PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Marcos de Miranda Paranhos

Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique.***

SÃO PAULO
2009

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

DEDICATÓRIA

Dedico essa pesquisa a todos os matemáticos que ao longo da História deram suas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Dedico aos professores Richard Parris e Markus Horenwarter que desenvolveram e disponibilizaram gratuitamente os softwares utilizados aqui e que foram fundamentais na realização deste trabalho. Dedico também a todos que tiverem algum contato com essa pesquisa e que como eu se encantarem com as idéias que ela apresenta sobre o tema e suas aplicações na resolução de problemas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço meus pais Mário e Nair, pela educação que me proporcionaram, onde o valor da cultura, a condição e o estímulo para desenvolvê-la sempre estiveram presentes. Pelos sacrifícios e pelo apoio que me deram, principalmente nos momentos difíceis e que não foram fáceis (nós sabemos).

Agradeço minha esposa Rosângela e minha filha Maria Giovanna, por quem eu desenvolvi essa pesquisa no sentido do meu crescimento profissional. Pelas horas roubadas do nosso convívio e por tantos outros sacrifícios que um trabalho como esse impõe. Pelo estímulo e pela paciência que tiveram comigo nesse período.

Agradeço a PUC-SP, onde me graduei, me licenciei, agora me torno mestre em Educação Matemática e onde exerço minha profissão. Pela excelência da formação que tive e pelas oportunidades que me proporciona no sentido do meu desenvolvimento profissional.

Agradeço meus chefes de departamento Prof. Everaldo Montesi Medeiros, Prof. Dr. Samuel Hazzan e Prof. José Luis Demário, pela confiança no meu trabalho e pela oportunidade de enriquecimento profissional que me proporcionaram através de seus exemplos e apoio.

Agradeço na pessoa da Profa. Dra. Celina A. A. P. Abar, a todos os professores do programa de Educação Matemática da PUC-SP. Pelas valiosas informações que nos passaram em suas aulas, pela excelência e atitude profissional que apresentam nesse programa.

Agradeço a um colega e amigo em especial, Prof. Dr. Giuseppe Milone, pelo interesse, paciência e pelas valorosas contribuições que prestou ao longo dessa pesquisa.

Agradeço a banca que se debruçou sobre minha pesquisa.

Por fim, porém de maneira especial, agradeço minha orientadora Profa. Dra. Ana Lúcia Manrique, pela competência profissional com que iluminou esta pesquisa, por sua conduta impecável como orientadora, desde o início respeitando minhas escolhas, porém me fazendo refletir sobre elas com suas intervenções sempre tão sábias. Por seu envolvimento e entusiasmo com minha pesquisa, o que foi um fator fundamental de estímulo para mim e uma contribuição inestimável para o resultado.

Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral

Marcos de Miranda Paranhos

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações na resolução de problemas. Como professor de Cálculo, constato pela minha trajetória e pela troca de experiências com outros profissionais da área, um senso comum a respeito da mecanização de técnicas e do baixo aproveitamento dos alunos com relação às idéias e aplicações tão significativas que o Cálculo poderia lhes proporcionar. Refletindo, experimentando e me informando sobre essa questão, penso que grande parte dessa problemática está na forma limitada com que temos apresentado essas idéias em nossas aulas.

Todo professor desenvolve ao longo de sua trajetória formas de representar as idéias que deseja transmitir e essa é a essência do raciocínio pedagógico. Nesse sentido, acredito que toda idéia compreendida deve ser transformada para ser ensinada e foi esse aspecto da questão que direcionou esse trabalho.

Inspirado pela possibilidade do uso de softwares no ensino do Cálculo e fundamentado didaticamente na "Dialética Ferramenta-Objeto" e o "Jogo de Quadros" de Régine Douady, realizei este trabalho que consiste de uma seqüência de atividades, divididas em seis módulos, em que as idéias básicas sobre derivada, integral e otimização de funções são apresentadas por meio dos softwares Geogebra e Winplot. As seqüências são feitas para funções com uma e duas variáveis, podendo ser desenvolvidas juntamente com o aluno ou ser apenas apresentadas pelo professor. Espero com esse trabalho estar ampliando a dimensão que a maioria dos estudantes tem do Cálculo e de suas aplicações, além de estimular o uso de recursos tecnológicos como ferramentas de larga capacidade na interpretação e resolução de problemas.

Palavras chave: Cálculo Diferencial e Integral, limites, derivadas, integrais, otimização de funções, geometria dinâmica, Geogebra e Winplot.

ABSTRACT

The aim of this work is to present fundamental ideas of differential and integral calculus and its applications in solving problems. As a teacher of calculus, I see my trajectory and by exchanging experiences with other professionals, a common sense about the mechanization of techniques and low student achievement in relation to the ideas and applications so significant that the calculation might provide. Reflecting, experiencing and informing me about this issue, I think much of this problem in a limited way with which we have presented these ideas in our classes.

Every teacher develops along its trajectory ways to represent the ideas you want to convey and that is the essence of pedagogical reasoning. In that sense, I understood that every idea must be transformed to be taught and it was this aspect that directed this work.

Inspired by the possibility of using software in the teaching of Mathematics and didactically based on "Dialectic Tool-Object" and "Game Tables" by Régine Douady, I performed this work that consists of a sequence of activities, divided into six modules, where basic ideas about derivative, integral and optimization functions are presented by means of software and GeoGebra Winplot. The strings are made to functions with one and two variables, can be developed along with the student or be provided only by the teacher. I hope with this work is expanding the size that most students have the Calculus and its applications, besides stimulating the use of technological resources as tools for large capacity in interpreting and solving problems.

Keywords: Differential and Integral Calculus, limits, derivatives, integrals, optimization of functions, dynamic geometry, Geogebra and Winplot.

SUMÁRIO

Capítulo 1

1.1 Introdução Histórica

A construção de um conhecimento deve ser feita sobre bases sólidas e contribui para isso seguir o rastro histórico desse conhecimento para que se possa perceber em que contexto e sob quais necessidades ele foi concebido.

Conforme informações obtidas no livro A Rainha das Ciências (Gilberto Geraldo Garbi, 2006) e no site História das Derivadas[1], alguns matemáticos já utilizavam conceitos de Cálculo para resolver problemas, porém de forma imprecisa e não rigorosa. Cavalieri[2], Barrow[3], Fermat[4] e Kepler[5], são alguns deles. A sistematização, estruturação e aperfeiçoamento do Cálculo só viria mais tarde com Newton[6] e Leibniz[7] que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

A questão da derivada está intimamente ligada às retas tangentes à curva nos pontos tomados e suas implicações com máximos e mínimos. Os Gregos da Antiguidade já tinham o conceito de reta tangente à curva em um ponto. O

---

[1] Historia das derivadas. Disponível em:http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm

[2] Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) desenvolveu a idéia de quantidades infinitamente pequenas. Uma região, por exemplo, pode ser pensada como sendo formada por segmentos ou "indivisíveis" e que um sólido pode ser considerado como composto de regiões que têm volumes indivisíveis.

[3] Isaac Barrow (1630 - 1677) apresenta um importante trabalho sobre tangentes que viria a originar o trabalho de Newton no desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

[4] Pierre de Fermat (1601-1665) em 1639 divulga um novo método para determinação de tangentes, estudo que levaria aos máximos e mínimos.

[5] Johann Kepler (1571 - 1630) apresentou seu método de integração para determinar volumes de sólidos de revolução.

[6] Isaac Newton, Sir (1642-1727) desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível a resolução de problemas de diversos tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções. Todas essas descobertas foram feitas anos antes que Leibniz, de forma independente, viesse a desenvolver o Cálculo Diferencial. Recusou-se durante muito tempo a divulgar suas descobertas e foi Leibniz quem primeiro publicou.

[7] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716). O destino havia reservado a Leibniz a tarefa de elaborar uma notação apropriada para estas operações, assim como a nomenclatura, Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, ambas utilizadas atualmente.

interesse por tangentes às curvas reapareceu no século XVII, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentou bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes[8] explicando o seu método, que é basicamente utilizado ainda hoje. Na realidade, devido a esse trabalho, que estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange[9] afirmou considerar Fermat o inventor do Cálculo.

A questão das tangentes à curva foi de especial importância para Newton ao estudar o movimento dos planetas. Em 1665 pesquisando o traçado das tangentes, criou seu método das fluxões que é aquilo que chamamos hoje de Cálculo Diferencial. Sendo fluxão o nome dado por ele à derivada. Em 1666 ao pesquisar quadraturas, produziu um manuscrito que chamou de método inverso das fluxões. Esse nome mostra que Newton enxergou o que seus precedentes Fermat, Cavalieri e Barrow não haviam enxergado, que o traçado das tangentes (derivação) e a quadratura das curvas (integração), são operações inversas uma da outra. Ao que um dia ele rebateu com sua célebre frase: “Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei sobre ombro de gigantes”.

Newton não se interessou em publicar seus trabalhos e seus manuscritos circularam apenas entre um pequeno número de pessoas em Cambridge, onde tinha sua cátedra. Ao esconder do mundo seus estudos, Newton corria o risco de ver suas idéias serem redescobertas por outros, o que de fato aconteceu. Leibniz em 1676, durante viagem diplomática a Londres visitou a Royal Society[10] e teve

---

[8] René Descartes (1596 - 1650). Da relação estabelecida entre Geometria e Álgebra por Descartes, surgiu a nomenclatura "coordenadas cartesianas", introduzida por Leibniz, tirado de Cartesius, tradução latina do nome de Descartes.

[9] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) publicou inúmeros trabalhos de alta qualidade em várias áreas da ciência, dentre eles a teoria dos números, teoria das funções, cálculo de probabilidades, teoria dos grupos, equações diferenciais, mecânica dos fluidos, mecânica analítica e mecânica celeste.

[10] Sociedade Real de Londres para o Progresso do Conhecimento da Natureza é uma instituição destinada à promoção do conhecimento científico, fundada em 1660.

acesso aos manuscritos de Newton. Escreveu a ele perguntando sobre séries infinitas e recebeu duas cartas, denominadas Epistola Prior e Epistola Posterior ,onde Newton revela alguns de seus pensamentos sobre séries infinitas e sobre seu método de fluxões. O Cálculo Diferencial de Leibniz tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente. Em 1684 Leibniz publicou um artigo em um periódico especializado e que tratava do Cálculo Diferencial, em 1686 publica novo artigo falando sobre o cômputo de áreas, onde mostrou que o traçado de tangentes e a quadratura de curvas são operações inversas. Leibniz denominou sua descoberta de Calculus Summatorius, de onde temos o símbolo $\int$ que é um “s” estendido.

Houve uma longa e acalorada disputa no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade em Cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período bastante longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo "Leibniziano" ganhava cada vez mais adeptos na Europa, entre esses a família Bernoulli, os matemáticos da "ilha", ficaram isolados e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do Cálculo como também não compreendiam muito bem a notação "Leibniziana", então largamente utilizada.

Apesar desse fato, o julgamento tranqüilo da História considera que ambos foram inventores independentes do Cálculo. Newton chegou a eles dez anos antes, Leibniz foi o primeiro a divulgá-lo e sua melhor simbologia perdura até hoje.

O desenvolvimento do Cálculo continuou com outros matemáticos, como, Jacques Bernoulli[11], Johann Bernoulli[12], MacLaurin[13], Agnesi[14], Euler[15], d'Alembert[16], Lagrange e Cauchy[17].

---

[11] Jacques Bernoulli (1654 - 1705) em 1689 publicou um trabalho sobre séries infinitas, conhecido como a desigualdade de Bernoulli $(1+x)^n > 1+nx$.

1.2 Relevância do Tema

Essa Matemática não estática, baseada em movimento de um ponto sobre uma curva, denominada originalmente de “Fluxões”, apresenta para o aprendiz algumas dificuldades no seu entendimento. Devido a sua dinâmica, exige que se pense em diversos aspectos a um só tempo e é comum que o aprendiz não integre as idéias que ocorrem em diferentes quadros matemáticos e assim perca a noção do todo, sem a qual nada se conclui.

É senso comum entre os professores de Cálculo que as idéias de derivada e integral não ficam bem compreendidas pela maioria dos alunos que lamentavelmente fica apenas com procedimentos algébricos que pouco acrescentam à sua capacidade de analisar e resolver problemas. Frente à relevância do assunto e às dificuldades do aprendizado, pensei que deveria viabilizar formas de apresentar as idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações na resolução de problemas.

---

[12] Johann Bernoulli (1667 - 1748) estudou a catenária, forma assumida por uma corda ou corrente suspensa livremente por dois pontos. O problema era determinar sua equação. Utilizando o Cálculo Leibniziano, Johann Bernoulli resolveu o problema e esse foi o primeiro sucesso público do novo Cálculo.

[13] Colin MacLaurin (1698 - 1746) apresentou sua expansão de funções em séries de potências, conhecida hoje como série de Maclaurin. Nesse trabalho, além de tentar dar fundamentos rigorosos ao Cálculo, Colin mostrou muitas utilidades do mesmo.

[14] Maria Gaetana Agnesi (1718 - 1799) publicou obra com temas de Álgebra, Geometria e Cálculo Infinitesimal. O aparecimento desse livro causou grande sensação por ser uma publicação feita por uma senhora e desenvolvida com maestria, envolvendo questões matemáticas consideradas profundas e difíceis.

[15] Leonhard Euler (1707 - 1783) ocupou-se de quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, sendo o maior responsável pela linguagem e notações, escreveu mais de duzentos artigos, bem como três livros em análise matemática.

[16] Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) foi pioneiro no estudo das equações diferenciais parciais e também na utilização delas na Física.

[17] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) apresentou uma fundamentação completa do Cálculo, estabelecendo o caráter que ele tem na atualidade.

Baseado em idéias apresentadas no texto Aprendizagem da docência: Algumas contribuições de L. S. Shulman apud Maria da Graça Nicoletti Mizukami (2004), fiz a reflexão que se segue.

Para L. S. Shulman (1987), idéias compreendidas devem ser transformadas, de alguma forma, para serem ensinadas. Essas formas de transformação, esses aspectos do processo pelo qual o professor se move de uma compreensão pessoal para possibilitar a compreensão de outros, são a essência do ato de raciocínio pedagógico. Todo professor tem preferências por algumas representações das idéias que pretende transmitir e forma com isso um repertório representacional para a matéria que ensina. Pode-se acrescentar também que ao longo da sua trajetória, lida com diferentes alunos e diferentes questionamentos. É conseqüente então, que nesse processo vão surgindo inúmeras conexões que podem tornar essas representações e a sua compreensão cada vez mais ricas e abrangentes.

Durante o mestrado, passei a ter um contato mais efetivo com softwares e com publicações matemáticas. Dois artigos, "Visualização Dinâmica no Cálculo" (Catherine A. Gorini, 1997) e "Jacob Steiner e o problema da menor malha viária" (José Luiz Pastore Mello, 2006), foram decisivos para que eu desse um salto qualitativo na minha compreensão do assunto e em minha perspectiva pedagógica.

No primeiro artigo, a proposta da autora é que na hora de interpretar e resolver problemas de cálculo, use-se softwares tornando a tarefa bem mais rica e agradável. Entre os problemas propostos por ela, um chamou a atenção e com a ajuda de software de geometria dinâmica, constatei que existia uma função e um ponto de máximo. A solução que visualizei com o software coincidia precisamente com a solução que obtive pelo uso do Cálculo.

No segundo artigo, Jacob Steiner[18] propõe o problema da conexão de três ou mais pontos no plano por meio de um caminho total de comprimento mínimo. O autor trata o problema na forma original, como um problema de geometria. Mudando o Ponto de Vista[19] e usando um software de geometria dinâmica,

[18] Jacob Steiner (1796–1863), qualificado por muitos historiadores como o maior geômetra desde Apolônio.

[19] Marc Rogalsky pesquisador francês usa o termo ponto de vista para designar uma maneira de entrar em um problema ou interpretar um objeto matemático .

transformei o problema de geometria para um problema de cálculo. Essas duas atividades mostraram-me que tinha em mãos uma forma de interpretar e resolver situações de otimização de alta complexidade, muito além daquilo que está proposto e é possível realizar com livros didáticos e aulas convencionais. Afinal, para abordar uma Matemática Dinâmica, nada mais oportuno do que ferramentas dinâmicas.

É importante lembrar que acredito que um tema a ser ensinado deva ser abordado por suas idéias centrais, de maneira simples, apoiado em registros simples para que não se perca o foco. Desta maneira, esse trabalho não tem a pretensão de substituir aquilo que já é feito em sala de aula no sentido de introduzir as idéias do Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo é apresentar uma ferramenta extra que possibilite autonomia ao aluno e a ampliação dos limites do que já se realiza.

1.3 Objetivos

O objetivo desse trabalho é fazer um estudo sobre as idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e sua utilização na resolução de problemas que envolvam funções com uma e duas variáveis. Esses problemas destinam-se a alunos de um curso de Cálculo.

Depois da apresentação da derivada de uma função e suas conseqüências no crescimento, decrescimento, pontos máximos, mínimos e de inflexão, uma das etapas seguintes é propor problemas onde essas idéias possam ser usadas como ferramentas que auxiliam na busca de soluções.

Nessa etapa, por meio do uso de softwares, questões que de outra forma não seriam tão bem percebidas, passam a ser um novo objeto de informação e estudo. Conforme artigo “A Aprendizagem Da Matemática Em Ambientes Informatizados” (Maria Alice Gravina, 1998), um exemplo ilustrativo é o estudo da parábola, em matemática é um objeto abstrato, que pode ser representado por uma equação ou gráfico. Em física, serve para descrever o movimento de um objeto em queda livre ou que é jogado verticalmente para cima. Propriedades matemáticas da função passam a ter leitura física e vice-versa. Ponto de máximo da função corresponde a altura máxima atingida pelo objeto, zero da função corresponde ao tempo de movimento e inclinação da reta tangente à curva é a velocidade. As relações entre conceitos matemáticos e fenômeno físico favorecem a construção do conhecimento em ambas as áreas.

Após esse estudo o aluno estaria familiarizado com as ferramentas que o Cálculo oferece no sentido de analisar comportamento de funções e de como isso pode ser usado na resolução de problemas. Além disso, sistematizado os procedimentos a serem seguidos, pode perceber como o uso de softwares é poderoso aliado, tornando essa tarefa bastante sofisticada.

1.4 Fundamentação Didática

Na otimização da área de um retângulo de perímetro dado, feita uma análise matemática da questão, tem-se uma função de segundo grau e seu gráfico. Propriedades da função e informações obtidas a partir do gráfico tem seu correspondente geométrico. Por exemplo: máximo da função é a medida do lado do retângulo que gera a maior área e isso pode ser verificado no gráfico. A análise de uma situação, feita nos diferentes campos da matemática, é conduta bastante comum tanto de professores como de alunos. A observação e estudo dessa conduta levaram a pesquisadora francesa Régine Douady a apresentá-la em sua tese de doutoramento como "A Dialética Ferramenta-Objeto" e o "Jogo de Quadros".

Conforme idéias apresentadas por Saddo Ag Almouloud na obra "Fundamentos da didática da matemática" (2007), Douady evidencia a importância da formação de imagens mentais na construção de conhecimentos e resolução de problemas. Nesse processo, a "Mudança de Quadro" tem a intenção de mobilizar novas ferramentas que não se apresentavam na análise de apenas um quadro. Quadros matemáticos diferentes podem comportar um mesmo problema e apresentar diferentes encaminhamentos para a sua solução. Já quanto à expressão "Jogos de Quadros", esta fica reservada à iniciativa do professor no uso dessa conduta com a intenção de encaminhar a evolução das idéias a serem atingidas.

A mudança de "Ponto de Vista" de Marc Rogalsky apud Almouloud (2007) também está presente nessa análise, porém com a ressalva de que um mesmo quadro pode apresentar diferentes pontos de vista, ou seja, diferentes maneiras de entrar em uma questão.

Não existe um rigor quanto ao número de quadros e os tipos de componentes matemáticos que podem comportar. Isso varia segundo o autor e o tipo de análise. Equações, incógnitas e métodos de resolução de equações são exemplos que compõem o quadro algébrico. Desenhos, polígonos, sólidos, dimensões, perímetros, áreas e volumes são exemplos que compõem o quadro geométrico. As variações de duas ou mais varáveis relacionadas e a determinação de variáveis ligadas por relações compõem o quadro das funções. A representação gráfica de uma função, a determinação de informações a partir da leitura e interpretação do gráfico compõem o quadro da geometria analítica. Inteiros, fracionários, números reais e as operações são ferramentas básicas para todas as etapas do estudo, qualquer que seja o quadro considerado, mas podem ser considerados como componentes do quadro numérico.

Doady aborda a noção de “Ferramenta e Objeto” e sua relação dialética na produção de conceitos para o aluno. Um objeto pode ser uma ferramenta na exploração de um novo conceito, visando a solução de um problema matemático. Os conhecimentos antigos servem de ferramenta para se analisar uma situação nova, pois se interage essa nova situação com o conhecimento que já se possui. O conhecimento antigo é ferramenta insuficiente para solução da situação problema, o que deve provocar no aluno a procura de um novo conhecimento para solução dessa situação.

Este novo conhecimento, uma vez institucionalizado pelo professor, passa a integrar o corpo de conhecimento matemático, adquirindo, portanto, o status de objeto. Esse novo objeto pode vir a ser ferramenta para construção de outros conceitos e assim por diante, estabelecendo então uma dialética entre ferramenta e objeto.

Por exemplo, no problema: Quais as medidas dos lados do retângulo de área dada com menor perímetro que podemos construir? O conhecimento de área e perímetro é insuficiente para resolver a situação. O conhecimento da função ajuda na solução, mas como o objetivo da atividade é a otimização, há então a necessidade de um novo conhecimento, isto é, o conhecimento da derivada.

Em torno da necessidade de solução desse problema, aparecem as conjecturas dos alunos sobre como resolver esta situação. Reunindo as conjecturas dos alunos, o professor realiza a explicitação (institucionalização local) para posterior institucionalização do novo conhecimento como objeto matemático. Esse novo objeto matemático se torna ferramenta para solução de problemas, dando reinício ao processo.

A Engenharia Didática de Douady apud Almouloud (2007) é a construção e a exploração de situações de aprendizagem sobre temas de ensino. Essas situações visam relacionar o professor, os alunos e elementos do saber matemático. “A Dialética Ferramenta-Objeto e o Jogo de Quadros” é ferramenta poderosa na a construção e gestão dessa Engenharia Didática, permitindo uma leitura da evolução das noções matemáticas e também uma análise da aprendizagem efetivamente existente.

Não se pode deixar de perceber que nessa abordagem aparece também a noção de “Registros de Representação Semiótica”, introduzida por Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês. Esta porém, é diferente da noção de quadros, enquanto a primeira baseia-se nos diferentes tipos de registros, a segunda baseia-se nas diferentes abordagens e nos diferentes domínios matemáticos.

1.5 Procedimentos

Tem-se como objeto da pesquisa um repertório representacional para as idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, que apresente recursos que permitam um maior aprofundamento dessas idéias. Junto a isso, seqüências didáticas em que essas idéias sejam utilizadas para serem testadas e assimiladas.

As apresentações sobre os conceitos de derivada, integral e função com duas variáveis são premissas para a resolução dos problemas. Nelas o aluno percebe as idéias fundamentais do Cálculo: máximos, mínimos, inflexão, crescimento, decrescimento, derivada como limite de uma taxa de variação, integral como limite de uma soma, cálculo de áreas via integral, a formação do gráfico da função com duas variáveis e exemplos ilustrativos das idéias envolvidas. Em seguida, apresentações sobre interpretação e resolução de problemas usando as idéias apresentadas, completam o estudo com imensa profundidade de detalhes e aparelham o aluno para novos desafios.

Uma das idéias mais importantes na aprendizagem e na resolução de problemas de matemática aplicada é que os alunos devem desenhar esboços, figuras, diagramas e construir modelos para que possam perceber o que se passa no problema e a partir daí saber que tipo de resultado que irão obter. A geometria dinâmica é ferramenta poderosa pois torna o processo fácil, sistemático e divertido. Junto a isso usaremos a estratégia da mudança de quadros que irá facilitar e ampliar nossa percepção do que ocorre nas situações propostas. As situações-problema serão montadas no quadro geométrico, com o uso de softwares de geometria dinâmica. Depois, convertidas em gráfico no próprio software, ainda aí serão analisadas no quadro da geometria analítica. Em seguida levadas para o quadro de funções e o quadro algébrico, onde serão tratadas a fim de produzir a solução buscada.

Para realizar essa tarefa, passei a buscar softwares e problemas adequados. As situações a serem apresentadas necessitavam de um software geométrico em que o problema fosse montado de forma dinâmica, em conjunto com um par de eixos para a situação ser transformada em gráfico e, por fim, um software matemático em que a função fosse tratada.

Conforme exposto no artigo “Geometria Dinâmica Uma Nova Abordagem Para O Aprendizado Da Geometria” (Maria Alice Gravina, 1996), programas construídos dentro dos princípios da geometria dinâmica são ferramentas de construção de desenhos, objetos e configurações geométricas feitas a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade , tem-se associada uma coleção de desenhos em movimento e as invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas originais do problema. Este é um recurso didático importante oferecido. A variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais. Configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações, propriedades geométricas são descobertas a partir das invariantes no movimento.

Conforme o Tutorial Geogebra 2.5[20], Geogebra é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Horenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas. Por um lado, GeoGebra é um sistema de geometria dinâmica, pois

[20] Tutorial Geogebra 2.5, Humberto Bortolossi, Hermínio Borges Neto, Alana Souza de Oliveira e Alana Paula Araújo Freitas

permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas como com funções, que podem modificar-se dinamicamente depois. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Assim, o GeoGebra tem a potência de manejar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos.

Essas duas visões são características do GeoGebra, uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa.

O software Geogebra supre muito bem uma parte das necessidades desse trabalho, além de ser gratuito e apresentar versão em português. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/. O Geogebra também pode funcionar a partir de um pen-drive em qualquer computador com plataforma Java (que é comum na maioria dos computadores).

Para estudar as funções e problemas com duas variáveis, era preciso um software que reunisse as seguintes condições: construir o gráfico dessas funções, visualizá-los em diferentes perspectivas, pesquisar pontos críticos e trabalhar com regiões específicas do domínio das funções. O software Winplot mostra-se perfeitamente adequado para resolver essas necessidades. Suas opções de funcionamento, permitindo diferentes formas de entrar com a equação (explícita, implícita, cilíndrica ou esférica), as possibilidades de variar o domínio das funções e seu recurso de rotação do sistema de eixos são essenciais para essa tarefa.

Além de satisfazer essas condições, o Winplot é um excelente programa gráfico de propósito geral e gratuito com versão em português. Possui telas para duas e três dimensões e oferece muitos recursos para os dois tipos de telas. Foi desenvolvido pelo professor Richard Parris da Phillips Exeter Academy, USA, por volta de 1985. Disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html. O Winplot é um aplicativo extremamente leve, que não precisa ser instalado e funciona em qualquer computador ou a partir de um pen-drive.

Alguns problemas por envolverem a construção geométrica e uma função com duas variáveis tiveram a resolução apoiada no uso integrado desses dois softawares.

Capítulo 2

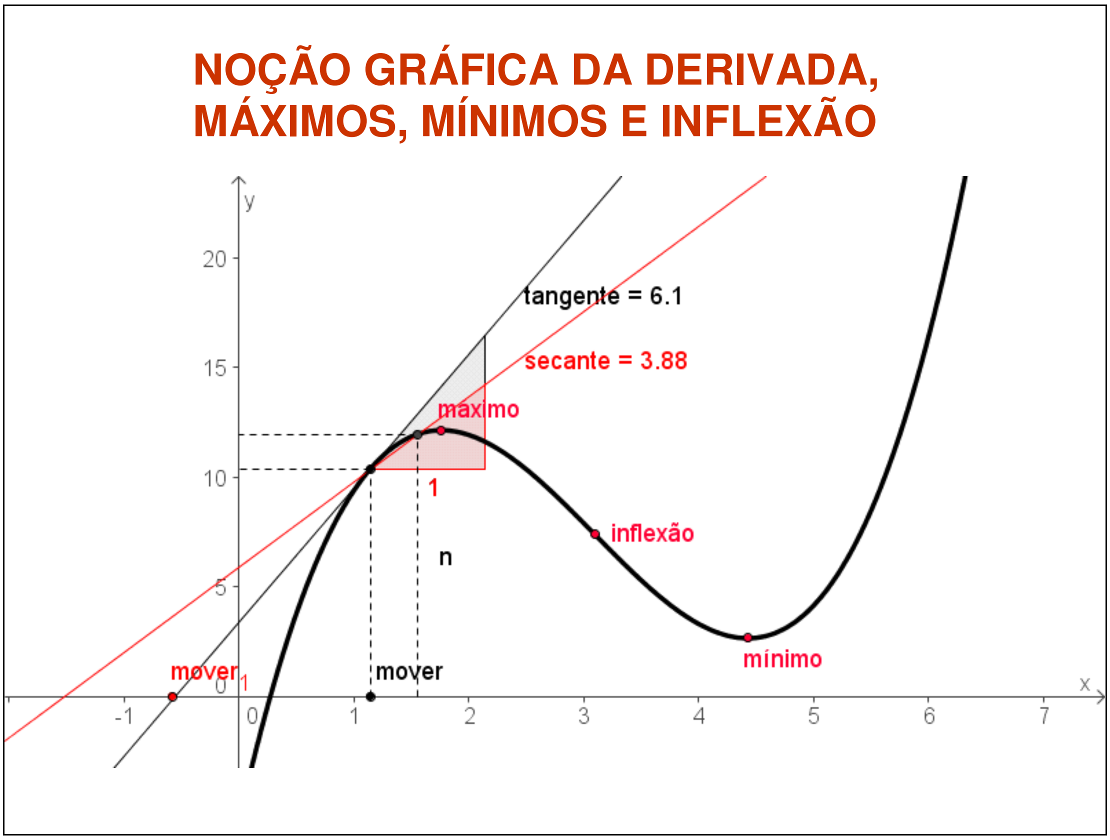
Módulos de Apresentação Powerpoit

Para organizar as apresentações foi usado o software PowerPoint. As apresentações são auto-instrutivas e permitem oportunas intervenções do professor. As telas que acompanham os módulos neste trabalho são representativas das apresentações PowerPoint. Originalmente são dinâmicas e foram construídas com os softwares Geogebra e Winplot. Podem ser construídas pelos alunos ou apenas apresentadas pelo professor. Os alunos devem ter conhecimentos dos softwares usados e dos conteúdos abordados. A seguir apresenta-se e discuti-se cada um dos módulos através de suas telas.

Derivadas para Funções com Uma Variável (Módulo 1)
Otimização de Funções com Uma Variável (Módulo 2)
Construção de Gráficos para Funções com Duas Variáveis (Módulo 3)
Derivadas Parciais, Pontos Máximos, Mínimos E Sela (Módulo 4)
Integrais para Funções com Uma Variável (Módulo 5)
Integrais Duplas (Módulo 6)

2.1 Derivadas para Funções com Uma Variável (Módulo 1)

O objetivo desse módulo é fazer um estudo sobre derivadas, pontos máximos, mínimos e de inflexão para funções com uma variável. As telas seguintes apresentam a derivada em alguns dos seus pontos de vista: como limite da taxa de variação da função, como coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto considerado e como uma outra função derivada da função inicial. Os softwares Geogebra e Winplot mostram-se poderosos aliados na tarefa de minimizar as dificuldades que a maioria dos alunos encontra em compreender esses diferentes pontos de vista, pois apresenta-os simultaneamente e permite que sejam feitas as variações e comparações que induzem às conclusões que tem-se como objetivo.



tela 1

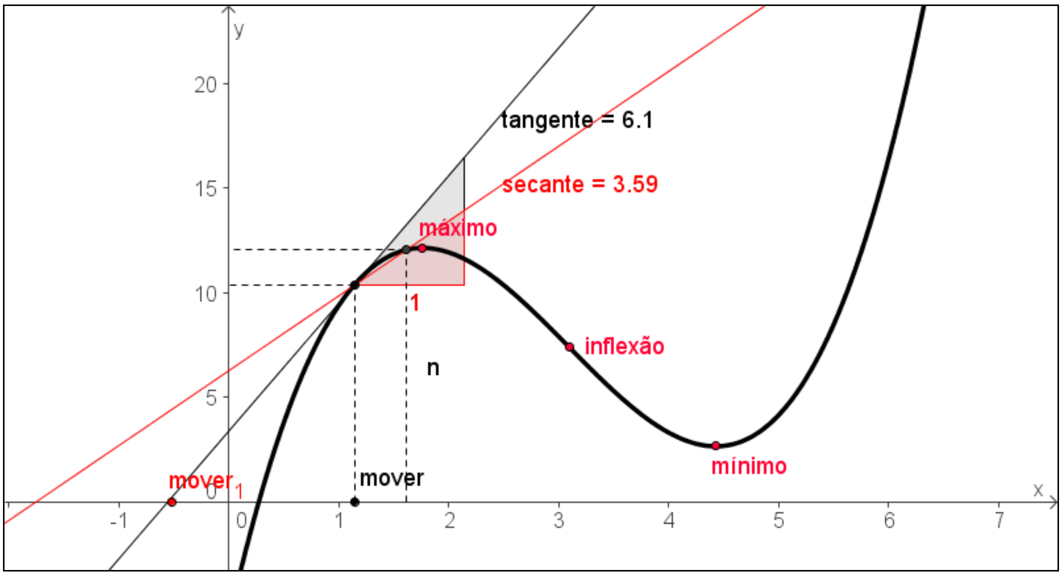
Tela dinâmica para explorar as idéias de taxa de variação, crescimento, decrescimento, máximo, mínimo e inflexão.

O deslocamento de um ponto sobre uma curva e a análise do que ocorre ao longo da trajetória é que induz ao conceito de derivada.

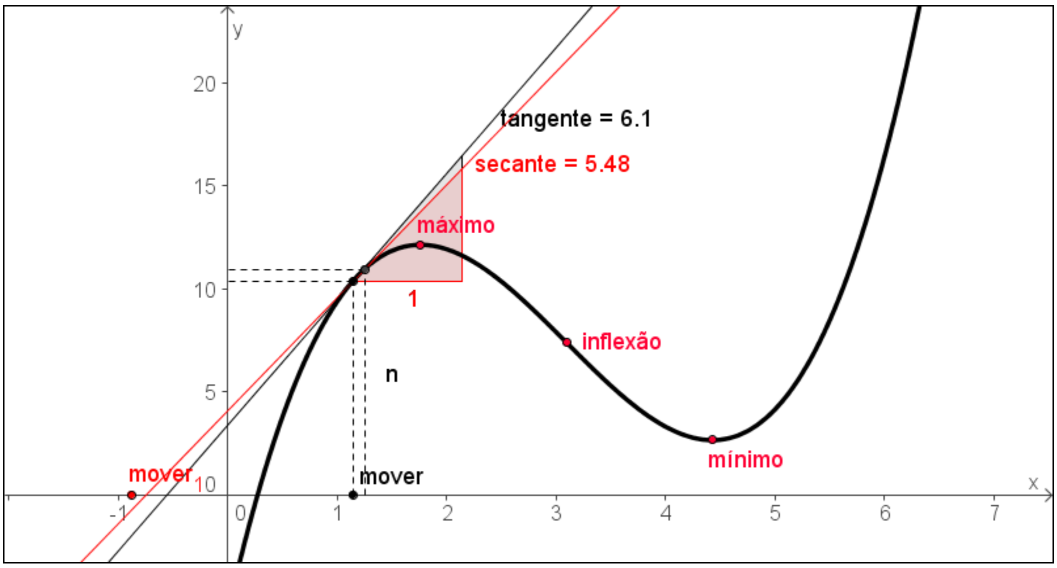
Tomando dois pontos no eixo x, suas respectivas imagens no eixo y e traçando perpendiculares aos eixos por esses pontos, obtêm-se dois pontos sobre a curva da função. A reta que passa por esses pontos é secante à curva da função. Fixando um dos pontos do eixo x e fazendo a distância entre este e o outro tender à zero, a reta secante tende a ser tangente à curva (quando a tangente existir). A derivada da função em determinado ponto pertencente ao domínio da função, nada mais é do que o limite (quando existir) da variação entre as imagens desses pontos, dividida pela variação entre eles, quando essa variação tende à zero. Portanto, a derivada da função é a tangente do ângulo que a reta tangente forma com o eixo das abscissas, ou seja, o coeficiente angular da tangente à curva no ponto considerado.

O ponto $mover_1$, é extremidade de um vetor que direciona a translação de um ponto sobre o eixo das abscissas o qual é projeção perpendicular (sobre o eixo x) do ponto de intersecção (da direita) da reta secante com a função. Essa construção permite variar a inclinação da reta secante tendendo à reta tangente pelo deslocamento do ponto $mover_1$ para a esquerda. Pode-se observar o comportamento da reta tangente à curva ao longo do eixo das abscissas, variando o ponto mover. Pode-se também observar o valor do coeficiente angular da reta tangente, que é o valor da derivada no ponto considerado.

A seguir apresenta-se uma seqüência onde o ponto **$\mathbf{mover_1}$** foi deslocado à esquerda.



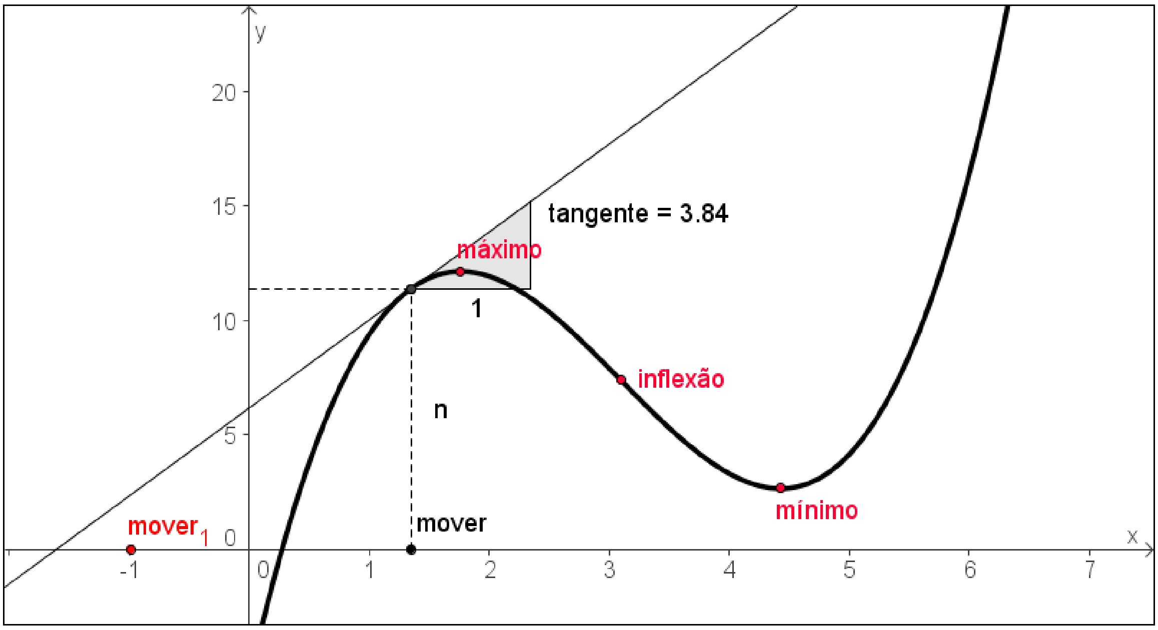
tela 2



tela 3

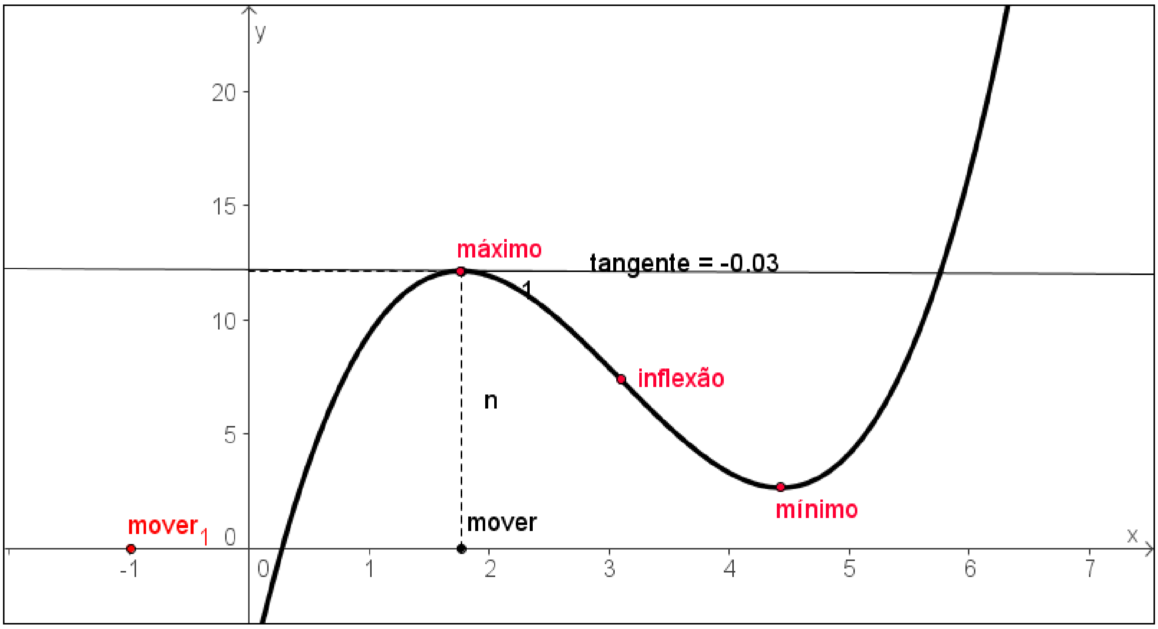
A seqüência permite observar a reta secante tendendo à reta tangente à curva no ponto considerado.

A seguir apresenta-se uma seqüência onde o ponto **mover**, foi deslocado à direita no eixo das abscissas.



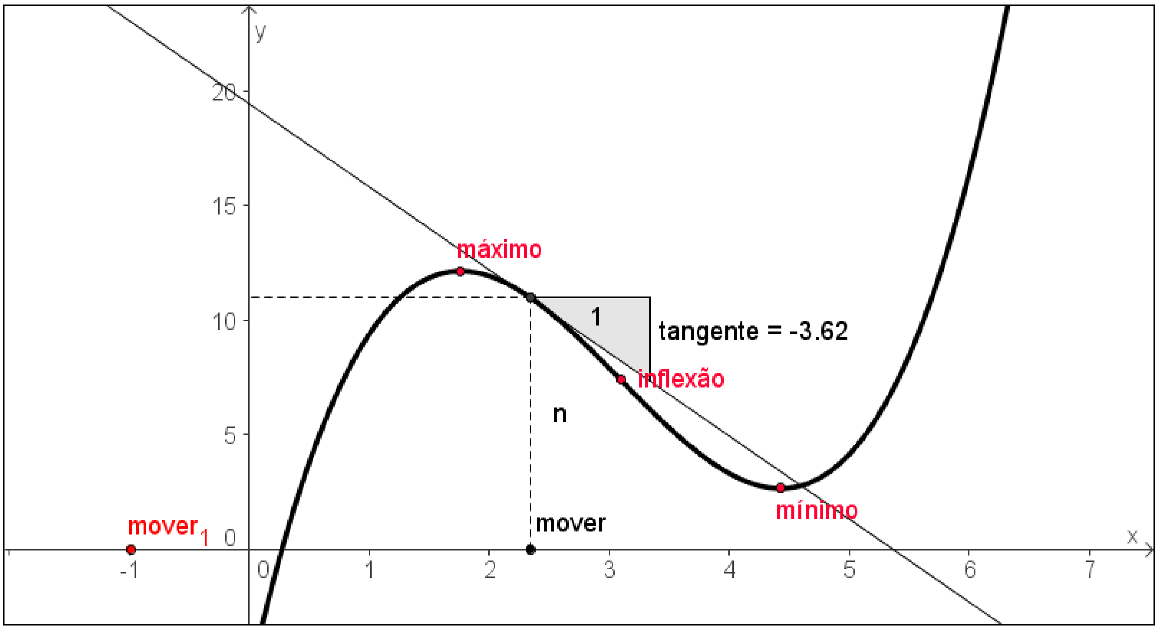
tela 4

Pode-se observar o coeficiente angular da reta tangente assumindo valor positivo em um ponto onde a função é crescente.



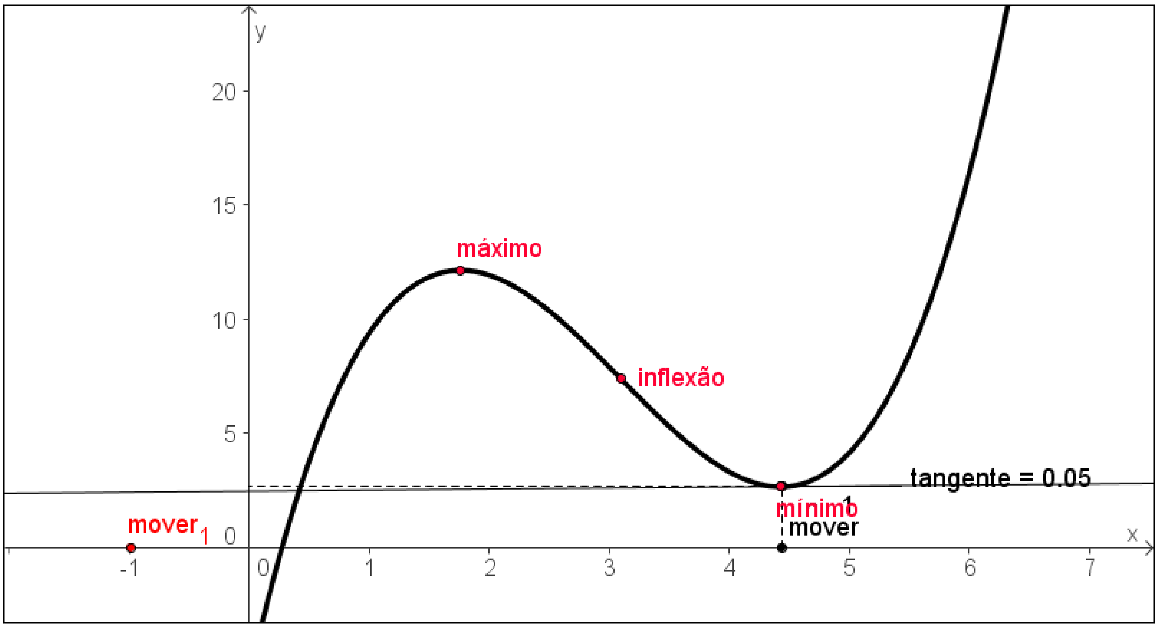
tela 5

Pode-se observar o coeficiente angular da reta tangente assumindo valor zero no ponto de máximo.



tela 6

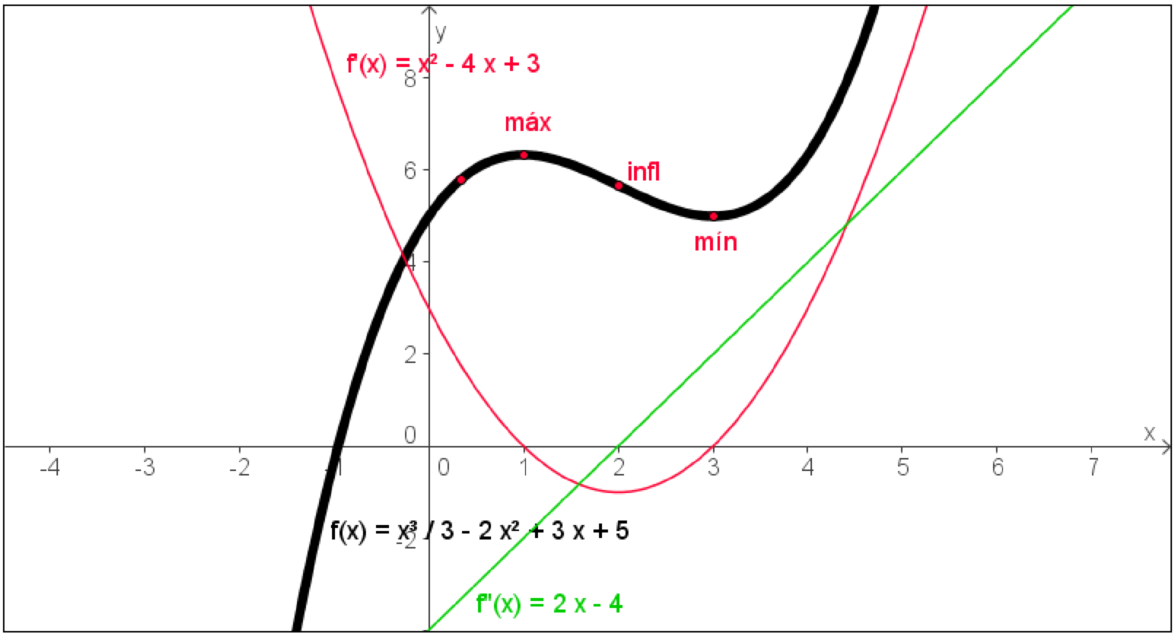
Pode-se observar o coeficiente angular da reta tangente assumindo valor negativo em um ponto onde a função é decrescente.



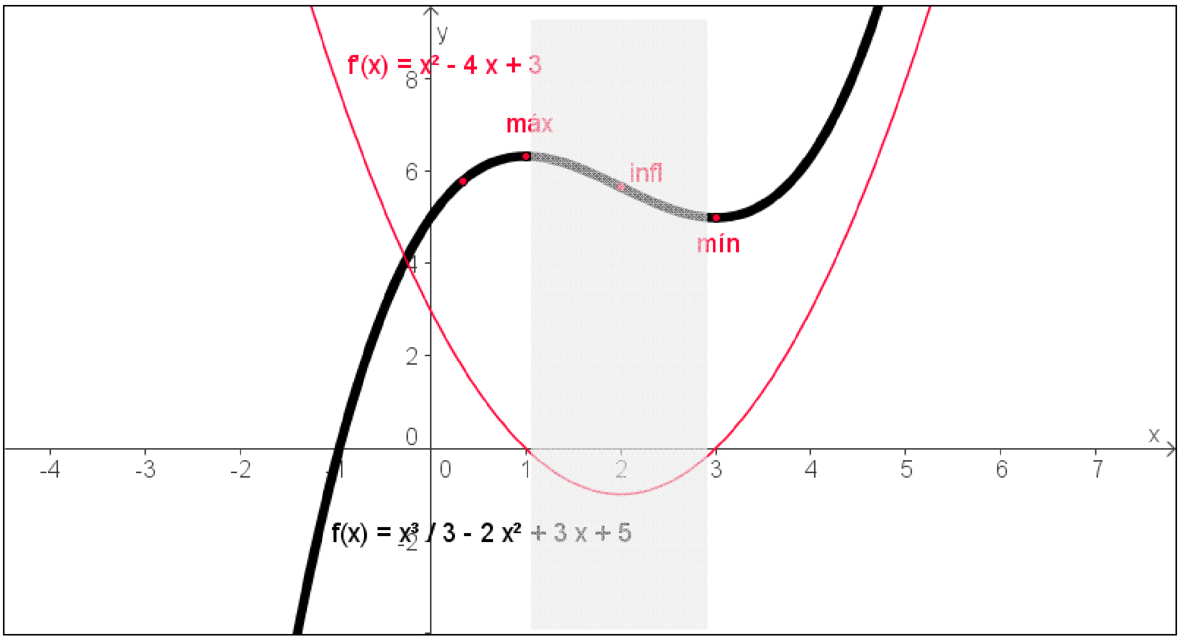
tela 7

Pode-se observar o coeficiente angular da reta tangente assumindo valor zero no ponto de mínimo.

A seguir, apresenta-se telas dinâmicas para explorar as relações que se pode utilizar entre uma função e suas derivadas.

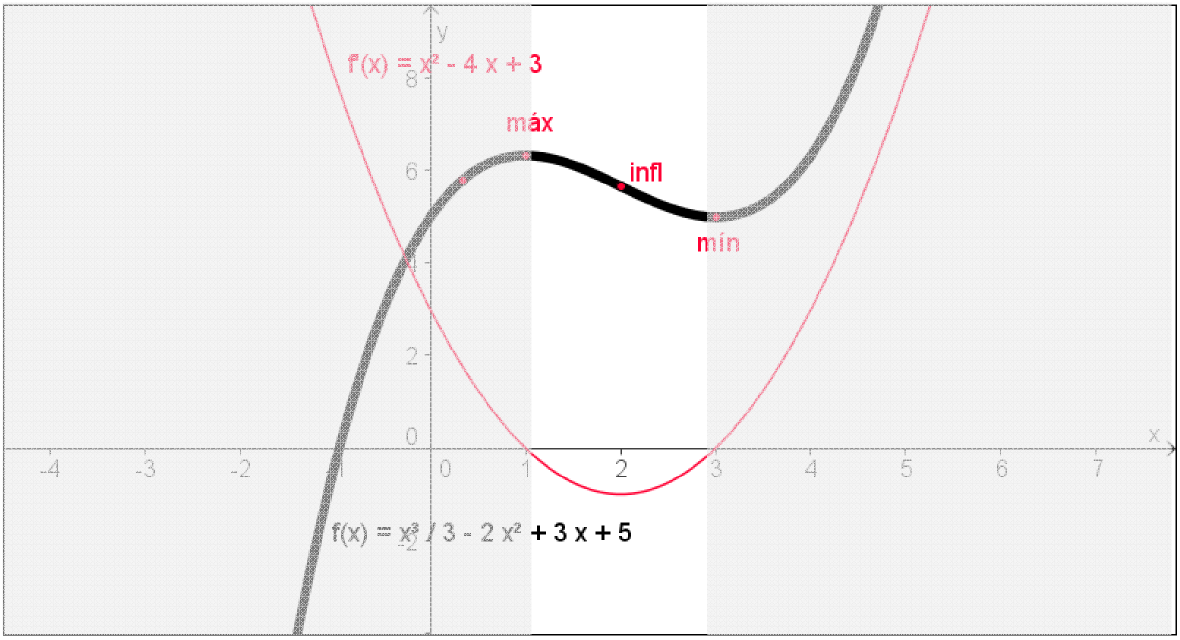


tela 8



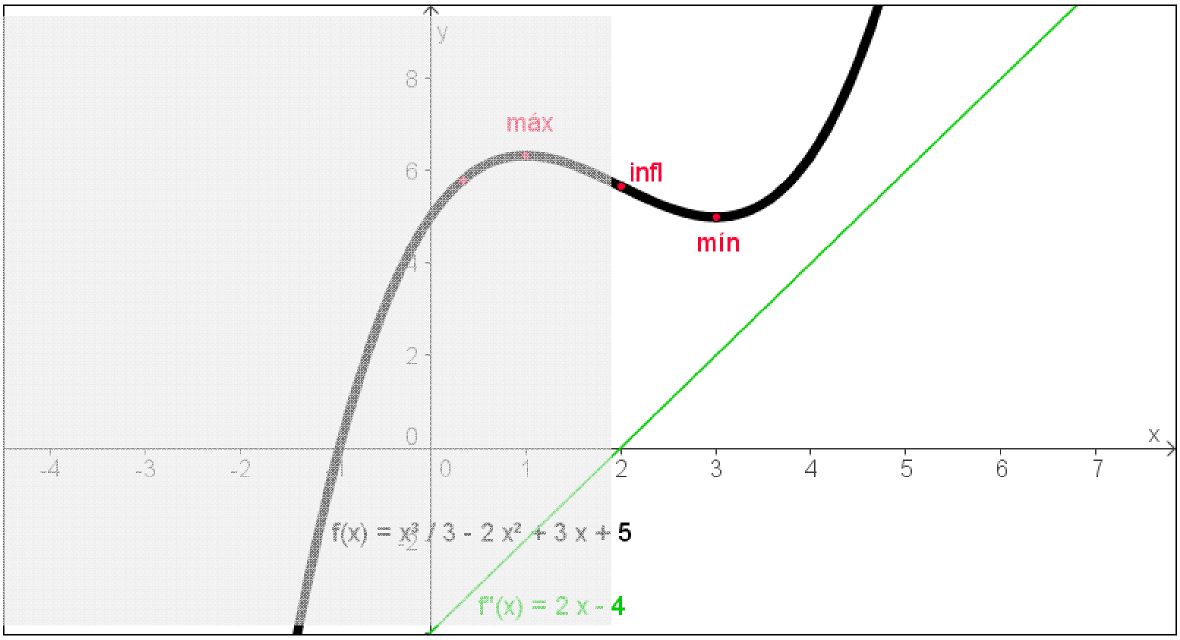
tela 9

Sobrepondo os gráficos da função f e da sua 1ª derivada f', é possível visualizar que nos intervalos onde a função é crescente, a 1ª derivada é positiva e onde a 1ª derivada vale zero, é ponto crítico.



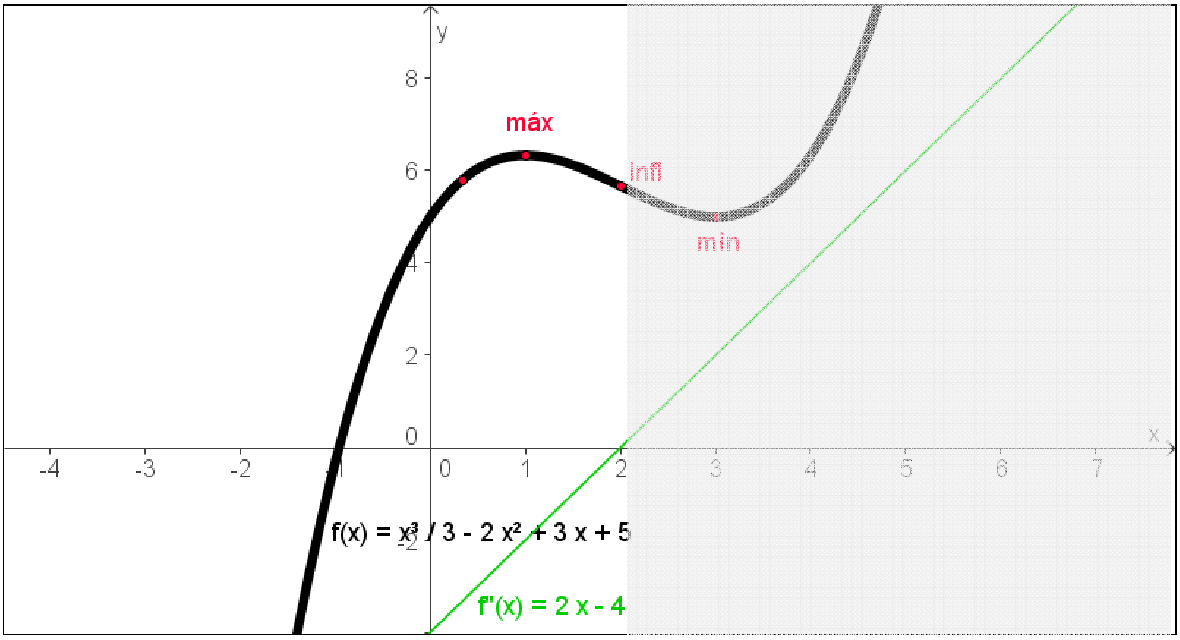
tela 10

Também visualiza-se que no intervalo onde a função é decrescente, a 1ª derivada é negativa.



tela 11

Sobrepondo os gráficos da função f e da sua 2ª derivada f'', é possível visualizar que no intervalo onde a concavidade da função é voltada para cima, a 2ª derivada é positiva e onde é ponto de inflexão, a 2ª derivada vale zero.



tela 12

Também visualiza-se que no intervalo onde a concavidade da função é voltada para baixo, a 2ª derivada é negativa.

Tela para explorar a derivada como limite da taxa de variação para função potência.

DERIVADA COMO LIMITE DE UMA TAXA DE VARIAÇÃO

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\theta$$ *(coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto considerado)*

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x+h}{h} = 2x$$

tela 13

As telas seguintes exploram alguns comandos e particularidades dos softwares para em seguida realizar-se uma seqüência de exercícios.

EXPLORANDO O MENU DO GEOGEBRA

- **Para inserir uma função,no campo entrada, digitamos f(x)=**
- **Para determinar a derivada selecionamos comando, derivada [f]**
- **Para determinar máximo, mínimo ou ponto de inflexão selecionamos comando, Extremo[f] ou PontodeInflexão[f]**
- **Para visualizar a reta tangente em um ponto, selecionamos comando, tangente [nº,f]**

OBS: Clicando em um elemento com o botão direito do mouse, obtemos uma lista de características que podem ser alteradas tais como cor, espessura, extremos etc.

tela 14

EXPLORANDO O MENU DO WINPLOT

- **Para configurar a tela selecionamos: janela 2D.**
- **Para configurar eixos selecionamos: ver, eixos, mostrar nomes.**
- **Para digitar a equação selecionamos: equação, explícita, espectro, cor.**
- **Para retornar à equação selecionamos: equação, inventário.**
- **Para derivar uma função selecionamos: equação, inventário e derivar.**
- **Para determinar um ponto móvel acompanhado da reta tangente à curva, sobre o gráfico, selecionamos: um e traço.**

tela 15

OBSERVAÇÃO

- **Os softwares Geogebra e Winplot interpretam funções do tipo**

$$f(x) = x^n$$

através da sua forma equivalente para x>0

$$f(x) = e^{\ln x^n}$$

- **Isto gera em alguns casos derivadas aparentemente diferentes das esperadas. Contudo para efeito matemático são equivalentes.**

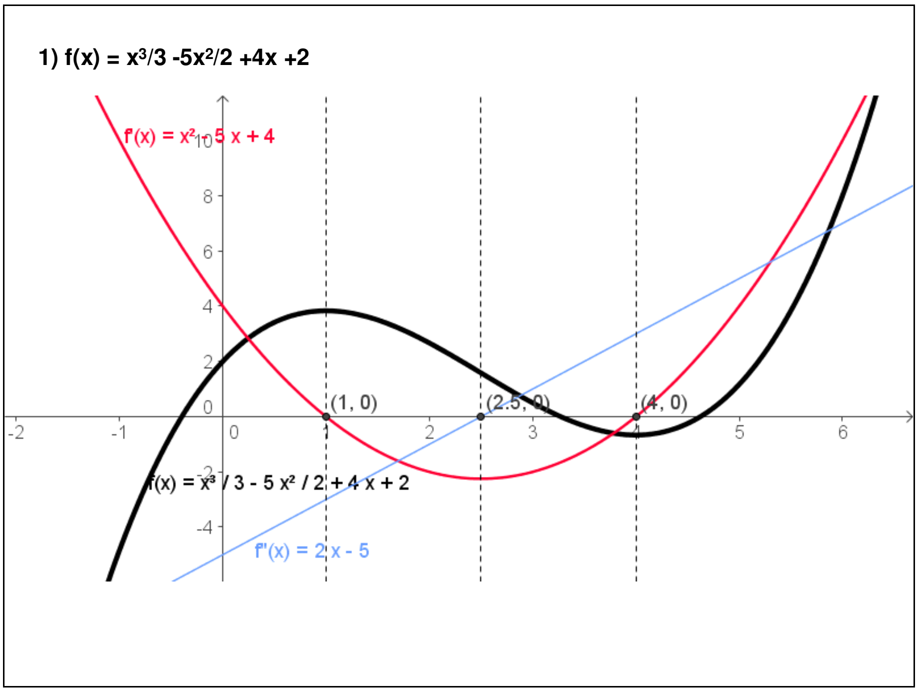
tela 16

CONSTRUA O GRÁFICO, EXPLORE MÁXIMO, MÍNIMO E INFLEXÃO DAS FUNÇÕES

1) $f(x) = x^3/3 - 5x^2/2 + 4x + 2$
D=R
2) $f(x) = x^3 - 3x$
D=R
3) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$
D=R
4) $f(x) = -3x^4 - 6x^2$
D=R
5) $f(x) = 1/x + 4$
D=R*
6) $f(x) = 1/(x-1)$
D=R*- {1}
7) $f(x) = 2x + 1/(2x)$
D=R*
8) $f(x) = 1/x + x/9 + 2$
D=R*
9) $f(x) = 4/x + x + 5$
D=R*
10) $f(x) = x + 1/x$
D=R*

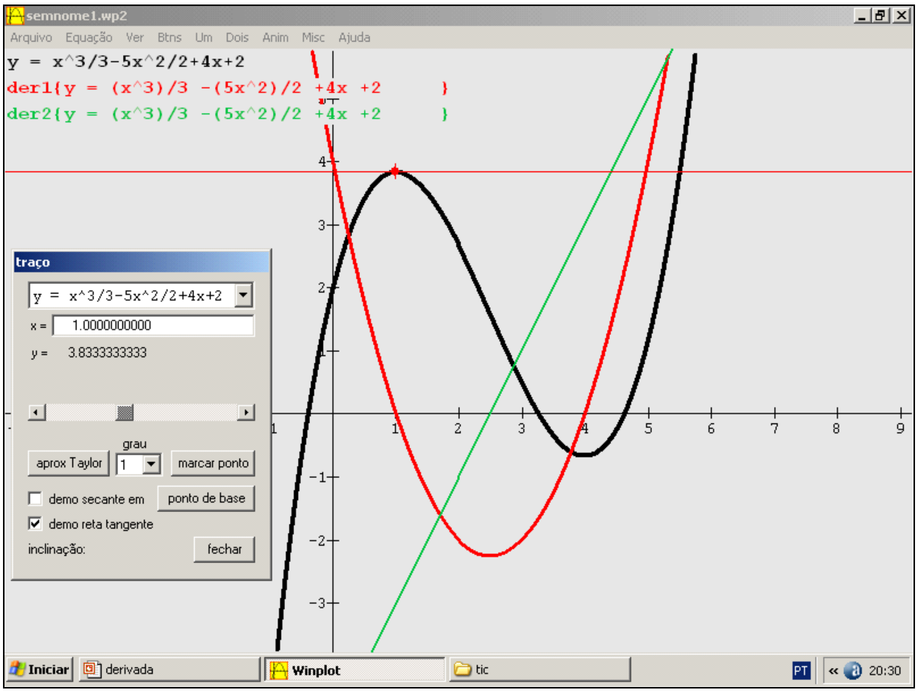
tela 17

Seqüência de exercícios para o aluno explorar os softwares e características de algumas funções usuais. Os exercícios serão realizados com o Geogebra e em paralelo com o Winplot, no qual o recurso “traço” permite a leitura de pontos críticos.

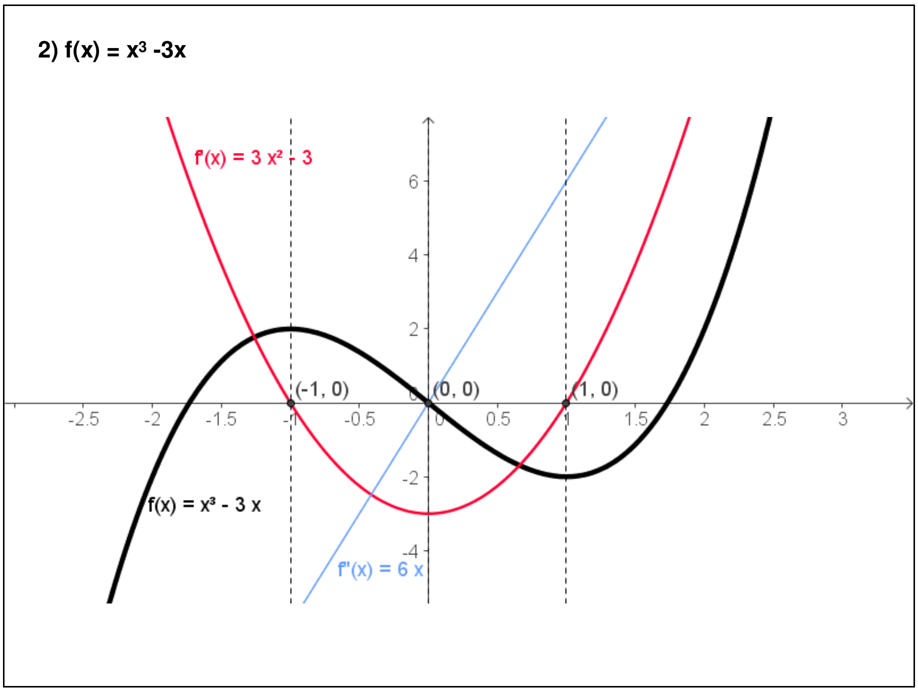


tela 18

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Um ponto de inflexão (onde a 2ª derivada intercepta o eixo x). É decrescente entre o ponto de máximo e o ponto de mínimo, crescente antes do ponto de máximo e após o ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de inflexão e concavidade voltada para cima após o ponto de inflexão.

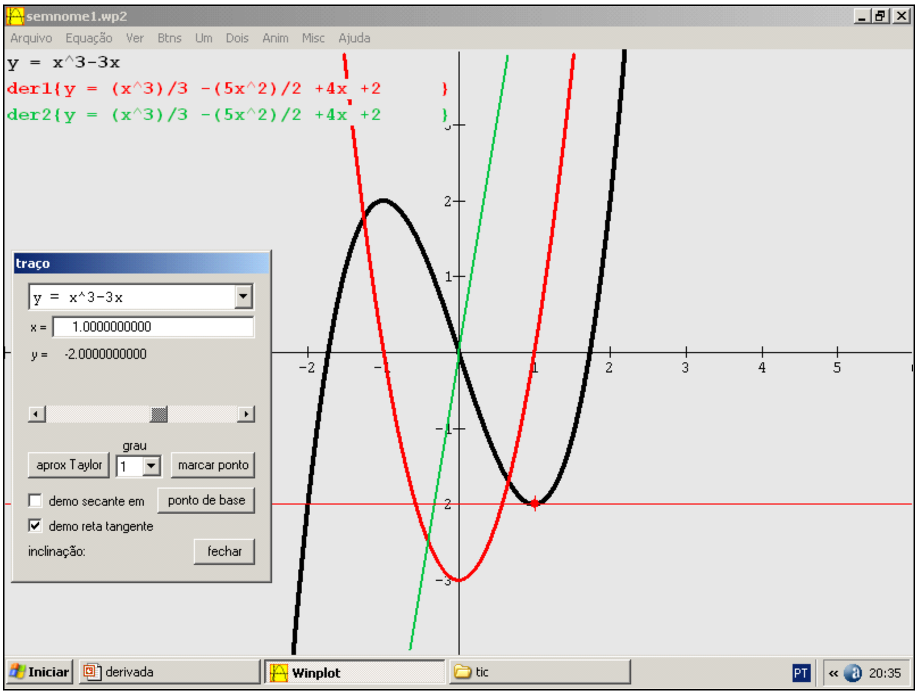


tela 19

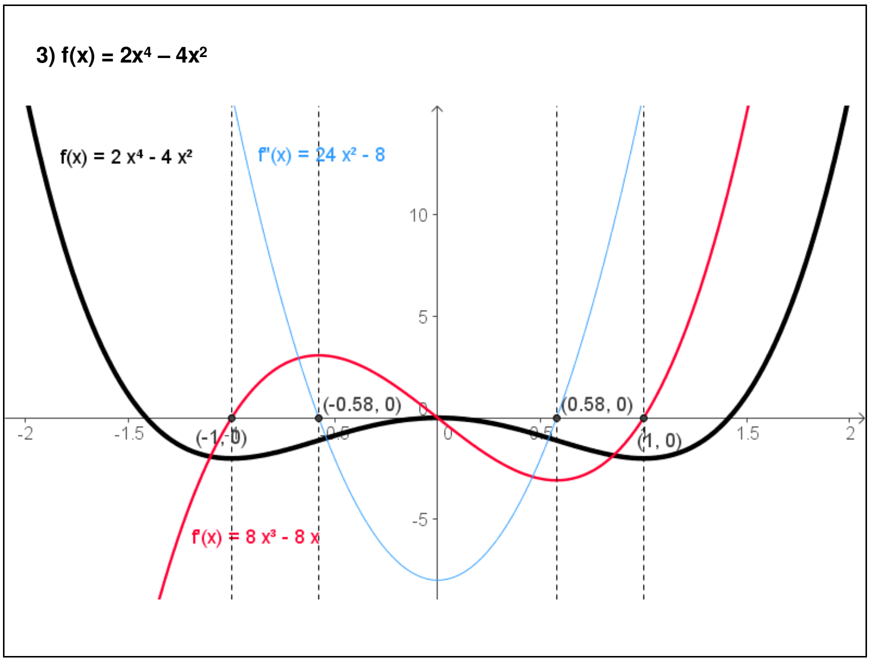


tela 20

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Um ponto de inflexão (onde a 2ª derivada intercepta o eixo x). É decrescente entre o ponto de máximo e o ponto de mínimo, crescente antes do ponto de máximo e após o ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de inflexão e concavidade voltada para cima após o ponto de inflexão.

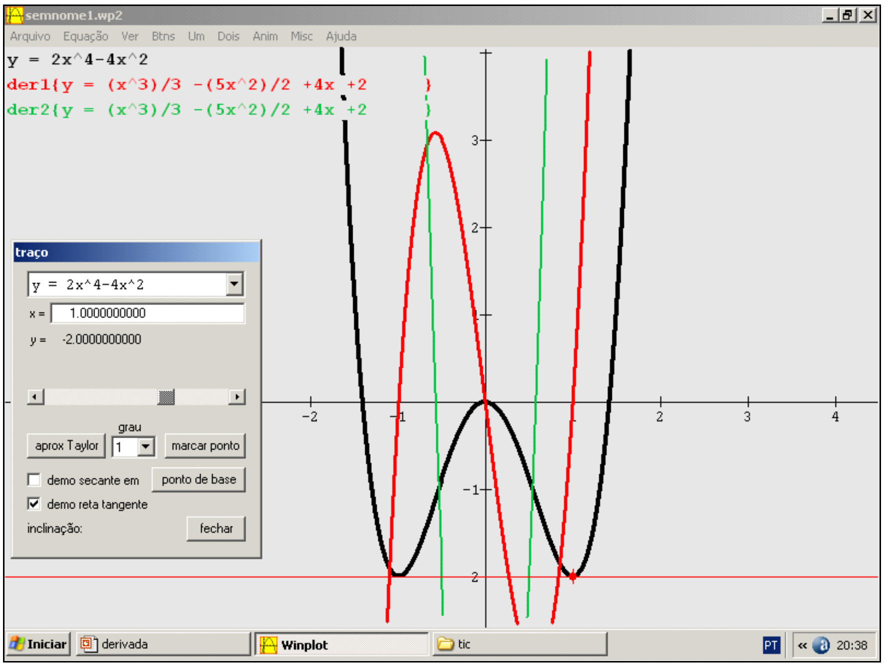


tela 21

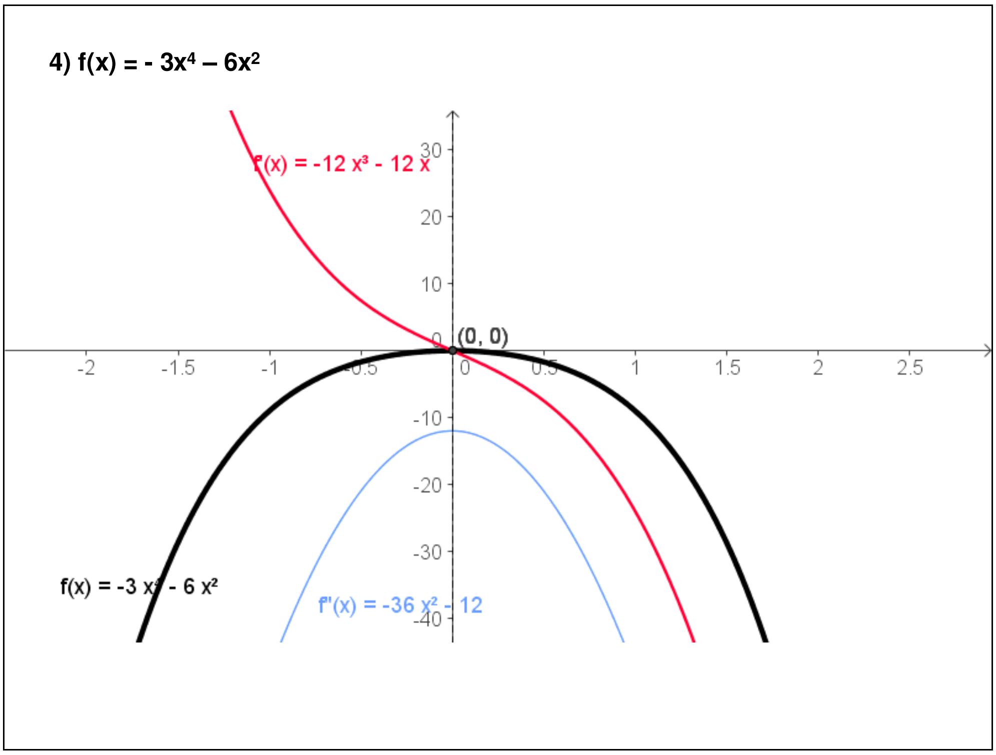


tela 22

A função apresenta um ponto de máximo local e dois pontos de mínimos locais (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Dois pontos de inflexão (onde a 2ª derivada intercepta o eixo x). É decrescente antes do 1º ponto de mínimo e entre o ponto de máximo e o 2º ponto de mínimo. Crescente entre o 1º ponto de mínimo e o ponto de máximo e após o 2º ponto de mínimo. Concavidade voltada para cima antes do 1º ponto de inflexão e após o 2º ponto de inflexão. concavidade voltada para baixo entre os pontos de inflexão.

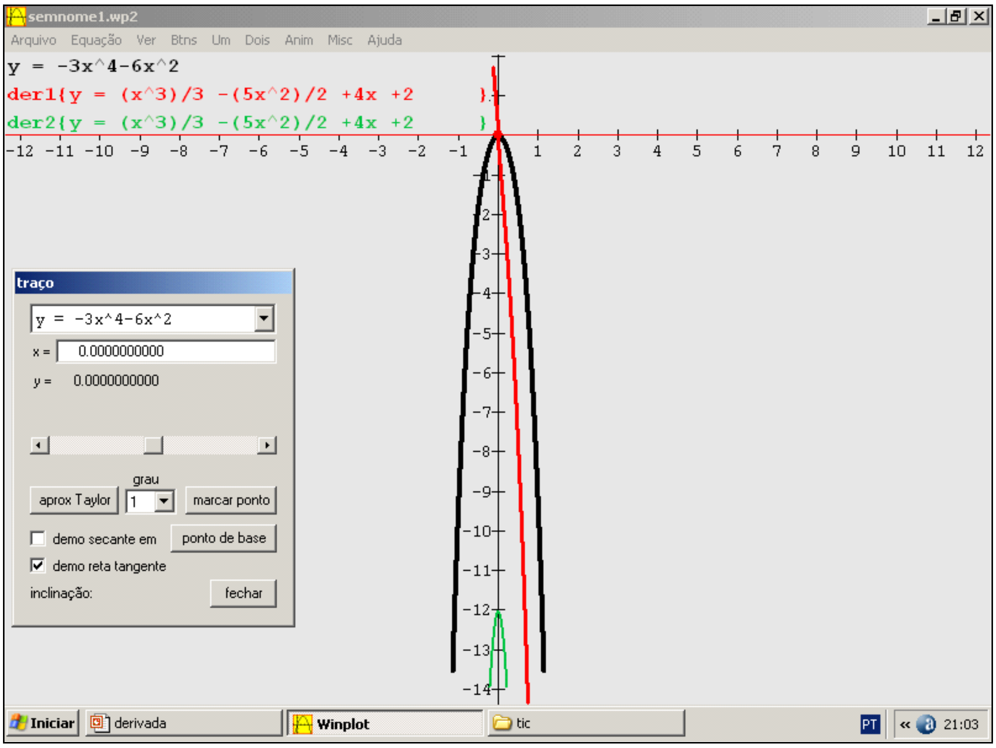


tela 23

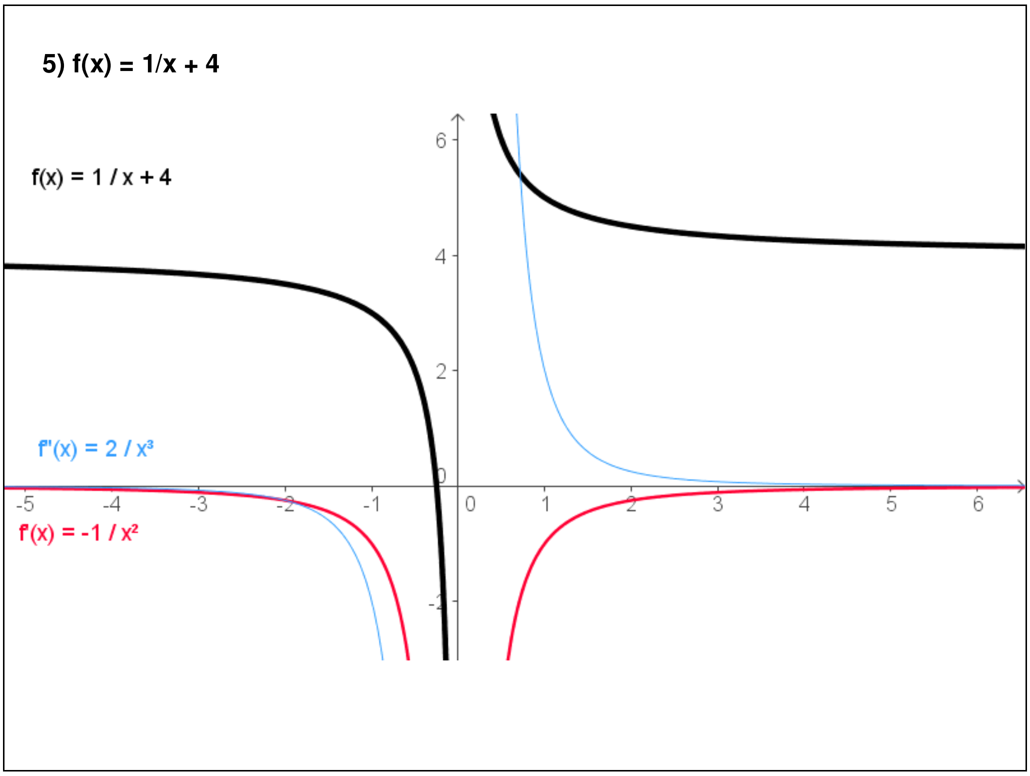


tela 24

A função apresenta um ponto de máximo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Não apresenta ponto de inflexão (a 2ª derivada não intercepta o eixo x). É crescente antes do ponto de máximo e decrescente após o ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo.

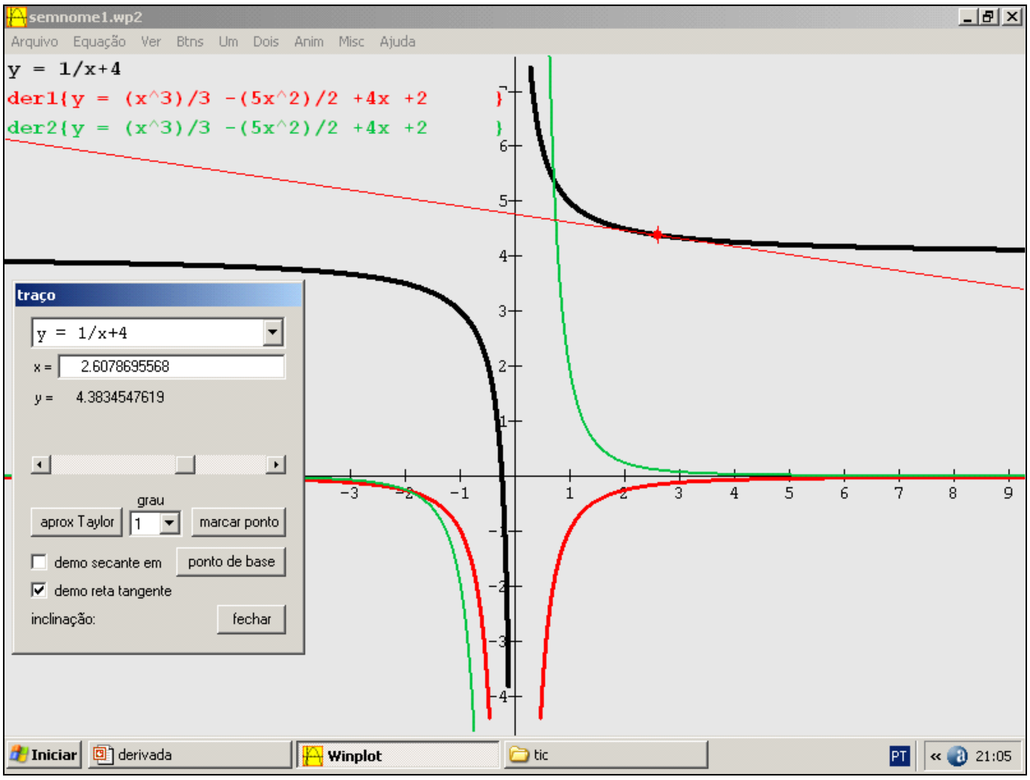


tela 25

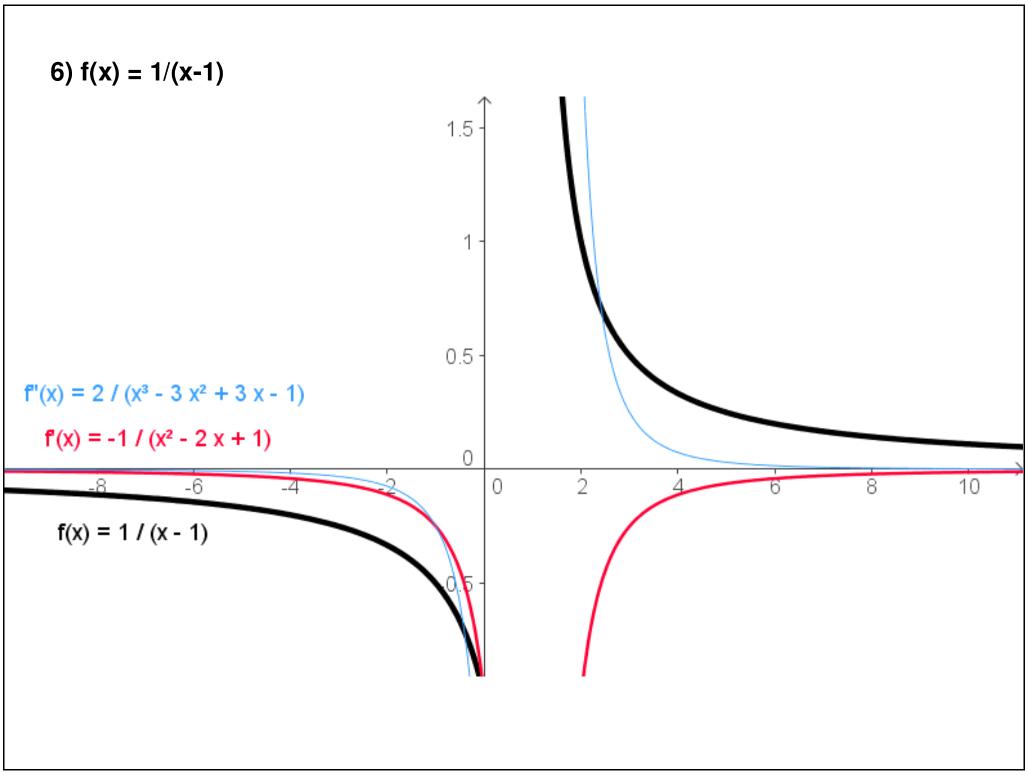


tela 26

A função não apresenta pontos críticos (a 1ª e 2ª derivadas não interceptam o eixo x). A concavidade é voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x=0) e voltada para cima após o mesmo.

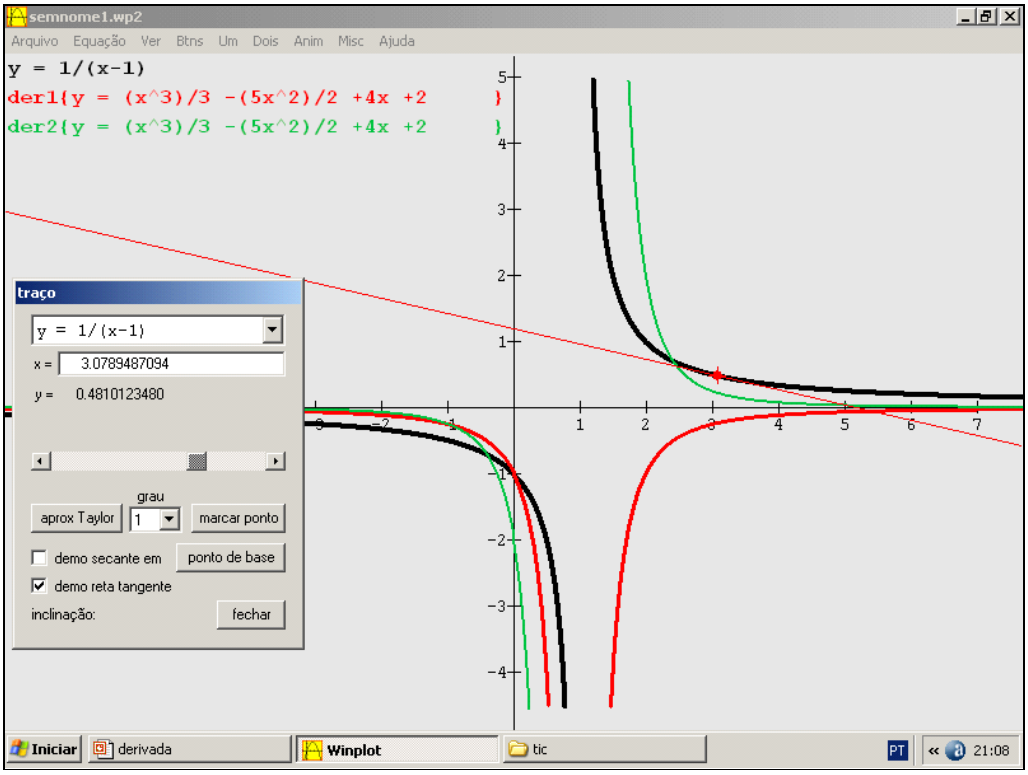


tela 27

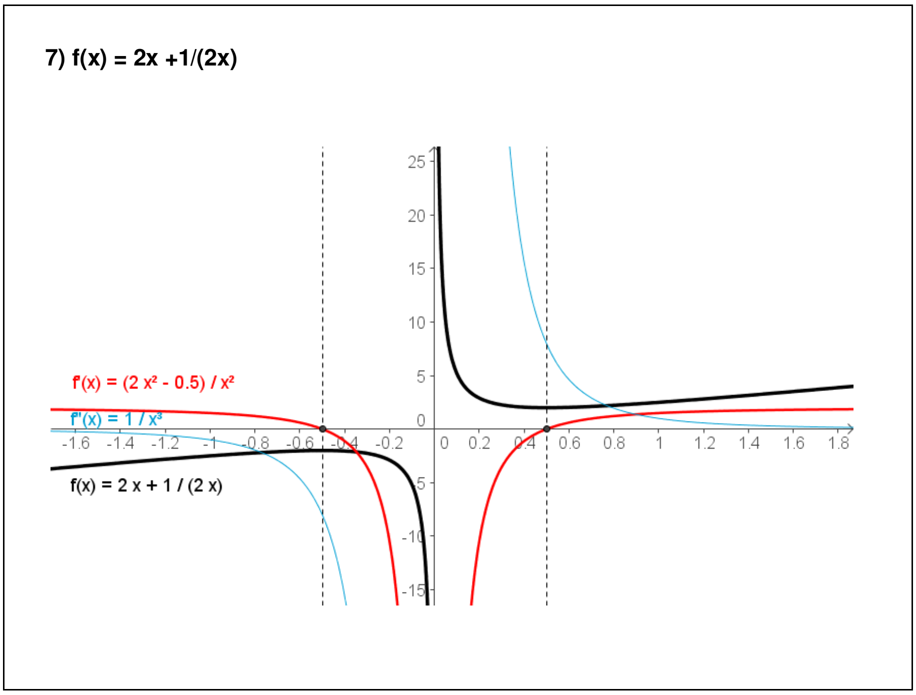


tela 28

A função não apresenta pontos críticos (a 1ª e 2ª derivadas não interceptam o eixo x). É sempre decrescente. A concavidade é voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x=1) e voltada para cima após o mesmo.

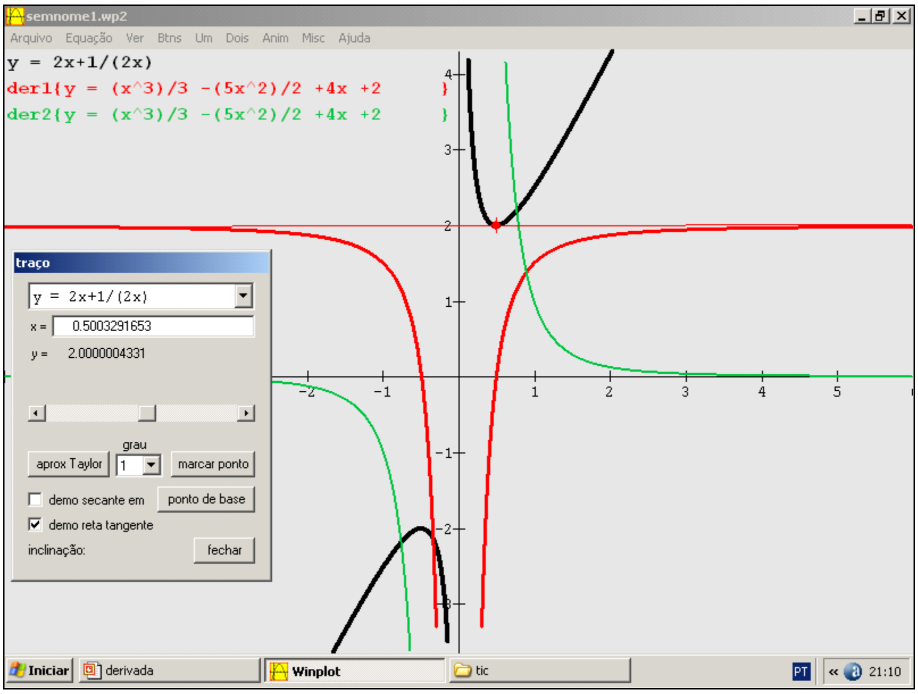


tela 29

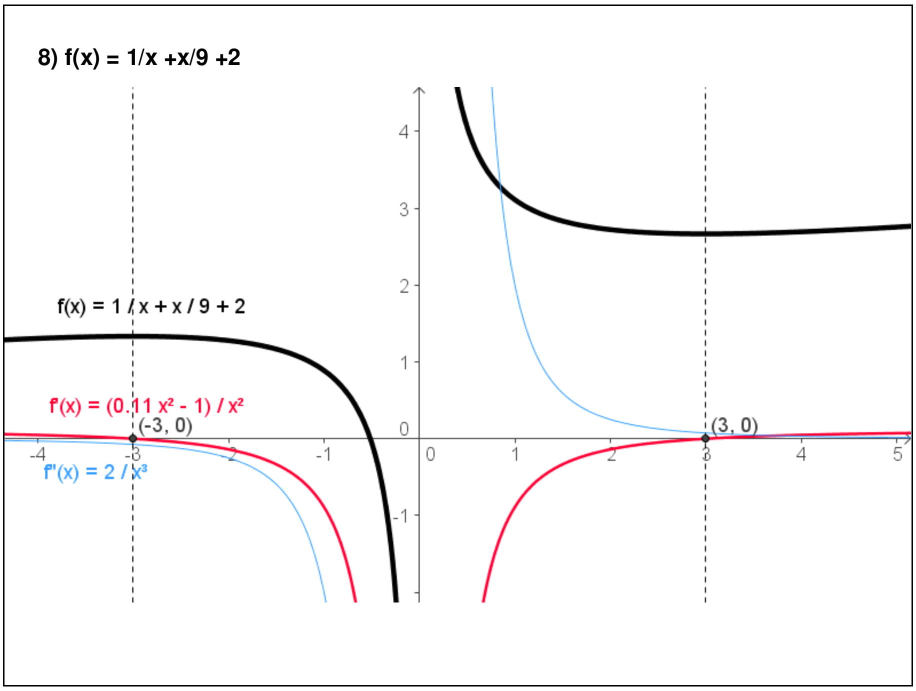


tela 30

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Não apresenta ponto de inflexão (a 2ª derivada não intercepta o eixo x). É crescente antes do ponto de máximo e depois do ponto de mínimo, decrescente depois do ponto de máximo e antes do ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x=0) e voltada para cima após o mesmo.

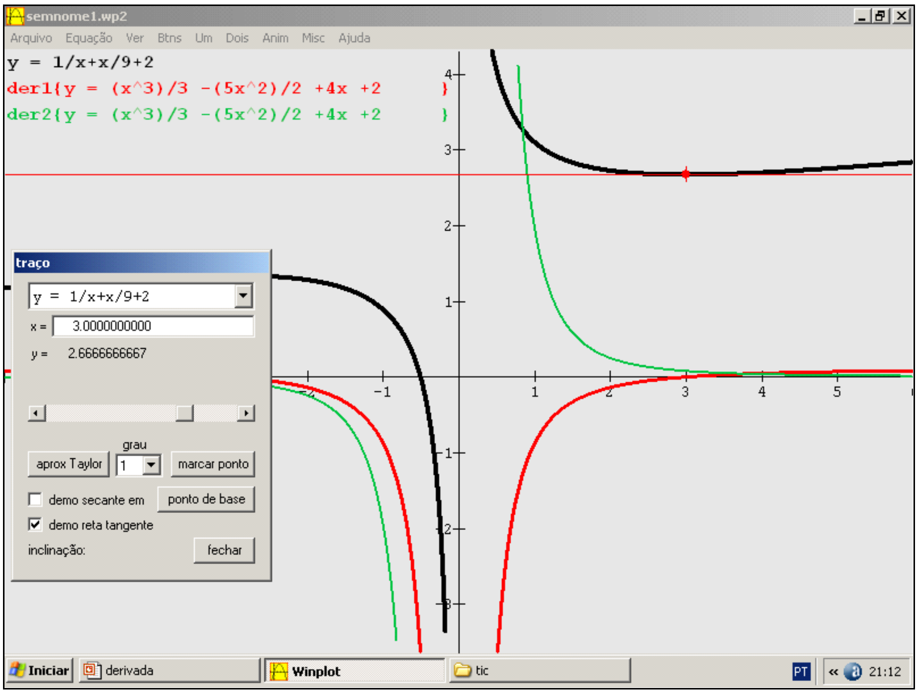


tela 31

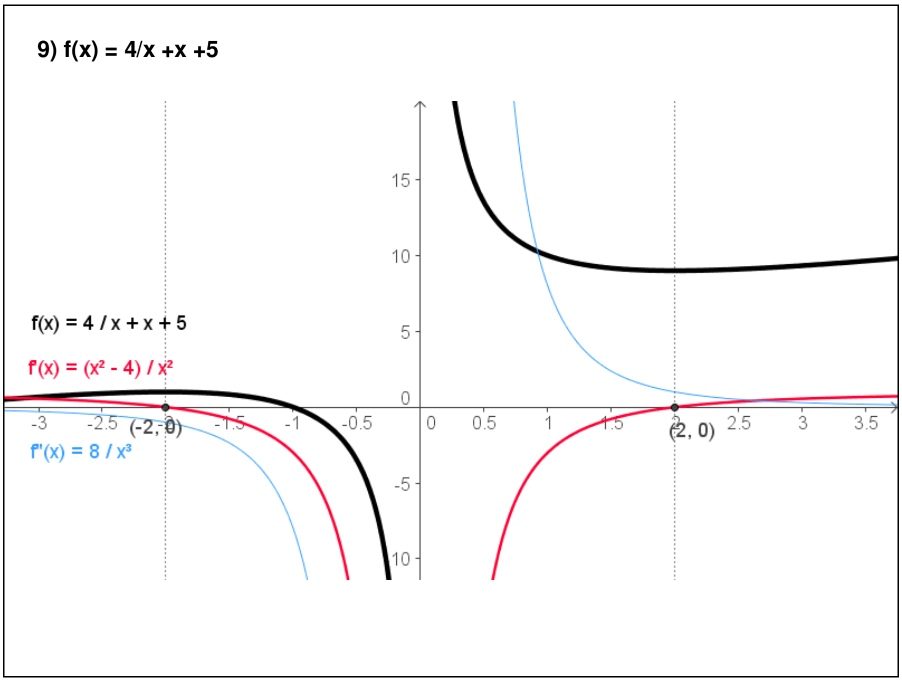


tela 32

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Não apresenta ponto de inflexão (a 2ª derivada não intercepta o eixo x). É crescente antes do ponto de máximo e depois do ponto de mínimo, decrescente depois do ponto de máximo e antes do ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x=0) e voltada para cima após o mesmo.

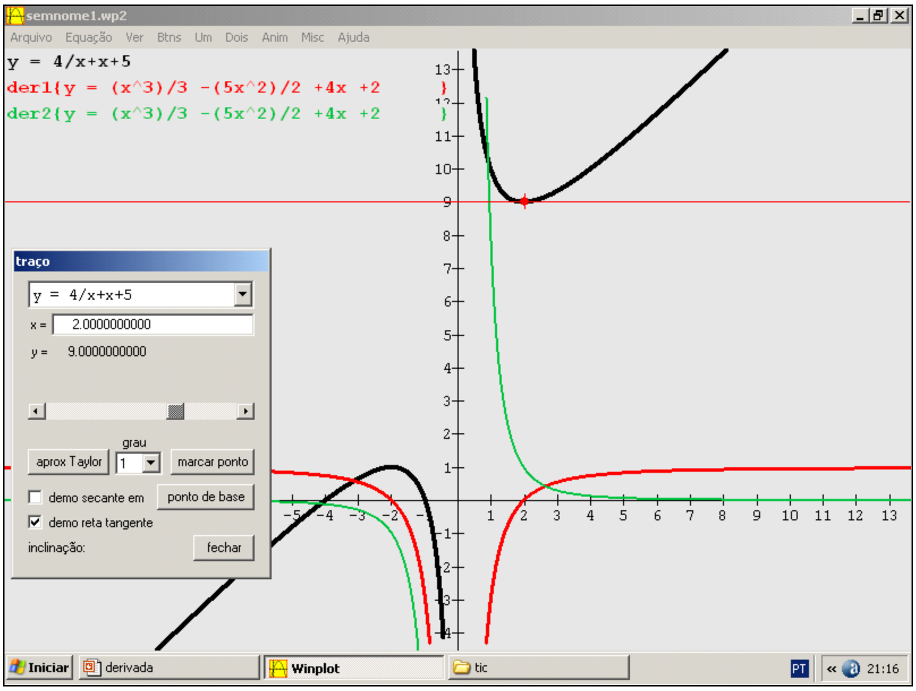


tela 33

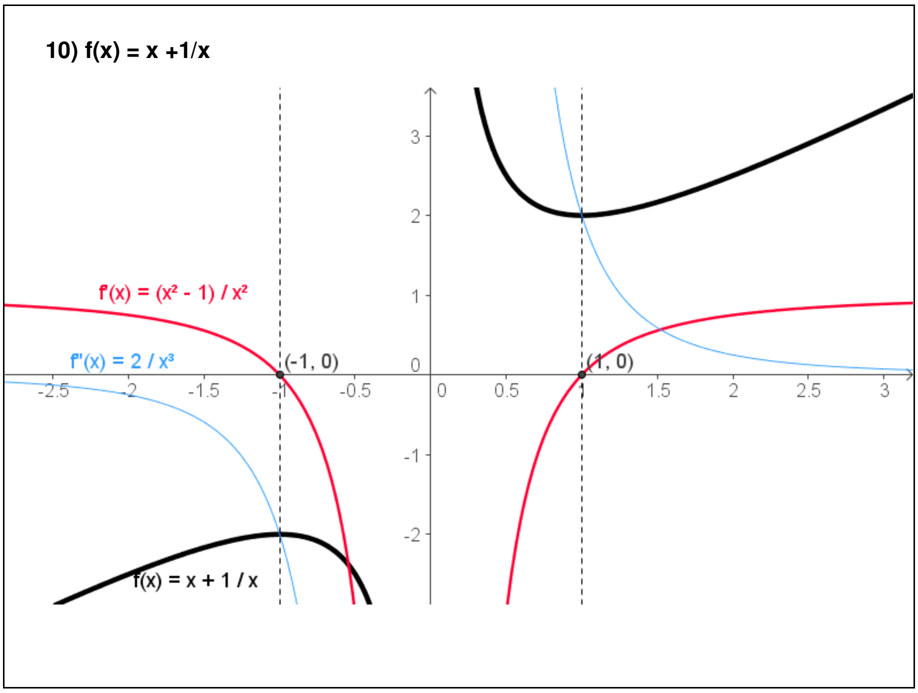


tela 34

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Não apresenta ponto de inflexão (a 2ª derivada não intercepta o eixo x). É crescente antes do ponto de máximo e depois do ponto de mínimo, decrescente depois do ponto de máximo e antes do ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x =0) e voltada para cima após o mesmo.

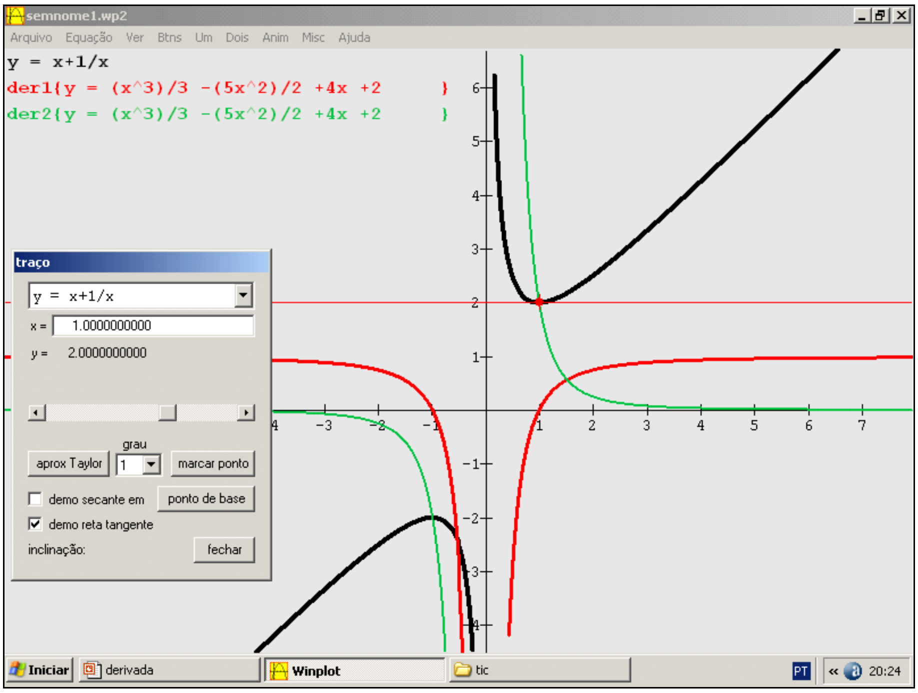


tela 35



tela 36

A função apresenta um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local (onde a 1ª derivada intercepta o eixo x). Não apresenta ponto de inflexão (a 2ª derivada não intercepta o eixo x). É crescente antes do ponto de máximo e depois do ponto de mínimo, decrescente depois do ponto de máximo e antes do ponto de mínimo. Concavidade voltada para baixo antes do ponto de descontinuidade da função (x =0) e voltada para cima após o mesmo.



tela 37

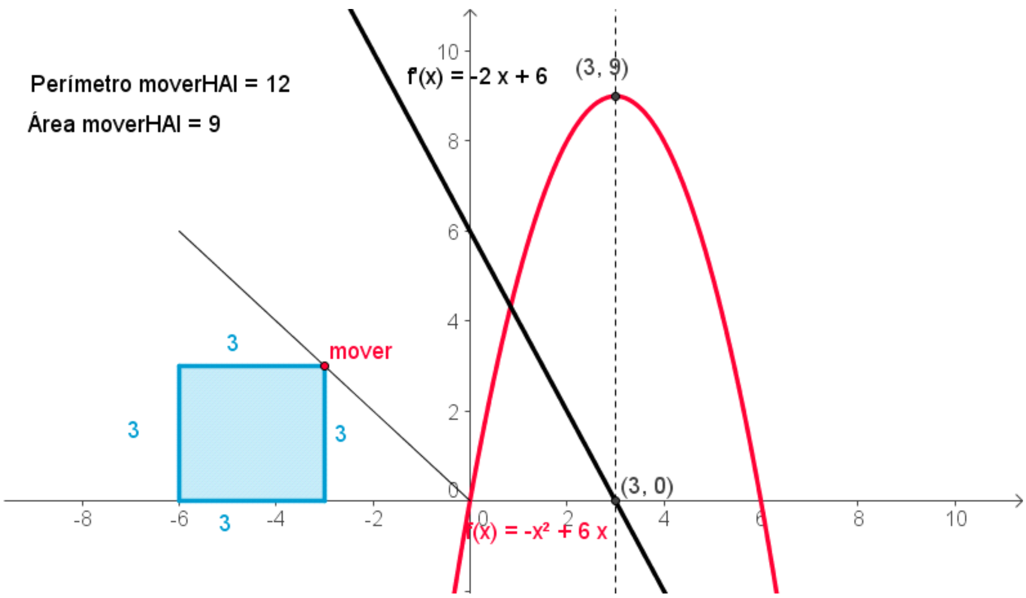
2.2 Otimização de Funções com Uma Variável (Módulo 2)

O objetivo desse módulo é fazer um estudo sobre problemas que envolvem otimização de funções com uma variável. Foi escolhida uma seqüência didática com problemas de ordem prática. Os enunciados sempre apresentam alguma condição, que é utilizada na montagem da situação (no quadro geométrico) e que, por uma variação de valores, será refletida em uma função (no quadro das funções). Esta será representada graficamente e apresentará um ponto de máximo ou de mínimo (no quadro da geometria analítica). A partir daí, a função será tratada no quadro algébrico, onde a solução será produzida e confrontada com as soluções gráfica e geométrica. Essa dinâmica é condição na resolução de problemas de otimização e a idéia é que isso seja assimilado pelo aluno.

O software Geogebra mostra-se perfeitamente adequado pois trabalha com os quadros geométrico, de funções, algébrico e da geometria analítica simultaneamente. Além disso, permite a variação da construção e a conseqüente movimentação do ponto sobre o gráfico da função.

ATIVIDADES DE OTIMIZAÇÃO

SITUAÇÃO-PROBLEMA 1: Quais as medidas dos lados do retângulo de maior área que podemos construir com perímetro 12cm?



tela 38

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

condição : perímetro

$$2x + 2y = 12$$

$$x + y = 6$$

$$y = 6 - x$$

função : área

$$f(x) = x(6 - x)$$

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

otimização

$$f'(x) = -2x + 6$$

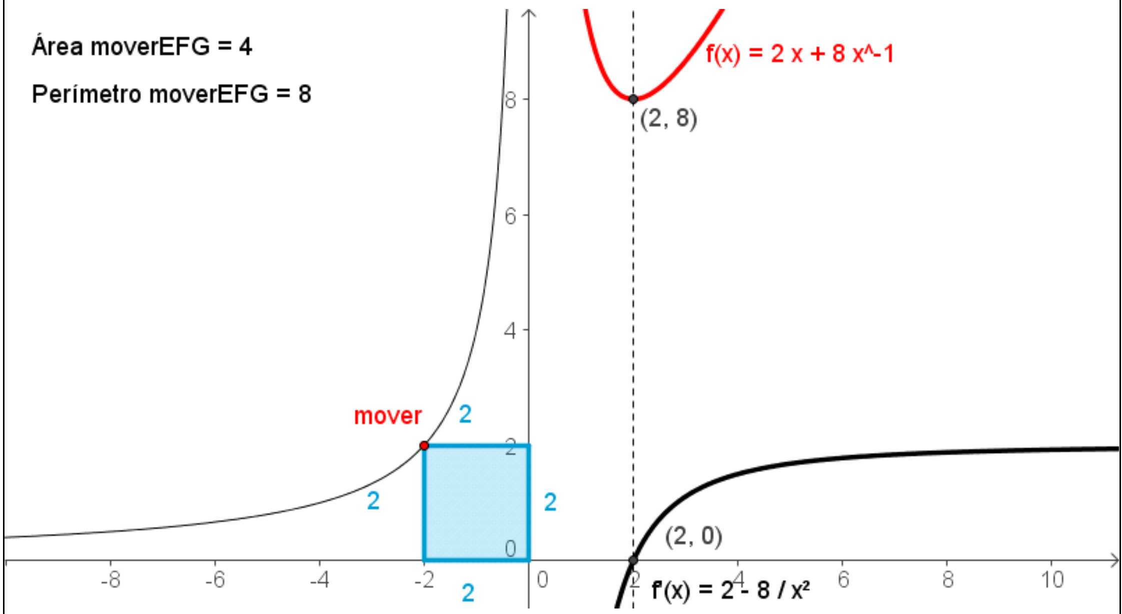
$$-2x + 6 = 0$$

$$x = 3$$

tela 39

Problema clássico na maioria dos livros de Cálculo para introduzir a idéia de otimização. Traz uma condição que é o perímetro e gerará a função y = 6 - x. O software oferece um sistema de eixos Cartesianos. Construída a reta à esquerda do eixo y, um ponto móvel sobre a mesma serve como um dos vértices do retângulo em questão. Construído o retângulo, usando paralelas e perpendiculares e delimitando o mesmo, movimentando o ponto, teremos a variação da área. O software permite medir o lado do retângulo e sua área. Usando o recurso da homotetia do ponto (1,0) em relação à origem do sistema de eixos, com fator igual à medida a transportar, transporta-se as medidas do lado do retângulo e da área para os eixos x e y, respectivamente. Cria-se assim um lugar geométrico (recurso disponível no software) que coincide com a função a ser otimizada $y = -x^2 + 6x$. O software realiza a derivada da função e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: Qual retângulo de área 4cm tem o menor perímetro?



tela 40

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

condição : área

$$x.y = 4$$

$$y = 4 / x$$

função : perímetro

$$f(x) = 2x + 2y$$

$$f(x) = 2x + 8x^{-1}$$

otimização

$$f'(x) = 2 - 8x^{-2}$$

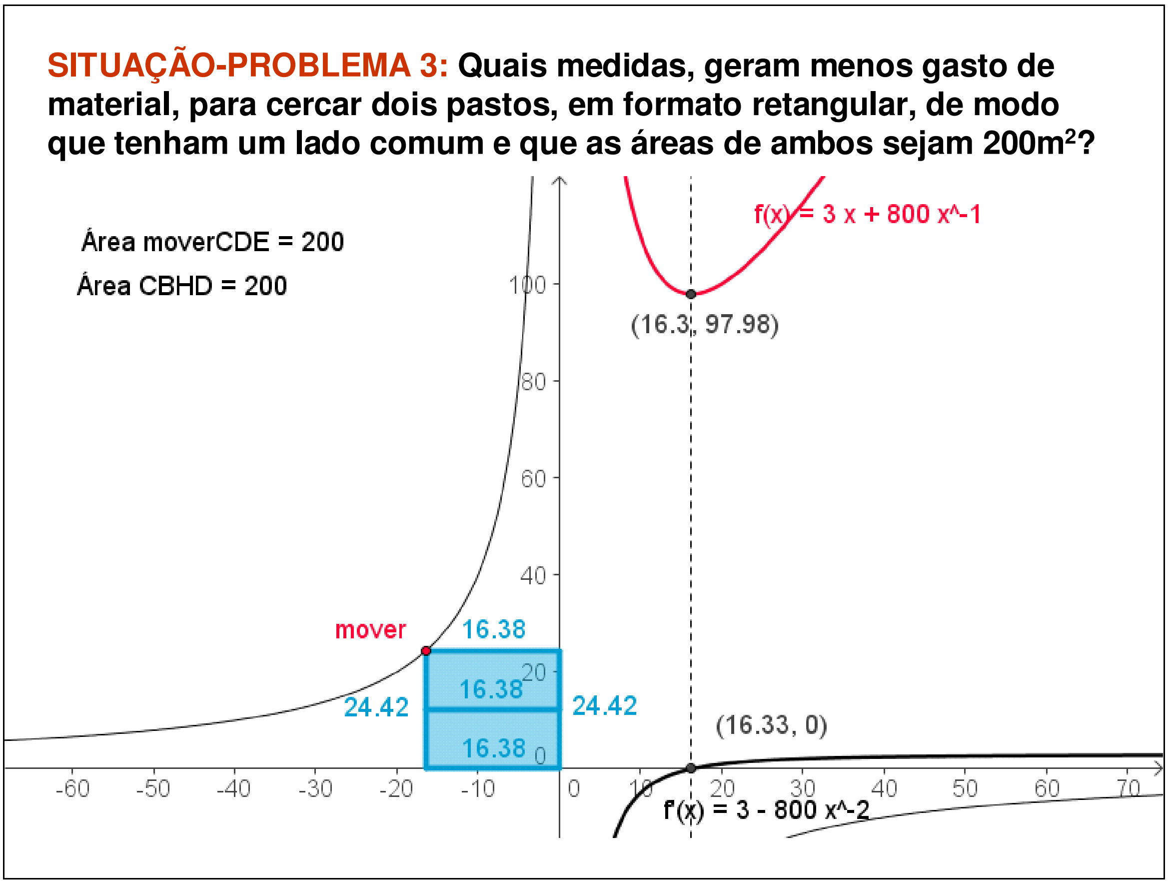
$$f'(x) = 0$$

$$2 = 8 / x^{-2}$$

$$x^2 = 4 x = 2$$

tela 41

O problema traz uma inversão de situação em relação ao problema anterior. A condição que é a área será mantida pela função racional y = 4/x. Construída a curva à esquerda do eixo y, usando o recurso de traçar o gráfico de uma função, um ponto móvel sobre a mesma serve como um dos vértices do retângulo em questão. Traçado e delimitado o retângulo, movimentando o ponto, tem-se a variação do perímetro. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor do lado do retângulo e o perímetro, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função y = 2x + 8/x a ser otimizada. O software realiza a derivada da função e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).



tela 42

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

condição : área

$$x \cdot 2y = 400$$

$$y = 200 / x$$

função : perímetro

$$f(x) = 3x + 4y$$

$$f(x) = 3x + 800 x^{-1}$$

otimização

$$f'(x) = 3 - 800 x^{-2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$800 / x^{-2} = 3$$

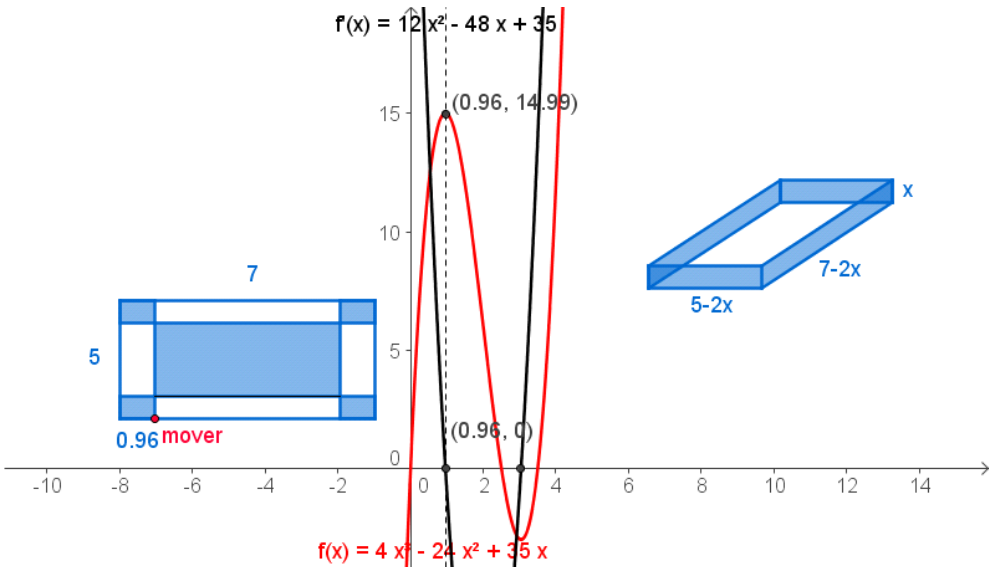
$$x^{2} = 800 / 3$$

$$x = 16,33$$

tela 43

Uma sofisticação do problema anterior, extraído do livro Cálculo B (FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss, 2007), traz uma condição que é a soma das áreas de dois retângulos iguais e que resulta em um retângulo maior e será mantida pela função racional y = 200/x. Construída a curva, um ponto móvel sobre a mesma serve como um dos vértices do retângulo maior em questão. Movimentando o ponto, tem-se a variação do perímetro como foi concebido. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor do lado do retângulo e o perímetro, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função y = 3x + 800/x, a ser otimizada. O software realiza a derivada da função e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 4: **Dispondo de uma folha de papelão para fazer uma caixa em formato de paralelepípedo, podemos cortar os quatro cantos de uma medida x (que será a altura) o que vai possibilitar vários tipos de caixas. Qual a de maior volume?**



tela 44

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

função : volume

$$f(x) = x(7-2x)(5-2x)$$

$$f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 35x$$

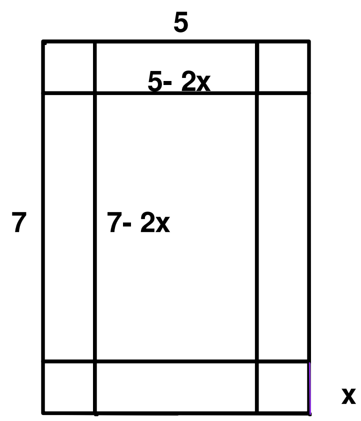
otimização

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 35$$

$$12x^2 - 48x + 35 = 0$$

$$x = (48 + \sqrt{624})/24 = 3{,}04$$

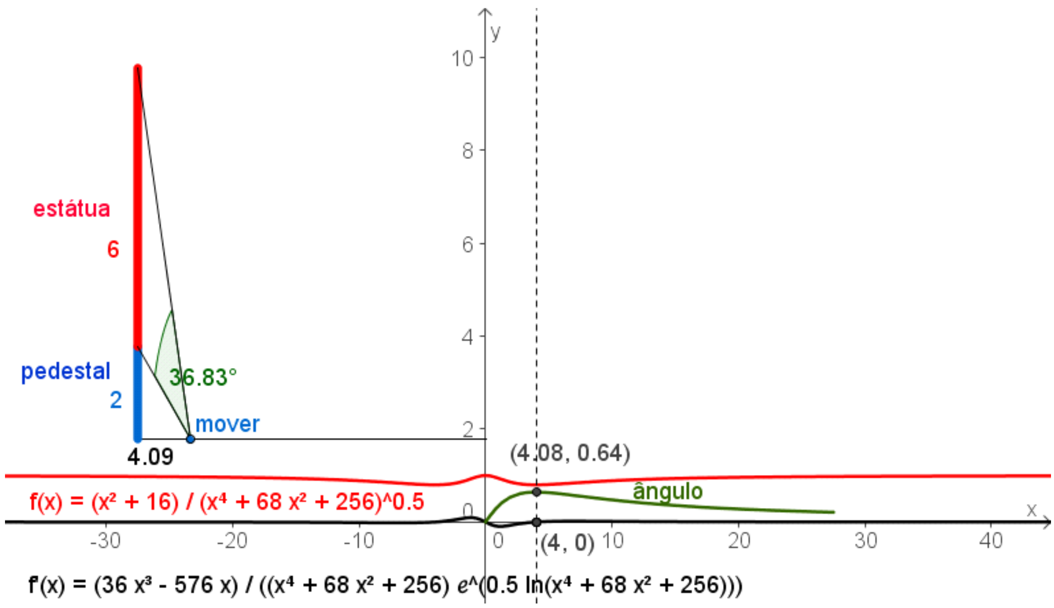
$$x = (48 - \sqrt{624})/24 = 0{,}95$$



tela 45

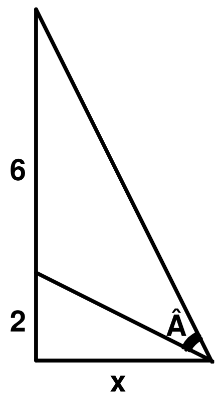
O problema extraído do livro Cálculo Funções de Uma e Duas Variáveis (HAZZAN, Samuel; MORETTIN, Pedro e BUSSAB Wilton, 2003), traz uma condição que é a dimensão da folha que será usada para criar a função volume v = $4x^3 - 4x^2 + 35x$. Construída a situação dinâmica à esquerda do eixo y, um ponto móvel produz a variação do volume. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor da altura da caixa e o volume, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função a ser otimizada v = $4x^3 - 4x^2 + 35x$. O software realiza a derivada da função e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 5: Qual o maior ângulo com que um observador móvel, situado na horizontal pode observar uma estátua que está sobre um pedestal?



tela 46

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA



$$função: \cos \hat{A}$$

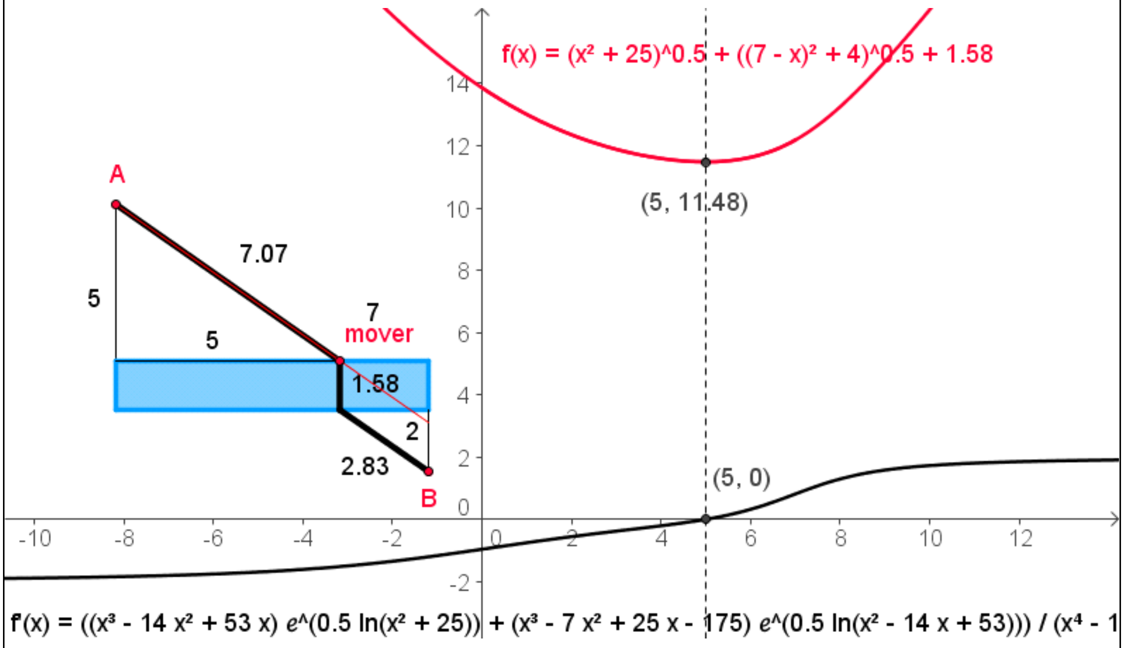
$$6^2 = \left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+8^2}\right)^2 - 2\sqrt{(x^2+2^2)(x^2+8^2)}\cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = (x^2+16)/\sqrt{x^4+68x^2+256}$$

tela 47

O problema citado na introdução como fonte de inspiração desse trabalho e presente no artigo “Visualização Dinâmica no Cálculo” traz condições que são as alturas da estátua e do pedestal. Construída a situação dinâmica à esquerda do eixo y, um ponto móvel produz a variação do ângulo de observação e que pode ser medido pelo recurso medida de ângulo. Transportando para o sistema Cartesiano, a distância do ponto à base do pedestal e o valor do ângulo, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função a ser otimizada $\cos \hat{A} = (x^2+16)/\sqrt{x^4+68x^2+256}$. O software realiza a derivada da função (conforme condição apresentada na tela 16) e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial). Que a propósito, é o menor valor do co-seno para que o ângulo seja o maior valor possível.

SITUAÇÃO-PROBLEMA 6: Para se deslocar de A até B, percorrendo a menor distância, onde deve ser construída a ponte sobre o rio?



tela 48

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

função : distância

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5^2} + \sqrt{(7-x)^2 + 2^2} + 1{,}58$$

otimização

$$f'(x) = (x/\sqrt{x^2+5^2}) + ((7-x)/\sqrt{(7-x)^2+2^2})$$

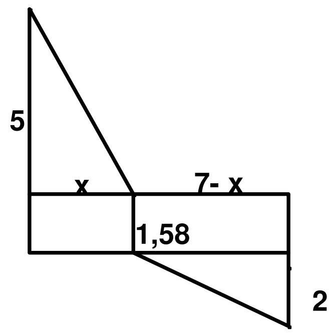
$$f'(x) = 0$$

$$x/\sqrt{x^2+5^2} = -(7-x)/\sqrt{(7-x)^2+2^2}$$

$$9x^2 - 70x + 1225 = 0$$

$$x = 35/-2 = -12{,}5$$

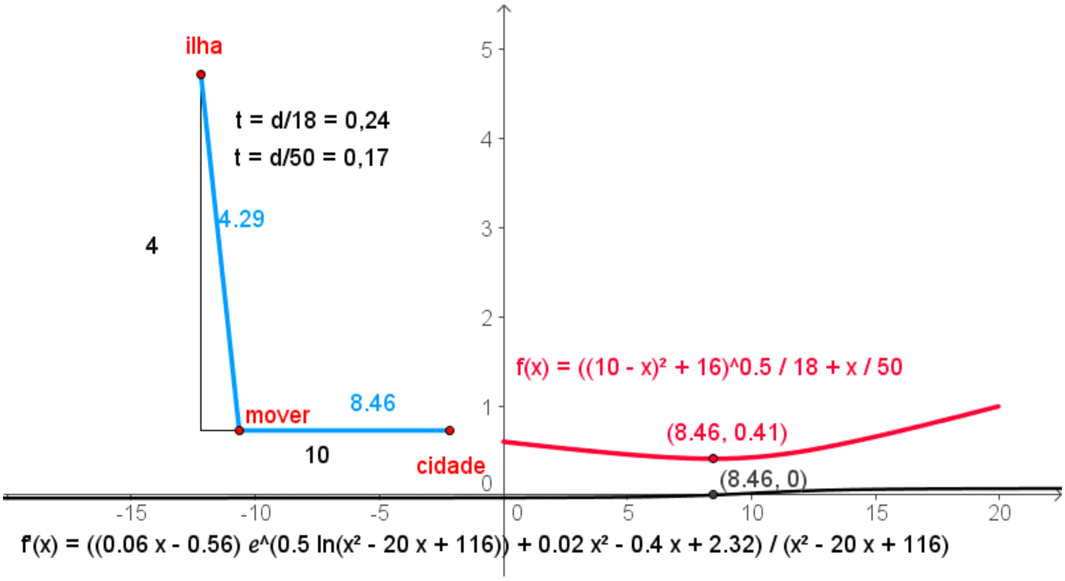
$$x = 35/7 = 5$$



tela 49

O problema, clássico em livros de geometria, tem originalmente solução geométrica realizada por translação. Traz condições que são as distâncias das casas ao rio, a distância entre as casas na horizontal e a largura do rio. Construída a situação dinâmica, um ponto móvel produz a variação do trajeto. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor de x e o valor do trajeto, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função $f(x) = \sqrt{x^2 + 5^2} + \sqrt{(7 - x)^2 + 2^2} + 1{,}58$ a ser otimizada. O software realiza a derivada da função (conforme condição apresentada na tela 16) e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 7: Uma agência de viagem deve levar passageiros que chegam em uma cidade até uma ilha conforme figura. A distância horizontal por terra é 10km e a distância perpendicular por mar é 4km. Sabendo que por terra a viagem é feita a 50km/h e por mar a 18km/h. Em que ponto deve-se trocar a viagem por terra pela viagem por mar para que o tempo gasto seja mínimo?



tela 50

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

função : distância ponderada pela velocidade

$$v = s / t \Rightarrow t = s / v$$

$$t(x) = s_1 / v_1 + s_2 / v_2$$

$$f(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} \; / 18 + x / 50$$

otimização

$$f'(x) = (2x - 20) / 36\sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} + 1 / 50$$

$$f'(x) = 0$$

$$(x - 10) / \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} = -9 / 25$$

$$x^2 - 20x + 976{,}17 = 0$$

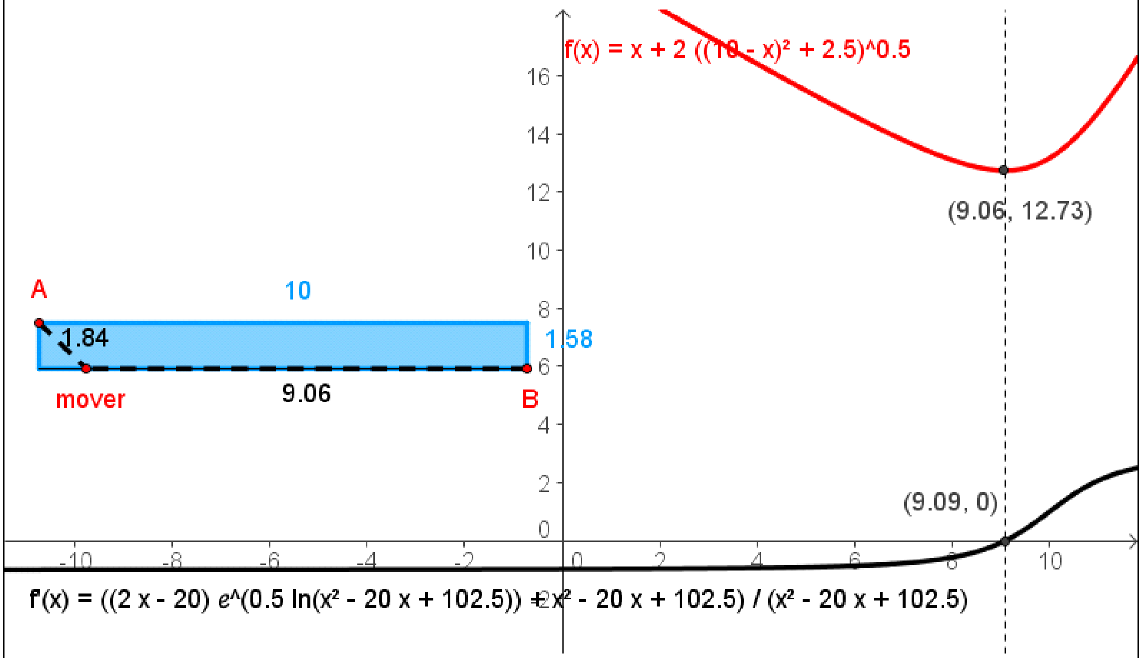
$$x = 11{,}55$$

$$x = 8{,}45$$

tela 51

O problema, extraído do livro Cálculo B (FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss, 2007), apresenta uma nova idéia que é a questão de a solução passar antes pela relação de velocidade ou seja espaço percorrido no tempo. Traz condições que são a distância da ilha à terra, a distância da cidade ao ponto de embarque e as velocidades de viagem por terra e mar. Feitas as proporções pelas velocidades, essas informações produzem um tempo de viagem que é a função $f(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} \; / 18 + x / 50$. Construída a situação dinâmica, um ponto móvel produz a variação do tempo. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor de x e o valor do tempo, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função $f(x) = \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} \; / 18 + x / 50$ a ser otimizada. O software realiza a derivada da função (conforme condição apresentada na tela 16) e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 8: **Qual o menor custo para passar um cabo de A até B, sabendo que a parte sobre o rio tem custo dobrado?**



tela 52

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA

função : distância

$$f(x) = x + 2\sqrt{(10 - x)^2 + 1{,}58^2}$$

otimização

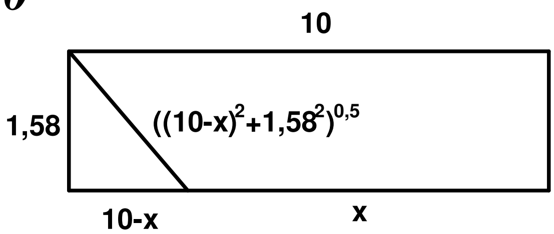
$$f'(x) = 1 - 2(10 - x)/\sqrt{(10 - x)^2 + 1{,}58^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 60x + 297{,}5 = 0$$

$$x = 12{,}91$$

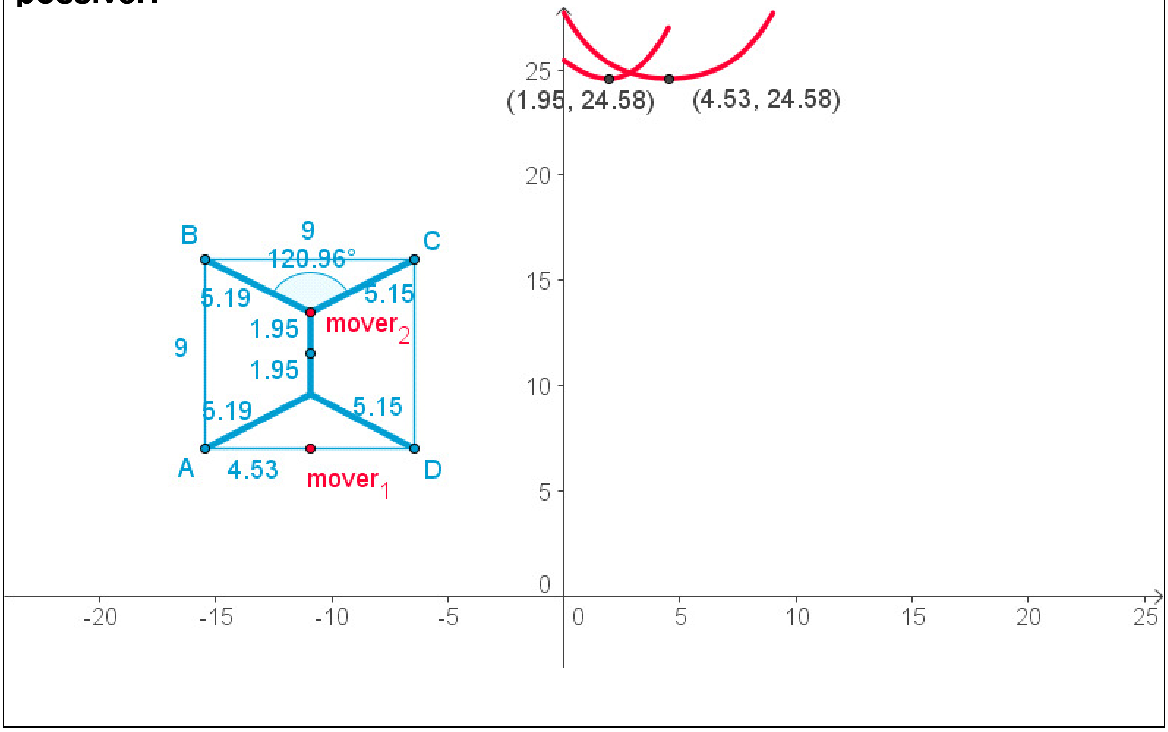
$$x = 9{,}08$$



tela 53

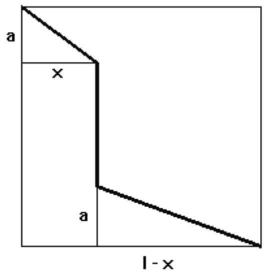
O problema, extraído do livro Cálculo B (FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss, 2007), apresenta como o anterior, a questão de a solução passar antes pela relação de custo sobre o solo e custo sobre o rio. Traz condições que são a distância horizontal entre os pontos, a largura do rio e os custos por terra e rio. Feitas as proporções pelos custos, essas informações produzem um custo final. Construída a situação dinâmica, um ponto móvel produz a variação do custo final. Transportando para o sistema Cartesiano, o valor de x e o valor do custo, cria-se um lugar geométrico que coincide com a função $f(x) = x + 2\sqrt{(10 - x)^2 + 1,58^2}$ a ser otimizada. O software realiza a derivada da função (conforme condição apresentada na tela 16) e traça o seu gráfico de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

SITUAÇÃO-PROBLEMA 9: Se quisermos construir estradas ligando as quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível?



tela 54

ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA



função: distância

$$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(l-x)^2+a^2}+l-2a$$

otimização

$$f'(x)=(x/\sqrt{x^2+a^2})+((x-l)/\sqrt{(l-x)^2+a^2})$$

$$f'(x)=0$$

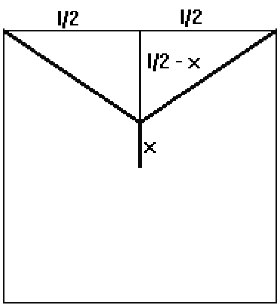
$$x/\sqrt{x^2+a^2}=-(x-l)/\sqrt{(l-x)^2+a^2}$$

$$-2a^2lx+a^2l^2=0$$

$$x=a^2l^2/2a^2l$$

$$x=l/2$$

tela 55



função : distância

$$f(x)=2\sqrt{(l/2-x)^2+(l/2)^2}+x$$

otimização

$$f'(x)=(2x-l)/\sqrt{(l/2-x)^2+(l/2)^2}+1$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3lx+l^2/2=0$$

$$x=(3l-l\sqrt{3})/6$$

$$x=l(3-\sqrt{3})/6=l0{,}211$$

tela 56

O problema, citado como fonte de inspiração desse trabalho e presente no artigo "Jacob Steiner e o problema da menor malha viária" (José Luiz Pastore Mello, 2006), tem originalmente solução geométrica. Traz condições que são a disposição entre as quatro cidades e suas distâncias. Essas informações produzem um trajeto. Construída a situação dinâmica, dois pontos móveis produzem a variação do trajeto. Transportando para o sistema Cartesiano, as posições desses pontos e o valor do trajeto, cria-se dois lugares geométricos que coincidem com as funções $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(l - x)^2 + a^2} + l - 2a$ e $f(x) = 2\sqrt{(l/2 - x)^2 + (l/2)^2} + x$ a serem otimizadas. O software realiza a derivada dessas funções e traça seus gráficos de onde se obtém uma solução que coincide com as soluções geométrica e algébrica (via Cálculo Diferencial).

O problema também permite uma abordagem através de funções com duas variáveis que será realizada no módulo 4.

2.3 Construção de Gráficos para Funções com Duas Variáveis (Módulo 3)

O objetivo desse módulo é mostrar a construção de gráficos para funções com duas variáveis, ou seja, z = f(x,y). A estratégia de abordagem do assunto leva em conta que se reduz a análise, num primeiro momento, ao que ocorre apenas entre duas variáveis, a questão fica mais simples e uma noção do todo começa a se esboçar.

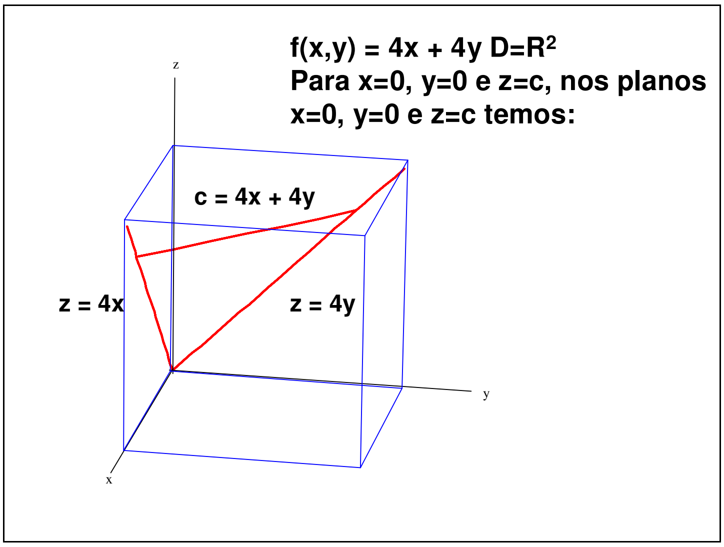
O software Winplot mostra-se perfeitamente adequado para resolver as grandes dificuldades que a maioria dos alunos encontra em visualizar o espaço tridimensional. Além disso, agiliza muito o trabalho do professor e permite que muitos aspectos sejam explorados a um só tempo.

- **Funções com duas variáveis são funções do tipo f(x,y) = z, seu gráfico acontece no espaço tridimensional onde temos três eixos perpendiculares dois a dois. Os elementos do domínio da função são pares ordenados (x,y), as imagens são ternas ordenadas (x,y,z), o gráfico geralmente resulta em uma superfície e a grande dificuldade é percebermos como é esta superfície.**
- **Para tanto usaremos uma estratégia que irá nortear nosso raciocínio no sentido de percebermos o que ocorre na formação desses gráficos e como devemos explorar o software.**

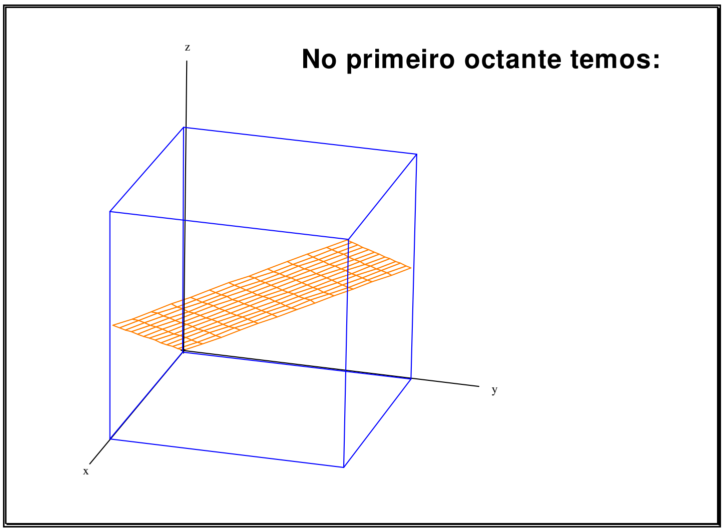
tela 57

• A idéia é que atribuindo um valor a uma das variáveis, x ou y e pensando no que ocorre entre z e a outra variável, teremos uma relação no R^2.
Por exemplo, na função $z = 4x + 3y + 2$ se zeramos o y, ficaremos no plano XZ com a função $z = 4x + 2$ que é uma reta. E quando zeramos x, ficaremos no plano YZ com a função $z = 3y + 2$ que também é uma reta.
• Outro aspecto da questão são as curvas de nível, cortes horizontais que permitem perceber o que ocorre em cada cota ou valor de z.
Vejamos alguns exemplos:

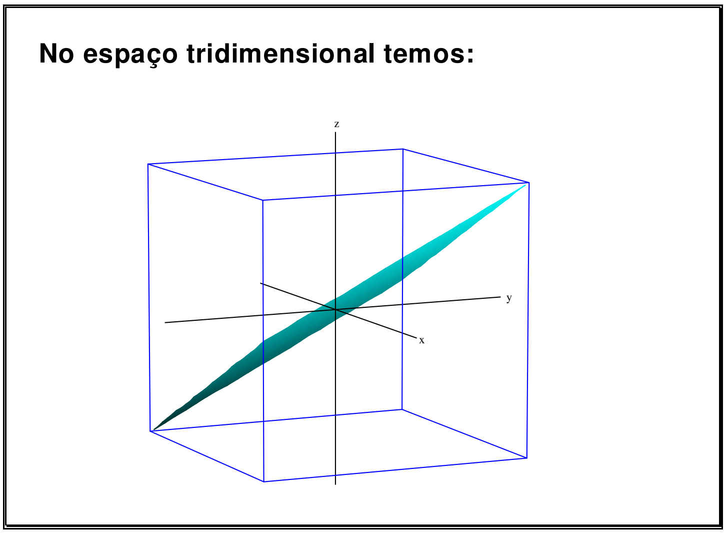
tela 58



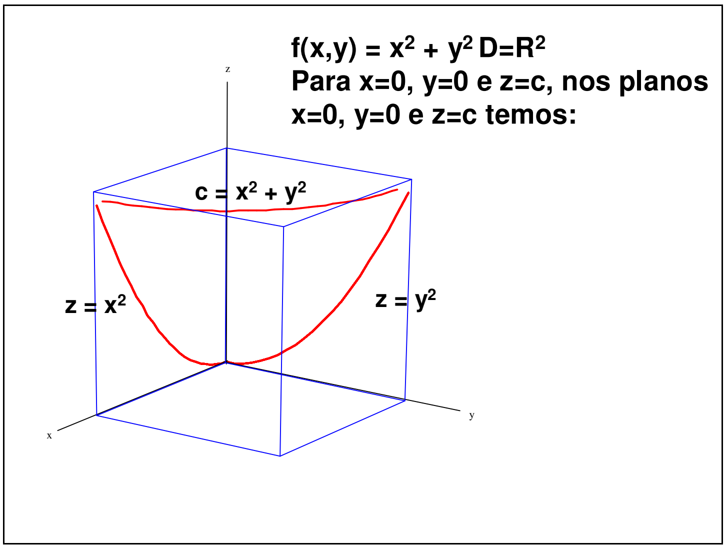
tela 59



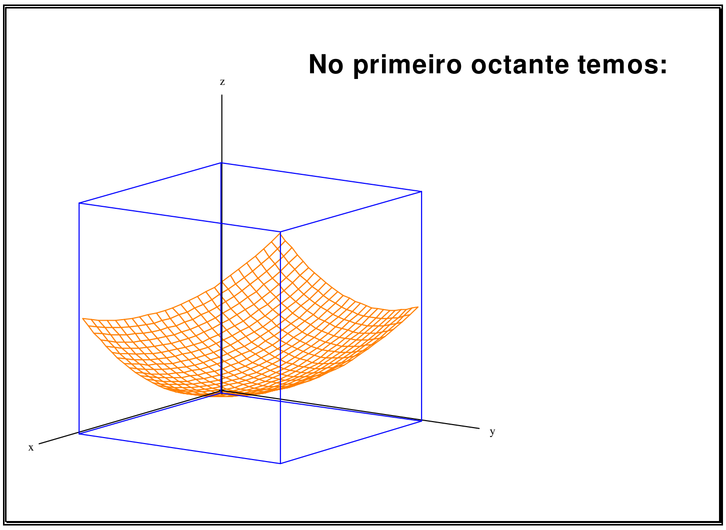
tela 60



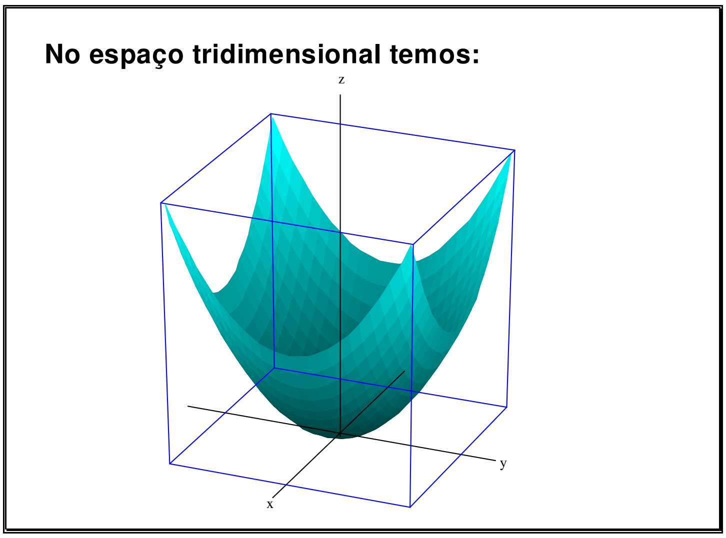
tela 61



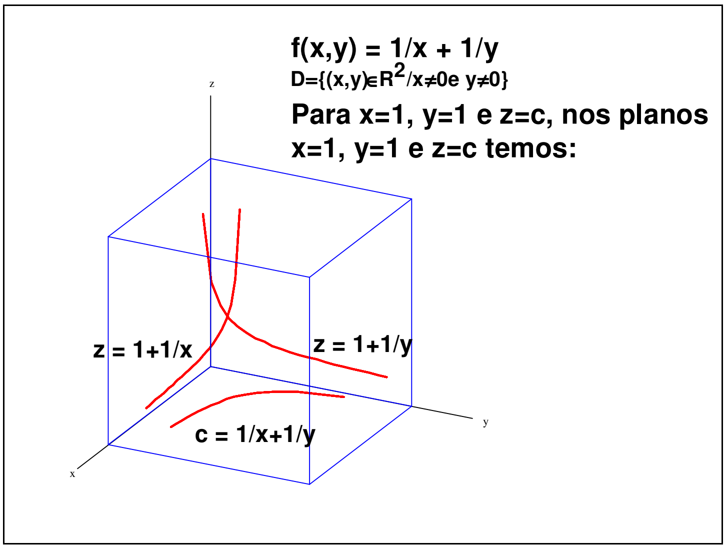
tela 62



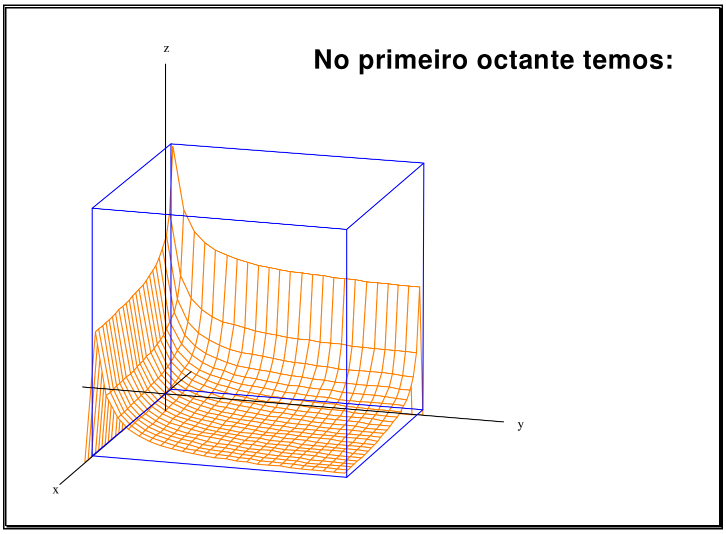
tela 63



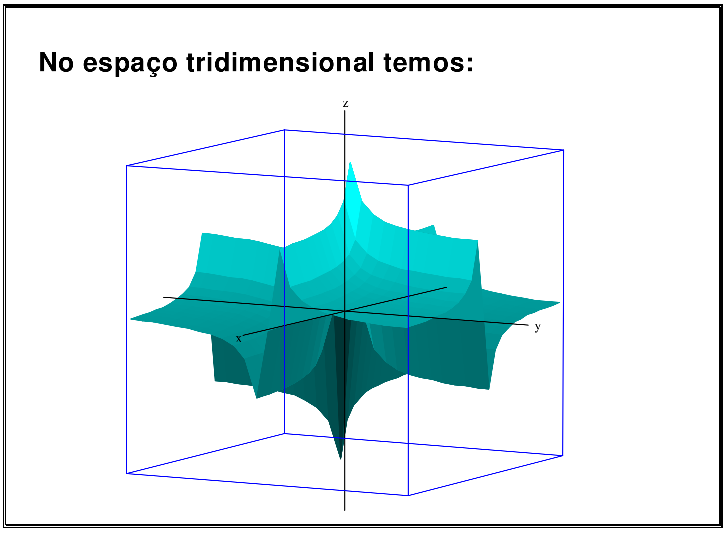
tela 64



tela 65



tela 66



tela 67

As telas seguintes exploram alguns comandos e particularidades do software para em seguida realizar-se uma seqüência de exercícios.

EXPLORANDO O MENU DO WINPLOT

- **Para configurar a tela selecionamos: janela 3D.**
- **Para configurar eixos selecionamos: ver, eixos, mostrar nomes.**
- **Para configurar o visual selecionamos: ver, caixa, cubo.**
- **Para digitar a equação selecionamos: equação, explícita, espectro, cor.**
- **Para retornar à equação selecionamos: equação, inventário.**

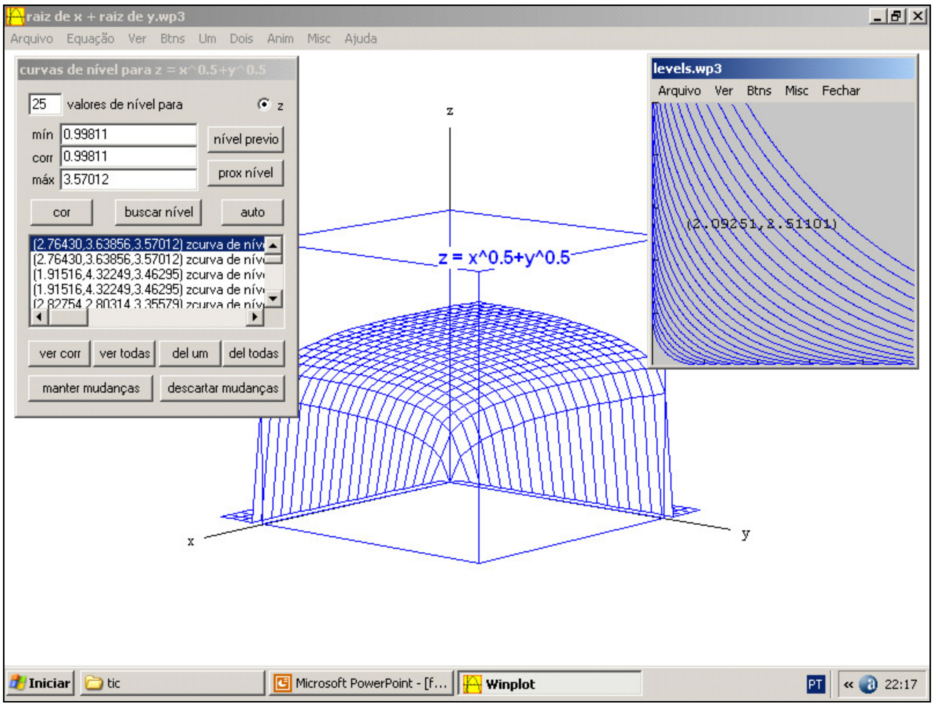
tela 68

OBSERVAÇÔES IMPORTANTES

- **Os gráficos podem ser rotacionados usando as setas p/ cima, p/ baixo, p/ esquerda, p/ direita. Caso saia da tela, use: ver, enquadrar janela.**
- **É possível fazer cortes horizontais, as chamadas curvas de nível, selecionando equações, inventário, níveis, auto e ver todas. Ou então construí-las, usando equação paramétrica e determinando uma cota para z.**
- **De acordo com o tipo de função, os limites dos valores de x e y podem ser modificados junto com a equação e também nos parâmetros da caixa.**

tela 69

Trabalhando com a função f(x,y) = $x^{1/2} + y^{1/2}$ D=R^2+, pode-se explorar alguns recursos do software tais como rotação dos eixos e curvas de nível.



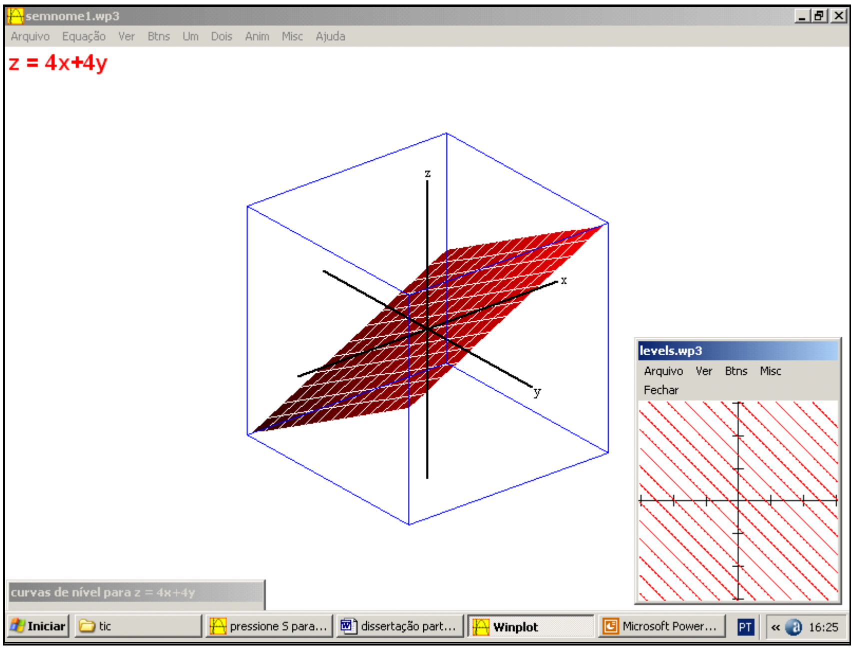
tela 70

CONSTRUA O GRÁFICO, EXPLORE ROTAÇÃO E CURVAS DE NÌVEL DAS FUNÇÕES

1) $f(x,y) = 4x + 4y$ D=R^2
2) $f(x,y) = x^2 + y^2$ D=R^2
3) $f(x,y) = 1/x + 1/y$ D={(x,y)∈R^2/x≠0e y≠0}
4) $f(x,y) = x^2 - y^2$ D=R^2
5) $f(x,y) = x^3 - y^3$ D=R^2
6) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$ D=R^2
7) $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$ D=R^2
8) $f(x,y) = x^3y + y^3x$ D=R^2
9) $f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ D=R^2
10) $f(x,y) = y - x^2$ D=R^2

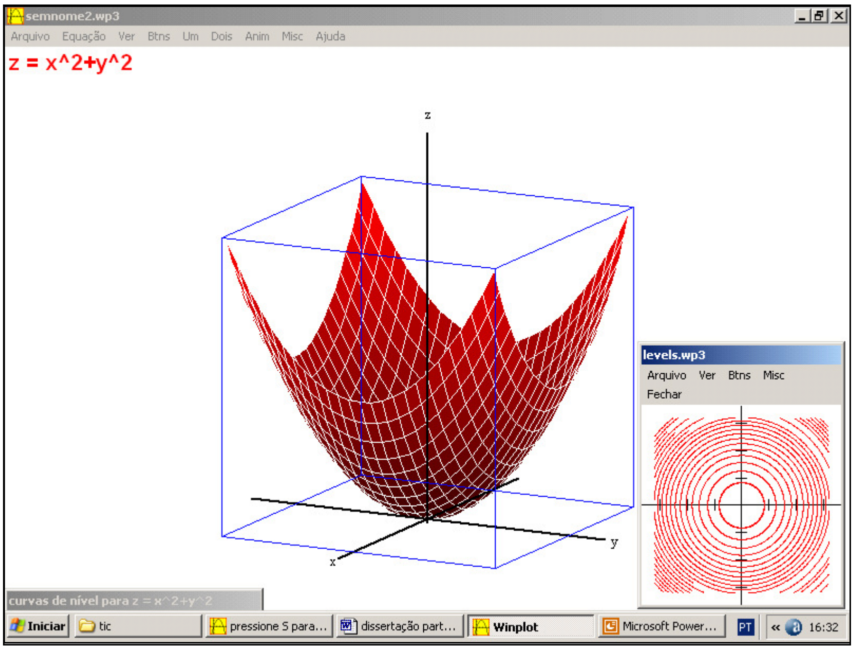
tela 71

Seqüência de exercícios para o aluno explorar o software e características de algumas funções usuais. Será explorado junto da construção, o recurso curvas de nível.



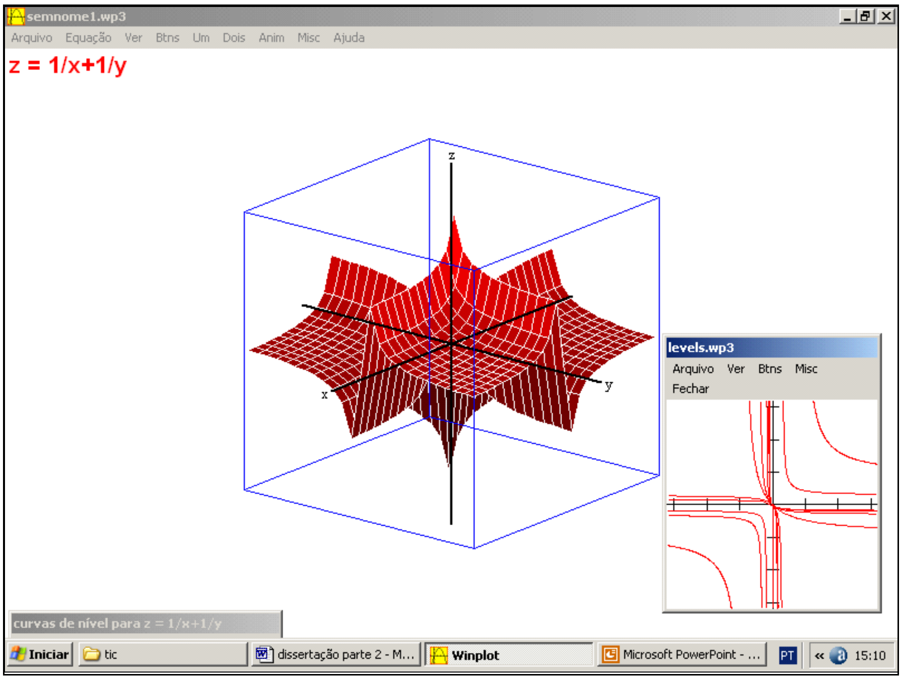
tela 72

O gráfico da função é um plano, não apresenta pontos de descontinuidade, não apresenta pontos críticos e na tela menor podemos observar que as curvas de nível são retas.



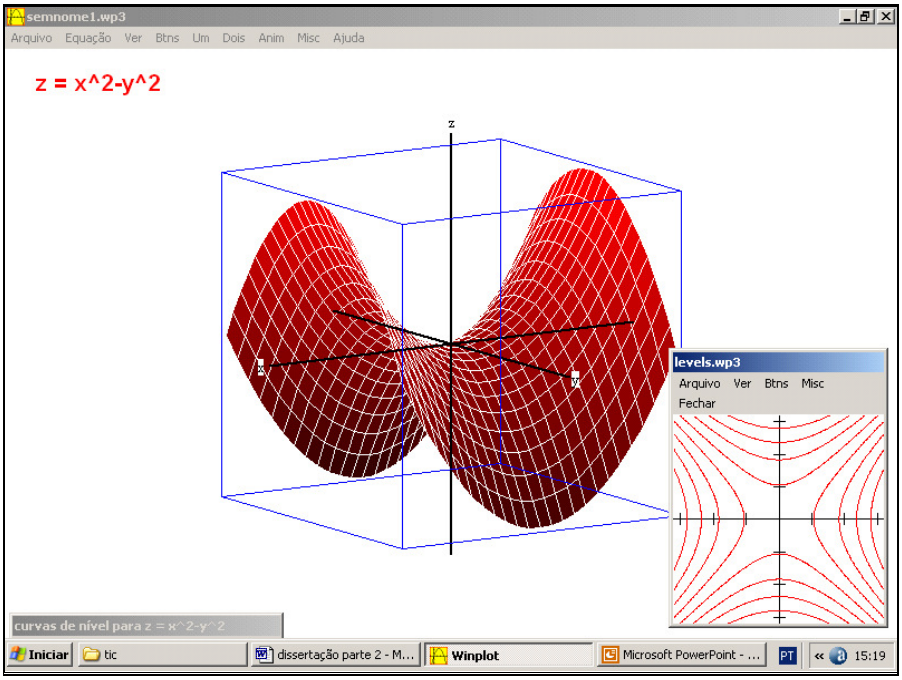
tela 73

O gráfico da função é um parabolóide elíptico (curvas de nível são elipses) para cima, não apresenta pontos de descontinuidade, apresenta um ponto de mínimo na origem e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são circunferências.



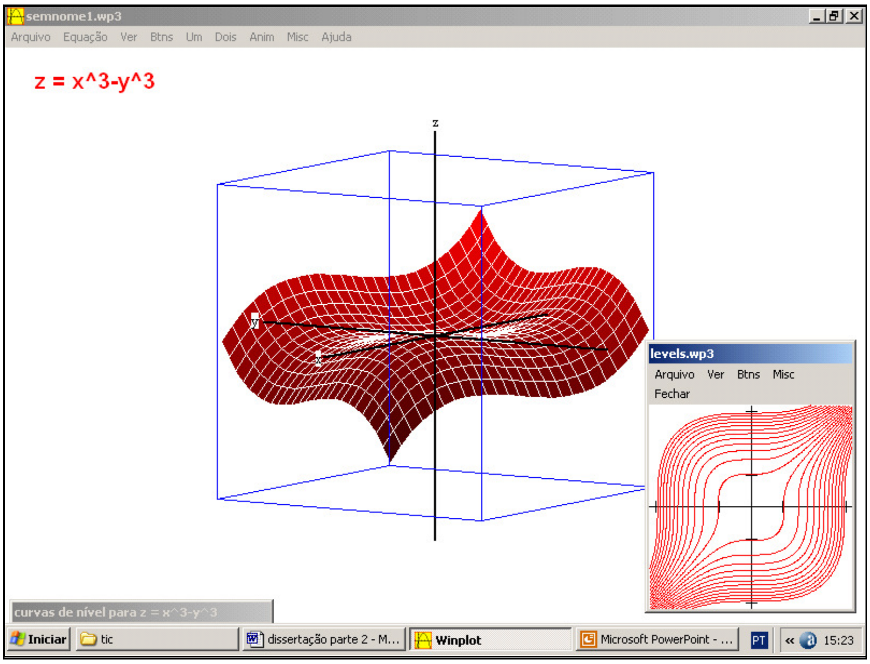
tela 74

O gráfico da função é parabolóide hiperbólico (curvas de nível são hipérboles), apresenta ponto de descontinuidade na origem, não apresenta pontos críticos e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são hipérboles.



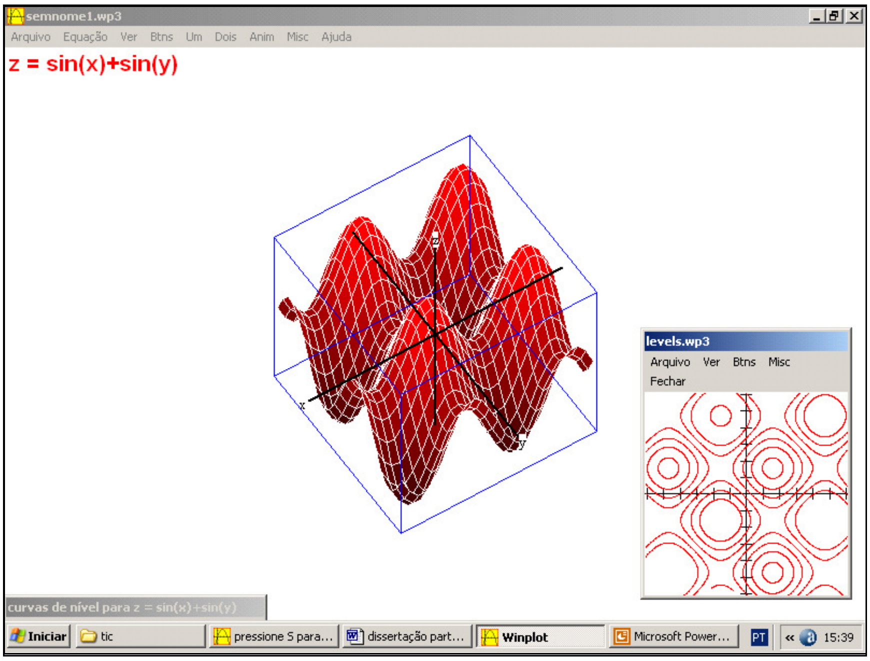
tela 75

O gráfico da função é parabolóide hiperbólico, não apresenta pontos de descontinuidade, apresenta um ponto de sela na origem e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são hipérboles.



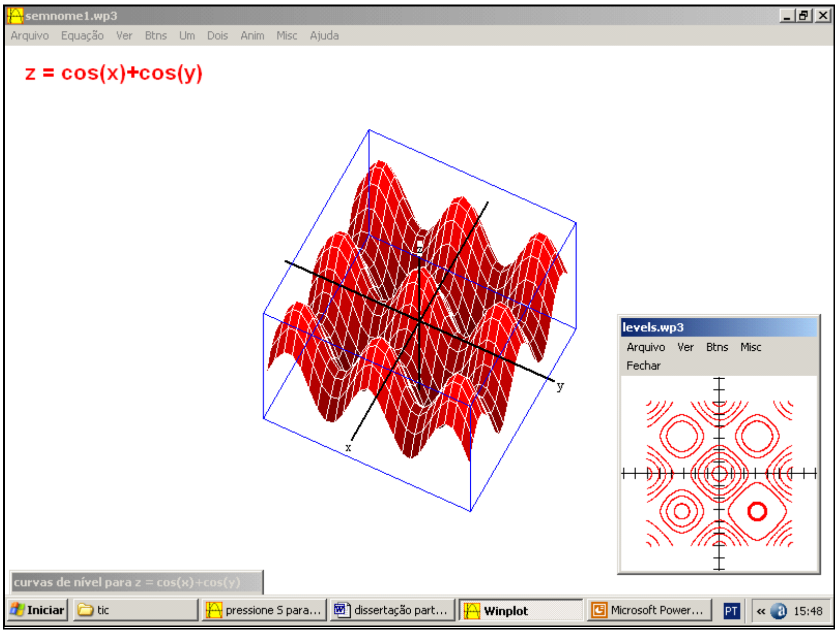
tela 76

O gráfico da função é um parabolóide hiperbólico, não apresenta pontos de descontinuidade, não apresenta pontos críticos e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são hipérboles.



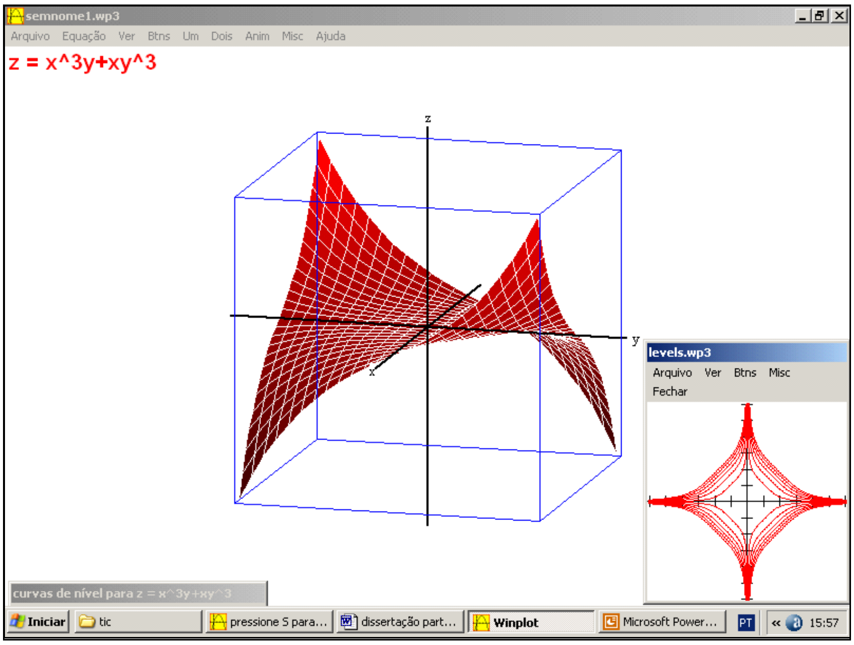
tela 77

O gráfico da função é um parabolóide elíptico, não apresenta pontos de descontinuidade, apresenta infinitos pontos de máximo local, infinitos pontos de mínimo local e infinitos pontos de sela. Na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são elipses.



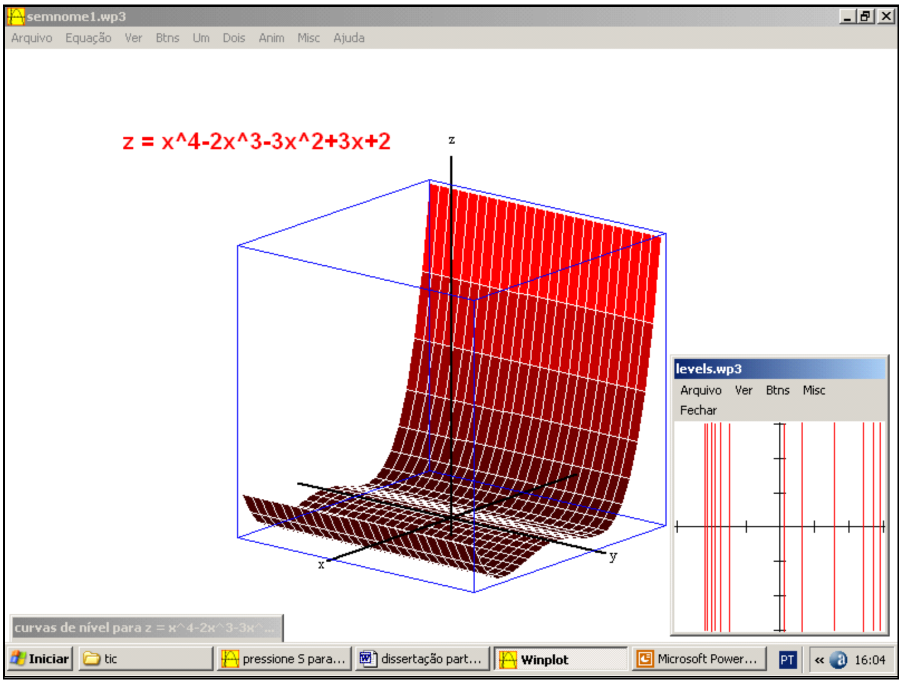
tela 78

O gráfico da função é um parabolóide elíptico, não apresenta pontos de descontinuidade, apresenta infinitos pontos de máximo local, infinitos pontos de mínimo local e infinitos pontos de sela.Na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são elipses.



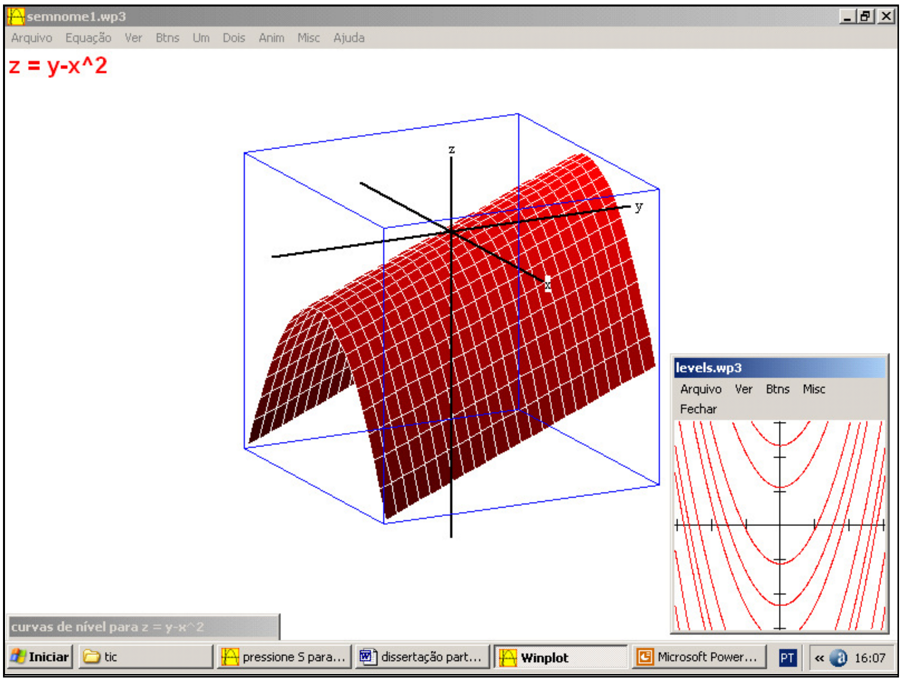
tela 79

O gráfico da função é parabolóide hiperbólico, não apresenta pontos de descontinuidade, apresenta um ponto de sela na origem e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são hipérboles.



tela 80

O gráfico da função é um cilindro parabólico, não apresenta pontos de descontinuidade, não apresenta pontos críticos e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são retas.



tela 81

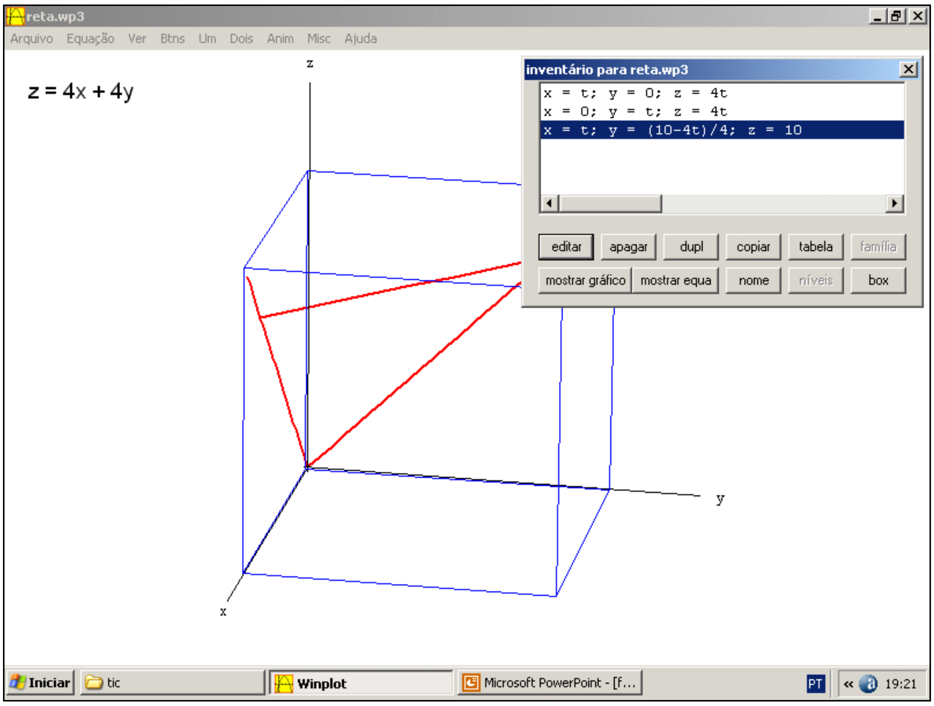
O gráfico da função é um cilindro parabólico, não apresenta pontos de descontinuidade, não apresenta pontos críticos e na tela menor pode-se observar que as curvas de nível são parábolas.

• Para fazer os cortes verticais nos planos XZ e YZ como foi feito na introdução, é necessário zerar uma das variáveis, para isso as equações devem estar na forma paramétrica. Por, exemplo se estamos com a função f(x,y) = $x^2 + y^2$ e queremos o corte XZ, x será t, y será 0 e z será t^2.

•Trabalhe agora com algumas das funções anteriores, mostrando apenas os cortes verticais.

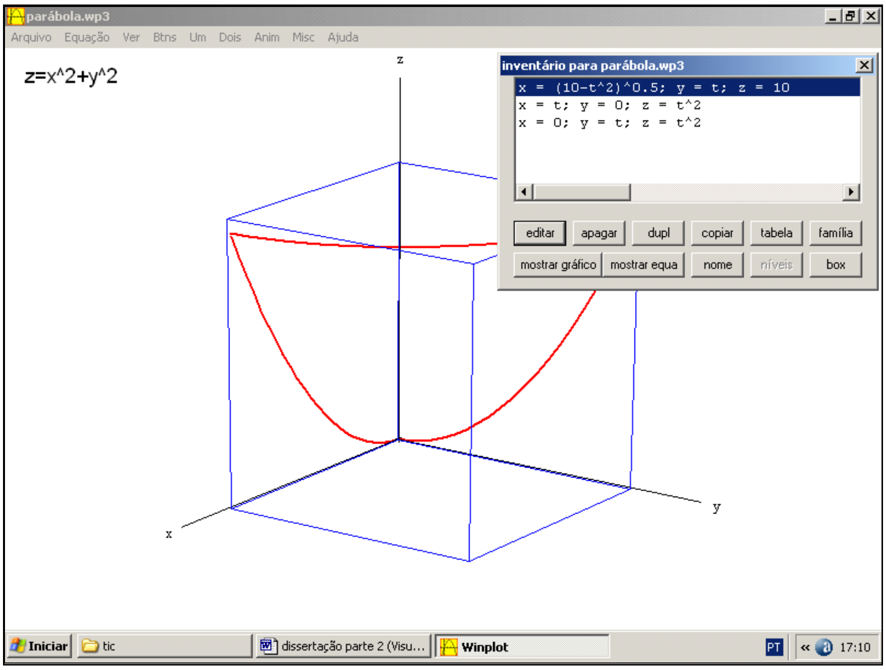
tela 82

Seqüência didática para o aluno explorar a equação da função na forma paramétrica. Isso vai permitir que se trabalhe em separado com os planos XZ, YZ e XY (em alguma cota de z).



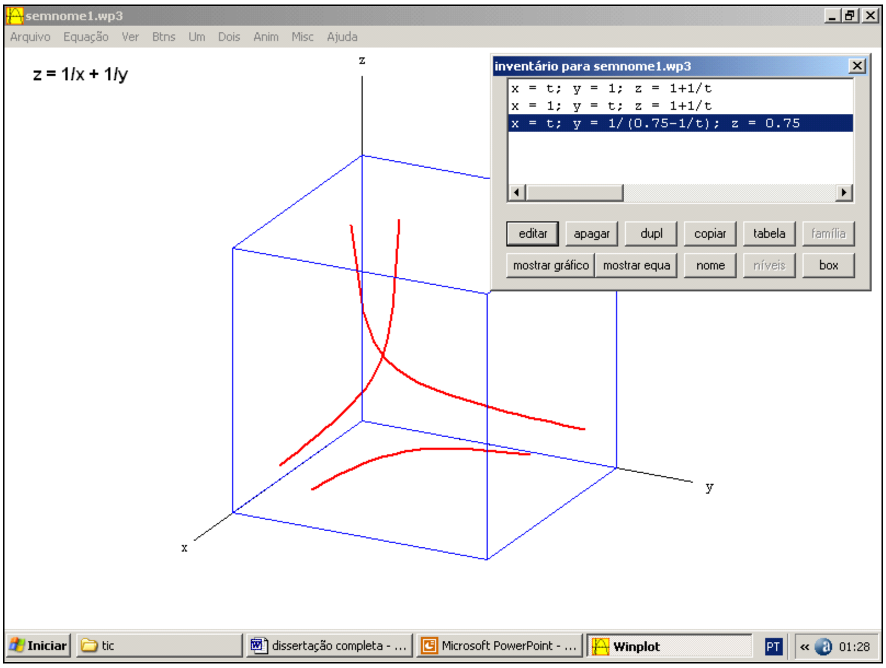
tela 83

Na função z = 4x + 4y D=R^2, se y = 0 e x = t então z = 4t. Se x = 0 e y = t então z = 4t. No nível z = 10 tem-se 4x + 4y = 10, se x = t então y = (10 – 4t)/4



tela 84

Na função $z = x^2 + y^2$ $D=R^2$, se $y = 0$ e $x = t$ então $z = t^2$. Se $x = 0$ e $y = t$ então $z = t^2$. No nível $z = 10$ tem-se $x^2 + y^2 = 10$, se $x = t$ então $y = (10 - t^2)^{1/2}$



tela 85

Na função $z = 1/x + 1/y$ $D = \{(x, y) \in R^2 / x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$, se $y = 1$ e $x = t$ então $z = 1 + 1/t$. Se $x = 1$ e $y = t$ então $z = 1 + 1/t$. No nível $z = 0,75$ tem-se $1/x + 1/y = 0,75$, se $x = t$ então $y = 1/(0.75 – 1/t)$

2.4 Derivadas Parciais, Pontos Máximos, Mínimos e Sela (Módulo 4)

O objetivo desse módulo é fazer uma visualização das derivadas parciais, pontos máximos, mínimos e sela para funções com duas variáveis isto é $z = f(x,y)$. Para isso, usa-se uma das muitas capacidades do programa Winplot.

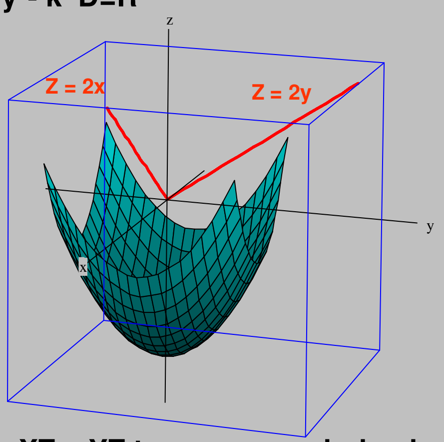
A estratégia de abordagem do assunto leva em conta que se reduzir a análise, num primeiro momento, ao que ocorre apenas entre duas variáveis, a questão fica mais simples e uma noção do todo começa a se esboçar.

Segue-se assim para o uso do software Winplot que realizará essa tarefa com grandes opções de recursos visuais.

- **A idéia é que fixando uma das variáveis, x ou y e pensando no que ocorre entre z e a outra variável, teremos uma relação no R^2.**
- **Por exemplo, na função $z = x^2 + y^2 - k$, se zeramos o y, ficaremos no plano XZ com a função $z = x^2 - k$. Quando zeramos x, ficaremos no plano YZ com a função $z = y^2 - k$. Assim fazendo as derivadas dessas funções do R^2, obteremos o que chamamos de derivadas parciais.**
- **Da mesma maneira que fazemos para funções de uma variável, se igualarmos as derivadas parciais a zero teremos um ponto crítico dessa função de duas variáveis que pode ser máximo, mínimo ou sela como veremos a seguir.**

tela 86

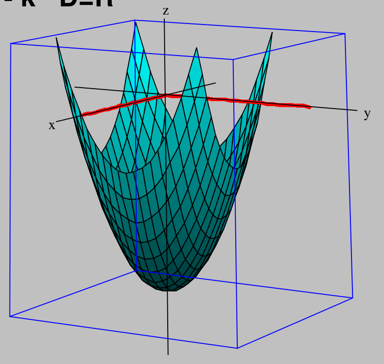
$f(x,y) = x^2+y^2- k$ $D=R^2$



Nos planos XZ e YZ temos como derivadas parciais as retas $z = 2x$ e $z = 2y$

tela 87

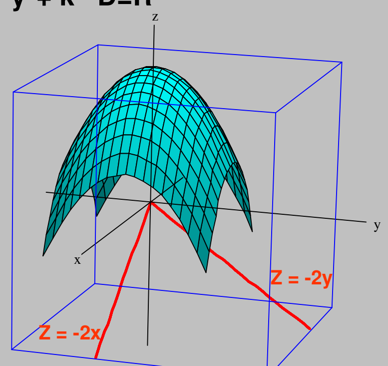
$f(x,y) = x^2+y^2- k \quad D=R^2$



No ponto de mínimo temos 2x = 0 e 2y = 0 logo (0,0,-k) é ponto mínimo da função

tela 88

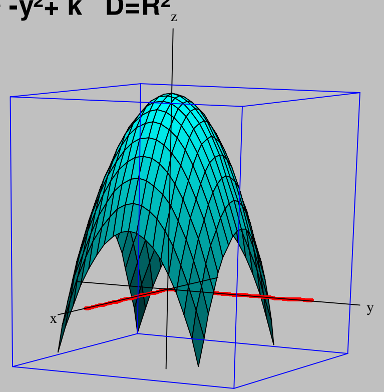
$f(x,y) = -x^2 -y^2+ k \quad D=R^2$



Nos planos XZ e YZ temos como derivadas parciais as retas z = - 2x e z = - 2y

tela 89

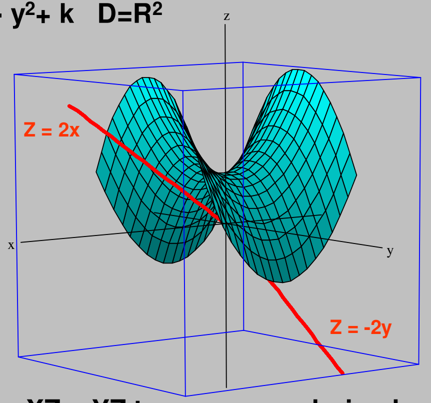
$f(x,y) = -x^2 -y^2+ k \quad D=R^2$



No ponto de máximo temos 2x = 0 e 2y = 0 logo (0,0,k) é ponto máximo da função.

tela 90

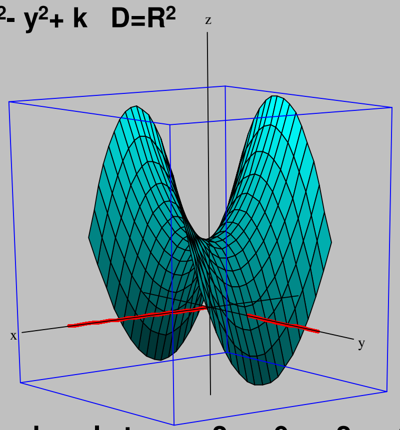
$f(x,y) = x^2 - y^2 + k \quad D=R^2$



Nos planos XZ e YZ temos como derivadas parciais as retas z = 2x e z = - 2y

tela 91

$f(x,y) = x^2 - y^2 + k \quad D=R^2$



No ponto de sela temos 2x = 0 e - 2y = 0 logo (0,0,k) é ponto de sela da função

tela 92

- **Quando não é possível visualizar a função, não podemos de imediato dizer se o ponto crítico é de máximo, de mínimo ou de sela. Daí usaremos as derivadas parciais de segunda ordem que como vetores, têm direção e sentido. Isto aplicado ao determinante Hessiano nos permite determinar um vetor final que terá uma tendência que nos permite dizer se o ponto é máximo, mínimo ou sela.**

Vejamos um caso: $f(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 2xy + 10x - 2y$

$f_x = -2x+2y+10=0 \qquad P(7,2) \qquad f_{xx}= -2 \quad f_{xy}= 2$

$f_y = -6y+2x-2=0 \qquad f_{yy}= -6 \quad f_{yx}= 2$

$H = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 8 \qquad H>0 \text{ e } f_{xx}<0$

P(7,2) ponto de máximo

OBS: Se Hessiano < ou = 0, então é inconclusivo e vamos analizar pelas vizinhanças de P.

tela 93

As telas seguintes exploram alguns comandos e particularidades do software para em seguida realizar-se uma seqüência de exercícios.

EXPLORANDO O MENU DO WINPLOT

- **Para configurar a tela selecionamos: janela 3D.**
- **Para configurar eixos selecionamos: ver, eixos, mostrar nomes.**
- **Para configurar o visual selecionamos: ver, caixa, cubo.**
- **Para digitar a equação selecionamos: equação, explícita, espectro, cor.**
- **Para retornar à equação selecionamos: equação, inventário.**

tela 94

OBSERVAÇÔES IMPORTANTES

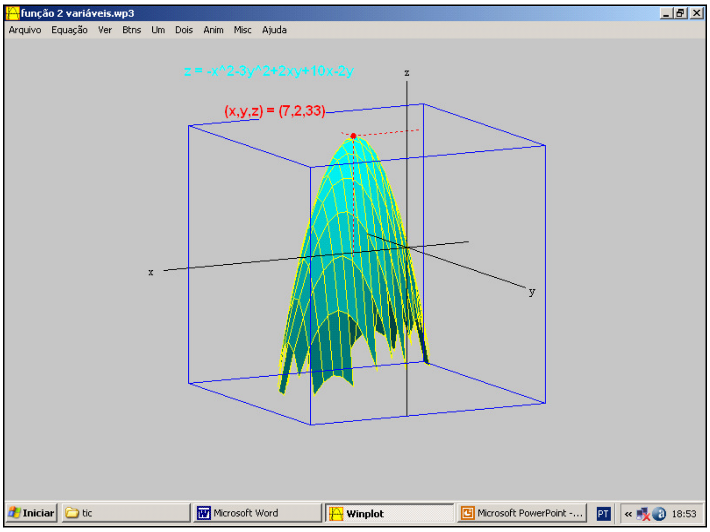
- **Os gráficos podem ser rotacionados usando as setas p/ cima, p/ baixo, p/ esquerda, p/ direita. Caso saia da tela, use: ver, enquadrar janela.**

- **É possível fazer cortes horizontais, as chamadas curvas de nível, selecionando equações, inventário, níveis, auto e ver todas. Ou então construí-las, usando equação paramétrica e determinando uma cota para z.**

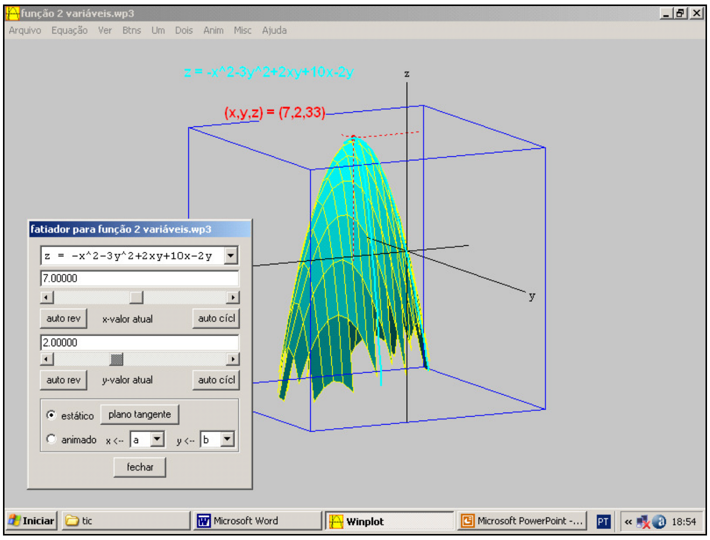
- **De acordo com o tipo de função, os limites dos valores de x e y podem ser modificados junto com a equação e também nos parâmetros da caixa.**

tela 95

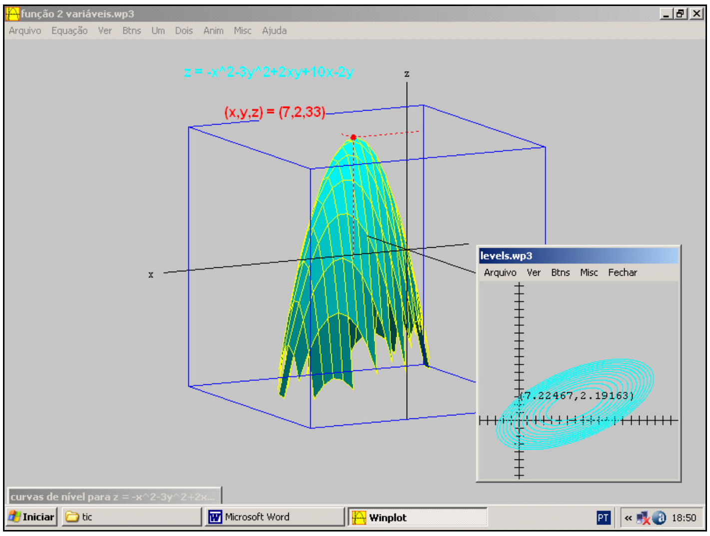
Trabalhando com a função a seguir, pode-se explorar alguns recursos do software tais como rotação dos eixos, curvas de nível, coordenadas de um ponto, fatiador (faz cortes verticais no gráfico) e estimar aproximadamente eventuais pontos críticos da mesma.



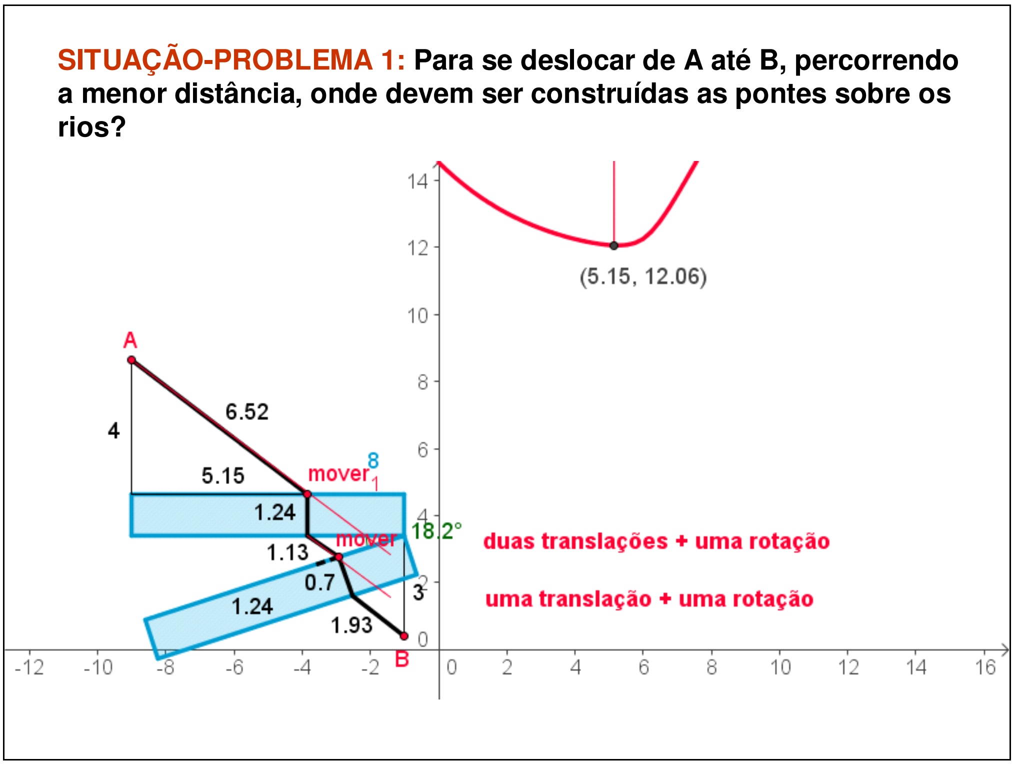
tela 96



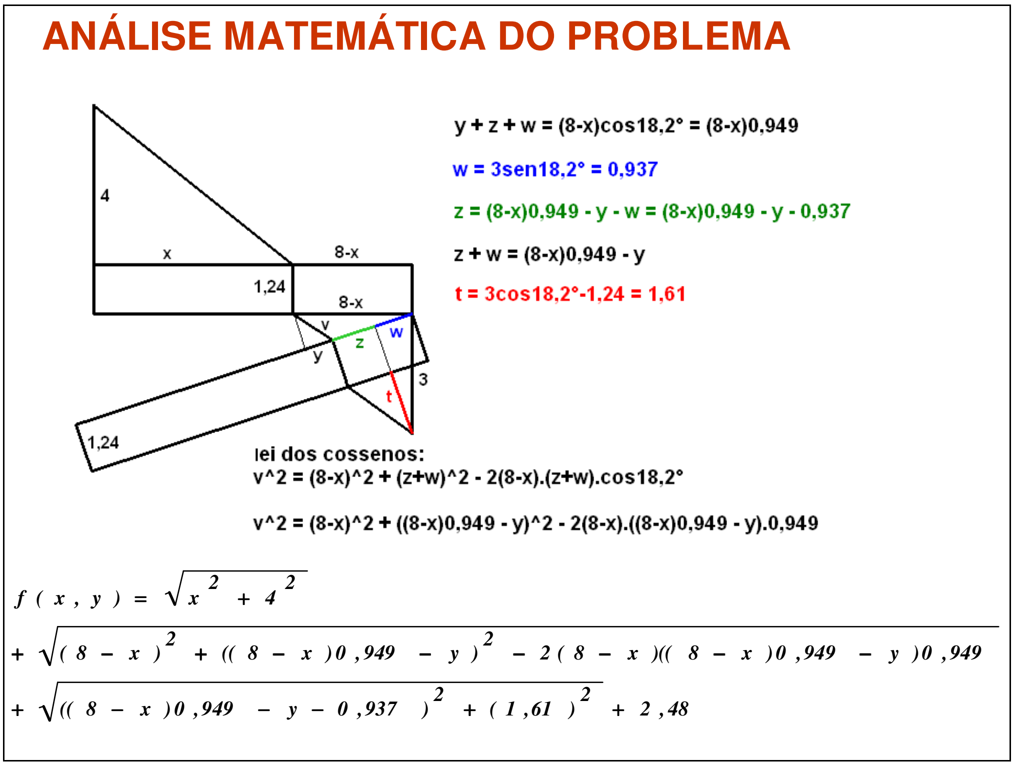
tela 97



tela 98

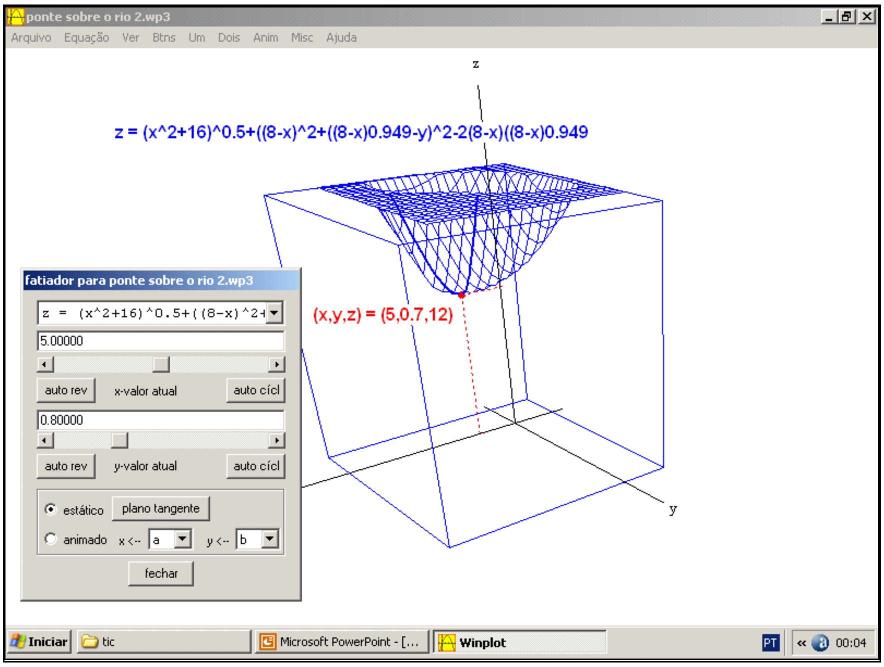


tela 99

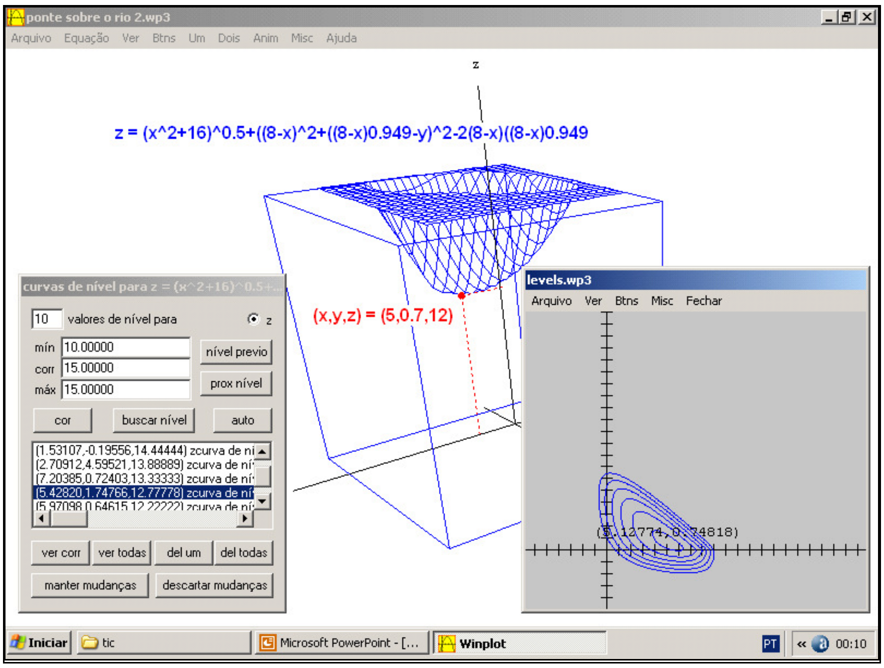


tela 100

O problema, clássico em livros de geometria, tem originalmente solução geométrica realizada por translação e rotação. Traz condições que são as distâncias das casas ao rio, a distância entre as casas na horizontal, a largura dos rios e o ângulo formado entre eles. Essas informações produzem uma função com duas variáveis que gera o valor do trajeto. Construída a situação dinâmica com o software Geogebra, dois pontos móveis produzem a variação do valor desse trajeto. Transportando a função para o software Winplot, pode-se analisar seu gráfico tridimensional e usando recursos como rotação dos eixos, curvas de nível, coordenadas de um ponto e o fatiador (faz cortes verticais no gráfico), estimar aproximadamente a solução gráfica que coincide com a solução geométrica.

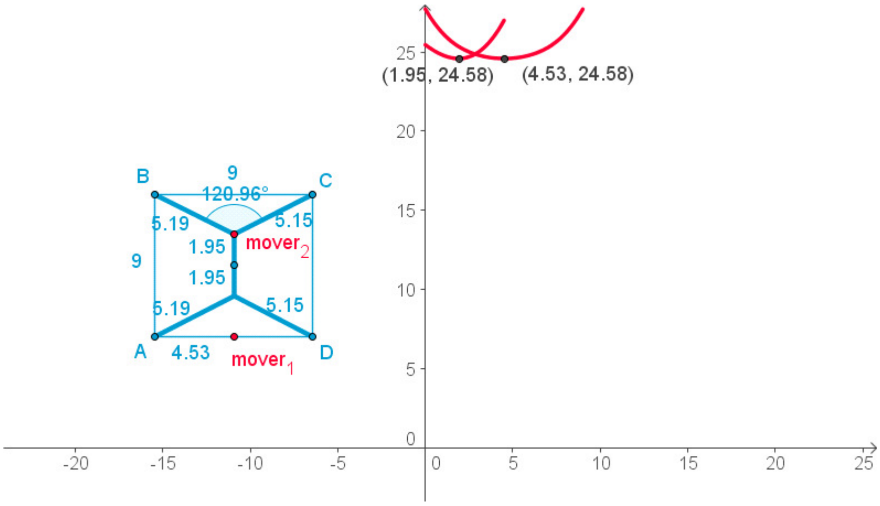


tela 101



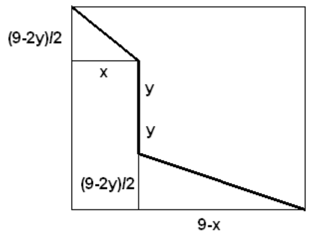
tela 102

SITUAÇÃO-PROBLEMA 2: Se quisermos construir estradas ligando as quatro cidades, qual é a configuração da malha viária mais curta possível?



tela 103

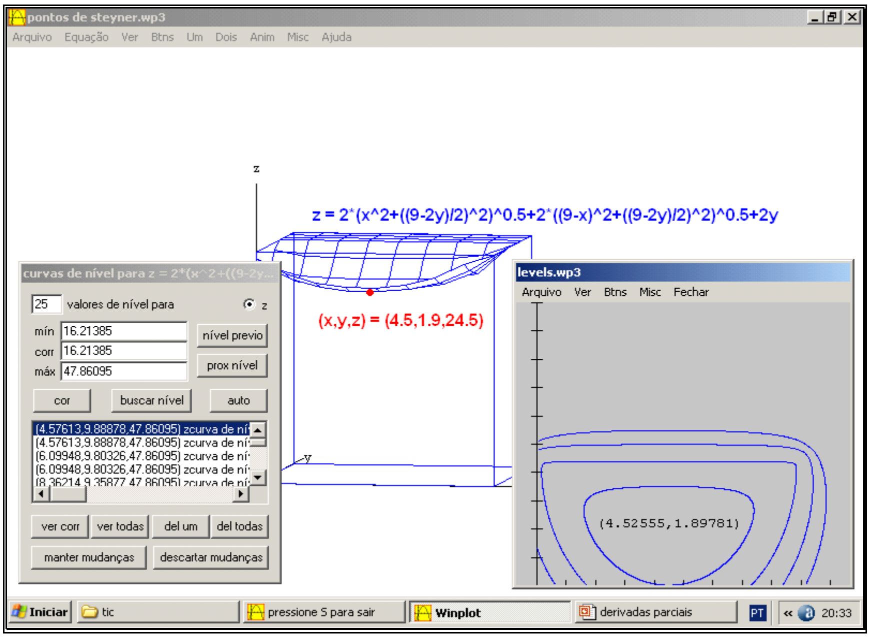
ANÁLISE MATEMÁTICA DO PROBLEMA



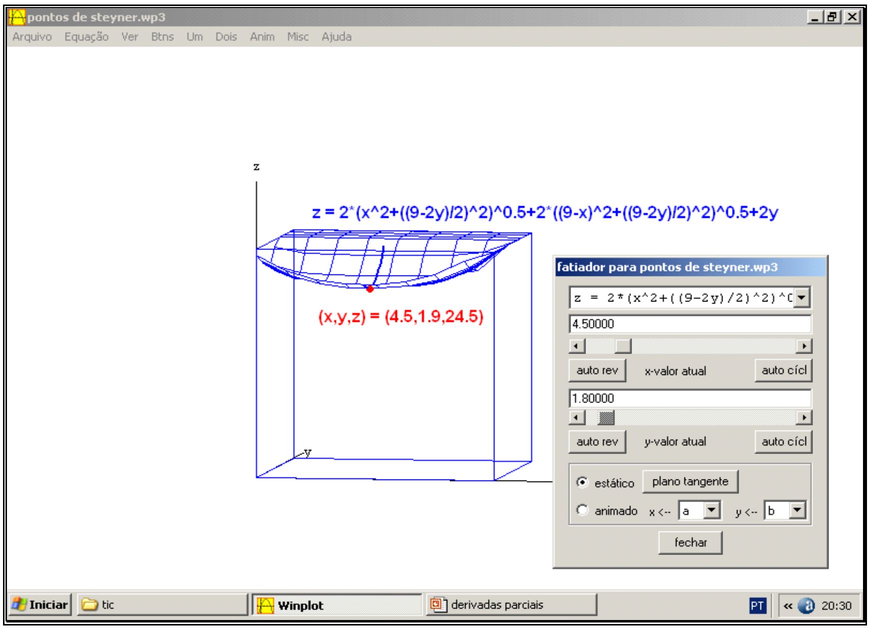
$$F(x,y)=2\sqrt{x^2+((9-2y)/2)^2}+2\sqrt{(9-x)^2+((9-2y)/2)^2}+2y$$

tela 104

O problema, citado na introdução como fonte de inspiração desse trabalho e presente no artigo "Jacob Steiner e o problema da menor malha viária" (José Luiz Pastore Mello, 2006), tem originalmente solução geométrica. Foi resolvido no Módulo 2 como função de uma variável, agora será abordado como função de duas variáveis.Traz condições que são a disposição entre as quatro cidades e suas distâncias. Essas informações produzem uma função com duas variáveis que gera o valor do trajeto. Construída a situação dinâmica com o software Geogebra, dois pontos móveis produzem a variação do valor desse trajeto. Transportando a função para o software Winplot, pode-se analisar seu gráfico tridimensional e usando recursos como rotação dos eixos, curvas de nível, coordenadas de um ponto e o fatiador (faz cortes verticais no gráfico), estimar aproximadamente a solução gráfica que coincide com a solução geométrica.



tela 105



tela 106

As telas seguintes exploram algumas aplicações de funções com duas variáveis e derivadas parciais na Economia.

Na economia, a função Produção relaciona a quantidade produzida com os insumos necessários à essa produção. Um modelo muito utilizado, introduzido pelo economista Paul Douglas e pelo matemático Charles Cobb (ambos americanos), é a função Cobb-Douglas:

$\boxed{P = f(K,L) = A.K^{\alpha}.L^{1-\alpha}}$ onde P é a quantidade produzida, K é o capital empregado, L é a quantidade de trabalho envolvido, A depende da tecnologia utilizada e α é um parâmetro que varia de 0 a 1(rendimento de escala constante).

tela 107

A tela apresenta um modelo de função produção, usado na economia.

Considere a seguinte função produção:
$\boxed{P(X,Y) = 2X^{0.3}Y^{0.7}}$ onde P é a quantidade colhida (em toneladas), X é o nº de homens-hora empregados (em milhares) e Y o nº de hectares plantados. Determine a produtividade marginal do trabalho, a produtividade marginal da terra e analise-as em alguns pontos.

Pmgtrab (derivada de P com relação a x) =

$0.6X^{-0.7}Y^{0.7} = \boxed{0.6(Y/X)^{0.7}}$

Pmgterra (derivada de P com relação a y) =

$1.4X^{0.3}Y^{-0.3} = \boxed{1.4(X/Y)^{0.3}}$

tela 108

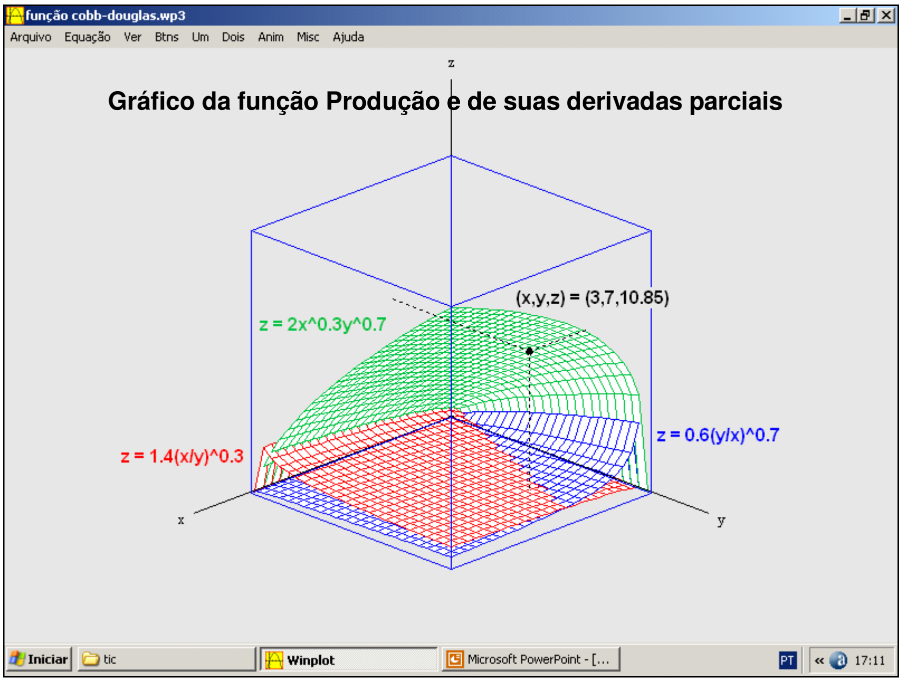
Um exemplo onde as idéias de derivadas parciais são utilizadas como ferramenta que permite uma análise do comportamento da função.

homens (x)	hectares (y)	Pmgtrabalho(dF/dx) 0.6(Y/X)^0.7	Pmgterra(dF/dy) 1.4(X/Y)^0.3
2	2	0,6	1,4
20	20	0,6	1,4
3	3	0,6	1,4
30	30	0,6	1,4
2	3	0,796920744	1,239654491
3	2	0,451738774	1,58108571
3	7	1,085762905	1,085762905
30	70	1,085762905	1,085762905
1	10	3,007123402	0,701662127
10	1	0,119715739	2,793367241

- **Quando as quantidades dos insumos forem iguais, a terra gera mais produtividade.**
- **A produtividade não é regular, depende dos valores de x e y.**
- **Quando os insumos são proporcionais à sua eficiência, geram a mesma produtividade.**
- **Quando um dos insumos estiver abaixo da sua proporção com relação à eficiência, é ele que gera maior produtividade.**

tela 109

Alguns pontos escolhidos estrategicamente permitem conclusões relevantes sobre o comportamento da função.



tela 110

A análise integrada do comportamento da função e de suas derivadas parciais feita com o software Winplot, confere mais segurança às conclusões obtidas pela análise das derivadas parciais e apresenta um universo maior de possibilidades de previsão.

• Na economia, a função Demanda é formada pelo estudo da variação das quantidades e dos preços de um produto. Na prática isso é feito com um conjunto de produtos, normalmente concorrentes ou complementares. Isso gera uma função com mais de uma variável como veremos a seguir.

• Dada a função demanda da manteiga $F(x,y) = 1000 - 2x^2 + 10y$, onde x é o preço da manteiga e y o preço da margarina. Se x = 20 e y = 10, o que aumenta mais a demanda da manteiga, diminuir seu preço em uma unidade (mantendo o da margarina) ou aumentar a margarina em uma unidade (mantendo o da manteiga)? Justifique.

tela 111

Um problema de matemática aplicada em que a idéia de derivada parcial resolve a questão apresentada.

• Uma análise marginal da função nos leva à solução do problema:

$dF/dx = -4x$ $dF/dx(20,10) = -80$ o aumento de uma unidade no preço da manteiga, leva a uma queda de 80 unidades na sua demanda.

$dF/dy = 10$ $dF/dx(20,10) = 10$ o aumento de uma unidade no preço da margarina, leva a um aumento de 10 unidades na demanda da manteiga.

• Logo é preferível baixar o preço da manteiga em uma unidade para que sua demanda aumente em 80.

tela 112

Um problema de matemática aplicada em que a idéia de derivada parcial possibilita uma tomada de decisão.

• **Dada a função demanda de um produto A**

$F(x,y) = 30 - 4x - 2y$, onde x é o preço de A e y o preço de B. Determine se A e B são concorrentes ou complementares. Justifique.

• **Uma análise marginal da função nos leva à solução do problema:**
$dF/dx = -4$ o aumento de uma unidade no preço de A, leva a uma queda de 4 unidades na sua demanda.
$dF/dy = -2$ o aumento de uma unidade no preço de B, leva a uma queda de 2 unidades na demanda de A.
• **O aumento de preço de ambos afeta a demanda de A negativamente. Logo os produtos são complementares como por exemplo café e açúcar.**

tela 113

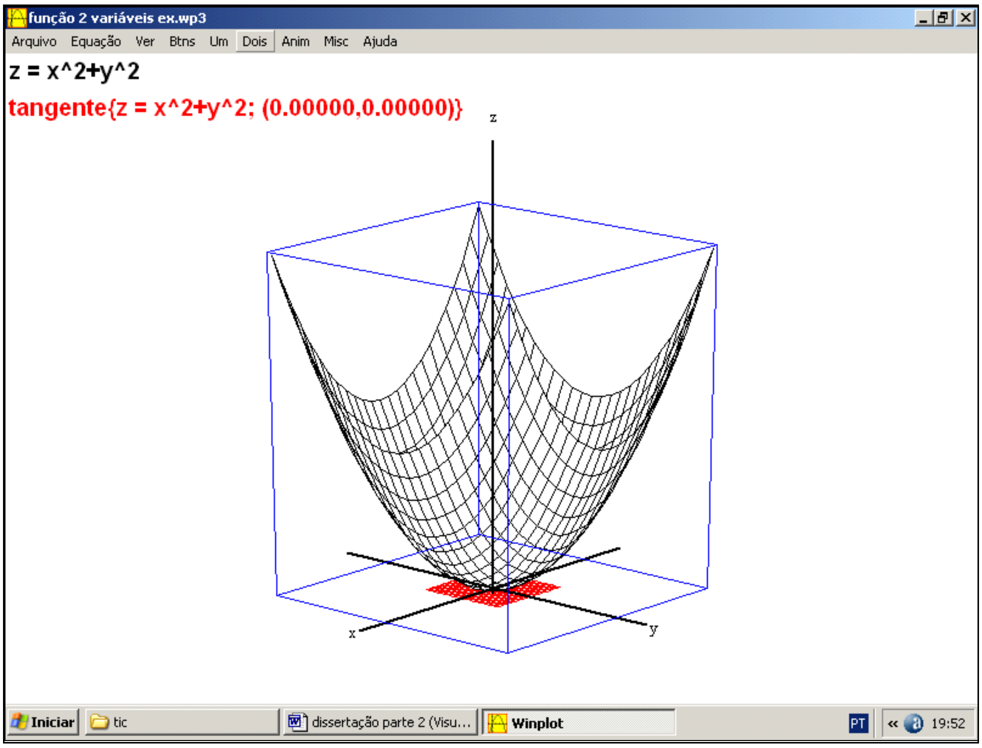
Um problema de matemática aplicada em que a idéia de derivada parcial conclui uma relação entre as variáveis da função.

CONSTRUA O GRÁFICO E EXPLORE MÁXIMOS, MÍNIMOS E SELA DAS FUNÇÕES
Use no menú: Um, fatiador.

1) $f(x,y) = 4x + 4y$ $D=R^2$	6) $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$ $D=R^2$
2) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $D=R^2$	7) $f(x,y) = \cos(x) + \cos(y)$ $D=R^2$
3) $f(x,y) = 1/x + 1/y$ $D=\{(x,y)\in R^2 / x\neq 0 e\ y\neq 0\}$	8) $f(x,y) = x^3y + y^3x$ $D=R^2$
4) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $D=R^2$	9) $f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ $D=R^2$
5) $f(x,y) = x^3 - y^3$ $D=R^2$	10) $f(x,y) = y - x^2$ $D=R^2$

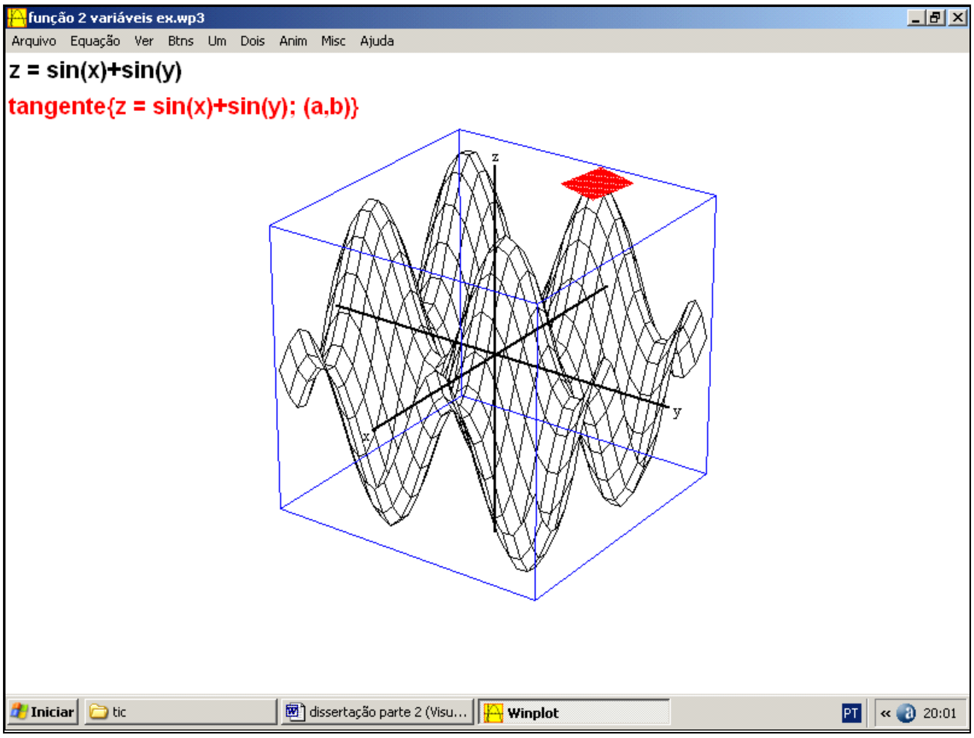
tela 114

Seqüência de exercícios para o aluno explorar o software e características de algumas funções usuais. Será explorado o recurso “fatiador” que evidencia pontos críticos.



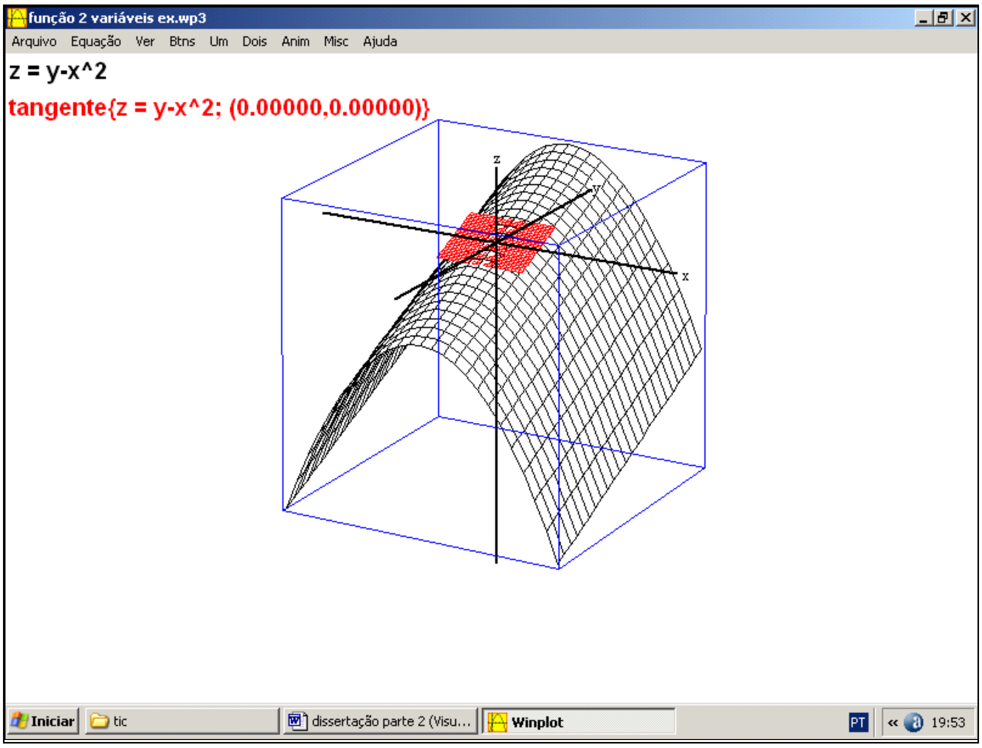
tela 115

O fatiador evidencia um ponto de mínimo através um plano tangente no ponto.



tela 116

O fatiador evidencia infinitos pontos de máximo locais, mínimo locais e sela através de um plano tangente em um desses pontos.

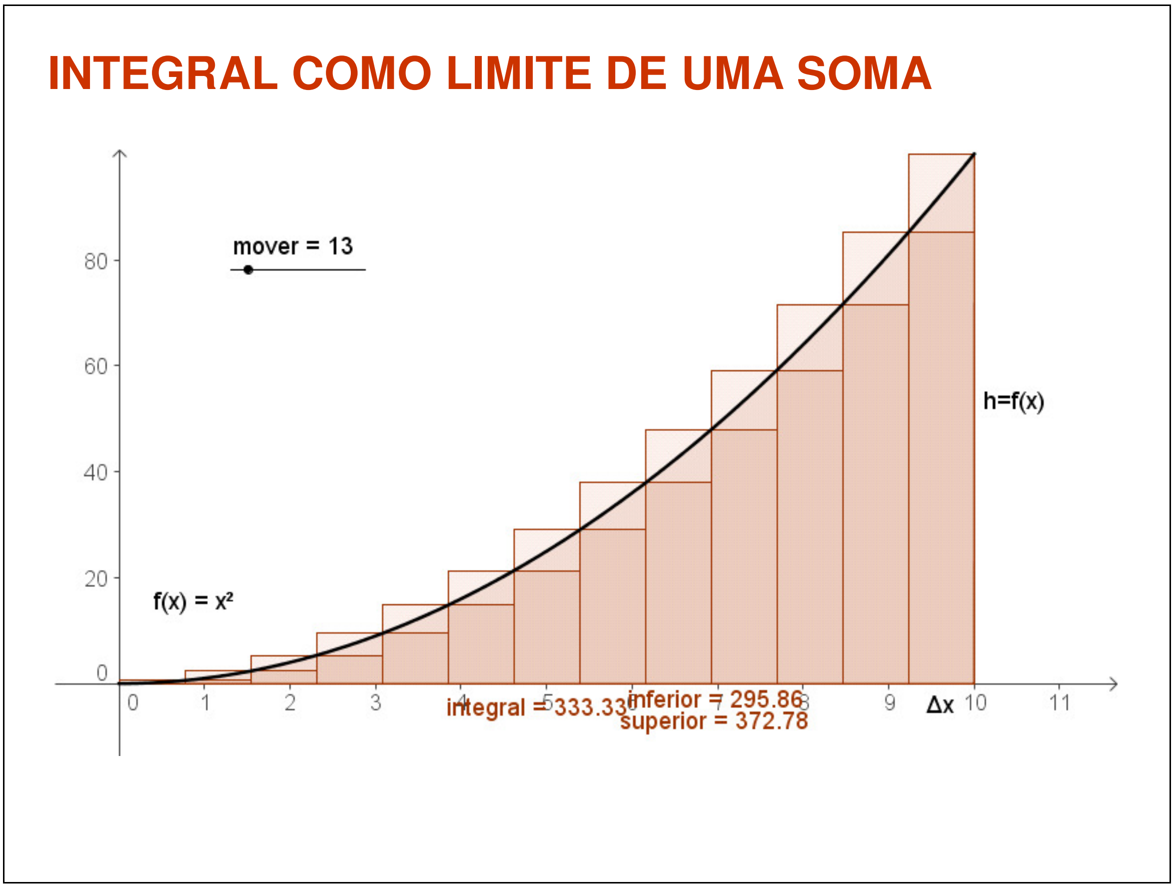


tela 117

O fatiador não detecta pontos críticos e, portanto, traça um plano tangente em infinitos pontos.

2.5 Integrais para Funções com Uma Variável (Módulo 5)

O objetivo desse módulo é fazer um estudo sobre integrais e cálculo de áreas para funções com uma variável. As telas seguintes apresentam a integral em alguns dos seus pontos de vista: como limite de uma soma de superfícies, como área resultante dessa soma e como uma outra função primitiva da função dada. Os softwares Geogebra e Winplot mostram-se poderosos aliados na tarefa de minimizar as dificuldades que a maioria dos alunos encontra em compreender esses diferentes pontos de vista, pois apresenta-os simultaneamente e permite que sejam feitas as variações e comparações que induzem às conclusões que se tem como objetivo.



tela 118

Tela dinâmica para explorar a idéia de integral definida como sendo a área situada entre a curva e o eixo das abscissas.

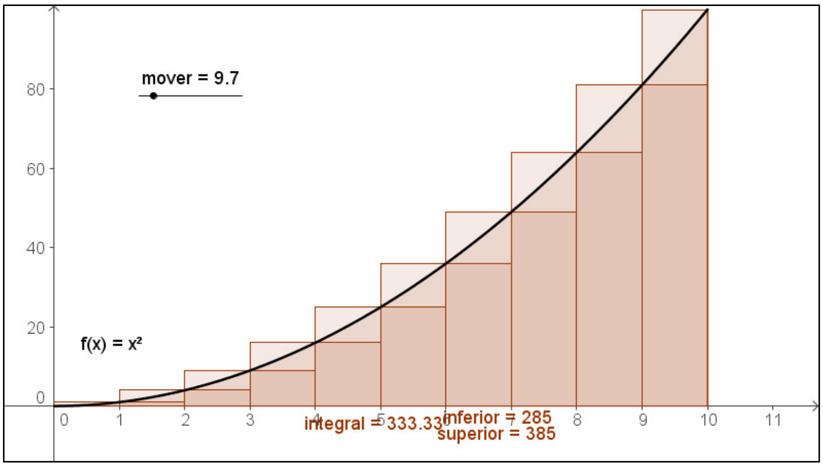
O deslocamento de um ponto sobre uma curva e a análise do que ocorre ao longo da trajetória é que induz ao conceito de integral.

Tomando dois pontos no eixo x, suas respectivas imagens no eixo y e traçando perpendiculares aos eixos por esses pontos, obtém-se um retângulo de base Δx e altura f(x). A área desse retângulo é próxima à área da figura formada pela curva e o eixo das abscissas entre os dois pontos do eixo x. Se fizer a distância entre esses dois pontos tender à zero, a área do retângulo será cada vez mais próxima à essa área . A integral definida da função entre dois extremos, nada mais é do que o limite da soma dos infinitos retângulos que existem entre os extremos, quando a base dos retângulos (Δx) tende à zero. Portanto a integral definida da função (em módulo) é a área que fica compreendida entre a curva da função e o eixo das abscissas, entre dois extremos considerados, quando a curva não intercepta o eixo das abscissas entre esses pontos.

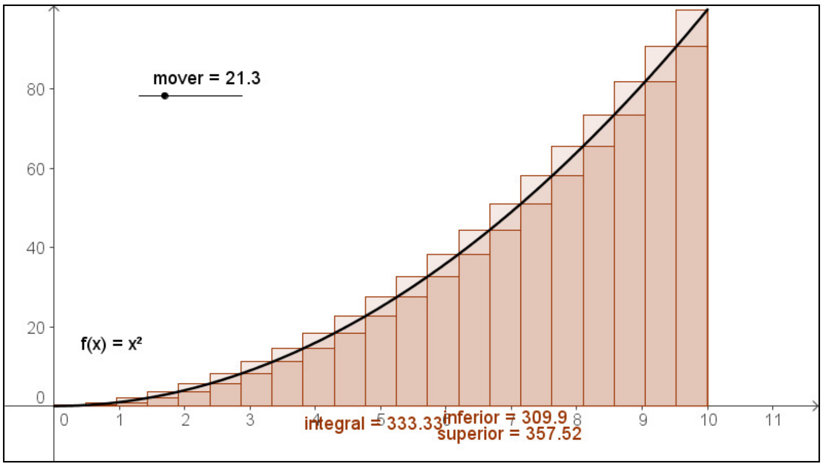
O software Geogebra apresenta um recurso denominado Seletor que permite a variação de um ponto em um intervalo de valores(na tela denominado mover). Quando usarmos o recurso integral da função, usaremos o ponto mover como extremo final da integração. Com isso, quando variarmos o ponto mover, a área que é o valor da integral definida, variará também.

O software Geogebra apresenta também os recursos Soma, Soma inferior e Soma superior que permitem o cálculo dos valores da integral definida, por falta e por excesso. Associando este recurso ao já visto Seletor, pode-se variar o Δx pelo Seletor e assim obter graus de precisão diferentes.

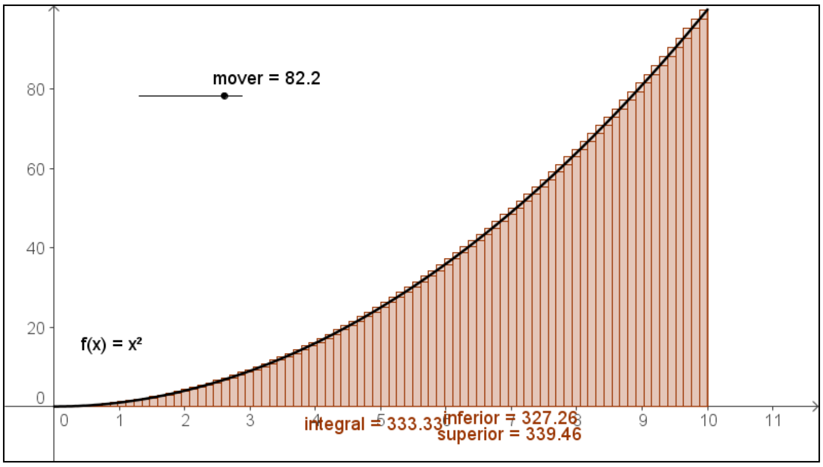
A seguir apresenta-se uma seqüência onde o ponto **mover**, foi deslocado à direita no eixo das abscissas, para diminuir a variação do x.



tela 119

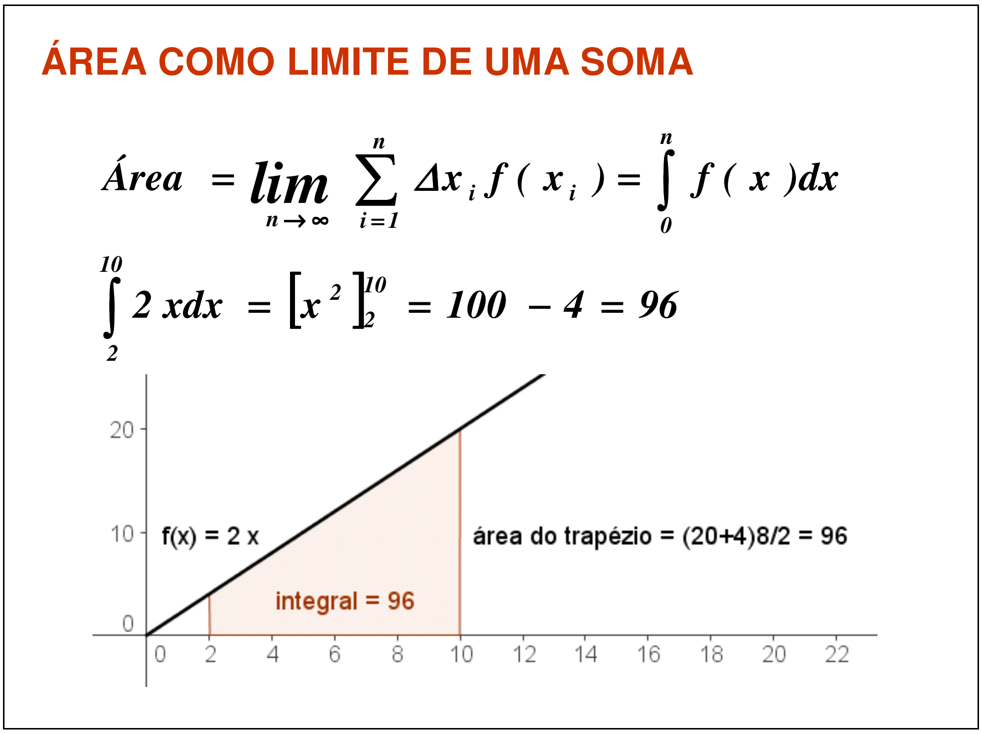


tela 120



tela 121

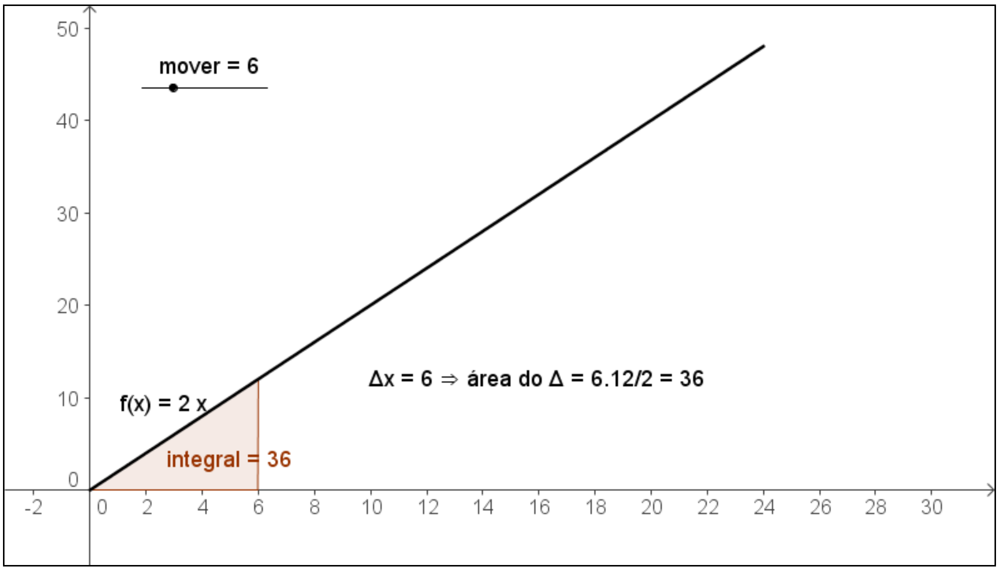
Seqüência de valores assumidos pela Integral definida, Soma inferior e Soma superior para a função do segundo grau, com Δx variando. Pode-se observar que quanto menor o Δx, mais próximos do valor da integral definida ficam os valores de Soma inferior e Soma superior.



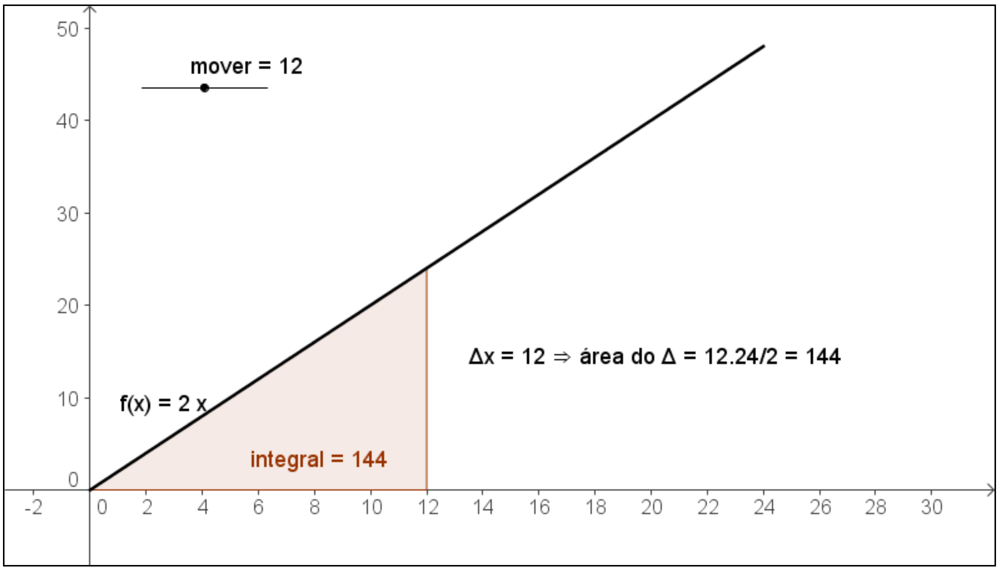
tela 122

Tela para explorar a idéia de integral como área situada entre a curva e o eixo das abscissas. Permite fazer a comparação com o cálculo feito pela fórmula geométrica.

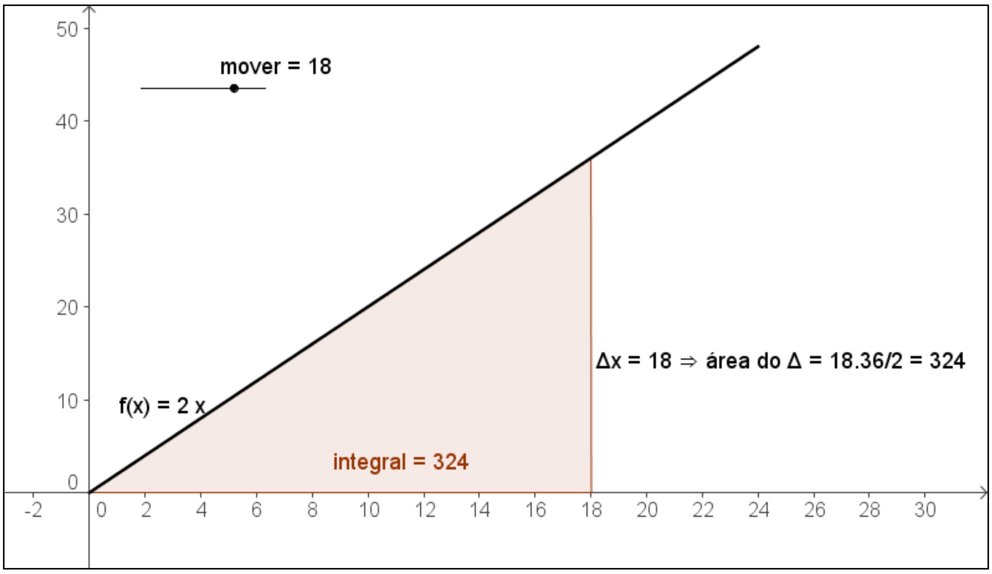
A seguir apresenta-se uma seqüência onde o ponto **mover**, foi deslocado à direita no eixo das abscissas, para variar o triângulo formado.



tela 123

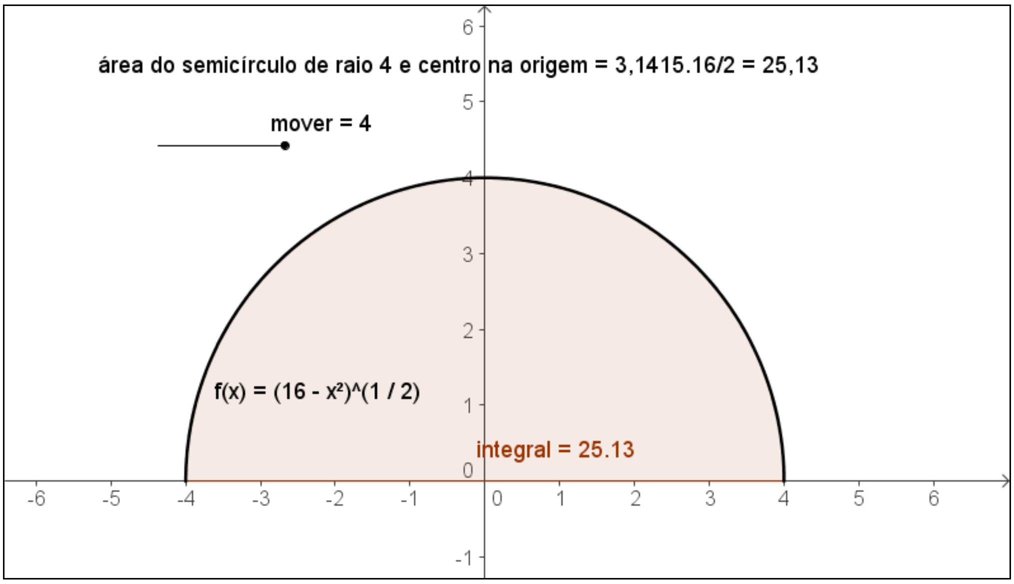


tela 124



tela 125

Seqüência de valores assumidos pela integral definida da função linear e comparação desses valores com a área da figura formada pela curva e o eixo das abscissas entre os extremos de integração.



tela 126

Valor assumido pela integral definida da função semicircular comparado ao valor obtido pela fórmula da área do semicírculo.

As telas seguintes exploram alguns comandos e particularidades dos softwares para em seguida apresentar uma seqüência de exercícios.

EXPLORANDO O MENU DO GEOGEBRA

- **Para inserir uma função,no campo entrada, digitamos f(x)=**
- **Para determinar a integral selecionamos comando, integral e digitamos [f,x_0,x_1]**
- **Para determinar soma superior ou soma inferior selecionamos comando, SI ou SS [f,x_0,x_1,n] onde n é o número de partições.**

OBS: Clicando em um elemento com o botão direito do mouse, obtemos uma lista de características que podem ser alteradas tais como cor, espessura, extremos etc.

tela 127

EXPLORANDO O MENU DO WINPLOT

- **Para configurar a tela selecionamos: janela 2D.**
- **Para configurar eixos selecionamos: ver, eixos, mostrar nomes.**
- **Para digitar a equação selecionamos: equação, explícita, espectro, cor.**
- **Para retornar à equação selecionamos: equação, inventário.**
- **Para integrar uma função selecionamos: um, medidas e integrar.**
- **Para determinar interseção entre duas funções selecionamos: dois e interseções.**
- **Para integrar uma região entre duas funções selecionamos: dois e integrações.**

tela 128

CONSTRUA O GRÁFICO E DETERMINE A ÁREA DELIMITADA PELAS FUNÇÕES

1) $f(x) = x^2 + 5$ D=R
   $g(x) = x + 10$ D=R

2) $f(x) = -x^2 + 15$ D=R
   $g(x) = -x + 10$ D=R

3) $f(x) = -x^2 + 15$ D=R
   $g(x) = x^2 + 1$ D=R

4) $f(x) = x^2$ D=R
   $g(x) = x$ D=R

5) $f(x) = -x + 1$ D=R
   $g(x) = - x^2 + 1$ D=R

6) $f(x) = -x^3 +6 x^2 +20x$ D=R
   $g(x) = 0$

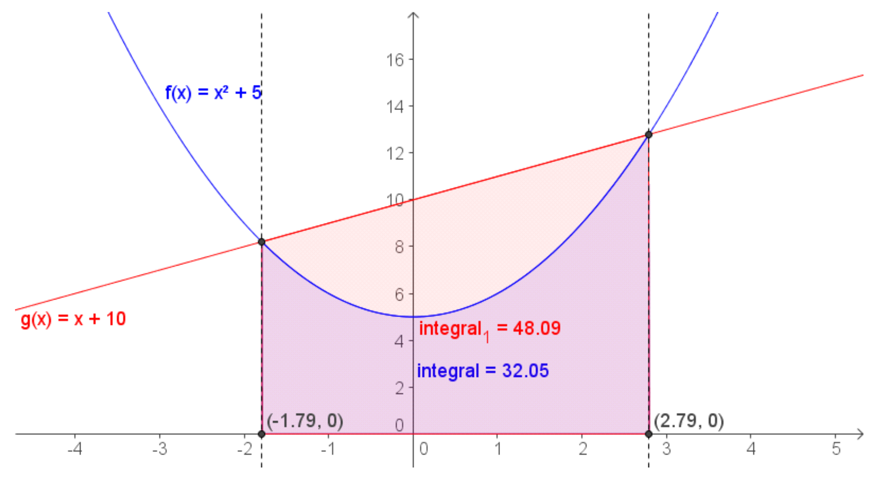
7) $f(x) = x^2$ D=R
   $g(x) = x^{1/2}$ D=R

8) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ D=R
   $g(x) = - x^2 +1$ D=R

tela 129

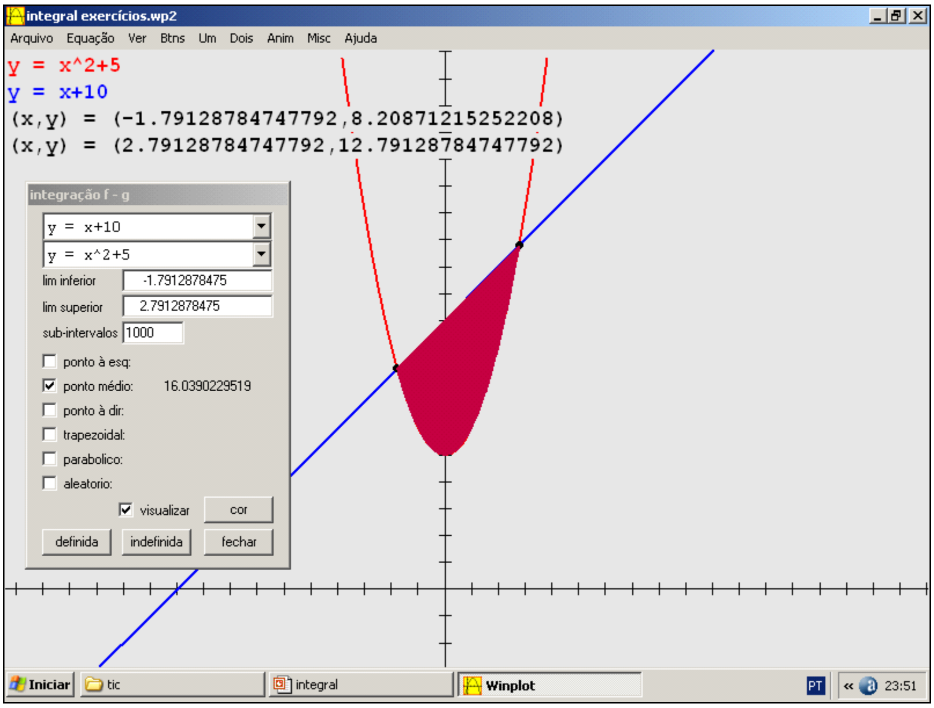
Seqüência de exercícios para o aluno explorar os softwares e características de algumas funções usuais. Os exercícios serão realizados com o Geogebra e em paralelo com o Winplot.

1) $f(x) = x^2 + 5$ $g(x) = x + 10$



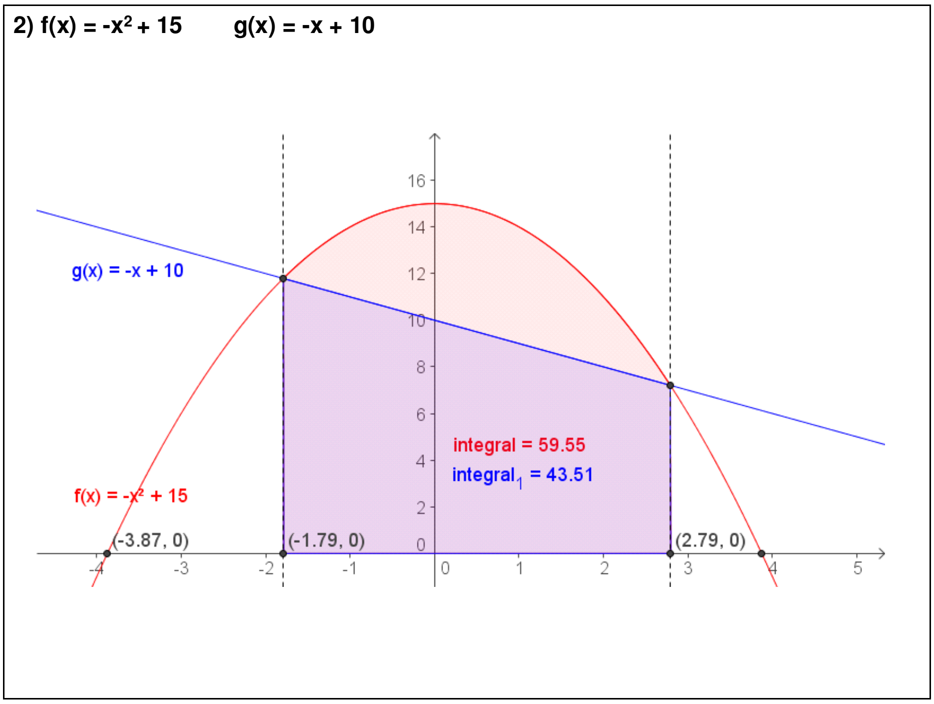
tela 130

As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



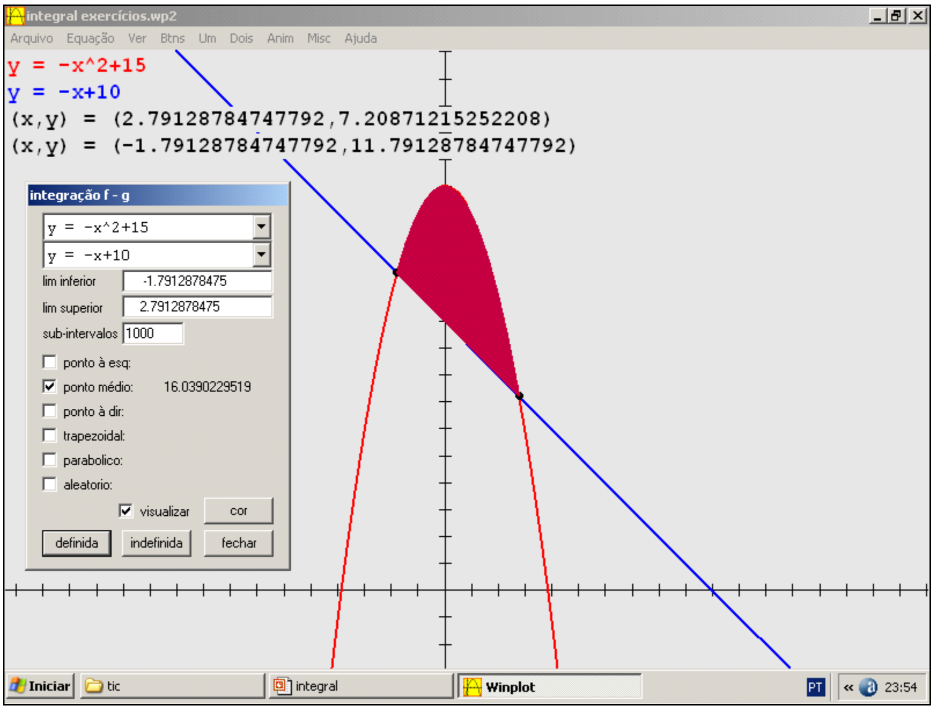
tela 131

O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.



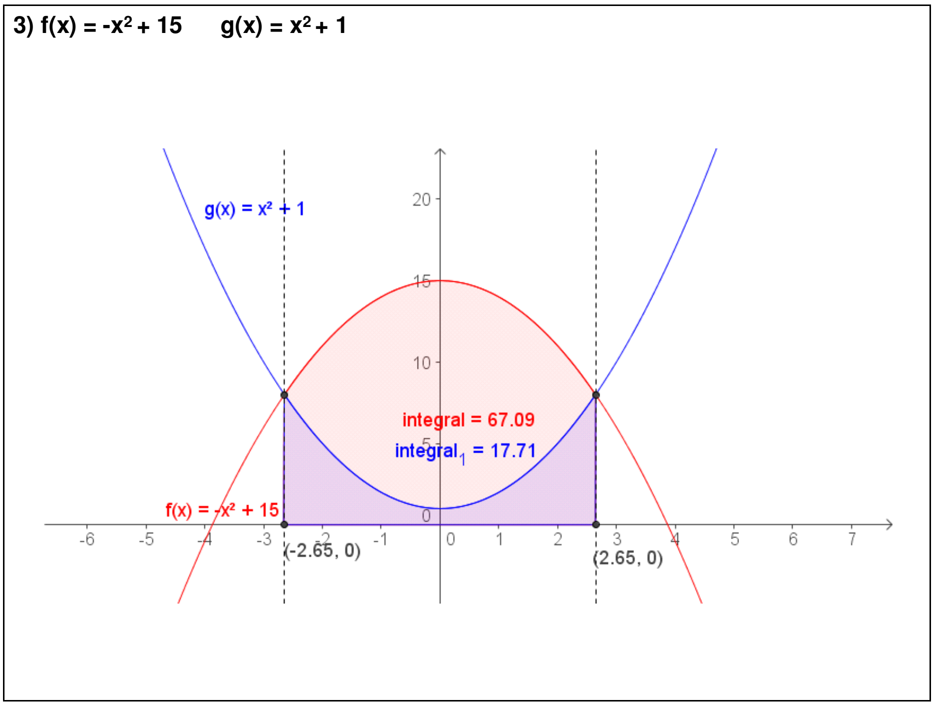
tela 132

As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



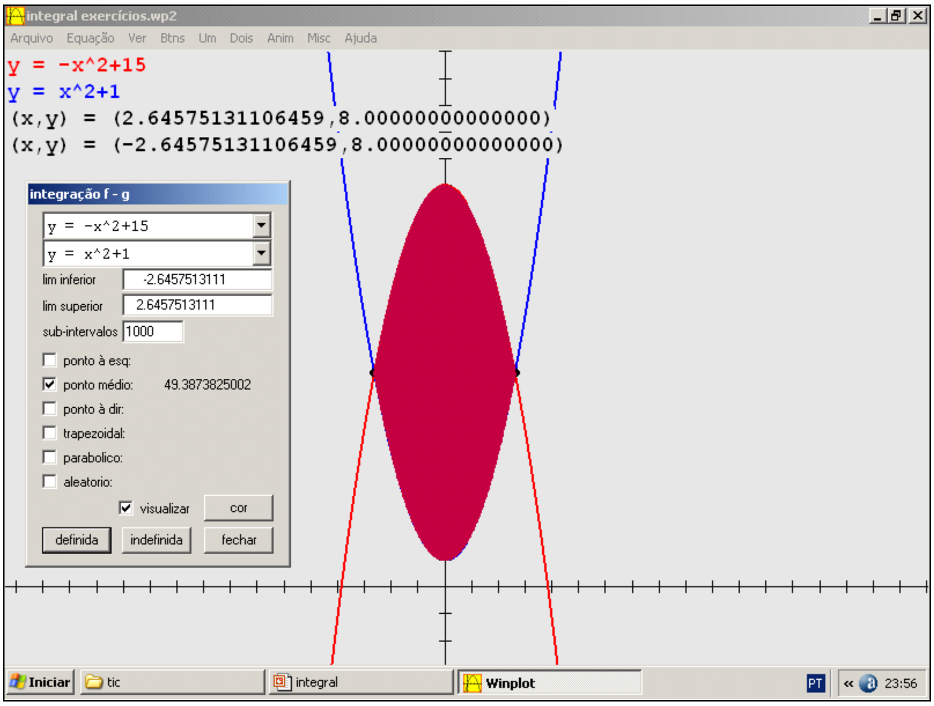
tela 133

O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.



tela 134

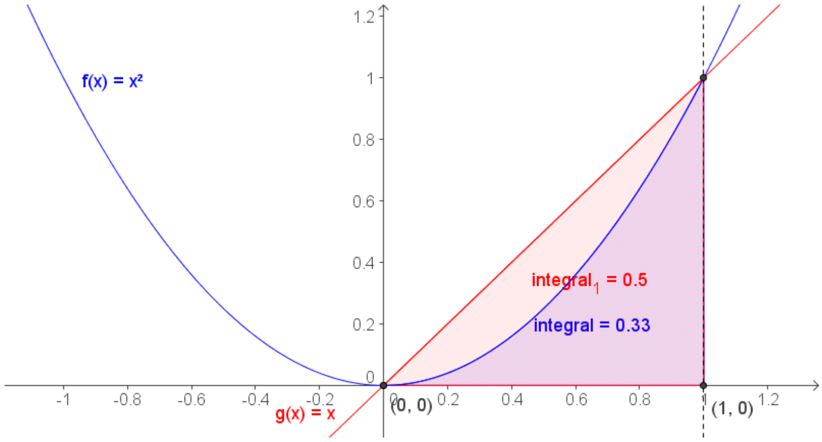
As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



tela 135

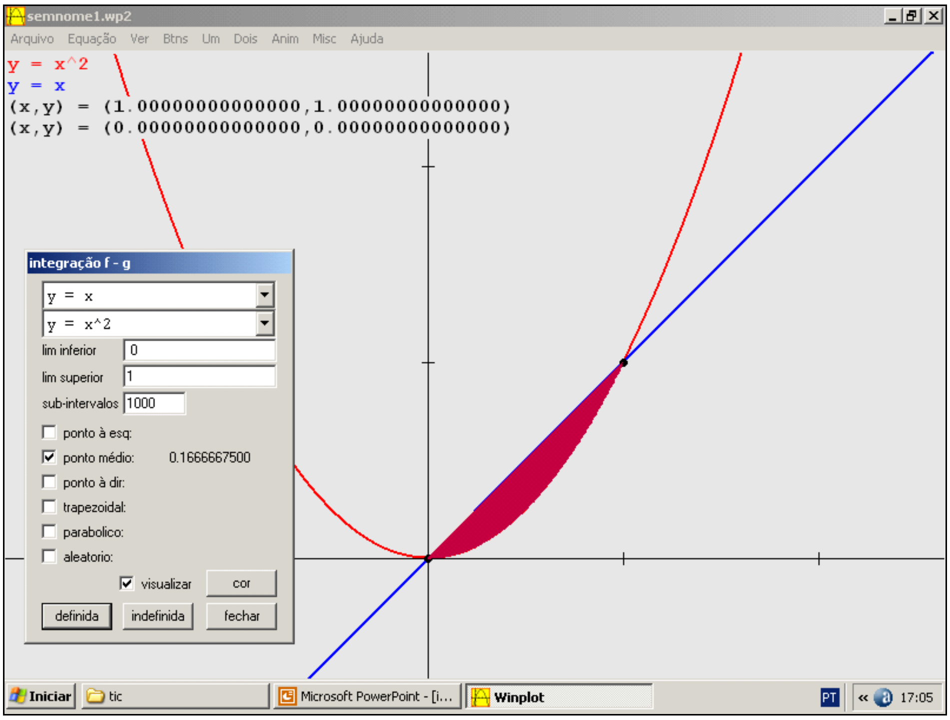
O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.

4) $f(x) = x^2$ $g(x) = x$



tela 136

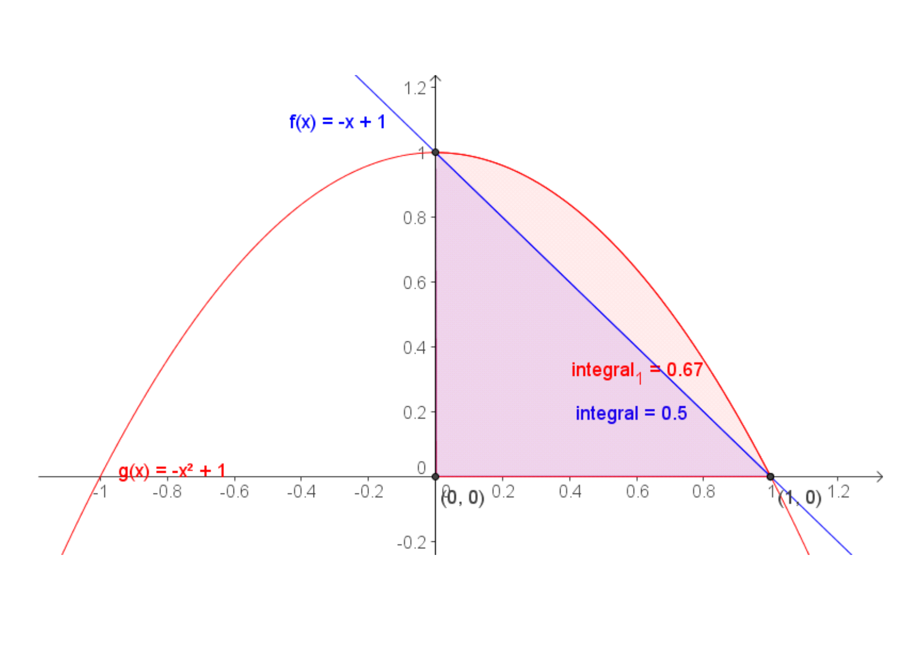
As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



tela 137

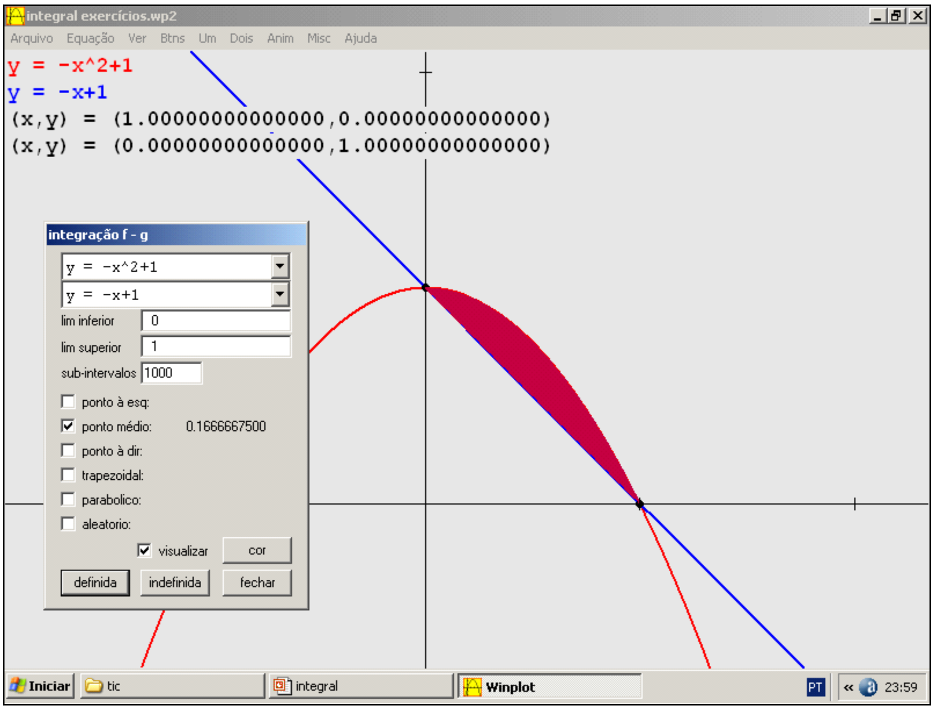
O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.

5) $f(x) = -x + 1 \quad g(x) = -x^2 + 1$



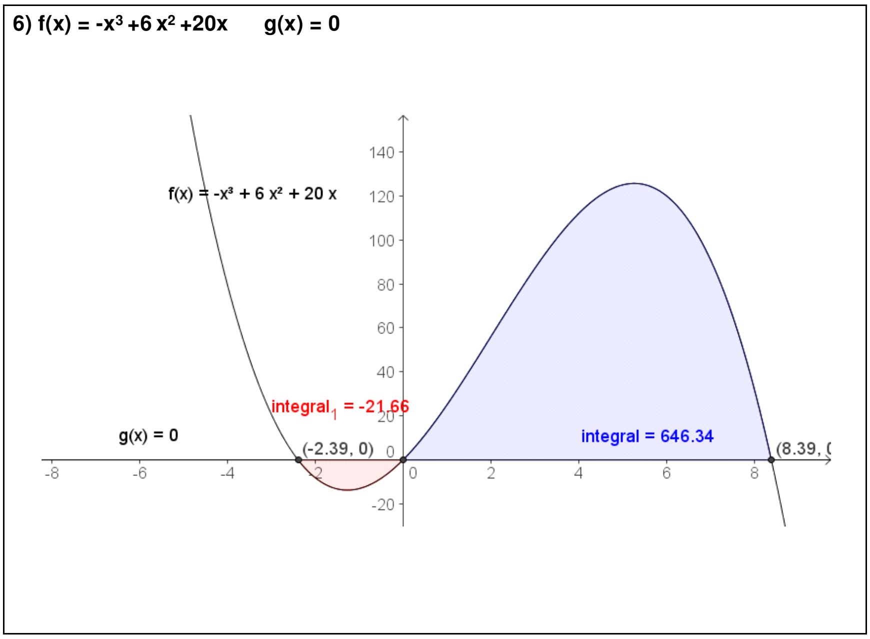
tela 138

As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



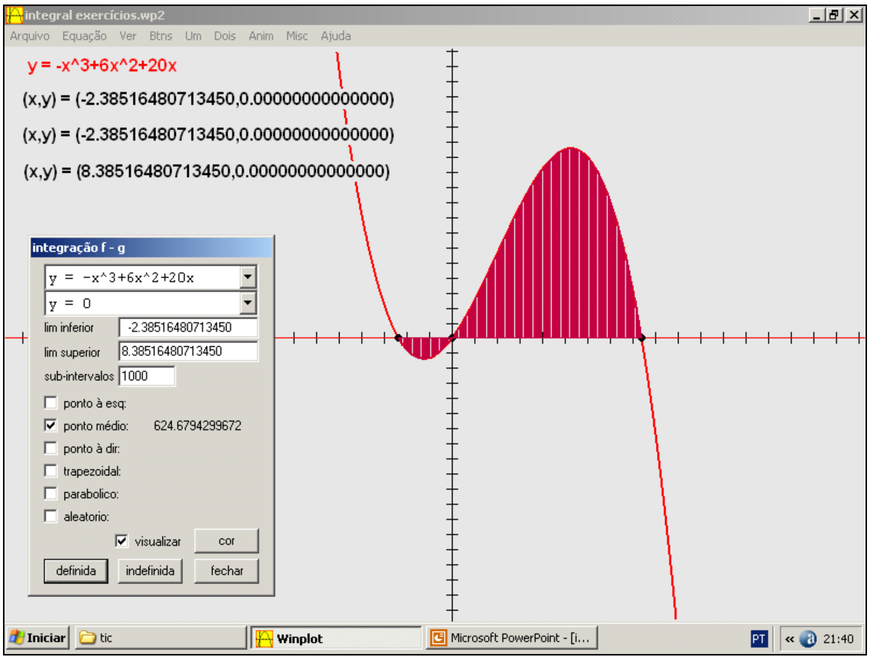
tela 139

O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.



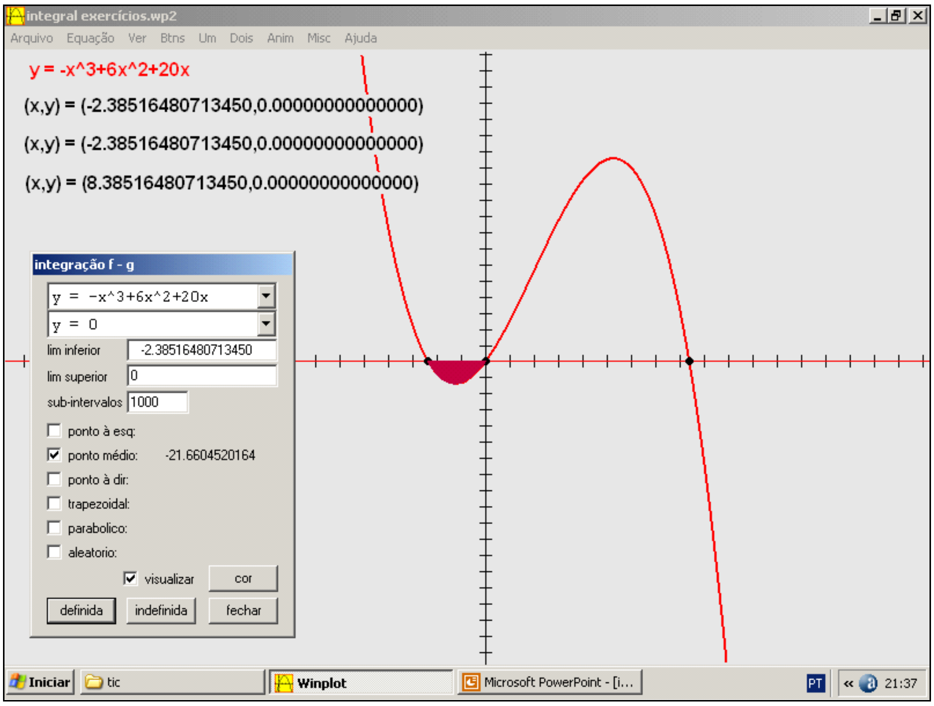
tela 140

A função intercepta o eixo das abscissas em três pontos. Integrando a função em duas etapas (parte abaixo do eixo das abscissas e parte acima do eixo das abscissas), usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que em módulo somados, resulta no valor da área que se busca.

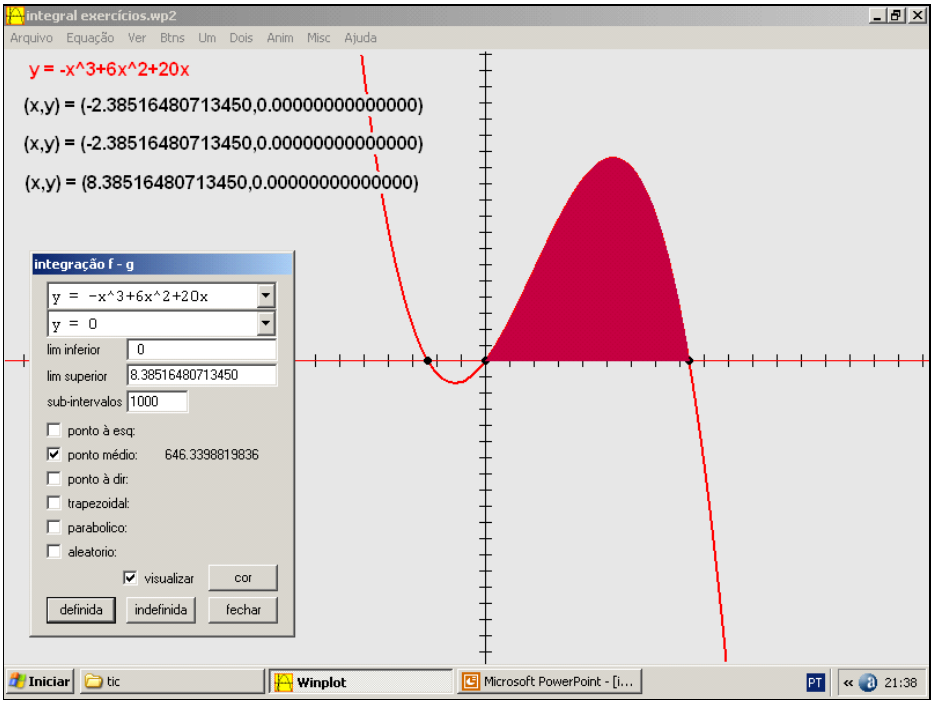


tela 141

O software winplot está adicionando a parte abaixo do eixo das abscissas (negativa) à parte acima do eixo das abscissas (positiva), fornecendo um valor que como integral definida está correto, mas não corresponde ao valor da área que se busca. Integrando as partes em separado e somando-as em módulo (como se vê nas telas seguintes), chega-se ao valor da área.



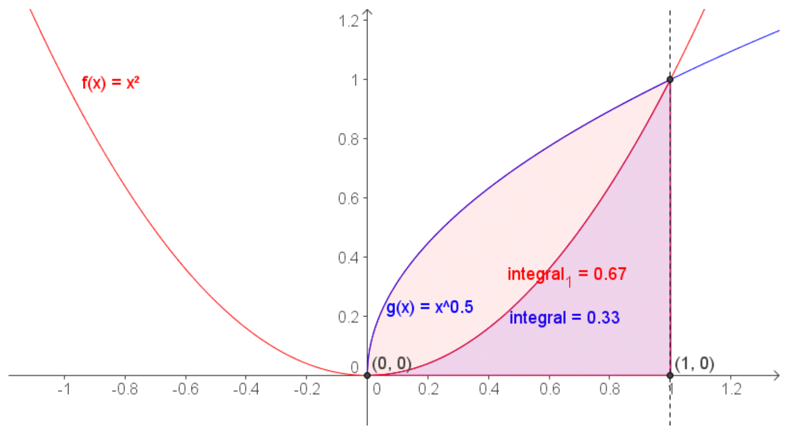
tela 142



tela 143

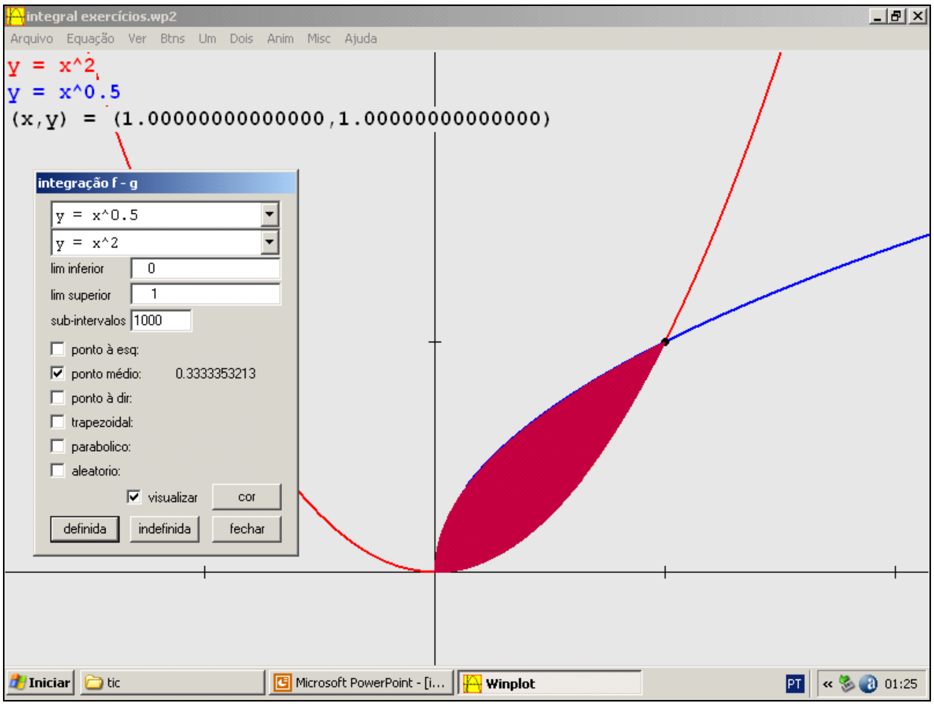
A análise do posicionamento da área com relação ao eixo das abscissas é fundamental para se chegar ao seu valor correto.

7) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^{1/2}$



tela 144

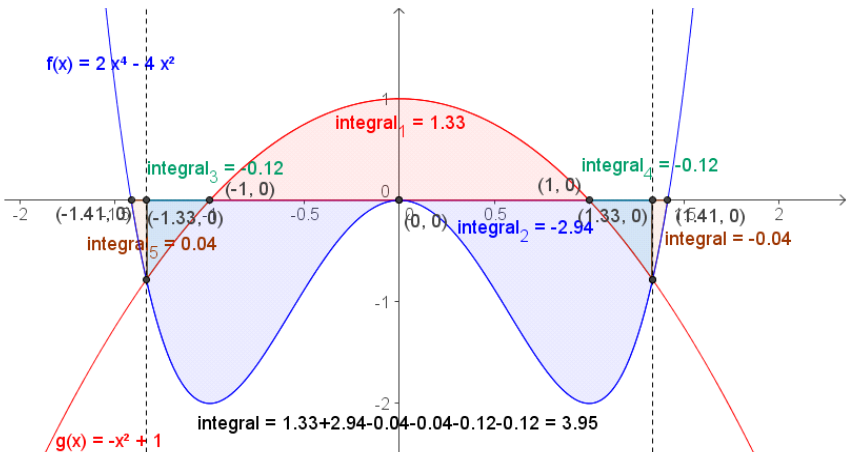
As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos, tem-se dois valores que subtraído o menor do maior resulta no valor da área que se busca.



tela 145

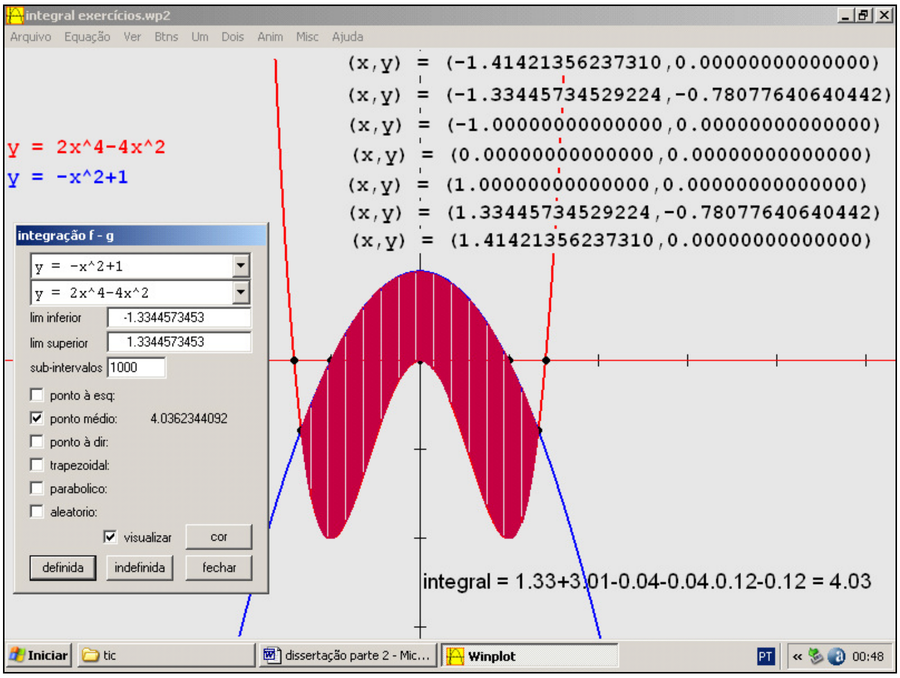
O software Winplot permite fazer a integral da diferença entre as funções e com isso obter direto o valor da área.

8) $f(x) = 2x^4 - 4x^2$ $g(x) = - x^2 +1$



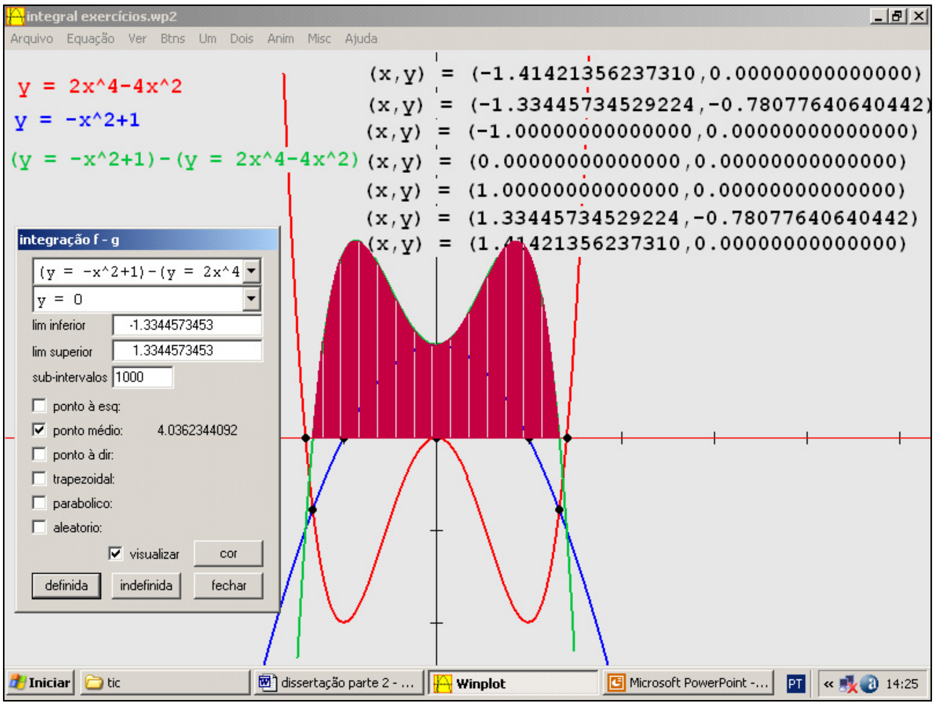
tela 146

Integrando a parte acima do eixo x tem-se um valor, Integrando a parte abaixo do eixo x tem-se outro valor, somando esses valores gera-se a 1ª soma. As funções se interceptam em dois pontos. Integrando ambas, usando como extremos de integração as abscissas desses pontos e as abscissas dos pontos onde elas interceptam o eixo x, tem-se quatro valores que serão somados, gerando a 2ª soma. Da 1ª soma subtrai-se a 2ª soma e tem-se o valor da área que se busca.



tela 147

Neste caso, as áreas determinadas pelas funções apresentam parte negativa e parte positiva. Mas, como a função integrada é a diferença entre as duas funções (como se vê na tela seguinte) e esta, no intervalo considerado, apresenta apenas parte positiva, o valor gerado corresponde ao valor da área.

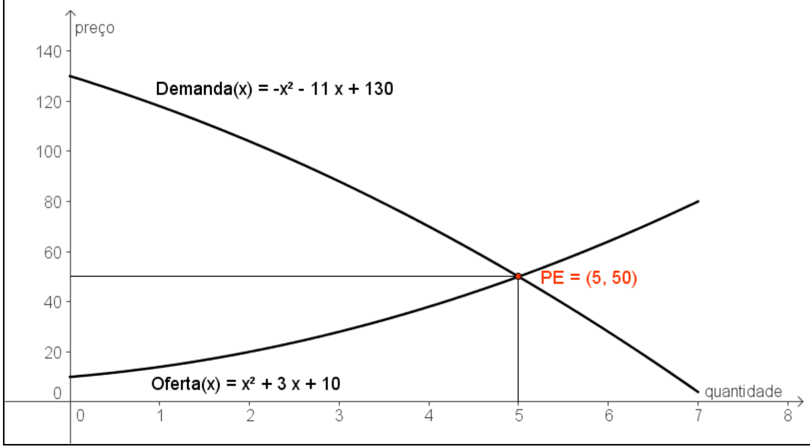


tela 148

A análise do posicionamento da área com relação ao eixo das abscissas é fundamental para se chegar ao seu valor correto.

As telas seguintes exploram uma aplicação do cálculo de áreas por integral na Economia.

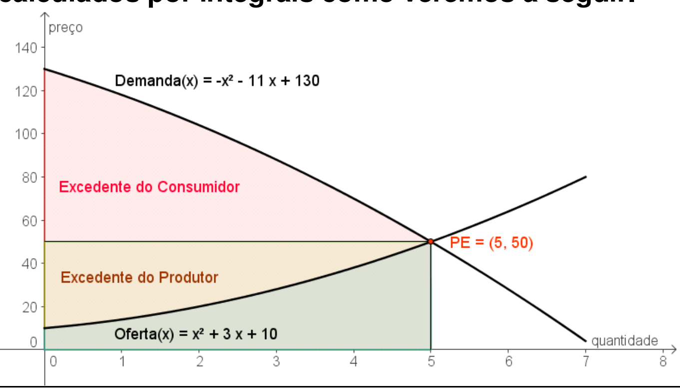
Na economia, a função Demanda é o ponto de vista do consumidor em relação ao preço e a função Oferta é o ponto de vista do produtor em relação ao preço. Uma breve análise permite perceber que suas posturas frente ao preço são opostas. Quanto menor o preço, mais o consumidor consome, fazendo da Demanda uma curva decrescente. Quanto maior o preço mais o produtor põe produto no mercado, fazendo da Oferta uma curva crescente. Existe na prática um ponto, denominado Ponto de Equilíbrio, onde o mercado se estabiliza, como podemos constatar no gráfico a seguir.



tela 149

Um problema de matemática aplicada usando funções bastante usuais em economia.

Uma análise desses gráficos permite perceber que existem quantidades de mercadorias que poderiam ser consumidas pela demanda com preços acima do preço do Ponto de Equilíbrio, porém em virtude do preço praticado ser inferior, podemos dizer que o consumidor está economizando esse montante e assim chamá-lo de Excedente do Consumidor. Da mesma forma podemos perceber que existem quantidades de mercadorias que poderiam ser ofertadas abaixo do preço do Ponto de Equilíbrio, porém em virtude do preço praticado ser superior, podemos dizer que o produtor está economizando esse montante e assim chamá-lo de Excedente do Produtor. Esses montantes podem ser calculados por integrais como veremos a seguir.



tela 150

O cálculo das áreas determinadas resolverá a questão.

$$EC = \int_{0}^{x_{pe}} Demanda(x)\,dx - x_{pe}.y_{pe}$$

$$EC = \int_{0}^{20} (-x\text{^}2 - 11x + 130)dx - 5.50$$

$$EC = [-x\text{^}3/3 - 11x\text{^}2/2 + 130x]_0^5 - 250$$

$$EC = 220.83$$

$$EP = x_{pe}.y_{pe} - \int_{0}^{x_{pe}} Oferta(x)\,dx$$

$$EP = 5.50 - \int_{0}^{20} (x\text{^}2 + 3x + 10)\,dx$$

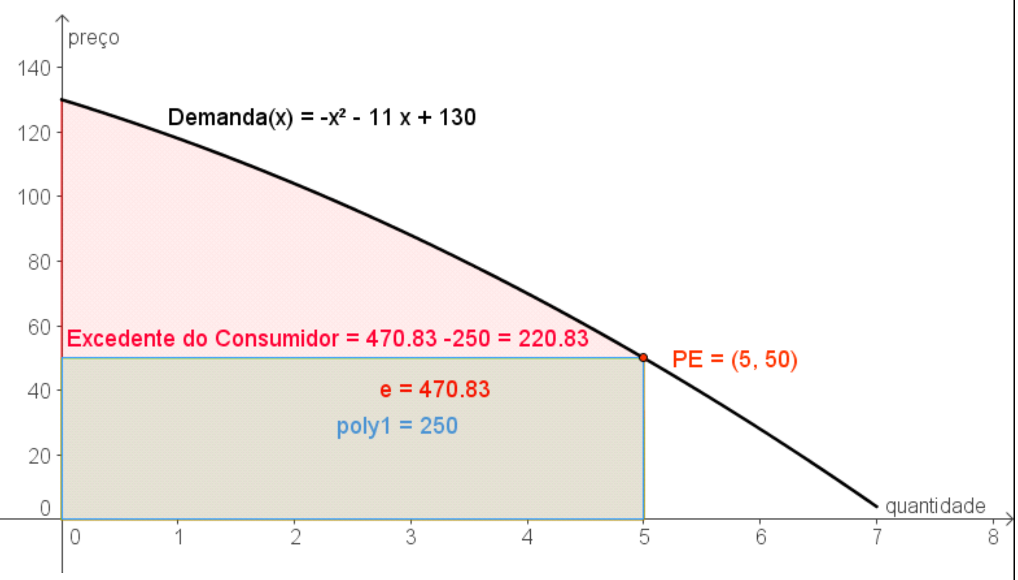
$$EP = 250 - [x\text{^}3/3 + 3x\text{^}2/2 + 10x]_0^5$$

$$EP = 120.83$$

tela 151

Determinação dos valores procurados pelo uso de Integral no cálculo de áreas.

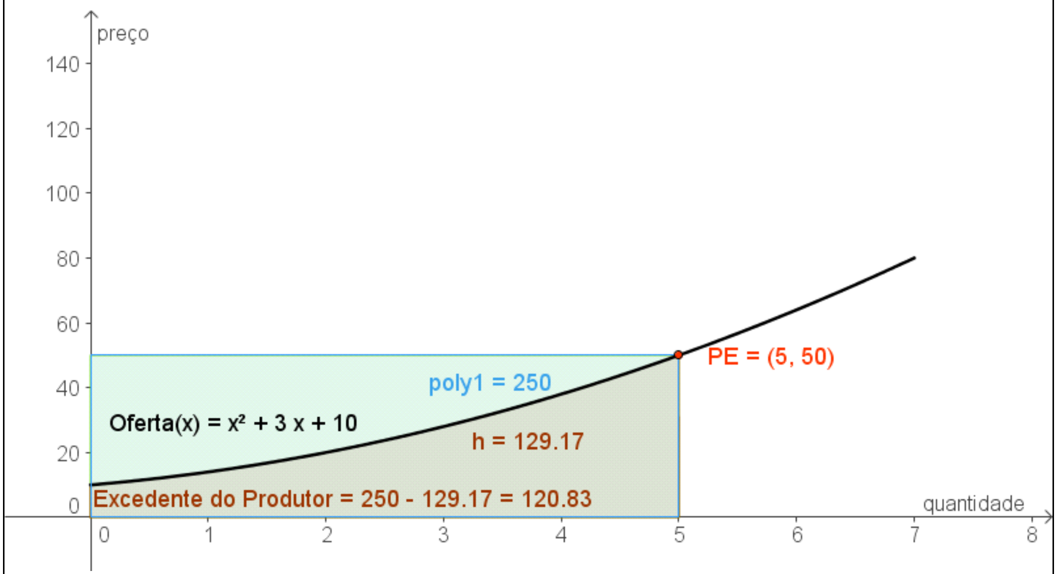
O excedente do consumidor pode ser determinado usando o software Geogebra. Fazemos a integral da demanda de 0 até 5 menos a área do retângulo (5x50).



tela 152

Determinação dos valores procurados pelo uso do software Geogebra.

O excedente do produtor pode ser determinado usando o software Geogebra. Fazemos a área do retângulo (5x50) menos a integral da oferta de 0 até 5.



tela 153

Determinação dos valores procurados pelo uso do software Geogebra.

2.6 Integrais Duplas (Módulo 6)

O objetivo desse módulo é fazer uma visualização das integrais para funções com duas variáveis isto é $z = f(x,y)$. A idéia é que tratando y como constante, tem-se a integral em relação à variável x. Da mesma maneira, se trata-se x como constante tem-se a integral em relação à variável y. Portanto, tem-se duas integrações que ocorrem simultaneamente, gerando uma função que quando definida, produz um valor que corresponde ao volume de um sólido no espaço tridimensional.

A seguir, utiliza-se o software Winplot que realizará essa tarefa com grandes opções de recursos visuais.

• A idéia é que tratando uma das variáveis, x ou y como constante e integrando a função em relação a outra variável, teremos uma integração no R^2.

• Por exemplo, na integral $\iint (x^2 + y^2 + k)dxdy$ se tratamos y como constate = a, teremos a integral

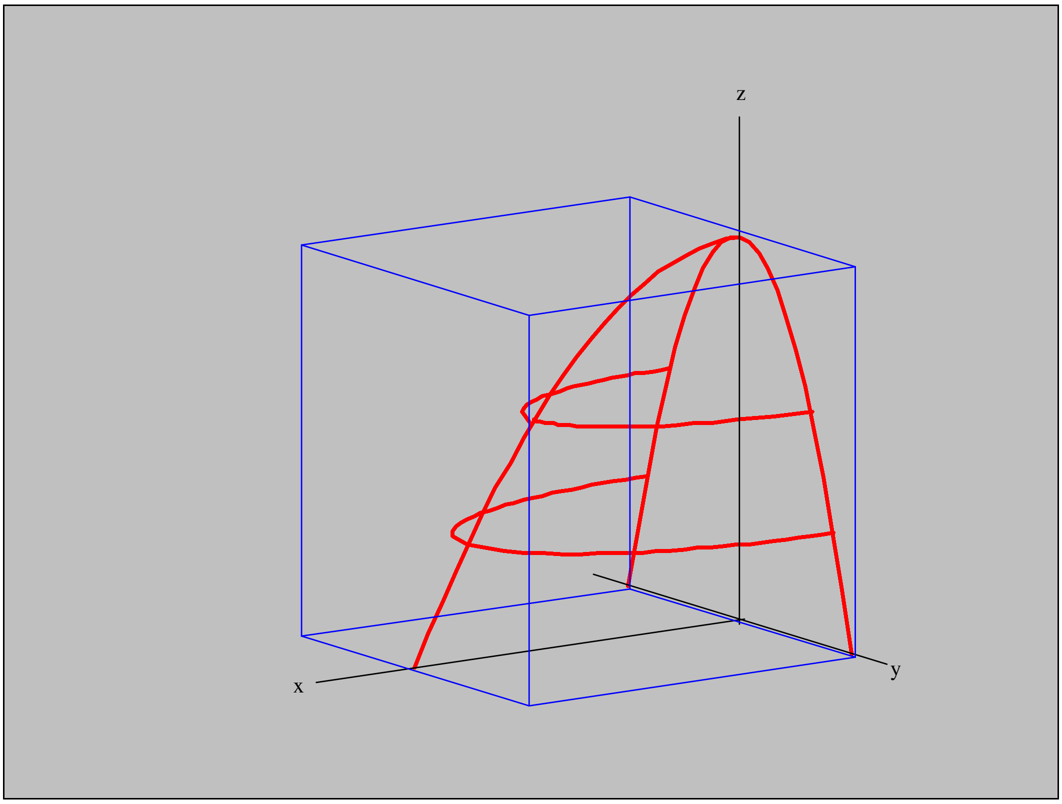
$$\int (x^2 + a^2 + k)dx$$

• Da mesma forma se tratamos x como constante igual a b, teremos a integral

$$\int (x^2 + b^2 + k)dy$$

• Portanto teremos duas integrações que ocorrem simultaneamente e vão gerar uma função, que definida em uma região, produz o volume de uma figura como a seguir:

tela 154



tela 155

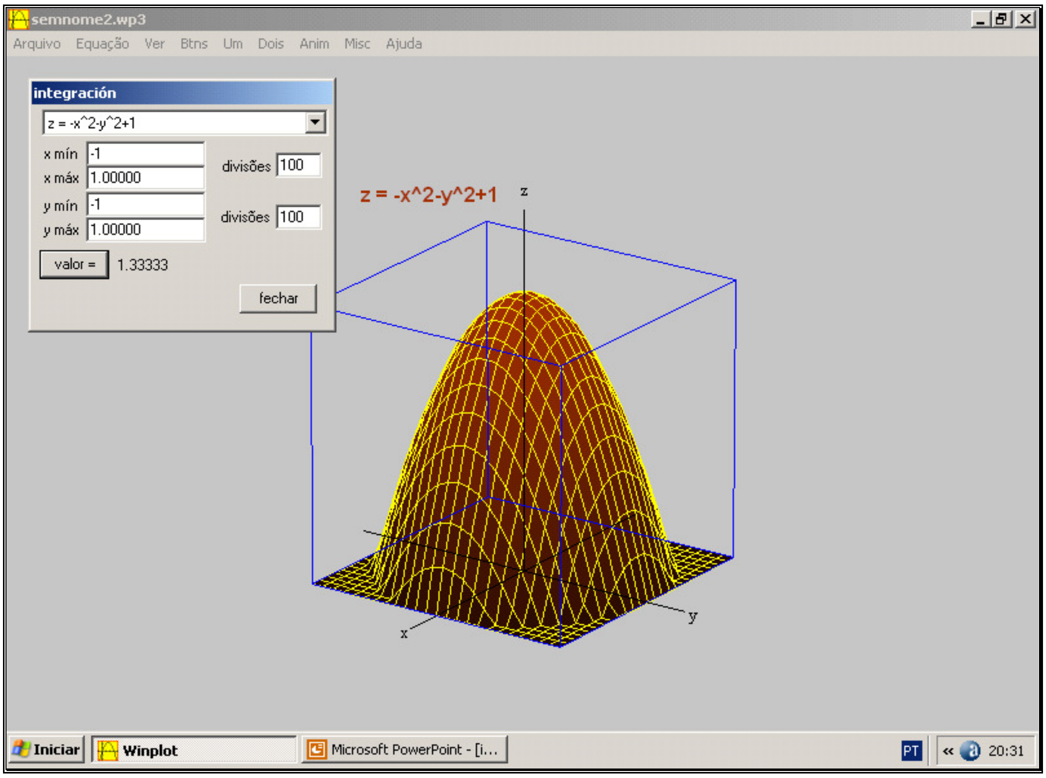
Vejamos o exemplo para a função:

$$f(x) = -x^2 - y^2 + 1$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(-x^2 - y^2 + 1)\,dxdy = \int_{-1}^{+1}\left[-x^3/3 - y^2x + x\right]_{-1}^{+1} dy =$$

$$\int_{-1}^{+1}(-2y^2 + 4/3)\,dy = \left[-2y^3/3 + 4/3\,y\right]_{-1}^{+1} = 1{,}333...$$

tela 156



tela 157

Usando o software Winplot e seu recurso de cálculo do valor da integral para função com duas variáveis, pode-se além de visualizar o sólido, confirmar o resultado obtido através do Cálculo Integral.

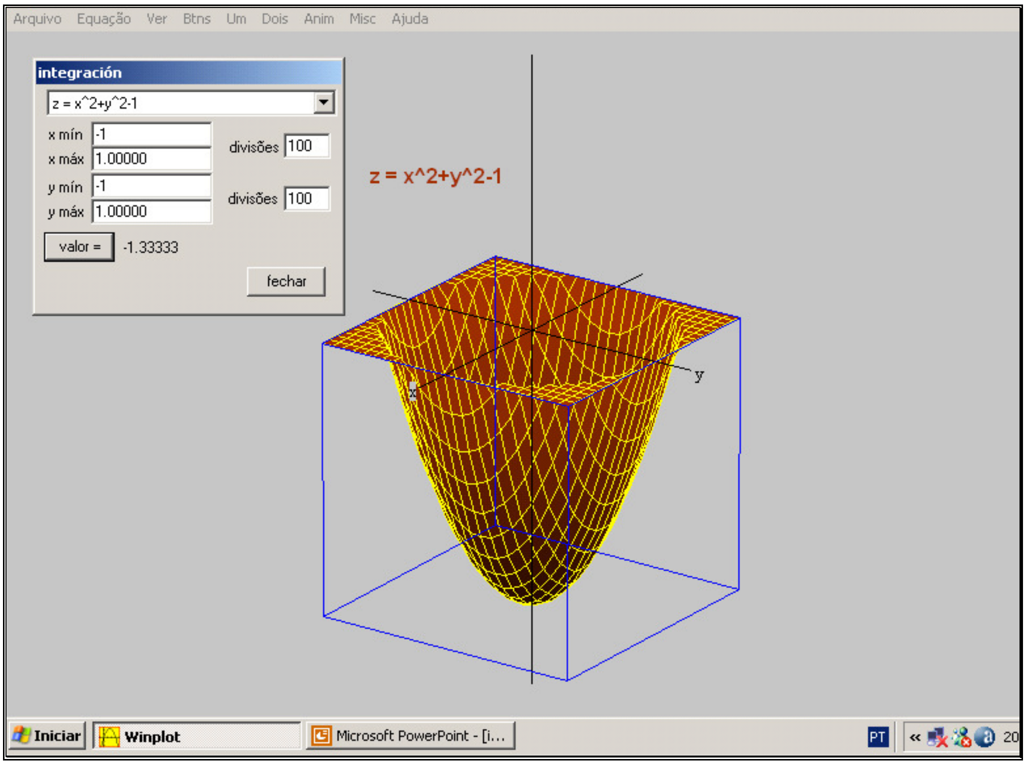
Vejamos o exemplo para a função:

$$f(x) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(x^2 + y^2 - 1)\,dxdy = \int_{-1}^{+1}\left[x^3/3 + y^2x - x\right]_{-1}^{+1}dy =$$

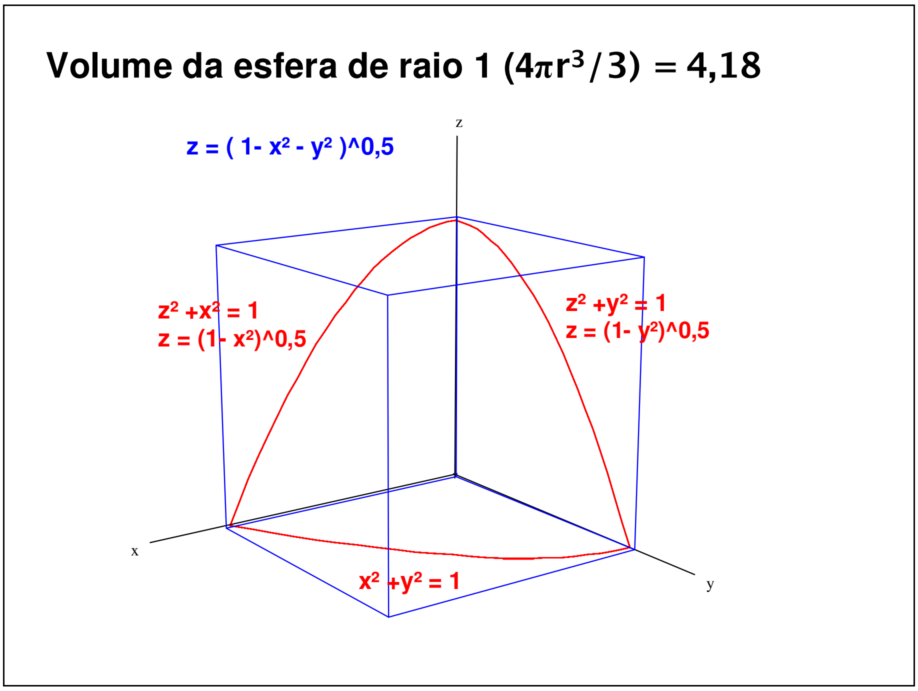
$$\int_{-1}^{+1}(2y^2 - 4/3)\,dy = \left[2y^3/3 - 4/3\,y\right]_{-1}^{+1} = -1,333\ldots$$

tela 158



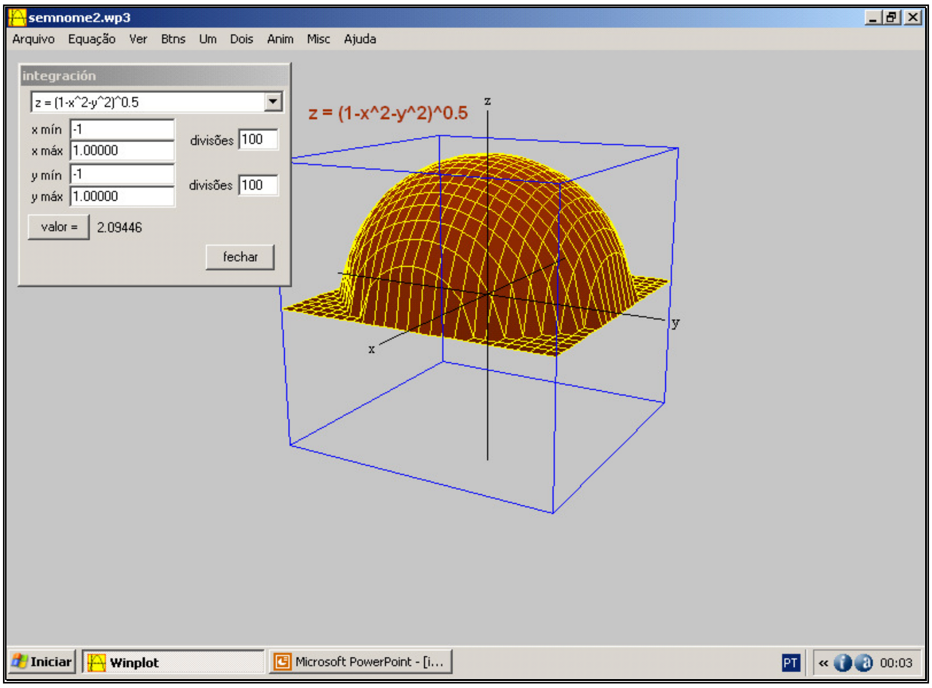
tela 159

Usando o software Winplot e seu recurso de cálculo do valor da integral para função com duas variáveis, pode-se além de visualizar o sólido, confirmar o resultado obtido através do Cálculo Integral.



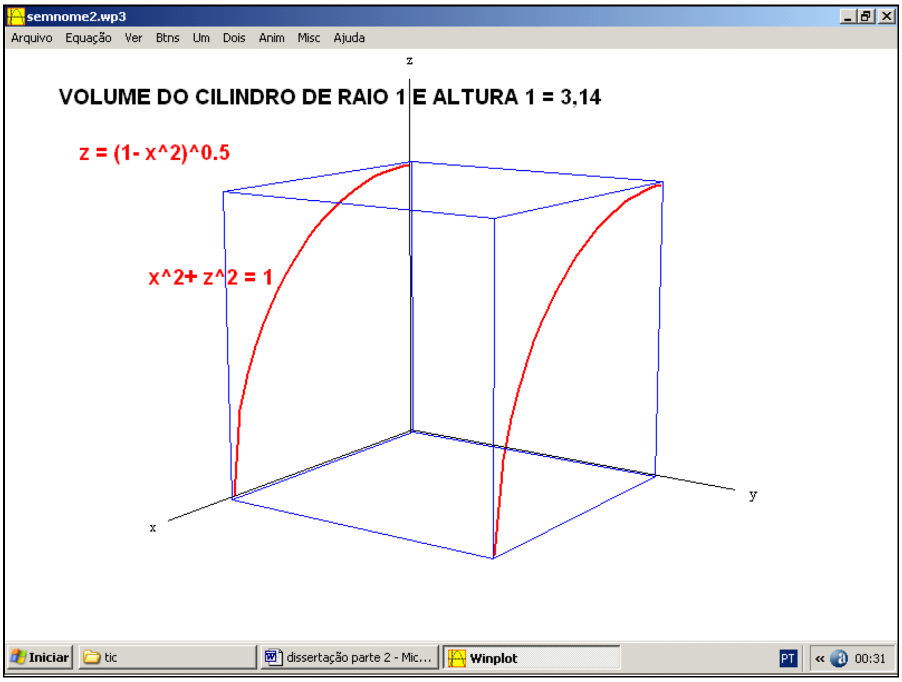
tela 160

Fazendo os recortes nos planos XZ, YZ e XY, obtêm-se funções que, associadas de maneira conveniente formam a função de duas variáveis que será integrada para gerar o volume que se busca.



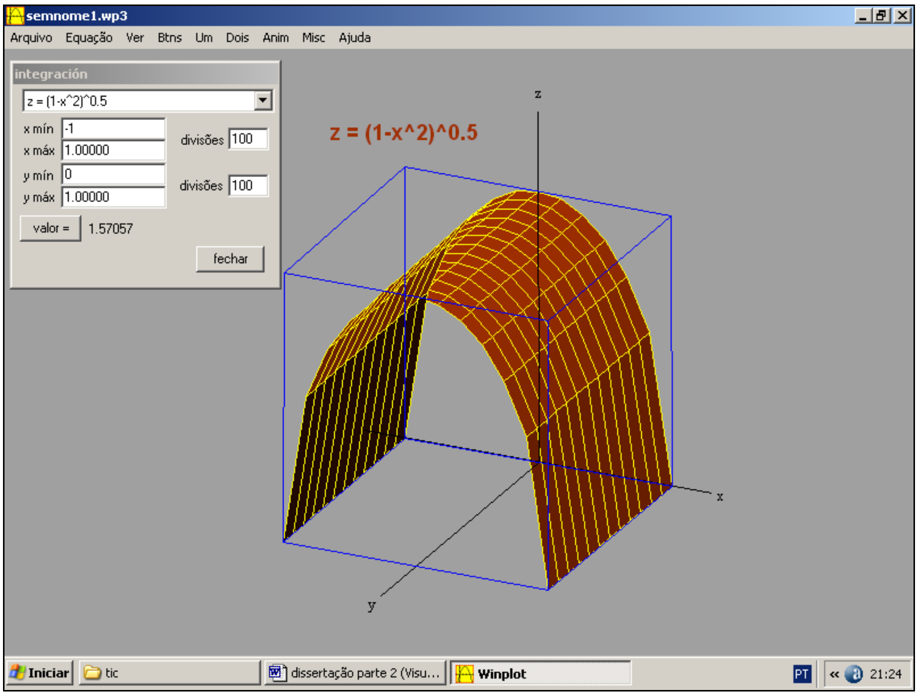
tela 161

Usando o software Winplot e seu recurso de cálculo do valor da integral para função com duas variáveis, pode-se além de visualizar a metade do sólido, dobrando o valor obtido, confirmar o resultado.



tela 162

Fazendo os recortes nos planos XZ, YZ e XY, obtêm-se funções que, associadas de maneira conveniente formam a função de duas variáveis que será integrada para gerar o volume que se busca.



tela 163

Usando o software Winplot e seu recurso de cálculo do valor da integral para função com duas variáveis, pode-se além de visualizar a metade do sólido, dobrando o valor obtido, confirmar o resultado.

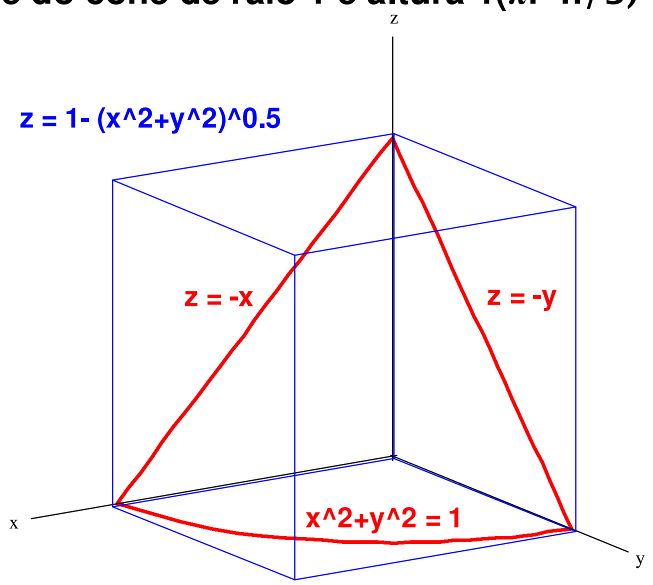
• **Confirme, usando integral dupla, que o volume de um cone de raio 1 e altura 1 é 1/3 do volume de um cilindro de mesma base e altura.**

• **Use no menú: Um, integrar e marque os extremos.**

tela 164

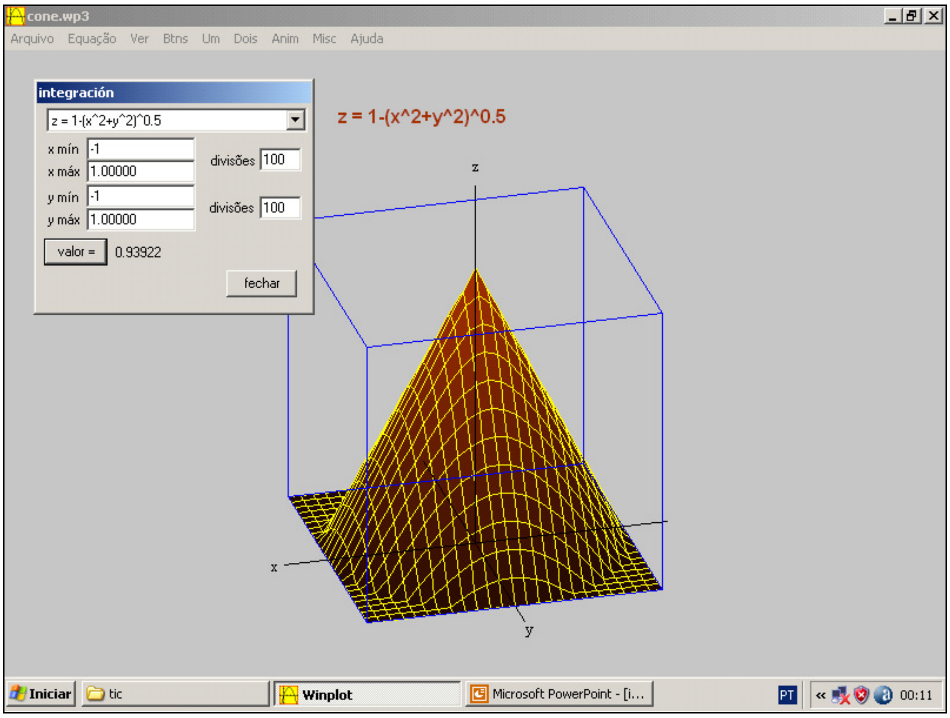
Atividade para o aluno explorar o software e a construção de uma função com duas variáveis a partir de seus recortes verticais e horizontais.

Volume do cone de raio 1 e altura 1 $(\pi r^2 h/3) = 1{,}047$



tela 165

Fazendo os recortes nos planos XZ, YZ e XY, obtêm-se funções que associadas de maneira conveniente, formam a função de duas variáveis que será integrada para gerar o volume que se busca.



tela 166

Usando o software Winplot e seu recurso de cálculo do valor da integral para função com duas variáveis, pode-se além de visualizar o sólido, confirmar o resultado (neste caso, houve imprecisão pois se trabalhou com cem divisões e seria necessário bem mais. Esta idéia é abordada nas telas 112,113 e 114).

Considerações Finais

As idéias aqui apresentadas em termos de Cálculo Diferencial e Integral, já foram bastante estudadas e, portanto, não apresentam novidades. O aspecto novo que traz essa pesquisa é a questão da representação e da abordagem. A intenção ao desenvolver a pesquisa foi buscar uma representação menos ligada a aspectos formais, que fosse mais atrativa e compatível com os estudantes atuais. Procurei elaborar uma seqüência didática apoiada em problemas cotidianos e que despertasse o interesse de resolução no estudante. Somado a isso, percebi ao longo do trabalho, que muitos aspectos conceituais ficam mais evidentes e podem ser mais bem explorados e pensados com o uso dos softwares e seus recursos.

Abrangendo as idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral, para uma e duas variáveis, trabalhei com os conceitos de função, limite, derivada, integral e a questão da otimização de funções.

Assim como ocorreu comigo, que em determinado momento percebi que tinha em mãos uma ferramenta muito poderosa e agradável para desenvolver as idéias do Cálculo e suas aplicações, pretendo que os alunos possam ter a mesma percepção e, a partir daí, tenham autonomia para aplicar o Cálculo Diferencial e Integral nas mais diversas atividades que possam vir a desenvolver.

Acredito que atingi os meus objetivos e me sinto bastante satisfeito com isso. Além do mais, essa pesquisa também me direcionou para questões ligadas à Modelagem Matemática, com as quais estou trabalhando no presente momento e pretendo continuar a pesquisar.

Bibliografia

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**.Curitiba: UFPR, 2007.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: Funções limite, derivação e integração. 6.ed. São Paulo: Pearson education do Brasil, 2007.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo B**: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2.ed. São Paulo: Pearson education do Brasil, 2007.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GORINI, Catherine A. **Visualização Dinâmica no Cálculo**. Artigo publicado no livro Geometry Turned On. USA: Mathematical Association of America, 1997.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. **A Aprendizagem Da Matemática Em Ambientes Informatizados**. Artigo publicado nos Anais do IV Congresso RIBIE, Brasília,1998.

GRAVINA, M.A. **Geometria Dinâmica**: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov 1996.

HAZZAN, Samuel; MORETTIN, Pedro e BUSSAB Wilton. **Cálculo**: Funções de uma e várias variáveis, São Paulo: Saraiva, 2003.

MELLO, José Luiz Pastore. **Jacob Steiner e o problema da menor malha viária**. São Paulo: Revista Educação Matemática n.82, março/abril, 2006.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Aprendizagem da docência**: Algumas contribuições de L. S. Shulman. Artigo publicado em Educação Revista do Centro de Educação, Ed: 2004 - Vol. 29 - N° 02. Santa Maria/BRA, 2004.

Tutorial Geogebra 2.5, Humberto Bortolossi, Hermínio Borges Neto,
Alana Souza de Oliveira e Alana Paula Araújo Freitas

Historia das derivadas. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm Acesso em: jul. 2008.

Geogebra. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms/

Winplot. Disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html