as que são produzidas pelos investigadores. No entanto, isso não quer dizer que a única coisa que se pode entregar aos professores sejam meras seqüências de ensino para usar. Ele sugere dois elementos que podem ser úteis para os professores: (a) um marco de referência e (b) seqüências de atividades que lhes sirvam de exemplo. Mas questiona: Que pode fazer um professor com esta informação? Como pode usá-la para produzir e revisar sistematicamente sua própria THA para um tema, um contexto e alunos reais?

1.2.6 Considerações e reflexões do nosso grupo de pesquisa

Em seu artigo, Pires faz uma síntese de algumas das reflexões que realizamos em nosso grupo de pesquisa.

No tocante às questões de como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento do ensino e de como as contribuições das pesquisas na área de Educação Matemática, que trazem resultados importantes sobre a aprendizagem, podem contribuir para a organização de um ensino que potencialize boas situações de aprendizagem dos alunos, o grupo encontrou no trabalho de Simon elementos importantes:

1) Sua posição de afirmar que as visões construtivistas da aprendizagem têm dado sustentação a fundamentos teóricos na pesquisa no campo da Educação Matemática;

2) Dar pistas importantes para que os professores possam compreender e antecipar a forma de construção de conhecimentos matemáticos de seus alunos.

O grupo considera particularmente relevante o alerta de Simon no sentido de que o construtivismo também aponta um desafio para a Educação Matemática, qual seja, o de desenvolver modelos de ensino em que a construção de conhecimentos seja tomada como perspectiva teórica.

Simon adverte também que a Educação Matemática não produzirá métodos com idéias fixas ou plataformas para as ações docentes, e as estruturas metodológicas deverão sempre suportar transformações experimentais. Para ele, o Ciclo de Ensino Matemático retrata uma visão das resoluções construídas pelo professor, a respeito do conteúdo e das tarefas, modeladas pelo encontro de uma perspectiva do construtivismo social com o desafio das aulas de Matemática. Nesse ciclo, são particularmente importantes, algumas premissas:

a) O pensamento/entendimento dos estudantes é especialmente considerado e tem o lugar central na formação e implementação de instruções. O pensamento/entendimento é um processo contínuo do conjunto de dados e hipóteses construídas.

b) O conhecimento do professor envolve-se simultaneamente com o crescimento do conhecimento do aluno. Como os alunos estão aprendendo Matemática, o professor está aprendendo

sobre Matemática, também aprendendo e ensinando a respeito do pensamento matemático dos seus alunos.

c) O planejamento das instruções é parecido com a inclusão, a criação de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Esta visão reconhece e valida o método de ensino do professor e a importância de hipóteses sobre o processamento da aprendizagem dos alunos (idéias nas quais eu espero ter demonstrado que não estão em conflito com o construtivismo).

d) A transformação continuada do conhecimento do professor cria mudanças contínuas na sua própria trajetória hipotética de aprendizagem.

Pires avalia que a leitura dos textos motivou a ampliação das discussões sobre a atuação do professor de Matemática quanto às atividades de planejamento do ensino e que deve levar em conta que o aluno desempenha papel central na construção de suas aprendizagens.

E ressalta que a esse respeito Simon comenta que indicações concernentes à importância da interação de pequenos grupos e à manipulação de materiais, por exemplo, podem ser instrumentos valiosos nas mãos dos professores de Matemática.

No entanto, estes instrumentos não são suficientes para permitir que professores sejam arquitetos da produção de situações de aprendizagens que resultariam em crescimento conceitual de seus alunos. Professores novatos, por exemplo, muitas vezes questionam o conhecimento de seus alunos (consciente ou inconscientemente), esperando que no mínimo um aluno esteja habilitado a explicar sua idéia para os outros. E perguntam o que devem fazer com um grupo de alunos para que construam conceitos matemáticos.

Pires comenta que essas situações são bastante comuns, hoje, no Brasil. Nos cursos de formação inicial a chamada “Prática de Ensino” e mesmo as atividades de estágio, de modo geral, estão bastante defasadas quanto a estudos que possibilitem ao futuro professor a construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem, tanto em termos teóricos como práticos. Portanto, o jovem professor tende a usar modelos ultrapassados, sem perceber a necessidade de conhecer e de construir modelos de ensino consistentes e construídos de forma coerente, com teorias – como é o caso das teorias de perspectiva construtivista. Para mudanças significativas, os jovens professores

precisam de conhecimentos sobre os saber dos alunos, para gerar trajetórias hipotéticas de aprendizagem e análises conceituais para que possam ensinar Matemática.

Enfim, é fundamental que professores se apropriem *efetivamente* de resultados de pesquisas relevantes sobre o conhecimento matemático de crianças e jovens, inovações curriculares, planejamento, construções de atividades; e é mais importante ainda que se apropriem da idéia de que suas hipóteses e metas sobre as aprendizagens dos alunos (e a própria formatação de atividades) mudam continuamente e promovem novos conhecimentos e seu efetivo envolvimento na cultura matemática em sala de aula.

1.3 Algumas pesquisas referentes a investigações sobre ensino e aprendizagem de funções logarítmicas e uso de *software* gráfico

Em função de nosso tema de pesquisa, buscamos estudos realizados sobre funções logarítmicas e o uso de *software* com o objetivo de encontrar possíveis sucessos e insucessos de aprendizagem sobre o tema. Para tanto, realizamos uma pesquisa, pela internet, no Banco de Teses da Capes e na PUC-SP. Pesquisamos os títulos de dissertações produzidas no Brasil entre 1997 a 2008.

Encontramos quatro dissertações, sendo três sobre o ensino de logaritmos e uma sobre o uso do *software* Winplot para o ensino de funções, o que achamos ser importante, uma vez que faremos uso desse *software* em nossa trajetória. A análise de cada dissertação será apresentada individualmente destacando sempre pontos que serão utilizados em nossa pesquisa.

O primeiro trabalho encontrado foi a dissertação de mestrado da professora Mônica Karrer, que concluiu seu Mestrado Acadêmico em Educação Matemática em 1999 pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, em sua dissertação com o título *Logaritmos, proposta de uma seqüência de ensino utilizando a calculadora*, em que se elabora uma seqüência de aprendizagem sobre logaritmos com o objetivo de verificar como uma seqüência didática significativa usando a calculadora pode contribuir para

formação do conceito logaritmo. Sua seqüência é fundamentada nas teorias psicológicas e didáticas utilizando-se de autores como Piaget, Vygotski, Vergnaud, além de autores da Didática da Matemática Francesa como Guy Brousseau, com a idéia de Obstáculo Didático e Régine Douady, com o Jogo de Quadros. O trabalho conta ainda com um breve histórico sobre logaritmo, bem como com um comparativo dos objetivos do logaritmo quando foi criado em relação aos objetivos dessa ferramenta nos dias de hoje, destacando e justificando seu ensino na escola de Ensino Médio.

Para desenvolver sua seqüência, a autora forma dois grupos de alunos. O primeiro, chamado grupo de referência, desenvolve o tema da forma sugerida pelos livros didáticos, sendo trabalhado por um professor em uma sala de aula do primeiro ano do Ensino Médio, enquanto o segundo grupo, chamado grupo experimental, é constituído por oito duplas totalizando dezesseis alunos, que vão trabalhar com a trajetória elaborada pela autora. Os dois grupos passaram por dois testes, o primeiro antes do contato com o tema e outro ao final dos estudos. Vale lembrar que os alunos participantes do estudo são alunos da rede privada de ensino. A comparação dos resultados entre os dois grupos levou Karrer a concluir que sua seqüência de aprendizagem foi satisfatória, pois segundo a autora o principal objetivo foi alcançado e sua seqüência possibilitou a construção do conceito inicial do logaritmo.

O foco principal de nossa análise em relação ao trabalho da professora Mônica Karrer foram os sucessos e insucessos que tanto o grupo experimental quanto o grupo de referência apresentaram. Desse modo, vale destacar a análise realizada nesse sentido pela autora que classificou os “erros” por categorias com o objetivo de identificar os principais raciocínios e procedimentos que levaram os alunos ao insucesso, evidenciando assim possíveis obstáculos didáticos e epistemológicos presentes no desenvolvimento da aprendizagem do tema logaritmo. A partir dessa revisão, podemos enfim destacar alguns obstáculos ou dificuldades que poderão ser encontrados e que, por esse motivo, receberam atenção especial na construção de nossa trajetória para que não ocorram durante o processo de aprendizagem. As dificuldades destacadas pela professora Mônica Karrer em

sua conclusão, e que tentaremos transpor em nossa trajetória por meio de atividades adequadas para que não ocorram com tanta frequência, são:

- D1 – Dificuldade nas manipulações algébricas básicas;
- D2 – Problemas na concepção de potência;
- D3 – Problemas na concepção de função exponencial;
- D4 – Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares;
- D5 – Dificuldade de se expressar na forma escrita;
- D6 – Problemas de interpretação;
- D7 – Erro proveniente do não-establishment do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais;
- D8 – Problemas na técnica de cálculo do logaritmo;
- D9 – Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo de logaritmos.

O segundo trabalho analisado foi a dissertação de mestrado da professora Andréia Júlio de Oliveira, de 2005, pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Em sua dissertação, com o título *O ensino dos logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*, Oliveira traz suas inquietações acerca da Matemática, em particular sobre o ensino dos logaritmos como uma ciência estática, como se a matemática não sofresse mudanças ao longo dos tempos ou ainda relativamente aos motivos históricos da criação e do ensino de logaritmos. Oliveira relata que o logaritmo causa a impressão de que a Matemática não foi feita por homens comuns, mas sim por homens extremamente “inteligentes”, e discute que a maneira como o logaritmo é tratado não faz sentido nenhum, a não ser trazer complicações em termos matemáticos.

Segundo Oliveira, essas foram as motivações de sua pesquisa que teve como objetivo principal apresentar uma seqüência de atividades tendo como condutor a história da Matemática, buscando a origem do conceito de logaritmos e a relação da Matemática com a música, para a partir de então entender que potencial uma atividade sob uma perspectiva histórica teria no que diz respeito ao processo de ensino aprendizagem.

Para tanto, a autora realizou uma pesquisa sobre a potencialidade de uma abordagem histórica no ensino de Matemática, fazendo uso de autores como Jones, e cita que em seu artigo “A história da Matemática como ferramenta de ensino”, Jones define que o uso da história da Matemática estaria como uma associação entre o conhecimento atualizado de Matemática e suas aplicações, o que levaria o estudante a perceber a Matemática como uma criação humana, buscando razões pelas quais é feita a Matemática, assim como as conexões que existem entre a Matemática e as outras ciências ou conhecimentos.

Além de autores favoráveis ao uso da história da Matemática, a autora traz ainda um contraponto com autores que não aconselham utilizar essa história no ensino da Matemática, como André Lichnerowicz, Edwin E. Moise; Grattan-Guinness. O principal argumento apresentado é de que alguns autores acreditam que um dos objetivos ou necessidades é a *iniciação científica contemporânea*, pois observam uma defasagem entre a Matemática ensinada na escola e aquela ensinada nas universidades. Para esses autores o problema só poderia ser resolvido com o rompimento de um ensino tradicional, atrelado à história, para com isso chegarmos à transmissão de uma concepção contemporânea dos conhecimentos que se pretendem ensinar.

A autora traz ainda a relação do ensino utilizando a história da Matemática com a indicação dos PCN relatando que, segundo estes, o uso da história no processo de aprendizagem propicia ao aluno um ensino significativo:

A nosso ver, uma das formas significativas de se “dominar” a Matemática seria retomando a sua criação, seus problemas e as suas soluções e isso somente seria possível através da História (OLIVEIRA, 2005, p. 22).

Além da pesquisa sobre a potencialidade do uso da história nas aulas de Matemática, a autora realizou uma pesquisa acerca dos logaritmos, detalhando os principais matemáticos envolvidos, bem como a motivação para criação e avanço de tal ferramenta de cálculos. Cita a descoberta realizada por Jost Bürgi (1552 – 1632), suíço, fabricante de instrumentos para astronomia, matemático e inventor, e John Napier (1550 – 1617), um nobre escocês, teólogo matemático e inventor, que publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. Explica que a palavra *Logarithmos* é composta de dois termos gregos, *Lógos* (ou razão) e *Arithmós* (ou número). Indica, ainda, em sua pesquisa que evidências mostram que Burges já teria indícios dos logaritmos em 1588. Contudo, Napier possuía mais influência por conta de suas publicações e relacionamento com professores universitários e relata ainda que as primeiras idéias de logaritmos foram conexões entre as progressões aritméticas, geométricas e os logaritmos.

Após a pesquisa detalhada da evolução dos logaritmos ao longo dos tempos, a autora traz um capítulo dedicado à comparação entre a Matemática e a música, conseguindo assim estabelecer uma relação entre a música, o logaritmo e a história do logaritmo no decorrer dos tempos, utilizando-se das progressões aritméticas e geométricas.

Com as três vertentes de sua pesquisa relacionadas, o próximo passo da professora foi estabelecer dificuldades iniciais, tomando como base sua experiência como professora, e dificuldades que surgiram durante a pesquisa histórica dos logaritmos. São elas:

- Relacionar a definição histórica ao que lhe foi apresentado pelo ensino atual;
- Dar uma definição de logaritmo associada a progressões aritméticas e progressões geométricas;
- Transpor o conceito apreendido a outras situações;
- Reconhecer as propriedades quando exploradas em diferentes contextos;
- Compreender as condições de existência dos logaritmos;
- Perceber que o logaritmo transforma uma operação em outra de menor nível. Por exemplo, a multiplicação em adição;

- Perceber que, em sua origem histórica, o logaritmo prescindiu de uma base e do exponencial;
- Desconhecer que a base do sistema de logaritmos de Napier aproxima-se do inverso multiplicativo de **e**;
- Desconhecer a construção de uma tábua de logaritmos;
- Trabalhar com expoente racional na representação decimal;
- Relacionar os expoentes com a tábua de logaritmos construída por eles;
- Desconhecer a relação entre logaritmo e música.

A atividade proposta pela pesquisadora foi aplicada durante sete aulas duplas, 14 horas no total, com um grupo experimental de cinco alunos de uma mesma sala do sexto semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), com idades entre 22 e 41 anos. Um aluno não participou de todas as etapas e por essa razão foi descartado das análises do trabalho.

As atividades foram elaboradas pela professora pesquisadora juntamente com a professora da turma dos alunos participantes, e tiveram como norteador o livro *O logaritmo na cultura escolar brasileira*, de Miorim, M. A. e Miguel A. (2002).

Após a aplicação da sequência de atividades, Oliveira relata em suas conclusões que, apesar de grandes dificuldades apresentadas durante o processo, suas expectativas foram alcançadas, uma vez que considera ter atingido seu objetivo de criar uma alternativa ao ensino de logaritmo que tornasse esse tópico mais significativo.

Relata ainda que o ensino de logaritmo por meio da abordagem realizada por sua pesquisa possui grande potencial, porém o processo é lento e exige exploração contínua de situações-problema que viabilizem a aprendizagem. E encerra concluindo que o uso deste tipo de atividade em que a utilidade dos logaritmos e o seu significado são demonstrados não deve se limitar a operações mecânicas, mas, sobretudo, com situações que possam interferir de maneira a auxiliar a construção do conhecimento.

O terceiro trabalho analisado foi a dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática da professora Ronize Lampert Ferreira, pelo Centro Universitário Franciscano de Santa Maria – RS. A autora

relata que a motivação da pesquisa foi o fato de que em boa parte das escolas brasileiras ainda predominam técnicas tradicionais de ensino dando destaque a reprodução de conteúdos sem significado aos alunos apenas para tirarem boas notas na escola. Ferreira destaca que alguns esforços estão sendo feitos por professores com o objetivo de mudar essa situação. No que diz respeito ao tema logaritmo, a autora relata que os alunos não conseguem entender o real motivo pelo qual estudam logaritmo e quase sempre não encontram significado para tal aprendizagem. Pensando nessa situação, a autora conta que decidiu desenvolver sua pesquisa.

Para isso elaborou uma seqüência didática com atividades matemáticas que abordassem o tema com possibilidade de ilustrar a aplicabilidade do logaritmo, bem como de funções logarítmicas no cotidiano do aluno. Tal seqüência de ensino contemplou as fases da Engenharia Didática.

Apresentadas as motivações da pesquisa, a autora traz seus objetivos que foram o de desenvolver e descrever uma seqüência de atividades e problemas que tornem a aprendizagem dos alunos mais significativa, pois segundo a autora uma seqüência adequada pode facilitar a construção do conhecimento de maneira significativa por parte dos alunos.

A pesquisa fundamenta-se na didática da Matemática francesa, que é apontada pela autora como uma didática cujo interesse é contribuir com propostas pedagógicas, baseadas em pesquisas em salas de aula, colaborando para melhorar o ensino da Matemática. Nessa perspectiva, o professor,

[...] constitui-se um agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar, autônoma e/ou colaborativamente, subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e a enfrentar os problemas e desafios do trabalho docente (FIORENTINI E NACARATO, 2005, p. 9).

Apesar de apresentar em sua fundamentação teórica autores que tratam do papel do professor ao longo dos tempos e dos novos desafios que lhes são atribuídos, por exemplo, Dario Fiorentini, Adair Nacarato, Pedro Demo e Galvez, a autora traz como principal fundamentação teórica o pesquisador francês Guy Brousseau. Para isso, a autora usa como principal fonte obras de Luis Carlos Pais, que traz reflexões sobre a didática da Matemática francesa e que,

segundo o próprio autor (2002, p. 9), “tem como uma de suas características a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas”. Para a autora, essas constatações se fazem presentes nas idéias de Situação Didática, Transposição Didática, Obstáculos Epistemológicos, Contrato Didático e Formação de Conceitos e por esse motivo são detalhados em sua pesquisa e usados como suporte de seu trabalho.

A autora, ao descrever sua metodologia, aponta que, segundo sua experiência docente, a principal dificuldade identificada nos alunos durante a aprendizagem de logaritmos é o não-significado (aplicabilidade) encontrado pelos alunos para tal ferramenta, talvez pelo método de ensino normalmente utilizado estar centrado muito mais em propriedades e menos em aplicabilidade. A autora cita inclusive a definição dada por Paulo Freire que denomina esse tipo de aprendizagem como “educação bancária”, que não desperta no aluno o senso crítico, apenas o faz reproduzir fórmulas e propriedades ensinadas pelo professor.

Ferreira faz ainda uma análise de cinco livros didáticos com o objetivo de verificar como é proposta a introdução do tema segundo esses materiais, e chega à conclusão de que os livros, apesar de apresentarem notas históricas, não as utilizam no desenvolvimento do tema. Trazem problemas contextualizados, porém esses problemas não ajudam a entender o significado de logaritmos, e fazem uso de logaritmos apenas como uma ferramenta mecânica de resolução dos problemas.

A pesquisa foi realizada com 27 alunos do 1.º ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria, que trabalharam em trios durante a atividade que foi aplicada pela própria pesquisadora. Inicialmente, foi realizado um teste diagnóstico com o propósito de identificar o que a autora chamou de pré-requisitos para o ensino de logaritmos. Identificadas as primeiras dificuldades por meio do teste diagnóstico, a autora definiu as primeiras variáveis a serem exploradas em sua trajetória, quais sejam:

- Retomada do estudo de função exponencial e construção do modelo matemático que descreve cada situação estudada.
- Estabelecer a relação entre o gráfico da função exponencial e sua inversa, a função logarítmica, bem como a relação entre as definições dessas duas funções.
- Relacionar as propriedades da função exponencial e da função logarítmica e utilizar essas propriedades na resolução de problemas.
- Construção de uma escala logarítmica para compreender o significado das medidas expressas pela escala Richter, quando da medição de fenômenos da natureza, como intensidade de terremotos.
- Utilizar o *software* Winplot para construir os gráficos dos modelos matemáticos obtidos, verificar graficamente as propriedades das funções logarítmicas e comparar gráficos de uma função exponencial de base 10 com o gráfico em escala logarítmica.

A partir das variáveis mencionadas acima, a autora produziu e desenvolveu sua seqüência de aprendizagem apresentando para cada atividade sua análise *a priori* e *a posteriori* segundo definição da Engenharia Didática. Para Artigue (1986), a Engenharia Didática se caracteriza pelo estudo de caso em que a validação é essencialmente interna, prescindindo assim de análises comparativas entre o antes (*a priori*) e o depois (*a posteriori*).

Como destaque nas conclusões da autora, temos o grande auxílio proporcionado pelo *software* Winplot no que concerne ao entendimento do comportamento da curva logarítmica quando comparada com a curva exponencial, favorecendo o entendimento de funções inversas. Outro ponto de destaque é que, diferente do trabalho da professora Mônica Karrer que expôs uma lista de dificuldades apresentadas por seus alunos, a professora Ronize Ferreira em sua conclusão deu destaque a fatores que deram certo no desenvolvimento de sua trajetória e que por esse motivo julgamos importantes para utilização em nossa trajetória, quais sejam:

- Problemas contextualizados não devem surgir somente no final do estudo, mas sim como mediadores no processo de aprendizagem.
- A apresentação de logaritmos como ferramenta para resolução de equações exponenciais pode ser um bom caminho para introdução do tema.
- Questões de estimativa são favoráveis à formação do conceito de logaritmos por parte dos alunos.
- Construção gráfica num mesmo plano favorece a comparação com a função exponencial.
- Trabalhos em grupo podem favorecer o trabalho cooperativo entre os alunos durante a atividade.

O quarto e último trabalho analisado é uma dissertação de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e Matemática, da professora Caren Saccol Berleze, pelo Centro Universitário Franciscano de Santa Maria em Rio Grande do Sul, com o título *Uma seqüência de ensino usando o programa Winplot: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno*.

Apesar de a dissertação analisada não tratar do ensino de funções logarítmicas em particular, achamos que o fato de utilizar o *software* Winplot pode nos trazer indícios de seu uso, uma vez que o adotaremos em nossa trajetória de aprendizagem.

A autora tem como objetivo principal de sua pesquisa a investigação de como o *software* Winplot pode contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem de funções reais, bem como a influência da interatividade com o *software* e também entre os colegas no despertar de habilidades, como autonomia e criatividade.

A atividade foi realizada com um grupo experimental de 14 alunos do 1.^o ano do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria e, a exemplo da dissertação da professora Ronize, já descrita nesta revisão bibliográfica, foram utilizados como fio condutor aspectos da Engenharia Didática. A seqüência foi

elaborada de modo a abordar várias vertentes de funções, entre elas uma atividade destinada a funções logarítmicas.

A autora mostra que em seus estudos fica comprovado que alunos utilizam bastante o computador, porém na maioria das vezes somente para lazer, o que contrapõe às orientações dos PCN que indicam o uso de tecnologias com o objetivo de formar cidadãos críticos e autônomos.

Com base nessas argumentações, a autora relata que as aulas de Matemática necessitam de maior participação e reflexão do aluno, e um caminho favorável a esse objetivo é o trabalho em duplas, pois propicia a troca de idéias e reflexões criando um ambiente de participação intensa entre os alunos. Outro fator apontado pela autora como positivo nessa reflexão é o uso de *softwares* matemáticos, pois, segundo ela, com esse tipo de material os alunos liberam suas criatividade, experimentam e comprovam suas hipóteses diminuindo a dependência do professor.

Em sua conclusão, a autora descreve seus resultados dando destaque ao interesse positivo dos alunos nas aulas em que o *software* foi utilizado, relatando que uma das reclamações da maioria dos professores é o não-interesse dos alunos nas atividades matemáticas e que isso não ocorreu com o auxílio do *software*. Relata ainda que o ambiente criado durante as aulas foi de intensa discussão fugindo da tradicional aula de Matemática em que o professor fala e seus alunos escutam. Assim, consoante a autora, o uso desse tipo de material requer um professor dinâmico, disposto a conduzir a aula de maneira não linear e principalmente aberta a novas experiências profissionais. E conclui:

O Winplot promoveu a interatividade aluno-aluno na medida em que ambos os alunos, quando desconheciam um recurso ou uma estratégia para o cálculo, viam-se envolvidos em desvendar a ferramenta, a fim de descobrir novas possibilidades (BERLEZE, 2007, p. 219).

1.4 Escolhas metodológicas

1.4.1 Abordagem qualitativa

Nossa pesquisa é de natureza qualitativa em virtude de ser um estudo que tem características básicas, como as apresentadas por Lüdke e André (1986, p. 11-13):

- a) A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento: o desenvolvimento das THA na sala de aula, as entrevistas e as discussões com os professores aconteceram no seu local de trabalho: a escola;
- b) Os dados coletados são predominantemente descritivos: foram feitos os relatórios de todas as aulas e discussões com professores, que serão analisados no terceiro capítulo deste trabalho;
- c) A principal preocupação foi verificar qual a atuação do professor e sua interação com os alunos, tendo como base uma THA elaborada por um pesquisador, mas debatida com ele;
- d) O “significado” que as pessoas dão às coisas e à sua vida é foco de atenção especial pelo pesquisador: houve uma grande preocupação em capturar a perspectiva dos professores, ou seja, compreender sua prática e os conhecimentos profissionais que têm a respeito do tema ensinado;
- e) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo: não procuraremos buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos.

1.4.2 Delineamento das pesquisas

No contexto de discussão e delineamento de problemas de pesquisa, algumas decisões foram tomadas por nosso grupo de pesquisa. A primeira foi a

de que as dissertações de mestrado⁵ se dedicariam a construir discutir e avaliar THAs para diferentes expectativas de aprendizagem do Ensino Médio.

A segunda decisão foi a de que os doutorandos⁶ que integram o grupo de pesquisa ficariam responsáveis por investigar e analisar fundamentos teóricos sobre diferentes aspectos dos currículos de Matemática, tais como: caracterização histórica dos currículos de Matemática; eleição de critérios de avaliação de currículos; polarização entre aplicações práticas e especulações teóricas; contextualização e interdisciplinaridade.

Os mestrandos e doutorandos se reúnem uma vez por semana com o objetivo de trocar experiências, divulgar o andamento de suas pesquisas, dar opiniões nas pesquisas em desenvolvimento pelo grupo, relatar sobre leituras pertinentes, entre outras contribuições.

1.4.3 Procedimentos de pesquisa

Procuramos estabelecer fases de nossa pesquisa que apresentamos na sequência:

Fase 1: Planejamento do projeto e definição dos subgrupos de pesquisa com seus respectivos temas, com realização de reuniões com os pós-

⁵ Mestrandos e seus temas: Alexandra Garrote Angiolin – Funções exponenciais; Américo Augusto Barbosa – Funções trigonométricas; Ana Freitas Malengo – Isometrias e geometria plana; Antonio Celso Tonnetti – Estatística; Maria de Fátima Aleixo de Luna – Geometria plana; José Manoel Vitolo – Variação de grandezas e funções, funções polinomiais do 1.º grau e funções constantes; Márcia Aparecida Nunes Mesquita – Funções polinomiais do segundo grau; Patrick Oliveira de Lima – Funções logarítmicas; Vivaldo de Souza Bartolomeu – Dos números naturais aos números reais; Denílson Gonçalves Pereira – Geometria Analítica; Rubens de Souza Cabral Junior – Combinatória e probabilidade; Alan Florencio de Afayde – Funções polinomiais.

⁶ Doutorandos e seus temas: Márcio Antonio da Silva – Currículos de Matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios para escolha e organização de conteúdos; Arlete Aparecida Oliveira de Almeida – Da polarização entre aplicações e especulações teóricas nos currículos de matemática do Ensino Médio, às possibilidades de articulação. Harryson Junio Lessa Gonçalves – A interdisciplinaridade no currículo de Matemática de Ensino Médio; Márcia Maioli – Contextualização no currículo de Matemática de Ensino Médio; Denise Franco Capello Ribeiro – Trajetória histórica dos livros didáticos de geometria editados para os primeiros cursos do ensino médio brasileiro; Maryneusa Cordeiro Otone Silva.

graduandos envolvidos. Nessas reuniões semanais do grupo de pesquisa, demos prosseguimento aos estudos coletivos sobre referências teóricas que fundamentam o projeto.

O pesquisador responsável por cada subgrupo deu início a estudos individuais sobre teses, dissertações e artigos referentes ao seu tema e elaborou as atividades que constituem a THA de cada subgrupo.

Análise por subgrupo, do pesquisador com os três professores do Ensino Médio que participaram da pesquisa, podendo os professores sugerir mudanças nas atividades, fechando assim as propostas de THA pelos subgrupos de pesquisa, com acordos entre pesquisador e professores.

Elaboração, pelo pesquisador, de instrumentos para observação e coleta de dados durante a realização das atividades em sala de aula pelos professores do Ensino Médio. Esses instrumentos podem ser observações diretas do pesquisador com anotações das aulas, gravações de áudios e vídeos ou ainda observações indiretas, ou seja, observações realizadas por um indivíduo que não participou da elaboração nem das discussões das atividades.

Fase 2: Desenvolvimento das propostas de trabalho em sala de aula, sendo reservado um período de até dois meses para cada pesquisador e seus professores.

Reunião geral com todos os subgrupos para avaliação do andamento da pesquisa com realização de seminários para apresentação da produção e leitura crítica dos trabalhos desenvolvidos nas salas de aula e indicações de possíveis mudanças nas THA.

Fase 3: Escrita do material das dissertações para qualificação, elaboração de artigos e por fim escrita do material das dissertações para defesa.

1.4.4 Papel do observador

Optamos em realizar uma observação direta do desenvolvimento da THA em sala de aula, com a finalidade de melhor entendimento da atuação do professor e das perspectivas, comportamentos, dificuldades dos alunos em relação aos conhecimentos que estavam sendo explorados. Para tal observação, utilizamos anotações de acontecimentos, diálogos entre alunos e

professor, dificuldades aparentes dos alunos, comentários e dicas do professor, além da gravação de áudio das aulas.

Consideramos como aspecto positivo para a coleta de dados o fato de nossa presença na escola ser diária, uma vez que trabalhamos na escola de aplicação. Atuando como observador na sala de aula talvez não provoque grandes alterações no ambiente ou no comportamento dos alunos, proporcionando uma observação mais próxima do cotidiano da sala em um ambiente natural.

CAPÍTULO 2

CONSTRUÇÃO DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM SOBRE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

2.1 O processo de construção da THA sobre função logarítmica

Com base no conhecimento como professor e ampliado pelas leituras realizadas sobre funções logarítmicas, chegamos à conclusão de que uma das grandes dificuldades para a aprendizagem do tópico logaritmo é a necessidade de atribuirmos um significado ao seu ensino, uma vez que o grande questionamento por parte dos alunos é a utilidade que tal assunto possui em suas vidas. Pensando assim, acreditamos que a melhor maneira de trabalhar o assunto é elaborar uma trajetória de aprendizagem que vá ao encontro dos anseios dos alunos e também das orientações dos PCN, que abordam justamente uma aprendizagem de maneira significativa sendo iniciada por uma **situação-problema**, em que os alunos construam o conceito por meio de uma análise e cheguem à conclusão de que as funções logarítmicas se apresentam como uma poderosa ferramenta na resolução de inúmeras situações. Assim construímos uma trajetória hipotética de aprendizagem considerando o aluno como o agente principal de sua aprendizagem e, além disso, desenvolvemos uma THA no qual o professor possa trabalhar com o aluno de uma forma interativa e investigativa.

A motivação de construir uma THA sobre funções logarítmicas surgiu a partir da experiência profissional, pois tal tema sempre foi abordado nas aulas de uma forma linear, não enfatizando a utilidade da função em outras áreas de conhecimento e muito menos como um instrumento que proporciona buscar a regularidade nos fenômenos naturais e sociais. Além disso, o que mais motivou

o desenvolvimento da pesquisa foi a constatação do escasso material existente que aborda o processo de ensino e aprendizagem de funções logarítmicas.

2.2 Análise de alguns livros didáticos e Caderno do Estado de São Paulo

Antes de iniciar a construção da THA, achamos por bem verificar como o tema funções logarítmicas é abordado nos livros didáticos indicados pelos professores como apoio aos seus trabalhos em sala de aula, bem como o Caderno do 1.º ano do Ensino Médio adotado pelo governo estadual no ano de 2008 e que também serve de apoio ao trabalho dos professores.

Os livros indicados pelos professores são: *Matemática Ensino Médio*, de Smole & Diniz (2005) – esse livro foi adotado pela escola e fornecido aos alunos pelo governo federal por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), e *Matemática fundamental*, de Giovanni; Bonjorno; Giovanni Jr. (1994), por se tratar de um livro bastante usado como apoio entre os professores de Matemática da rede pública, segundo os professores participantes do nosso projeto.

Durante a análise dos dois livros didáticos e do Caderno curricular do Estado, optamos por estabelecer categorias com o objetivo de guiar nossa verificação e facilitar o entendimento da análise:

- 1) Como é feita a primeira abordagem sobre o tema? Acreditamos ser a primeira abordagem do tema o principal momento para a aprendizagem do aluno, uma vez que esse primeiro contato pode resultar em um primeiro obstáculo para aprendizagem ou em um momento desafiador, abrindo grandes possibilidades de ensino.
- 2) Possui abordagem histórica no trabalho com os logaritmos? Essa categoria se faz importante, pois julgamos fundamental que o aluno conheça as motivações históricas que resultaram em uma nova ferramenta de cálculos.
- 3) Existe resolução de problemas contextualizados durante o desenvolvimento do tema? O desenvolvimento do aluno é o grande objetivo do ensino de qualquer tema, por essa razão

julgamos que resolução de problemas contextualizados se faz necessário durante o desenvolvimento do tema em estudo.

- 4) Existem questões em que o aluno deva estimar ou levantar hipóteses? Ao estimar ou levantar hipóteses, o aluno está criando suas próprias estratégias de resolução, por isso achamos por bem verificar como essas questões estão sendo abordadas nos materiais mais utilizados pelos professores.
- 5) É sugerido o uso de calculadora ou tábua de logaritmos? Como pretendemos utilizar calculadoras e *softwares* gráficos, decidimos verificar com que frequência esse tipo de material é sugerido nos livros didáticos e no Caderno do aluno da Secretaria Estadual de Educação de São Paulo.

2.2.1 Como é feita a abordagem do tema?

Ao analisarmos os materiais, percebemos que o livro *Matemática fundamental* aborda o tema apresentando uma definição para logaritmo logo no início do estudo, não fazendo menções a nenhum tipo de problemática durante a apresentação do tema. O livro *Matemática Ensino Médio* traz como ponto de partida uma situação-problema exemplificando a necessidade de uma nova ferramenta matemática de resolução, porém a situação fica apenas como um exemplo, visto que as autoras não utilizam essa situação para proporcionar aos alunos um ambiente de construção do conhecimento e em seguida apresentam a definição de logaritmo.

Já o Caderno do Estado traz uma seqüência de comparações com operações da potenciação até chegar à definição de logaritmo. Apresenta ainda uma situação-problema assim que se inicia o estudo de logaritmos, porém, a exemplo do livro *Matemática Ensino Médio*, não permite que os alunos construam suas próprias hipóteses.

2.2.2 Faz abordagem histórica no trabalho com as funções logarítmicas?

O livro *Matemática fundamental* é o único dos materiais analisados que não faz nenhuma referência aos aspectos históricos da criação e desenvolvimento dos logaritmos.

O livro *Matemática Ensino Médio* traz esse tópico anteriormente ao estudo do tema numa parte chamada “Flash Matemático”, na página 197. O texto relata que a expansão comercial e a busca por novas terras e mercados impulsionaram as grandes navegações, exigindo cálculos mais precisos e rápidos. Assim traz informações sobre os trabalhos do Barão Escocês John Napier, teólogo e matemático, e Jobst Burgi, matemático suíço e fabricante de instrumentos astronômicos, que permitiram simplificar as longas operações de dividir e multiplicar envolvendo tanto números grandes como números pequenos. O texto trata de mostrar as possíveis seqüências numéricas (PA e PG) que serviram de inspiração a Napier de Burgi, e apresenta ainda parte de uma tábua de logaritmos. Vale ressaltar que o “Flash Matemático” é apenas uma leitura presente no livro, e não uma atividade.

O Caderno utilizado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo é o único dos materiais analisados que traz como ponto de partida ao estudo dos logaritmos uma atividade que trata de aspectos históricos do seu desenvolvimento. A situação de aprendizagem, como é denominada pelo material, tem o título “Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução: a força da idéia de logaritmo”, e traz inicialmente um pequeno texto dando conta de que os logaritmos foram criados no início do século XVII, com o objetivo de simplificar cálculos. Aborda também os principais matemáticos envolvidos e faz uma comparação com o uso dos logaritmos nos dias atuais, relatando que hoje, com tantas tecnologias à disposição do homem, a função dos logaritmos não é mais simplificar cálculos, porém seu significado e a força de sua linguagem são fundamentais na compreensão de fenômenos, muitos deles surgidos em pleno século XX, como nas medidas de intensidade sonora, energia destruidora dos terremotos, acidez de um líquido, rapidez com que

uma substância radioativa se desintegra, entre outros. Portanto, o texto afirma que, sem dúvida, hoje, mais do que ontem, é fundamental aprender logaritmos.

Após a leitura inicial, o material propõe a retomada do motivo histórico da criação dos logaritmos, ou seja, a simplificação de cálculos. A atividade parte de uma situação que envolve um cálculo aparentemente impossível de resolver sem novas técnicas de cálculo. O texto conta que esse é um cálculo semelhante aos que impulsionaram o surgimento dos logaritmos, consistindo

em determinar o valor de “E”, dado $E = \sqrt{\frac{381,5 \cdot (20,87)^3 \cdot (4182)^2}{(7,935)^2}}$. A atividade se desenvolve comparando sempre cada passo da resolução com as idéias históricas da criação dos logaritmos. Vale ressaltar que a abordagem histórica do Caderno do Estado não associou logaritmos com seqüências numéricas (PA e PG), porém trabalhou mais com os aspectos motivadores de sua criação.

2.2.3 Existe resolução de problemas contextualizados durante o desenvolvimento do tema?

Mais uma vez, o livro *Matemática fundamental* é o único que não faz uso em nenhum momento de problemas contextualizados durante o estudo do tema. O livro *Matemática Ensino Médio*, além do problema apresentado no início dos trabalhos com logaritmos, apresenta uma seção chamada Problemas e Exercícios no final do capítulo de logaritmos, que conta com cinco problemas contextualizados. Vale lembrar que durante o desenvolvimento do tema situações como essas não são utilizadas pelas autoras. No Caderno do Estado surgem durante todo o desenvolvimento do tema pelo menos dez situações de problemas contextualizados abordando as mais diferentes áreas de aplicação do tema. Diferentemente do livro *Matemática Ensino Médio*, esses problemas não aparecem apenas no encerramento do estudo

2.2.4 Existem questões em que o aluno deva estimar ou levantar hipóteses?

Dos materiais analisados, o Caderno do Estado é o único que traz uma questão de estimativa solicitando aos alunos que calculem o valor aproximado do logaritmo de alguns números. Em relação a esse tópico, julgamos ser muito importante que os alunos estimem e levantem hipóteses sobre situações de aprendizagem, pois isso lhes proporciona melhor entendimento do tema, uma vez que se sentiram parte do processo de aprendizagem.

2.2.5 É sugerido o uso de calculadora ou tábua de logaritmos?

O livro *Matemática fundamental* não traz nenhuma sugestão quanto ao uso de tábua de logaritmos nem calculadora durante o desenvolvimento do estudo de funções logarítmicas, apresentando no enunciado dos exercícios os valores dos logaritmos necessários para resolução. No livro *Matemática Ensino Médio* encontra-se uma sessão em que as autoras ensinam o cálculo do logaritmo usando a calculadora científica, porém fica a título de curiosidade, pois nenhuma atividade é sugerida utilizando tal ferramenta. Já no Caderno do Estado é apresentada a tábua de logaritmos justamente no início do estudo, quando se refere à parte histórica dos logaritmos. No tocante à calculadora, o Caderno não sugere nenhuma atividade com o seu uso, fazendo apenas uma referência aos aparelhos tecnológicos que substituem as tábuas nos dias atuais, como calculadoras e *softwares*.

Com o estudo realizado sobre as diferentes abordagens de funções logarítmicas nos livros didáticos e na proposta, ampliamos nossa reflexão em construir uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem com diferentes situações-problema visando favorecer a apreensão do conceito de funções logarítmicas pelos alunos.

Na construção da trajetória, outras fontes de pesquisa foram utilizadas, como livros com artigos internacionais, a internet, entre outras. Procuramos em artigos, em *sites* educativos, de que maneira o tema proposto era abordado em outras experiências, e, além disso, buscamos encontrar textos ou artigos que relatassem a importância desse estudo.

Um artigo publicado no livro *As idéias da álgebra* (II anuário The National Council of Teachers of Mathematics, de 1988), publicado pela editora Atual, que teve como organizadores Arthur F. Coxford e Albert P. Shulte, com o título Logaritmos, calculadoras e o ensino da álgebra intermediária, de Betty J. Krist, chamou nossa atenção por relatar uma experiência de aprendizagem com alunos da décima primeira série dos Estados Unidos da América, equivalente ao nosso primeiro ano do Ensino Médio. Nessa atividade, os alunos receberam uma calculadora científica, bem como suas instruções de uso. Em seguida, as atividades foram iniciadas com o objetivo de estudar logaritmos com o auxílio da calculadora e de estimativas realizadas pelos alunos durante todo o processo em que eles eram desafiados a experimentar e levantar hipóteses relativas aos valores dos logaritmos calculados.

A primeira atividade começou com a pergunta: Sua calculadora tem uma tecla escrita log? Para que ela serve? Os alunos calculavam logaritmos usando a calculadora até que tivessem uma hipótese sobre a definição de logaritmo. Logo após, eram desafiados a encontrar relações entre os valores desses logaritmos intuindo assim as propriedades dos logaritmos, bem como sua condição de existência. Na última parte da atividade, os alunos trabalhavam gráficos de funções exponenciais e logarítmicas e tinham que levantar conclusões sobre essas funções com o objetivo de defini-las como inversas.

As conclusões da autora foram de que as descobertas feitas pelos alunos foram genuínas e estimulantes; os alunos se entusiasmaram com os seus trabalhos e agiram como detetives, e principalmente gostaram das indicações que a calculadora lhes forneceu e em nenhum momento disseram: “Diga-me exatamente como isso funciona?”.

Com a análise dos materiais e a leitura do artigo, tínhamos em mãos um rico repertório de diferentes abordagens do tema funções logarítmicas. Assim, o primeiro caminho foi acreditar que retomar conceitos que o aluno já conhece poderia facilitar a compreensão do tema. Logo, optamos por iniciar a THA com atividades que levem o aluno, por meio da investigação, revisar o conceito de potenciação e suas propriedades, além do tema funções exponenciais. Essa iniciativa teve como motivação as dificuldades dos alunos em potência e exponencial encontradas nas leituras que fizemos, e, com isso, buscamos

operar com todas as propriedades e, ademais, trabalhar com a notação exponencial.

O segundo caminho foi, por meio de diversas atividades de várias áreas, abordar situações reais que se utilizem do crescimento logarítmico, pois o nosso objetivo é fazer com que os alunos discutam o assunto e procurem relacionar o tema com situações cotidianas, proporcionando, então, compreender que fenômenos que ocorrem de maneira exponencial e logarítmica estão presentes no seu dia-a-dia, ligados a crescimentos rápidos.

Além disso, optamos em trabalhar com gráficos de funções para que o aluno visualizasse, por meio da investigação, a curva que representa a função exponencial e a função logarítmica, a fim de compará-las e conhecer um pouco as suas características.

O terceiro caminho foi, mediante uma situação apresentada na primeira atividade, proporcionar uma situação-problema investigativa, na qual o aluno tenha que estimar e levantar hipóteses sobre a função exponencial que descreve o crescimento apresentado. Após estabelecerem a função exponencial, os alunos serão desafiados a resolver uma equação exponencial do tipo não direta, em que as bases não serão igualadas com os conhecimentos adquiridos pelos alunos até a fase em que se encontram, e assim o objetivo é criar uma expectativa sobre os possíveis caminhos para resolução desse tipo de situação.

No decorrer da THA, a expectativa é superada com a apresentação de uma nova ferramenta, a partir de uma situação-problema e com o auxílio da calculadora científica.

Para finalizar a nossa trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas, optamos em trabalhar com o *software* Winplot na construção de gráficos, com o objetivo de agilizar a construção, dar dinâmica aos gráficos construídos e tornar o ambiente de aula mais atrativo, uma vez que os alunos se empolgaram bastante com a possibilidade de ter aulas na sala de informática.

O processo de construção da THA foi um verdadeiro desafio, pois, de acordo com Simon, a trajetória hipotética de aprendizagem dá ao professor a possibilidade de construir seu projeto de decisões, baseado em suas melhores

suposições de como o conhecimento poderia ser processado. Assim, elaborar um caminho que viabilize a compreensão de um conceito utilizando o conhecimento do aluno e as nossas hipóteses é um grande desafio.

2.3 As expectativas para aprendizagem dos alunos

Embora o tema função logarítmica seja amplo, definimos algumas expectativas de aprendizagem para os alunos do 1.º ano do Ensino Médio, identificadas a seguir:

- ✓ Compreender o conceito de logaritmo de um número e calcular alguns logaritmos;
- ✓ Reconhecer e utilizar em situações-problema variações de grandeza expressas por leis do tipo $y = \log_a x$ e, em particular, por igualdades do tipo $y = \ln x$;
- ✓ Identificar gráficos que descrevem funções logarítmicas e reconhecer uma função logarítmica a partir de seu gráfico;
- ✓ Resolver situações-problema que envolvem a função logarítmica, bem como equações logarítmicas;
- ✓ Reconhecer e utilizar as propriedades dos logaritmos, bem como as condições de sua existência.

2.4 Hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos

Como já mencionamos anteriormente, nossa pesquisa sobre função logarítmica tem por objetivo analisar como podem ser organizadas e desenvolvidas propostas didáticas (THA) em sala de aula, considerando que algumas metodologias e/ou estratégias podem contribuir para a aprendizagem deste objeto matemático, sendo elas: uma abordagem interdisciplinar dos conhecimentos, a exploração de situações contextualizadas a serem trabalhadas por meio da resolução de problemas e a utilização de recursos de simulações de *softwares*.

Nosso interesse em buscar novas metodologias de ensino está relacionado com a maneira como a Matemática é apresentada aos alunos do Ensino Médio. Ao longo dos anos, pudemos perceber em discussões

sustentadas na Educação Matemática que o ensino algumas vezes acontece de forma pronta e acabada, em que seu aprendizado é efetuado por meio de repetições da técnica estudada. Com isso, o aspecto da Matemática como papel instrumental para o reconhecimento dos elementos que norteiam a aprendizagem é desconhecido pelos alunos, acarretando assim problemas em sua trajetória enquanto estudante e indivíduo atuante profissionalmente.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional (PCNEM, BRASIL, 2002, p. 251).

Sabemos que as funções logarítmicas estão ligadas a outras áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Economia, entre outras, nas quais esse objeto matemático é utilizado em fenômenos naturais buscando regularidades em seus acontecimentos. Portanto, em nossa trajetória hipotética de aprendizagem, faremos uso de contextos interdisciplinares para que o aluno possa mobilizar seus conhecimentos matemáticos e aplicá-los em outras áreas de conhecimento, podendo dar mais significado ao estudo de função logarítmica, relacionando-o com outras áreas. De acordo com Pozo (1998), “quanto mais diversificados forem os campos nos quais apresenta uma mesma tarefa, mais possibilidade há de que as técnicas e habilidades utilizadas sejam generalizadas a novos campos do conhecimento” (p. 50-51).

Procuramos abordar o conceito de função logarítmica na THA com contextos interdisciplinares, relacionando-o com Biologia, por exemplo, pois temos como hipótese que o uso de aportes interdisciplinares para desenvolver o conceito de função logarítmica auxiliará ao aluno compreender o objeto matemático em questão e aplicar sua aprendizagem em diferentes situações de contextos científicos, tendo assim uma aprendizagem significativa que poderá auxiliá-lo em outros contextos, promovendo relações de seu conhecimento em diversas situações.

Essa articulação interdisciplinar, promovida por um aprendizado com contexto, não deve ser vista como um produto suplementar a ser oferecido eventualmente se der tempo, porque sem ela o conhecimento desenvolvido pelo

aluno estará fragmentado e será ineficaz (PCN+, BRASIL, 2002, p. 31).

A proposta da interdisciplinaridade pretende proporcionar ao aluno que caminhe entre as áreas de conhecimento articulando e integrando as disciplinas utilizando suas técnicas aprendidas durante seu percurso enquanto estudante. É nesse momento que a Matemática tem a dimensão de poder ser vista como uma ciência que interage com diversas áreas de conhecimento, fazendo desta disciplina um instrumento que ajuda a promover uma reflexão ampla, deixando assim de ser isolada e apresentada de forma acabada, o que acarreta uma fragmentação para a aprendizagem do aluno.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios (PCN+, BRASIL, 2002, p. 112).

O recurso de resolução de problemas tem aparecido na Educação como uma estratégia importante de ensino, possibilitando ao aluno que adquira habilidades e maneiras de aprender novos conhecimentos por meio da investigação.

A resolução de problemas viabiliza que o ensino da Matemática seja visto não mais como a execução de exercícios repetitivos, como muitas vezes acontece em sala de aula. Com esta estratégia de ensino, acreditamos que possa ocorrer uma aprendizagem significativa e que auxilie o aluno a desenvolver mecanismos e habilidades para novas aprendizagens, buscando estratégias que o levem à resolução de um problema. Não que os exercícios devam ser abolidos da prática de ensino, mas podem fazer parte de um processo de execução do novo conhecimento adquirido. Portanto, que o exercício seja parte de uma situação já conhecida, acarretando a sua assimilação e interação com outros conhecimentos, promovendo assim uma autonomia enquanto indivíduo.

Não somente na Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já

possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar a experimentar, a organizar dados, sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (PCNEM, BRASIL, 2002, p. 266).

No decorrer desta nova metodologia de ensino, os alunos poderão se sentir incomodados com esta situação diferente, pois o professor deixa de ser o transmissor de conhecimentos e assume o papel de mediador, permitindo que o aluno seja o principal agente de sua aprendizagem. Assim, na resolução de problemas, o importante é que a estratégia de resolução não seja apresentada ao aluno, pois a finalidade deste recurso de ensino é fazer com que o aluno mobilize seus conhecimentos adquiridos e busque estratégias que o levem à resolução do problema, sem o auxílio constante do professor.

Ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitidas pelo livro-texto ou professor (POZO, 1998, p. 14-15).

No ensino da Matemática o fundamental é proporcionar situações de aprendizagem que promovam ao aluno a capacidade de enfrentar diferentes problemas, que exijam dele a aprendizagem de novos conhecimentos. Assim, em nossa trajetória, os alunos são desafiados logo na primeira atividade e instigados a buscar novos conhecimentos para resolução de um problema.

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido (PCN+, BRASIL, 2002, p. 113).

As situações-problema propostas em nossa THA envolvem áreas afins com aplicações reais em diferentes ciências com o intuito de viabilizar ao aluno

perceber que objetos matemáticos são utilizados para identificar diversos acontecimentos naturais em diferentes contextos da realidade.

2.5 Apresentação das atividades com seus respectivos objetivos de aprendizagem

Durante a elaboração da THA, achamos por bem dividir o desenvolvimento do tema funções logarítmicas em quatro blocos que chamaremos de Momentos.

O 1.º Momento é constituído por uma atividade e tem como objetivos revisar as operações com potências, resolver equações exponenciais e confrontar o aluno com uma situação-problema em que as ferramentas conhecidas não possibilitam sua resolução. Assim, é solicitada uma estimativa dos resultados.

O 2.º Momento compreende três atividades. Esse momento é destinado à apresentação do Logaritmo aos alunos. Para isso, propomos uma situação-problema parecida com a do 1.º Momento, porém desta vez com o uso da calculadora é apresentada uma nova ferramenta aos alunos. Além dessa situação, propomos atividades que possibilitem aos alunos trabalhar com essa nova ferramenta e tirar suas conclusões sobre seu uso.

O 3.º Momento é constituído por duas atividades e tem como objetivo trabalhar com as propriedades dos logaritmos, bem como levar o aluno a concluir sua condição de existência. Na 1.ª atividade os alunos devem preencher uma tabela com os valores de alguns logaritmos e em seguida perceber algumas relações; já na 2.ª atividade devem utilizar essas relações na resolução de alguns exercícios.

O 4.º Momento é formado por uma atividade e tem como objetivo trabalhar com gráficos de funções logarítmicas. Nesse momento, os alunos têm contato com o *software* Winplot na construção dos gráficos. As construções sempre ocorrem comparando-se o gráfico de uma função exponencial com o gráfico de uma função logarítmica para que os alunos observem suas relações.

A seguir apresentamos cada atividade com seus respectivos objetivos, justificativas e possíveis estratégias para o professor.

1º Momento/ Atividade:

1- Aplicando as propriedades da potenciação, reduza a uma só potência:

- a) $3^4 \cdot 3^5$
- b) $(x^3)^4$
- c) $7^9 : 7^4$
- d) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$
- e) $w^5 : w^{10}$

2- Resolva as equações exponenciais:

- a) $2^x = 64$
- b) $9^x = 243$
- c) $3^x = \frac{1}{81}$
- d) $10^{3x} = \frac{1}{10000}$
- e) $4^x = \sqrt[3]{32}$
- f) $3^{2x} = 81$
- g) $10^x = 0,001$
- h) $5^x = 64$

Obs: Você encontrou dificuldades em responder o item “h”? Em caso positivo, quais foram as dificuldades? Foi possível fazer pelo menos uma estimativa do valor de x?

3- Uma pequena empresa de cosméticos tem um faturamento anual bruto de aproximadamente 1 milhão de reais e acaba de ser vendida a uma empresa multinacional que pretende investir pesado num projeto audacioso de expansão. O projeto inclui investimentos em máquinas modernas, aumento de funcionários e transportes, tudo para atingir a meta que é triplicar o faturamento anual bruto a cada ano nos próximos 7 anos e assim tornar-se uma das maiores empresas de cosméticos do país. Imaginando que essa meta seja cumprida a cada ano, responda:

- a) Qual o faturamento dessa empresa após um ano?
- b) Após três anos, qual o faturamento bruto dessa empresa?
- c) Sendo “x” o tempo em anos e “f” o faturamento anual bruto em reais

dessa empresa. Escreva uma relação matemática que nos permita calcular o faturamento anual bruto em relação ao tempo.

- d) Ao final dos sete anos quantas vezes o faturamento bruto dessa empresa terá crescido em relação ao início do processo?
- e) Após quantos anos o faturamento dessa empresa será de 81 milhões de reais anuais?
- f) É possível determinar o período exato em que o faturamento dessa empresa será de 100 milhões de reais anuais? Em caso negativo faça uma estimativa desse período.
- g) Você encontrou dificuldades em responder o item "f" ? Em caso afirmativo quais foram as dificuldades?

Nota Histórica: Dificuldades parecidas com as encontradas no item "f" da 1ª atividade, bem como cálculos complicados que exigiam tempo e dedicação de quem fosse resolver, eram fatores que dificultavam a expansão comercial e a navegação nos séculos XV e XVI. Essas dificuldades exigiam métodos práticos que facilitassem os cálculos com o objetivo de aprimorar a navegação e promover a expansão comercial.

Nessa época, o escocês John Napier (1550-1617) e o suíço Jobst Burgi (1552-1632) desenvolveram, independentemente, métodos para facilitar cálculos com os mesmos fundamentos básicos, diferenciados pelo uso de valores e terminologia. Napier, após vinte anos de estudos, se antecipou a Burgi e, em 1614, publicou em seu *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, o método que revolucionaria o cálculo.

Esse método foi chamado por Napier de Logaritmo que significa “número de razão” e será alvo dos nossos estudos a partir de agora.

Objetivos:

Essa atividade tem como objetivo principal identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre potenciação e exponencial através principalmente dos exercícios 1 e 2. Outro objetivo da atividade era o de colocar os alunos em contato com uma situação problema da qual o aluno se defronta com uma situação da qual seus conhecimentos até aqui adquiridos não são suficientes

para resolvê-la (item “f” do exercício 3) criando assim a expectativa de aprendizagem de uma nova ferramenta para resolução desse tipo de situação assim como relatado na nota histórica.

Essa atividade na trajetória tem como justificativa as dificuldades D1, D2 e D4⁷.

Estratégia para o professor:

Como potenciação e equações exponenciais são temas que antecedem o ensino de funções logarítmicas, imaginamos que os alunos consigam discutir e estabelecer o melhor caminho para resolução dessa atividade. Por essa razão sugerimos ao professor que dê um tempo para que seu aluno tente resolver em seguida discuta e faça a correção junto aos alunos como revisão dos temas.

2º Momento/1ª Atividade:

1-A bactéria *Escherichia coli* é uma bactéria cujo habitat natural é o lúmen intestinal dos seres humanos e de outros animais de sangue quente, é um dos poucos seres vivos capaz de produzir todos os componentes de que é feita, a partir de compostos básicos e fontes de energia suficientes. A presença da *Escherichia coli* em água ou alimentos é indicativa de contaminação com fezes humanas (ou mais raramente de outros animais). A quantidade de *Escherichia coli* em cada mililitro de água é uma das principais medidas usadas no controle da higiene da água potável municipal, preparados alimentares e água de piscinas. Esta medida é conhecida oficialmente como índice coliforme da água.

Essa bactéria sob condições ideais subdivide-se em duas a cada período de geração, partindo de um único indivíduo. Assim, por exemplo, uma bactéria após uma hora subdivide-se em duas e assim sucessivamente.

⁷ D1 – Dificuldade nas manipulações algébricas básicas, D2 – Problemas na concepção de potência, D4 – Tendência ao pensamento linear em situações não lineares. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Supondo uma cultura de bactérias que se reproduza a partir de uma bactéria em condições ideais, responda:

- a) Quantas bactérias existirão após três horas?
- b) Chamando de "n" o número de bactérias e "t" o tempo medido em horas, determine a lei que rege o fenômeno em estudo, ou seja, a expressão matemática que descreve tal comportamento.
- c) Após quantas horas existirão 256 bactérias na cultura?
- d) Quantas bactérias existirão após 6 horas?
- e) Quanto tempo será necessário para que se tenha 1024 bactérias na cultura?
- f) Construa um gráfico que relacione o tempo de reprodução com a quantidade de bactérias existentes nessa cultura.
- g) Observando o gráfico, em quanto tempo aproximadamente estarão presentes 1000 bactérias na cultura?

Após a estimativa feita neste item, vamos calcular dessa vez usando uma nova ferramenta de cálculos que chamada de Logaritmo a partir de agora.

1º A partir da expressão obtida no item "b", $n = 2^t$, substituir o número de bactérias por 1000.

2º Escrever na mesma base o membro da esquerda e da direita, para facilitar o uso da calculadora vamos optar pela base 10. Começando com o membro da esquerda temos $10^x = 1000$, determine o valor de x.

3º No membro da direita temos $10^y = 2$, determine o valor de "y" usando a tecla log da calculadora (tecle: $\log 2 =$), em seguida usando a tecla 10^x (tecle: 10^x em seguida o valor encontrado para "y" =) tire uma prova do resultado.

4º Realizando as devidas substituições, escreva a expressão $1000 = 2^t$, agora como potência de base 10:

5º Resolva a equação e responda novamente o item "g". O cálculo dessa vez foi mais preciso?

- h) Para praticar essa nova ferramenta, calcule o tempo necessário para que nessa comunidade existam 100, 500, 2000 e 3000 bactérias, respectivamente.

Objetivos:

Essa atividade tem o objetivo de trabalhar uma situação contextualizada que envolva a equação e a função exponencial que servirão de base para os estudos sobre funções logarítmicas, além de apresentar aos alunos o primeiro contato com a nova ferramenta de estudo (logaritmos) por meio do uso da calculadora científica.

A justificativa para essa atividade são as dificuldades D3, D4, D5 e D6.⁸

Estratégia para o professor:

Sugerimos ao professor que deixe seu aluno realizar a leitura da atividade bem como sua resolução, possivelmente haverá dificuldades no manuseio da calculadora por isso é aconselhado uma apresentação das principais funções da calculadora inicialmente a atividade. Outro ponto de possível dificuldade é nos passos que conduz o aluno a tecla “log” da calculadora, para isso sugerimos ampla discussão entre os alunos para que aqueles que consigam realizar esses “passos” auxiliem os outros alunos. Ao final o professor deve permitir que um aluno transcreva sua resolução na lousa.

2º Momento/2ª Atividade:

1-Complete a tabela:

EQUAÇÃO NA FORMA	EQUAÇÃO NA FORMA LOGARITMICA	CÁLCULO DO LOGARITMO
------------------	---------------------------------	-------------------------

⁸ D3 – Problemas na concepção de função exponencial, D4 – Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares, D5 – Dificuldade de se expressar na forma escrita e D6 – Problemas de interpretação. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

EXPONENCIAL		
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$	$x = 3$
$5^x = 125$		$x =$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x =$
$2^x = 32$		$x =$
$3^x = 243$		$x =$
$10^x = 50$		$x =$
$10^x = 0,98$		$x =$
$10^x = 950$		$x =$
$10^x = 15000$		$x =$

Obs: Se a base do logaritmo for 10, costuma-se oculta-la.

2-Determine:

- a) $\log_2 1024$
- b) $\log 550$
- c) $\log_4 4096$
- d) $\log 5,8$
- e) $\log 700$

3- Se $a^x = b \rightarrow \log_a b = x$, temos:

OPERAÇÃO ELEMENTOS	POTENCIAÇÃO	LOGARITMAÇÃO
a	Base	Base do logaritmo
b	Potência	Logaritmando ou antilogaritmo
x	Expoente	logaritmo

Note que a potenciação e a logaritmação são operações que se relacionam. Com base nos estudos até aqui, o que é logaritmo em sua opinião?

Objetivo:

O objetivo dessa atividade é familiarizar o aluno com a ferramenta logaritmo por meio de exercícios em que os alunos devem caracterizar a operação logarítmica além de compará-la sempre com a exponencial a fim de identificá-la como sendo a operação inversa da exponencial. Um objetivo secundário é o uso da calculadora científica como ferramenta de cálculos sempre que possível.

A justificativa para essas atividades são as dificuldades D1, D4, D7, D8 e D9.⁹

Estratégia para o professor:

É sugerido que o professor durante essa atividade permita que seus alunos experimentem essa nova ferramenta, as dúvidas que surjam devem ser levadas ao conhecimento de todos os alunos para que proponham soluções e criem um ambiente colaborativo. Ao final o professor deve realizar a correção na lousa.

2º Momento/3ª Atividade:

1-Analise o problema proposto na prova de Matemática da Vunesp-2000, em seguida tente respondê-lo:

O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min o médico da polícia chegou e, imediatamente, mediu a temperatura

⁹ D1 - Dificuldade nas manipulações algébricas básicas, D4 - Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares, D7 - Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais, D8 - Problemas na técnica de cálculo do logaritmo, D9 - Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo de logaritmos. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica

do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, mediu a temperatura outra vez e ela era de 31,5°C. A temperatura do ambiente foi mantida constante em 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5°C, e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $(Dt) = D_0 \cdot 2^{(-2\theta t)}$, em que **t** é o tempo em horas, **D₀** é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante $t = 0$, **D(t)** é a diferença de temperatura do cadáver com o meio num instante **t** qualquer, e **θ** é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela a seguir:

HORA	TEMPERATURA DO CORPO (°C)	TEMPERATURA DO QUARTO (°C)	DIFERENÇA DE TEMPERATURA (°C)
t = ? morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0 22h30min	32,5	16,5	D(0) = D ₀ = 16
t = 1 23h30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Determine:

- o valor da constante **θ**;
- a hora em que a pessoa morreu;

Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo, colocar o aluno em contato com uma situação problema, porém dessa vez deve fazer uso do logaritmo como ferramenta de resolução sem que isso seja sugerido a ele, além de colocar em discussão o uso do logaritmo em outras áreas do conhecimento, no caso do problema a Biologia.

A motivação para essa atividade são as dificuldades D1, D4, D5, D6, D7 e D8.¹⁰

Estratégia para o professor:

Essa atividade é um pouco mais técnica, por essa razão o professor pode realizar a leitura junto à classe e destacar uma das aplicações do Logaritmo. Caso as dificuldades sejam numerosas, o professor pode ainda realizar uma resolução conjunta com seus alunos.

3º Momento/1ª Atividade:

1-Preencha a tabela abaixo com os valores dos logaritmos em base 10 com o uso da calculadora:

n	log n
0	
1	
2	
3	
4	

¹⁰ D1 - Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D4 - Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 - Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 - Problemas de interpretação; D7 - Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais e D8 - Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica

5	
6	
7	
8	
9	
10	
-1	
-2	
100	
1000	
10000	
30	
300	
50	
500	
5000	
0,1	
0,98	

- Quais conclusões você pode tirar sobre as possibilidades para se calcular o logaritmo de um número?
- O que você pode observar sobre os logaritmos de números entre 0 e 1?
- Tente identificar relações entre os valores dos logaritmos (coluna direita da tabela) e faça uma lista de observações.

2-Sem o uso da calculadora, usando somente as observações feitas pelos colegas de sala, preencha a tabela abaixo:

n	log n
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

3- Faça uma lista das principais conclusões que podem ser tiradas desta atividade:

4-Utilizando a calculadora (se possível) e o logaritmo de base 10, determine x:

a) $4^x = 5$

b) $4^x = 19$

c) $4^x = 95$

d) $a^x = b$

Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo levar o aluno a observar algumas relações entre valores de alguns logaritmos, sobre a existência ou não do

logaritmo de alguns números e ao final da atividade ser capaz usar as observações na resolução de algumas situações em que elas serão úteis.

O professor ao final dessa atividade formaliza a atividade levando o aluno a identificar as observações feitas como sendo as propriedades dos logaritmos e as condições de existências dos mesmos.

Essa atividade se justifica, pois as propriedades dos logaritmos e suas condições de existência são etapas importantes no caminho de aprendizagem de funções logarítmicas além das dificuldades apontadas na revisão bibliográfica como, por exemplo, D1, D4, D5 e D8.¹¹

Estratégia para o professor:

Esperamos que essa atividade proporcione um momento de experimentação aos alunos, assim o professor deve deixar os alunos levantar sua hipóteses sem interferência a não ser ao final da atividade durante a correção e discussão. Vale lembrar que a formalização das propriedades deve ser feita em conjunto (professor e alunos).

3º Momento/2ª Atividade:

1-Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; use as propriedades dos logaritmos e calcule: (sem usar a calculadora)

- a) $\log 8$
- b) $\log 12$
- c) $\log 72$
- d) $\log 5$
- e) $\log 0,0001$

¹¹ D1 - Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D4 - Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 - Dificuldade de se expressar na forma escrita e D8 - Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica

f) $\log 200$

2-Se $\log 2 = m$; $\log 3 = n$. Determine $\log 1,5$ em função de “m” e “n”:

3-Determine os valores de x, de modo que $\log_{(x-4)}(x-1)$, exista:

4-Resolva em R:

a) $\log_7 x - \log_7 (x - 1) = \log_7 2$

b) $\log_5 x + \log_5 (x - 2) = \log_5 3$

c) $\log x - \log (x - 1) = \log 6$

5-(UNESP-SP-adaptado) Suponhamos que uma represa de área igual a 128km^2 tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8km^2 e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições:

- a) Qual seria a área infestada após 1 ano, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- b) Qual seria a área infestada após 2 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- c) Qual seria a área infestada após 3 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- d) Qual seria a área infestada após 4 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- e) Qual seria a área infestada após “n” anos, caso não se tomasse nenhuma providência?
- f) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa?

Objetivo:

O objetivo dessa atividade é por meio de exercícios de aplicação fazer com que o aluno faça uso das propriedades e das condições de existência trabalhadas na atividade anterior a fim de causar no aluno a familiarização com essas propriedades. Outro objetivo importante é mais uma vez fazer uso de situações-problema com aplicações em outras áreas do conhecimento a fim de

que o aluno reconheça o logaritmo como ferramenta de resolução de situações-problema e ainda a aplicação do mesmo em outras áreas.

A justificativa para essa atividade são dificuldades encontradas em nossas leituras prévias de trabalhos (revisão bibliográfica) como D1, D2, D3, D4, D5, e D6.¹²

Estratégia para o professor:

Durante a realização dessa atividade, o professor pode dar dicas das propriedades a serem utilizadas, porém nunca resolver para seu aluno que deve conseguir usar suas observações da atividade anterior. As dificuldades podem ser tratadas individualmente se for possível.

4º Momento:

Ao início desse Momento é apresentado aos alunos na sala de informática da Escola o software Winplot bem como suas funções básicas, em especial a construção de gráficos no plano cartesiano.

Como durante a atividade esperamos que alguns conceitos de funções sejam retomados pelo professor, descrevemos a cada item da atividade o que esperamos como respostas dos alunos.

Atividade:

1-Pensando na situação que tratava da bactéria *Escherichia coli*, em que uma bactéria é capaz de se reproduzir dobrando a quantidade de indivíduos a cada ciclo de uma hora, chegamos à conclusão que a relação matemática que

¹² D1 - Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D3 - Problemas na concepção de função exponencial; D4 - Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 - Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 - Problemas de interpretação; D7 - Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais e D8 - Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

nos mostra a quantidade “n” de bactérias presentes na cultura após “t” horas de reprodução é $n=2^t$. Assim o gráfico construído na ocasião e que nos mostra o crescimento populacional da cultura de bactéria *Escherichia coli* em função do tempo é:

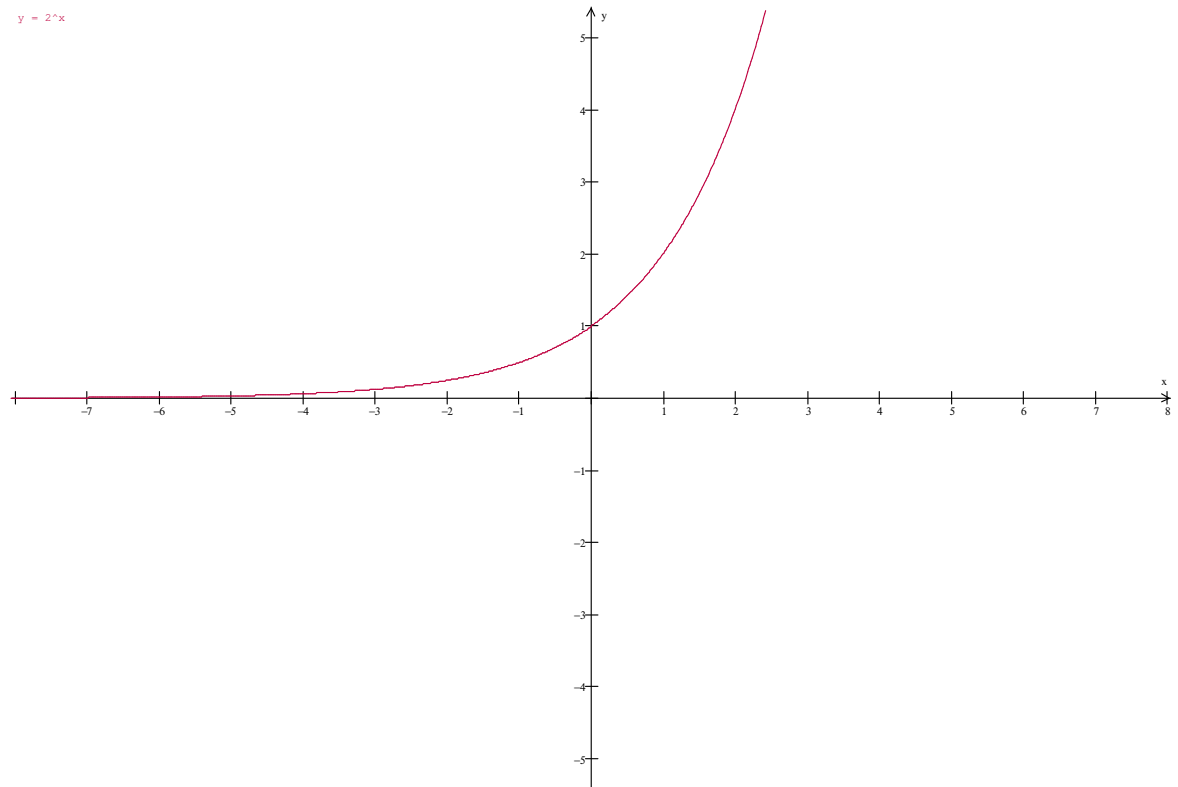


Gráfico 1: Representação gráfica da função $n = 2^t$

- a) O gráfico nos mostra valores negativos para o tempo de reprodução. Como isso pode ser interpretado?

Resposta esperada: Esperamos que os alunos relatem que no problema em questão o número inicial de bactérias foi uma, porém essa informação não está sendo considerada na construção apresentada que apresenta quantidades inferiores a uma bactéria e conseqüentemente valores negativos para o tempo de reprodução.

- b) Sendo o gráfico acima representante da função $f(t) = 2^t$. Qual é o domínio e a imagem dessa função?

Resposta esperada: Achamos que nesse item os alunos encontraram um pouco de dificuldade talvez por não se lembrarem dos termos domínio e imagem. Por esse motivo aconselhamos aos professores que resolvam junto aos alunos fazendo uma breve revisão dos

tópicos domínio e imagem.

- c) Usando a ferramenta logaritmo, escreva uma nova relação matemática (função), só que dessa vez relacionando o tempo “t” em horas com a quantidade “n” de bactérias:

Resposta esperada: $t = \log_2 n$

- d) Usando a nova função matemática preencha a tabela com alguns valores de “n”:

Número de bactérias “n”	“t” ou f(n)

Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam preencher a tabela dos logaritmos em base 2 sem grandes dificuldades, porém orientamos os professores que conduzam as escolhas dos alunos para que não utilizem valores que compliquem seus cálculos. Vale lembrar que a tabela no material do aluno possui mais linhas do que a apresentada acima.

- e) Construa o gráfico de “t” em função de “n” com base na tabela do item b.

Resposta esperada: Não esperamos maiores dificuldades durante a construção do gráfico.

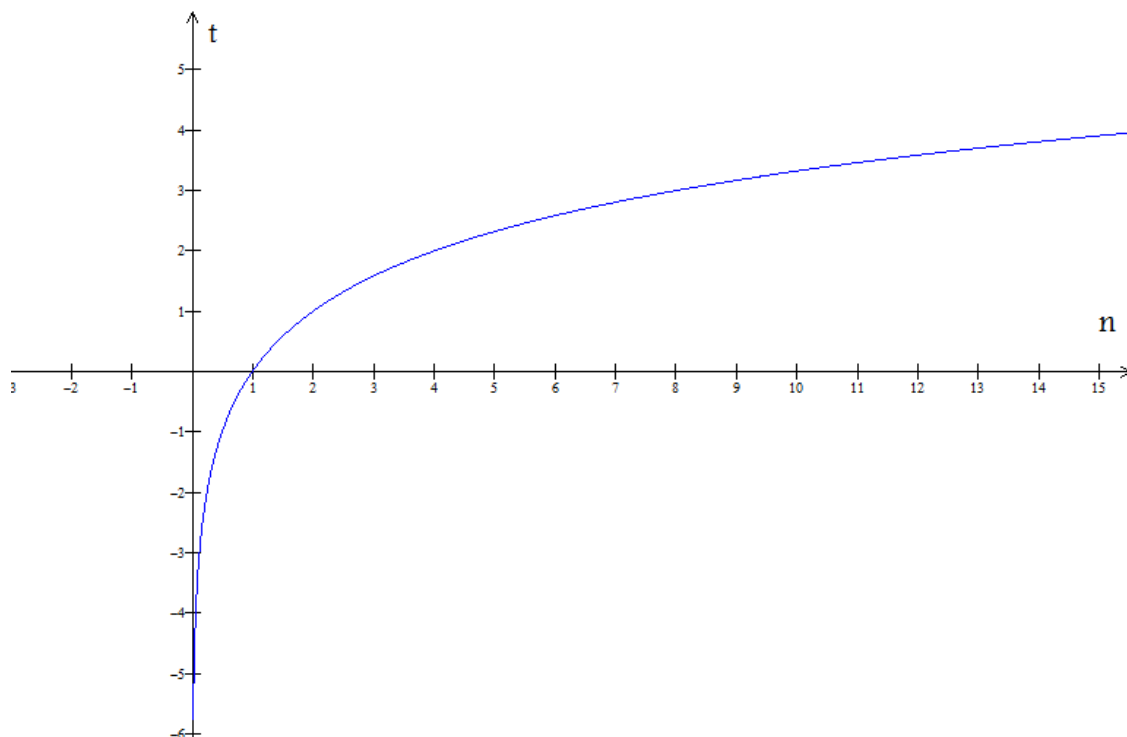


Gráfico 2: Representação gráfica da função $t = \log_2 n$

- f) O que ocorre com o gráfico à medida que o valor de “n” (n° de bactérias) aumenta? Por que não existe gráfico para valores de “n” negativos?

Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam observar o gráfico e responder que a medida que “n” aumenta, “t” também aumenta. Além de responderem que não existe nenhum expoente racional que fará uma potencia de base 2 ter um resultado negativo. Talvez essa última resposta precise da interferência do professor para ser concluída.

- g) Qual o domínio e a imagem da função representada no item “e”?

Resposta esperada: Achamos que após a revisão do professor sobre domínio e imagem, os alunos consigam responder a essa questão sem maiores problemas.

- h) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico da função $f(t) = 2^t$ e da função $f(n) = \log_2 n$ e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resposta esperada:

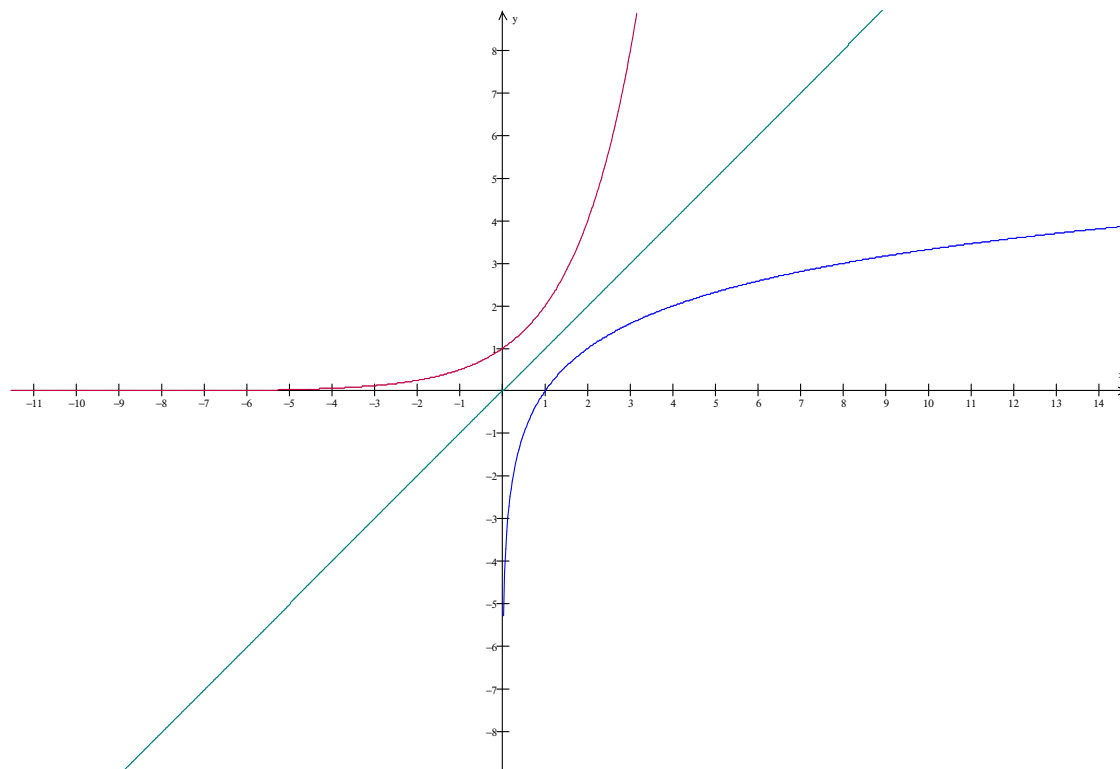


Gráfico 3: Representação gráfica das funções $n = 2^t$, $t = \log_2 n$ e $n=t$

- i) Que observações ou conclusões você pode tirar em relação ao gráfico das duas funções?

Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam visualizar a simetria entre os dois gráficos em que a bissetriz dos quadrantes ímpares representa o eixo de simetria entre as curvas.

2- Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ em seguida trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- Qual o domínio e a imagem de cada função?
- As funções são crescentes ou decrescentes?
- O fato de serem crescentes ou decrescentes tem relações com a base de cada função (exponencial e logarítmica)? Em caso afirmativo, qual a relação?

Resposta esperada: Espera-se que os alunos possam relacionar o fato do gráfico crescente estar ligado a base maior que 1 e o gráfico decrescente ligado a base entre 0 e 1.

- As observações feitas no item “i” do exercício anterior são válidas para essas duas funções?

Resposta esperada: As observações feitas também valem para essas funções.

- e) Qual observação você destacaria como principal quando se compara uma função exponencial com uma função logarítmica de mesma base?

3) Entre tantos números fascinantes, temos o número “e”, base dos logaritmos neperianos, também chamados de logaritmos naturais. Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que provou ser esse número o limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente. O valor aproximado de “e” (com 9 casas decimais), pode ser facilmente memorizado: e = 2,718281828...

Com o auxílio do software Winplot, construa o gráfico de $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ ($f(x) = \log_e x$) e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares tudo no mesmo plano cartesiano.

- a) As funções são crescentes ou decrescentes?
b) As funções são inversas entre si?

Resposta esperada: Mais uma vez é esperado que os alunos apresentem dúvidas. Os professores devem realizar uma breve revisão do tema já trabalhado funções inversas.

- c) As observações e conclusões feitas até agora são válidas no caso do número “e”?
d) As observações podem ser generalizadas para todas as funções exponenciais e logarítmicas? Em caso positivo faça uma lista de observações.

4-Sem construir os gráficos indique para cada função as principais características (domínio, imagem, crescente ou decrescente):

- a) $f(x) = 3^x$
b) $g(x) = \log_3 x$
c) $h(x) = (2,3)^x$
d) $i(x) = \log_{2,3} x$
e) $j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

5-Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

b) $g(x) = \log_3 x$

c) $h(x) = \log_{2,3} x$

Interessante:

O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, para x igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4, é capaz de nos mostrar uma das prováveis fórmulas que delineou o perfil do cartão postal francês, a Torre Eiffel.

Veja:



Imagem: Torre Eiffel, Paris, inaugurada em 31 de março de 1889

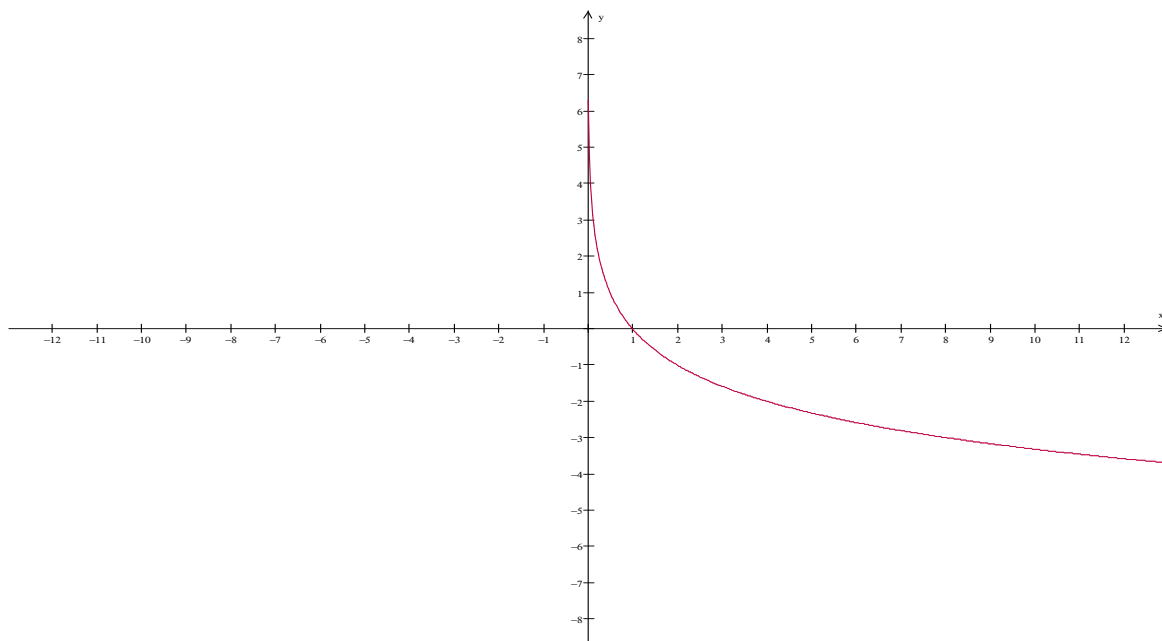


Gráfico 4: Representação gráfica da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Como vimos a parte da curva em que $y \geq 0$ respeita a arquitetura da torre mais famosa do mundo.

Objetivo:

O primeiro objetivo dessa atividade é retomar o conceito de função exponencial por meio de uma situação problema contextualizada apresentada no 2º momento/1ª atividade. Essa retomada se deve ao fato de que durante toda a trajetória tentamos identificar a função logarítmica sendo a inversa da exponencial. Outro objetivo da atividade é o de estabelecer crescimento logarítmico através de tabela e gráfico fazendo sempre a comparação com crescimento exponencial, para tanto é sugerido sempre ao aluno a construção gráfica das duas funções sempre no mesmo plano cartesiano.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, constantemente são retomados conceitos de funções em geral, como domínio e imagem, conceitos esses que julgamos essenciais para o bom entendimento de funções logarítmicas e suas propriedades.

A atividade também tem como objetivo apresentar ao aluno o logaritmo neperiano, por meio de uma atividade de construção gráfica em que o objetivo central é o de comparar $\ln x$ com e^x .

Um objetivo de destaque na atividade é o uso do software winplot para

a construção de gráficos, uma vez que acreditamos que o seu uso trará dinâmica aos gráficos ocasionando maior entendimento das funções além de um ambiente motivador entre os alunos já que por relato dos próprios alunos a aula em ambiente diferente da sala de aula tradicional sempre é visto com bons olhos pelos mesmos, principalmente na sala de informática.

Ao final da trajetória é apresentada ao aluno a título de curiosidade uma aplicação da curva descrita pelo gráfico de uma função logarítmica que descreve a curva em uma das torres mais famosas do mundo.

As dificuldades relatadas em nossa revisão bibliográfica e que nos motivaram na elaboração dessa atividade foram D1, D3, D4, D5, D6, D7, D8 E D9.¹³

Estratégia para o professor:

Inicialmente o professor deve realizar a apresentação do software Winplot aos alunos, em seguida propor o desenvolvimento da atividade de modo que os alunos experimentem e discutam suas resoluções. Imaginamos que durante a atividade alguns conceitos precisem ser revisados, por isso sugerimos que o professor se antecipe e realize uma revisão dos conceitos básicos de funções, como por exemplo, domínio, imagem entre outros.

¹³ D1 - Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D3 - Problemas na concepção de função exponencial; D4 - Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 - Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 - Problemas de interpretação; D7 - Erro proveniente do não estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais; D8 - Problemas na técnica de cálculo do logaritmo e D9 - Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo de logaritmos. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

CAPÍTULO 3

A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM EM SALA DE AULA E A ATUAÇÃO DOS PROFESSORES E ALUNOS

3.1 Professores e alunos envolvidos na investigação: caracterização

Os dois professores colaboradores da pesquisa trabalham numa mesma escola estadual da Diretoria de Ensino de Diadema, na região central da cidade. Com o objetivo de melhor conhecer o trabalho dos professores colaboradores, elaboramos um questionário que se encontra no Anexo A.

A seguir, temos a descrição dos professores:

Professora:

Sexo feminino, 45 anos, 24 anos de magistério, leciona no Ensino Fundamental e Médio em escolas da rede estadual, tem graduação plena em Matemática e já cursou Especialização; participa de capacitação para professores sempre que oferecido pela Secretaria de Educação Estadual.

Participa de trabalhos colaborativos em sua escola, como feiras culturais e exposições, porém nunca tomou parte em nenhum trabalho colaborativo na área de Matemática.

Em sua estratégia de ensino utiliza na maioria das vezes aula expositiva para abordar os conteúdos e, dependendo do tema em estudo, trabalha em grupos, usa pesquisa em jornais, revistas e internet, principalmente como fonte de dados (gráficos, tabelas, entre outros). Adota o livro didático e o Caderno fornecido pela Secretaria de Educação, além de recursos como Saresp, Enem e Olimpíadas de Matemática como fonte de questões.

Sobre o ensino de funções logarítmicas a professora relatou que ensina o tema no primeiro ano do Ensino Médio e procura associar o tema às funções exponenciais trabalhadas anteriormente aos logaritmos, além de fazer uso de exemplos do cotidiano do aluno.

A professora relata ainda que durante a aprendizagem as maiores dificuldades dos alunos não estão relacionadas ao tema logaritmo em si, mas sim a pré-requisitos que às vezes lhes faltam para a aprendizagem do tema, por exemplo, resolução de equações e inequações de todos os tipos. Relata também que sempre utiliza resolução de problemas durante o estudo de logaritmo.

No tocante ao uso de softwares, a professora alega que nunca fez o uso de nenhum *software* e que seu conhecimento sobre o assunto é bastante restrito.

Professor:

Sexo masculino, 27 anos, um ano e seis meses de magistério, leciona no Ensino Fundamental e Médio em escolas da rede estadual e particular, tem graduação plena em Matemática, nunca participou de capacitação para professores nem de trabalhos colaborativos, pois tem pouco tempo de magistério.

Em sua estratégia de ensino, o professor relatou que suas aulas são totalmente expositivas e que em algumas situações, principalmente quando usa livro didático ou apostila, trabalha com resolução de problemas. Desse modo, quando ensina logaritmo, segundo ele, seu procedimento segue a característica de suas aulas.

O professor expõe ainda que, durante a aprendizagem de logaritmos, as maiores dificuldades dos alunos estão relacionadas à resolução de problemas, pois não conseguem interpretar o texto nem estabelecer uma estratégia de resolução, não percebendo o conceito de crescimento exponencial solicitado nos enunciados dos problemas.

No que tocante ao uso de *softwares*, o professor diz que já empregou *softwares* na resolução geométrica de sistemas lineares e que o entendimento de que um parâmetro pode transformar o comportamento do gráfico é muito

mais rápido usando um *software* em relação ao método tradicional (manual), além de o interesse dos alunos pelo *software* tornar o momento da exposição muito mais agradável.

3.2 Análise da THA pelos professores e modificações sugeridas

Organizamos reuniões com os professores com o objetivo de, partindo do conhecimento que eles têm de seus alunos, reelaborar, acrescentar e/ou modificar as propostas de atividades da THA antes de ser trabalhadas com os alunos.

A primeira reunião aconteceu no dia 07.08.2008, na escola em que os professores lecionavam, para que os dois pudessem participar ao mesmo tempo do encontro. Portanto, os professores puderam analisar em conjunto as atividades propostas na THA, e, nessa primeira reunião, os professores conseguiram examinar e opinar até o segundo momento da trajetória. Uma nova reunião foi marcada para uma semana após esse primeiro encontro.

A segunda reunião com os professores aconteceu no dia 14.08.2008 conforme combinado. Nesse encontro os professores conseguiram concluir suas análises e dar suas últimas contribuições para elaboração da versão que seria aplicada em sala com os alunos.

A seguir, apresentaremos a análise das atividades da THA pelos professores.

3.2.1 Reunião do dia 07.08.2008 – Análise das atividades propostas no 1.º Momento/1.ª Atividade

Ao analisar a atividade do 1.º Momento, os professores gostaram da seqüência apresentada, acharam o problema exposto na questão 3 muito pertinente, porém consideraram que os exercícios 1 e 2 não se encaixavam na proposta pretendida com a trajetória e por essa razão sugeriram que eles fossem retirados da seqüência.

Perguntamos aos professores se os exercícios deveriam ser substituídos e a professora respondeu que o problema n. 3 da atividade já contemplava por si só os objetivos do 1.º Momento. O professor concordou com a opinião dada pela professora e assim o 1.º Momento foi reelaborado sem os exercícios 1 e 2.

Análise das atividades propostas no 2.º Momento/1.ª Atividade

Analisando o 2.º Momento/1.ª Atividade, os professores relataram a expectativa sobre como pretendemos abordar o tema logaritmo, uma vez que nunca haviam trabalhado desse modo. Nesse instante, houve reflexões realizadas pelos professores baseadas no conhecimento que eles têm do comportamento de seus alunos. Portanto, acharam que o desafio seria grande, mas que em suas opiniões a sequência para essa atividade estava ótima e que mudanças não seriam necessárias nessa atividade.

Com base no conhecimento sobre seus alunos, os professores também relataram que o uso da calculadora científica talvez se tornasse um obstáculo à aprendizagem, uma vez que a maioria dos alunos nunca manuseou tal ferramenta. Desse modo, propuseram uma breve explicação sobre as principais funções da calculadora, o que foi aceito por todos, e assim, no momento anterior à aplicação da atividade, ficou combinado que cada professor iria detalhar as principais funções da calculadora científica aos seus alunos.

Análise das atividades propostas no 2.º Momento/2.ª Atividade

Os professores relataram que, na análise de tal atividade, gostaram bastante dos exercícios de fixação do tema, principalmente no formato de tabelas que a todo tempo compara o logaritmo com a exponencial.

Os professores foram unânimes em dizer que essa atividade não necessitava de alterações e, desse modo, ela foi mantida na íntegra.

Análise das atividades propostas no 2.º Momento/3.ª Atividade

Ao examinar essa atividade, o professor considerou a atividade complexa e não adequada para o momento da trajetória, muito menos para alunos de 1.º ano do Ensino Médio. A professora concordou com as afirmações e juntos sugeriram que a atividade fosse substituída.

Abaixo apresentamos as situações-problema propostas pelos professores e que de comum acordo substituíram as atividades até então propostas para esse momento:

- 1) Digitando o número 85 numa calculadora e depois apertando a tecla

LOG, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10?

- 2) (UFMT) [...] A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imaginem que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo “t” em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura “h” em metros (adaptado da revista *Superinteressante*, maio 2000, p. 86).

A partir das informações dadas, classifique cada item abaixo em verdadeiro ou falso (justifique as afirmações falsas).

- a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$.
- b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.

- c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.

- 3) (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)$$

com “h” em metros e “t” em anos. Se um dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu uma altura de 3,5 metros de altura, o tempo transcorrido do momento da plantação até o corte foi de?

- 4) Suponhamos que uma represa de área igual a 129 km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 3 km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento dessa vegetação seja dobrar a cada ano. Desse modo, responda:

- a) Qual seria a área infestada após 1 ano, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- b) Qual seria a área infestada após 2 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?

- c) Qual seria a área infestada após 3 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- d) Qual seria a área infestada após 4 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- e) Qual seria a área infestada após “n” anos, caso não se tomasse nenhuma providência?
- f) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa?

3.2.2 Reunião do dia 14.08.2008 – Análise das atividades propostas no 3.º Momento/1.ª e 2.ª Atividades

Neste dia, os professores participaram novamente da análise da THA em grupo e na escola. Mais uma vez, deram destaque a maneira diferente do que eles estão acostumados de abordar o tema logaritmo, pois a atividade sugerida vem com uma nova proposta em que o aluno deve experimentar, levantar hipóteses e tirar conclusões sobre propriedades e condições de existência do logaritmo. A professora falou do grande desafio que seria esperar do aluno tais observações e conclusões, enquanto para o professor que o fator mais importante da atividade era dar autonomia ao aluno acostumado a receber um novo conceito e a partir daí usá-lo, coisa que a atividade não propiciava.

De comum acordo, todos acharam que a atividade tinha grande potencial e resolveram não fazer alterações e aceitar o desafio de implementar uma nova visão de aprendizagem em suas salas de aula.

Análise da atividade proposta no 4.º Momento

A atividade do 4.º Momento proporcionava ao aluno estudar detalhadamente a função exponencial juntamente ao estudo da função logarítmica. Além disso, com o auxílio de um *software* matemático (Winplot), viabilizar uma melhor visualização e construção gráfica da função exponencial e logarítmica.

Na análise das atividades, os professores gostaram da retomada que é feita de uma situação-problema do início da trajetória, questão essa que a princípio havia deixado algumas questões em aberto, por exemplo, a resolução da equação exponencial não direta que naquele momento não pôde ser bem entendida por falta do conhecimento sobre logaritmo, conhecimento esse que os alunos nessa etapa já possuem.

Portanto, os professores relataram que da forma com que as funções logarítmicas estão sendo abordadas na atividade é boa, principalmente comparando sempre seu gráfico ao gráfico da função exponencial.

Em relação ao uso do *software* para desenvolvimento dessa atividade, os professores consideraram importante trabalhar com um *software* matemático, pois ele auxilia o aluno a compreender melhor a visualização e a construção de um gráfico, além de motivá-lo em uma aula num ambiente diferente da sala de aula. Mas afirmaram que nunca fizeram uso de nenhum *software*, em razão de algumas dificuldades, como: quantidade de computadores inferiores ao número de alunos por turma, ausência de suporte técnico e falta de *softwares* que possibilitem o estudo desse conceito na escola.

Durante as discussões referentes à análise das atividades da THA, observamos que os professores possuem diferentes pontos de vista em relação ao desenvolvimento da trajetória em sala de aula, e nesse aspecto eles terão liberdade no desenvolvimento da trajetória. No entanto, não deixamos de observar a tendência da professora em hesitar no trabalho em grupo com os seus alunos, alegando que se torna desgastante em virtude do elevado número de alunos por turma, acarretando a dispersão com assuntos que não estão relacionados com o estudado, perdendo a noção do tempo. Por seu turno, o professor é favorável a esse tipo de trabalho, alegando que traz ótimas discussões no grupo, belas conclusões que sempre contribuem para o desenvolvimento da aprendizagem.

Os professores concordaram que durante as atividades que usam a calculadora e o *software* Winplot as aulas devem acontecer inevitavelmente em grupo em razão do número de calculadoras e computadores disponível.

Contudo, percebemos que os dois professores estavam realmente envolvidos com o projeto e interessados em melhorar a trajetória de aprendizagem dos seus alunos.

Para tanto, vale ressaltar a importância que existe em proporcionar ao professor um ambiente de trabalho colaborativo para que ele se sinta à vontade, podendo expor suas opiniões e modificações. Assim, ele estará aberto para refletir sobre sua didática em sala de aula e até pensar em uma interação entre pesquisa e prática docente.

Após as reuniões e opiniões dos professores colaboradores, organizamos uma nova versão da THA para os professores, outra para os alunos. A versão do professor e do aluno (Anexo B) é basicamente a mesma, diferenciando-se nas orientações existentes na versão do professor.

3.3 Descrição do desenvolvimento da THA pelos professores

O desenvolvimento da THA iniciou em outubro de 2008 com os alunos. O atraso no início ocorreu em razão de os professores não terem terminado a parte do currículo escolar que antecede o ensino de logaritmo como funções do 1.º e 2.º graus, bem como funções exponenciais.

Os professores iniciaram suas aplicações no mesmo dia, 07.10.2008. Os relatórios que se seguem são nossas observações e comparações acerca do desenvolvimento das atividades pelos professores. As observações foram feitas por meio de registro escrito e gravações de áudio.

1.º MOMENTO:

Professora

ATIVIDADE:

A professora deu início à aula explicando como seriam desenvolvidas as aulas nas próximas semanas, esclarecendo que seriam aulas um pouco diferentes das de costume e que todos receberiam uma apostila contendo atividades sobre o novo tema de estudo, a qual poderiam levar para casa, porém deveriam estar sempre em poder deles durante as aulas de Matemática. Diferente do que apresentou durante as reuniões, a professora permitiu que os

alunos sentassem como quisessem, em duplas ou individuais, o que em nossa opinião demonstrou abertura por parte da professora a novas experiências.

Num primeiro momento, os alunos puderam folhear o material para um primeiro contato, e em seguida o professor falou sobre logaritmos, relatando um pouco do contexto histórico, inclusive da origem histórica dos logaritmos por meio das progressões aritméticas e geométricas, fugindo um pouco dos objetivos da trajetória que é apresentar o tema logaritmo posteriormente, num momento em que o aluno sentir a necessidade de uma nova ferramenta de cálculo. Nesse momento, pudemos observar que os relatos do professor não foram bem assimilados pelos alunos, talvez pelo fato de uma grande maioria não se lembrar dos fundamentos básicos das progressões aritméticas e geométricas.

Após essa primeira conversa, a professora realizou uma breve revisão das propriedades básicas da potenciação, bem como resolução de equações exponenciais de forma direta. Chamaremos equações exponenciais na forma direta aquelas em que o aluno consegue igualar as bases sem maiores dificuldades. Durante a revisão, pudemos observar que os alunos possuem grandes dificuldades nas operações básicas da potenciação, como prevíamos. Um aspecto importante do professor é o esclarecimento das dúvidas de carteira em carteira, realizando um atendimento individual aos alunos.

A revisão feita pela professora trouxe à tona alguns aspectos que não podemos deixar de relatar, por exemplo, um pequeno grupo de alunos que se mantiveram indiferentes à atividade, talvez por não possuírem conhecimentos sobre potenciações e exponenciais ou por simplesmente recusarem a participação nessa atividade. Pretendemos na próxima atividade entrevistar esses alunos, caso o fato se repita. Chamou nossa atenção a resolução dada por um aluno a uma equação exponencial proposta pelo professor:

$$\text{Equação: } 8^x = 2^6$$

$$\text{Resolução do aluno: } 2x = 48 \text{ (regra de três, segundo o aluno)}$$

$$x = 48/2$$

$$x = 24$$

Essa resolução deixou claro que, apesar de a maioria dos alunos da classe dominar os conceitos básicos de resolução de equações exponenciais,

havia aqueles que não dominavam tais conceitos e que isso seria um obstáculo de aprendizagem para alguns alunos.

Após essa revisão inicial, a professora solicitou aos alunos a leitura e resolução do problema inicial de nossa trajetória.

Observando a resolução de alguns alunos, pudemos constatar que uma das maiores dificuldades encontradas por eles na resolução de situações-problema é identificar os dados relevantes do problema e em seguida tratar a informação. Em geral, os alunos apresentaram mais dificuldades nesse tipo de situação do que nas equações apresentadas pelo professor durante a revisão.

Dos 35 alunos presentes, 19 realizaram a atividade sem quaisquer dúvidas; por seu turno, os outros 16 encontraram dificuldades, principalmente no item “d” do problema, evidenciando dificuldade em generalizar uma regularidade.

No item “b” da atividade, os alunos deveriam responder qual o faturamento da empresa em três anos ($3^3 = 27$ milhões), porém vários alunos deram a resposta correspondente a dois anos de faturamento ($3^2 = 9$ milhões). Esse erro pode ter ocorrido por falta de atenção ou por não existir uma regularidade na pergunta, ou seja, o item “a” pergunta sobre o faturamento após um ano e o item “b” vem com a pergunta de três anos, e não de dois anos. Este equívoco foi superado pela professora por meio da construção de uma tabela com o faturamento da empresa em função do tempo. Essa atitude do professor merece destaque, pois eliminou um obstáculo de aprendizagem que vinha se desenhando entre os alunos. A tabela criada pela professora será colocada na 3.^a versão da trajetória que deixaremos para eventuais estudos.

Após a construção da tabela, os alunos conseguiram identificar a relação matemática que dava o faturamento da empresa em função do tempo.

Vejamos como a construção da tabela foi feita pela aluna Bruna:

d)

T	f
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

3^1
 3^2
 3^3
 3^4
 3^5

$3^x = 100$

Figura 4: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Uma boa discussão ocorreu entre os alunos quando a pergunta foi qual o momento exato em que o faturamento dessa empresa seria de 100 milhões de reais? Vejamos os relatos de alguns deles. Para preservar a identidade dos alunos daremos nomes fictícios:

Aluno Matheus: “A maior dificuldade é fazer o 100 virar base 3”.

Aluna Vivian: “Como eu não consegui fazer o 100 virar base 3, eu olhei na tabela do problema e respondi o valor mais perto do 100”.

Aluna Bruna: “Eu fui multiplicando o 3 até chegar perto do 100”.

Aluna Tatiane:

g) $3^x = 100$ milhões
 $3^x = 22.5^2$
 (não deu certo, partir p/a estimativa)
 $3^4 = 81$
 $x = 4$
 R = aproximadamente em 4 anos e 3 anos

Figura 5: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

A professora parabenizou os alunos pela estimativa feita e leu a nota histórica presente na trajetória, ressaltando que esse tipo de problema é mais comum do que se imagina e que logo os alunos conheceriam uma ferramenta capaz de auxiliá-los nesse tipo de situação.

O desenvolvimento do 1.º Momento pela professora durou três dias (7, 8 e 21.10), sendo todos os dias aulas dobradas de 45 minutos cada.

No decorrer da atividade, a professora demonstrou conhecimento da atividade e se precipitou ao falar do logaritmo antes de apresentar situações em que uma nova ferramenta se faz necessária, assim como é a proposta de nossa trajetória. Demonstrou paciência alternada com ansiedade, pois às vezes dava o tempo necessário para os alunos buscarem suas respostas; em outros momentos, não aguardava esse tempo e resolvia na lousa a questão.

1.º MOMENTO:

Professor

ATIVIDADE

Diferentemente da professora, o professor não realizou o estudo das funções exponenciais, tampouco resolução de equações exponenciais, o que a nosso ver poderá ser um obstáculo de aprendizagem para os alunos por falta de conhecimentos prévios. O professor mencionou que pretende a cada situação fazer as devidas intervenções e tratar do tema conforme a trajetória se desenvolver.

A aula teve início com uma breve explicação do professor sobre como seriam as próximas aulas, dizendo aos alunos que a única diferença das aulas diárias seria uma apostila que todos teriam à disposição e poderiam levar para casa, mas que não poderiam deixar de trazê-la em dias de aula de Matemática. Assim como a professora, o professor propôs o manuseio do material por parte dos alunos como um primeiro contato e logo em seguida iniciou uma breve revisão sobre as propriedades da potenciação.

Aparentemente, os alunos não demonstraram maiores problemas em relação à potenciação, a não ser com expoente negativo, o que necessitou do professor um tempo maior de dedicação. Ao contrário da outra sala (professora), nesta todos os alunos estavam realizando a atividade, mesmo com grandes dificuldades apresentadas por alguns, que relataram não gostar de Matemática e possuir um problema com a matéria desde as séries iniciais.

Na segunda parte da revisão, o professor resolveu trabalhar equações exponenciais. Vale lembrar que os alunos não haviam aprendido equações

exponenciais, e, como prevíamos, eles não conseguiram resolver a grande maioria das equações propostas pelo professor. Desse modo, o professor resolveu o que ele mesmo chamou de contra-exemplos, que nada mais eram do que equações semelhantes às equações dadas. Após os contra-exemplos os alunos conseguiram solucionar a grande maioria das equações, exceção feita às equações que necessitavam de transformação em ambos os membros, por exemplo: $9^x = 243$.

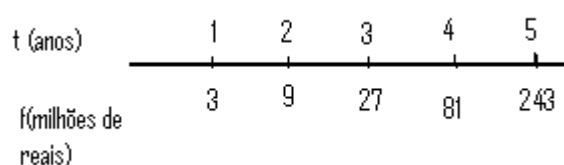
Após esse período de revisão, o professor, diferente da professora, realizou a leitura do 1.º momento para seus alunos, destacando os pontos importantes do problema. Salientamos que o professor inicialmente parecia ter a postura voltada à autonomia dos alunos, inclusive na leitura, segundo ele próprio. O professor solicitou aos alunos que realizassem a atividade em casa, em razão do curto tempo, e no dia seguinte retomou a questão.

Ao voltar à questão, o professor se deparou com um grande problema da sala, a lição de casa, pois a maioria dos alunos não fez o que foi solicitado. Entre os que fizeram, somente uma aluna conseguiu desenvolver todo o problema sem erros. Veja o relato da aluna:

Iara: “Lendo mais de uma vez fica mais fácil de entender o problema”.

Como a maioria dos alunos não realizou a atividade, o professor leu mais uma vez e em seguida pediu para os alunos resolverem o problema em sala de aula.

O item “a” da atividade foi respondido por todos sem maiores dificuldades, já o item “b” teve a ocorrência do mesmo problema da sala do professor PA, ou seja, alguns alunos responderam sobre o lucro da empresa após 2 anos e não 3 anos, como solicitado. Diferentemente da professora, o professor usou outro tipo de registro para contornar o problema:



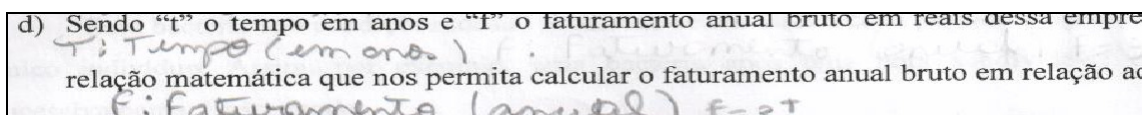
Acreditamos que esse tipo de registro não é favorável ao entendimento do aluno, uma vez que relaciona duas grandezas diferentes numa mesma reta real. A construção da reta apresentada acima foi feita pelo professor no

quadro-negro. Tomando como base a reta na lousa, os alunos conseguiram resolver suas questões com algumas dificuldades, principalmente no item em que deveriam generalizar a regularidade da função, assim como ocorreu com a outra sala. Acompanhe algumas conclusões de alunos:

Aluna Amanda: “ $3^t = f$, ou seja, elevando 3 ao tempo temos o faturamento”.

Aluno Thomas: “ $3^2 \cdot t = f$ ”.

Aluno Manoel:



d) Sendo “t” o tempo em anos e “f” o faturamento anual bruto em reais dessa empresa;
 t: Tempo (em anos) f: faturamento anual bruto
 relação matemática que nos permita calcular o faturamento anual bruto em relação ao
 f: faturamento (anual) $f = 3^t$

Figura 6: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Outra dificuldade encontrada por grande parte dos alunos foi referente ao item “f”, que pede quantas vezes o faturamento aumentou, o que demonstra um obstáculo em entender o que se pede no problema, assim como prevíamos em nossas hipóteses.

Na questão em que os alunos se deparavam com uma situação em que as bases não eram igualadas de forma direta, item “g”, tivemos uma troca de opiniões entre eles:

Aluno Juliano: “Não é possível responder, pois 100 não é potência de base 3”.

Aluna Michele: “Já sei!!, depois de quatro anos e alguns meses, pois quatro anos é 81 milhões”.

Após essa discussão, o professor ouviu todas as estimativas feitas pelos alunos e explicou que o objetivo a partir desse momento é conhecer uma ferramenta matemática capaz de solucionar esse tipo de situação.

A aplicação do 1.º momento pelo professor durou 3 dias (7, 14 e 17.10), sendo 2 aulas de 45 minutos por dia.

Durante a aplicação das atividades do 1.º momento, pudemos observar que a sala do professor possui um grande potencial de aprendizagem, porém foi comprometido em razão de alguns fatores: o despreparo do professor perante as atividades propostas; o tempo insuficiente para os alunos realizarem as atividades; além do fato de a sala não ter trabalhado equações exponenciais,

o que foi um obstáculo de aprendizagem, conforme previsto. Como ponto positivo, podemos destacar a dinâmica do professor que consegue manter seus alunos sempre ligados em sua aula, aspecto que em alguns momentos falta à professora.

2.º MOMENTO:

Professora

1.ª ATIVIDADE:

No início da 1.ª atividade do 2.º momento, a professora realizou a leitura da atividade para seus alunos, não dando a oportunidade para que eles próprios fizessem. A atividade tratava-se do crescimento populacional de bactérias que a partir de uma se duplicavam a cada hora. Após a leitura, questionou a sala sobre o item “a”, a fim de elaborar uma resposta coletiva. Logo em seguida, convidou seus alunos a responderem os itens restantes da atividade. Mais uma vez, um grande número de alunos apresentou problemas com a interpretação do texto, bem como dificuldades de se expressar na forma escrita, conforme havíamos previsto com base em nossa revisão bibliográfica. No item “b” da atividade era solicitada a quantidade de bactérias após três horas de reprodução. Enquanto a maioria dos alunos não apresentou problemas na resolução, outros não conseguiram resolver, talvez por consequência da dificuldade D4¹⁴ apresentada em nossa revisão bibliográfica. Portanto, no lugar da resposta correta, oito bactérias, tiveram alguns erros que foram corrigidos pelos próprios alunos no decorrer da atividade:

Aluno Cristian: “A resposta do “b” é 6 porque são 2 por hora”.

¹⁴ D4 – Tendência ao pensamento linear em situações não lineares. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Cristian: “Espere aí, dobrar é multiplicar por dois e não somar dois!!”.

Professora: “Alguém percebe alguma regularidade??”.

Aluna Bruna: “De hora em hora a quantidade dobra, é só fazer sempre vezes dois a cada hora que passar”.

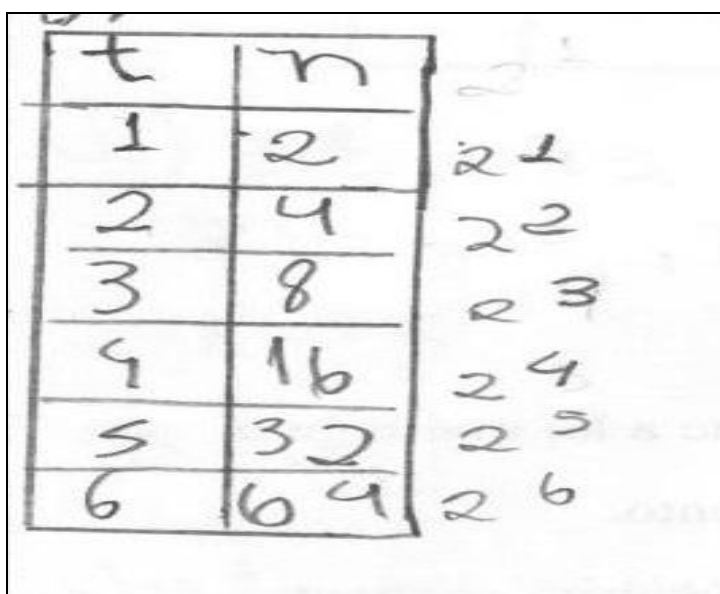
Aluna Daniela: “A conta é 2 elevado ao tempo para saber o número de bactérias”.

Professora: “Como escrever isso matematicamente?”.

Aluna Bruna: “Vai ficar $n=2^t$ ”.

Assim, o professor fechou a primeira parte da atividade utilizando uma tabela parecida com a sugerida na atividade do primeiro momento. Com a tabela fica evidenciado que os alunos conseguem verificar a regularidade com maior facilidade:

Aluna Daniela:



t	n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

2¹
2²
2³
2⁴
2⁵
2⁶

Figura 7: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

A aula teve continuidade com a construção do gráfico que representava o crescimento populacional das bactérias em função do tempo. Nesse primeiro

momento o gráfico foi construído sem o auxílio do *software* Winplot, pois o objetivo principal da atividade era fazer uma construção simples para, a partir de então, estimar o tempo necessário para que se tenham 1.000 bactérias nessa cultura. Alguns alunos encontraram dificuldades na construção, demonstrando não dominar os conceitos básicos de plano cartesiano, por exemplo, os eixos, pares ordenados. Relataram principalmente que não faziam idéia de como seria a curva de uma função exponencial, deixando claro que esse tópico não fizera parte do conteúdo que antecedeu a aplicação dessa atividade, o que dificultou bastante o desenvolvimento do 2.º momento, uma vez que crescimento exponencial faz parte do conteúdo preliminar que os alunos deveriam ter estudado. Com algumas dificuldades, os alunos construíram os gráficos e sem maiores problemas conseguiram estimar o tempo de reprodução da bactéria a partir da observação do gráfico. Esse fato demonstra mais uma vez que os alunos estão empenhados na realização da atividade.

Aluno Bruno:

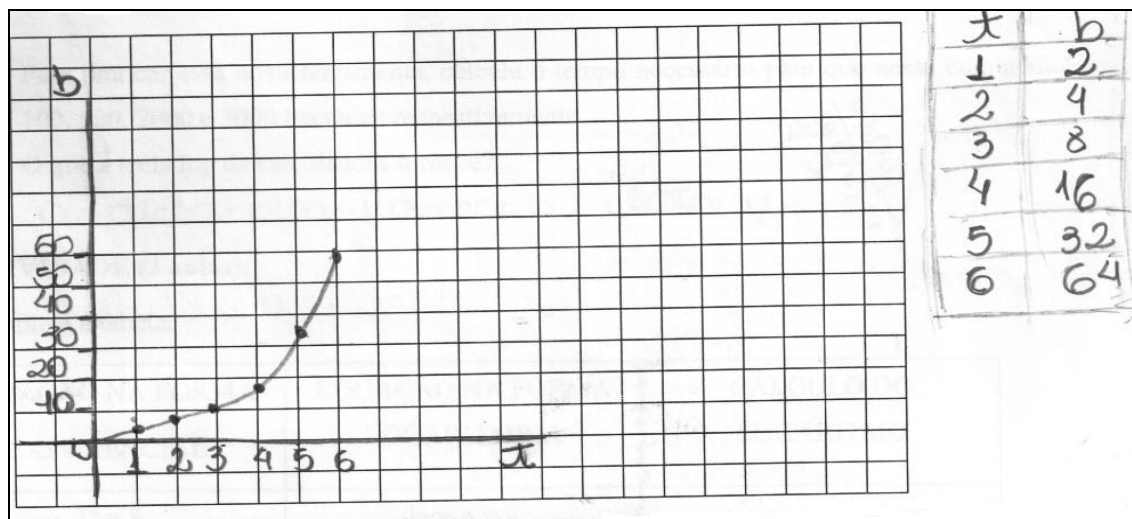


Figura 8: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

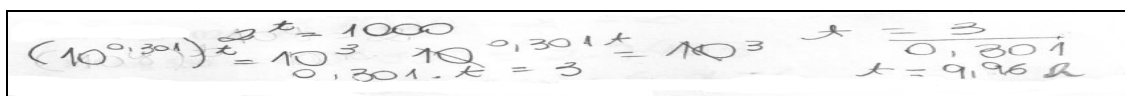
Após a construção do gráfico, deu-se início à parte mais delicada de toda a trajetória, que é o primeiro contato dos alunos com o logaritmo. Isso

ocorreu a partir da situação estimada com base no gráfico, ou seja, em quanto tempo existirão 1.000 bactérias nessa cultura? Depois da estimativa feita pelos alunos, eles foram desafiados pela professora a calcular o tempo exato em que isso pode ter ocorrido. Para tanto, foi apresentada uma pequena trajetória com o uso da calculadora em que os alunos, com o auxílio da máquina e da tecla log, conseguiam igualar as bases da equação exponencial e assim resolvê-la.

A professora fez uma breve explicação das principais funções da calculadora e em seguida esclareceu que as bases da equação exponencial seriam igualadas a 10. A explanação dada foi principalmente pelo fato de nosso sistema de numeração ser decimal e que, portanto, a base 10 é universal, e o uso da calculadora facilitaria, porém o professor fez questão de salientar que outras bases também solucionariam o problema. Desse modo, os alunos iniciaram a trajetória proposta utilizando a calculadora e, conforme o esperado, mesmo com a explicação e com a calculadora, muitos apresentaram a dificuldade D9.¹⁵

A aluna Andréia conseguiu realizar a atividade sem nenhuma dificuldade e por essa razão o professor partiu de suas conclusões para encaminhar a atividade com o restante da sala, propondo que a aluna relatasse suas conclusões e abrindo um pequeno debate entre os alunos. Ao final dessa atividade:

Aluna Andréia:



$$\begin{aligned} (10^{0,301})^t &= 10^3 \\ 10^{0,301 \cdot t} &= 10^3 \\ 0,301 \cdot t &= 3 \\ t &= \frac{3}{0,301} \\ t &= 9,96 \end{aligned}$$

Figura 9: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

¹⁵ D9 – Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Professora: “O que a tecla log nos fornece?”.

Aluna Bruna: “O expoente do 10”.

Aluno Bruno: “10 elevado ao número que aparece na calculadora quando apertado log é igual a 2”.

Aluna Andréia: “A tecla log fornece o valor do ‘y’, que é o expoente da base 10 para que a resposta seja 2”.

Professora: “Portanto a conclusão é de que o log é um expoente!!”.

Em seguida, os alunos responderam o último item da 1.^a atividade praticando a resolução de equações exponenciais com o uso da nova ferramenta apresentada. Como já era esperado, houve grandes dificuldades, indo ao encontro das dificuldades D7 e D8,¹⁶ talvez por ser o primeiro contato dos alunos com a nova ferramenta de cálculos.

2.^a ATIVIDADE:

A segunda atividade tinha como objetivo principal estabelecer o logaritmo como operação inversa da exponencial. Para tanto, foi proposta a escrita de equações logarítmicas a partir de equações exponenciais, resolução de equações exponenciais usando equações logarítmicas e vice-versa, além do último exercício da atividade em que os alunos deviam estabelecer um conceito para logaritmos a partir do conceito de exponencial.

Durante a realização da atividade, os alunos apresentaram grande dificuldade em escrever equações logarítmicas a partir de equações

¹⁶ D7 – Erro proveniente do não-estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais e D8 – Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

exponenciais e vice-versa. Outro obstáculo encontrado foi estabelecer a relação do logaritmo com a potenciação. Somente após a socialização da opinião de alguns alunos é que a sala demonstrou entendimento sobre o tema.

Aluna Érica:

$2^x = 32$	$\log_2 32 = x$	$x = 5$
$3^x = 243$	$\log_3 243 = x$	$x = 5$
$10^x = 50$	$\log 50 = x$	$x = 1,6989$
$10^x = 0,98$	$\log 0,98 = x$	$x = 8,773$
$10^x = 950$	$\log 950 = x$	$x = 2,9777$
$10^x = 15000$	$\log 15.000 = x$	$x = 4,1760$

Dhs: Se a base do logaritmo for 10, costuma-se oculta-la.

2-Determine:

a) $\log_2 1024$ $2^x = 1024 = 2^x = 2^{10} = x = 10$

b) $\log 550 = 10^x = 550 \Rightarrow 2.7403$

c) $\log_4 4096$ $4^x = 4096 \Rightarrow 4^x = 4^6 \Rightarrow x = 6$

d) $\log 5,8$ $10^x = 5,8 \Rightarrow 0.7634$

e) $\log 700$ $10^x = 700 \Rightarrow 2.8450$

Figura 10: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Aluna Camila: “Logaritmo é uma conta com a base mais simplificada, o inverso da exponencial”.

Aluno Carlos: “Logaritmo é um cálculo para obter um resultado mais exato em contas que não conseguimos igualar as bases”.

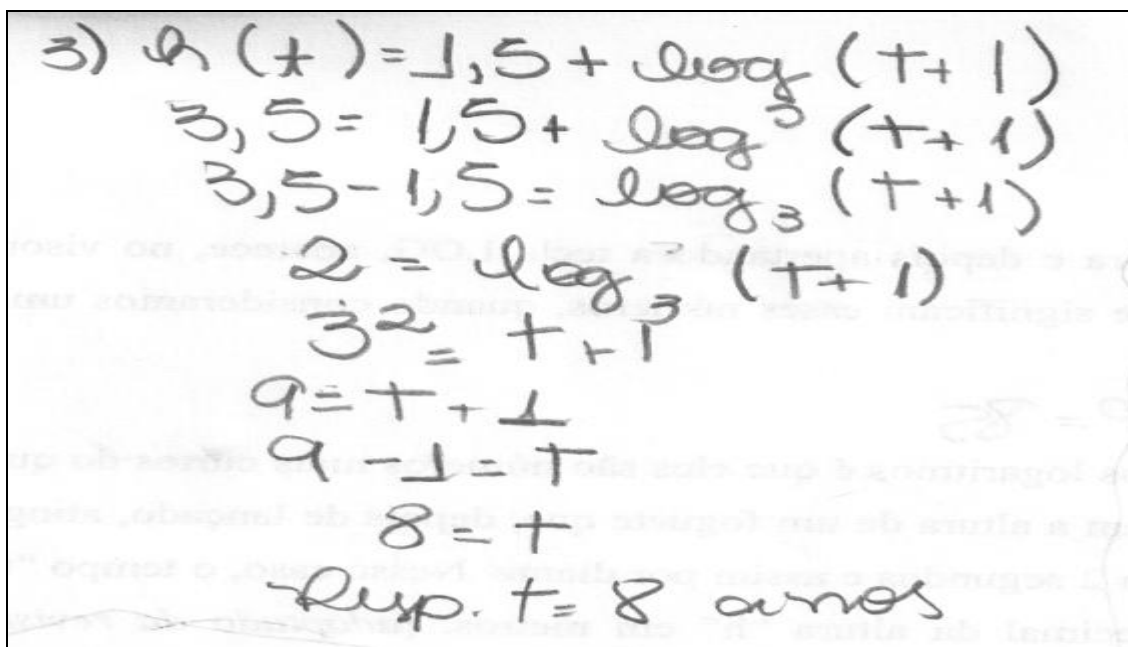
Aluno Eric: “Logaritmo é uma maneira de a gente calcular contas exponenciais”.

De modo geral, após a socialização da sala, a professora conseguiu estabelecer entre os alunos um consenso sobre a definição de logaritmo e quais suas utilidades para a Matemática.

3.ª ATIVIDADE:

A 3.ª atividade foi proposta desafiando os alunos a resolverem os problemas sem o auxílio da professora, mas durante a resolução eles poderiam discutir entre eles. Algumas dificuldades foram observadas ao longo da atividade, por exemplo, as dificuldades D1, D4, D5, D6, D7, D8 e D9. A professora deixou os alunos discutirem e sanarem suas dúvidas dentro do seu grupo, existindo grupos que se ajudavam na resolução. Vejamos algumas resoluções:

Aluna Bruna:



Handwritten solution by Aluna Bruna:

$$\begin{aligned} 3) \ln(t) &= 1,5 + \log_3(t+1) \\ 3,5 &= 1,5 + \log_3(t+1) \\ 3,5 - 1,5 &= \log_3(t+1) \\ 2 &= \log_3(t+1) \\ 3^2 &= t+1 \\ 9 &= t+1 \\ 9-1 &= t \\ 8 &= t \\ \text{Resp. } t &= 8 \text{ anos} \end{aligned}$$

Figura 11: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

1) a) 6 km^2
 b) 12 km^2
 c) 24 km^2
 d) 48 km^2
 e) $3 \cdot 2^n = n \text{ área i. nle.}$
 $3 \cdot 2^n = 129$
 $2^n = \frac{129}{3}$
 $2^n = 43$
 $(10^{0,301})^n = 10^{1,63}$
 $0,301 n = 1,63$
 $n = \frac{1,63}{0,301}$
 $n = 5,42$
 Resp. Aproximadamente
 5,5 anos

Figura 12: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do ensino médio, sala da professora.

Aluno Eric:

Digitando o número 85 numa calculadora e depois apertando a tecla LOG, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10?

$$10^{1,9294189} = 85$$

Figura 13: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

As dúvidas que persistiram foram trabalhadas pelo professor na lousa com a participação dos alunos que conseguiram resolver com mais facilidade.

Além das dificuldades já esperadas com base em nossa revisão bibliográfica, os alunos apresentaram dúvidas em generalizar uma regularidade, dificuldades na resolução de equações em que o log não se apresenta sozinho em um dos membros, $3,5 = 1,5 + \log_3 (t+1)$, por exemplo. Após essa atividade podemos concluir que os objetivos foram atingidos, uma vez que os alunos aparentemente superaram os obstáculos. Entretanto, só teremos a certeza após a avaliação de aprendizagem que será desenvolvida nas próximas aulas.

A aplicação do 2.º momento teve duração de cinco dias, sendo duas aulas por dia, totalizando dez aulas de 45 minutos cada.

2.º MOMENTO:

Professor

1.ª ATIVIDADE:

A aplicação da 1.ª atividade do 2.º momento teve início na sala do professor no dia 31 de outubro de 2008, com a leitura do texto inicial da atividade. A princípio, o professor deixou a leitura e discussão do item “a” por conta dos alunos, diferente da professora que realizou a leitura e respondeu esse item junto com os seus alunos. Algumas observações iniciais foram interessantes entre os alunos dessa sala, por exemplo:

Aluno Cleber: “Isso é matemática?”.

Afirmações como essas evidenciam que problemas de aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento não são tão comuns, apesar de os professores terem relatado que fazem uso desse tipo de problemática em suas aulas. Como o problema inicial se tratava de uma aplicação ligada à Biologia, alguns alunos sugeriram ao professor que durante a aula de Biologia a sala perguntasse ao seu professor algumas das doenças causadas por esse tipo de bactéria, e assim foi feito; os alunos trouxeram na aula seguinte o item “a” respondido com o auxílio do professor de Biologia.

Os itens restantes da atividade foram solicitados como lição de casa em razão do curto tempo da aula. Na aula seguinte, o professor pediu aos seus alunos que relatassem como foi a resolução da atividade em casa. Nesse momento nos deparamos com outro grande problema da sala: a maioria dos alunos não realizou a tarefa de casa. Perguntados sobre o motivo, alguns disseram que trabalham e não têm tempo de fazer a lição; outros responderam que se esqueceram, porém o que mais nos surpreendeu foi o fato de os alunos relatarem que a maioria da sala nunca faz as lições de casa. Desse modo, o professor decidiu e nos comunicou que não iria pedir mais nada para ser feito em casa, e que a trajetória provavelmente sofreria atrasos.

O professor deu um tempo da aula para os alunos realizarem a atividade; a maioria deles desenvolveu a atividade até o item “f”, que se tratava de questões diretas, por exemplo, questões que pediam o total de bactérias após 3 horas. O primeiro problema surgiu na questão em que era solicitada ao aluno a função matemática que fornece o número de bactérias em função do tempo, $n=2^t$. a exemplo da outra sala de aplicação, os alunos demonstraram uma grande dificuldade em generalizar uma regularidade. Tanto professor como a professora tentaram sanar o problema criando uma tabela para facilitar a visualização da regularidade pelos seus alunos, e, por conseguinte, eles conseguiram determinar a função.

O próximo passo da atividade foi construir o gráfico da função determinada anteriormente. Mais uma vez problemas foram identificados; os alunos demonstraram não conhecer conceitos mínimos de plano cartesiano, principalmente no que se refere à escala. O professor sugeriu que aqueles que conseguiram construir o gráfico ajudassem seus colegas e assim aparentemente todos entenderam os conceitos básicos de plano cartesiano e conseguiram finalizar a atividade. Como ponto positivo dessa aplicação, podemos destacar o fato de o professor realizar com os seus alunos uma interpretação geral do gráfico, bem como da curva exponencial descrita por este. Esse fato foi facilitador na estimativa do momento exato em que existiriam 1.000 bactérias na comunidade a partir da observação do gráfico feito pelos alunos.

Ao iniciar o item “h”, que foi o primeiro contato dos alunos com o logaritmo, o professor desenvolveu toda a questão com os seus alunos, diferente da professora, que permitiu que seus alunos tentassem desenvolver os passos da atividade até que um deles conseguisse. O professor iniciou com a estimativa dos seus alunos no item anterior, ou seja, $2^t = n \rightarrow 2^t = 1000 \rightarrow 2^t = 10^3$, e disse a eles: “Como podemos perceber, é impossível com o que sabemos igualar as bases dessa equação exponencial. Assim, nosso maior problema é tornar o número 2 uma potência de base 10 ou tornar o número 10 uma potência de base 2. Para facilitar o uso da calculadora, que possui uma tecla que vamos conhecer hoje e que usa a base 10, nosso objetivo será escrever o número 2 como uma potência de base 10.”

Desse modo, demonstramos como o professor desenvolveu a atividade com os seus alunos:

1.º) **Professor:** Teclem $\log 2 =$

2.º) **Professor:** Qual o resultado?

Alunos: 0,301029995...

3.º) **Professor:** Agora teclem $10^{0,301029995}$

4.º) **Professor:** O resultado foi aproximadamente quanto?

Alunos: 2

Professor: Foi aproximado porque não usamos as infinitas casas decimais do 0,301029995...

5.º) **Professor:** Isso significa que podemos escrever o número 2 como potência de base 10!!!! ou seja $2 = 10^{0,301029995}$

6.º) **Professor:** Temos então que:

$$2^t = n$$

$$2^t = 1000$$

$$2^t = 10^3$$

$$(10^{0,301})^t = 10^3$$

$$10^{0,301t} = 10^3$$

$$0,301t = 3$$

$$T \approx 9,96 \text{ horas}$$

O professor solicitou aos seus alunos que calculassem o momento exato em que existirão 100 bactérias nessa cultura com o propósito de verificar o entendimento dos alunos na sua explicação. A maioria dos alunos conseguiu resolver o problema, deixando a impressão de que o objetivo da atividade fora alcançado. Nesse momento, o professor pergunta a seus alunos o que a tecla log da calculadora nos fornece, e as opiniões começaram a surgir pela sala:

Aluno Davi: “A tecla log fornece o expoente do 10 para a resposta ser 2”.

Aluna Maria: “10 elevado ao que apareceu no visor foi igual a 2”.

Aluna Carla: “A tecla log fornece o expoente do 10 para que o resultado seja o número que você teclou para calcular, porque já fiz o teste e a tecla log serve para qualquer valor, não só para o 2”.

Nesse momento, o professor falou com a sala sobre a escolha da base 10, salientando que outras bases também podem ser usadas no logaritmo, e deixou duas perguntas sem responder para seus alunos: “Será que pode ser qualquer base? Será que é possível calcular o logaritmo de todos os números? Essas são questões que temos que pensar um pouco mais”.

2.ª ATIVIDADE:

Com o objetivo de relacionar o logaritmo com a exponencial, o professor deu início à 2.ª atividade do 2.º momento. Grande parte dos alunos demonstrou dificuldades em entender a relação entre a operação logarítmica e a exponencial, porém elas foram menos intensas que na outra sala de aplicação, talvez pelo fato de a interação entre o professor e a sala ter sido mais intensa na sala do professor. O ponto forte da atividade foi a possibilidade de os alunos

trabalharem com logaritmos em bases diferentes da base 10, solidificando o entendimento de logaritmo por parte dos alunos que o definiram:

Aluna Maria: “Em minha opinião logaritmo é um instrumento para simplificar equações quando não conseguimos igualar as bases”.

Aluna Brenda: “Logaritmo é uma forma de resolver equações onde não é possível igualar as bases”.

Aluno Amilton: “Problemas complicados exigem cálculos complicados, para resolver esses problemas precisamos de coisas novas!! Logaritmo serve para ajudar a resolver situações complicadas, assim como a fórmula de Baskara!!”.

Aluno João:

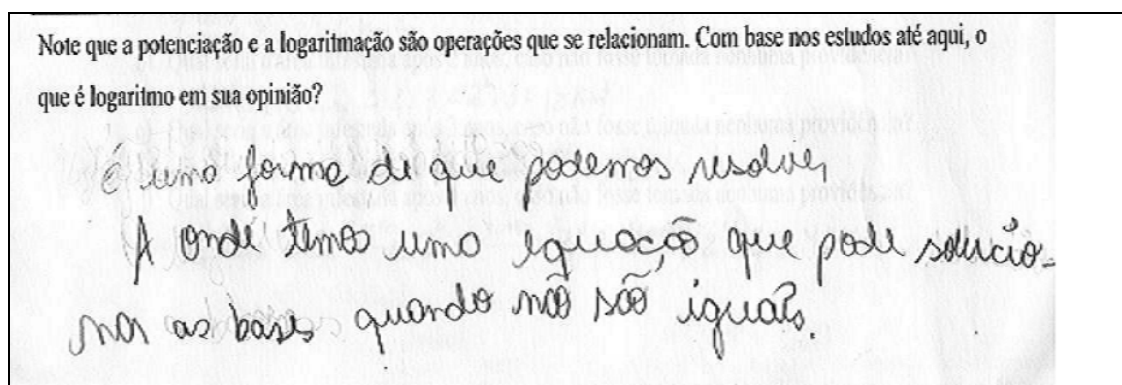


Figura 14: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

3.ª ATIVIDADE:

A terceira atividade teve início com o professor formando duplas de alunos e solicitando a resolução dos problemas apresentados. Vale lembrar que essa atividade tinha como objetivo usar a nova ferramenta na resolução de problemas de outras áreas, bem como da própria Matemática. Como esperávamos, assim como na sala da professora, as dificuldades D1, D4, D5,

D6, D7, D8 e D9¹⁷ foram percebidas durante a resolução dos problemas, além dos obstáculos em generalizar uma regularidade e resolver equações em que o logaritmo não aparece sozinho em um dos membros, a exemplo da sala da professora. Seguindo o perfil apresentado até aqui no desenvolvimento da trajetória, o professor acompanhou de perto a resolução de seus alunos, indo periodicamente à lousa resolver questões quando as dúvidas eram gerais. Não conseguimos nesse momento identificar se o fato de o professor resolver as questões com os seus alunos é ou não um aspecto positivo na aprendizagem, uma vez que temos duas salas com professores de perfis diferentes, pois a professora não auxiliou seus alunos até que alguns conseguissem resolver o problema e socializassem suas resoluções.

De modo geral, as dificuldades apresentadas pelas duas salas são semelhantes. Apesar das formas de trabalho bem particulares dos dois professores, acreditamos que as avaliações realizadas nos trarão pequenas diferenças nessas dificuldades a fim de traçarmos um perfil na interação de cada professor com sua respectiva turma.

Ao final da aplicação da 3.^a atividade, o professor analisou como positiva a resolução de seus alunos, destacando a interação entre as duplas e os empenhos da maior parte da sala em buscar soluções para os problemas apresentados. Apontou como ponto negativo uma pequena parte de alunos que nunca tentam participar das atividades, por mais interessantes que sejam.

¹⁷ D1 – Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D4 – Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 – Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 – Problemas de interpretação; D7 – Erro proveniente do não-estabelecimento do logaritmo como ferramenta de resolução de equações exponenciais; D8 – Problemas na técnica de cálculo do logaritmo; e D9 – Desconhecimento ou uso inadequado de ferramentas (calculadora) para o cálculo de logaritmos. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Quando perguntado sobre o porquê de alguns alunos não participarem, o professor disse não ser capaz de identificar se eles não possuem base para as atividades ou se simplesmente não têm interesse, pois esse pequeno grupo nunca realiza nada. Destacando o empenho daqueles que executam a atividade, temos algumas resoluções:

Aluna Mikaela: “No problema um, 1,92 é o expoente do 10 que dá o resultado 85”.

Aluna Paula:

3ª ATIVIDADE (2aulas):

- 1) Digitando o número 85 numa calculadora e depois apertando a tecla LOG, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10? *Esses números são um expoente do base 10 que o número do visor, o expoente o número do 85*
- 2) (UFMT) (...) A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imaginem que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo “t” em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura “h” em metros. (adaptado da revista *superinteressante*, maio de 2000. P.86)

A partir das informações dadas, classifique cada item abaixo em verdadeiro ou falso. (justifique as afirmações falsas)

- a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$. *Alternativa falsa, não se afirmação nos potências de 10*
- b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos. *Afirmacao Verdadeira $h = 10^9$ $t = 9$ $h = 10^9$ $h = 1000000000$ m*
- c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros. *Alternativa Falsa. $\log 550 = 2,7$ é diferente de 2,5*

- 3) (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 1,5 + \log_3(t + 1)$$

com “h” em metros e “t” em anos. Se um dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu uma altura de 3,5 metros de altura, o tempo transcorrido do momento da plantação até o corte foi de? *$h(t) = 1,5 + \log_3(t + 1)$ $3,5 = 1,5 + \log_3(t + 1)$ $2 = \log_3(t + 1)$ $3^2 = t + 1$ $9 = t + 1$ $9 - 1 = t$ $t = 8$ anos*

- 4) Suponhamos que uma represa de área igual a 129 Km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 3 Km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento dessa vegetação seja dobrar a cada ano. Desse modo, responda: *$2^7 \cdot 3 = 2^8$*

- a) Qual seria a área infestada após 1 ano, caso não fosse tomada nenhuma providência? *$3 \cdot 1000 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \text{ Km}^2$*
- b) Qual seria a área infestada após 2 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência? *$3 \cdot 1000 \rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \text{ Km}^2$*
- c) Qual seria a área infestada após 3 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência? *$3 \cdot 1000 \rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^3 \cdot 3 = 24 \text{ Km}^2$*
- d) Qual seria a área infestada após 4 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência? *$3 \cdot 1000 \rightarrow 2 \cdot 3 \rightarrow 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^3 \cdot 3 \rightarrow 2^4 \cdot 3 = 48 \text{ Km}^2$*

Figura 15: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

A aplicação completa do segundo momento pelo professor Py durou quatro dias, sendo duas aulas por dia, totalizando oito aulas de 45 minutos. Vale lembrar que pela primeira vez os alunos tiveram lição de casa e que a maioria não realizou. Por conseguinte, o professor decidiu não trabalhar com lição de casa durante a aplicação da trajetória, postura adotada pela professora desde o começo da aplicação.

3.º MOMENTO:

Professora

1.ª ATIVIDADE:

Com o objetivo de verificar a condição de existência de um logaritmo, bem como suas propriedades, a professora iniciou a aplicação do 3.º momento da trajetória solicitando aos alunos o preenchimento da tabela da primeira atividade com o uso da calculadora. Não demorou e as primeiras observações começaram a surgir:

Aluno Eric: “Não existe logaritmo de número negativo”.

Aluna Bruna: “Números entre 0 e 1 têm resposta negativa”.

Aluna Érica: “O zero também não tem logaritmo”.

Após essas observações, a professora com exemplos de logaritmos em outras bases determinou, com a colaboração de seus alunos, as condições de existência de logaritmos. No item “c” da atividade os alunos deveriam identificar relações entre os valores da tabela, ou seja, deveriam identificar relações, por exemplo, que ***log2 + log3*** é igual a ***log6***, porém essas observações surgiram somente após o professor dar o primeiro exemplo. Em seguida a maioria dos alunos se empolgou e vários comentários surgiram:

Aluna Carla:

- a) Quais conclusões você pode tirar sobre as possibilidades para se calcular o logaritmo de um número?
tem que ser maior que zero
- b) O que você pode observar sobre os logaritmos de números entre 0 e 1?
Os resultados são negativos
- c) Tente identificar relações entre os valores dos logaritmos (coluna esquerda da tabela) e faça uma lista de observações.
- $\log 2 + \log 3 = \log 6$
 $\log 2 + \log 4 = \log 8$
 $\log 2 + \log 5 = \log 10$
 $\log 6 - \log 2 = \log 3$
 $\log 6 - \log 3 = \log 2$*

Figura 16: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Aluno Caio: “ $\log 100 = 2 \cdot \log 10$; $\log 1000 = 3 \cdot \log 10$, e assim por diante.”

Aluna Brenda: “ $\log 9 = 2 \cdot \log 3$, o expoente vai para frente do logaritmo”.

O professor solicitou aos seus alunos que preenchessem a próxima tabela, exercício 2, sem o uso da calculadora:

Aluna Bruna:

→ 11	
12	$\log 3 + \log 4 = 1,0781$
→ 13	$\log + \log =$
14	$\log 2 + \log 7 = 1,146$
15	$\log 3 + \log 5 = 1,0791$
16	$\log 4 + \log 4 = 1,204$
→ 17	$\log + \log =$
18	$\log 2 + \log 9 = 1,2552$
→ 19	$\log + \log =$
20	$\log 2 + \log 10 = 1,301$

Figura 17: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Como podemos verificar pela resolução da aluna, a sala em geral não conseguiu preencher a tabela sem a calculadora nos logaritmos que não resultavam de um produto ou de uma razão entre números da tabela anterior. Como esperávamos, alguns erros aconteceram, por exemplo, alunos que preencheram **$\log 11 = \log 5 + \log 6$** , contudo esses erros foram rapidamente identificados pelos próprios alunos por meio de uma prova real dos valores. Nesse momento, a professora perguntou o que esses números tinham em comum e os alunos não conseguiram identificar nenhuma semelhança. Portanto, o professor falou sobre números primos e para nossa surpresa os alunos não sabiam ou não se lembravam do que se tratava. Após essa discussão, a professora escreveu na lousa a generalização das propriedades dos logaritmos:

Professora: “1) $\log x + \log y = \log xy$

$$2) \log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

$$3) \log x^y = y \cdot \log x”.$$

Vale ressaltar que as propriedades foram anotadas pelo professor na lousa, não tendo a participação dos alunos na generalização dessas propriedades, a não ser nas observações anteriores.

Para finalizar a atividade, o exercício 4 trabalhou com a mudança de base nos logaritmos. A professora discutiu com os seus alunos a importância de às vezes trocar a base de um logaritmo para viabilizar sua resolução, por exemplo, quando vamos usar a calculadora que trabalha com a base 10. Desse modo, os alunos partiram para a resolução desse exercício em grupos e aparentemente conseguiram entender a mudança de base. Vejamos algumas resoluções:

Aluna Carla:

Handwritten work for Aluna Carla:

- a) $4^x = 5$: $\log 4^x = \log 5$ $\Rightarrow x \log 4 = \log 5$ $\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 4} = 1,1609$
- b) $4^x = 19$: $\log 4^x = \log 19$ $\Rightarrow x \log 4 = \log 19$ $\Rightarrow x = \frac{\log 19}{\log 4} = 2,1239$
- c) $4^x = 95$: $\log 4^x = \log 95$ $\Rightarrow x \log 4 = \log 95$ $\Rightarrow x = \frac{\log 95}{\log 4} = 3,2852$
- d) $a^x = b$: $\log a^x = \log b$ $\Rightarrow x \log a = \log b$ $\Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$

Figura 18: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Aluno Eric:

Handwritten work for Aluno Eric:

- a) $4^x = 5$: $\log_4 5 = x$ $\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 4} = 1,1609$
- b) $4^x = 19$: $\log_4 19 = x$ $\Rightarrow x = \frac{\log 19}{\log 4} = 2,1239$
- c) $4^x = 95$: $\log_4 95 = x$ $\Rightarrow x = \frac{\log 95}{\log 4} = 3,2852$
- d) $a^x = b$: $\log_a b = x$ $\Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$

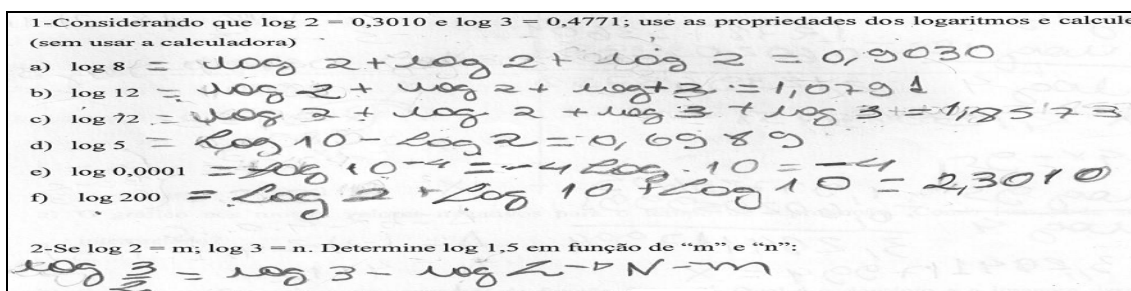
Figura 19: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

2.ª ATIVIDADE:

A segunda atividade tinha como objetivo central a aplicação das propriedades, condições de existência e mudanças de bases dos logaritmos, e por esse motivo a professora solicitou aos alunos que realizassem a atividade em trio, salientando que durante a resolução não ajudaria nenhum grupo, forçando a discussão em grupo.

A atividade mostrou que, apesar de durante a primeira atividade não ter havido grandes dúvidas, os alunos não conseguiam muito bem aplicar o que foi trabalhado em problemas, evidenciando mais uma vez dificuldades como D1, D4, D5, D6 e D8.¹⁸ A professora optou em realizar a correção com os próprios alunos, assim os grupos que conseguiam resolver os problemas foram à lousa apresentar suas resoluções. Esse método foi interessante, pois a sala participou bastante, fazendo diversas perguntas ao grupo que expunha sua resolução.

Grupo 1:



1-Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; use as propriedades dos logaritmos e calcule (sem usar a calculadora)

a) $\log 8 = \log 2 + \log 2 + \log 2 = 0,9030$

b) $\log 12 = \log 2 + \log 2 + \log 3 = 1,0791$

c) $\log 72 = \log 2 + \log 2 + \log 3 + \log 3 = 1,8573$

d) $\log 5 = \log 10 - \log 2 = 0,6989$

e) $\log 0,0001 = \log 10^{-4} = -4 \log 10 = -4$

f) $\log 200 = \log 2 + \log 10 + \log 10 = 2,3010$

2-Se $\log 2 = m$; $\log 3 = n$. Determine $\log 1,5$ em função de "m" e "n":

$\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = n - m$

Figura 20: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

¹⁸ D1 – Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D4 – Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 – Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 – Problemas de interpretação; e D8 – Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Grupo 2:

③ $\log(x-1)$
 $(x=4)$
 $x-1 > 0 \quad x-4 \neq 0$
 $x > 1 \quad x \neq 4$

4) $a = \log_7 \frac{x}{x-1} = \log_7 2$

$\frac{x}{x-1} = 2$
 $2x - 2 = 1x$
 $2x - 1x = 2$
 $1x = 2$
 $x = 2$

b) $\log_3 x(x-2) = \log_3 3$
 $x(x-2) = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$
 $\Delta = b^2 - 4ac$
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\Delta = 4 + 12$
 $\Delta = 16$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$
 $x = \frac{2 \pm 4}{2}$

$\frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$
 $S = \{3\}$

4. C)

$\log_3 \frac{x}{x-1} = \log_3 6$
 $\frac{x}{x-1} = 6$
 $6x - 6 = 1x$
 $6x - 1x = 6$
 $5x = 6$
 $x = \frac{6}{5}$
 $S = \{\frac{6}{5}\}$

Figura 21: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

A aplicação do 3.º momento pela professora teve duração de três dias com duas aulas por dia, totalizando seis aulas de 45 minutos. Os alunos demonstraram muito interesse nas atividades apresentadas; a interação entre o professor e os seus alunos foi positiva, exceção feita à generalização das propriedades em que o professor não permitiu aos alunos a discussão e conclusão de tais propriedades.

3.º MOMENTO:

Professor

1.ª ATIVIDADE:

O professor deu início à atividade solicitando a seus alunos o preenchimento da primeira tabela usando a calculadora e em seguida falou sobre as condições de existência dos logaritmos. Os alunos não apresentaram dificuldades em estabelecer que não existiam logaritmos de números negativos nem zero, além de identificar com facilidade que os logaritmos de valores entre zero e um são negativos. A maior dificuldade enfrentada pelo professor foi a condição de existência para a base do logaritmo, pois a atividade mostrou uma falha ao trabalhar somente com a base 10, o que teremos que discutir para a elaboração da 3.ª versão. Diferentemente da professora que preparou uma discussão com logaritmos em outras bases, o professor não havia pensado nessa possibilidade e por isso enfrentou dificuldades e foi obrigado a simplesmente passar para seus alunos a condição de existência de um logaritmo em relação a sua base.

No item “c” da atividade que trata das propriedades dos logaritmos, o professor optou por iniciar fazendo a primeira observação da tabela:

Professor Py: “Notem na tabela que $\log 2 + \log 3 = \log 6$!!! Vocês são capazes de me dizer outras relações como essas?”.

Aluna Mara: “ $\log 2 + \log 4$ vale a mesma regra é $\log 8$ ”.

Aluno Rafael: “ $2 \cdot \log 3 = 2 \cdot 0,477 = 0,954 = \log 9$, quer dizer que 2 vezes o $\log 3$ é igual ao $\log 9$ ”.

Professor Py: “Com base no que ele disse, quem consegue: $\log b^x$?”.

Aluna Mara: “ $\log b^x = x \cdot \log b$ ”.

Em seguida, o professor lançou em tom de desafio a ordem para o preenchimento da 2.^a tabela sem o uso da calculadora, utilizando somente os resultados da tabela 1 e as observações feitas no exercício anterior.

Aluna Natália: “ $\log 12$ é só fazer $\log 2$ mais $\log 6$ ”.

Aluno Vitor: “pode ser também $\log 3$ mais $\log 4$ ”.

Aluna Maria: “Não dá pra fazer $\log 11$, $\log 13$, $\log 17$ ”.

Professor Py: “Por que não dá?”.

Aluna Yara: “11, 13, 17 e 19 são números que não aparecem na tabuada”.

Aluno Valter: “São números primos!! As regras só valem quando os números não são primos”.

Aluna Paula:

n	log n
11	
12	$\log 2 + \log 6 = \log 12$
13	
14	$\log 7 + \log 2 = \log 14$
15	$\log 5 + \log 3 = \log 15$
16	$\log 2 + \log 8 = \log 16$
17	
18	$\log 3 + \log 6 = \log 18$
19	
20	$\log 5 + \log 4 = \log 20$

Os espaços em branco não pode ser efetuados porque os números não são primos.

Figura 22: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Como podemos observar, os alunos do professor tiveram mais facilidade em identificar a impossibilidade do cálculo do logaritmo de alguns números da tabela usando suas observações e os resultados da tabela 1, além de levantarem rapidamente a semelhança entre esses números explicando sozinhos o motivo pelo qual não conseguiam aplicar suas observações, diferente dos alunos da professora que encontraram grandes dificuldades nesse item. Questionado, o professor respondeu que sempre fala com os seus alunos sobre os números primos e suas particularidades.

Ao término dessa discussão, o professor, ao contrário da professora, solicitou aos alunos a generalização de suas observações. Apesar das dificuldades dos alunos em generalizar uma regularidade, o que ocorreu durante toda a trajetória, o professor com os seus alunos construiu uma lista que chamou de propriedades dos logaritmos:

$$1) \log a + \log b = \log ab$$

$$2) \log a - \log b = \log \frac{a}{b}$$

$$3) \log a^x = x \cdot \log a$$

Na resolução do exercício 4 da atividade, foi a vez de o professor não dar a oportunidade para que seus alunos tirassem outras conclusões importantes, desta vez sobre a mudança de base. Desse modo, o professor indicou na lousa como se muda a base de um logaritmo quando for necessário e em seguida solicitou aos alunos que resolvessem o exercício 4 usando a explicação:

Maioria dos alunos:

4-Utilizando a calculadora (se possível) e o logaritmo de base 10, determine x:

a) $4^x = 5$ $4^x = 5 \Rightarrow \log_4 5 = x \Rightarrow x = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 4} \approx 1,16$ (aproximado - mente)

b) $4^x = 19$ $4^x = 19 \Rightarrow \log_4 19 = x \Rightarrow x = \frac{\log_{10} 19}{\log_{10} 4} \approx 2,12$

c) $4^x = 95$ $4^x = 95 \Rightarrow \log_4 95 = x \Rightarrow x = \frac{\log_{10} 95}{\log_{10} 4} = 3,28$

d) $a^x = b$ $a^x = b \Rightarrow \log_a b = x \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$

Figura 23: Modelo de resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

2.ª ATIVIDADE:

A segunda atividade foi proposta com o objetivo de aplicar as observações feitas pelos alunos durante a primeira atividade. Logo, o professor pediu aos alunos que trabalhassem em duplas e que discutissem exaustivamente os problemas antes de chamá-lo para ajudar. A exemplo dos alunos da professora, as dificuldades apresentadas foram D1, D4, D5, D6 e D8.¹⁹ Aparentemente, as dificuldades nessa sala foram menores que na sala da professora, porém o método de discussão aplicado na sala da professora propiciou maior participação dos alunos, que argumentavam entre os grupos sobre suas resoluções, ao contrário do que aconteceu na sala do professor, que resolveu todos os exercícios na lousa, tirando as dúvidas de seus alunos. Vejamos algumas resoluções:

Aluno Cleiton:

1-Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; use as propriedades dos logaritmos e calcule: (sem usar a calculadora)

a) $\log 8$ $3 \cdot 0,3010 = 0,903$

b) $\log 12$ $2 \cdot 0,3010 + 0,4771 = 1,0791$

c) $\log 72$ $3 \cdot 0,3010 + 2 \cdot 0,4771 = 0,9030 + 0,9542 = 1,8572$

d) $\log 5$ $1 - 0,3010 = 0,699$

e) $\log 0,0001$ $\log 10^{-4} = 10 \log -4 = 1 \cdot -4 = -4$

f) $\log 200$ $0,3010 + 2 \cdot 1 = 0,3010 + 2 = 2,3010$

2-Se $\log 2 = m$; $\log 3 = n$. Determine $\log 1,5$ em função de "m" e "n":
 $\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = n - m$

3-Determine os valores de x, de modo que $\log_{(x-1)}(x-1)$, exista:
 $x-1 > 0$
 $x > 1$
 $x-1 \neq 0$
 $x \neq 1$

Figura 24: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

¹⁹ D1 – Dificuldade nas manipulações algébricas básicas; D4 – Tendência ao pensamento linear nas situações não lineares; D5 – Dificuldade de se expressar na forma escrita; D6 – Problemas de interpretação; e D8 – Problemas na técnica de cálculo do logaritmo. Essas dificuldades foram apresentadas pela professora Mônica Karrer em seu trabalho de mestrado em 1999 e constam em nossa revisão bibliográfica.

Aluna Carla:

3) $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$
 $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$
 $\log x^n = n \cdot \log x$

4) a) $\log x - \log (x-1) = \log 2$
 $\log \frac{x}{x-1} = \log 2$
 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{1}$
 $2x - 2 = 1x$
 $2x - 1x = 2$
 $1x = 2$
 $x = 2$

b) $\log x + \log (x-2) = \log 3$
 $\log x \cdot (x-2) = \log 3$
 $x(x-2) = 3$
 $x^2 - 2x = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\Delta = 4 + 12$
 $\Delta = 16$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$
 $x = \frac{2 \pm 4}{2}$
 $x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

9) a) $4x = 5$
 $\log 5 = x$
 $\frac{\log 5}{\log 4} = x$
 $x = 1,160969098 = x$

b) $4x = 19$
 $\log 19$
 $\frac{\log 19}{\log 4} = x$
 $x = 2,123963758 = x$

c) $4x = 95$
 $\log 95$
 $\frac{\log 95}{\log 4} = x$
 $x = 3,284117999 = x$

d) $a^x = b$
 $\log b$
 $\frac{\log b}{\log a} = x$

Figura 24: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

O desenvolvimento do 3.º momento pelo professor teve a duração de três dias com duas aulas por dia, totalizando seis aulas de 45 minutos cada. A princípio, os objetivos da atividade foram atingidos, os alunos demonstraram entendimento durante as atividades e buscaram sempre alternativas no decorrer da resolução dos problemas, exceção feita a uma minoria de alunos que, assim como já descrevemos, não participam das atividades propostas.

4.º MOMENTO:

Professora

ATIVIDADE:

O quarto momento da trajetória teve como objetivo trabalhar funções logarítmicas e foi planejada para ser realizada com o auxílio do *software* Winplot. Essa atividade deveria iniciar no final de novembro de 2008, porém problemas com a sala de informática da escola causaram transtornos às duas turmas de aplicação, que realizaram essa atividade somente em dezembro de 2008, já na reta final do ano letivo, e o pior, a sala de informática da escola estava com metade dos computadores fora de funcionamento, portanto os professores tiveram que trabalhar com grupos de até quatro alunos, pois só havia dez computadores em condições de uso.

Ao iniciar a atividade, a professora fez uma breve explicação das funções básicas do *software* dizendo aos seus alunos que o computador iria construir o gráfico da função sem a necessidade de que eles o fizessem no Caderno. Os alunos, por sua vez, ficaram empolgados, pois segundo eles próprios nenhum professor os levava à sala de informática. Assim, a atividade começou com a retomada de um problema do início da trajetória que tratava da reprodução de bactérias que dobrava sua quantidade a cada hora.

Nessa atividade os alunos deveriam construir o gráfico da função já estabelecida por eles e justificar a parte negativa do gráfico que correspondia ao tempo de reprodução. Não houve maiores problemas nessa atividade:

Aluna Bruna:

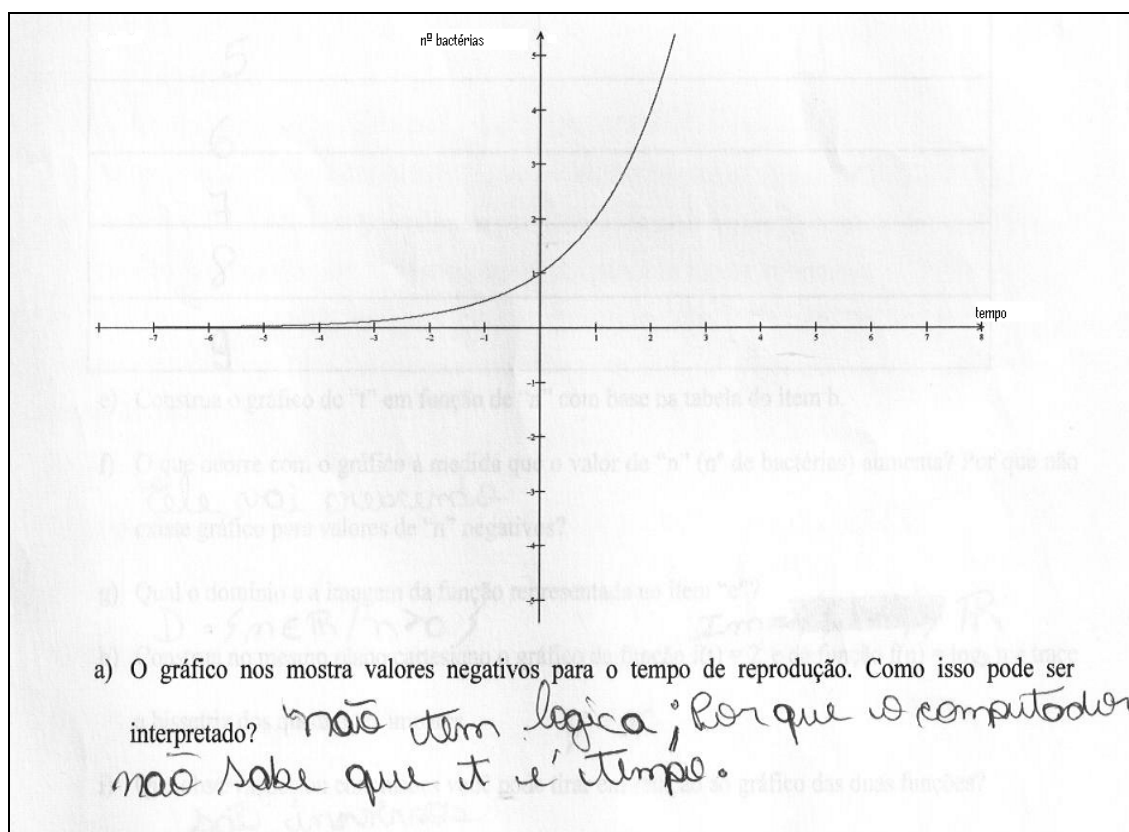


Figura 25: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Aluna Carolina:

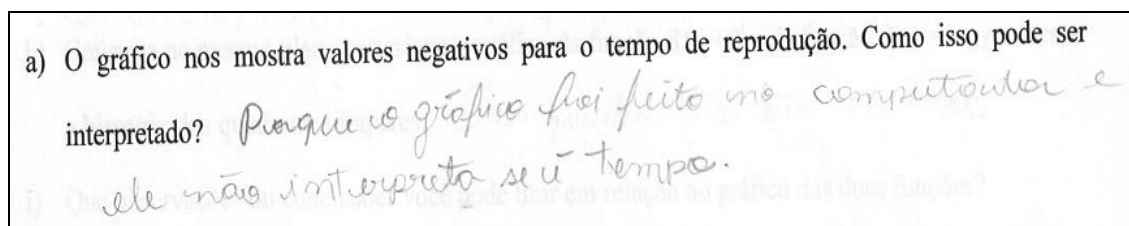


Figura 26: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

No próximo item, dificuldades surgiram quando foi solicitado aos alunos que estabelecessem o domínio e a imagem da função, evidenciando mais uma vez que o estudo de funções não fora bem assimilado pelos alunos nos estudos que antecederam a aplicação dessa trajetória. Nesse momento, a professora realizou uma breve revisão de funções dando enfoque ao domínio e

imagem de funções e em seguida pediu para que os alunos respondessem a atividade:

Aluna Maria:

b) Sendo o gráfico acima representante da função $f(t) = 2^t$. Qual é o domínio e a imagem dessa função?

$$D = \{t \in \mathbb{R} / t \geq 0\}$$
$$Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$$

Figura 27: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Não obstante as atividades anteriores trabalharem sempre com a comparação do logaritmo com a exponencial, a maioria dos alunos teve grandes dificuldades em escrever a função inversa da função $f(t) = 2^t$, sendo necessário que a professora escrevesse a função junto a eles. Vamos conferir a questão:

Aluna Bruna:

c) Usando a ferramenta logaritmo, escreva uma nova relação matemática (função), só que dessa vez relacionando o tempo “t” em horas com a quantidade “n” de bactérias:

$$\log_2 n = t$$
$$f(n) = \log_2 n$$

Figura 28: Resolução feita por uma aluna do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Em seguida, os alunos, usando o Winplot, construíram no mesmo plano cartesiano o gráfico que representa a função descrita acima. Vale destacar que a maioria desta vez conseguiu estabelecer o domínio e a imagem da função e cada grupo, utilizando suas palavras, conseguiu identificar a função logarítmica, sendo a função inversa da exponencial com alguma dificuldade, assim como prevíamos. Salientamos aqui o papel fundamental do *software* para essas

observações, pois possibilitou agilidade e exatidão na construção, além de dinâmica ao gráfico.

Grupo 1:

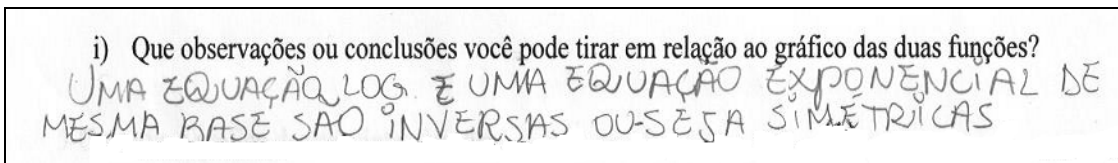


Figura 29: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Grupo 2:

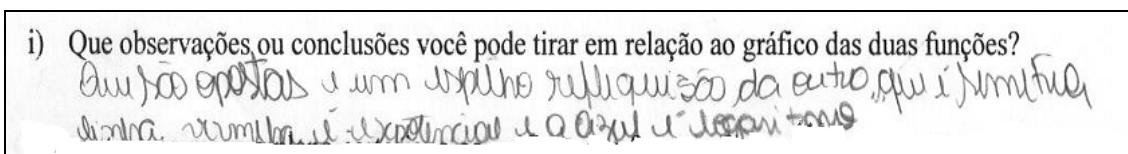


Figura 30: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

A fim de questionar os alunos sobre a relação da base da função com o crescimento ou decrescimento de seu gráfico, é solicitada no exercício 2 a construção de uma função logarítmica e uma exponencial de base $\frac{1}{2}$ no mesmo plano cartesiano. Os alunos demonstraram facilidade em manusear o *software* e não tiveram problemas na construção, contudo ainda apresentaram dificuldades em estabelecer o domínio e a imagem da função, sendo necessária mais uma vez a intervenção da professora.

A discussão entre os grupos foi muito interessante quando se estabeleceu a relação entre o crescimento ou decrescimento do gráfico com a base da função exponencial e logarítmica, e, assim, os grupos chegaram às observações que se esperavam. Exemplos:

Grupo 3:

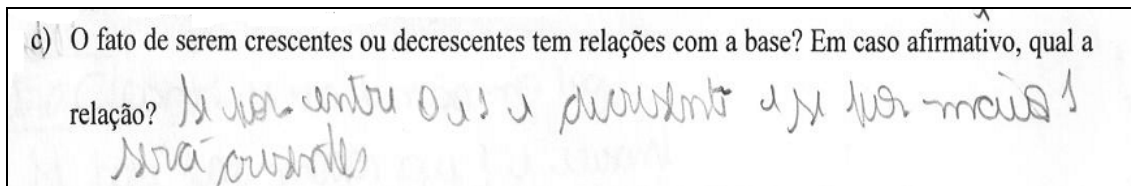


Figura 31: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Grupo 5:

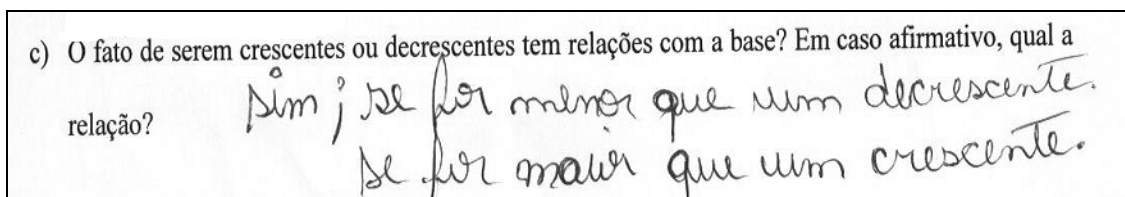


Figura 32: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

Os exercícios finais da atividade tinham como objetivo aprofundar questões trabalhadas no exercício inicial da atividade, além de ampliar a discussão de funções logarítmicas, por exemplo, no exercício que trata do logaritmo neperiano, que é trabalhado nessa atividade de maneira superficial. A exemplo do que ocorreu no primeiro exercício, os alunos apresentaram dificuldades nos conceitos gerais básicos de funções, domínio e imagem, por exemplo, porém destacamos como positivo o entendimento dos alunos no que se refere à relação das funções logarítmicas e exponenciais, uma vez que identificaram as diferenças e semelhanças entre as duas, além de reconhecerem o comportamento gráfico de cada uma delas de acordo com suas respectivas bases, sendo capazes de identificar uma função logarítmica a partir de seu gráfico.

Aluno Carlos:

4-Sem construir os gráficos indique para cada função as principais características (domínio, imagem, crescente ou decrescente):

a) $f(x) = 3^x$ $Im = \{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$ $D = \mathbb{R}$ crescente

b) $g(x) = \log_3 x$ $Im = \mathbb{R}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ crescente

c) $h(x) = (2,3)^x$ $Im = \{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$ $D = \mathbb{R}$

d) $i(x) = \log_{2,3} x$ $Im = \mathbb{R}$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ crescente

e) $j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ $D = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ $Im = \mathbb{R}$

Figura 33: Resolução feita por um aluno do 1.º ano do Ensino Médio, sala da professora.

O quarto momento da trajetória foi aplicado pela professora em dois dias, sendo duas aulas por dia, totalizando quatro aulas de 45 minutos cada. É necessário relatar que o tempo de aplicação não foi o bastante segundo o professor, que argumentou que o trabalho foi comprometido em razão principalmente deste fator e do número de computadores disponível. O tempo não foi suficiente, pois, apesar de o ano letivo de 2008 ser oficialmente até o dia 19 de dezembro, os alunos que não apresentavam problemas com notas não foram à escola a partir da segunda semana de dezembro e o problema com os computadores permitiu que muitos deles não participassem de maneira efetiva das atividades. Essa série de obstáculos na aplicação do quarto momento deixa a impossibilidade da certeza do sucesso dessas atividades nessa sala.

4.º MOMENTO:

Professor

ATIVIDADE:

A aplicação do quarto momento na sala do professor passou pelos mesmos problemas surgidos na sala da professora; com isso a aplicação teve início somente no dia 02.12.2008, já na última semana com todos os alunos presentes. Outro fator negativo se deve ao fato de a sala do professor não ter

estudado nada sobre funções nem construções de gráficos, exceção feita ao gráfico construído na própria trajetória nas atividades iniciais. Como o quarto momento tinha como objetivo trabalhar funções logarítmicas, já prevíamos que as quatro aulas disponíveis talvez não fossem suficientes para aplicar as atividades propostas. De qualquer forma, juntos decidimos que tudo seria feito de acordo com o planejado e que os conceitos básicos de função seriam trabalhados pelo professor simultaneamente à aplicação da atividade.

No início da atividade, o professor pediu para que os alunos na sala de informática formassem grupos, pois havia dez computadores em funcionamento. Em seguida, explicou as funções básicas do *software* Winplot e solicitou a construção do primeiro gráfico. Os grupos tiveram um pouco de dificuldade com o *software* na primeira construção e, a exemplo da outra sala, relataram que nunca haviam ido à sala de informática com professores de Matemática nem trabalharam com *softwares* matemáticos.

Após a construção, surgiram alguns comentários entre os alunos, na maioria das vezes demonstrando empolgação em trabalhar com o *software*. Logo após, responderam a primeira questão, não apresentando maiores dificuldades, após a discussão entre os grupos:

Grupo 1:

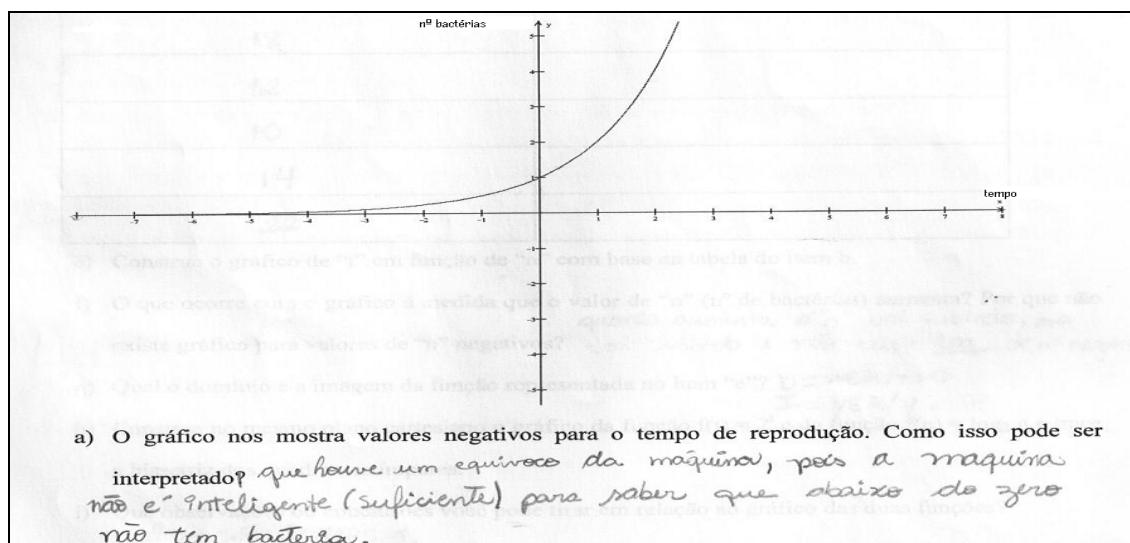


Figura 34: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Grupo 2:

a) O gráfico nos mostra valores negativos para o tempo de reprodução. Como isso pode ser interpretado?

*O lado esquerdo do gráfico que é NEGATIVO
NÃO USAREMOS OS VALORES NEGATIVOS em tempo de reprodução,
PORQUE em tempo de reprodução é POSITIVO e NÃO NEGATIVO.*

Figura 35: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Grupo 3:

a) O gráfico nos mostra valores negativos para o tempo de reprodução. Como isso pode ser interpretado?

Podemos explicar que isso seria um equívoco da máquina, pois ela não sabe distinguir o tempo, na isso devemos interpretar a parte que devemos usar.

Figura 36: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Após essa atividade, os alunos deveriam determinar o domínio e a imagem da função $f(t) = 2^t$, contudo, como não haviam estudado funções, o professor respondeu essa questão explicando a eles a definição de domínio e imagem de uma função. Assim como na sala da professora, os alunos encontraram grandes dificuldades em escrever a função logarítmica a partir da função exponencial, apesar de tal tema ter sido trabalhado nas atividades anteriores, evidenciando uma dificuldade que não estava prevista em nossa revisão bibliográfica, que é estabelecer o logaritmo como a operação inversa da exponencial. O professor esclareceu essa questão junto a seus alunos e assim foram capazes de responder.

Grupo 7:

c) Usando a ferramenta logaritmo, escreva uma nova relação matemática (função), só que dessa vez relacionando o tempo "t" em horas com a quantidade "n" de bactérias:

*$\log_2 n = t$
 $f(n) = \log_2 n$*

Figura 37: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

O professor solicitou então a construção do gráfico das duas funções, exponencial e logarítmica, no mesmo plano cartesiano e pediu para que os grupos fizessem observações sobre os gráficos:

Grupo 4:

- i) Que observações ou conclusões você pode tirar em relação ao gráfico das duas funções?
- A linha vermelha é exponencial e a azul feita de logaritmos, elas são opostas. Elas são inversas*

Figura 38: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Grupo 8:

- i) Que observações ou conclusões você pode tirar em relação ao gráfico das duas funções?
- uma equação exponencial e uma equação log, relacionados inversos*

Figura 39: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

A fim de trabalhar com o crescimento e decrescimento do gráfico de funções logarítmicas, o professor deu prosseguimento à atividade pedindo aos alunos que construíssem os gráficos de uma função exponencial e logarítmica de base $\frac{1}{2}$ no mesmo plano cartesiano e em seguida respondessem o próximo exercício.

Grupo 1:

- a) Qual o domínio e a imagem de cada função?
- $\checkmark D = \mathbb{R} / y \in \mathbb{R} / y > 0 / A.D. x \in \mathbb{R} / y > 0 / Im = \mathbb{R}$*
- b) As funções são crescentes ou decrescentes?
- decrescentes*
- c) O fato de serem crescentes ou decrescentes tem relações com a base? Em caso afirmativo, qual a relação?
- sim, se for entre 0 e 1 será decrescente, se for maior que 1 será crescentes...*

Figura 40: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Grupo 6:

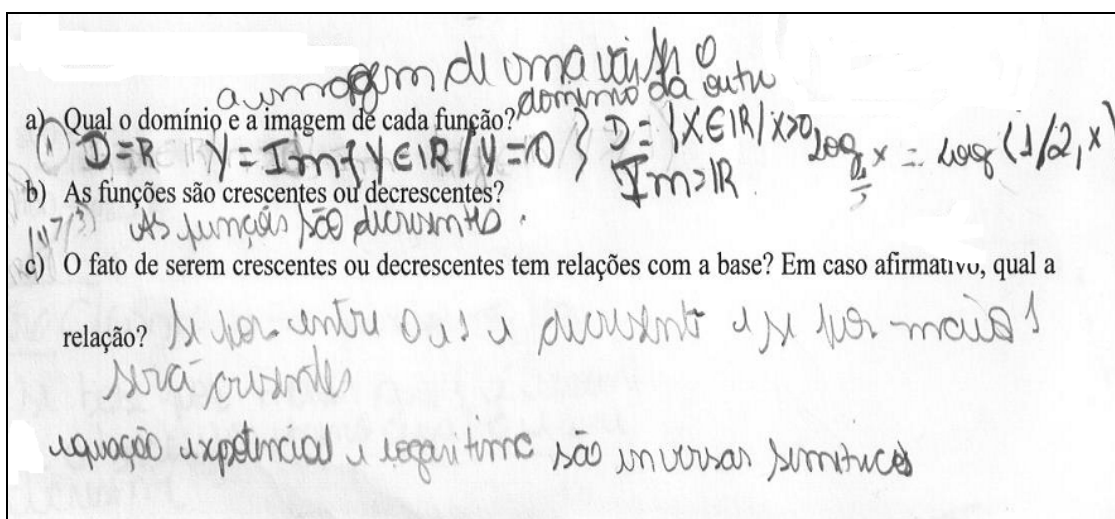


Figura 41: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

Como podemos identificar nas respostas dadas por alguns grupos, apesar do pouco conhecimento sobre funções, os alunos conseguiram com alguma dificuldade identificar as principais características das funções exponenciais e logarítmicas, principalmente em relação as suas bases, e ainda relacionar o domínio da função exponencial com a imagem da função logarítmica e vice-versa. Vale lembrar que nem todos os grupos conseguiram e por essa razão o professor sociabilizou as observações feitas por todos os grupos.

Na segunda parte da atividade, o professor contou aos seus alunos um pouco da história do número e e dos logaritmos neperianos, ressaltando que os estudos sobre esse número e sobre esse logaritmo seriam desenvolvidos superficialmente em razão do curto tempo. Assim, os alunos trabalharam com os seus respectivos gráficos com o objetivo de observar que todos os apontamentos feitos até aqui são válidos para esse caso especial de logaritmo. Os alunos puderam ainda manusear o *software* com outras funções exponenciais e logarítmicas verificando a veracidade de todos os comentários feitos por eles. É preciso relatar que o crescimento e o decrescimento de funções logarítmicas foram facilmente identificados pelos alunos sem a

construção dos gráficos, porém o domínio e a imagem somente foram possíveis após a construção, e mesmo assim com muita dificuldade.

Grupo 10:

Handwritten solutions for five functions:

- a) $f(x) = 3^x$ $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$ $D(f) = \mathbb{R} \rightarrow$ crescente
- b) $g(x) = \log_3 x$ $Im(g) = \mathbb{R}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} \rightarrow$ crescente
- c) $h(x) = (2,3)^x$ $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} / y > 0\}$ $D(h) = \mathbb{R} \rightarrow$ crescente
- d) $i(x) = \log_{2,3} x$ $Im(i) = \mathbb{R}$ $D(i) = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} \rightarrow$ crescente
- e) $j(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ $Im(j) = \mathbb{R}$ $D(j) = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} \rightarrow$ decrescente.

Figura 42: Resolução feita por um grupo de alunos do 1.º ano do Ensino Médio, sala do professor.

A aplicação do quarto momento pelo professor teve a duração de dois dias, com duas aulas por dia, totalizando quatro aulas de 45 minutos cada, tempo considerado insuficiente para o estudo de funções logarítmicas, principalmente pelo fato de a sala não ter feito um estudo de funções anteriormente à aplicação da THA. Vale destacar o empenho dos alunos que, mesmo com poucas aulas, se dedicaram na resolução das atividades.

3.4 Avaliação do conhecimento dos alunos após aplicação da THA

Após aplicação da THA, consideramos interessante elaborarmos um instrumento de avaliação que verificasse os objetivos de aprendizagem estabelecidos, quais sejam:

- ✓ Compreender o conceito de logaritmo de um número e calcular alguns logaritmos.
- ✓ Reconhecer e utilizar em situações-problema variações de grandeza expressas por leis do tipo $y = \log_a x$ e, em particular, por igualdades do tipo $y = \ln x$.
- ✓ Reconhecer e utilizar as propriedades dos logaritmos, bem como as condições de sua existência.

- ✓ Identificar gráficos que descrevem funções logarítmicas e reconhecer uma função logarítmica a partir de seu gráfico.
- ✓ Resolver situações-problema que envolvem a função logarítmica, bem como equações logarítmicas.

Portanto, optamos por uma avaliação escrita dividida em duas partes que constam nos anexos C e D. O tempo de aplicação da THA foi insuficiente, como mencionamos anteriormente, e, por isso, a expectativa de aprendizagem sobre identificar gráficos que descrevem funções logarítmicas e reconhecer uma função logarítmica a partir de seu gráfico não foi avaliada após sua aplicação, porém acreditamos que a aplicação da Trajetória tenha sido suficiente para analisarmos essa expectativa.

No tocante às análises das expectativas de aprendizagem contempladas na avaliação, começaremos pela Parte I. Na primeira parte da avaliação, tentamos abordar por meio de duas situações-problema as expectativas de aprendizagem: reconhecer e utilizar em situações-problema variações de grandeza expressas por leis do tipo $y = \log_a x$ e, em particular, por igualdades do tipo $y = \ln x$, e resolver tais situações que envolvem a função logarítmica, bem como equações logarítmicas.

Estavam presentes no dia da aplicação da Parte I da avaliação 38 alunos na sala da professora e 39 alunos na sala do professor. Os professores optaram por realizar a avaliação em duas aulas seguidas. Dessa forma, os alunos tiveram cerca de 1 hora e 20 minutos para executar a Parte I.

Após a aplicação da Parte I, reunimo-nos (pesquisador e professores) para análise dos resultados. No que se refere à expectativa de aprendizagem sobre reconhecer e utilizar em situações-problema variações de grandeza expressas por leis do tipo $y = \log_a x$, percebemos que menos da metade, 39,5% dos alunos da professora e 30% dos alunos do professor, conseguiu reconhecer e fazer uso de grandezas expressas por leis do tipo $y = \log_a x$. Nesse tipo de situação, fica evidente que a maioria dos alunos tenta resolver os problemas por outros caminhos, que não são os logaritmos. Os alunos tentam

estimar, criar “tabelinhas” até chegarem ao resultado que desejam, entre outros. Veja o exemplo:

Sendo “t” o tempo de crescimento da folha dado em anos e “d” o diâmetro da folha em centímetros, escreva a relação matemática que descreve o crescimento da folha em função do tempo. *seria $d = 4^t$*

R: $d = 4^t$

Considerando que o prazo de sobrevivência de cada folha é no máximo de 5 meses, qual será o diâmetro que ela terá ao final desse prazo?

*1 mês = 4
2 meses = 16
3 meses = 64
4 meses = 256
5 meses = 1.024*

Seria 1,024 o diâmetro da planta no final do prazo.

Após quantos meses o diâmetro da folha chegará em 256 cm?

R: *Em 4 meses o diâmetro seria 256.*

Figura 43: Resolução realizada por uma aluna do professor.

Podemos perceber na resolução dessa aluna um fato presente em um grande número de avaliações, tanto da professora quanto do professor, ou seja, a aluna consegue estabelecer a relação matemática, porém não como ferramenta de resolução nos exercícios que se seguem, preferindo chegar ao resultado realizando uma seqüência de meses até atingir o que se pede. Um possível motivo identificado durante toda a trajetória é a dificuldade dos alunos em trabalhar com potenciação e equações exponenciais.

Outra expectativa de aprendizagem abordada na Parte I da avaliação foi resolver situações-problema que envolvem a função logarítmica, bem como equações logarítmicas. Para abordarmos essa expectativa, diferente do problema em que os alunos deveriam estabelecer a relação matemática, o problema proposto dava a função, e o objetivo era verificar se o aluno consegue resolver uma situação que envolve uma função dada, bem como equações logarítmicas. Dessa vez, percebemos que os alunos do professor se saíram melhor, 64% de acertos contra 31% de acertos dos alunos da professora. Essa é uma evidência de que os alunos do professor possuem mais dificuldades em estabelecer a relação matemática, porém menos dificuldades em usá-la, quando estabelecida. Uma possível justificativa é o fato de o professor ter trabalhado equações exponenciais junto ao desenvolvimento

da Trajetória, o que pode ter influenciado seus alunos, uma vez que os estudos foram mais recentes. O contrário ocorreu com os alunos da professora, que estudaram equações exponenciais bem antes da aplicação da Trajetória.

Na Parte II da avaliação, tentamos contemplar por meio de quatro exercícios as expectativas de aprendizagem: compreender o conceito de logaritmo de um número e calcular alguns logaritmos e reconhecer e utilizar as propriedades dos logaritmos, bem como as condições de sua existência. Estavam presentes 35 alunos tanto na sala da professora quanto na sala do professor no dia da aplicação da Parte II, que aconteceu em duas aulas, totalizando 1 hora e 20 minutos.

O primeiro exercício da Parte II tratava da expectativa: compreender o conceito de logaritmo de um número e calcular alguns logaritmos. Observamos um ótimo desempenho dos alunos, sendo 77% de acertos dos alunos da professora e 81% de acertos dos alunos do professor. Esse resultado nos levou a acreditar que os alunos compreendem o conceito de Logaritmo e que o mau desempenho ocorrido na Parte I da avaliação pode ter sido causado pela dificuldade de interpretação do enunciado. Como exemplo do bom desempenho apresentamos duas resoluções do exercício 1.

1- Verificadas as condições de existência dos logaritmos, determine o valor de x em cada uma das equações:

a) $\log_2 16 = x$
 $2^x = 16$
 $2^x = 2^4$ $\boxed{x = 4}$ //

b) $\log_3 x = 3$
 $3^3 = x$
 $\boxed{x = 27}$ //

c) $\log_x 8 = 3$
 $x^3 = 8$
 $x^3 = 2^3$ $\boxed{x = 2}$ //

d) $\log 0,01 = x$
 $10^x = \frac{1}{100}$
 $10^x = 10^{-2}$ $\boxed{x = -2}$ //

e) $\log_4 1024 = x$
 $4^x = 1024$
 $4^x = 4^5$ $\boxed{x = 5}$ //

f) $\log x = 5$
 $10^5 = x$
 $\boxed{x = 100000}$ //

g) $\log_x 1000 = 3$
 $x^3 = 1000$
 $x^3 = 10^3$ $\boxed{x = 10}$ //

Figura 44: Resolução feita por um aluno do professor.

1- Verificadas as condições de existência dos logaritmos, determine o valor de x em cada uma das equações:

a) $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{4\}$ ✓

b) $\log_3 x = 3 \Rightarrow 3^3 = x \Rightarrow 9 = x \Rightarrow S = \{9\}$ ✓

c) $\log_x 8 = 3 \Rightarrow x^3 = 8$?

d) $\log 0,01 = x \Rightarrow x = 0,01$ ✗

e) $\log_4 1024 = x \Rightarrow 4^x = 1024 \Rightarrow 4^x = 4^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$ ✓

f) $\log x = 5 \Rightarrow 5 = x$ ✗

g) $\log_x 1000 = 3 \Rightarrow x^3 = 1000 \Rightarrow x^3 = 10^3 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow S = \{10\}$ ✓

Figura 45: Resolução feita por um aluno da professora.

Duas observações devem ser feitas sobre esse exercício. A primeira vem do relato dos próprios alunos quando disseram que esse exercício é mais semelhante àquele que estão acostumados no dia-a-dia, o que nos faz crer que situações-problema envolvendo a interpretação de texto e o raciocínio dos alunos infelizmente não fazem parte do repertório da rotina de uma aula de Matemática. Consideramos que exercícios de fixação são instrumentos importantes no desenvolvimento de um tema matemático, porém são essenciais as situações-problema que levem o aluno a pensar, levantar hipóteses e verificar a aplicabilidade desses temas.

A segunda observação refere-se aos itens “d” e “f” do exercício, em que verificamos o maior índice de erros, pois, apesar de ter sido trabalhado durante a trajetória, os alunos não associaram o fato de a base, quando não aparece, corresponder à base 10.

O exercício 2 da atividade tratava da condição de existência dos logaritmos, e nele verificamos o menor índice de acertos da avaliação, cerca de 18% dos alunos da professora e 16% dos alunos do professor. Consideramos

que esses números são indicativos de mudanças para a terceira versão da THA, uma vez que não conseguimos encontrar justificativas para tais resultados, a não ser, talvez, pelo fato de a abordagem do tópico não ter sido adequada.

Os dois últimos exercícios da Parte II buscavam compreender o grau de apreensão dos alunos sobre as propriedades dos logaritmos. Apenas 31% dos alunos da professora e 42% dos alunos do professor conseguiram resolver os exercícios de maneira satisfatória, apesar de alguns apresentarem pequenos erros. Dos alunos que não acertaram os exercícios, muitos conseguiam estabelecer e utilizar as propriedades, porém não obtinham êxito em resolver equações de primeiro e segundo graus.

A seguir, apresentamos alguns protocolos de alunos:

2- Determine os valores de x de modo que o $\log_{(x+2)}(x-3)$, exista.

$(x+2)$
 $x > 2$
 $x \neq 1$

$(x-3)$
 $x > 3$
 $x \neq 1$

Figura 46: Resolução parcialmente correta de um aluno da professora.

Considerando $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ e $\log 10 = 1$. Determine $\log 0,6$.

Não existe $\log 0,6$ tem que ser maior que 0

Figura 47: Justificativa equivocada de um aluno do professor.

$\log_4 X + \log_4 (X+12) = 5$

$X \cdot (X+12) = 64$

$X^2 + 12X = 64$

$X^2 + 12X - 64 = 0$

$X = \frac{-12 \pm \sqrt{288}}{2}$

$X = \frac{-12 \pm \sqrt{1440}}{2}$

$X = \frac{-12 \pm 20}{2}$

$X = \frac{-12 + 20}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$X = \frac{-12 - 20}{2} = \frac{-32}{2} = -16$

Figura 48: Resolução correta de um aluno do professor.

$$\begin{aligned}
 a) \log(x+1) - \log(2x-2) &= \log 1 \\
 \log \frac{x+1}{2x-2} &= \log 1 \\
 \frac{x+1}{2x-2} &= 1 \\
 2x-2 &= x+1 \\
 2x-x &= 1+2 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

Figura 49: Resolução de uma aluna da professora.

$$\begin{aligned}
 ④ a) \log(x+1) - \log(2x-2) &= \log 1 \\
 \log_{10} \left(\frac{x+1}{2x-2} \right) &= \log 1 \\
 \frac{10}{1} &= \frac{x+1}{2x-2} \\
 10(2x-2) &= x+1 \\
 20x-20 &= x+1 \\
 20x-x &= 1+20 \\
 19x &= 21 \\
 x &= \frac{21}{19}
 \end{aligned}$$

Figura 50: Resolução errada de um aluno do professor.

$b) \log_4 x + \log_4 (x+12) = 3 \quad \left. \begin{array}{l} A=3 \\ B=12 \\ C=-3 \end{array} \right\}$
 $x \cdot (x+12) = 3$
 $x^2 + 12x = 3$
 $x^2 + 12x - 3 = 0$
 $A = B^2 - 4 \cdot a \cdot c$
 $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\Delta = 144 - 12$
 $\Delta = 132$
 $x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$
 $x = \frac{-12 \pm \sqrt{132}}{2 \cdot 1}$
 $x = -6 \pm \sqrt{132}$
 não lembro
 Desculpa!!! Estou em deu coma paz.

Figura 51: Resolução errada de uma aluna da professora.

No tocante à expectativa de aprendizagem – identificar gráficos que descrevem funções logarítmicas e reconhecer uma função logarítmica a partir de seu gráfico –, como já relatado, não foi possível uma avaliação formal dessa expectativa em razão do tempo insuficiente, porém com a aplicação da trajetória pudemos identificar um rendimento dos alunos abaixo do esperado. Os alunos não apresentaram domínio de conteúdos necessários para o bom desenvolvimento desse tópico, por exemplo, não sabiam ou não se lembravam de domínio e imagem de funções, não conheciam o significado de função inversa, entre outros. Sem contar a dificuldade enfrentada na sala de vídeo, pois os computadores não eram suficientes, além de muitos alunos não dominarem funções básicas do computador.

Em suma, não ficamos totalmente satisfeitos com os resultados obtidos em relação às expectativas de aprendizagem abordadas na avaliação. Consideramos que nossos objetivos de aprendizagem foram apenas parcialmente atingidos, porém concluímos que a atividade cumpriu seu objetivo maior: identificar possíveis falhas no desenvolvimento do tema, que vão desde como as seqüências de conteúdos são determinadas até as relações professor-aluno.

Após a aplicação da avaliação e análise das resoluções, pudemos obter com clareza alguns fatores essenciais para o bom desenvolvimento do tema funções logarítmicas:

- ✓ É essencial que se trabalhe de maneira adequada a potenciação, bem como suas regras e as funções exponenciais. O trabalho superficial desses temas acarretará grandes dificuldades de aprendizagem dos alunos em temas subseqüentes como funções logarítmicas.
- ✓ Não se pode fugir de questões que são fundamentais para o desenvolvimento de qualquer tema. Estamos nos referindo à resolução de situações-problema, que segundo os próprios alunos não são trabalhadas com tanta frequência pelos professores.
- ✓ Para o bom desenvolvimento do tema funções logarítmicas, é fundamental que se trabalhem de maneira adequada, não superficialmente, tópicos ligados diretamente às funções em geral. Ficou evidente que os alunos não dominam tais temas, como mencionado anteriormente.
- ✓ Durante o desenvolvimento do tema funções logarítmicas, deve-se dar atenção especial a pontos como a base 10 dos logaritmos, uma vez que os alunos nem sempre identificam essa base quando ela não aparece, e a condição de existência dos logaritmos.
- ✓ Infelizmente, os alunos não se sentem familiarizados com ambientes como a sala de informática e por essa razão encontram dificuldades em utilizar novas ferramentas tecnológicas como *software* de construção gráfica. Talvez os professores, sempre que possível, pudessem levar seus alunos para fazerem uso de tais ferramentas.
- ✓ Um ponto importante e identificado pelos professores é o clima predominante em sala de aula, que deve ser sempre de discussões que levem o aluno a confrontar seu conhecimento com os novos desafios apresentados, a fim de construir um novo conhecimento. Isso foi percebido na fala dos próprios professores que relataram que, nos dias

em que a sala se comporta de maneira indisciplinada, a aprendizagem fica comprometida.

3.5 Algumas categorias de descrição e análise

A seguir, apresentamos uma descrição acompanhada de uma análise geral do desenvolvimento da THA pelos professores participantes do projeto. Dividimos a análise em oito categorias que emergiram das observações realizadas em sala. Em cada categoria relatamos observações feitas nas duas salas de aplicação.

3.5.1 Primeiro contato dos professores e alunos com o projeto

O convite foi recebido pelos professores com muita desconfiança, pois se tratava de um projeto cuja proposta era diferente das aulas que eles estavam acostumados a ministrar, principalmente por incluir observação direta. Os professores quiseram saber mais do projeto e quando conheceram os detalhes relataram que seria um grande desafio, pois nenhum dos dois trabalhava com uma visão construtivista de aprendizagem, suas aulas eram assumidamente expositivas. Outro problema era o “Caderno do Estado”, que deveria ser seguido pelos professores como uma apostila.

Não obstante as dificuldades, os professores aceitaram o desafio com autorização da Coordenação Pedagógica da Escola, que não se opôs, pois o projeto parecia ser bom e o conteúdo do “Caderno do Estado” era o mesmo do projeto. Dessa forma, demos início ao projeto com os professores.

Após todo o processo de elaboração, revisão e reelaboração com os professores, foi a vez dos alunos conhecerem o projeto, tendo a apresentação sido feita pelos professores.

A professora explicou a seus alunos que trabalhariam um projeto de aprendizagem chamado Logaritmo e que duraria aproximadamente um mês. Apresentou o material que seria utilizado e realizou uma exposição prévia do tema Logaritmo, fazendo até uma relação com as progressões geométricas e

aritméticas já trabalhadas com a sala. Os alunos não gostaram muito dessa primeira apresentação; muitos disseram que provavelmente seria muito difícil e argumentaram perguntando por que eles foram escolhidos para o projeto. A professora relatou a seus alunos que ela fez a escolha porque acreditava que se saíam bem, pois era uma boa sala e não seria difícil para aqueles que se esforçassem.

A apresentação do projeto na sala do professor foi mais tranquila. Ele disse a seus alunos que participariam de um projeto de aprendizagem com um “método” diferente daquele que estavam acostumados, mas que não se preocupassem porque provavelmente gostariam das atividades. O professor não fez nenhuma apresentação prévia do tema e apenas explicou um pouco sobre o material, informando que haveria algumas atividades como lição de casa. Os alunos dessa sala até se empolgaram e perguntaram mais sobre o projeto, por exemplo, qual era o objetivo, e ouviram do professor que pesquisas como essas servem para tentar melhorar o ensino.

3.5.2 Clima dominante nas aulas e combinados com os alunos

Logo no primeiro dia o professor combinou com os seus alunos que o material da THA seria levado para casa e que existiriam algumas tarefas, porém o professor abandonou a idéia na primeira semana, pois os alunos esqueciam o material. Por isso o material passou a ser recolhido diariamente.

Durante a aplicação da THA na sala do professor, chamou nossa atenção a dinâmica das aulas; o clima era sempre de muita discussão sobre o tema, o professor sempre passando pelas carteiras e falando com os seus alunos. Suas explicações sempre continham algumas “piadinhas”, que seus alunos adoravam; o ambiente era muito agradável e seus alunos participavam ativamente. Existiam alguns poucos alunos desinteressados, mas logo trabalhavam, pois o professor chamava sua atenção. Vale lembrar que os alunos sentavam-se como queriam em sala, não havendo determinação do professor a esse respeito.

Os alunos da professora não levavam o material da THA para casa. No primeiro dia ela disse aos alunos que as atividades seriam realizadas em sala.

As aulas eram sempre em duplas, pois, segundo a professora, isso ajudava a discussão entre os alunos, apesar de ser uma sala muito falante.

O clima no início da THA durante as aulas da professora era muito tranqüilo, bem mais silencioso que a outra sala de aplicação. Muitos alunos participavam, porém um número considerável se recusava a fazê-lo. A professora, apesar de, algumas vezes, chamar a atenção desses alunos, não exigia a participação deles.

Após a primeira semana, resolvemos falar com os alunos desinteressados, que relataram não gostar de Matemática e não entender a professora. Argumentamos que a atividade não era impossível de ser realizada e mostramos que a idéia central é permitir que eles tirem suas conclusões para discutirem com os outros alunos. Obtivemos resultados e os alunos começaram a tentar participar.

3.5.3 A diferença de experiência no magistério existente entre os professores foi fator de distinção na aplicação?

Algumas situações nos levam a supor que o tempo de experiência em sala de aula de cada professor foi fator determinante na diferença entre eles. Talvez não seja possível dizer quem se saiu melhor ou pior durante a aplicação. Nossa opinião é a de que podemos observar eventuais acertos e erros sempre com o objetivo de melhorar nossa própria prática docente.

A primeira grande diferença surgiu logo no primeiro dia de desenvolvimento da THA. O professor que tem quase dois anos de experiência em sala de aula sugeriu a seus alunos que levassem o material da THA para casa; a professora com 24 anos de experiência em sala de aula disse que não iriam levar, pois infelizmente esqueceriam em casa e não trariam de volta. A professora estava certa!

Outra grande diferença aparente é a dinâmica em sala de aula. O professor é sempre mais agitado, pedindo agilidade de seus alunos, falando em um tom alto. O ponto positivo das aulas do professor é o clima de participação que ele consegue impor em suas aulas, os alunos sempre

tentando resolver as atividades. Como fator negativo, apontamos a ansiedade um pouco exagerada do professor, que foi uma constante durante a aplicação das atividades. Esse fato talvez não permita que os alunos construam suas próprias conclusões, pois são freqüentemente interrompidos pelo professor, que não espera o fim da atividade e logo vai à lousa resolver as questões. Um exemplo disso foi a 1.^a atividade do 2.^o momento, em que a sugestão era os alunos desenvolver e compartilhar suas conclusões, porém o professor realizou na lousa com a participação parcial da sala.

A professora prefere um clima silencioso durante as aulas, fala “baixinho”, e quando um aluno começa a conversar ele interrompe sua explicação. O ponto positivo de suas aulas é que ela sempre responde uma pergunta com outra pergunta, fazendo o aluno pensar e buscar a resposta. Ela espera que um aluno consiga resolver a atividade para que ele possa compartilhar sua resolução, só então corrige na lousa tirando dúvidas. O fator negativo é que às vezes, ao responder ao aluno com uma pergunta, ela provoca a desistência dele sobre o problema, caso ele não saiba por onde seguir. Uma observação feita durante a aplicação é que a professora se utiliza de alguns termos errôneos, usados pela maioria dos professores, por exemplo, numa equação diz ao aluno que “o termo passa para o outro lado do igual com o sinal trocado”.

Portanto, podemos identificar que existem grandes diferenças na atuação dos professores e talvez isso seja proveniente da diferença do tempo de experiência em sala de aula existente entre os dois.

3.5.4 Interesse dos alunos pelas atividades

Na sala do professor percebemos que a maioria dos alunos se interessou durante toda a trajetória. As discussões sobre as atividades aconteciam principalmente entre os alunos antes da correção, que se ajudavam, e quando não conseguiam resolver o problema chamavam o professor, que às vezes esclarecia as dúvidas resolvendo a atividade, infelizmente.

Observamos que, apesar de os alunos terem participação ativa durante o processo, existiu menor interesse dos alunos na 2.^a atividade do 3.^o momento, pois, segundo os próprios alunos, eram situações difíceis de solucionar, e dessa vez deveriam tentar resolver sozinhos, percebemos inclusive alguns alunos aguardando a correção na lousa nesse momento. O interesse dos estudantes teve seu ápice nas aulas realizadas na sala de informática. Nossa hipótese é de que se trata de um ambiente diferente da sala de aula, com um instrumento que a maioria pode não saber usar muito bem, porém adora manusear.

Os alunos da professora começaram a trajetória participando bastante, exceção feita a um pequeno grupo de alunos mencionado anteriormente, que só participou depois de uma conversa. A maioria dos alunos participou e discutiu o 1.^o momento com muita intensidade. Os problemas começaram a emergir a partir do 2.^o momento, quando a participação da sala caiu e um grande número de alunos passou a esperar pela resolução na lousa. Esse fato infelizmente foi uma constante durante a aplicação do restante da atividade.

Temos como hipótese para essa atitude passiva de alguns alunos a proposta da professora durante o desenvolvimento da THA. A professora pedia para os alunos resolverem as atividades e evitava explicações durante essas resoluções, porém os alunos não conseguiam solucionar e as explicações não eram dadas até que algum aluno conseguisse, o que causava desinteresse entre os alunos.

3.5.5 Principais dificuldades e possíveis causas

Durante o desenvolvimento da THA, notamos algumas dificuldades apresentadas pelos alunos de ambos os professores, algumas das quais já prevíamos após nossa revisão bibliográfica; outras surgiram no decorrer de nossa trajetória. Apontar as possíveis causas não é fácil, pois não conhecemos a trajetória de aprendizagem dos alunos. Por essa razão, nossas hipóteses são baseadas em indícios observados durante as aulas.

Entre as dificuldades encontradas, sem dúvida a mais freqüente e preocupante é a falta de segurança dos alunos em experimentar, levantar

hipóteses, errar e aprender com o erro, fruto talvez de uma aprendizagem que não abre espaço para discussões dos temas ensinados entre os alunos, não privilegia a construção do conhecimento, ficando apenas na transmissão de conteúdos sem preocupações com a qualidade do que se está ensinando. Segundo os alunos, nas aulas eles nunca tiveram que concluir nada, apenas usar o que o professor ensina.

Outro problema preocupante é a não-interpretação correta de situações-problema. Essa dificuldade já era apontada pela professora Mônica Karrer em nossa revisão bibliográfica, porém não imaginávamos que seria tão intensa. Mais uma vez nossa hipótese é de que esse tipo situação não faz parte do repertório diário das aulas de Matemática, ou, se fazem, não estão sendo bem utilizadas pelos professores.

O não-estabelecimento dos logaritmos como ferramenta para resolução de problemas ocorreu com mais da metade dos alunos, o que não nos surpreende. Imaginamos que essa dificuldade provavelmente seria identificada em outros temas matemáticos, além do logaritmo.

Entendemos que partir de funções exponenciais para chegar às funções logarítmicas seja um bom caminho a percorrer, contudo indicamos como fortes dificuldades as regras de potenciação, resolução de equações exponenciais, resolução de equações de 1.^o e 2.^o graus, construção e interpretação de gráficos (plano cartesiano), tópicos básicos de funções (domínio, imagem, função inversa, entre outros.). Esses temas foram trabalhados, segundo os professores, assim nossa hipótese é de que o foram superficialmente, ou seja, os estudos não foram suficientes para que os alunos conseguissem utilizá-los para aquisição de novos conhecimentos, ou, assim como ocorrido em nossa trajetória, os temas anteriores a esses não foram bem absorvidos e não deram suporte a novos aprendizados. Se nossas hipóteses estiverem certas, teremos infelizmente uma seqüência de temas matemáticos que não estão sendo bem assimilados por uma série de alunos.

O mau uso ou não das propriedades dos logaritmos de maneira adequada também foi observado entre os alunos. É possível que a dificuldade

nas regras de potenciação tenha refletido nas propriedades dos logaritmos. O problema em utilizar a condição de existência dos logaritmos foi algo inesperado entre as dificuldades. Acreditávamos se tratar de um ponto de fácil entendimento entre os alunos, porém acreditamos que subestimar esse aspecto foi o motivo para tal dificuldade. Entendemos que nunca se deve considerar que um tema a ser ensinado seja tão fácil que não mereça atenção especial; todos necessitam.

A dificuldade em manusear a calculadora científica apontada pela professora Mônica Karrer em seu trabalho não foi identificada durante nosso processo de aprendizagem. Por seu turno, o *software* utilizado para construção de gráficos foi um problema para alguns alunos, provavelmente causado pelo não-uso desse tipo de ferramenta nas aulas de Matemática, infelizmente.

3.5.6 Interação *professor x aluno* e intervenções durante as atividades

Durante as aulas da professora, percebemos a existência de uma relação um pouco superficial com os alunos, ou seja, a professora trabalhava mais com aqueles que a buscavam, não havendo um incentivo por parte dela com os alunos que não tentavam realizar as atividades.

As intervenções feitas pela professora eram sempre no sentido de propor que os próprios alunos buscassem suas estratégias de resolução. Como já relatado, a professora sempre respondia uma pergunta com outra pergunta para que seu aluno achasse o caminho. Ao final de cada atividade, a professora socializava a resolução dos alunos que conseguiam solucionar o problema e realizava a correção na lousa.

O professor tinha uma interação mais intensa com os seus alunos. Quando a atividade era proposta aos alunos, o professor andava pela sala incentivando e colocando todos para participar. As dúvidas eram esclarecidas durante o “passeio” pela sala; verificamos inclusive que, em algumas ocasiões, as explicações se tornavam resoluções, pois diversas vezes o professor acabava por resolver o problema para seus alunos. Após dar um breve tempo

para eles tentarem responder as atividades, o professor sempre se dirigia à lousa para resolvê-las com a participação dos alunos.

3.5.7 Adequação do tempo a aplicação da Trajetória

Ao final da aplicação da THA, pudemos observar que o tempo destinado à aplicação não foi adequado em nenhuma das salas. A princípio, não estipulamos aos professores a quantidade de aulas para cada atividade, pois nosso objetivo era verificar o tempo gasto em média para aplicar cada uma delas, para então fazer essa indicação na terceira versão.

As atividades iniciais foram conduzidas pelos professores sem maiores problemas em relação ao tempo, porém as atividades finais, em especial o 4.^o momento, foram consideravelmente prejudicadas por uma série de fatores, por exemplo, o projeto da Escola, dias chuvosos sem alunos presentes, parte de dezembro quando os alunos deixam de ir à escola freqüentemente, e principalmente o tempo de aula no período noturno, que é de apenas 45 minutos. Portanto, chegamos à conclusão de que os doze dias (24 aulas) utilizados pelos professores foram insuficientes e comprometeram especialmente a parte final da THA. Estimamos que seriam necessários 15 dias (30 aulas) para a adequação de nossa THA.

3.5.8 Opinião dos alunos sobre as atividades da THA

Ao final do desenvolvimento da THA, conversamos com alguns alunos para saber suas opiniões a respeito das atividades e da interação com o professor. A seguir, apresentamos o relato de alguns alunos que quiseram opinar; os nomes utilizados são fictícios:

Bruna: “Gostei mais desse jeito, porque a professora não fica só falando e a gente só escutando”.

Carlos: “O professor ficou mais gente boa, antes ele não nos ouvia tanto”.

Carina: “Eu achei mais difícil, a professora não fala o que ela quer, a gente é que tem que descobrir”.

Natália: “Eu adorei, é muito legal quando a gente chega às conclusões sozinhas. O professor podia fazer sempre assim. Ano que vem tem mais?”.

Ramon: “A parte do computador foi muito legal, a galera gostou desse tipo de aula”.

Érica: “No começo eu não conseguia quase nada, mais esse jeito de discutir em grupo dá uma motivada e no final eu fazia sozinha”.

Paulo: “A professora tá ouvindo mais nossa opinião, isso faz a gente entender melhor, pois ouvimos vários pontos de vista”.

Daniela: “Acho problemas muito difícil, podia ter mais exercícios sem ter que ficar lendo pra gente praticar”.

Pedro: “Eu gosto muito de Matemática, e acho que esse jeito diferente de dar aula fez bem pra todo mundo; a gente entendeu melhor porque fizemos discutindo, o professor ficou mais próximo dos alunos e todo mundo gostou”.

Amanda: “Gostei da apostila, só não gostei de fazer as atividades sem explicação para depois ver a professora fazendo na lousa, antes era ao contrário”.

Carolina: “Foi bom porque os exercícios cobravam mais da gente, ninguém recebia a fórmula pra resolver”.

Daniel: “Eu não imaginava que calculadora fazia tanto, gostei de usar”.

Marcelo: “O que eu mais gostei foi quando tivemos que observar as relações naquela tabela, pra chegar às propriedades”.

Imaginamos que existam alunos que não aprovaram as atividades ou como elas foram trabalhadas, porém infelizmente não quiseram opinar.

CAPÍTULO 4

CONHECIMENTOS, REFLEXÕES E AS INDICAÇÕES DE MUDANÇAS PARA A 3ª VERSÃO DA THA

Observando o Ciclo de Ensino de Matemática abreviado (SIMON, 1995) apresentado na figura 1 (p. 28), podemos perceber que o “conhecimento do professor” é a partida e a chegada desse ciclo. Desse modo, neste capítulo apresentaremos reflexões sobre novos conhecimentos tanto dos professores participantes da pesquisa quanto dos nossos conhecimentos como professor pesquisador, advindos do desenvolvimento de nossa THA. Apontaremos ainda modificações na THA, com o objetivo de corrigir pequenas falhas observadas.

4.1 Conhecimentos e reflexões dos professores

Ao final da aplicação da THA, pudemos conversar com os professores sobre o processo de desenvolvimento das atividades, pontos positivos e negativos desse processo e qual o sentimento depois da aplicação.

Em geral, os professores começaram falando sempre sobre os aspectos negativos, falaram do problema de não haver computadores disponíveis para todos na sala de vídeo, do número excessivo de alunos em sala, do pouco tempo de aula (45 minutos), da conversa exagerada de alguns alunos, de alunos que copiavam constantemente do colega, enfim, se queixaram da estrutura de trabalho que possuem na escola pública.

No tocante ao Ciclo proposto por Simon, os professores concluíram que participaram intensamente da elaboração e desenvolvimento da THA, interagiram o máximo possível durante a aplicação das atividades, avaliaram os novos conhecimentos dos alunos sobre funções logarítmicas e sem dúvida adquiriram novos conhecimentos para iniciar um novo Ciclo.

Quando perguntados dos aspectos matemáticos, mais uma vez os pontos negativos vieram na frente, por exemplo, a falta de interesse de alguns

alunos, falta de “base matemática”, problemas em interpretar textos, entre outros.

Apesar desses apontamentos, os professores disseram estar satisfeitos com a participação no projeto. A professora mencionou nunca ter visto a abordagem de logaritmos como a que ocorreu na THA, fato que lhe agradou, pois considera que foi muito mais significativo para os alunos, e que, apesar de ter uma sala difícil, o trabalho foi bem realizado. Vejamos algumas falas da professora:

“Olha, me surpreendi com algumas atividades e com alguns alunos, pois achava que não iam conseguir resolver algumas situações, mas eles conseguiram”.

“Infelizmente não tenho base nenhuma em *software* matemático, mas seria importante se tivéssemos condições de usar nas aulas”.

Já o professor foi o que relatou maior satisfação com o projeto; disse que nunca havia permitido ao seu aluno tirar suas próprias conclusões, sempre achou essa coisa de construir o conhecimento uma besteira, porém estava enganado. Vejamos algumas falas:

“Confesso que não disse nada no começo, mas achei que seria tempo perdido”.

“Tinha aluno que nunca fazia nada, e com o projeto começou a fazer, isso foi fantástico.”

“Minha relação com eles (alunos) melhorou 100%.”

“Na escola particular estou fazendo igual, tentando fazer o aluno pensar em como chegar a um objetivo.”

“Minha idéia de boa aula mudou significativamente.”

Observamos que ambos professores apresentaram dificuldades e falta de conhecimento no uso de tecnologias no ensino de Matemática, segundo eles, fruto de uma formação acadêmica que não explorou esse tipo de material.

Ao final, percebemos que os professores aparentemente têm clareza de que é fundamental preparar suas atividades, entendendo seus objetivos.

4.2 Conhecimentos e reflexões do professor pesquisador

Analisar as mudanças ocorridas nos meus conhecimentos de professor não é tarefa fácil, apesar da certeza de que elas existem e são intensas. Hoje tenho clareza de que minha visão do “ensinar e aprender matemática” mudou consideravelmente, sei também que minha situação é bem melhor que a da maioria dos professores de matemática, pois estou cursando o mestrado, participo de um grupo de pesquisa que reflete constantemente sobre a relação Professor X Aluno X Conhecimento, além de estar perto de leituras e teorias sobre esses temas. A maioria de nossos colegas professores não possui acesso a esses estudos e/ou materiais por diversos motivos.

Nesse sentido nossa pesquisa foi até o ambiente de sala de aula, refletiu junto ao professor sobre seu “saber matemático” e seu “ensinar matemática”, juntos enxergamos possibilidades e enfrentamos obstáculos. Julgamos que trabalhos assim podem fazer a diferença no ambiente escolar.

Em relação a novos conhecimentos advindos da construção, aplicação e observação da THA posso destacar que por mais difícil que seja elaborar uma THA para determinado assunto ou que as condições de trabalho inviabilizem o bom trabalho do professor, ficou evidente para mim que, sem compreender os objetivos de aprendizagem de uma atividade ou uma seqüência delas é quase impossível que se consiga conduzi-la ou atingir seus objetivos.

Percebi também que não é nada fácil colocar em prática o que absorvi por meio das leituras prévias de pesquisas na área, pois apesar de saber que a THA ideal não existe, buscamos sempre caminhos que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

Desse modo acho que ao elaborar a primeira THA, passar pelas críticas dos colegas de grupo, pelas sugestões dos professores, pela aplicação em sala de aula e pela banca de qualificação, sem dúvidas todo esse caminho trouxe grandes contribuições ao meu desenvolvimento profissional. Hoje sem dúvidas a reflexão a respeito dos objetivos e atividades que pretendo atingir no ensino de qualquer tema está mais presente que antes a cada preparação de aula que faço.

4.3 Reflexões e Indicações para mudanças na THA

Acompanhando o desenvolvimento das atividades em sala de aula e discutindo com os professores, fomos identificando possíveis mudanças a serem incorporadas numa nova versão da THA. Desse modo elaboramos uma 3ª versão da THA, que descreveremos na sequência.

A primeira decisão foi identificar que as expectativas de aprendizagem bem como os objetivos deveriam continuar os mesmos, por isso decidimos manter as etapas da trajetória em 4 Momentos:

- ✓ **1º Momento:** Destinado à revisão de alguns tópicos que julgamos essenciais para o desenvolvimento do tema funções logarítmicas.
- ✓ **2º Momento:** Apresentação e utilização da nova ferramenta de cálculos (Logaritmo).
- ✓ **3º Momento:** Trabalha com a condição de existência e propriedades dos Logaritmos.
- ✓ **4º Momento:** Construção e análise do comportamento gráfico das funções logarítmicas e uso do software Winplot.

Para entendermos como se deu a análise que motivou tais alterações na THA, faremos uma apresentação dos fatores considerados positivos e negativos de cada momento. No caso dos fatores negativos temos a motivação para respectivas mudanças:

1º Momento:

Entendemos que as atividades do primeiro momento foram insuficientes para contemplar seus objetivos de revisão de alguns temas, quais sejam:

- ✓ Potenciação e suas regras;
- ✓ Resolução de equações exponenciais;
- ✓ Construção de gráficos de funções exponenciais.

Apesar de esses tópicos antecederem aos estudos do Logaritmo e os professores afirmarem que o estudo foi bem realizado, decidimos ampliar o 1º Momento para garantir tais revisões recolocando atividades que haviam sido retiradas da primeira versão e acrescentando novas atividades que vão de encontro aos objetivos estabelecidos, além de incorporarmos na principal atividade do primeiro momento, uma tabela sugerida pela professora com o

objetivo de facilitar a visualização da regularidade do fenômeno em questão por parte dos alunos.

2º Momento:

Acreditamos que as atividades do segundo momento estão adequadas e contemplaram os objetivos. Os alunos demonstraram que o caminho escolhido para o primeiro contato com a nova ferramenta de cálculos (Logaritmo) vai de encontro ao objetivo maior da THA, que era proporcionar atividades em que os estudantes experimentassem, levantassem hipóteses e construíssem suas próprias idéias sobre o tema.

Apesar de decidirmos manter a essência do segundo momento, achamos que é possível melhorar o texto dos problemas deixando mais “sutil” o primeiro contato dos alunos com o Logaritmo.

3º Momento:

Percebemos que as atividades do terceiro momento que envolvia as propriedades dos logaritmos foram inovadoras no ambiente de sala de aula, além de proporcionar belos diálogos entre os alunos, por essa razão vamos manter as atividades e ampliar os exercícios de aplicação, pois as avaliações mostraram um grau elevado de dificuldades nesse tópico.

Já a parte que tratou da condição de existência dos Logaritmos necessita de profunda reformulação, uma vez que as avaliações mostraram um nível elevadíssimo de dificuldade nesse ponto.

4º Momento:

Infelizmente tivemos esse momento comprometido devido ao tempo insuficiente para aplicação completa da THA, vale lembrar que não tivemos uma avaliação específica dos objetivos desse momento.

Nossa avaliação desse momento foi baseada na observação da aplicação das atividades em sala de aula. Percebemos que as atividades se bem trabalhadas suprem os objetivos atribuídos.

Assim decidimos que as mudanças não serão radicais, elas ocorrerão principalmente nas orientações para os professores, que serão alertados sobre

alguns tópicos que são essenciais para o desenvolvimento das atividades, tópicos como função inversa, domínio e imagem de funções, entre outros relacionados às funções em geral.

Outra mudança é que vamos sugerir um tempo maior para aplicação do quarto momento, pois pretendemos que o professor faça uma apresentação mais completa do software Winplot.

De modo geral sentimos que a terceira versão da THA deva melhorar principalmente nas orientações para o professor. Assim tentaremos melhorar esse quesito.

4.3.1 Terceira Versão da THA:

1º Momento (tempo previsto 3 aulas)

Objetivos:

Essa atividade tem como objetivo principal identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre potenciação e exponencial, bem como revisá-los através principalmente dos exercícios 1 e 2. Outro objetivo da atividade é o de colocar os alunos em contato com uma situação problema da qual o aluno se defronta com uma situação da qual seus conhecimentos até aqui adquiridos não são suficientes para resolvê-la (problema 3) criando assim a expectativa de aprendizagem de uma nova ferramenta para resolução desse tipo de situação assim como relatado na nota histórica.

Estratégia para o professor:

Como potenciação e equações exponenciais são temas que antecedem o ensino de funções logarítmicas, imaginamos que os alunos consigam discutir e estabelecer o melhor caminho para resolução dessa atividade. Por essa razão sugerimos ao professor que dê um tempo para que seu aluno tente resolver em seguida discuta e faça a correção junto aos alunos como revisão dos temas.

É muito importante para o bom andamento das atividades que o professor tenha trabalhado com as potências, em especial com as

propriedades básicas, assim como resolução de equações exponenciais e construção de gráficos.

Atividade

1- Vamos relembrar um pouco de quando trabalhamos com as potências. Nesse estudo conhecemos algumas de suas características especiais que são conhecidas como propriedades das potências. Você se lembra de todas? Vamos relembrá-las no quadro abaixo:

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ por exemplo } 2^2 \cdot 2^7 = 2^{2+7} = 2^9$$

$$2) a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ por exemplo } 5^9 : 5^5 = 5^{9-5} = 5^4$$

$$3) (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \text{ por exemplo } (7^3)^5 = 7^{3 \cdot 5} = 7^{15}$$

$$4) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n \in \mathbb{N} / n > 1, \text{ por exemplo } \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

$$5) a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0. \text{ por exemplo } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \text{ ou ainda } (2/3)^{-3} = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$$

Escolha corretamente a propriedade e reduza a uma só potência:

$$a) 3^4 \cdot 3^5$$

$$b) 2^{-8} \cdot 2^5$$

$$c) (x^3)^4$$

$$d) (3^2)^{-1}$$

$$e) 7^9 : 7^4$$

$$f) (\frac{1}{4})^{-3} : 4^3$$

$$g) w^5 : w^{10}$$

$$h) a^{n+1} \cdot a^{n-2}$$

2- Logo após estudarmos as potências, estudamos as equações exponenciais! Você se recorda desse estudo? Que tal uma revisão? Resolva as equações exponenciais abaixo: (Caso precise peça ajuda ao seu professor)

$$a) 2^x = 64$$

$$b) 9^x = 243$$

$$c) 3^x = \frac{1}{81}$$

$$d) 10^{3x} = \frac{1}{10000}$$

$$e) 4^x = \sqrt[3]{32}$$

$$f) 3^{2x} = 81$$

$$g) 10^x = 0,001$$

$$h) 5^x = 64$$

Pense e responda: Você encontrou dificuldades em responder o item “h”? Em caso positivo, quais foram as dificuldades? Foi possível fazer pelo menos uma estimativa do valor de x ?

3- Uma pequena empresa de cosméticos tem um faturamento anual bruto de aproximadamente 1 milhão de reais e acaba de ser vendida a uma empresa multinacional que pretende investir pesado num projeto audacioso de expansão. O projeto inclui investimentos em máquinas modernas, aumento de funcionários e transportes, tudo para atingir a meta que é triplicar o faturamento anual bruto a cada ano nos próximos 7 anos e assim tornar-se uma das maiores empresas de cosméticos do país. Imaginando que essa meta seja cumprida a cada ano:

- a) Preencha a tabela abaixo que relaciona o faturamento da empresa em função do tempo:

TEMPO APÓS A VENDA DA EMPRESA (EM ANOS)	FATURAMENTO DA EMPRESA (EM MILHÕES DE REAIS)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

- b) Ao final dos sete anos quantas vezes o faturamento bruto dessa empresa terá crescido em relação ao início do processo?
- c) Sendo “ t ” o tempo em anos e “ f ” o faturamento anual bruto em reais dessa empresa. Escreva uma relação matemática que nos permita calcular o faturamento anual bruto em relação ao tempo.
- d) Num plano cartesiano, construa um gráfico que mostre o crescimento do faturamento dessa empresa durante os sete anos. (faturamento no eixo vertical e o tempo no eixo horizontal)
- e) É possível determinar o período exato em que o faturamento dessa

empresa será de 100 milhões de reais anuais? Em caso negativo faça uma estimativa desse período observando o gráfico.

- f) Você encontrou dificuldades em responder o item "e" ? Em caso afirmativo quais foram as dificuldades?

Nota Histórica: Dificuldades parecidas com as encontradas no item "f" da 1ª atividade, bem como cálculos complicados que exigiam tempo e dedicação de quem fosse resolver, eram fatores que dificultavam a expansão comercial e a navegação nos séculos XV e XVI. Essas dificuldades exigiam métodos práticos que facilitassem os cálculos com o objetivo de aprimorar a navegação e promover a expansão comercial.

Nessa época, o escocês John Napier (1550-1617) e o suíço Jobst Burgi (1552-1632) desenvolveram, independentemente, métodos para facilitar cálculos com os mesmos fundamentos básicos, diferenciados pelo uso de valores e terminologia. Napier, após vinte anos de estudos, se antecipou a Burgi e, em 1614, publicou em seu *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, o método que revolucionaria o cálculo.

A partir de agora vamos estudar esse método. Vamos conhecer nas próximas aulas o Logaritmo!!!

2º Momento/1ª Atividade (tempo previsto 2 aulas)

Objetivos:

Essa atividade tem o objetivo de trabalhar uma situação contextualizada que envolva a equação e a função exponencial que servirão de base para os estudos sobre funções logarítmicas, além de apresentar aos alunos o primeiro contato com a nova ferramenta de estudo (logaritmos) por meio do uso da calculadora científica.

Estratégia para o professor:

Sugerimos ao professor que deixe seu aluno realizar a leitura da atividade bem como sua resolução, possivelmente haverá dificuldades no

manuseio da calculadora por isso é aconselhado uma apresentação das principais funções da calculadora inicialmente a atividade. Outro ponto de possível dificuldade é nos passos que conduz o aluno a tecla “log” da calculadora, por isso sugerimos ampla discussão entre os alunos para que aqueles que consigam realizar esses “passos” auxiliem os outros alunos. Essa atividade é considerada a principal da trajetória, por essa razão é sugerido ao professor que não faça a resolução para seus alunos, mais sim que provoque ampla discussão em sala de aula. Ao final o professor deve permitir que um aluno transcreva sua resolução na lousa.

1- A bactéria *Escherichia coli* é uma bactéria cujo habitat natural é o lúmen intestinal dos seres humanos e de outros animais de sangue quente, é um dos poucos seres vivos capaz de produzir todos os componentes de que é feita, a partir de compostos básicos e fontes de energia suficientes. A presença da *Escherichia coli* em água ou alimentos é indicativa de contaminação com fezes humanas (ou mais raramente de outros animais). A quantidade de *Escherichia coli* em cada mililitro de água é uma das principais medidas usadas no controle da higiene da água potável municipal, preparados alimentares e água de piscinas. Esta medida é conhecida oficialmente como índice coliforme da água.

Essa bactéria sob condições ideais subdivide-se em duas a cada período de geração, partindo de um único indivíduo. Assim, por exemplo, uma bactéria após uma hora subdivide-se em duas e assim sucessivamente.

Supondo uma cultura de bactérias que se reproduza a partir de uma só bactéria em condições ideais:

- a) Preencha a tabela abaixo que relaciona a quantidade de bactérias presentes na cultura com o tempo de reprodução:

TEMPO DE REPRODUÇÃO	NÚMERO DE BACTÉRIAS PRESENTES NA CULTURA
1	
2	

3	
4	
5	
7	
10	
12	
	16.384
	256
	2.048
	65.536

- b) Chamando de "n" o número de bactérias e "t" o tempo medido em horas, determine a lei que rege o fenômeno em estudo, ou seja, a expressão matemática que descreve tal comportamento.
- c) Construa um gráfico que relacione o tempo de reprodução com a quantidade de bactérias existentes nessa cultura.
- d) Observando o gráfico, em quanto tempo aproximadamente estarão presentes 1000 bactérias na cultura?

Pensemos Juntos: Provavelmente se o item “d” do problema anterior nos perguntasse o período **exato** em que existiriam 1000 bactérias na cultura, não conseguiríamos responder, certo? O que aprendemos até hoje não nos permite calcular exatamente esse período!!!

Porém após a estimativa feita neste item, vamos calcular novamente, só que dessa vez usando uma nova ferramenta de cálculos chamada Logaritmo. Provavelmente ela nos trará o período exato que estamos procurando!!

Siga os passos e tire suas próprias conclusões!!!

1º A partir da expressão obtida no item “b”, substituir o número de bactérias por 1000.

$$n = 2^t \rightarrow 1000 = 2^t$$

Prof: Discutir com os alunos sobre qual a melhor estratégia para resolução desse tipo de equação. Provavelmente os alunos chegarão à conclusão de que o grande problema está relacionado às bases, uma vez que os estudos realizados até aqui demonstram que seria impossível igualar as bases nessa situação. Nesse momento deve ser sugerido aos alunos que tentem igualar as bases, sugerindo como base o número 10 e abrindo para discussão o motivo da escolha da base 10, chegando-se a conclusão de que a base 10 é uma boa base, pois nosso sistema de numeração é decimal e isso facilita bastante o uso da calculadora que é universal e também trabalha com base 10. Assim os alunos chegariam a conclusão de que necessitam de expoentes “x” e “y”, tais que: $10^y = 1000$ e $10^x = 2$.

2º Como vimos nas equações exponenciais, a resolução consiste em escrever em mesma base o membro da esquerda e o da direita. Para facilitar o uso da calculadora vamos optar pela base 10. Assim escreva novamente a equação substituindo 1000 por 10^y e 2 por 10^x :

$$10^y = (10^x)^t$$

3º Trabalhando com o membro da esquerda temos $10^y = 1000$, determine o valor de y.

$$y = 3$$

4º No membro da direita temos $10^x = 2$, perceba que essa questão é a chave para resolução do problema. Nosso objetivo é determinar o valor de “x”!! Usando a tecla log da calculadora tecle $\log 2 =$, anote o resultado. Em seguida usando a tecla 10^x (tecle: 10^x em seguida o valor anotado e o sinal de igual) tire uma prova do resultado. Perceba que você encontrou o valor de “x”!!!

Prof: A segunda expressão fica responsável pelo primeiro contato dos alunos com o tema logaritmo, assim fica a cargo do professor apresentar uma

ferramenta da calculadora que substituindo antigas tábuas é capaz de determinar expoentes dados a base 10 de modo que se chegue ao valor esperado. Desse modo deve ser solicitado ao aluno que faça uso da calculadora na resolução da equação $10^y=2$, usando as teclas **log2=** e chegando assim na conclusão $y = 0,3010$ aproximadamente.

5º Realizando as devidas substituições, escreva a expressão $1000 = 2^t$, agora como potência de base 10:

$$1000 = 2^t \rightarrow 10^3 = (10^{0,301})^t$$

6º Resolva a equação e responda novamente o item “g”. O cálculo dessa vez foi mais preciso?

$$10^3 = (10^{0,301})^t \rightarrow 3 = 0,301t \rightarrow t = 9,96 \text{ horas ou } t \approx 9 \text{ horas e } 57 \text{ minutos}$$

Faça você mesmo: Para praticar essa nova ferramenta, calcule o tempo necessário para que nessa comunidade existam 100, 500, 2000 e 3000 bactérias, respectivamente.

Pense e responda: O que a tecla “log” da calculadora nos fornece?

2º Momento/2ª Atividade (tempo previsto 1 aula)

Objetivo:

O objetivo dessa atividade é familiarizar o aluno com a ferramenta logaritmo por meio de exercícios em que os alunos devem caracterizar a operação logarítmica além de compará-la sempre com a exponencial a fim de identificá-la como sendo a operação inversa da exponencial. Um objetivo secundário é o uso da calculadora científica como ferramenta de cálculos sempre que possível.

Estratégia para o professor:

È sugerido que o professor durante essa atividade permita que seus alunos experimentem essa nova ferramenta, as duvidas que surjam devem ser levadas ao conhecimento de todos os alunos para que proponham soluções e criem um ambiente colaborativo. Ao final o professor deve realizar a correção na lousa.

1-Complete a tabela:

EQUAÇÃO NA FORMA EXPONENCIAL	EQUAÇÃO NA FORMA LOGARITMICA	CÁLCULO DO LOGARITMO
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$	$x = 3$
$5^x = 125$		$x =$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x =$
$2^x = 32$		$x =$
$3^x = 243$		$x =$
$10^x = 50$		$x =$
$10^x = 0,98$		$x =$
$10^x = 950$		$x =$
$10^x = 15000$		$x =$

Obs: Se a base do logaritmo for 10, costuma-se oculta-la.

Prof: O professor deve destacar a observação de que a base 10 dos Logaritmos é normalmente ocultada. Nossos estudos apontam que grande parte dos alunos não se atenta a esse fato, que pode se tornar um obstáculo a aprendizagem dos mesmos.

2-Determine:

- a) $\log_2 1024$
- b) $\log 550$
- c) $\log_4 4096$
- d) $\log 5,8$
- e) $\log 700$
- f) $\log 10.000$
- g) $\log_3 81$
- h) $\log_5 125$

3- Se $a^x = b \rightarrow \log_a b = x$, temos:

OPERAÇÃO ELEMENTOS	POTENCIAÇÃO	LOGARITMAÇÃO
a	Base	Base do logaritmo
b	Potência	Logaritmando ou antilogaritmo
x	Expoente	logaritmo

Note que a potenciação e a logaritmação são operações que se relacionam. Com base nos estudos até aqui, o que é logaritmo em sua opinião?

2º Momento/3ª Atividade (tempo previsto 2 aulas)

Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo, colocar o aluno em contato com situações problema as quais devem fazer uso do logaritmo como ferramenta de resolução sem que isso seja sugerido a ele, além de colocar em discussão o uso do logaritmo em outras áreas do conhecimento.

Estratégia para o professor:

Essa atividade é um pouco mais técnica, por essa razão o professor pode realizar a leitura junto à classe e destacar as aplicações do Logaritmo. Caso as dificuldades sejam numerosas, o professor pode ainda realizar uma resolução conjunta com seus alunos.

1) Digitando o número 85 numa calculadora e depois apertando a tecla LOG, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10?

Significa que 10 elevado a esse valor é igual a 85.

2) (UFMT) (...) A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imaginem que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo,

100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo “t” em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura “h” em metros. (*adaptado da revista superinteressante, maio de 2000. P.86*)

A partir das informações dadas, classifique cada item abaixo em verdadeiro ou falso. (justifique as afirmações falsas)

a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$.

b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.

c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.

a) F – a função seria $t = \log h$

b) V

c) F – em 2,5 segundos o foguete atingiria a altura de $10^{2,5} = 316$ metros aproximadamente.

3) (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)$$

com “t” em metros e “t” em anos. Se um dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu uma altura de 3,5 metros de altura, o tempo transcorrido do momento da plantação até o corte foi de?

$$3,5 = 1,5 + \log_3 (t + 1)$$

$$3,5 - 1,5 = \log_3 (t + 1)$$

$$2 = \log_3 (t + 1)$$

$$3^2 = t + 1$$

$$9 = t + 1$$

$$9 - 1 = t$$

$$T = 8 \text{ anos}$$

4) Suponhamos que uma represa de área igual a 129 Km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 3 Km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento dessa vegetação seja dobrar a cada ano. Desse modo caso nenhuma atitude fosse tomada,

responda:

- a) Qual seria a área infestada após 1 ano?
- b) Qual seria a área infestada após 2 anos?
- c) Qual seria a área infestada após 3 anos?
- d) Qual seria a área infestada após 4 anos
- e) Qual seria a área infestada após “n” anos?
- f) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa?

3º Momento/1ª Atividade (tempo previsto 3 aulas)

Objetivo:

Essa atividade tem como objetivo levar o aluno a observar algumas relações entre valores de alguns logaritmos, sobre a existência ou não do logaritmo de alguns números e ao final da atividade ser capaz de usar suas observações na resolução de algumas situações em que elas serão úteis.

Estratégia para o professor:

Esperamos que essa atividade proporcione um momento de experimentação aos alunos, assim o professor deve deixar os alunos levantar sua hipóteses sem interferência a não ser ao final da atividade durante a correção e discussão. Vale lembrar que a formalização das propriedades deve ser feita em conjunto (professor e alunos).

- 1) Preencha a tabela abaixo com o uso da calculadora, em seguida responda os itens **a** e **b**:

Prof: A atividade deve ser iniciada com o uso da calculadora em dupla, pois facilitará no alcance do objetivo principal que é o levantamento de conjecturas por parte dos alunos. O professor nesse momento será apenas um intermediário elegendo um aluno como seu assistente que fará as anotações na lousa (sugestão: o professor sentar-se no fundo da sala).

A atividade deve ser iniciada com uma série de questionamentos por parte do professor, como por exemplo: será que todo número possui um log?

Será que existem relações entre diversos valores de logaritmos? E por fim deve ser sugerida a construção de uma tabela na lousa (aluno assistente) com alguns valores a serem calculados seus logaritmos. A tabela deve ser semelhante à tabela abaixo e os valores devem ser registrados chegando a um consenso na sala sobre as casas decimais (quatro, por exemplo).

n	log n
0	Error
1	0,0000
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1,0000
100	2,0000
1000	3,0000
10000	4,0000
30	1,4771
300	2,4771

50	1,6990
500	2,6990
5000	3,6990
0,1	-1
0,98	-8,77

a) O que você pode observar sobre os logaritmos de números entre 0 e 1?

Os resultados são negativos.

b) Tente identificar relações entre os valores dos logaritmos (coluna direita da tabela) e faça uma lista de observações.

Prof: Outros valores também podem ser sugeridos pelos alunos na tabela, principalmente valores decimais que servirão de apoio para valiosas conjecturas levantadas pelos alunos e dirigidas pelo professor.

Nesse momento deve solicitar ao aluno assistente que anote na lousa as observações (conjecturas) dos alunos. Segue algumas possibilidades de observações que poderão fazer parte da lista:

- A grande maioria dos logaritmos dá valores decimais infinitos;
- 5, 50 e 500 têm a mesma parte decimal (no log), o mesmo acontece com 1, 10, 100, 1000, 10000 ; 3, 30 e 300.
- 0,2 é igual a $1/5$ e tem a mesma série da expansão dos 5;
- Números entre 0 e 1 têm logaritmo negativo;
- $\log 5 + \log 0,2 = 0$; $\log 2 + \log 0,5 = 0$; $\log n + \log 1/n = 0$;
- $\log 5 - \log 0,5 = 1$; $\log 2 - \log 0,2 = 1$; $\log n - \log 0,n = 1$;
- $\log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 = 0,7782(\text{quase}) = \log 6$;
- $\log 2 + \log 4 = 0,3010 + 0,6021 = 0,9030(\text{quase}) = \log 8$;
- $\log 4 = 0,6031$ ou seja $2 \cdot 0,3010(\text{quase})$, então $\log 4 = 2 \cdot \log 2$;

Após a coleta de conjecturas o professor deve pedir que os alunos preencham a tabela a seguir sem o uso da calculadora com base nas

observações feitas e anotando a justificativa de cada linha:

2) Sem o uso da calculadora, usando somente as observações feitas pelos colegas de sala, preencha a tabela abaixo:

n	log n
11	1,0413
12	1,0792
13	1,1139
14	1,1461
15	1,1761
16	1,2041
17	1,2304
18	1,2552
19	1,2787
20	1,3010

Prof: Após o preenchimento sem o uso da calculadora, o aluno deve conferir os resultados dessa vez usando a calculadora.

Alguns erros devem ser obtidos e isso deve levar a uma discussão sobre os motivos que levaram os alunos a cometerem esses erros. Provavelmente os alunos acertaram os valores que conseguirem decompor numa multiplicação assim como observado na penúltima conjectura apresentada nessa trajetória, enquanto que provavelmente errem nos valores como por exemplo 13, tentando estabelecer o meio do caminho entre 12 e 14. Isso deve ser imediatamente colocado em questão pelo professor devendo a sala chegar à conclusão de que a potenciação não dá saltos regulares e por esse motivo a estratégia não foi bem sucedida. Essas são possíveis discussões nesse

momento da aula podendo desse modo surgir outros questionamentos que deverão ser discutidos e esclarecidos antes de se perseguir.

Após a discussão deve-se então institucionalizar as três famosas propriedades dos logaritmos:

3) Faça uma lista das principais conclusões que podem ser tiradas de suas observações:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

$$\log x^a = a \cdot \log x$$

Prof: Chamar a atenção para essas conclusões e nomeá-las como propriedades dos logaritmos. Caso alguns alunos não visualizem tais conclusões, o professor deve formalizá-las retomando a tabela inicial e dando exemplos.

4) Agora que sabemos o que é Logaritmo, vamos tentar responder uma pergunta: Será que é possível calcular o Logaritmo de qualquer número em qualquer base? Calcule os Logaritmos abaixo e tire suas conclusões:

a) $\log(-100) =$

b) $\log_2 0 =$

c) $\log_0 5 =$

d) $\log_1 32 =$

e) $\log_{(-3)} 27 =$

Pense e responda: Agora você consegue responder se existe logaritmo de qualquer número em qualquer base? Quais as condições para se calcular o Logaritmo em sua opinião?

Prof: Aproveite bem as observações feitas pelos alunos e trabalhe bem a questão da existência de um logaritmo, pois esse tópico foi ponto de grande dificuldade em nossos estudos.

Ao final da discussão entre professor e alunos, o professor deve formalizar que: Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$.

3º Momento/2ª Atividade (tempo previsto 2 aulas)

Objetivo:

O objetivo dessa atividade é por meio de exercícios de aplicação fazer com que o aluno faça uso das propriedades e das condições de existência trabalhadas na atividade anterior a fim de causar no aluno a familiarização com essas propriedades.

Estratégia para o professor:

Durante a realização dessa atividade, o professor pode dar dicas das propriedades a serem utilizadas, porém nunca resolver para seu aluno que deve conseguir usar suas observações da atividade anterior. As dificuldades podem ser tratadas individualmente se for possível.

1- Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; use as propriedades dos logaritmos e calcule: (sem usar a calculadora)

- a) $\log 8$
- b) $\log 12$
- c) $\log 72$
- d) $\log 5$
- e) $\log 0,0001$
- f) $\log 200$

2) Se $\log 42 = m$; $\log 7 = n$. Determine $\log 6$ em função de “m” e “n”:

3) Determine os valores de x, de modo que cada log abaixo exista:

- a) $\log(x-1)$
- b) $\log_{(x+3)} 5$
- c) $\log_{(x)} (2x+4)$
- d) $\log_{(3x-6)} (x-2)$
- e) $\log_{(-x+2)} 10$

4) Resolva em R:

- a) $\log_7 x - \log_7 (x - 1) = \log_7 2$

- b) $\log_5 x + \log_5 (x - 2) = \log_5 3$
- c) $\log x - \log (x - 1) = \log 6$
- d) $\log_2 x^2 + \log_2 x = 5$
- e) $\log_5 (x^2 - 1) = 3 \cdot \log_5 2 + \log_5 3$
- f) $(\log_2 x)^2 + 4 \cdot \log_2 x - 32 = 0$

5) Determine **y** supondo satisfeitas as condições de existência:

- a) $\log_a y = \log_a (m+n) + \log_a 3 - \log_a (m-n) - \log_a 2$
- b) $\log_a y = \log_a (m+1) - \log_a (m+8) + 4 \cdot \log_a m - 2 \cdot \log_a n$

Prof: É muito importante que o prosseguimento da atividade só aconteça após os alunos demonstrarem domínio em relação as propriedades e condição de existência dos logaritmos, uma vez que dificuldades sobre esses temas são comuns entre os alunos, segundo nossos estudos.

4º Momento:

Objetivo:

O primeiro objetivo dessa atividade é retomar o conceito de função exponencial por meio de uma situação problema contextualizada apresentada no 2º momento/1ª atividade. Essa retomada se deve ao fato de que durante toda a trajetória tentamos identificar a função logarítmica sendo a inversa da exponencial. Outro objetivo da atividade é o de estabelecer crescimento logarítmico através de tabela e gráfico fazendo sempre a comparação com crescimento exponencial, para tanto é sugerido sempre ao aluno a construção gráfica das duas funções sempre no mesmo plano cartesiano.

Durante o desenvolvimento dessa atividade, constantemente é retomado conceitos de funções em geral, como domínio e imagem, conceitos esses que julgamos essenciais para o bom entendimento de funções logarítmicas e suas propriedades.

A atividade também tem como objetivo apresentar ao aluno o logaritmo neperiano, por meio de uma atividade de construção gráfica em que o objetivo central é o de comparar $\ln x$ com e^x .

Um objetivo de destaque na atividade é o uso do software winplot para a construção de gráficos, uma vez que acreditamos que o seu uso trará

dinâmica aos gráficos ocasionando maior entendimento das funções além de um ambiente motivador entre os alunos já que por relato dos próprios alunos a aula em ambiente diferente da sala de aula tradicional sempre é visto com bons olhos pelos mesmos, principalmente na sala de informática.

Ao final da trajetória é apresentada ao aluno a título de curiosidade uma aplicação da curva descrita pelo gráfico de uma função logarítmica que descreve a curva em uma das torres mais famosas do mundo.

Estratégia para o professor:

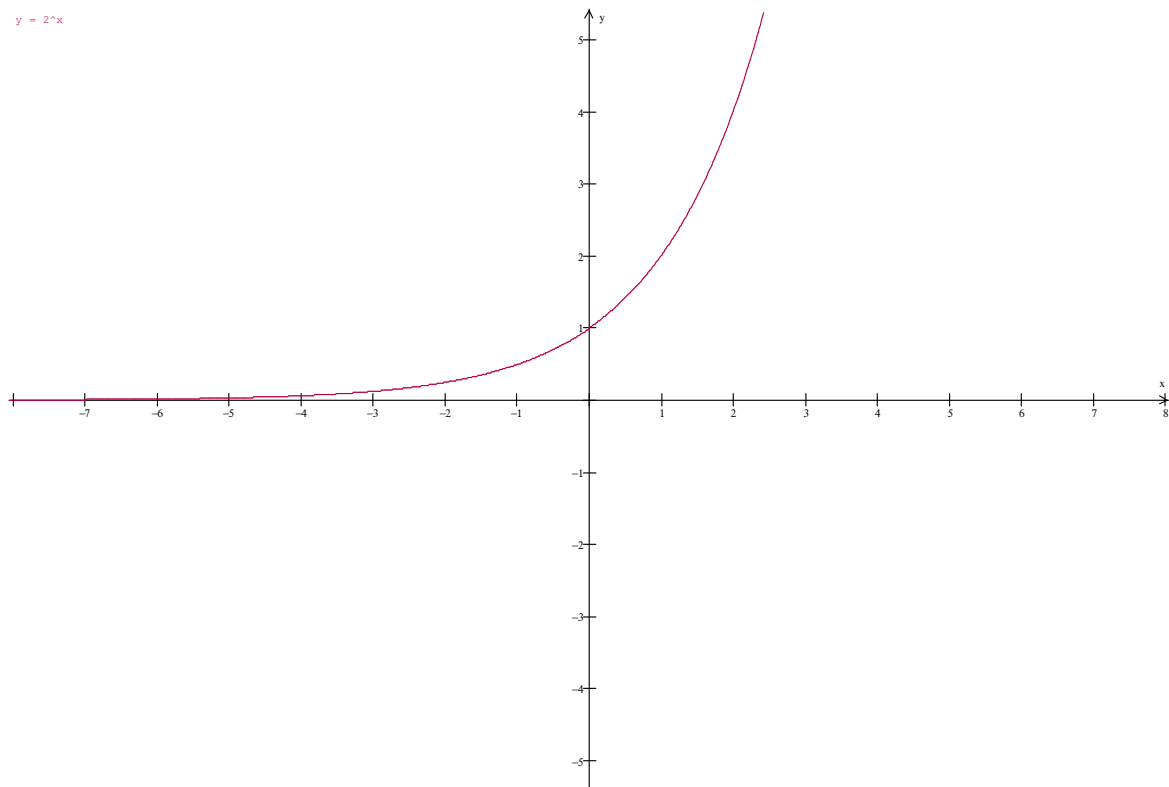
Inicialmente o professor deve realizar a apresentação do software Winplot aos alunos, em seguida propor o desenvolvimento da atividade de modo que os alunos experimentem e discutam suas resoluções. Imaginamos que durante a atividade alguns conceitos precisem ser revisados, por isso sugerimos que o professor se antecipe e realize uma revisão dos conceitos básicos de funções, como por exemplo, domínio, imagem entre outros.

Prof: Indicamos ao professor que não inicie a atividade que se segue sem amplo entendimento por parte dos alunos em relação a conteúdos como:

- ✓ Plano Cartesiano;
- ✓ Construção e interpretação de gráficos;
- ✓ Funções Inversas;
- ✓ Domínio e Imagem de Funções;
- ✓ Funções crescentes e decrescentes.

Atividade:

1-Pensando na situação que tratava da bactéria *Escherichia coli*, em que uma bactéria é capaz de se reproduzir dobrando a quantidade de indivíduos a cada ciclo de uma hora, chegamos à conclusão que a relação matemática que nos mostra a quantidade “n” de bactérias presentes na cultura após “t” horas de reprodução é $n=2^t$ ou ainda $f(t) = 2^t$, com $n = f(t)$ uma vez que o valor de “n” está em função de “t”. Assim o gráfico construído na ocasião e que nos mostra o crescimento populacional da cultura de bactéria *Escherichia coli* em função do tempo é:



Representação gráfica da função $n = 2^t$

a) O gráfico nos mostra valores negativos para o tempo de reprodução. Como isso pode ser interpretado?

Resposta esperada: Esperamos que os alunos relatem que no problema em questão o número inicial de bactérias foi uma, porém essa informação não está sendo considerada na construção apresentada que apresenta quantidades inferiores a uma bactéria e conseqüentemente valores negativos para o tempo de reprodução.

b) Sendo o gráfico acima representante da função $f(t) = 2^t$. Qual é o domínio e a imagem dessa função?

Resposta esperada: Achamos que nesse item os alunos encontraram um pouco de dificuldade talvez por não se lembrarem dos termos domínio e imagem. Por esse motivo aconselhamos aos professores que resolvam junto aos alunos fazendo uma breve revisão dos tópicos domínio e imagem.

c) Usando a ferramenta logaritmo, escreva uma nova relação matemática (função), só que dessa vez relacionando o tempo “t” em horas com a

quantidade “n” de bactérias:

Resposta esperada: $t = \log_2 n$

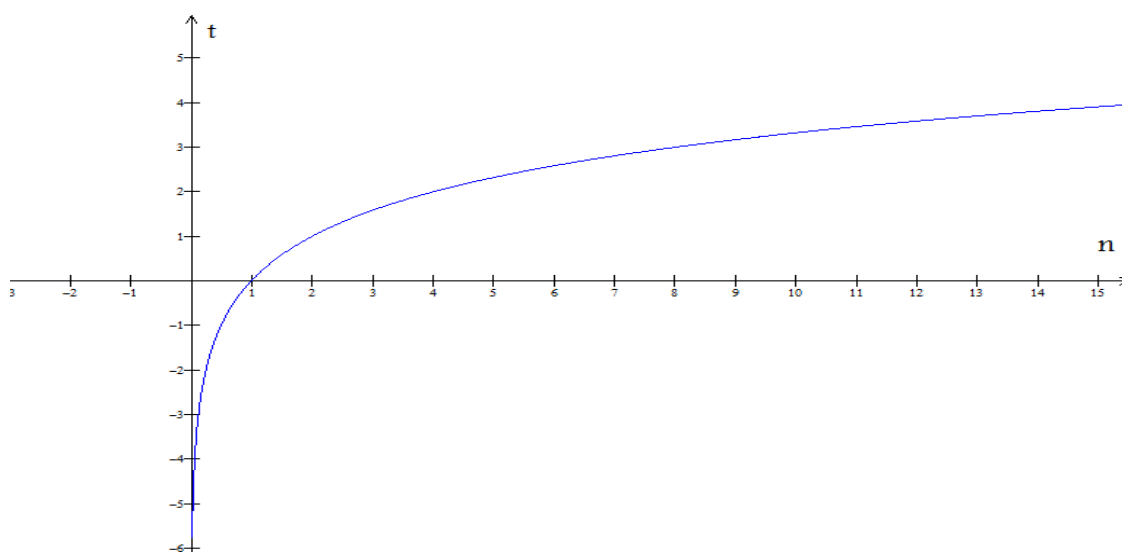
d) Usando a nova função matemática preencha a tabela com alguns valores de “n”:

Número de bactérias “n”	“t” ou $f(n)$

Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam preencher a tabela dos logaritmos em base 2 sem grandes dificuldades, porém orientamos os professores que conduzam as escolhas dos alunos para que não utilizem valores que compliquem seus cálculos. Vale lembrar que a tabela no material do aluno possui mais linhas do que a apresentada acima.

e) Construa o gráfico de “t” em função de “n” com base na tabela do item b.

Resposta esperada: Não esperamos maiores dificuldades durante a construção do gráfico.



Representação gráfica da função $t = \log_2 n$

f) O que ocorre com o gráfico à medida que o valor de “n” (nº de bactérias) aumenta? Por que não existe gráfico para valores de “n” negativos?

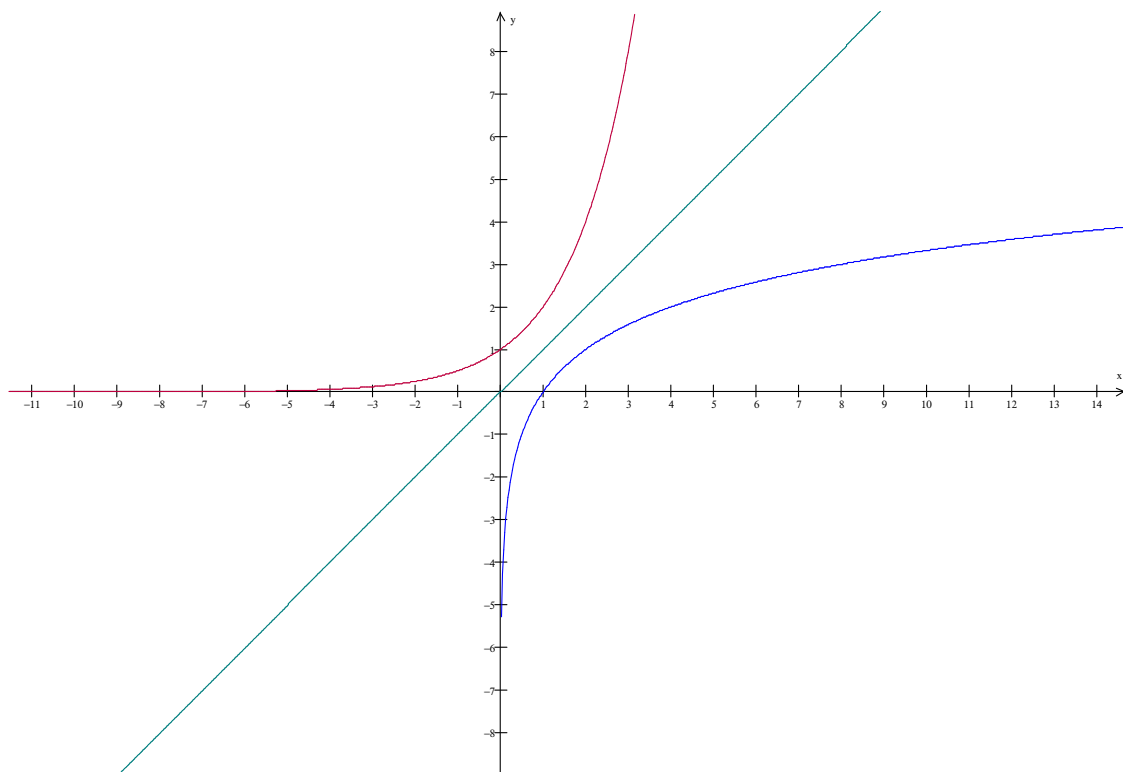
Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam observar o gráfico e responder que a medida que “n” aumenta, “t” também aumenta. Além de responderem que não existe nenhum expoente racional que fará uma potencia de base 2 ter um resultado negativo. Talvez essa última resposta precise da interferência do professor para ser concluída.

g) Qual o domínio e a imagem da função representada no item “e”?

Resposta esperada: Achamos que após a revisão do professor sobre domínio e imagem, os alunos consigam responder a essa questão sem maiores problemas.

h) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico da função $f(t) = 2^t$ e da função $f(n) = \log_2 n$ e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resposta esperada:



Representação gráfica das funções $t = \log_2 n$, $n = 2^t$ e $n = t$

i) Que observações ou conclusões você pode tirar em relação ao gráfico das duas funções?

Resposta esperada: Esperamos que os alunos consigam visualizar a simetria entre os dois gráficos em que a bissetriz dos quadrantes ímpares

representa o eixo de simetria entre as curvas.

2) Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ em seguida trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- a) Qual o domínio e a imagem de cada função?
- b) As funções são crescentes ou decrescentes?
- c) O fato de serem crescentes ou decrescentes tem relações com a base de cada função (exponencial e logarítmica)? Em caso afirmativo, qual a relação?

Resposta esperada: Espera-se que os alunos possam relacionar o fato do gráfico crescente estar ligado a base maior que 1 e o gráfico decrescente ligado a base entre 0 e 1.

- d) As observações feitas no item “i” do exercício anterior são válidas para essas duas funções?

Resposta esperada: As observações feitas também valem para essas funções.

- e) Qual observação você destacaria como principal quando se compara uma função exponencial com uma função logarítmica de mesma base?

3) Entre tantos números fascinantes, temos o número “e”, base dos logaritmos neperianos, também chamados de logaritmos naturais. Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que provou ser esse número o limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente. O valor aproximado de “e” (com 9 casas decimais), pode ser facilmente memorizado: $e = 2,718281828...$

Com o auxílio do software Winplot, construa o gráfico de $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ ($f(x) = \log_e x$) e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares tudo no mesmo plano cartesiano.

- a) As funções são crescentes ou decrescentes?
- b) As funções são inversas entre si?

Resposta esperada: Mais uma vez é esperado que os alunos apresentem dúvidas. Os professores devem realizar uma breve revisão do tema já trabalhado Funções Inversas.

c) As observações e conclusões feitas até agora são válidas no caso do número “e”?

d) As observações podem ser generalizadas para todas as funções exponenciais e logarítmicas? Em caso positivo faça uma lista de observações.

4) Sem construir os gráficos indique para cada função as principais características (domínio, imagem, crescente ou decrescente):

a) $f(x) = 3^x$

b) $g(x) = \log_3 x$

c) $h(x) = (2,3)^x$

d) $i(x) = \log_{2,3} x$

e) $j(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

5) Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

b) $g(x) = \log_3 x$

c) $h(x) = \log_{2,3} x$

Interessante:

O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, para x igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4, é capaz de nos mostrar uma das prováveis fórmulas que delineou o perfil do cartão postal francês, a Torre Eiffel.

Veja:

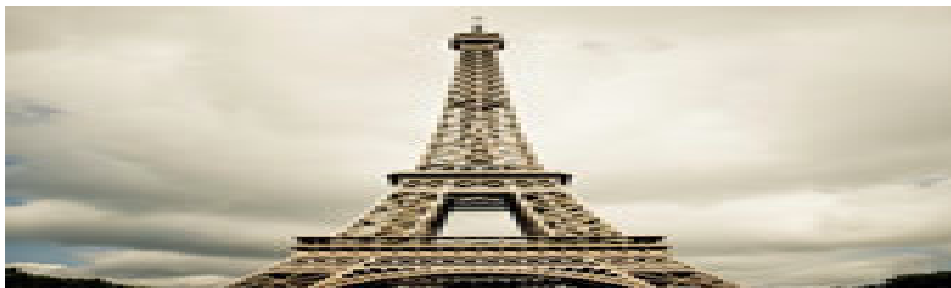
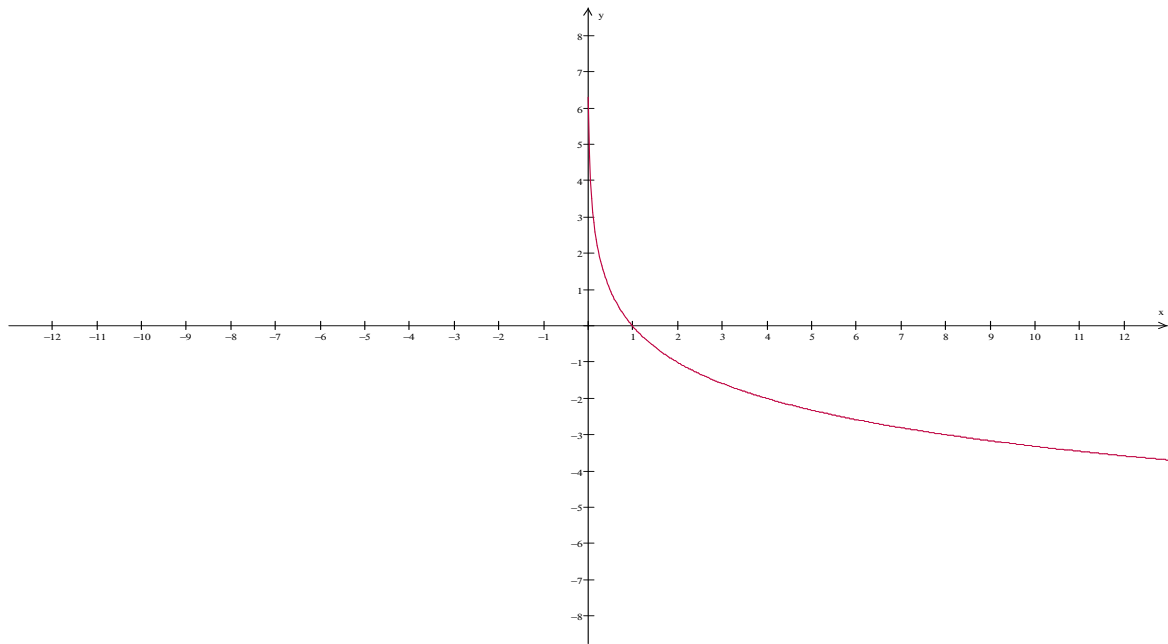


Imagem: Torre Eiffel, Paris, inaugurada em 31 de março de 1889



Representação gráfica da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Como vimos a parte da curva em que $y \geq 0$ respeita a arquitetura da torre mais famosa do mundo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como guia de nossas reflexões finais, retomaremos três questões apresentadas inicialmente em nosso trabalho e que nos nortearam durante toda a pesquisa, quais sejam:

- ✓ Como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, no caso particular das funções logarítmicas?
- ✓ Como podem ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem, que explorem contextos do cotidiano de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática?
- ✓ Que atuação pode ter um professor de Matemática ao abordar o tema funções logarítmicas, quando se pretende que os alunos sejam protagonistas na construção de suas aprendizagens?

No que se refere a como compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, no caso particular das funções logarítmicas. Percebemos ao longo do projeto que a atividade de planejamento no ambiente escolar infelizmente se restringe, na maioria das vezes, ao documento elaborado pelas disciplinas no início do ano e que é poucas vezes utilizado durante o ano letivo, ou seja, o planejamento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem ou de atividades semelhantes não faz parte do dia-a-dia escolar. Desse modo, o professor percorre um caminho solitário sem nenhum tipo de material que possa auxiliá-lo.

Nesse sentido, entendemos que a idéia de “Trajetória Hipotética de Aprendizagem” proposta por Simon pode trazer grandes contribuições para uma “reconstrução pedagógica da Matemática de uma perspectiva construtivista” e se mostra promissora em compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino, pois vêm ao encontro da necessidade de nortear a ação pedagógica, apresentando

modelos, não absolutos, e sim exemplos de atividades que contemplem uma visão construtivista. Simon acrescenta:

Embora o construtivismo tenha potencialidade para sustentar mudanças no ensino da Matemática, é necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo (apud PIRES, 2009, p. 6).

É preciso ainda ter clareza de alguns aspectos errôneos que permeiam a idéia do construtivismo, como aquela de que “o aluno constrói sozinho o seu conhecimento”, ou ainda a idéia de que numa seqüência de atividades o professor é um mero aplicador. O bom andamento da aprendizagem dos alunos é subordinação do professor, depende de suas hipóteses sobre a aprendizagem, de suas escolhas e adaptações. Verificamos que uma THA não é o principal instrumento para aprendizagem sob uma visão construtivista, pois seu sucesso depende efetivamente da atuação do professor.

A partir dessas reflexões, entendemos que a possibilidade de compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem com o planejamento de ensino é possível e bastante promissora para aprendizagem efetiva dos alunos, porém exige uma reflexão mais profunda dos envolvidos no ambiente escolar (coordenadores, diretores e professores), uma vez que identificamos a dificuldade e o despreparo dos professores em trabalhar com essa perspectiva, por mais que se esforçassem. Demonstração de que a perspectiva construtivista é pouco ou nada utilizada no ambiente escolar.

Identificamos entre os professores diferentes formas de abordar a mesma THA, o que nos leva a refletir um pouco mais sobre que atuação pode ter um professor de Matemática ao abordar o tema funções logarítmicas, quando se pretende que os alunos sejam protagonistas na construção de suas aprendizagens.

Antes de tudo, é preciso ressaltar a dificuldade em passar aos professores o que pretendíamos com a THA, mesmo depois das reuniões, pois cada professor carrega com si suas concepções sobre como ensinar Matemática.

Em virtude disso, os resultados em sala foram bem diferentes, um dos professores proporcionou, mesmo que por um tempo reduzido, grandes discussões entre os alunos; o ambiente era de descoberta e experimentação. Ao final dos trabalhos, o professor se disse surpreso com a diferença nas relações e na produção de seus alunos. Por outro lado, a seqüência de atividades era deixada exageradamente por conta dos alunos na outra sala, isso levou por diversas vezes à desmotivação dos estudantes.

Mais uma vez, percebemos o papel fundamental do professor em todo o processo de aprendizagem, pois como ele atua tendo em mãos uma seqüência de atividades é mais determinante do que a própria atividade no que diz respeito a uma perspectiva construtivista. Nenhum resultado é possível se o professor não entende os objetivos da atividade para aprendizagem dos alunos e as utiliza de maneira equivocada.

No decorrer da aplicação da THA, percebemos que o termo “Hipotética” também fez muito sentido, pois identificamos adaptações realizadas pelos professores de acordo com o momento de cada turma. Essas adaptações não ocorreram de maneira radical. Imaginávamos maiores modificações durante o percurso, porém mesmo assim elas foram evidentes, por exemplo, a criação de artifícios não previstos (tabelas), a retomada de conteúdos, a mudança na ordem de alguns exercícios, principalmente durante as correções. Isso nos leva a entender melhor a analogia feita por Simon:

Façamos uma analogia: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na seqüência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da seqüência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para

viajar é sua “trajetória”. O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua “trajetória hipotética” (SIMON, 1995, p. 35).

Como relatado anteriormente, antes da elaboração da THA fizemos um levantamento sobre pesquisas na área da Educação Matemática com o objetivo de buscar resultados sobre o ensino e aprendizagem do tema funções logarítmicas. Apesar de nos apoiarmos em seus resultados, verificamos que a quantidade de pesquisas na área é muito pequena. Além disso, as pesquisas existentes não chegam ao conhecimento do professor. Em virtude desse problema, nos deparamos com questões que talvez não ficaram bem esclarecidas, por exemplo, como potencializar o uso de novas tecnologias (*softwares*) no ensino de funções logarítmicas.

No tocante a como podem ser propostas e desenvolvidas em sala de aula situações didáticas de aprendizagem, que explorem contextos do cotidiano de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Verificamos que, apesar de considerarmos que atividades envolvendo resolução de problemas, contextualizações interdisciplinares, levantamento de hipóteses, investigação, aplicação de conceitos matemáticos ao cotidiano do aluno e o uso de *softwares* possam favorecer a aprendizagem dos alunos, ainda existem grandes dificuldades entre os professores em trabalhar dessa maneira.

Em nosso primeiro contato com os professores participantes da pesquisa, percebemos que parte deles em geral ainda acredita que a aprendizagem poderá ocorrer de maneira eficaz somente por meio de aulas expositivas, em que o aluno se torna “espectador” e “coletor” de conteúdos e na maioria das vezes sem nenhuma problematização do tema em estudo.

Isso nos remete a um problema na formação do professor que em sua carreira profissional reproduz atitudes de uma formação incompleta ou incapaz de lidar com novos desafios da profissão. Segundo relato do professor colaborador, que se graduou recentemente, nunca houve em seu curso abordagens parecidas com a que tentamos realizar em nossa THA. Para ele, a idéia de construtivismo era bem diferente da que tem hoje e nunca trabalhou o tema em sua formação.

Na opinião dos professores colaboradores, aparentemente os cursos de formação de professores de Matemática pouco mudaram em relação à metodologia de ensino, pois a professora colaboradora relata não ter tido nenhum trabalho sobre metodologias de ensino baseadas no construtivismo em sua formação, a exemplo do professor. Sabemos que essa é uma questão que necessita de mais leituras e estudos para se chegar a uma conclusão, mas sem dúvida existem problemas na formação dos professores de Matemática a esse respeito.

Para finalizar, podemos asseverar que não basta ao professor ter em mãos uma seqüência de atividades que contemplem uma perspectiva construtivista se, quando for utilizar, não agir de maneira condizente com essa perspectiva. Em poder dessa seqüência de atividades, o professor deve desafiar seus alunos na medida certa, intervir de modo coerente e sistematizar o que foi trabalhado e não apenas socializar.

Esperamos que a leitura e a reflexão do trabalho apresentado possam contribuir para novas pesquisas na área e principalmente para a reflexão da prática docente dos amigos professores de Matemática.

Referências Bibliográficas

BARRODY, A. J.; CIBULSKIS, M.; LAI, M.; LI, X. Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 227-260, 2004.

BERLEZE, C. S. Uma *seqüência de ensino usando o programa Winplot*: em busca de uma aprendizagem autônoma do aluno. 2007. Dissertação (Mestrado para o Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS.

BISHOP, A. J. *Enculturación matemática*: la educación matemática desde una perspectiva cultural. Barcelona: Paidós, 1991.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 81-89, 2004.

COLL, C. *Psicologia e currículo*: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. Tradução de Cláudia Schilling. São Paulo: Ática, 1997.

CURI, E. *Formação de professores de matemática*: realidade presente e perspectivas futuras. 2000. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DOLL JR., W.E. *Currículo*: uma perspectiva pós-moderna. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

FAZENDA, I.C. *A interdisciplinaridade no ensino brasileiro*. São Paulo: Loyola, 1979.

FERREIRA, R. L. Uma *seqüência de ensino para o estudo de logaritmos usando a engenharia didática*. 2006. Dissertação (Mestrado para o Ensino de Física e Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS.

GÓMEZ, P.; LUPIÁÑEZ, J. L. Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), p. 79-98, 2007.

GARCÍAS, T. A. S.; BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Informática como veículo para mudança. *Revista Zetetiké*, CEMPEM-FE/UNICAMP, v. 6, n. 10, p. 77-86, jul.-dez. 1998.

GRAVEMEIJER, K. Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 105-128, 2004.

———; COBB, P.; BOWERS, J.; WHITENACK, J. W. Symbolizing, modeling, and instructional design. In: COBB, P.; YACKEL, E.; MCCLAIN K. (Ed.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*. Perspectives on discourse, tools, and instructional design. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 225-273.

KARRER, Mônica. *Logaritmos, proposta de uma seqüência de ensino com o uso da calculadora*. 1999. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

LESH, R.; YOON, C. Evolving communities of mind – In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 205-226, 2004.

MACEDO, L. de. *Competências e habilidades: elementos de uma reflexão pedagógica*. Paper de palestra na Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas em 1998.

MACHADO, N.J. *Epistemologia e didática: a alegoria como norma e o conhecimento como rede*. 1994. Tese (Livre Docência) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

MENEZES, L. C. O brasileiro está chegando ao Ensino Médio. Programa de Melhoria e Expansão do Ensino Médio no Estado de São Paulo. Governo do Estado de São Paulo, São Paulo, 2001. Mimeografado.

MORAN, J.; MASSETTO, M.; BEHRENS, M. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. São Paulo: Papirus, 2000.

OLIVEIRA, A. J. *O ensino de logaritmos a partir de uma perspectiva histórica*. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

PERRENOUD, P. *A formação de competências na escola*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

———. Formação contínua e obrigatoriedade de competência na profissão do professor. *Revista Idéias*, São Paulo, n. 30, 1998.

———. *Novas competências para ensinar*. Tradução de Patrícia C. Ramos. Porto Alegre: Artmed, 2000a.

———. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000b.

PIRES, C.M.C. *Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.

———. Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da matemática no currículo visando à superação do binômio máquina e produtividade. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo: Educ, 2004.

———. Orientações Curriculares para a Educação Básica: qual o caminho? *Revista de Educação PUC-Campinas*, Campinas, v. 18, p. 25-34, 2005.

———. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. 2008. Mimeografado. Artigo submetido para publicação.

PONTE, J.P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: ——— et al (Org.). *Desenvolvimento profissional de professores de matemática: que formação?*. Lisboa: SPCE, 1995.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta educacional: currículo e avaliação*. São Paulo: SE/CENP, 1992a.

———. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática no segundo grau*. São Paulo: SE/CENP, 1992b.

———. Secretaria da Educação. *Avaliação dos concluintes do Ensino Médio/97*. Programa de Expansão e Melhoria do Ensino Médio. v. 1. São Paulo, 2000.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, 1999a.

———. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – bases legais*. Brasília, 1999b.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), p. 114-145, 1995.

———; TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 91-104, 2004.

STEFFE, L. P. On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), p. 129-162, 2004.

ANEXOS

Anexo A: Roteiro inicial para a entrevista com professores participantes

- 1) Nome
 - 2) Formação
Graduação Plena em Matemática ou Complementação
 - 3) Nome da escola que leciona e sua localização.
 - 4) Tempo de magistério.
 - 5) Professor Efetivo ou OFA
 - 6) Segmento que leciona: () E.F. I () E.F.II ()
E.M.
 - 7) Pós-Graduação cursada e/ou em andamento
- a) () Extensão
 - b) () Aperfeiçoamento
 - c) () Especialização
 - d) () Mestrado
 - e) () Doutorado
 - f) () sem pós-graduação
- 8) Já participou de algum trabalho colaborativo em sua escola? Qual?
 - 9) Em nossa pesquisa estamos desenvolvendo o conteúdo de Função Logarítmica. Como você costuma abordar ou abordaria esse tema em sala de aula?
 - 10) Os alunos compreendem o conceito de função logarítmica com facilidade?
Quais as principais dificuldades?
 - 11) Costuma trabalhar com resolução de problemas para desenvolver e/ou aplicar o conceito?
 - 12) Na construção dos gráficos os alunos apresentam dificuldades? Se sim, quais?
 - 13) Já fez atividades utilizando o recurso de algum software para a construção de gráfico de funções?
 - 14) Comente o que você acha sobre a utilização de softwares para o estudo do gráfico.

PROJETO: LOGARITMOS

Professor(a): _____

—

Aluno: _____

—

1º Ano _____ do Ensino Médio – 2008

1º MOMENTO:

1ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza a uma só potência:

a) $3^4 \cdot 3^5$

b) $(x^3)^4$

c) $7^9 : 7^4$

d) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$

e) $w^5 : w^{10}$

2-Resolva as equações exponenciais:

a) $2^x = 64$

b) $9^x = 243$

c) $3^x = \frac{1}{81}$

d) $10^{3x} = \frac{1}{10000}$

e) $4^x = \sqrt[5]{32}$

f) $3^{2x} = 81$

g) $10^x = 0,001$

h) $5^x = 64$

Obs: Você encontrou dificuldades em responder o item “h”? Em caso positivo, quais foram as dificuldades? Foi possível fazer pelo menos uma estimativa do valor de x?

3-Uma pequena empresa de cosméticos tem um faturamento anual bruto de aproximadamente 1 milhão de reais e acaba de ser vendida a uma empresa multinacional que pretende investir pesado num projeto audacioso de expansão. O projeto inclui investimentos em máquinas modernas, aumento de funcionários e transportes, tudo para atingir a meta que é triplicar o faturamento

anual bruto a cada ano nos próximos 7 anos e assim tornar-se uma das maiores empresas de cosméticos do país. Imaginando que essa meta seja cumprida a cada ano, responda:

- a) Qual o faturamento dessa empresa após um ano?
- b) Após três anos, qual o faturamento bruto dessa empresa?
- c) Após quantos anos o faturamento dessa empresa será de 81 milhões de reais anuais?
- d) Sendo “t” o tempo em anos e “f” o faturamento anual bruto em reais dessa empresa. Escreva uma relação matemática que nos permita calcular o faturamento anual bruto em relação ao tempo.
- e) Usando a relação do item anterior, após quantos anos o faturamento dessa empresa seria de 243 milhões anuais?
- f) Ao final dos sete anos quantas vezes o faturamento bruto dessa empresa terá crescido em relação ao início do processo?
- g) É possível determinar o período exato em que o faturamento dessa empresa será de 100 milhões de reais anuais? Em caso negativo faça uma estimativa desse período.
- h) Você encontrou dificuldades em responder o item “f” ? Em caso afirmativo quais foram as dificuldades?

Nota Histórica: Dificuldades parecidas com as encontradas no item “f” da 1ª atividade, bem como cálculos complicados que exigiam tempo e dedicação de quem fosse resolver, eram fatores que dificultavam a expansão comercial e a navegação nos séculos XV e XVI. Essas dificuldades exigiam métodos práticos que facilitassem os cálculos com o objetivo de aprimorar a navegação e promover uma expansão comercial.

Nessa época, o escocês John Napier (1550-1617) e o suíço Jobst Burgi (1552-1632) desenvolveram, independentemente, métodos para facilitar

cálculos com os mesmos fundamentos básicos, diferenciados pelo uso de valores e terminologia. Napier, após vinte anos de estudos, se antecipou a Burgh e, em 1614, publicou em seu *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, o método que revolucionaria o cálculo.

Esse método foi chamado por Napier de Logaritmo que significa “número de razão” e será alvo dos nossos estudos a partir de agora.

2º MOMENTO:

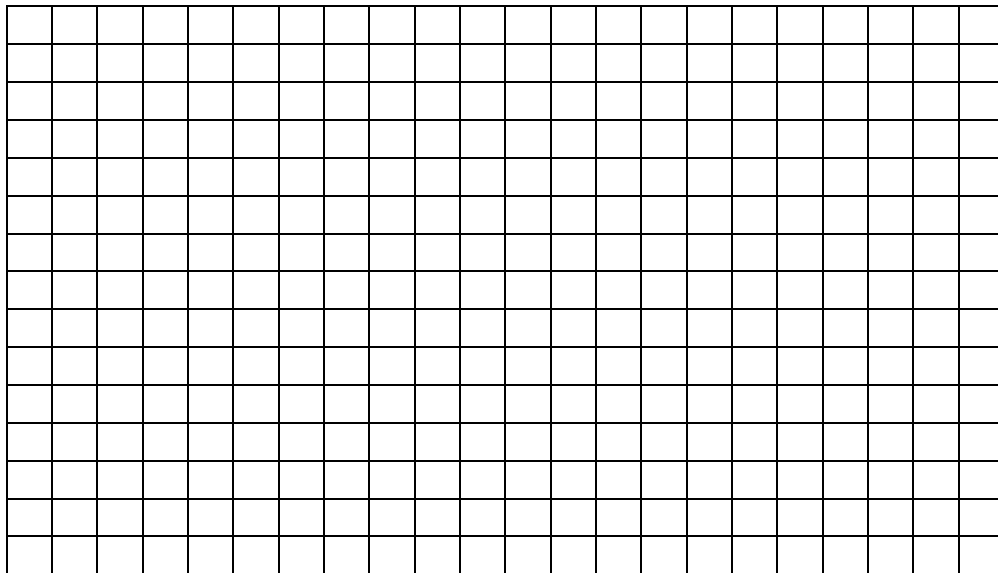
1ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-A bactéria *Escherichia coli* é uma bactéria cujo habitat natural é o lúmen intestinal dos seres humanos e de outros animais de sangue quente, é um dos poucos seres vivos capaz de produzir todos os componentes de que é feita, a partir de compostos básicos e fontes de energia suficientes. A presença da *Escherichia coli* em água ou alimentos é indicativa de contaminação por fezes humanas (ou mais raramente de outros animais). A quantidade de *Escherichia coli* em cada mililitro de água é uma das principais medidas usadas no controle da higiene da água potável municipal, preparados alimentares e água de piscinas. Esta medida é conhecida oficialmente como índice coliforme da água.

Essa bactéria sob condições ideais, subdivide-se em duas a cada período de geração, partindo de um único indivíduo. Assim, por exemplo, uma bactéria após uma hora subdivide-se em duas e assim sucessivamente. Desse modo:

- a) Que tipos de doenças você acredita que essa bactéria pode causar?
Que cuidados, devemos tomar em casa para evitá-las?
- b) Quantas bactérias existiram após três horas?
- c) Quantas bactérias existiram após 4 horas?
- d) Quantas bactérias existiram após 6 horas?
- e) Após quantas horas existiram 256 bactérias na cultura?

- f) Quanto tempo será necessário para que se tenha 1024 bactérias na cultura?
- g) Chamando de "n" o número de bactérias e "t" o tempo medido em horas, determine a lei que rege o fenômeno em estudo, ou seja, a expressão matemática que descreve tal comportamento.
- h) Construa um gráfico que relacione o tempo de reprodução com a quantidade de bactérias existentes nessa cultura.(use o tempo de reprodução no eixo horizontal e a quantidade de bactérias no eixo vertical).



- i) Observando o gráfico, em quanto tempo aproximadamente estarão presentes 1000 bactérias na cultura?

Após a estimativa feita neste item, vamos calcular dessa vez usando o método de Napier que chamaremos de Logaritmo a partir de agora.

1º A partir da expressão do item “b”, substituir o número de bactérias por 1000.

2º Como vimos nas equações exponenciais, a resolução desse tipo de equação consiste em escrever na mesma base o membro da esquerda e o da direita e para facilitar o uso da calculadora vamos optar pela base 10. Assim

escreva novamente a equação substituindo 1000 por 10^x e 2 por 10^y :

3º Começando com o membro da esquerda temos $10^x=1000$, determine o valor de x.

4º No membro da direita temos $10^y = 2$, determine o valor de “y” usando a tecla log da calculadora (tecle: log2=), em seguida usando a tecla 10^x (tecle: 10^x em seguida o valor encontrado para “y” =) tire uma prova do resultado.

5º Realizando as devidas substituições, escreva a expressão $1000 = 2^t$, agora como potência de base 10:

6º Resolva a equação e responda novamente o item “g”. O cálculo dessa vez foi mais preciso?

- j) Para praticar essa nova ferramenta, calcule o tempo necessário para que nessa comunidade existam 100, 500, 2000 e 3000 bactérias respectivamente.
- k) O que a tecla log da calculadora fornece?

2ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-Complete a tabela:

EQUAÇÃO NA FORMA EXPONENCIAL	EQUAÇÃO NA FORMA LOGARITMICA	CÁLCULO DO LOGARITMO
$2^x = 8$	$\log_2 8 = x$	$x = 3$
$5^x = 125$		$x =$
$10^x = 30$	$\log_{10} 30 = x$ ou $\log 30 = x$	$x =$
$2^x = 32$		$x =$
$3^x = 243$		$x =$
$10^x = 50$		$x =$
$10^x = 0,98$		$x =$
$10^x = 950$		$x =$

$10^x = 15000$		$x =$
----------------	--	-------

Obs: Se a base do logaritmo for 10, costuma-se oculta-la.

2-Determine:

- a) $\log_2 1024$
- b) $\log 550$
- c) $\log_4 4096$
- d) $\log 5,8$
- e) $\log 700$

3- Se $a^x = b \rightarrow \log_a b = x$, temos:

OPERAÇÃO ELEMENTOS	POTENCIAÇÃO	LOGARITMAÇÃO
a	Base	Base do logaritmo
b	Potência	Logaritmando ou antilogaritmo
x	Expoente	logaritmo

Note que a potenciação e a logaritmação são operações que se relacionam. Com base nos estudos até aqui, o que é logaritmo em sua opinião?

3ª ATIVIDADE (2aulas):

1) Digitando o número 85 numa calculadora e depois apertando a tecla LOG, aparece, no visor, 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10?

2) (UFMT) (...) A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imaginem que elas indiquem a

altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo “t” em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura “h” em metros. (*adaptado da revista superinteressante, maio de 2000. P .86*)

A partir das informações dadas, classifique cada item abaixo em verdadeiro ou falso. (justifique as afirmações falsas)

- a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$.
- b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.
- c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.

3) (UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)$$

com “t” em metros e “t” em anos. Se um dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu uma altura de 3,5 metros de altura, o tempo transcorrido do momento da plantação até o corte foi de?

4) Suponhamos que uma represa de área igual a 129 Km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 3 Km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento dessa vegetação seja dobrar a cada ano. Desse modo, responda:

- a) Qual seria a área infestada após 1 ano, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- b) Qual seria a área infestada após 2 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- c) Qual seria a área infestada após 3 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?

- d) Qual seria a área infestada após 4 anos, caso não fosse tomada nenhuma providência?
- e) Qual seria a área infestada após “n” anos, caso não se tomasse nenhuma providência?
- f) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa?

3º MOMENTO:

1ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-Preencha a tabela abaixo com o uso da calculadora:

n	log n
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
-1	

-2	
100	
1000	
10000	
30	
300	
50	
500	
5000	
0,1	
0,98	

- d) Quais conclusões você pode tirar sobre as possibilidades para se calcular o logaritmo de um número?
- e) O que você pode observar sobre os logaritmos de números entre 0 e 1?
- f) Tente identificar relações entre os valores dos logaritmos (coluna esquerda da tabela) e faça uma lista de observações.

2-Sem o uso da calculadora, usando somente as observações feitas pelos colegas de sala, preencha a tabela abaixo:

n	log n
11	
12	

13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

3- Faça uma lista das principais conclusões que podem ser tiradas desta atividade:

4-Utilizando a calculadora (se possível) e o logaritmo de base 10, determine x:

e) $4^x = 5$

f) $4^x = 19$

g) $4^x = 95$

h) $a^x = b$

2ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-Considerando que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$; use as propriedades dos logaritmos e calcule: (sem usar a calculadora)

g) $\log 8$

h) $\log 12$

i) $\log 72$

j) $\log 5$

k) $\log 0,0001$

l) $\log 200$

2-Se $\log 2 = m$; $\log 3 = n$. Determine $\log 1,5$ em função de “m” e “n”:

3-Determine os valores de x, de modo que $\log_{(x-4)}(x-1)$, exista:

4-Resolva em R:

d) $\log_7 x - \log_7 (x - 1) = \log_7 2$

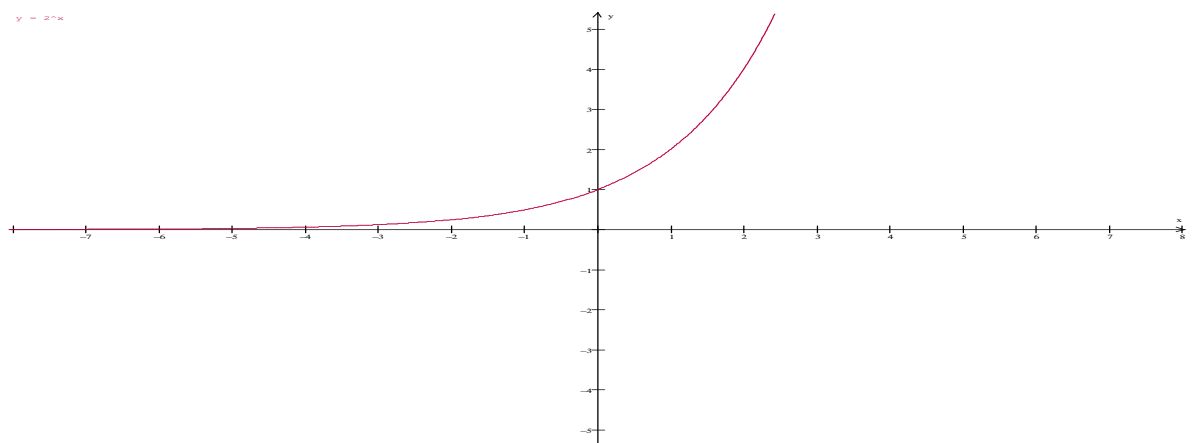
e) $\log_5 x + \log_5 (x - 2) = \log_5 3$

f) $\log x - \log (x - 1) = \log 6$

4º MOMENTO:

1ª ATIVIDADE (3 aulas):

1-Pensando na situação que tratava da bactéria *Escherichia coli*, em que uma bactéria é capaz de se reproduzir dobrando a quantidade de indivíduos a cada ciclo de uma hora, chegamos à conclusão que a relação matemática que nos mostra a quantidade “n” de bactérias presentes na cultura após “t” horas de reprodução é $n=2^t$ ou ainda $f(t) = 2^t$, com $n=f(t)$ uma vez que o valor de “n” está em função de “t”. Assim o gráfico construído na ocasião e que nos mostra o crescimento populacional da cultura de bactéria *Escherichia coli* em função do tempo é:



j) O gráfico nos mostra valores negativos para o tempo de reprodução.

Como isso pode ser interpretado?

- k) Sendo o gráfico acima representante da função $f(t) = 2^t$. Qual é o domínio e a imagem dessa função?
- l) Usando a ferramenta logaritmo, escreva uma nova relação matemática (função), só que dessa vez relacionando o tempo “t” em horas com a quantidade “n” de bactérias:
- m) Usando a nova função, matemática preencha a tabela com alguns valores de “n”:

Número de bactérias “n”	“t” ou $f(n)$

- n) Construa o gráfico de “t” em função de “n” com base na tabela do item b.
- o) O que ocorre com o gráfico à medida que o valor de “n” (nº de bactérias) aumenta? Por que não existe gráfico para valores de “n” negativos?
- p) Qual o domínio e a imagem da função representada no item “e”?
- q) Construa no mesmo plano cartesiano o gráfico da função $f(t) = 2^t$ e

da função $f(n) = \log_2 n$ e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- r) Que observações ou conclusões você pode tirar em relação ao gráfico das duas funções?

2-Construa no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ em seguida trace a bissetriz dos quadrantes ímpares.

- f) Qual o domínio e a imagem de cada função?
- g) As funções são crescentes ou decrescentes?
- h) O fato de serem crescentes ou decrescentes tem relações com a base? Em caso afirmativo, qual a relação?
- i) As observações feitas no item “i” do exercício anterior são válidas para essas duas funções?
- j) Qual observação você destacaria como principal quando se compara uma função exponencial com uma função logarítmica de mesma base?

2ª ATIVIDADE (2 aulas):

1-Entre tantos números fascinantes, temos o número “e”, base dos logaritmos neperianos, também chamados de logaritmos naturais. Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que provou ser esse número o limite de $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x cresce infinitamente. O valor aproximado de “e” (com 9 casas decimais), pode ser facilmente memorizado: $e = 2,718281828...$

Construa o gráfico de $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ ($f(x) = \log_e x$) e trace a bissetriz dos quadrantes ímpares tudo no mesmo plano cartesiano.

- e) As funções são crescentes ou decrescentes?
- f) As observações e conclusões feitas até agora são válidas no caso do número “e”?

- g) As observações podem ser generalizadas para todas as funções exponenciais e logarítmicas? Em caso positivo faça uma lista com as observações válidas para toda função logarítmica.

4-Sem construir os gráficos indique para cada função as principais características (domínio, imagem, crescente ou decrescente):

f) $f(x) = 3^x$

g) $g(x) = \log_3 x$

h) $h(x) = (2,3)^x$

i) $i(x) = \log_{2,3} x$

j) $j(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

5-Construa o gráfico das seguintes funções:

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

e) $g(x) = \log_3 x$

f) $h(x) = \log_{2,3} x$

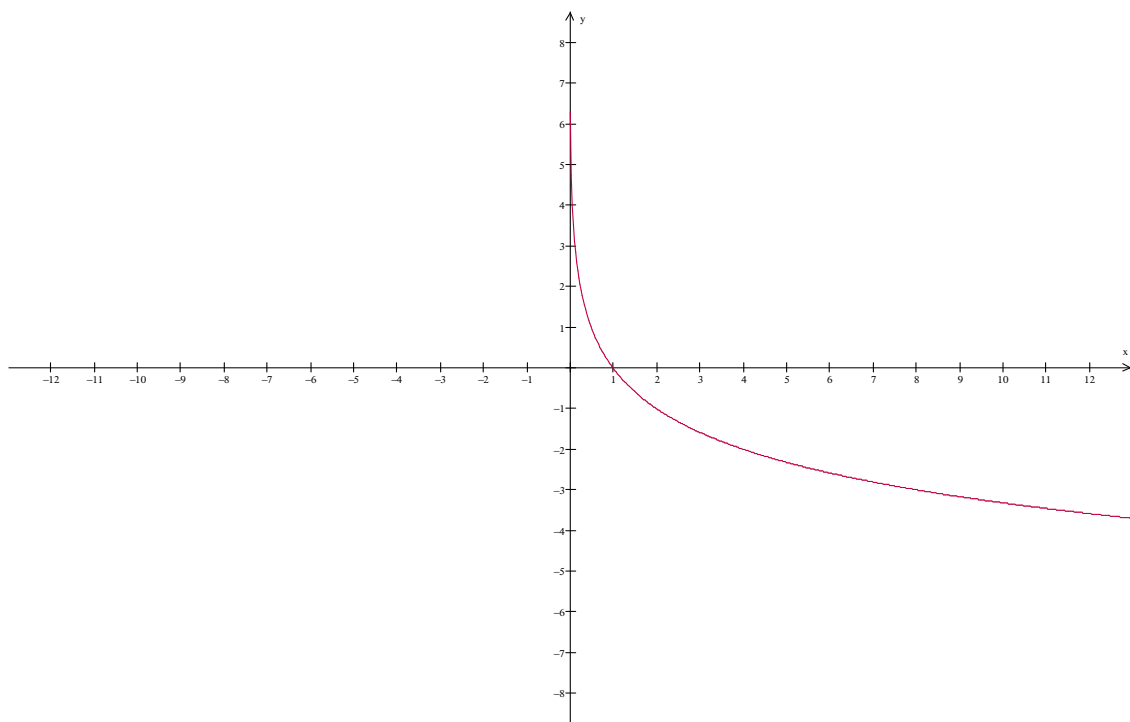
Interessante:

O gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, para x igual a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 e 4, é capaz de nos mostrar uma das prováveis fórmulas que delineou o perfil do cartão postal francês, a Torre Eiffel.

Veja:



Imagem: Torre Eiffel, Paris, inaugurada em 31 de março de 1889



Como vimos, a parte da curva em que $y \geq 0$ respeita a arquitetura da torre mais famosa do mundo.

Anexo C: Avaliação Parte I

Nome: _____ nº _____ 1º ano _____

DATA ____/____/____

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA (LOGARITMO) PARTE I

- 1- Um biólogo acompanhou o crescimento de uma planta aquática em forma circular. Durante suas observações, percebeu que a cada mês o diâmetro da folha quadruplicava. Se no início das suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1 cm de diâmetro, responda:
 - a) Qual o diâmetro da folha após um mês?
 - b) Qual o diâmetro da folha após dois meses?
 - c) Sendo “t” o tempo de crescimento da folha dado em anos e “d” o diâmetro da folha em centímetros, escreva a relação matemática que descreve o crescimento da folha em função do tempo.
 - d) Considerando que o prazo de sobrevivência de cada folha é no máximo de 5 meses, qual será o diâmetro que ela terá ao final desse prazo?
 - e) Após quantos meses o diâmetro da folha chegará em 256 cm?
 - f) Usando a calculadora (se for necessário) calcule o período exato em que o diâmetro da folha será de 300 cm e 800 cm respectivamente.
- 2- Calcule os seguintes logaritmos:
 - a) $\log_5 625 =$
 - b) $\log_7 343 =$
 - c) $\log 350 =$
 - d) $\log 0,001 =$
- 3- O valor de certo automóvel (em reais) em função do tempo (em anos) de uso é dado pela função $V(t) = 10000 \cdot (0,9)^t$. Sabendo que a vida útil desse automóvel é de 20 anos, determine:
 - a) O valor do automóvel hoje.
 - b) O valor do automóvel após 20 anos.
 - c) Após quantos anos o automóvel terá um valor de aproximadamente R\$ 5905,00?

Anexo D: Avaliação Parte II

Nome: _____ nº _____ 1º ano 3

DATA ____/____/____

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA (LOGARITMO) PARTE II

1- Verificadas as condições de existência dos logaritmos, determine o valor de x em cada uma das equações:

a) $\log_2 16 = x$

b) $\log_3 x = 3$

c) $\log_x 8 = 3$

d) $\log 0,01 = x$

e) $\log_4 1024 = x$

f) $\log x = 5$

g) $\log_x 1000 = 3$

2- Determine os valores de x de modo que o $\log_{(x+2)}(x-3)$, exista.

3- Considerando $\log 2 = 0,3010$; $\log 3 = 0,4771$ e $\log 10 = 1$. Determine $\log 0,6$.

4- Determine o conjunto solução de cada equação logarítmica:

a) $\log (x+1) - \log (2x-2) = \log 1$

b) $\log_4 x + \log_4 (x+12) = 3$

c) $\log 2 + \log (x-1) = \log 100$

d) $\log 10^x = \log 1000$