PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Jesus Victoria Flores Salazar

Gênese Instrumental na interação com *Cabri 3D*: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2009

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Jesus Victoria Flores Salazar

Gênese Instrumental na interação com *Cabri 3D*: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência para obtenção do título de ***DOUTORA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.***

São Paulo

2009

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial dessa Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ________________________________ **Local e Data:** ______________

"A geometria é uma ciência de todas
as espécies possíveis de espaços"

Kant

À minha mãe Nancy Angelica Salazar Vivar, por seu amor,
apoio incondicional e por ser minha força inspiradora.
In memorian à minha avó Angelica, porque sempre acreditou
em mim.

Agradecimentos

Ao Professor Doutor ***Saddo Ag Almouloud****, pelo trabalho de orientação, apoio e amizade.*

Aos Professores Doutores ***Maria José Ferreira da Silva****,* ***Maria Cristina Bonomi Barufi****,* ***Silvia Dias Alcântara Machado*** *e* ***Afonso Henriques****, pelas sugestões, comentários e importantes críticas para elaboração e evolução da tese.*

Ao Professor Doutor ***Vincenzo Bongiovanni****, pela amizade, apoio incondicional, sugestões na elaboração das atividades e por ter propiciado condições para as experimentações com Cabri 3D.*

Ao Professor Doutor ***Uldarico Malaspina****, por me estimular a dar meus primeiros passos na Educação Matemática no meu país,* ***Peru.***

As minhas irmãs ***Carolina*** *e* ***Elisa****, e meus sobrinhos* ***Miguel Angel****,* ***Rosa*** *e* ***Diego****, pelo amor que me proporcionam.*

Ao ***Luciano****, por ser meu companheiro.*

Ao ***Floriano****,* ***Juanita*** *e* ***Vilma*** *amigos incondicionais.*

A minha amiga ***Talita****, pela amizade, apoio, sugestões e disposição irrestritas.*

A minha amiga ***Adriana****, pela força, carinho de irmã e por me oferecer a oportunidade de conhecer à família* ***Cozzolino****, amigos para sempre!*

A minha amiga ***Solange****, pelo carinho, amizade, solidariedade e apoio de sempre.*

Ao ***Gil****, meu irmão baiano.*

A ***Zezé****, pela oportunidade de ser sua amiga, pela força, paciência, carinho que sempre me dá e por me relembrar com seu exemplo, que as pessoas sempre têm que lutar para conseguir seus objetivos.*

A ***Andreya****, por ser minha filha espiritual.*

Aos amigos ***Andréa****,* ***Maria Jacinta****,* ***Fernanda****,* ***Carlos*** *e* ***Iran****, pela amizade, companheirismo e apoio em todo momento.*

A meus amigos do programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática, ***Patrícia****,* ***Ivete****,* ***Denise****,* ***André****,* ***Sérgio****,* ***Mônica****,* ***Francisco****,* ***Aléxis*** *e a todos os colegas, pelo companheirismo e apoio quando eu precisava.*

À direção do ***Colégio Universitas*** *pelas facilidades oferecidas para o desenvolvimento da pesquisa.*

Aos observadores, ***Talita Carvalho Silva de Almeida*** *e* ***João Calleja****, pela colaboração incansável durante o desenvolvimento da pesquisa.*

Aos alunos do ***Colégio Universitas*** *que participaram na pesquisa, pela colaboração e sobretudo, pelo entusiasmo que mostraram durante a experimentação com Cabri 3D.*

Ao analista ***Francisco Olímpio da Silva****, pela amizade e pela ajuda na formatação da tese.*

Ao Programa Estudante Convênio de Pós-Graduação Internacional da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior ***CAPES-PEC/PG****, pela bolsa de estudos que permitiu a realização de meus estudos de doutorado no Brasil.*

A Autora

Resumo

Esta tese teve por objetivo observar como os estudantes do segundo ano do Ensino Médio apropriam-se das transformações geométricas no espaço, quando interagem com o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D,* bem como qual raciocínio mobilizam quando desenvolvem atividades que abrangem esse conteúdo. Assim, a pesquisa pretendeu responder às seguintes questões: *de que maneira, os estudantes apropriam-se das ferramentas e/ou recursos do Cabri 3D na aprendizagem das transformações geométricas no espaço? Como a integração do Cabri 3D interfere no processo de aprendizagem dessas transformações geométricas?* A metodologia do estudo apoiou-se nos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (1988). O referencial teórico baseou-se na Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) para compreender como os alunos interagem com o *Cabri 3D* e quais conteúdos mobilizam no desenvolvimento da sequência de atividades e na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), especificamente, nas diferentes apreensões de uma figura. A análise das atividades ajudou a perceber outras possibilidades que os instrumentos podem oferecer aos sujeitos e as diferentes maneiras de organizar suas ações. Além disso, as atividades facilitaram o desenvolvimento de distintas estratégias no uso do *Cabri 3D* e o estabelecimento de relações entre o *software* e os conhecimentos matemáticos dos estudantes. Constatou-se a ocorrência do processo de *Gênese Instrumental*, visto que as ações dos alunos evidenciaram *esquemas de utilização* preestabelecidos ou o desenvolvimento de novos esquemas. Ao mesmo tempo, o uso do *Cabri 3D* facilitou a apreensão perceptiva das figuras e permitiu dinamizá-las. Nesse sentido, o *Cabri 3D* propiciou o *registro figural dinâmico,* facilitou a modificação posicional e as outras modificações das figuras, além de auxiliar em sua visualização.

Palavras-Chave: *Gênese Instrumental, Cabri 3D*, Transformações Geométricas no Espaço, Registro Figural Dinâmico.

Abstract

This thesis has the purpose of observing how students from the 2nd year of High School make use of geometric transformations of space when interacting with the environment of Dynamic Geometry *Cabri 3D*, as well as what kind of reasoning they use when developing activities concerning this content. Thereby, this work intends to answer the following questions: *How do students make use of the tools and/or resources of Cabri 3D in order to learn the geometric transformations of space? How does the integration of Cabri 3D interfere in the process of learning these geometric transformations?* The methodology adopted used aspects of Didactics Engineering, according to Artigue (1988). The theoretical foundation was the Instrumental Approach of Rabardel (1995) to enable the understanding of how students interact with *Cabri 3D* and which contents they make use of during the development of a sequence of activities. In addition, the theory of Register of Semiotics Representation of Duval (1995) was used, specifically the apprehensions of a figure. The analyses of the activities which involve notions of geometrical transformation of space helped us realize other possibilities that the instruments can give the subjects as well as different ways of organizing the actions. Moreover, the activities made the development of different strategies easier for students who used the *Cabri 3D* and students established relationships between the software and mathematical knowledge. We verified the occurrence of *Instrumental Genesis*, because the students' actions showed pre-established schemes or the development of new schemes. At the same time, the use of *Cabri 3D* helped the perceptive apprehension of the figures and allowed to become dynamic. This way, *Cabri 3D* permitted the dynamic figural register, facilitated the positional modification and the other modifications of figures, and their visualization.

Key-words: Instrumental Genesis, *Cabri 3D*, Geometric Transformations of space, Dynamic Figural Register.

Resumen

Esta tesis tuvo por objetivo observar como los estudiantes de segundo año de Secundaria se apropian de las nociones de transformaciones geométricas en el espacio, cuando interactúan con el ambiente de Geometría Dinámica *Cabri 3D* y que raciocinio movilizan cuando realizan tales actividades. Pretendimos responde las siguientes preguntas: *¿De que forma, los estudiantes se apropian de las herramientas e/o recursos del ambiente Cabri 3D cuando estudian algunas transformaciones geométricas en el espacio?, ¿Como la integración con Cabri 3D interfiere en el proceso de aprendizaje de esas transformaciones?* Utilizamos como metodología, aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1988). El referencial teórico se fundamentó en la teoría Instrumental de Rabardel (1995a), para comprender como los alumnos interactúan con el *Cabri 3D* y que contenidos movilizan durante o desarrollo de la secuencia de actividades y en la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) específicamente, en las diferentes aprehensiones de una figura. El análisis de las actividades que incluyen nociones de transformaciones geométricas en el espacio ayudó a percibir otras posibilidades que los instrumentos pueden dar a los sujetos y las diferentes formas de organizar acciones. Además, las actividades trabajadas facilitaron el desenvolvimiento de diferentes estrategias de los estudiantes durante el uso del *Cabri 3D* y el establecimiento de relaciones entre el *software* y sus conocimientos matemáticos. Constatamos el proceso de *Génesis Instrumental* de los estudiantes, ya que sus acciones mostraron *esquemas de utilización* preestablecidos ó el surgimiento de nuevos esquemas. De la misma manera, el uso del *Cabri 3D* facilitó la aprehensión perceptiva de las figuras y permitió dinamizarlas. En ese sentido, el *Cabri 3D* propició el *registro figural dinámico*, facilitó la modificación posicional y las otras modificaciones de las figuras, además de auxiliar su visualización.

Palabras-clave: *Génesis Instrumental*, *Cabri 3D*, Transformaciones Geométricas en el Espacio, Registro Figural Dinámico.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

Considerações Iniciais[1]

Por diversas razões, o ensino dos conteúdos matemáticos e, em especial, os relacionados à Geometria não têm oferecido subsídios suficientes aos alunos para que superem suas dificuldades para fazer conjeturas, fato que pressupõe deficiência do domínio conceitual da matemática para interpretar formas geométricas. Tais dificuldades manifestam-se, por exemplo, nos Exames Nacionais do Ensino Médio (ENEM).

Na área de Educação Matemática, investigações como as de Pavanello (1993; 2004), Almouloud et al. (2004) e Silva (2006), entre outras, indicam que o ensino de Geometria, importante, ao desenvolvimento intelectual dos indivíduos, apresenta sérios problemas.

Em Geometria Espacial investigações como as de Parzysz (1988; 1991) mostram a existência de uma dialética na aquisição de conhecimentos e o domínio de representações tridimensionais; de Cavalca (1997), aponta que as dificuldades que os alunos apresentam estão relacionadas ao desenvolvimento das capacidades de visualização e interpretação de objetos do espaço no plano.

Por sua parte, Chaachoua (1997) assinala em seus estudos, que as figuras geométricas nos livros didáticos franceses, com frequência, são representadas de maneira convencional e, às vezes, erradas e, o uso dessas representações não garante que os alunos possam desenvolver habilidades de visualização, necessárias para resolver problemas espaciais.

[1] A correção de Língua Portuguesa desta tese está conforme as novas regras do acordo ortográfico.

A investigação de Rommevaux (1999) mostra que na passagem do material manipulativo (maquete) para a representação figural em perspectiva, a coordenação dos diferentes elementos (tri, bi e unidimensionais) e o discernimento dos planos, não são fáceis para os alunos.

Esses estudos nos fazem perceber que as dificuldades no ensino-aprendizagem de Geometria Espacial, podem estar associadas às representações planas de objetos tridimensionais, sua visualização, compreensão e apropriação.

Além disso, os ambientes computacionais no ensino podem servir de auxílio ao processo de ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, na medida em que possibilitam trabalhar de maneira interativa, visual e dinâmica, além de permitir testar hipóteses e construir conjecturas e propiciar o uso de metodologias diferentes das tradicionais.

Nesse sentido, pesquisas como as de Olivero e Robutti (2001); Laborde (2001); Gravina (2001) e Restrepo (2005; 2008) ressaltam que os ambientes da Geometria Dinâmica podem proporcionar outra perspectiva para o ensino e a aprendizagem de Geometria. Estes ambientes influenciam na elaboração e interpretação das representações de objetos planos e espaciais, porque, por meio da exploração das figuras (manipulação direta), podem minimizar as dificuldades de visualização e facilitar os tratamentos delas, visto que a manipulação direta permite ao usuário ver uma figura desde diferentes pontos de vista. Ressaltamos que, uma figura construída em um ambiente de Geometria Dinâmica preserva as propriedades relacionadas ao objeto matemático que representa, quando um de seus pontos é deslocado.

Assim, após a observação das dificuldades constatadas no ensino-aprendizagem de Geometria Espacial, o uso dos ambientes de Geometria Dinâmica no ensino, levou-nos a interessarmos pela aprendizagem de Geometria aliada ao movimento e, portanto, acreditamos pertinente fazer um estudo de transformações geométricas no espaço, visto que, observamos a carência de pesquisas sobre este conteúdo na área de Educação Matemática.

O presente estudo desenvolve-se com o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D* por acreditarmos que, na interação com este ambiente, noções de transformações geométricas no espaço podem ser introduzidas por meio de atividades que mobilizem esse conteúdo.

Assim, queremos responder às seguintes questões: *de que maneira, os estudantes apropriam-se das ferramentas e/ou recursos do Cabri 3D na aprendizagem de transformações geométricas no espaço? Como a integração do Cabri 3D interfere no processo de aprendizagem dessas transformações geométricas?* Para isso, elaboramos: atividades introdutórias ao *Cabri 3D* e outras de construção de modelos animados, que mobilizem noções de transformações geométricas no espaço, para observar a interação com o *Cabri 3D* e conjecturar como são mobilizadas essas noções matemáticas e como o ambiente de Geometria Dinâmica pode facilitar as diferentes apreensões de uma figura e sua visualização.

Pretendemos responder às questões propostas, baseando-nos na abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), por pensarmos que esta teoria permite analisar as ações e as noções matemáticas que os estudantes mobilizam quando resolvem uma situação-problema. Baseamo-nos, também, na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), pois o registro figural e as diferentes apreensões que pensamos que os alunos podem desenvolver na interação com o *Cabri 3D* nos dão elementos para compreender como veem ou visualizam uma figura tridimensional.

Escolhemos como metodologia de pesquisa aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1988), porque esta metodologia permite confirmar ou não as hipóteses pela confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Na parte experimental, trabalhamos com alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular do Estado de São Paulo e na coleta de dados, utilizamos além das atividades, questionários, fichas de observação e gravação em vídeo.

A seguir, apresentamos a estrutura do trabalho, composto de quatro capítulos.

No primeiro capítulo, apresentamos a problemática da pesquisa, isto é, estudamos algumas pesquisas relacionadas ao ensino-aprendizagem de Geometria no Brasil, representações em Geometria Espacial, justificamos o tema de pesquisa, pesquisas relacionadas à Geometria Dinâmica aplicada, bem como apresentamos o *Cabri 3D* e delimitamos a problemática.

No segundo capítulo, apresentamos os Quadros teórico e metodológico e os procedimentos utilizados na pesquisa.

No terceiro capítulo, estudamos o objeto matemático sob três pontos de vista. Descrevemos um possível caminho histórico das transformações geométricas. Fazemos um estudo matemático, centrado em algumas isometrias no espaço: translação, reflexão em relação a um ponto, reflexão em relação a uma reta, reflexão em relação a um plano e rotação. Finalmente, apresentamos um breve estudo, das transformações geométricas, do ponto de vista do ensino.

No último capítulo, apresentamos o experimento, caracterizamos a escola e os sujeitos do estudo, fazemos um estudo diagnóstico, descrevemos a sequência de atividades, bem como as análises *a priori* e *a posteriori* das mesmas. Por fim, apresentamos as considerações finais do estudo.

Capítulo 1

A PROBLEMÁTICA

Neste capítulo, buscamos contextualizar o tema do estudo, para tal, realizamos um levantamento de algumas pesquisas relacionadas ao ensino-aprendizagem de Geometria, estudos relacionados às representações em Geometria Espacial, justificamos o tema de pesquisa, apresentamos o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*, para por fim, levantar as hipóteses, as questões de pesquisa e seus correspondentes objetivos.

1.1 A Geometria no Brasil

Apresentamos as pesquisas de Pavanello (1993; 2004), Araújo; Nacarato (2004), Almouloud et al. (2004) e Silva (2006) que mostram estudos sobre o ensino da Geometria no Brasil e indicam que, o ensino dessa área da Matemática, mesmo importante para a formação e desenvolvimento intelectual dos sujeitos, ainda tem muitos problemas.

Pavanello (1993) refere que o ensino da Geometria no Brasil apresenta sérios problemas. Para a autora, a questão é mundial; além disso, durante séculos, o estudo de Geometria não foi considerado “indispensável”. Assim continuam existindo divergências na comunidade Matemática quanto ao papel da Geometria na educação e na pesquisa em Educação Matemática. Contudo, na tentativa de esclarecer a situação, pesquisas têm sido desenvolvidas.

De acordo com a autora, para tentar compreender o abandono do ensino da Geometria no Brasil é preciso fazer uma análise do desenvolvimento sociopolítico-econômico da sociedade brasileira. Nesse sentido, explica que, no início do século XX, o ensino da Matemática na escola primária era prático – técnicas e operações –, e o ensino secundário – abstrato – era dirigido a uma minoria que era preparada para fazer curso superior. Além disso, a maioria dos professores de Matemática compunha-se de engenheiros civis ou militares.

Entre a primeira e segunda guerras mundiais, aconteceram algumas modificações importantes no ensino, como a criação do Ministério da Educação e Saúde. Em relação ao ensino de Matemática e, em particular, de Geometria, a autora assinala que o Ministério da Educação e Saúde pressupunha que:

> [...] ele se inicie pelas explorações intuitivas, a partir das quais se estabelecerão os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização que deverá atingir a exposição formal. [...] É difícil avaliar a repercussão dessas instruções no dia-a-dia da sala de aula principalmente quando se leva em conta a formação dos docentes. (PAVANELLO 1993, p. 10-11)

Nas décadas de 1940 e 1950, os temas de Matemática eram trabalhados de forma separada: Aritmética, Álgebra e Geometria. Em alguns níveis, a Geometria não era ensinada e, em outros, era recomendado seu ensino de maneira intuitiva.

De acordo com Pavanello (1993), o ensino da Geometria, no início da década de 1960, sofreu influência do Movimento da Matemática Moderna. Segundo a autora, o ensino da Geometria baseava-se na teoria dos conjuntos, com a preocupação de chegar a sistematizações a partir de noções primitivas. As transformações geométricas foram introduzidas no ensino na época do Movimento da Matemática Moderna, fazendo parte do currículo nos níveis Fundamental e Médio desde 1960. Para a autora,

> [...] a maioria dos professores de Matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar Geometria sob qualquer enfoque. Em vez de Geometria, [...] enfatiza-se a álgebra. (PAVANELLO, 1993, p. 13)

A promulgação da Lei no. 5.692/71 permitiu que muitos professores estruturassem seu programa, segundo as necessidades dos estudantes, ou seja, eles tinham certa “autonomia” para elaborar os planejamentos. Em consequência disso, a Geometria deixou de ser ensinada no primeiro grau (idade dos estudantes 11-15 anos), já que se dava ênfase à Aritmética e às noções de conjuntos. No segundo grau (idade dos estudantes 15-18 anos), os alunos apresentavam dificuldades ainda maiores para trabalhar com as figuras geométricas e suas representações, visto que esses conceitos não eram ensinados nas séries anteriores, e o desenho geométrico havia sido substituído pela Educação Artística em todos os anos. (PAVANELLO, 1993)

Durante as décadas de 1960 e 1970, o ensino superior foi reformulado; as redes públicas de ensino de primeiro e segundo graus foram ampliadas e foram criados novos cursos de licenciatura. No entanto, permaneceram as mesmas falhas, como cursos com critérios rigorosamente insuficientes, com pouca organização e domínio de conteúdo. Com essas mudanças, os professores trabalhavam em condições muito difíceis, sobretudo, econômicas. (PAVANELLO, 1993)

Pavanello e Atiyah (1982, p. 51 apud PAVANELLO, 1993, p. 16) salientam que é necessário cultivar e desenvolver o pensamento visual e sequencial na Geometria; além disso, Pavanello (1993) afirma que os baixos resultados atribuídos ao ensino de Geometria não justificam o abandono e que, para haver uma mudança, seria necessário maior investimento na pesquisa, no intuito de melhorar a qualidade de seu ensino no Brasil.

No mesmo sentido, os pesquisadores Araújo; Nacarato (2004) investigaram sobre o ensino de Geometria no Brasil, especificamente, suas tendências didático-pedagógicas. Os autores consideraram o período de 1987 a 2001, tomando como referência dados dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) de 1987 (PUC/SP); 1988 (Maringá/PR); 1990 (UFRN); 1992 (Blumenau/SC); 1995 (UFS/SE); 1998 (Unisinos/RS) e 2001 (UFRJ).

No trabalho, duas categorias de ensino de Geometria no Brasil foram identificadas:

- *Geometria experimental*: classificada em subcategorias: empírico-ativista, sociocultural, provas e argumentações e teórico-epistemológica.
- *Geometria em ambientes computacionais*: classificada em duas subcategorias: geometria em ambientes de Geometria Dinâmica e a geometria no ambiente LOGO.

Os autores analisaram essas categorias e mostraram uma característica comum, entre elas. De fato,

> [...] na análise dos trabalhos, ao longo dos sete encontros já realizados, identificamos duas tendências didático-pedagógicas emergentes no Ensino de Geometria: a Geometria Experimental e a Geometria em ambientes Computacionais. Identificamos um movimento muito parecido nas duas tendências: ambas, em seu início, tinham uma característica mais motivadora, de apresentação de materiais e ambientes, sem preocupações explícitas com reflexões teóricas sobre a utilização desses recursos. Atualmente, a ênfase vem sendo posta na análise teórica desses procedimentos metodológicos e, ao mesmo tempo, tal análise, vem fornecendo novos direcionamentos para a sala de aula. (ARAÚJO; NACARATO, 2004, p. 11)

Além disso, citam uma característica comum entre a Geometria experimental e a Geometria em ambientes computacionais: ambas têm abordagens exploratórias, nas que, os aspectos experimentais e teóricos do pensamento geométrico são abordados. Nesse sentido, Araújo; Nacarato (2004) mencionam que muitos trabalhos discutem a função das provas e argumentações no ensino de Geometria, além dos aspectos epistemológicos, como a visualização e a representação.

Em outra pesquisa, Pavanello (2004) assinala as dificuldades que os professores e estudantes apresentam em Geometria:

- Na representação de figuras geométricas e suas dimensões;
- Na diferenciação dos conceitos de área, perímetro e superfície; e
- Para relacionar conceitos geométricos, a fim de resolver uma situação-problema.

A autora realizou uma pesquisa com alunos das séries iniciais (Ensino Fundamental) para tentar ver como essa situação poderia melhorar. Afirma que muitos estudantes dessas séries, em relação ao triângulo dizem,

> [...] "Triângulo é uma figura que tem 3 lados", porém reconhecem como triângulos apenas aquelas figuras de três lados que são apresentadas de uma forma especial: elas devem ser o mais regulares possível (ter os três lados do mesmo tamanho, ou, quase) e devem estar com um dos vértices voltados para cima. Um triângulo escaleno – ou mesmo um equilátero que esteja com um dos vértices voltado para baixo – nem sempre são reconhecidos como sendo triângulos. (PAVANELLO, 2004, p. 1)

No entanto, para a autora esses estudantes não pareciam muito convencidos disso, e reconheciam triângulos em figuras que não o eram. Ao tentar responder à pergunta *Por que isto acontece?* Afirma que os estudantes seguem os modelos que, muitas vezes, são apresentados nos livros didáticos ou pelo professor, mostrando o triângulo de uma só maneira, fazendo com que a imagem mental que o estudante passa a ter, seja somente essa forma apresentada.

Pavanello (2004) assinala que outras pesquisas mostram que muitos estudantes acreditam que, ao colocar uma figura em uma posição diferente, esta figura já não será a mesma. Segundo ela,

> [...] acredito que muitas das dificuldades dos alunos têm origem no material utilizado em sala de aula: o livro didático e folhas de papel com as figuras já desenhadas. Nesses materiais, as figuras estão fixas no papel, sem qualquer mobilidade, de modo que não é possível girá-las, colocá-las em posições diferentes ou umas sobre as outras para facilitar sua comparação. Raramente os alunos são levados a observar o seu meio ambiente, identificando as formas geométricas nele existentes e que, muitas vezes, não se encontram nas mesmas posições em que elas são costumeiramente apresentadas em sala de aula. (PAVANELLO, 2004, p. 2)

Para superar as dificuldades de representar figuras geométricas, seria necessário que os professores trabalhassem com diferentes tipos de materiais e, que os estudantes construíssem distintas figuras geométricas com esses materiais, a fim de construir seus conhecimentos geométricos. A autora afirma que,

> [...] hoje existe consenso entre os educadores sobre a necessidade de se abordarem as questões Matemáticas a partir de situações do cotidiano. Porém, não é qualquer tratamento dos conteúdos que proporciona aos alunos a possibilidade de construir significativamente os conceitos matemáticos. (PAVANELLO, 2004, p. 9)

Uma vez mais a pesquisa de Pavanello (2004) mostra a necessidade de trabalhar em Geometria as representações de figuras, desde as séries iniciais e dar continuidade a esse trabalho ao longo de toda a educação básica.

Almouloud et al. (2004) apontam que a formação dos professores do Ensino Fundamental apresenta problemas relacionados com a aprendizagem por parte dos professores de Geometria e com o ensino-aprendizagem dos estudantes, mesmo considerando a importância dessa disciplina como instrumento para outras áreas científicas.

O projeto de pesquisa desenvolvido pelo autor com uma equipe de outros investigadores visava a estudar questões relacionadas à aprendizagem de Geometria nas séries finais do Ensino Fundamental, bem como reconhecer as representações utilizadas no ensino dessa área da Matemática. Embora os professores investigados no projeto afirmem que a Geometria é importante e merece estar incluída em todos os níveis de ensino, não há coerência entre essa afirmação e a prática de ensino, já que organizam os conteúdos, para o Ensino Fundamental e Médio sem focar, muitas vezes, conteúdos de Geometria.

Almouloud et al. (2004) salientam que, no projeto de pesquisa, são tratados os seguintes aspectos: a origem de problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de Geometria no sistema educativo e nos cursos de formação dos professores; as estratégias elaboradas pelo processo de formação para enfrentar, pelo menos, parte desses problemas; as possibilidades de mudança nas concepções e nas práticas dos professores do Ensino Fundamental a partir de um processo de formação continuada. A precariedade da formação dos professores de Matemática, e a forma como os livros didáticos apresentam os conteúdos de Geometria, além das deficiências do próprio sistema educativo, foram apontadas nos resultados dessa investigação. Observamos, ainda, que as dificuldades de visualização e a exploração de figuras, especificamente em Geometria Espacial, apareceram.

Silva (2006) mostra que o abandono da Geometria no Brasil deve-se, de certa maneira, às dificuldades intrínsecas dela, mas também à eliminação do Desenho Geométrico (DG) e da Geometria Descritiva (GD) dos vestibulares para os cursos de engenharia e arquitetura de todas as instituições de ensino superior em meados da década de 1970. O fato ocasionou, progressivamente, a eliminação dessas disciplinas no ensino básico. O autor cita: *estas são as principais causas apontadas como responsáveis pela redução quantitativa de conteúdos e pela perda de qualidade do ensino da Geometria.* (Silva, 2006, p. 41)

Por outro lado, nos resultados do Exame Nacional do Ensino Médio[2] (ENEM), foram observadas dificuldades dos estudantes, tais como: domínio da linguagem científica e identificação dos pressupostos que estruturam o domínio conceitual da Matemática, para interpretar formas geométricas presentes na natureza, dentre outros aspectos. (INEP[3], 2006)

Além disso, segundo os dados do INEP, no ENC-Provão[4] (1998-2001), as questões de Geometria Espacial apresentaram um baixo índice de respostas e de acertos (Quadro 1) o que mostra a necessidade de maior empenho no trabalho com a área.

Quadro 1. Porcentagem de acertos no Exame Nacional de Cursos

Ano	Questão	Tema	% de acerto
1998	16	Pirâmide, visualização de elementos.	8
1999	26	Cubo, pirâmide regular inscrita, aresta lateral.	7
2000	14	Secção de um cubo.	3
2001	02	Blocos lógicos, figuras planas e espaciais.	7

Fonte: ENC - Provão (1998-2001)

[2] Os dados aqui apresentados constam nos relatórios de divulgação do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), os que contêm informações sobre as provas realizadas desde 1998 a 2002. Nesse exame, as questões são distribuídas em termos de cinco competências e 21 habilidades a serem avaliadas.

[3] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

[4] Exame Nacional de Cursos (ENC-Provão) foi um exame aplicado aos formandos, no período de 1996 a 2003, no que tange aos resultados do processo de ensino-aprendizagem em diversas áreas - fonte INEP.

Como visto nas referidas pesquisas e nos dados do ENEM, existem problemas no processo de ensino-aprendizagem de Geometria, no que se refere, especialmente, às representações de figuras espaciais e sua visualização. Fato que nos leva a procurar investigações sobre esse tema.

1.2 Representações em Geometria Espacial

Nesta parte do trabalho, assinalamos algumas pesquisas em Educação Matemática que mostram a existência das dificuldades apontadas anteriormente, como as de Parzysz (1988; 1991), Cavalca (1997; 1998), Rommevaux (1999), Kaleff (2003), Montenegro (2005) e Flores (2002; 2007).

Para Parzysz (1988), há uma dialética entre a aquisição de conhecimentos em Geometria Espacial e o domínio de representações tridimensionais. Conforme o autor, o ensino de Geometria Espacial nas escolas secundárias francesas são utilizadas representações gráficas. No entanto, estas representações contêm muitas convenções implícitas que nem sempre são percebidas ou dominadas pelos estudantes.

Parzysz (1988, p. 80) cita que [...] *figura geométrica é o objeto geométrico descrito pelo texto que o define, uma ideia, uma criação da imaginação.* Assim, a representação de uma figura é um "desenho". Para ele, a representação de uma figura tridimensional é necessária, porque só depois de passar por ela, os estudantes podem ter imagens mentais dos objetos geométricos. O autor distingue três níveis de representação de uma mesma figura:

- **Nível 0:** a figura propriamente dita.
- **Nível 1:** a representação denominada por ele "próxima". Representação de objetos geométricos, usando modelos como, por exemplo, maquetes que mantêm as dimensões da figura original; e
- **Nível 2:** a representação "distante", segundo essa denominação, a representação de objetos tridimensionais é feita em um suporte bidimensional. Contudo, guarda uma relação de proporcionalidade, isto

é, a representação envolve conceitos conhecidos e/ou aceitos de modo intuitivo.

O autor ressalta que, na passagem de um nível a outro, existe perda de informação, como mostram os dados do Quadro 2.

Quadro 2. Níveis de representação de uma figura

		Geometria	
		2D	*3D*
	Nível 0	Figura	
Representação “próxima”	Nível 1	Desenho	Maquete
Representação “distante”	Nível 2		Desenho

perda de informação

Fonte: Parzysz, (1988, p. 80)

Para Parzysz (1988), esta perda é produzida, por vários motivos:

- **Na passagem do nível 0 ao 1:** nem tudo pode ser mostrado na representação, uma vez que algumas propriedades aparecem somente pela “boa leitura” e dependem da natureza da figura representada. Por outro lado, Parzysz afirma (1988) que algumas figuras não podem ser representadas em sua totalidade, porque são ilimitadas como, por exemplo, a reta e o plano. A representação dessas figuras é feita com base em uma convenção Matemática. Por exemplo: uma reta é representada por um segmento e um plano, por um retângulo ou um paralelogramo.
- **Na passagem do nível 0 ao nível 2:** a representação de uma figura tridimensional não é muito clara e sua visualização torna-se difícil por causa das propriedades das figuras tridimensionais, havendo perda de informação na representação.

O autor assinala que os estudantes tendem a considerar as propriedades do desenho como as da própria figura, visto que os problemas referem-se, tanto à codificação (produção) como à decodificação (leitura/interpretação) de representações planas de figuras tridimensionais.

Parzysz (1988) assegura que os problemas de codificação de uma figura tridimensional em um desenho que a representa originam-se na impossibilidade de proporcionar uma “representação próxima” a ela, (nível 1) e na necessidade de recorrer a uma “representação distante” (nível 2), como se observa nos dados do Quadro 2.

Segundo o autor, o fato origina o conflito entre o visto e o sabido. O conflito pode ser percebido nas representações que os estudantes fazem. Como, por exemplo, quando um estudante representa uma pirâmide reta de base quadrada, ele vê a representação do objeto como um todo,

> [...] se ele desenha um triângulo isósceles, não é porque quer representar a pirâmide vista de frente, mas, porque esse elemento é importante para que identifique o objeto que deseja representar. (PARZYSZ, 1988, p. 89, tradução nossa do original francês)

A interpretação de uma representação, conforme Parzysz (1991) – “decodificação” –, permite conservar mais propriedades da figura, por essa razão, o autor defende o ensino explícito e sistemático de um sistema de representação, no caso, a perspectiva Cavaleira[5] que deve ser utilizada, porque sua compreensão é a mais fácil, cognitivamente, falando.

Como visto acima, as representações de objetos no espaço geram problemas no processo de aprendizagem de Geometria Espacial e estes problemas estão atrelados também à visualização.

Seguindo essa mesma linha de pensamento, Cavalca (1998) desenvolveu uma pesquisa sobre a necessidade de visualizar e interpretar objetos espaciais e suas representações. Assinala que as dificuldades que os estudantes apresentam a respeito da passagem da Geometria no plano (bidimensional) à Geometria no espaço (tridimensional) estão relacionadas ao desenvolvimento das capacidades de visualização e interpretação das representações planas de objetos do espaço.

A partir da visualização e da interpretação dos objetos, manifestam-se a percepção, construção, transformação e utilização de imagens que podem ser usadas na resolução de uma situação-problema. O autor afirma que,

[5] A perspectiva Cavaleira é a projeção de um objeto sobre um plano com base em uma fonte no infinito com os raios oblíquos ao plano de projeção. Ela é usada quando uma das faces do objeto tridimensional é paralela ao plano de projeção. (Bongiovanni, 2006, p. 56-57). A figura abaixo exemplifica a definição.

> [...] a visualização é a recomposição mental da imagem de um objeto, evocado tanto pelo nome dele, quanto por suas características, representação gráfica, etc. A visualização também será vista como a conversão de conceitos em imagens visíveis ou mentais. Desse modo, visualizar significará tanto evocar quanto criar imagens. (CAVALCA, 1998, p. 34)

Em sua pesquisa, Cavalca (1998) desenvolveu uma sequência de atividades com material concreto e suas representações com lápis e papel que levaram os estudantes a perceber os distintos tipos de representação de uma mesma figura, utilizando diferentes técnicas de perspectiva além de relacionar objetos tridimensionais com suas representações bidimensionais.

Seguindo essa mesma linha de pensamento, a pesquisadora Rommevaux (1999) considera que existem muitas dificuldades relacionadas à questão da representação e da visualização, acrescentando que [...] *pode-se ensinar os estudantes a verem no espaço?* [...] *mas ver três dimensões em uma figura geométrica que só tem duas?* (ROMMEVAUX, 1999, p. 14, tradução nossa do original francês).

Para identificar essas dificuldades, a pesquisadora desenvolveu um estudo experimental na França, mediante uma sequência didática com estudantes de 15-16 anos. O grupo experimental estava formado por duas turmas de 1a série do Ensino Médio, havendo um grupo de controle também formado por duas turmas da mesma série.

Segundo a autora, a dificuldade para os estudantes já familiarizados com a Geometria Plana encontra-se na mudança de dimensão dos elementos estruturais. Ela assinala,

> A interseção de uma reta e um plano é um ponto, figura geométrica de dimensão zero. Determinar essa figura demanda a construção de elementos de dimensão superior, ao menos um segmento – de dimensão um –, então, ele pode ser um ponto. Além disso, pontos são definidos como interseção de retas, mas nós estamos no espaço de dimensão três onde os elementos estruturais são os planos de dimensão dois. (ROMMEVAUX, 1999, p. 15, tradução nossa do original francês)

Logo, a dificuldade dos estudantes encontra-se no aumento ou diminuição de dimensão quando da resolução de uma situação-problema. Para a autora [...], *ver no espaço pode manifestar-se pela capacidade de distinguir os planos de uma representação não tridimensional*. (ROMMEVAUX, 1999, p. 14, tradução nossa do original francês)

Em seu estudo, Rommevaux (1999), apresenta um problema de Geometria Espacial colocado para os estudantes[6]. Para solucioná-lo, eles deveriam passar por diferentes fases: seleção de planos, resolução de problemas planos – bidimensionais – e, finalmente, a inter-relação desses planos. A autora observou que a principal dificuldade apresentada estava relacionada à seleção de planos pertinentes para resolver as questões planas.

A autora assinala que, em Geometria Plana, a coordenação de registros de representação semiótica (figural e língua natural) é difícil, porém as dificuldades em Geometria Espacial são maiores, visto que a representação de um sólido por meio de sua perspectiva Paralela[7] depende da posição do observador, o que implica a visualização de planos pertinentes a serem relacionados.

Rommevaux (1999) aponta que os estudantes podem aprender a representar e reconhecer a representação de um sólido em perspectiva paralela, mas resolver problemas tridimensionais, usando as seções planas demanda maior maturidade e uma aprendizagem específica que pode ser feita com o uso de uma maquete. Assim, alguns estudos históricos e técnicos mostram que as maquetes podem ter duas funções importantes: função heurística, dada pela simulação que se pode fazer com ela e função de verificação. Na análise heurística de duas figuras geométricas relacionadas a um mesmo problema, a autora destaca que, apesar de trabalhar dentro de um mesmo registro de representação semiótica, as figuras, uma plana e outra tridimensional, em perspectiva paralela, têm diferenças importantes entre si.

A primeira diferença está vinculada ao fato de que, em Geometria Plana, os elementos de referência representados, o suporte de representação, o plano de referência e o plano da situação coincidem e, em Geometria Espacial, o(s) plano(s) de referência, o suporte de representação e o(s) plano(s) da situação geométrica pode(m) ou não coincidir.

---

[6] Estudantes de Ensino Médio de França.

[7] A perspectiva Paralela é a projeção de um objeto sobre um plano a partir de uma fonte colocada no infinito (os raios solares podem ser considerados como uma boa aproximação de raios paralelos). (Bongiovanni, 2006, p. 56). A figura abaixo exemplifica a definição.

A segunda diz respeito à natureza da relação entre o objeto e sua representação, em Geometria Plana, a representação dos objetos matemáticos e todas as modificações efetuadas sobre tal representação podem ser imediatamente interpretadas, como modificações sobre o próprio objeto matemático. No entanto, em Geometria Espacial, os planos de referência, eventualmente, são representados, e alguns planos da situação apresentada não são identificados rapidamente.

Além do mais, a autora define critérios para a diferenciação dos planos, tais como:

- Planos imediatamente perceptíveis são os rapidamente observados pelos estudantes na "figura fonte", favorecendo a solução quase imediata da questão colocada.
- Planos não imediatamente visíveis, dentre os quais se encontram:
    - **Planos diretamente discerníveis:** os que podem ser representados na "figura fonte" como, por exemplo, os planos situados nas faces adjacentes de um cubo e que se interceptam em uma aresta dele.
    - **Planos não visualmente acessíveis:** nesse caso, na figura devem ser adicionados os planos que sejam necessários para solucionar a situação apresentada.

Na aplicação da sequência didática, a autora utiliza uma maquete, que é um objeto tridimensional em acetato transparente, como modelo de sólido de referência; representações em perspectiva paralela e representações de seções planas do sólido. Nas fases: exploratória, de tratamento figurativo e de institucionalização foram aplicados esses três tipos de representações.

- **Fase exploratória:** esta fase foi precedida por um pré-teste e por um estudo dos alunos e, em seguida, por uma padronização dos conhecimentos dos estudantes, especialmente, do vocabulário. Seu objetivo diz respeito à tomada de consciência, por parte dos estudantes, das diferentes direções dos planos. Mostra os espaços, tridimensional e bidimensional (usando maquete e folhas em que estão desenhadas formas planas da maquete), o que permite que os estudantes façam argumentações para justificar os resultados obtidos nos problemas propostos na sequência didática.

- **Fase do tratamento figurativo:** seu objetivo oferecer representações em perspectiva paralela. A função de tratamento é uma ferramenta indispensável para a heurística do problema apresentado. É preciso realizar tratamentos sobre a maquete e as representações bidimensionais. Três tarefas contribuem para a coordenação das representações por meio de diferentes apreensões de uma figura. A primeira tarefa permite perceber a necessidade de regras na Geometria tridimensional e as outras duas pretendem desenvolver "a visão no espaço", especialmente, o discernimento de planos.
- **Fase de institucionalização:** foi integrada ao desenvolvimento das fases de exploração e tratamento figurativo, ou seja, a institucionalização ocorreu em vários momentos da aprendizagem.

Os principais resultados da pesquisa desenvolvida por Rommevaux (1999) indicam que há dificuldades para o discernimento dos planos no objeto material (maquete), e os estudantes não exploraram todas as possibilidades da maquete. Também foram identificadas dificuldades na passagem para a representação figural em perspectiva paralela como, por exemplo, coordenar diferentes elementos tri, bi e unidimensionais. A maquete facilitou a função de tratamento e conduziu os estudantes a utilizarem a apreensão perceptiva para chegar à apreensão operatória, no sentido de Duval (1995). Finalmente, a maioria dos estudantes compreendeu que é essencial começar pela identificação dos planos.

A pesquisadora Kaleff (2003) afirma que, nas últimas décadas, diversas pesquisas em Educação Matemática apontam para a importância de estimular a habilidade de visualizar objetos materiais. A autora afirma que,

> [...] é importante não confundir a habilidade de visualização – perceber o objeto geométrico em sua totalidade – com a percepção visual das representações disponíveis do objeto. A habilidade de visualização em Geometria Espacial pode ser desenvolvida se for disponibilizado ao indivíduo um apoio didático baseado em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo. (KALEFF, 2003, p. 17)

Kaleff assinala que o emprego de diversos modelos concretos, que representam um mesmo objeto geométrico, pode auxiliar o estudante a reconhecer a existência de algumas propriedades do objeto geométrico “abstrato”. Além disso, cita ser conveniente que o estudante tenha experiência com diversos tipos de materiais com o intuito de encontrar o meio mais apropriado para sua aprendizagem.

Ao corroborar com o pensamento defendido pelos pesquisadores anteriormente mencionados, Montenegro (2005) afirma que uma pessoa dotada de uma boa “habilidade espacial” pode mentalmente fazer várias manipulações da figura representada, ou seja, pode mudar a posição do observador. Assim, o autor considera que,

> [...] a habilidade espacial não é tida como específica; ela englobaria diferentes tipos de habilidades que procuram identificar relações de posição, direção, tamanho, forma e distância entre objetos. Ela percebe detalhes ou os agrupa em conjuntos; ou os monta em padrões dentro de uma base conhecida. (MONTENEGRO, 2005, p. 8)

Além disso, assinala que a habilidade espacial é uma capacidade humana que pode ser estimulada ou abandonada.

Para observar essa habilidade espacial, Montenegro (2005) realizou uma pesquisa em que foram aplicados seis testes, com diferentes figuras, em distintas posições, com o intuito de analisar a visão que os estudantes têm dos objetos espaciais. A pesquisa contou com 41 estudantes do Ensino Médio e, como resultado principal, o autor concluiu que os estudantes apresentaram muita dificuldade na representação de figuras espaciais e que a maioria utilizou a perspectiva Cavaleira para representá-las.

Comungando os saberes anteriormente discutidos, Flores (2002) avança em suas reflexões, ao afirmar que a perspectiva se estabelece como uma base histórico-teórica para aprofundar as discussões a respeito da representação dos objetos no espaço e dos problemas relacionados às representações obtidas, como é o caso da visualização.

Flores (2002) aponta que a técnica de perspectiva pode contribuir para um novo “olhar” dos objetos espaciais e dos problemas relacionados a essas representações. A visualização que causa tantas dificuldades é um desses problemas.

A autora desenvolveu sua pesquisa baseada em algumas técnicas de perspectiva, comparando diferentes métodos, sempre em um contexto histórico, tendo como objetivo a reflexão sobre como esse novo “olhar” que pode contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Flores (2002) sublinha que, para se ter esse novo “olhar”, é preciso abordar três elementos: a construção das regras de representação, a articulação entre a imagem representada e o objeto do espaço e o olhar em perspectiva. Além do mais, para a apreensão desse conhecimento, o estudante deve considerar a relação entre ver, construir e saber,

> [...] não é preciso “ver” o objeto no espaço antes de fazer o desenho, mas debruçar-se nas regras, na Geometria, na Matemática e descobrir formas que, talvez, não fosse possível nem mesmo prefigurar. Daí a visão do conjunto do objeto: é preciso juntar as partes e imaginá-las na totalidade do objeto. (FLORES, 2007, p. 166)

Nas pesquisas apresentadas (desenvolvidas em ambientes de lápis e papel, e/ou com material manipulativo), foram identificadas dificuldades relacionadas à visualização de figuras no espaço, à compreensão, à apropriação de noções e de propriedades geométricas. Estas pesquisas apresentam algumas reflexões didáticas sobre tais dificuldades e nos fazem refletir a respeito da importância inquestionável da Geometria Espacial da necessidade de procurar uma alternativa para tentar superá-las.

1.3 Justificativas do tema de pesquisa

Após essas leituras, fica claro que o ensino – aprendizagem da Geometria Espacial precisa apoiar-se nas representações de objetos geométricos.

Quando nos referimos às representações de objetos geométricos, devemos esclarecer dois termos importantes: desenho e figura geométrica. Em trabalhos de Educação Matemática, esta distinção é pesquisada.

Parzysz faz a distinção entre desenho e figura, [...] *uma figura é um objeto geométrico o que é descrito pelo texto que o define, um objeto imaginário, uma ideia. Entretanto, o desenho é somente o esboço de uma figura.* (PARZYSZ, 1980, p. 80, tradução nossa do original francês).

Além do mais, Chaachoua (1997) assinala que Laborde e Capponi utilizam a tríade referente, significante e significado da seguinte maneira,

> [...] o desenho pode ser considerado como o significante de um referente teórico (objeto de uma teoria geométrica como a geometria euclidiana ou a geometria projetiva). A figura geométrica compõe-se aparentemente de um referente dado a todos os desenhos, então é definido como, um conjunto de pares formados por dois termos, o primeiro, o referente, o segundo, um dos desenhos que o representa. O segundo termo é adotado do universo dos desenhos possíveis do referente. O termo figura geométrica revê nessa acepção uma relação entre um objeto geométrico e suas representações possíveis. Nessa abordagem, as relações entre um desenho e seu referente construídas por um sujeito, leitor ou produtor do desenho, constitui o significado da figura geométrica associada para esse sujeito. Esse significado corresponde ao que Fishbein (1993) chama *conceito figural*. (LABORDE e CAPPONI 1994, p. 168-169, tradução nossa do original francês)

Contudo, como empregamos o ambiente de Geometria Dinâmica[8] cuja base é o movimento utilizaremos no trabalho, a seguinte distinção:

- **Figura:** representação de objetos geométricos que conservam suas propriedades quando são deslocados, ou seja, manipulados;
- **Desenho:** representação de objetos geométricos, quando manipulados, não conservam suas propriedades, isto é, desmancham-se.

Por outro lado, observamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental, PCN (1998)[9] e as orientações complementares, PCN+[10] (2002), sugerem o estudo de transformações geométricas.

---

[8] Os ambientes de Geometria Dinâmica integram conteúdos matemáticos e recursos computacionais e permitem a manipulação direta das figuras mantendo suas propriedades.

[9] O bloco "Espaço e Forma" dos PCN sugere o trabalho com transformações geométricas, nas 7ª e 8ª séries. As transformações geométricas encontram-se dentro do estudo dos polígonos e são feitos de forma intuitiva.

[10] Orientações Educacionais complementares à obra Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias.

Assim, nos PCN+ (2002), o estudo de transformações geométricas é sugerido ao considerar ampliações e reduções de figuras, como resultados da aplicação de transformações em uma situação inicial em outra final. Além disso, é proposta a percepção de relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto. É também sugerido o estabelecimento de relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador, com os objetos que lhes deram origem,

> [...] para desenvolver o raciocínio de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o **estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais**; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. (PCN+, 2002, p. 123) (grifo nosso)

Após as pesquisas apresentadas que apontam problemas relacionados à visualização e compreensão das propriedades de figuras geométricas no espaço; as sugestões dos PCN+ sobre o estudo das relações entre figuras planas e espaciais e, considerando o uso dos ambientes de Geometria Dinâmica no ensino é cada vez maior, pois, permitem a manipulação direta das figuras, além de outras vantagens que proporcionam para o ensino-aprendizagem de Geometria. Estimulou-nos a estudar a Geometria aliada ao movimento e, como estamos interessados no estudo de Geometria Espacial, delimitamos o campo de pesquisa para o estudo de transformações geométricas no espaço.

Investigamos o tema e deparamo-nos com algumas pesquisas sobre transformações geométricas no contexto americano, francês e brasileiro.

No contexto americano, Coxford (1973) expõe motivos para estudar a Geometria no Ensino Fundamental e Médio, utilizando as transformações geométricas. O autor afirma que a introdução de transformações geométricas no ensino fornece oportunidades para examinar estruturas comuns aos objetos algébricos e geométricos. Essas inter-relações contribuem para que o estudante perceba a importância de estruturas comuns para toda a Matemática. De fato,

> [...] as transformações fornecem um meio para representar a Geometria de um modo unificado, diferente do que se faz usualmente, além de permitir ao estudante maior flexibilidade e criatividade na construção de provas. (COXFORD, 1973, p. 52, tradução nossa do original inglês)

O autor refere que as transformações geométricas enfatizam a interação entre Álgebra e Geometria, visto que podem ser introduzidas em termos completamente geométricos para depois serem representadas algebricamente por meio de matrizes, estudando então duas representações do mesmo objeto matemático: a geométrica e algébrica. Conclui que, dessa forma, é possível ajudar o estudante a ter confiança em sua habilidade Matemática, tornando-o ciente das várias abordagens que podem ter um mesmo objeto matemático, além de ajudá-lo a interpretar suas diferentes representações.

No contexto francês, Bkouche (1991) considera que as dificuldades encontradas no ensino, devem-se a quase ausência de reflexão sobre os conteúdos e suas significações. Afirma que muitos tópicos são incluídos nos programas escolares por apresentarem certo caráter de "novidade" como, por exemplo, os Fractais. Como consequência dessa concepção, chamada pelo autor de *modernidade*, surgem nos programas escolares certas noções sem uma devida reflexão.

No caso das transformações geométricas no ensino de Geometria, o autor afirma que tal conteúdo intervém de uma forma desligada de toda significação geométrica. Surgem como uma *caricatura* do Programa de *Erlangen* de Feliz Klein, expressão utilizada pelo autor para expressar o fato de que as transformações estão presentes no currículo[11] de um modo, segundo o qual não é possível apreender o verdadeiro significado das transformações geométricas, pois estas adquirem sentido geométrico por meio da noção de invariante. Noção esta que não é enfatizada no Ensino Médio francês.

Segundo o autor, de acordo com a abordagem do ensino de simetria central, simetria axial, translação e rotação e homotetia, à exceção da última, *não transformam nada*, isto é, as imagens das figuras são congruentes por causa

[11] O autor refere-se ao currículo do sistema educacional francês, que considera a simetria axial, simetria central, translações, rotações e homotetias, como conteúdos a serem trabalhados no Ensino Médio.

dessas transformações (simetria central, simetria axial, translação e rotação). Desta forma, a noção de invariante que caracteriza as Geometrias, passa despercebida, e o aluno não constrói o significado das transformações no sentido do Programa de *Erlangen*.

Além disso, Bkouche (1991) afirma que as transformações geométricas intervêm no ensino sob quatro problemáticas, são elas: o movimento, a semelhança, as figuras regulares e as transformações deformantes.

O movimento e as transformações geométricas

Conforme Legendre, de acordo com Bkouche (1991), a Geometria tem por objeto a medida de extensões. Considerando que medir é comparar grandezas de mesma natureza tomando uma delas como unidade, sendo preciso explicitar uma forma de realizar esta comparação. Na Geometria Euclidiana, esta comparação pressupõe uma sobreposição do objeto tomado como unidade sobre o objeto a ser medido, isto é, saber quantas vezes o objeto – unidade cabe no objeto a ser medido por meio de uma comparação física, que é expressa por uma razão matemática. A sobreposição está explícita no axioma 4 de Euclides: "*As grandezas que se pode fazer coincidir uma sobre a outra são iguais".* A questão que o autor observa é a natureza do movimento que permite realizar essa sobreposição. Tal movimento não deforma o objeto geométrico, portanto, o autor afirma que o objeto geométrico é um invariante do movimento.

O movimento geométrico, é utilizado na sobreposição de objetos geométricos, de acordo com Bkouche (1991), é um movimento no qual não são consideradas as forças nem o tempo, mas, a trajetória descrita pelo objeto geométrico para sair de sua posição inicial e atingir a posição final, sem posições intermediárias a serem consideradas, isto é, importa apenas a posição inicial e final do objeto. Bkouche (1991) assinala que se pode afirmar que o princípio de igualdade dos objetos geométricos por sobreposição que é a fundamentação da Geometria Euclidiana, pressupõe um movimento no espaço desprovido de qualquer intervenção do tempo, das forças e da trajetória descrita pelo objeto geométrico que enfatiza o estado de posição inicial e final do objeto.

O autor acredita tratar-se de uma discussão inócua, tentar descrever o movimento utilizado por Euclides e outros geômetras gregos, pois o nível de pensamento científico era outro, com muito menos rigor. Nesse sentido, para, adequar os axiomas de Euclides ao novo rigor matemático, acrescenta que Hilbert reescreveu-os, conforme os axiomas modernos, produtos do novo pensamento matemático.

O grande entrave intelectual, segundo o autor, está em aceitar fundamentar uma Geometria nova com axiomas que não se encaixam na nova ordem axiomática da Matemática, repleta de rigor. Mas, foi a *intuição* que levou Euclides a utilizar o movimento em sua axiomatização da Geometria.

Bkouche (1991) observa que o movimento intervém nas transformações geométricas por meio da translação e rotação. Nestas transformações, o apelo ao movimento do objeto geométrico é decisivo para sua compreensão. No caso da translação, um dos elementos que a caracteriza – o vetor, que é representado graficamente por um segmento orientado – já vem associado a um deslocamento cuja trajetória é um segmento de reta, pois o vetor indica a direção, sentido e o comprimento dessa trajetória, sendo um ente geométrico criado para esse fim. Além disso, pode-se provar que todo movimento do plano que envia um triângulo a outro diretamente igual, é composto por translações e rotações.

A semelhança

Bkouche (1991) destaca que a única transformação geométrica que intervém no estudo da semelhança é a homotetia.

- A homotetia permite a demonstração dos casos de semelhança (AA, LAL e LLL), utilizando os casos de congruência de triângulos. É uma transformação que *realmente transforma*, pois a figura inicial não é igual à figura final, mas conserva algumas características da inicial – os ângulos internos, que são os invariantes da transformação, e os lados da figura final guardam uma relação com os lados da figura inicial, relação esta que é a razão da homotetia.

As figuras regulares

Para seu estudo, o autor assinala ser possível utilizar transformações geométricas que deixem os lados e os ângulos invariantes. Tais transformações ou a composição delas são:

- **Rotação:** com o eixo em torno do centro do polígono e da amplitude $\frac{360^\circ}{n}$, sendo n, o número de lados.
- **Simetria central:** o centro da simetria é o centro do polígono regular.
- **Simetria axial:** sendo um eixo de simetria, a reta que contém uma diagonal ou uma perpendicular – a qualquer um dos lados – no caso do número par de lados. Ou apenas uma reta perpendicular que passa pelo centro do polígono, a qualquer um dos lados no caso de número ímpar de lados.

As transformações deformantes

As transformações deformantes citadas inicialmente por Bkouche (1991) são as projeções paralelas e centrais, nas quais o problema de representar no plano uma figura do espaço é tratado.

- Para cumprir com exatidão essa representação, segundo o autor, é necessário explicitar o que é invariante nessa passagem do espaço ao plano. Portanto, as transformações deformantes mudam a forma da figura, mas há relações entre seus elementos[12] que são mantidas após a transformação. A questão é determinar que relações são essas e, então, "ler" uma figura por meio de outra, geralmente, mais simples.

Além disso, o autor observa que nessas transformações o mais importante são os invariantes, pois eles determinarão a extensão das semelhanças entre a figura inicial e final.

No mesmo contexto, De Villiers (1993) afirma que no Ensino Médio as transformações geométricas podem dar subsídios para diversas áreas da

[12] Essas relações entre os elementos da figura inicial e as relações entre eles e seus transformados na figura final.

Matemática, servindo como um fio condutor no ensino. O autor assinala que podem ser utilizadas, por exemplo, nas definições formais de figuras geométricas, no estudo de gráficos e as correspondentes equações, além de proporcionar um bom caminho para a introdução do ensino de matrizes.

Outra pesquisa sobre as transformações geométricas foi desenvolvida na França, por Jahn (1998), em sua tese de doutorado. A pesquisadora investigou o ensino e aprendizagem das transformações geométricas, especificamente, no que diz respeito à passagem dos aspectos global e pontual das transformações geométricas. Para a autora, as transformações geométricas são abordadas no Ensino Fundamental, como transformações que operam sobre figuras apreendidas globalmente (ações sobre figuras). No Ensino Médio, estuda as condições didáticas da aprendizagem dessa noção e destaca o papel da Geometria Dinâmica, especificamente, como o *Cabri II* pode influenciar ou pôr em evidência as relações entre as concepções estáticas e dinâmicas em problemas de construção de figuras.

Por fim, a autora mostra que os conhecimentos construídos pelos estudantes foram influenciados pela utilização do *Cabri II*; além disso, afirma que esse ambiente facilita a apreensão dinâmica e serve de “meio”, para os processos de aquisição da noção de transformação geométrica no plano.

Além das pesquisas mencionadas, encontramos no Brasil outras investigações em Educação Matemática relacionadas ao estudo das transformações geométricas como, por exemplo, pesquisas de Mabuchi (2000), Curi (2000), Mega (2001) e Pretti (2002) que abordam o estudo das transformações geométricas, como conteúdos escolares e, também, o estudo dos livros didáticos sobre o tema no Ensino Fundamental.

De acordo com Mabuchi (2000), em 1994, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo entregou aos professores de escolas públicas uma coleção, *Experiências Matemáticas*, que incluiam algumas atividades referentes às transformações geométricas. Mudanças concretas, porém só aconteceram com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN, 1998), e as transformações geométricas no plano (isometrias e homotetias) foram retomadas como conteúdos de Geometria.

A pesquisa de Mabuchi (2000) aborda um estudo dos livros didáticos sobre as transformações geométricas no Ensino Fundamental, ressalta que,

> [...] nos livros didáticos analisados, a partir da 2ª série, são feitas as primeiras observações sobre a simetria de objetos do cotidiano dos estudantes, usando a analogia da imagem no espelho. Atividades com dobras no papel, com e sem quadriculado, estimulam a localização da imagem de figuras pela reflexão em uma reta. Os estudantes são estimulados a perceber a simetria no seu mundo, a investigar eixos de simetria em objetos e a desenvolver o senso estético e de organização, observando diversas configurações simétricas. Nas 3ª e 4ª séries, usando malhas diversas, são exploradas ideias de ampliação e redução de figuras[13]. Não há muitas diferenças na abordagem das transformações geométricas (que se limitam apenas a reflexões em retas) entre os livros didáticos observados. (MABUCHI, 2000, p. 101)

Na mesma linha de pensamento, Mega (2001) destaca aspectos importantes sobre o estudo das transformações geométricas em algumas das coleções de livros didáticos. O autor afirma que,

> [...] entre algumas das coleções didáticas mais conhecidas voltadas para o Ensino Médio (Iezzi, Dolce e Machado A.S.; Youssef e Fernandez; Iezzi, Dolce, Teixeira, Machado N.J., Goulart, Castro, Machado A.S.) não existe abordagem da Geometria por transformações nem estudo de propriedades das figuras ou resolução de problemas utilizando as transformações como ferramentas; também não existe o estudo das transformações como objetos matemáticos. Entretanto, ideias que se fundamenta na teoria das transformações se manifestam expressamente pelos assuntos tradicionalmente estudados nessas séries. (MEGA, 2001, p. 39)

Mabuchi (2000) e Mega (2001) afirmam que os livros didáticos que incluem tópicos sobre transformações geométricas, apresentam-nas de forma superficial. As atividades mostradas nos livros limitam-se apenas ao reconhecimento dos eixos de simetria em figuras e construção de imagens de figuras por reflexão, sem explorar a relação de alguns conceitos de Geometria como, por exemplo, a relação entre isometria e a noção de congruência e a relação entre homotetia e a noção de semelhança.

[13] Homotetias.

Em seus estudos, Curi (2000) e Pretti (2002) citam que a maioria dos professores, em formação inicial, não recebem uma formação adequada no tocante ao ensino das noções de transformações geométricas, sendo um dos motivos pelo qual a maioria dos professores reproduz em sala de aula o enfoque dado pelos autores dos livros didáticos.

O estudo de Pretti (2002) realizado em cinco universidades públicas e em cinco particulares buscava verificar se, na formação inicial de professores, era incluído em Geometria (Euclidiana, Analítica, Descritiva, Projetiva e Diferencial) o estudo de transformações geométricas, como parte do conteúdo. Como resultado, a autora identificou que, em 40% das universidades pesquisadas, as transformações geométricas faziam parte do conteúdo da disciplina de Geometria. No entanto, o estudo de Curi (2000) verificou com um grupo de professores participantes de sua análise que o estudo de transformações geométricas nem sempre é trabalhado nos cursos de formação continua de professores.

Em relação às pesquisas assinaladas, percebemos que alguns dos problemas que envolvem o ensino e aprendizado das transformações geométricas, estão diretamente relacionados à necessidade que os professores têm de balizar sua prática nos livros didáticos, como resultado de uma formação com grandes lacunas, nessa área específica do saber.

Além disso, não encontramos pesquisas envolvendo noções de transformações geométricas no espaço, todos os estudos assinalados anteriormente se relacionam às transformações geométricas no plano, o que nos fez perceber a pertinência de pesquisar a respeito desse conteúdo matemático.

Justificamos a escolha das transformações geométricas no espaço com a utilização do ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*, sobretudo por acreditarmos que o citado ambiente atende às nossas expectativas, isto é, introduzir noções de transformações geométricas no espaço por meio de atividades que envolvem tais noções e perceber a apropriação desse conteúdo matemático e a apropriação do *Cabri 3D*.

1.4 A Geometria Dinâmica e o *Cabri 3D*

A Geometria é uma das áreas da Matemática que pode utilizar ambientes computacionais para o ensino. Isso acontece em razão do importante papel desempenhado pelas representações de figuras planas e espaciais e pelas novas formas de manipulação oferecidas pelos ambientes de Geometria Dinâmica, além da manipulação direta das figuras na tela, o que possibilita sua exploração, mantendo as relações geométricas da construção, isto é, suas propriedades invariantes. Essa manipulação permite melhorar a visualização, além de possibilitar diferentes pontos de vista relacionados a uma mesma figura.

Em seguida destacamos, algumas pesquisas que mostram a importância do uso da Geometria Dinâmica no ensino, como meio facilitador da aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nesse sentido, apresentamos os trabalhos de Valente (1993); Chaachoua (1997); Veloso (2000); Healy (2000); Gravina (2001); Olivero e Robutti (2001); Laborde (2001) e Restrepo (2005, 2008), que apresentam diferentes perspectivas a respeito da utilização de ambientes computacionais.

Com relação aos ambientes computacionais orientados para o ensino e às diferentes modalidades de utilização, Valente (1993) afirma que as tecnologias computacionais podem ser úteis no processo – aprendizagem. O autor aponta que um ambiente computacional educativo pode estar inserido em uma das seguintes categorias:

- **Os tutoriais:** nos quais são mostrados os modelos com animações, sons e que, talvez, utilizando apenas lápis e papel, seriam impossíveis de ser trabalhados;
- **Sistemas de exercícios e práticas:** utilizados para revisar material trabalhado em classes que envolvem, sobretudo, memorização e repetição. Esses ambientes requerem resposta frequente do estudante e propiciam a retroalimentação imediata;
- **Simulações:** que envolvem a criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real e permitem explorar diversas situações; além disso, uma simulação para o estudante fazer conjecturas,

estabelecer hipóteses, testá-las e analisar resultados, possibilitando a exploração de propriedades dos objetos estudados; e

- **Jogos educacionais:** nos quais a proposta é a exploração de um determinado conteúdo.

Em sua tese de doutorado, Chaachoua (1997) encaminha a pesquisa em duas direções:

- As funções do desenho no ambiente de lápis e papel; e
- O papel desempenhado pelos ambientes computacionais no que diz respeito às funções do desenho de um objeto geométrico espacial.

Para cada desenho, o autor assinala que, é dado um *domínio de funcionamento* – a representação de um objeto geométrico espacial em um desenho plano é dada pela "transferência" de propriedades geométricas desse objeto no desenho – e um *domínio de interpretação* – todas as propriedades do desenho não podem ser interpretadas como propriedades do objeto; ou seja, muitas propriedades do objeto geométrico (tridimensional) não podem ser traduzidas em uma folha de papel (bidimensional), a não ser utilizando códigos e convenções de representação. É o caso, por exemplo, da perspectiva paralela que permite conservar a maioria das propriedades do objeto geométrico em sua representação bidimensional.

O autor está interessado nas funções do desenho para solucionar problemas espaciais que são as seguintes:

- **Função de ilustração:** depende do domínio de funcionamento, em que o estudante pode fazer e refazer o desenho para ilustrar um problema apresentado; e
- **Função de experimentação:** que é condicionada pelos domínios de funcionamento e interpretação: de acordo com a função, o estudante pode aplicar essa função quando apreende e interpreta o desenho.

No que diz respeito aos ambientes computacionais, o autor afirma que [...] *alguns ambientes computacionais, em razão da maneira como podem ser gerados, oferecem ao desenho, um domínio de funcionamento importante e um* *meio para desqualificar certas interpretações ilícitas.* (CHAACHOUA, 1997, p. 44, tradução nossa do original francês)

Segundo o autor, alguns ambientes computacionais, tais como os *softwares Geospace* e *Cabri 3D* permitem “criar uma realidade espacial” de objetos geométricos sua possibilidade de manipulação direta e de retroação, ou seja, de modificar o que está feito, como também a função “desfazer” do *Cabri 3D*. Nesse sentido, esses ambientes podem ajudar a validar situações geométricas de maneira experimental.

No ensino de Geometria Espacial, a introdução de ambientes computacionais, pode modificar as relações entre os sujeitos e as representações de objetos matemáticos. A contribuição desses ambientes à Geometria Espacial depende das escolhas feitas pelos criadores, os modos de representação, as convenções adotadas, os tratamentos gráficos permitidos, as ações e as modificações possíveis, etc. O autor destaca que [...] *sob certos critérios, os problemas de construção efetiva e de construção evocada de um objeto matemático podem coexistir nos ambientes informáticos.* (CHAACHOUA, 1997, p. 248)

A respeito da função desses ambientes, o autor salienta a necessidade de efetuar uma análise didática na concepção dos ambientes computacionais para o ensino e, no caso de Geometria Espacial, essa análise envolve pelo menos três polos:

- Manipulação direta;
- Escolha da representação; e
- Os primitivos geométricos.

No mesmo sentido, Veloso (2000) assinala que o uso de ambientes de Geometria Dinâmica está transformando a visão da Matemática e do ensino, visto que proporcionam maneiras diferentes das tradicionais para que os alunos compreendam conceitos matemáticos. Nesses ambientes, podem-se construir e explorar figuras complexas, além de verificar conjecturas e nelas realizar transformações, facilitando aos estudantes o acesso a figuras que, dificilmente, seriam possíveis em ambientes não dinâmicos.

Além disso, o autor citado assinala que esses ambientes possuem potencialidades que permitem modificar profundamente os caminhos para exploração e resolução de problemas, bem como para estabelecer conjecturas.

Conforme Healy (2000), o processo de construção de uma figura em um ambiente de Geometria Dinâmica é diferente de quando se utiliza papel e lápis. Para a autora, quando usamos Geometria Dinâmica, a construção é consequência de um processo no qual se deve utilizar a definição explícita do objeto geométrico com suas propriedades Matemáticas.

Além disso, Gravina (2001) assinala a importância do uso dos ambientes de Geometria Dinâmica e diz:

> Os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os *experimentos de pensamento*. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica. (GRAVINA, 2001, p. 89-90)

Nesta revisão de pesquisas sobre ambientes de Geometria Dinâmica, podemos inferir que esta promove mudanças no aprendizado de Geometria, uma vez que abre a possibilidade para que os estudantes construam e explorem figuras e estabeleçam relações entre elas. Além do mais, os estudantes podem fazer conjecturas, que podem ser testadas com as ferramentas e/ou recursos disponíveis no ambiente.

O *Cabri 3D*

O ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D* pode tornar possível essas representações. Para tal fim, apresentamos as principais características do *Cabri 3D,* bem como as ferramentas e os recursos que utilizaremos na pesquisa.

O *Cabri 3D* foi lançado em 2004, concebido e desenvolvido por *Cabrilog*[14]. Fundamenta-se na tecnologia *CABRI*[15], originada das pesquisas desenvolvidas

[14] Logotipo da companhia criadora dos ambientes de Geometria Dinâmica *Cabri II* e *Cabri 3D*.
[15] A sigla CABRI vem do francês **Ca**hier de **Br**ouilon **I**nformatique, que significa Caderno de Rascunho Informático.

no Laboratório Leibniz (associado à Universidade *Joseph Fourier*, em Grenoble, França). O *Cabri 3D* favorece a exploração de figuras construídas baseadas em vários pontos de vista do observador, isso acontece porque o usuário pode observar sua construção, como se esta estivesse dentro de uma *bola de cristal*.

Além disso, por exemplo, com a ferramenta “revisar construção”, podemos observar todos os passos que o estudante realizou em suas construções. Permite manipular as figuras, mantendo suas propriedades, construir, visualizar figuras em três dimensões, verificar e testar suas propriedades. Por exemplo, no respeito à visualização de figuras com o *Cabri 3D*, a mudança dos tons das cores indica se as figuras estão construídas mais perto do observador ou não, isto é, as cores são mais intensas ou mais tênues, respectivamente.

Com suas ferramentas, é possível, por exemplo, criar pontos, retas, planos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas, etc. Podem ser usadas para realizar construções dinâmicas das mais elementares às mais complexas.

Ressaltamos que no *Cabri 3D* as construções apresentam a superfície dos corpos redondos (cone, cilindro e esfera) e dos poliedros (tetraedro, paralelepípedo, prisma, pirâmide e os poliedros regulares), mas, não eles como sólidos.

A Figura 1 mostra duas construções com *Cabri 3D*. À esquerda, há uma pirâmide de base quadrada. Na construção dessa figura utilizamos além das ferramentas: quadrado, reta perpendicular e pirâmide, a ferramenta de medida “distância”. À direita da Figura 1, mostramos uma pirâmide inscrita em um cubo. Nessa figura, usamos a caixa de ferramentas “atributos”, que permite mudar o estilo da superfície como cor, raio da curva, superfície, etc.

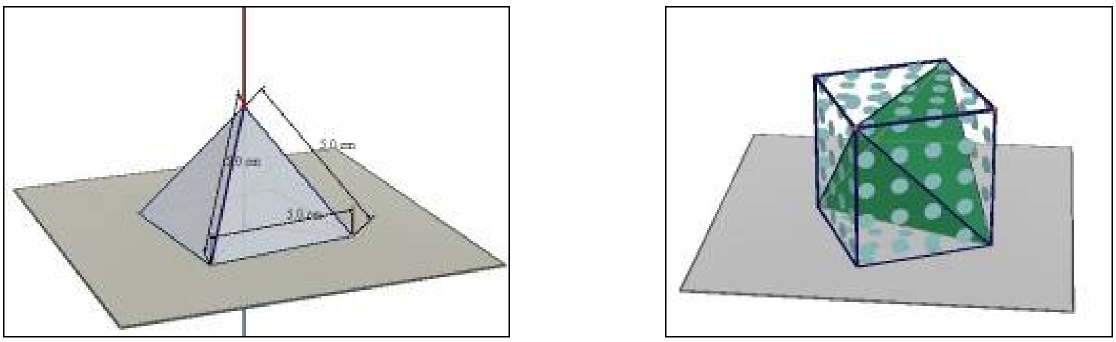


Figura 1. Exemplos de construções com *Cabri 3D*

A primeira pesquisa sobre o uso do *Cabri 3D* foi desenvolvida na França por Hugot (2005) em sua tese de doutorado *Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D*[16]. De acordo com o autor, o *Cabri 3D* é um ambiente pedagógico de Geometria Dinâmica no espaço de manipulação direta. O pesquisador investigou as possíveis dificuldades que poderiam surgir na interação com esse ambiente, já que estava em fase experimental. Para observar isso, comparou o *Cabri 3D* com outros ambientes de Geometria Dinâmica do mesmo tipo e depois realizou duas experimentações.

A primeira permitiu observar as dificuldades que poderiam se apresentar no uso do ambiente. A segunda foi desenvolvida, utilizando duas versões diferentes, mostrou que a manipulação direta facilita o uso do ambiente, além de assinalar a evolução do *Cabri 3D* em termos de utilização.

Hugot (2005) mostra que o desenvolvimento do *Cabri 3D* apoia-se em alguns princípios relacionados à manipulação direta o que coloca o usuário em posição central em seu processo de concepção.

O autor cita que, segundo a equipe que desenvolveu o *Cabri 3D*, suas funções didático-pedagógicas – aquelas apontadas no momento de sua concepção e com influências sobre os conhecimentos do sujeito e sobre a utilização do software – são diversas, com destaque para:

- **Fornecer um ambiente de simulação:** porque propõe um ambiente que respeite as leis do modelo de Geometria Euclidiana. Composto por um menu principal, uma barra de ferramentas de criação e construção (barra iconizada) e uma zona de trabalho (que é uma folha virtual), na qual o usuário pode construir seus objetos. Como citado anteriormente, estes objetos podem ser manipulados em três dimensões, podendo-se observar e interpretar, em tempo real, os resultados ou efeitos obtidos. Além do mais, o ambiente fornece múltiplas interações e favorece a descoberta pela exploração;

- **Poder motivador:** desperta a vontade do usuário, porque possui atributos gráficos, como: cor, tamanho, textura, etc., para tornar as figuras mais atraentes, dinâmicas e "legíveis".

[16] Um estudo sobre as possibilidades de uso do *Cabri 3D.*

Segundo Hugot (2005), do ponto de vista pedagógico, o *Cabri 3D* pode ser usado pelo professor tanto para preparar seus exercícios como para explicar suas aulas (usando um projetor ou imprimindo as construções).

Atualmente, o *Cabri 3D* encontra-se em sua segunda versão (*Cabri 3D* v2) e possui novas ferramentas como: “soma de vetores”, “produto vetorial”, “produto escalar”, “coordenadas e equações”, “homotetia” e “inversão”. Na Figura 2, mostramos as ferramentas acima indicadas do *Cabri 3D v2*.

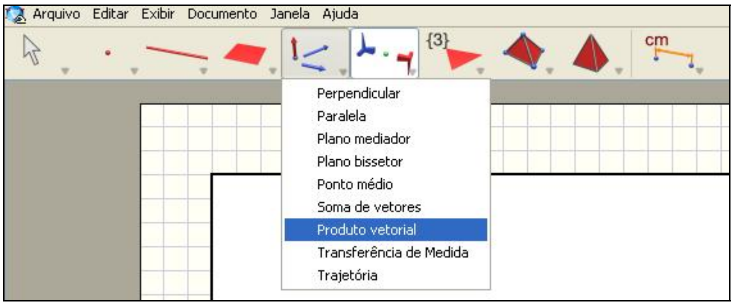


Figura 2. Algumas ferramentas do *Cabri 3D v2*

Nos dados do Quadro 3, mostramos os recursos do *Cabri 3D* com suas respectivas funções.

Quadro 3. Recursos do *Cabri 3D*

Recurso	Função	Teclas
Escape	Cancela a seleção de objetos.	Pressionar a tecla ESC
Apague	Apaga os objetos selecionados	Selecionar o objeto e pressionar a tecla: DELETE
Desfazer	Desfaz as ações realizadas	Pressionar a tecla CTRL + Z
Esconder/Mostrar	Esconde ou mostra objetos	Última opção após selecionar o objeto com botão direito do mouse ou CTRL + M
Cor/Tamanho Estilo/Espessura	Altera as cores, o tamanho, o estilo a espessura etc. dos objetos.	Opções com a seleção do objeto com o Botão direito do Mouse
Ajuda de Ferramentas	Abre-se uma janela de ajuda para utilizar a ferramenta selecionada	F1
Vista Atual	Abre-se uma janela com as opções de rotação do plano, mostrar/esconder objetos escondidos e cor do fundo da tela	F8
Estilos	Mostra os atributos dos pontos, curvas e superfícies.	F9

Animação	Permite animar um ponto (sobre objeto) e controlar a velocidade da animação	F10
Revisar a Construção	Revisa a construção “passo a passo”	F11
Rótulo	Permite nomear objetos	Clicar sobre o objeto e nomeá-lo com auxilio do teclado.
Caixa de Texto	Abre uma caixa de texto.	Menu documento, opção: Nova vista texto.
Mudança de vista	Permite mudar o ponto de vista de forma manual e automática.	Manter pressionado o Botão direito do Mouse

Dentre as ferramentas que o *Cabri 3D* possui, apresentamos a caixa de ferramentas “transformações”, porque as transformações geométricas no espaço são o objeto matemático que constitui parte de nosso estudo.

Tais ferramentas (Figura 2) permitem a obtenção da imagem da figura construída, quando aplicada à transformação desejada. Além de permitir verificar que a dita imagem depende da figura original, ou seja, embora o *Cabri 3D* seja um ambiente de Geometria Dinâmica, suas ferramentas de transformações geométricas, continuam no paradigma do lápis e papel, porque ao utilizar qualquer transformação geométrica sempre são mostradas na tela do computador duas figuras, a original e sua imagem. Fato que pode significar que as ferramentas de transformações geométricas têm um caráter funcional.

A seguir, optamos, por apresentar, somente as ferramentas de transformações geométricas no espaço do *Cabri 3D* porque, além de ser o objeto matemático da pesquisa, são utilizadas na sequência de atividades.

- **Ferramenta simetria central:** para usar essa ferramenta (Figura 3) devemos criar um ponto no plano de base ou no espaço, que será o centro da simetria e selecionar a figura a transformar.

Figura 3. Ferramenta simetria central

A Figura 4 mostra um exemplo do simétrico de um octaedro regular por uma simetria central (ponto no espaço).

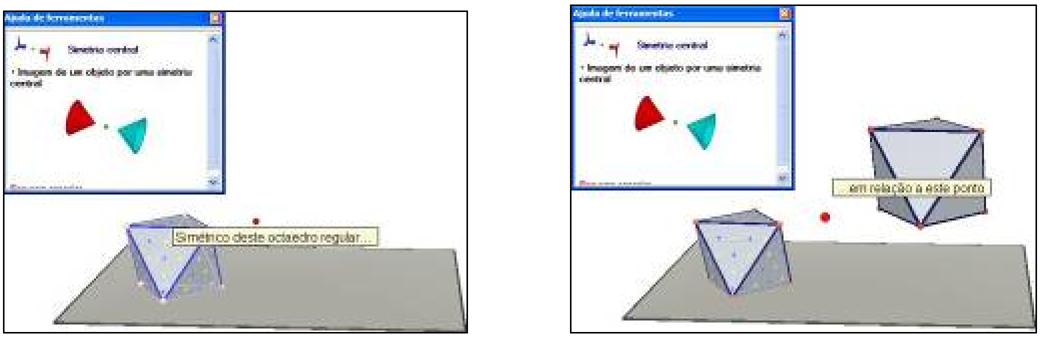


Figura 4. Figura aplicando simetria central

- **Ferramenta simetria axial:** é definida por uma reta ou parte de uma reta (Figura 5), devemos selecionar uma reta (parte de uma reta, ou segmento), como eixo de simetria e, depois, o objeto a transformar. A Figura 6 mostra um exemplo de uso da ferramenta “simetria axial”.

Figura 5. Ferramenta simetria axial

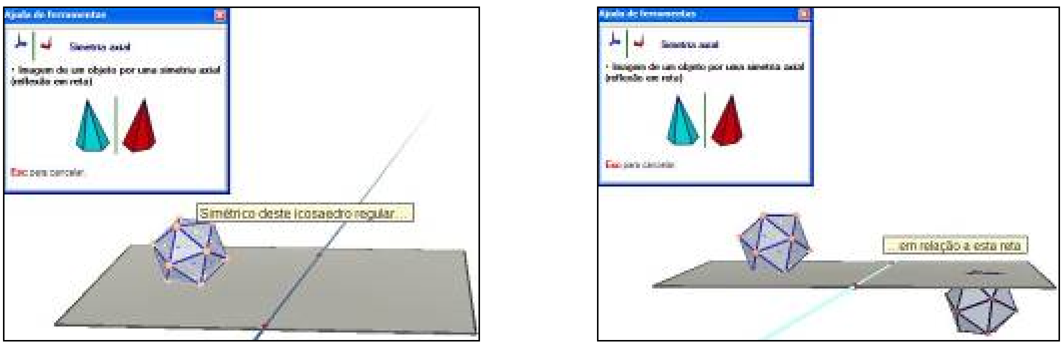


Figura 6. Exemplo de utilização da ferramenta simetria axial

- **Ferramenta reflexão:** para aplicar a transformação reflexão em relação a um plano (Figura 7), é preciso selecionar o plano de reflexão e, depois o objeto a transformar.

Figura 7. Exemplo de utilização da ferramenta reflexão

Um exemplo de reflexão de um tetraedro regular, em relação a um plano perpendicular ao plano de base, é mostrado na Figura 8.

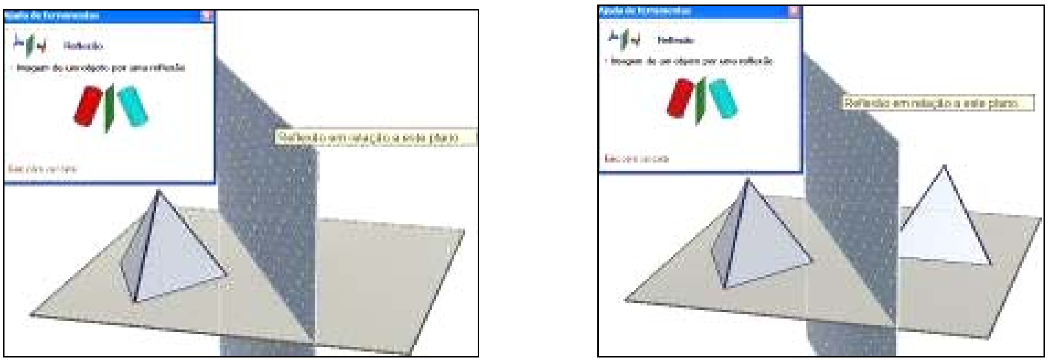


Figura 8. Exemplo de utilização da ferramenta reflexão

- **Ferramenta translação:** para usar a ferramenta "translação" (Figura 9), devemos criar como, por exemplo, na Figura 10 um prisma (ou qualquer outra figura) e um vetor que indicarão a translação do objeto, segundo esse vetor.

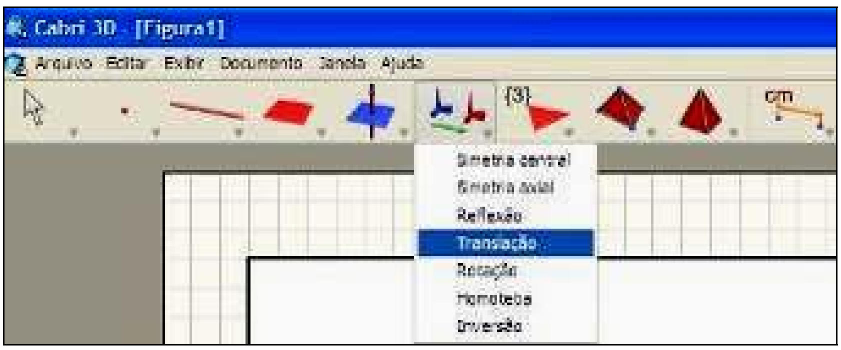


Figura 9. Ferramenta translação

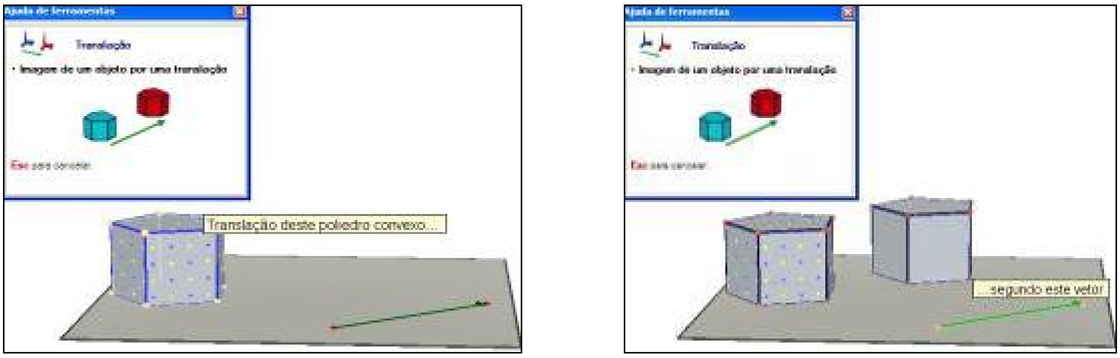


Figura 10. Exemplo de utilização da ferramenta translação

- **Ferramenta rotação:** para utilizar essa ferramenta (Figura 11), devemos criar uma figura, um eixo de rotação (reta, semirreta, segmento ou vetor) e o ângulo de rotação, que pode ser criado por dois pontos ou inserindo um número com a ferramenta "calculadora". A ferramenta "rotação" ativa-se, clicando na figura original, no eixo e no ângulo de rotação.

Figura 11. Ferramenta rotação

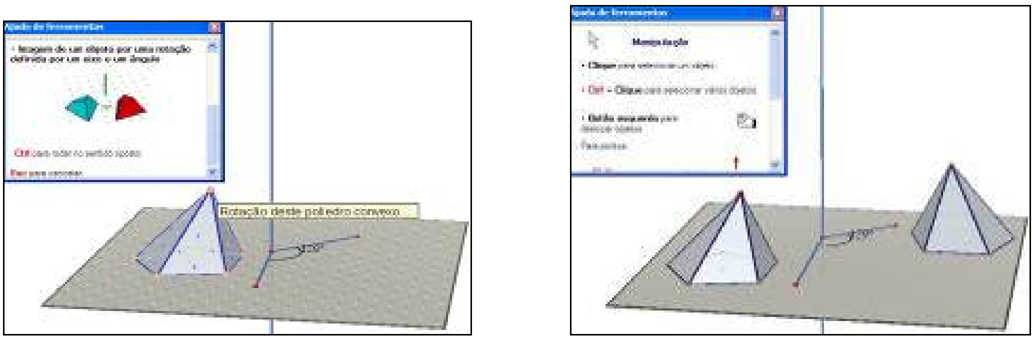


Figura 12. Exemplo de utilização da ferramenta rotação

A Figura 12 mostra um exemplo de rotação de uma pirâmide, em relação a uma reta e segundo o ângulo de 129^0.

Como assinalamos anteriormente (p. 47), nas Figuras 3, 5, 7, 9 e 11, quando aplicamos qualquer transformação translação, reflexão em relação a: um ponto (simetria central), a uma reta (simetria axial) ou a plano (reflexão), ou rotação diretamente com a caixa de ferramentas “transformações”, duas figuras mostram-se na tela, a figura original e sua imagem.

1.5 Delimitação da Problemática

No decorrer de nossas leituras e reflexões, identificamos a existência de alguns estudos sobre transformações geométricas no plano. Entretanto, observamos, também, uma lacuna considerável a respeito de pesquisas referentes às transformações geométricas no espaço, situação essa que nos estimula, cada vez mais a pesquisar a respeito desse assunto.

Pensamos que os problemas relacionados à compreensão, apropriação e aplicação de conteúdos de Geometria Espacial devem-se, à dificuldade de representar figuras tridimensionais no plano bidimensional, isto é, problemas relacionados à visualização de figuras espaciais.

Consideramos, que o *Cabri 3D* pode trazer uma solução informática aos problemas de representação de figuras espaciais, porque a manipulação direta (dinamismo) que este ambiente possui, permite, por meio da exploração de figuras tridimensionais, que os estudantes validem ou refutem conjecturas, o que supõe a mobilização de conteúdos matemáticos.

Pensamos que o uso de um ambiente diferente ao lápis e papel, como o *Cabri 3D,* pode permitir ao professor observar, por meio das ações dos alunos, como e o que entendem e apreendem um determinado conteúdo matemático.

Cogitamos que a falta de pesquisas sobre as transformações geométricas no espaço talvez seja pela dificuldade de representar figuras tridimensionais no plano bidimensional. Isso nos faz pensar que o uso da Geometria Dinâmica – *Cabri 3D* – apresenta-se como uma possibilidade para desenvolver pesquisas nessa área.

Assim, elaboramos as seguintes questões:

> - De que maneira, os estudantes apropriam-se das ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* na aprendizagem de transformações geométricas no espaço?
> - Como a integração do *Cabri 3D* interfere no processo de aprendizagem dessas transformações?

Para tal, delineamos os seguintes objetivos:

1. Elaborar atividades introdutórias ao *Cabri 3D*, para que os alunos conheçam algumas ferramentas e recursos do *software*, necessários para realizar construções nesse ambiente de Geometria Dinâmica.
2. Criar atividades que possam mobilizar noções de transformações geométricas no espaço.
3. Observar, no desenvolvimento das atividades, a interação dos alunos com o *Cabri 3D*, além de identificar nas ações dos estudantes, como mobilizam as noções de transformações geométricas no espaço.
4. Observar como esse ambiente de Geometria Dinâmica pode facilitar a visualização de uma figura tridimensional.

Pretendemos responder a estas questões, utilizando a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), por acreditarmos que poderá permitir analisar as ações dos estudantes quando resolvem uma situação-problema. Isso significa que, por meio do modelo de **S**ituações de **A**tividades **I**nstrumentais (SAI), que essa teoria desenvolve, poderemos observar detalhadamente a sequência de ações dos estudantes, os instrumentos e objetos utilizados por eles quando resolvem atividades que mobilizam noções de transformações geométricas no espaço.

Além disso, a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995) poderá oferecer subsídios para compreender melhor como os estudantes veem ou visualizam uma figura, bem como se apropriam dela, tendo em vista que o registro figural facilita reconhecer as diferentes apreensões realizadas pelos estudantes na interação com o *Cabri 3D*.

Logo, no capítulo seguinte, apresentamos os quadros teórico e metodológico que nos permitirão desenvolver o estudo.

Capítulo 2

QUADRO TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentamos o quadro teórico, a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos do estudo.

2.1 Abordagem Instrumental

O fundamento teórico que nos permite analisar a influência do ambiente computacional *Cabri 3D* na aprendizagem de conteúdos de Geometria Espacial, especificamente, as transformações geométricas no espaço é a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) que se apoia na ergonomia cognitiva[17]. O autor aponta sobre a ergonomia que,

> [...] inscreve-se como uma contribuição para a reflexão teórica e a análise empírica das relações homem - sistema técnico, centradas no homem e observadas do ponto de vista de seu engajamento nas atividades e ações reais; de seu contexto de trabalho, ou no cotidiano. (RABARDEL, 1995a, p. 23, tradução nossa do original francês)

A Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) descreve as relações que existem entre o sujeito, a ferramenta – denominada por Rabardel (1995a) *artefato* – e os *esquemas de utilização*. Nesse sentido, tomamos como base a pesquisa

[17] De acordo com a associação brasileira de ergonomia (ABERGO) a ergonomia cognitiva, refere-se aos processos mentais, tais como percepção, memória, raciocínio e resposta motora que afetam, conforme afetem as interações entre seres humanos e outros elementos de um sistema como, por exemplo, a interação homem computador.

de Hugot (2005) para apontar os termos que de acordo com essa abordagem, usaremos na pesquisa:

- **Sujeito:** refere-se ao indivíduo ou grupo de indivíduos que desenvolve a ação e/ou é escolhido para o estudo;
- **Esquemas de utilização:** Rabardel utiliza esse termo, que, de acordo com Vergnaud (1996), *um esquema é uma organização invariante de comportamentos para classes de situações*. Além disso, é necessário procurar nos esquemas os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória; e
- **Artefato:** um dispositivo que pode ser material – como, por exemplo, um lápis, um computador, dentre outros objetos – ou simbólico, como por exemplo, uma figura, um gráfico, dentre outros, que são usados como meio da ação pelo sujeito.

A Abordagem Instrumental estuda a diferença que existe entre artefato, instrumento e processos que envolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento. Esta transformação é chamada por Rabardel (1995a) processo de Gênese Instrumental. Segundo Verillon e Rabardel (1995), esse processo busca a integração entre as características dos artefatos (potencialidades e limitações) e as atividades do sujeito – seus conhecimentos e métodos de trabalho.

De acordo com os mesmos autores, para melhor entender o processo, faz-se necessária uma distinção entre artefato e instrumento. O foco de interesse de Rabardel (1995a) é o uso do artefato em uma determinada atividade, além de afirmar que a cada artefato correspondem possibilidades de transformações dos objetos da atividade que foram antecipadas, deliberadamente pesquisadas e que são suscetíveis de serem atualizadas no uso.

Para Rabardel (1995a), os artefatos podem ser compreendidos apoiados em dois pontos de vista:

- **Do ponto de vista técnico:** quando o autor considera o artefato como sistema técnico. Este é visto como uma estrutura e/ou sistema de funcionamento que obedece a regras e limitações específicas relacionadas à atividade do homem em seu contato com ele; é o criador do artefato que lhe dá funções operacionais.

- **Do ponto de vista de suas funções:** o artefato é observado como um sistema de funcionamento mais que como um sistema de transformações – que ele pode produzir como meio de ação – a relação do homem com o(s) artefato(s) em uso é chamada por Rabardel (1995a), *relação instrumental*.

Logo, o modelo triádico de situações de utilização de um instrumento, de acordo com Rabardel (1995b) é composto por:

1. **Sujeito:** usuário, operador, trabalhador, agente, etc.;
2. **Instrumento:** ferramenta, máquina, sistema, produto, etc.;
3. **Objeto:** sobre o que a ação por meio do instrumento é dirigida (material, real, objeto da atividade, objeto de trabalho ou outros sujeitos).

O autor segue a mesma linha da concepção triádica de situações da atividade com instrumentos de Vygotsky (1998) que distingue os três polos da tríade: *o sujeito,* que dirige a ação psíquica sobre o objeto; o *objeto*, sobre o qual a ação é dirigida; e o *instrumento*, que serve de mediador entre o sujeito e o objeto, chamado por Vygotsky (1998) *instrumento psicológico*.

Segundo Fernandes (2004), para Vygotsky a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas, mediada e complexa, que se realiza utilizando dois tipos de mediadores: os instrumentos e os signos. O uso de mediadores aumenta a capacidade de atenção e de memória e, sobretudo, permite o controle voluntário do sujeito sobre sua atividade. O instrumento é, para Vygotsky, *um objeto social e mediador da relação entre indivíduo e mundo, enquanto os signos, instrumentos psicológicos* são elementos de representação da realidade, auxiliam nos processos psicológicos, ou seja, nas tarefas que exigem memória ou atenção.

Rabardel (1995a) situa o artefato em uma posição mediadora – como parte (material ou simbólica) do instrumento – entre o sujeito e o objeto e pontua que os fatores básicos da influência dos instrumentos na atividade cognitiva do sujeito correspondem, por um lado, às limitações (restrições) dos instrumentos; e por outro, às vantagens que eles oferecem para a ação. Afirma também que,

> [...] a influência dos instrumentos na atividade cognitiva, é dada por um lado, pelas limitações próprias do instrumento e, por outro, pelas possibilidades de ação que eles proporcionam. (RABARDEL, 1995a, p. 64, tradução nossa do original francês)

Para analisar as ações do sujeito, mediado pelo instrumento, Rabardel (1995a), Verillon e Rabardel (1995) e Verillon (1995) apoiam-se em Vygotsky, em relação à concepção triádica das situações da atividade com instrumentos.

Assim, Rabardel (1995a,) propõe o modelo SAI – **S**ituações de **A**tividades **I**nstrumentais, apresentando as relações entre o sujeito e o objeto mediado pelo instrumento.

O modelo SAI (Figura 13), segundo Rabardel (1995b; 1999) além de apresentar as relações entre sujeito e objeto (sobre o qual o sujeito age) evidencia as múltiplas interações que intervêm nas atividades instrumentais, considerando a interação sujeito-objeto [S-O], sujeito-instrumento [S-i] e instrumento-objeto [i-O], bem como a relação sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O]. Além disso, essas interações desenvolvem-se em um ambiente formado pelo conjunto de condições que o sujeito deve levar em conta para realizar sua atividade.

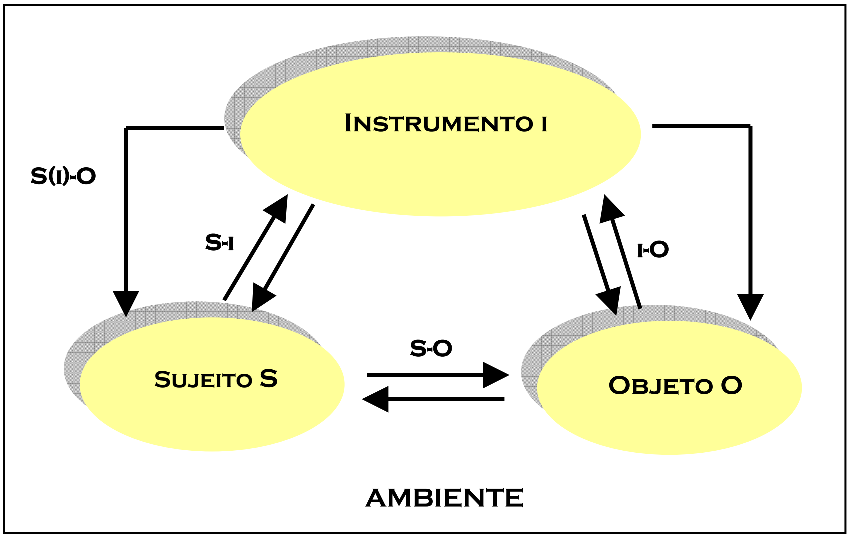


Figura 13. Modelo de **S**ituações de **A**tividades **I**nstrumentais
Fonte: Rabardel (1995b, p. 65)

Portanto, o modelo SAI mostra algumas características essenciais das atividades com instrumentos. Rabardel (1995b; 1999) assinala que esse modelo permite fazer uma primeira aproximação sobre a atividade instrumentada[18], ou seja, o modelo SAI pode oferecer indícios para uma análise da atividade do sujeito mediada pelo instrumento.

O modelo SAI pode ser uma ferramenta para examinar, detalhadamente, o uso de instrumentos em uma tarefa. Para ilustrar a afirmação, apresentamos um exemplo de translação do triângulo ABC, mas, em duas situações diferentes.

Na primeira situação, que chamamos "Quadrado", o estudante dispõe de uma folha de papel quadriculado onde estão desenhados o triângulo ABC e um vetor v paralelo ao lado $\overline{AC}$ do triângulo e, também, dispõe de uma régua graduada, um lápis e um Quadro. Na outra situação, que chamamos "3D", o estudante dispõe do *Cabri 3D* (artefato), o triângulo ABC e um vetor $\vec{v}$ paralelo a $\overline{AC}$ que se apresentam no plano de base do *Cabri 3D.* Nas duas situações, o estudante deve fazer a translação do triângulo ABC.

1. **Situação Quadrado:** para fazer a translação do triângulo ABC, seguindo o sentido e a direção do vetor $\vec{v}$, o estudante conta quantos lados de quadrado o vetor $\vec{v}$ tem de comprimento. Partindo do vértice A do triângulo, o estudante conta a mesma quantidade de lados de quadrado que o vetor $\vec{v}$ tem de comprimento e, seguindo o mesmo sentido do vetor, desenha o ponto A' (Figura 14); em seguida, realiza a mesma ação para traçar os pontos B' e C'. Finalmente, usa a régua para desenhar o triângulo $A'B'C'$.

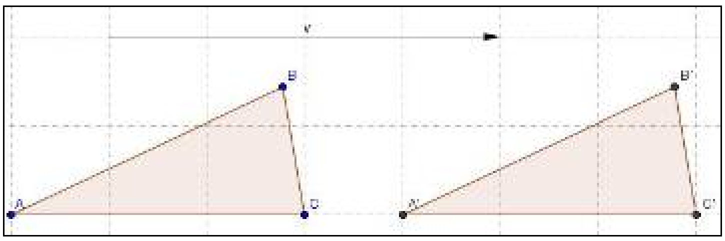


Figura 14. Situação Quadrado

18 Segundo Rabardel (1995a), atividade instrumentada é aquela mediada por instrumentos e que pode transformar as relações do sujeito com o ambiente, suas funções psicológicas e cognitivas e seu desenvolvimento.

2. **Situação 3D:** o estudante seleciona a caixa de ferramentas "transformações" e aciona a ferramenta "translação", clicando sobre o triângulo e sobre o vetor $\vec{v}$, realiza a translação, (Figura 15). Finalmente, nomeia o triângulo transladado de A', B' e C'.

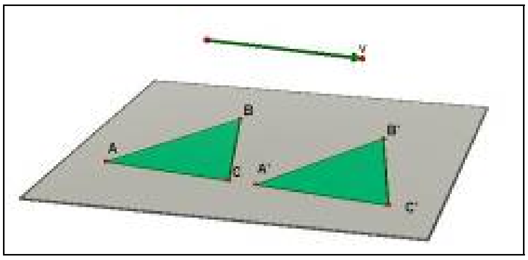


Figura 15. Situação 3D

A partir do modelo SAI, usamos os dados do Quadro 4 para observar as ações do sujeito, o instrumento e o objeto, isto é, analisamos de maneira detalhada e articulada as diferentes ações que o sujeito realiza e os instrumentos e objetos que utiliza, quando resolve uma mesma situação. Nesse caso, em dois ambientes de aprendizagem: lápis e papel e *Cabri 3D.*

Quadro 4. Ações realizadas nas duas situações da translação, segundo o modelo SAI

Modelo SAI: Translação					
Situação quadrado			**Situação 3D**		
Ação	**Instrumento**	**Objeto**	**Ação**	**Instrumento**	**Objeto**
Conta	Aponta com o dedo	Quantidade de quadrados	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
Desenha	Lápis	Ponto A'	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
Conta	Aponta com o dedo	Mesma quantidade de quadrados	Clica	Ferramenta translação	Triângulo ABC
Desenha	Lápis	Ponto B'	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação do triângulo)
Conta	Aponta com o dedo	Mesma quantidade de quadrados	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	ferramenta ponto
Desenha	Lápis	Ponto C'	Clica	Ferramenta ponto	Ponto A'
			Clica	Ferramenta ponto	Ponto B'
Traça	Lápis e régua	Triângulo A'B'C'	Clica	Ferramenta ponto	Ponto C'

Observamos que a situação quadrado é limitada por dois motivos: primeiro, porque o vetor é dado com uma quantidade estabelecida de quadrículas e em condições fixas; e segundo, porque o estudante pensou somente em contagem (números naturais), sem ter outras possibilidades de solução para realizar a translação pedida.

No entanto, na situação 3D, o estudante não conta, mas utiliza noções de translação. Isso se evidencia, porque ele usa, de maneira correta, as ferramentas que o *Cabri 3D* possui para fazer a translação do triângulo.

Além disso, concordamos com Rabardel (1995b), ao afirmar que uma atividade analisada com o modelo SAI permite diferenciar melhor a sequência de ações realizadas pelo estudante e as propriedades que ele utiliza, quando resolve uma tarefa, nesse caso, uma translação.

Rabardel (1995a) afirma que o modelo SAI pode ajudar a realizar a descrição de uma tarefa *a priori* e auxiliar o professor na organização e reorganização das atividades em sala de aula para atingir os objetivos planejados.

Para o autor, o instrumento como ente mediador, entre o sujeito e o objeto, possui duas orientações:

- **Objeto–sujeito:** o instrumento é o meio que permite o conhecimento do objeto.
- **Sujeito–objeto:** denominada pelo autor de *mediação pragmática,* o instrumento é o meio da ação transformadora dirigida sobre o objeto.

O autor assinala que o instrumento pode ser entendido com base em duas dimensões: como entidade intermediária e como meio de ação. Vejamos o que significa:

- **Entidade intermediária** - Rabardel (1995a, p. 72) aponta que, dentre as abordagens sobre as concepções de instrumento, existe unanimidade em considerá-lo como uma entidade intermediária entre o sujeito – usuário do instrumento – e o objeto sobre o qual a ação é dirigida. Nesse sentido, o instrumento é mediador das relações sujeito–objeto. Além disso, o instrumento adapta-se ao sujeito e ao objeto. Esse processo de adaptação é dado em termos de propriedades materiais, cognitivas e semióticas e em função do tipo de atividade.

- **Meio de ação** – nessa dimensão, o instrumento pode ser visto de três maneiras, dependendo da natureza da ação: instrumento material – transformação do objeto material; instrumento psicológico – envolve uma decisão cognitiva (ferramenta cognitiva), uma tomada de decisão, gestão da atividade propriamente dita e, finalmente, o instrumento semiótico –, na interação semiótica com um objeto semiótico ou outros.

Para Rabardel (1995a), o instrumento é uma entidade mista com dois componentes. O autor diz,

> [...] por um lado, o **artefato** material ou simbólico, produzido para o sujeito ou para outros sujeitos; por outro lado, os **esquemas de utilização** associados, que são resultado de uma construção própria do sujeito ou de uma apropriação de esquemas de utilização já existentes. (RABARDEL, 1995a, p.95, tradução nossa do original francês) (grifo nosso)

No que concerne ao artefato, o autor aponta que ele se constitui no(s) uso(s) que o sujeito faz dele. Assim, os usos do artefato, antecipados pelo criador, dependem também das necessidades e objetivos do usuário, ou seja, o usuário replaneja o uso do artefato dependendo do que ele necessita.

Os Esquemas

Na perspectiva instrumental, Rabardel (1995a) justifica seu interesse pelos *esquemas* porque eles permitem discernir na sequência de ações que o sujeito realiza as situações relevantes ou familiares para ele, isto é, os esquemas que utiliza.

O autor baseia-se nas concepções de esquema de Piaget e Vergnaud. Nesse sentido, assinala que

> [...] a descoberta progressiva de propriedades intrínsecas do artefato pelos sujeitos está relacionada à **acomodação de seus esquemas** e às mudanças de significado do instrumento como resultado da associação do artefato aos **novos esquemas**. (RABARDEL, 1995a, p. 116, tradução nossa do original francês) (grifo nosso)

De acordo com Rabardel (1995a), o componente psicológico do instrumento que organiza a atividade é formado pelos esquemas (novos esquemas, esquemas pessoais ou sociais preexistentes), que atuam como mediadores entre o sujeito e sua atividade.

Assim, há situações nas quais o sujeito tem *"conhecimentos prévios"*, ou seja, tem as competências necessárias para resolver determinada situação ou outras situações semelhantes, o que leva o sujeito, de certa maneira, ao uso de uma "estratégia", já adquirida anteriormente. Também existem outras situações nas quais o sujeito não tem essas competências, quando isso acontece, ele precisa desenvolver vários *esquemas*, que, de acordo com Piaget, podem ser de *acomodação* e *assimilação*.

Vergnaud (1996) redefiniu o conceito de esquema, como *organização invariante da conduta para uma dada classe de situações.* Os esquemas não funcionam da mesma maneira em diferentes classes de situações. O autor afirma que nos esquemas, devem procurados, os *conhecimentos-em-ato* do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que permitem que sua ação seja operatória. Esses conhecimentos contidos nos esquemas são as *invariantes operatórias* (*teorema-em-ato* e/ou *conceitos-em-ato*) que podem se tornar visíveis na ação.

Além disso, o autor refere que o esquema como totalidade dinâmica organiza a ação do sujeito e está composto por regras de ações e antecipações, de tal forma que provoca uma sequência de ações para alcançar um determinado objetivo. No estudo das *invariantes operatórias*, o autor aponta que existem três tipos:

1. **Proposições:** que podem ser verdadeiras ou falsas e afirma que os teoremas-em-ato são desse tipo.

2. **Funcional proposicional:** não são susceptíveis a serem verdadeiras ou falsas; no entanto, formam um conjunto de elementos necessários para a construção das proposições; e

3. **Argumento:** quem diz função proposicional e proposição, diz argumento, o que significa que as funções proposicionais podem se transformar em argumentos.

Além disso, Vergnaud diz,

> [...] conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceitualização: sem a parte escondida, constituída pelas invariantes operatórias, esta parte visível nada seria. (VERGNAUD, 1996, p. 165)

Logo, para poder compreender a formação de conceitos matemáticos (do ponto de vista psicológico e didático), é necessário, segundo o autor, considerar tal conceito como um conjunto de *invariantes operatórias* na ação operatória do sujeito.

Nesse sentido, Trouche (2005a) afirma,

> [...] para Vergnaud (1996), a construção de um conceito é um processo unido à ação do sujeito em uma situação específica, na qual o esquema é composto por **objetivos**, **regras-de-ação** e **invariantes operatórias** que permitem o tratamento pertinente da informação. Esses componentes são traduzidos por Rabardel (1995) como funções: **heurística** (relativa ao controle e organização da ação), **pragmática** (relativa à ação de transformação dos objetos) e **epistemológica** (referida à tomada da informação e à compreensão dos objetos). (TROUCHE, 2005a, p. 103, tradução nossa do original francês) (grifo nosso)

De acordo com Rabardel (1995a), os esquemas relacionados ao uso do artefato são denominados por ele *esquemas de utilização* (E.U.) que têm relação com duas dimensões da atividade:

- Atividades relacionadas às tarefas secundárias[19], ou seja, as tarefas relativas à gestão das características e propriedades particulares do artefato. Os esquemas de utilização são elementares como, por exemplo, a manipulação de um botão.
- Atividades primárias, orientadas ao objeto da atividade. Nessas atividades, o artefato é um meio de concretização e de realização.

As duas dimensões dos esquemas de utilização levam a distinguir, em um primeiro momento, dois níveis: *esquemas de uso* (E.Us.) que dizem respeito a tarefas secundárias e nos quais a atividade é diretamente relacionada ao artefato;

[19] Na atividade com instrumentos, as tarefas secundárias são referentes ao funcionamento e manipulação do artefato.

esquemas de ação instrumental (E.A.I.) relativos às atividades primárias. Estes esquemas são dados pela ação que tem por objetivo operar as transformações do objeto da atividade.

Conforme assinala Rabardel (1995a), um mesmo esquema pode, de acordo com a circunstância, ter um estatuto de esquema de uso ou de esquema de ação instrumental. O autor afirma que, com base nesses esquemas, surgem os esquemas de atividade coletiva instrumental (E.A.C.I.), porque os sujeitos inseridos em uma atividade coletiva valem-se de esquemas de utilização, que apresentam a coordenação de ações individuais e a integração de seus resultados para atender aos objetivos comuns. Portanto, o coletivo trabalha com um instrumento ou com uma mesma classe de instrumentos. Nesse sentido, o autor sublinha que os esquemas de utilização possuem uma dimensão privada e outra social.

Além disso, para Rabardel (1995a), os diferentes tipos de esquemas são mutuamente dependentes, ou seja, a partir dos E.Us. e dos E.A.I., podem surgir, recompor-se e generalizar os esquemas de atividade coletiva instrumental (E.A.C.I.) e esses esquemas, também, podem ser a base para que os E.Us. e os E.A.I. desenvolvam-se, evoluam e recomponham-se.

O autor acrescenta que os esquemas de utilização relacionam-se por um lado aos artefatos (susceptíveis de ter um estatuto de meio) e, por outro lado, aos objetos (sobre os quais esses artefatos permitem agir). Eles são organizadores da ação, da utilização, da aplicação e do uso do artefato e apoiam-se nas propriedades do artefato que eles mesmos organizam.

Os dois componentes do instrumento – artefato e *esquemas de utilização* – têm uma relação de interdependência relativa. Um mesmo E.U. pode ser aplicado a uma multiplicidade de artefatos que, aparentemente, são de uma mesma classe, mas também a artefatos de classes diferentes. Inversamente, um artefato pode ser suscetível de se inserir em uma multiplicidade de E.U. que lhe atribuem outro significado e, às vezes, funções distintas.

Além do mais, o autor aponta que o instrumento pode ser efêmero, segundo as circunstâncias singulares da situação e as condições a que o sujeito é confrontado, mas também pode ter um caráter permanente e ser meio para ações futuras. É uma entidade dinâmica que evolui, segundo as situações nas quais a ação do sujeito engaja-se. Na atividade, os E.U. têm uma posição instrumental e uma posição de objeto, quando a orientação da atividade é epistemológica. Da mesma maneira, a posição instrumental do artefato depende da ação do sujeito que o usa como meio para atingir os objetivos de sua ação.

A composição e a origem de um instrumento, segundo o autor, dependem de seus invariantes: esquemas e artefatos, estes são instrumentalizados (utilizados) pelo sujeito; no entanto, os esquemas pertencem ao sujeito e são generalizados ou acomodados por ele ao artefato e, às vezes, esquemas novos devem ser construídos. Os processos descritos anteriormente distinguem-se em termos de *instrumentação* e *instrumentalização*, ou seja, do processo chamado pelo autor de Gênese Instrumental.

Segundo Rabardel (1995a), a Gênese Instrumental (G.I.) tem duas dimensões que dependem da orientação. A *instrumentação,* quando é orientada para o sujeito, e *instrumentalização,* quando é orientada para o artefato. Para o autor,

> [...] os processos de **instrumentalização** referem-se ao surgimento e evolução da componente artefato do instrumento: selecionado, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.) enriquecendo as propriedades do artefato cujos limites são difíceis de determinar; [...] Os processos de **instrumentação** são relativos ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas preexistentes. (RABARDEL, 1995a, p. 111, tradução nossa do original francês) (grifo nosso)

Além do mais, de acordo com a função atribuída ao artefato, Rabardel (1995a) distingue dois níveis de *instrumentalização*

- **Primeiro nível:** a instrumentalização é local (momentânea) e está relacionada à ação individual e às circunstâncias do desenvolvimento da tarefa; e

- **Segundo nível:** a instrumentalização é conservada (durável), como propriedade do artefato em relação a: um grupo de ações, objetos da atividade e situações. Quando a *instrumentalização* é permanente e não existe transformação material do artefato, mas há melhora das propriedades extrínsecas dele.

De acordo com Trouche (2005b), o processo de *instrumentalização* (dimensão orientada ao artefato) envolve diversos estágios: descoberta e seleção, personalização e transformação. Além disso, o autor assinala que o processo de *instrumentalização* é de diferenciação dos artefatos, do ponto de vista quantitativo e qualitativo, respeito da parte do artefato mobilizado pelo usuário e ressalta que, *esse processo, é a expressão da atividade específica de um sujeito: o que pensa o usuário do desenho do artefato e, como e para que ação ele deve ser usado.* (TROUCHE 2005b, p. 152, tradução nossa do original francês).

Na Abordagem Instrumental, as duas dimensões do processo de Gênese Instrumental, a *instrumentação* e a *instrumentalização*, referem-se ao sujeito e ao instrumento, mas suas orientações as diferenciam. Desse modo, ambas contribuem para a evolução do instrumento, para a reorganização e modificação dos *esquemas de utilização* do sujeito que permitem estruturar sua ação e participar da formação dos conceitos matemáticos dos sujeitos (identificando esquemas ou invariantes operatórios). Além disso, se observamos o modelo SAI (Figura 13) a *instrumentação* refere-se à relação entre sujeito e instrumento (S-i), na qual o sujeito constrói esquemas, procedimentos e operações para utilização do artefato e a *instrumentalização* é a relação entre sujeito e objeto, mediada pelo instrumento (S(i)–O), bem como a relação entre instrumento e objeto (i-O).

Nesse sentido, Trouche (2002; 2004) assinala que a *instrumentação* e *instrumentalização* não são processos independentes (duas dimensões da Gênese Instrumental), mas sua separação permite, de maneira didática, observar o processo de Gênese Instrumental. A Figura 16 apresenta as duas direções do processo de Gênese Instrumental.

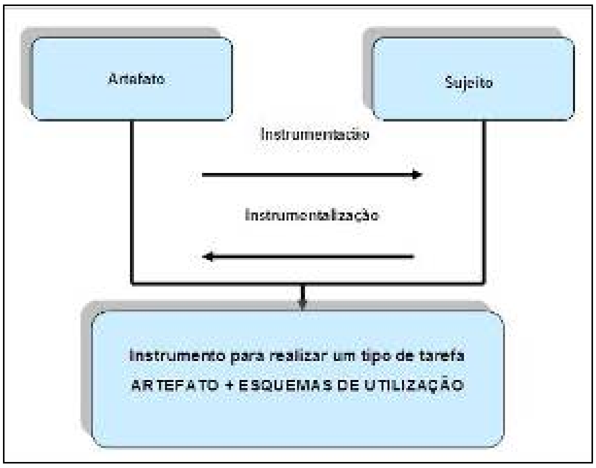


Figura 16. Processo de Gênese Instrumental
Fonte: Trouche (2004, p. 185)

Quanto aos *esquemas de utilização* Trouche (2004) aponta os diferentes esquemas e suas articulações existentes:

- **Esquemas sociais:** pré-construídos no artefato, em um ambiente sociocultural do sujeito para e por outros sujeitos;
- **Esquemas individuais:** esquemas próprios do sujeito;
- **Esquema de uso:** orientado para as tarefas, depende da atividade específica e é relacionado ao artefato;
- **Esquema de ação instrumentada:** que tem por objetivo operar transformações sobre o objeto da atividade;
- **Instrumentalização:** relativa ao artefato e ao descobrimento e seleção de comandos e à personificação do objeto;
- **Instrumentação:** relativa à emergência e evolução de esquemas para a realização de um tipo de tarefa ou de um grupo de um tipo de tarefas;
- **Limitações e potencialidades:** próprias do artefato; e
- **Diferentes artefatos:** são os artefatos de que o sujeito dispõe para sua ação.

Além disso, Trouche (2004) cita que a introdução de novos artefatos conduz ao desenvolvimento de novos instrumentos ou à sua recomposição. Concorda com Rabardel quando afirma que os instrumentos não são neutros, porque, na Gênese Instrumental, o sujeito elabora seus instrumentos, segundo as potencialidades que a parte artefato do instrumento e os esquemas de utilização (pessoais ou sociais) permitem. Eles provocam uma reorganização da atividade, porque são gerados, conforme a atividade e a necessidade do sujeito, em função do contexto, das tarefas, mas também de seus conhecimentos matemáticos.

Para o autor, no processo de *instrumentação* é necessário observar as limitações e as potencialidades do artefato, porque estas moldam as ações do sujeito.

No caso do trabalho com computador, do *artefato informático*[20], o mesmo autor assinala três tipos de limitações:

- **Internas:** relacionadas às informações que podem ser acessíveis ou não, mas que o sujeito não pode modificar. Elas aparecem como elementos incontroláveis, por exemplo: a capacidade da memória do computador, a disposição do teclado do computador ou da calculadora, etc.
- **De comando:** aquelas geradas pelos comandos disponíveis, sua faixa de uso, ou seja, são as relacionadas à existência e à forma de diferentes comandos do artefato.
- **De organização:** ligadas ao fato de que, o uso de um artefato específico, influencia a forma, segundo a qual o sujeito planeja e organiza seu trabalho, levando em consideração sua ergonomia[21] específica e sua forma de funcionamento.

Com base na tipologia de Trouche (2004), assinalamos no trabalho, apenas as limitações de comando da caixa de ferramentas "transformações" que o *Cabri 3D* apresenta, uma vez que as limitações internas e de organização não fazem parte do foco de nosso estudo.

As limitações de comando podem ser observadas ao acionar a caixa de ferramentas "transformações" (Figura 17), podem levar o aluno a considerar que simetria e reflexão são transformações diferentes. Entretanto, ao utilizar o recurso

[20] Artefato informático definido por Balacheff (1994) como "o trabalho sobre o conhecimento que permite a sua representação simbólica e a utilização dessa representação num dispositivo informático".
[21] Ergonomia: área do conhecimento que visa a transformar o trabalho, adaptando-o às pessoas, às suas características, bem como às características da tarefa.

“ajuda de ferramentas” (*F1*), observamos que a explicação esclarece que ambas são reflexões, isto é, simetria axial (reflexão em relação a uma reta) e reflexão (reflexão em relação a um plano). No entanto, nada se menciona em relação à simetria central.

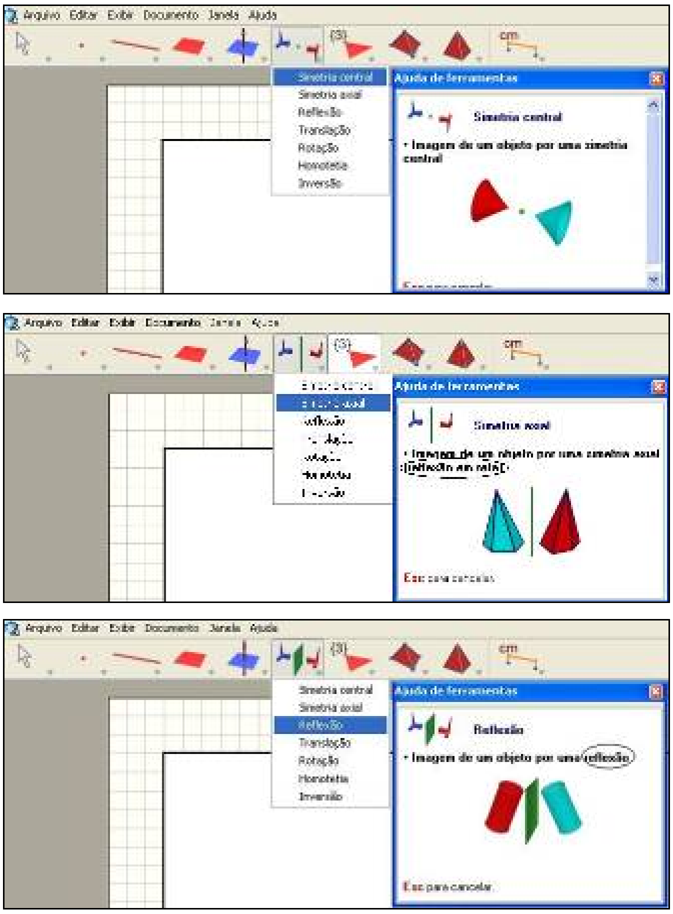


Figura 17. Limitações de comando do *Cabri 3D*

Esta limitação pode ocasionar um *obstáculo didático*[22], visto que a terminologia usada no *Cabri 3D* pode levar ao estudante a confusões.

Além disso, como já assinalamos anteriormente, as ferramentas de transformações foram concebidas sob o caráter funcional, pois mostram o objeto e sua imagem e não com caráter geométrico, porque o movimento que envolve a noção de transformação não é visível, utilizando diretamente as ferramentas mencionadas.

[22] Almouloud (2007) afirma que, de acordo com Brousseau (1983), os obstáculos didáticos parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo. Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompleto que se revelarão mais tarde como obstáculos na formação de conceitos.

Uma vantagem que a Geometria Dinâmica – *Cabri 3D* – traz é justamente o dinamismo, o movimento que está presente nas transformações geométricas, que é fundamental para a compreensão dessas noções, de acordo com Bkouche (1991).

Graças à Geometria Dinâmica e, especificamente, ao *Cabri 3D,* construções que mostram movimento, podem ser realizadas, com ajuda do recurso "animação".

Por outro lado, observamos que a manipulação direta e a visualização de um mesmo objeto em várias configurações em tempo real são a potencialidade mais "visível" do *Cabri 3D*. Destacamos a importância do recurso ajuda (*F1*), potencialidade do artefato, porque quando foi utilizado, na situação anterior, por exemplo, trouxe informações adicionais sobre as noções de transformações geométricas no espaço.

Sobre a importância do uso de ambientes computacionais, ressaltamos que, segundo Trouche (2004), o processo de aprendizagem de Matemática dentro de ambientes tecnológicos complexos pode ser observado sob a abordagem Instrumental de Rabardel.

Nesse sentido, o autor destaca que o trabalho do estudante é complexo com o uso de recursos tecnológicos, porque ele precisa utilizar um grupo de artefatos e controlar cada um deles além de articulá-los no desenvolvimento da atividade. O autor observou isso após de desenvolver um estudo, usando calculadora gráfica. Nesse estudo, todos os estudantes deveriam calcular o limite de uma função quando a variável tendesse ao infinito. O experimento teve por objetivo mostrar como a calculadora gráfica, artefato para o estudante no início da experimentação, pode se transformar em instrumento. O autor considera que, nas ações do estudante, é visível a formação de *esquemas de utilização* para o cálculo de limite. Quanto ao processo de *instrumentalização*, afirma que ele permite a apropriação e seleção de comandos pertinentes da calculadora, no que diz respeito ao processo de *instrumentação*, o estudante cria novos esquemas de utilização para o cálculo de limite.

Para Trouche (2005a), existe uma mudança profunda entre as relações do sujeito com os instrumentos, porque um mesmo instrumento pode ser substituído por outros. Por exemplo, a agenda ou o telefone pode ser substituída pelo computador, dependendo das necessidades de uso do sujeito.

Na mesma linha, Guin e Trouche (2002); Trouche (2002) e Trouche (2005b) apontam que, no processo de *Instrumentalização*, existe diferentes estágios:

- **Estágio de descoberta e seleção:** por exemplo, selecionar uma tecla na calculadora;
- **Estágio de personalização:** no caso do uso da calculadora, pode ser, por exemplo, pegá-la com uma mão. O estudante tem a liberdade de manipular a calculadora, seja com uma mão ou com a outra e pressionar as teclas usando uma caneta, um lápis, etc.;
- **Estágio de transformação do artefato:** esta transformação, pode-se dar em direções não planejadas pelo criador, por exemplo, modificação da barra de ferramentas, etc.

Na pesquisa, por exemplo, no estágio de descoberta e seleção pode ocorrer a seleção de uma ferramenta do *software* ou de uma função específica (ferramenta translação). O estágio de personalização pode ser observado quando o estudante de forma livre, sem sugestão do professor, manipula o mouse para mudar o ponto de vista quando está fazendo uma construção; e o estágio de transformação pode ser evidenciado quando o estudante é capaz de criar, por exemplo, caixas pretas (construções prontas, nas que se utiliza o atributo esconder/mostrar) ou quando vai além das expectativas do professor, ou seja, não se limita a fazer a construção que o professor indica na atividade e adiciona elementos novos que podem enriquecê-la.

Por meio da Abordagem Instrumental de Rabardel, temos a possibilidade de observar e compreender como os estudantes interagem com o ambiente computacional *Cabri 3D*, como se apropriam de algumas ferramentas e recursos desse ambiente computacional e como o transformam em instrumento. Além disso, esta abordagem nos permite também observar como acontece esse mesmo processo com as noções de transformações geométricas no espaço. Dessa maneira, a Abordagem Instrumental oferece os subsídios de que necessitamos para analisar os dados da presente pesquisa.

A seguir, apresentamos a teoria de Duval (1995), que trata dos Registros de Representação Semiótica e das formas da apropriação de uma figura.

Valemo-nos da teoria de Duval, especificamente das diferentes apreensões de uma figura, porque, ao delinear as relações entre o sujeito e o objeto mediadas pelo instrumento, por meio da Abordagem Instrumental de Rabardel observamos os tratamentos efetuados pelos estudantes e a maneira como apreendem a figura quando interagem com o *Cabri 3D*.

2.2 Registros de Representação Semiótica

Para Duval (1995), a aprendizagem em Matemática está ligada aos processos de *semiosis* e *noesis*; denomina se*miosis,* a produção de uma representação semiótica e, *noesis,* os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência.

Para Duval (2003), existe diferença entre a atividade cognitiva necessária em Matemática em relação a outros domínios de conhecimento, essa diferença tem duas características: as representações semióticas e a existência de muitas dessas representações usadas em Matemática. É o caso, por exemplo, dos sistemas de numeração, das figuras geométricas, das escritas algébricas formais, das representações gráficas e da língua natural.

O autor classifica os registros de representação semiótica, segundo sua natureza, em: *multifuncionais*, tipo de registro que admite várias formas de tratamento, mas não podem ser algoritmizáveis, como a língua natural e a configuração de figuras geométricas; *monofuncionais*, sobretudo, o registro algébrico, sistemas numéricos, registro simbólico e gráfico cartesiano.

Além do mais, o autor aponta que há dois tipos de transformações de registros de representações semióticas: os *tratamentos* e as *conversões*. Os *tratamentos* são transformações dentro de um mesmo registro, ou seja, uma transformação interna; as *conversões* são transformações de representações que consistem na mudança de registro, conservando os mesmos objetos matemáticos.

Duval (1995) assinala que a atividade cognitiva necessária em Geometria é complexa, posto que os tratamentos, separados em diferentes registros, podem não ser suficientes para resolver uma situação. Portanto, os processos em Geometria necessitam da coordenação entre tratamentos específicos do registro figural e língua natural, ou seja, da *conversão*.

O autor afirma que a Geometria envolve três formas de processos cognitivos importantes:

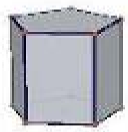
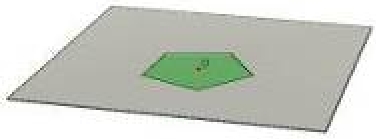
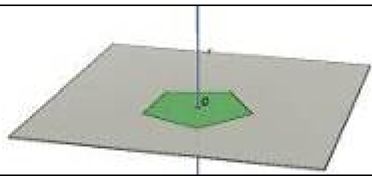
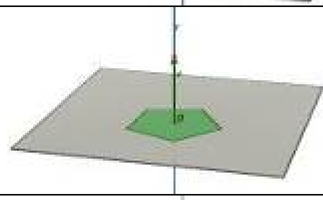
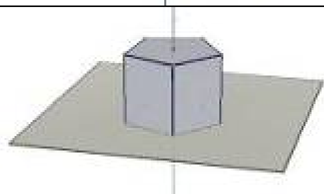
- **Visualização:** serve para a exploração heurística de uma situação;
- **Construção de configurações:** são formadas por um conjunto de ações representadas, e os resultados observados ligados aos objetos matemáticos são representados.
- **Raciocínio:** conduz para a prova e explicação.

De acordo com Duval (1995), em Geometria, o registro figural pode mostrar, de maneira mais rápida e clara, a solução de uma situação-problema. O autor assinala que: *a própria diferença do que uma figura é capaz de "mostrar" ao estudante e ao professor, sugere que há diferentes apreensões de uma mesma figura.* (DUVAL 1995, p. 78, tradução nossa do original francês).

De acordo com Duval (1995), o registro figural possui as seguintes apreensões:

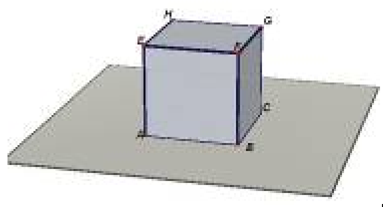
1. **Apreensão sequencial:** refere-se à ordem da construção de uma figura geométrica, com a ajuda de um instrumento que depende, por um lado, das propriedades da figura; e por outro, das limitações do instrumento usado. Exemplo: construção de um prisma reto de base pentagonal. Os dados do Quadro 5 mostram a sequência de passos para a construção desse prisma, utilizando o *Cabri 3D*.

Quadro 5. Apreensão sequencial de um prisma pentagonal

Apreensão sequencial de um prisma pentagonal construído com *Cabri 3D*	
A apreensão sequencial, para realizar a construção do prisma reto de base pentagonal com o *Cabri 3D*, é dada pelo encadeamento de passos para sua construção.	
Passo 1: selecione a ferramenta “polígonos regulares” para criar um pentágono regular no plano de base com centro *O*.	
Passo 2: utilize a ferramenta “perpendicular” para criar uma reta *r* perpendicular ao plano de base que passe pelo centro *O*.	
Passo 3: com a ferramenta “vetor”, criar um vetor $\vec{v}$ com origem no centro do pentágono e que passe pela reta perpendicular *r*.	
Passo 4: utilize a ferramenta “prisma” do *Cabri 3D*. Clique no pentágono, que forma a base do prisma; em seguida, clique no vetor $\vec{v}$. Dessa forma, a construção é validada.	

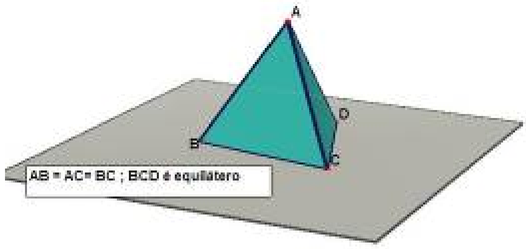
2. **Apreensão perceptiva:** diz respeito à interpretação das formas de uma figura geométrica (Quadro 6) que permite identificar ou reconhecer de forma direta o objeto.

Quadro 6. Apreensão perceptiva de um cubo

Apreensão perceptiva de um cubo construído com o *Cabri 3D*	
A figura representa o cubo ABCDEFGH	

3. **Apreensão discursiva:** corresponde à explicitação de outras propriedades Matemáticas da figura, além das que são assinaladas por uma legenda ou pelas hipóteses, como mostramos nos dados do Quadro 7. Nesta apreensão, outras propriedades são apontadas, ainda que não sejam explícitas visualmente ou por meio de legendas.

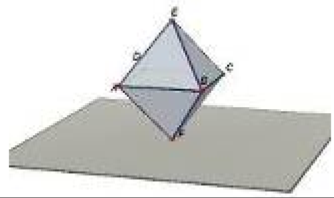
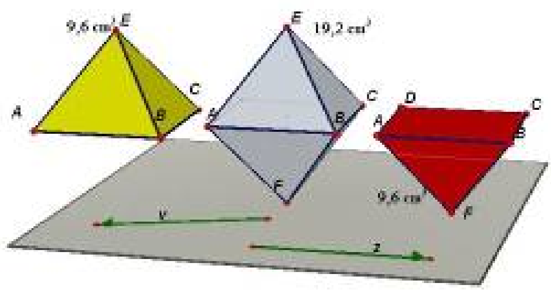
Quadro 7. Apreensão discursiva de um tetraedro regular

Apreensão discursiva de um tetraedro regular construído com *Cabri 3D*	
ABC, *ABD* e *ACD* são triângulos equiláteros. As retas que passam pelos três vértices do tetraedro, perpendiculares às faces opostas, interceptam-se em um mesmo ponto.	

4. **Apreensão operatória**: modificações e/ou transformações possíveis da figura inicial e pela reorganização perceptiva que essas modificações apontam para obter novos elementos que podem nos levar à solução de uma determinada situação-problema. De acordo com Duval (1995), a apreensão operatória permite ter uma visão “dinâmica” das características da figura. Como a apreensão depende das modificações que podem ser feitas na figura, o autor classifica-as em:

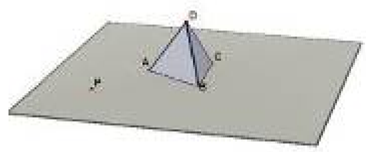
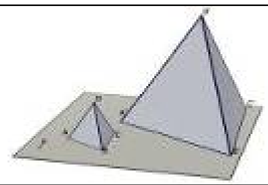
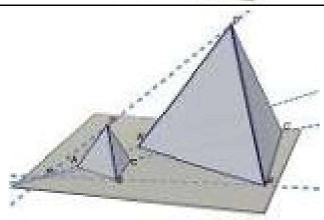
   - **Modificação Mereológica**: a figura separa-se em subfiguras que podem ser reagrupadas. Por exemplo, os dados do Quadro 8 mostram a decomposição do octaedro regular ABCDEF em duas pirâmides ABCDE e ABCDF de mesmo volume. Para fazer essa decomposição no *Cabri 3D*, utilizamos a transformação translação.

Quadro 8. Modificação mereológica de um octaedro regular

<table>
<tr><th colspan="2">Modificação mereológica de um octaedro representado no espaço e construído com Cabri 3D</th></tr>
<tr><td>Figura inicial: octaedro ABCDEF.</td><td></td></tr>
<tr><td>A figura inicial é modificada com a transformação geométrica translação. E com a ferramenta medida do volume, as medidas do volume do octaedro e das subfiguras são indicados.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>A transformação geométrica translação é utilizada nesse caso, para transformar a figura inicial em subfiguras: duas pirâmides de base quadrada.</td></tr>
</table>

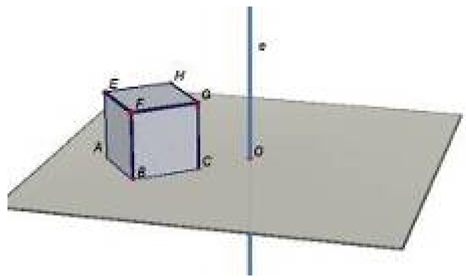
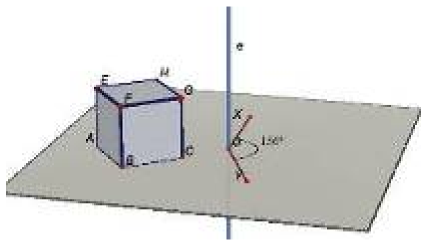
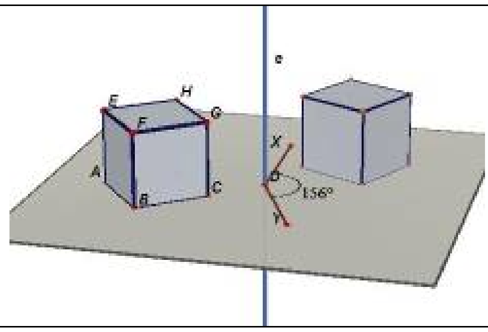
- **Modificação ótica**: a figura pode ser deformada ou transformada em outra, por exemplo, nos dados do Quadro 9, por meio da transformação geométrica homotetia de razão 3 podemos transformar um tetraedro regular em outro.

Quadro 9. Modificação ótica de um tetraedro regular

<table>
<tr><th colspan="2">Modificação ótica de um tetraedro construído com Cabri 3D</th></tr>
<tr><td>Figura inicial: tetraedro ABCDEF e ponto P (homotetia definida pelo ponto) no plano de base.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">A figura inicial é transformada, utilizando a transformação geométrica homotetia (definida por seu centro P e pela razão três).</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

- **Modificação posicional:** a figura pode ser deslocada em relação a um referencial. Tomamos, como exemplo, a rotação de um cubo *ABCDEFGH* em torno do eixo *e,* segundo o ângulo *XOY*, como mostramos nos dados do Quadro 10. A modificação posicional pode ser observada, por exemplo, na rotação de um cubo.

Quadro 10. Modificação posicional de um cubo

<table>
<tr><th colspan="2">Modificação posicional de um cubo construído com o Cabri 3D</th></tr>
<tr><td>Na figura inicial, constrói-se o cubo ABCDEFGH e o eixo de rotação e.</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A figura inicial é deslocada, utilizando a transformação geométrica rotação (em torno ao eixo e, segundo o ângulo $X\hat{O}Y$).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Com base nesse registro criado por Duval (1995) e com o surgimento da Geometria Dinâmica, o ***registro figural dinâmico*** precisa ser considerado. Entendemos como *registro figural dinâmico,* o registro figural utilizado em ambientes de Geometria Dinâmica. No trabalho, as figuras são construídas utilizando o *Cabri 3D*, razão pela qual consideramos esse registro.

Além disso, Duval (2002) distingue visão de visualização. A visão refere-se à percepção visual e, por extensão, à imagem visual. Segundo o autor, a visão, como percepção, envolve duas funções cognitivas:

- **Função epistemológica:** acesso direto a qualquer objeto físico, a qualquer objeto que se vê. Nesse sentido, a percepção visual sempre é tomada como modelo da noção epistemológica de intuição.
- **Função sinóptica:** a visão parece dar imediatamente a apreensão de qualquer objeto ou situação.

No entanto, o autor afirma que,

> [...] a função sinóptica na percepção visual é imperfeita. Em primeiro lugar, porque vivemos em um mundo tridimensional: somente um lado das coisas pode ser visto, e a completa apreensão requer movimento [...] esse movimento é a transformação do conteúdo percebido: temos somente uma sobreposição de vistas sucessivas [...], em segundo lugar, porque a percepção visual sempre focaliza uma parte em especial de uma área e pode pular de uma parte a outra. (DUVAL, 2002, p. 321, tradução nossa do original inglês)

Duval assinala que não pode existir visão sem exploração e aponta que a diferença entre visão e visualização consiste em que a primeira permite um acesso direto ao objeto, a segunda baseia-se na produção de uma representação semiótica, [...] *a representação semiótica, mostra relações, melhor dizer, organização de relações entre unidades representacionais*. [...] *Não há compreensão sem visualização.* (DUVAL, 2002. p. 321, tradução nossa do original inglês)

De acordo com o autor, essas diferenças trazem duas consequências para a aprendizagem de Matemática. A visualização, como atividade cognitiva, é intrinsecamente semiótica e, as expressões “imagem mental” e “representação mental”, segundo o autor, podem ser uma extensão da percepção visual; não obstante, a “representação mental”, como produção mental de representações semióticas, pode ser visualizada e possui fortemente a função sinóptica.

Além do mais, a representação semiótica depende da apreensão perceptiva e é sempre mostrada dentro da percepção visual (registro figural) ou em sua extensão mental.

A teoria de Duval permite complementar o referencial teórico da pesquisa quando assinala que, para o funcionamento cognitivo, a distinção entre um objeto e sua representação e a compreensão da Matemática, como uma atividade que mobiliza uma variedade de registros de representação semiótica, são de fundamental importância na Matemática. Como a pesquisa está centrada no estudo da apropriação do *Cabri 3D* e das transformações geométricas no espaço e nas maneiras como os estudantes interagem com as figuras tridimensionais, a teoria de Duval complementa o referencial teórico.

2.3 Metodologia e procedimentos

Para orientar o estudo e buscar responder às questões de pesquisa, utilizamos alguns aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1988), bem como determinado procedimentos metodológicos para a coleta de dados da parte experimental.

2.3.1 Aspectos da Engenharia Didática

Aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1995) são usados como base metodológica,

> [...] é uma forma de trabalho didático que pode ser comparado com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, baseia-se em conhecimentos científicos de sua área e aceita submete-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo é obrigado a trabalhar com objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. (ARTIGUE, 1995, p. 33, tradução nossa do original espanhol)

Para Almouloud (2007), a Engenharia Didática apoia-se em um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, além da validação, que é a comprovação ou não das hipóteses assumidas no estudo, mediante as análises *a priori* e *a posteriori*. Além disso, a metodologia é caracterizada como experimental porque pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino-aprendizagem de um objeto matemático. A Engenharia Didática compõe-se de quatro fases:

1. **Primeira fase**: formada pelas análises preliminares que são realizadas, segundo o Quadro teórico e os conhecimentos adquiridos a propósito do tema da pesquisa, além da análise epistemológica e dos obstáculos que influenciam em sua evolução. Nesse sentido, apresentamos algumas pesquisas de referência, bem como desenvolvemos o referencial teórico formado pela Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), e os Registros de Representação Semiótica, especificamente, as diferentes apreensões de uma figura de Duval (1995). Além disso, no estudo do objeto matemático da investigação, ressaltamos um possível caminho para o estudo de algumas isometrias, um estudo matemático das isometrias no espaço, do ponto de vista algébrico e geométrico, bem como um breve estudo do ponto de vista do ensino.

2. **Segunda fase:** constituída pela elaboração e análise *a priori* das situações didáticas que contemplam a delimitação das variáveis didáticas. Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis didáticas, as *macrodidáticas* (engenharia em geral) e as *microdidáticas* (organização de uma sessão ou fase) sobre as quais o ensino pode atuar, com base nos resultados obtidos na primeira fase. Assim, nas atividades elaboradas para o estudo visamos a: introduzir as ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* para que o aluno explore esse ambiente; apresentar atividades de exploração das ferramentas e das noções de transformações geométricas no espaço: simetria ou reflexão, translação e rotação, além de desenvolver atividades para a construção de modelos animados que abranjam as noções de transformações geométricas no espaço e que potencializem o uso das diferentes ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D*, em especial, a utilização da caixa de ferramentas “transformações”.

3. **Terceira fase:** ou fase de experimentação que se caracteriza pelo desenvolvimento da pesquisa com a aplicação das atividades. No estudo, aplicamos um questionário diagnóstico, bem como a sequência de atividades nos seis encontros.

4. **Quarta fase:** análise *a posteriori* e de validação em que ocorre o tratamento dos dados obtidos na terceira fase para com estes validar ou refutar as hipóteses levantadas. Nessa fase, analisamos os dados coletados ao longo dos seis encontros.

2.3.2 Procedimentos

Para coletar os dados da pesquisa, utilizamos como dispositivos experimentais: questionários, observações e gravações (filmagem em vídeo; depoimentos e gravação das telas dos computadores). Em seguida, explicamos cada um dos métodos de coleta de dados.

Questionários

Constituído de dois questionários: um de diagnóstico, no início do primeiro encontro e um final, antes de terminar o sexto encontro.

O questionário diagnóstico teve dois objetivos, saber se os estudantes já tinham usado ambientes de Geometria Dinâmica e conhecer quais noções de transformações geométricas eles tinham. O questionário compôs-se de três partes:

- **Parte I:** a finalidade era saber se os estudantes tiveram contato com ambientes de Geometria Dinâmica, especificamente, com *Cabri II* e/ou *Cabri 3D*;
- **Parte II:** formada por três perguntas e três exemplos, visava a saber os conhecimentos prévios dos estudantes sobre simetria, translação e rotação;
- **Parte III:** formada por três figuras – pintura de Esher, construção pré-Inca (Huaca do sol) e a Catedral de Brasília – que envolvem noções de transformações geométricas.

O questionário final foi composto por oito perguntas, cuja finalidade era levantar informações no que diz respeito ao ambiente computacional *Cabri 3D* e às atividades desenvolvidas pelos estudantes. O questionário estava composto de dois grupos de perguntas:

- **Primeiro grupo:** formado por três perguntas relacionadas ao uso das ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D*;
- **Segundo grupo:** de cinco perguntas relacionadas às questões referentes a construções, especificamente, às construções dos modelos animados moinho, casa e boneco que envolvem noções de transformações geométricas no espaço.

Observações

Durante a aplicação das atividades, contamos com a presença de três observadores – dos colegas da PUC/SP e um professor de Matemática da escola – o professor do grupo e um pesquisador. Quanto ao processo de observação, para Vianna (2003) gera elementos que esclarecem ao pesquisador as ações realizadas pelos estudantes observados. Além disso, o autor afirma que o observador deve tomar decisões rápidas e utilizar seu raciocínio dedutivo/indutivo para identificação e seleção de diferentes aspectos a serem considerados na observação.

O papel dos observadores era registrar por escrito as ações do estudante observado, além de gravar em áudio e redigir a observação, que deveria ser enviada semanalmente à pesquisadora. Além disso, no último encontro, a pesquisadora e uma das observadoras – colega da PUC/SP – realizaram entrevistas rápidas para alguns dos estudantes participantes. As observações foram feitas em todos os encontros e cada observador acompanhou o mesmo estudante durante todo o curso optativo.

Desse modo, três estudantes foram escolhidos de forma aleatória. Depois foi elaborado um roteiro de observação para cada encontro, com a finalidade de encaminhar as observações (individuais) e facilitar as anotações dos observadores.

Gravações

Nas gravações dos seis encontros, registramos as observações em vídeo e nos primeiros encontros optamos por fazer as observações (filmagem) de forma generalizada, nos três últimos encontros, os estudantes foram observados de forma individualizada.

Ao longo dos seis encontros, gravamos nos arquivos do computador as telas das construções de todos os estudantes – observados e outros participantes – e, no último dia, registramos em vídeo os depoimentos de alguns estudantes participantes.

Os dados do Quadro 11, adaptado de Silva (2005, p. 46) mostram os recursos utilizados na coleta de dados durante os encontros, com suas respectivas datas e como se deu a aplicação nos encontros.

Quadro 11. Recursos utilizados na coleta de dados

Recursos utilizados	Aplicação
Questionário diagnóstico	Aplicado no início do primeiro encontro. Data: 25/04/08
Observações	Seis encontros de 1h30 cada. Total de horas: 9h Data: 25/04/08 até 13/06/08
Gravações	Telas do computador.
	Depoimentos: sexto encontro - quatro participantes
Questionário final	Aplicado no final do sexto encontro Data: 13/06/08

Para fazer um estudo do objeto matemático da pesquisa, no capítulo seguinte, apresentamos um possível caminho para o estudo de transformações geométricas, um estudo matemático, bem como uma breve visão do ensino delas.

Capítulo 3

O OBJETO MATEMÁTICO

Para fazer um estudo do objeto matemático da pesquisa, apresentamos um possível caminho histórico das transformações geométricas, seu estudo matemático, centrado em algumas isometrias no espaço, bem como um estudo do ponto de vista do ensino.

3.1 Um possível caminho histórico

A fim de compreender a noção de transformações geométricas, detivemo-nos em alguns momentos específicos da História para extrair, desses períodos, situações em que as transformações geométricas foram se consolidando.

Segundo nosso olhar atual, uma primeira ideia de transformações geométricas pode ter sido dada sob a forma da *proposição IV*, do livro *Elementos de Euclides* que trata da congruência de triângulos. O caso lado-ângulo-lado (L-A-L) dá a ideia de translação, visto que nos apresenta a noção, tanto de movimento, como de "coincidência" de triângulos

> [...] para provar o caso de congruência L-A-L, Euclides começa por mover um dos triângulos de forma a fazê-lo "coincidir" com o outro, mas nenhum dos postulados lhe permitia esse movimento. Como garantir que o movimento não alterava a forma do triângulo? Faltava, portanto, um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento. Alguns geômetras sugeriram o seguinte postulado "as figuras geométricas

podem deslocar-se sem modificar seu tamanho e forma". Esse postulado foi utilizado por todos os geômetras gregos, mas sem enunciá-lo explicitamente. [...] em 1557, o geômetra Pelletier o considera como uma definição. Em 1638, o geômetra Borelli toma a precaução de advertir: vamos sobrepor os triângulos não materialmente, mas sim intelectualmente. Em 1898, Hilbert o inclui na lista de seus postulados (é chamado, hoje, caso LAL de congruência de triângulos). (BONGIOVANNI, p. 6)[23]

Contudo, não podemos afirmar que Euclides tinha essa noção, mesmo porque esse "movimento" era em realidade a superposição de figuras. Esta superposição de triângulos não pode ser considerada como uma transformação, posto que, de acordo com Cabrera (1949), os movimentos dados na construção com os elementos primitivos – circunferência e reta – usando régua e compasso, eram, para os gregos eram "movimentos perfeitos", aceitando sua existência suprimiam da geometria, por não ser necessário, todo movimento nas demonstrações. Além disso, Cabrera (1949) assinala que

> [...] Euclides teve plena consciência do problema de recorrer ao "movimento", operação física não apropriada para a demonstração de propriedades geométricas que se referem a figuras não sensíveis, somente vistas pela imaginação. (CABRERA, 1949, p. 106, tradução nossa do original espanhol)

O autor afirma que outra maneira de formular rigorosamente a congruência de figuras é dar, como noção primitiva, o movimento geométrico.

Séculos após, no Renascimento, o arquiteto famoso, escultor e pintor Filippo Brunelleschi (1377-1446) inicia a geometrização da perspectiva.

> [...] Brunelleschi descobriu os princípios da perspectiva linear, que, conhecidos por gregos e romanos e esquecidos durante toda a Idade Média. Restabeleceu na prática o conceito de ponto de fuga, e a relação entre a distância e a redução no tamanho dos objetos. Seguindo os princípios ópticos e geométricos enunciados por Brunelleschi, os artistas da época puderam reproduzir objetos tridimensionais no plano[24].

De acordo com Cavalca (1998), Brunelleschi, por volta de 1415, utilizou um novo método de pintura denominado "construção legítima" que se baseava na

[23] http://br.geocities.com/prof_afonso/tex4euclides.doc
[24] http://www.pitoresco.com.br/escultura/brunelleschi/brunelleschi.htm

dupla projeção ortogonal, de modo que as duas projeções permitiam determinar a posição de cada ponto imagem sobre o Quadro, ou seja, determina-se um ponto de vista principal ou ponto de fuga.

> [...] a partir do controle da técnica, com a aquisição do saber fazer, possibilita-se o saber pensar e o saber olhar. Com o domínio sobre o pensar, o espaço, Brunelleschi conquista a descoberta e aplicação prática da *costruzione legittima* de Alberti. Haverá, a partir desse descobrimento, uma mudança na maneira de ver e representar, quando a expressão plástica adota uma visão do espaço que permite mensurá-lo, construí-lo de maneira científica e representá-lo geometricamente. (COSTA, 2004, p. 55)

Embora Brunelleschi tivesse criado o novo método, foi o arquiteto italiano Leon Battista Alberti quem teorizou as ideias de Brunelleschi e determinou o ponto de fuga central. O pintor e geômetra Piero Della Francesca validou o método de Alberti e *[...] foi o primeiro a apresentar uma regra para a determinação geométrica e numérica da diminuição das linhas de mesmo comprimento, paralelas à linha terra, equidistantes e situadas no plano geometral.* (CAVALCA, 1998, p. 21)

Essa geometrização da perspectiva assinala um momento em que, por causa da necessidade de representar objetos tridimensionais, as transformações geométricas, homotetia e translação foram utilizadas. Nesse período, no século XIV, desenvolveu-se o interesse pelas representações planas de figuras espaciais.

No século XVI, Guidobaldo Marchese Del Monte (1545-1607) escreveu um tratado de seis livros de perspectiva, *Perspectivae Libri sex,* publicado em 1600. Trata-se do primeiro livro de perspectiva que contém teoremas, deduzidos por ele, com base nos Elementos de Euclides. Entretanto, o mais importante resultado do tratado diz respeito ao conjunto de retas paralelas e não paralelas ao plano da figura que convergem em um ponto que desaparece. Esse tratado representou um enorme avanço para compreender a Geometria envolta na perspectiva e, sua contribuição principal foi o início do desenvolvimento da Geometria Projetiva.

No livro de Girard Desargues *Brouillon d´un projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*[25] de 1639, encontra-se a primeira formulação da relação entre transformação e invariante. Desargues logrou atrelar a perspectiva do Renascimento com o princípio de continuidade de Kepler. De acordo com Boyer,

> [...] a geometria projetiva de Desargues tinha uma enorme vantagem em generalidade sobre a geometria métrica de Apolônio, Descartes e Fermat, pois muitos casos especiais de um teorema se juntaram num enunciado geral. (BOYER, 1996, p. 248)

Uma de suas principais contribuições foi o famoso "Teorema Fundamental de Desargues"

> Se dois triângulos, coplanares ou não, situam-se de maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então, os pontos de interseção dos pares de lados correspondentes são concorrentes, então, os pontos de interseção dos pares de lados correspondentes são colineares e vice-versa. (EVES, 1995, p. 360)

Dois séculos depois das descobertas de Desargues, Jean Victor Poncelet (1788-1867) deu continuidade ao trabalho de Desargues e publicou, em 1822, o *Traité des propriétés projectives des figures*, que é um estudo de Geometria projetiva, utilizando Geometria Sintética[26], isto é, o estudo não envolveu métodos analíticos, mas, apenas geométricos, de modo que as propriedades de uma figura permanecem invariantes sob projeção. O trabalho de Poncelet foi continuado por Chasles (1798-1880), mas a Geometria Projetiva estudada por ele usou os métodos sintético e analítico.

A Geometria Analítica de Plucker (1801-1868) empregou um novo sistema de coordenadas, chamadas coordenadas homogêneas[27]. Na mesma época, o trabalho de Geometria Analítica de Möbius (1790-1860) *Der barycentrische Calcul*,de 1827, transformou-se em um clássico que incluiu muitos resultados em Geometria Projetiva. Nele, discutiu as transformações, classificando-as como

[25] Esboço de Projeto de uma tentativa de lidar com os Casos Possíveis de Interseção de um Cone com um Plano.

[26] Geometria que utiliza métodos geométricos nas construções e demonstrações.

[27] Um ponto (X, Y) do plano é representado, em coordenadas homogêneas, por [w, x, y], onde X = x/ w e Y = y/ w. Desse modo, o ponto cartesiano (X, Y) corresponde a uma infinidade de triplas [w, wX, wY].

congruências, semelhanças, afins ou colineares, além de sugerir o estudo de invariantes em cada família de transformações. Desenvolveu também uma configuração chamada agora *banda de Möbius*, que teve um papel de destaque no desenvolvimento da Geometria Projetiva.

Felix Klein, assistente de Puckler, em 1871, fez descobertas em Geometria e publicou dois artigos, o primeiro, *On the So-called Non-Euclidean Geometry*, no qual mostrava que existe a possibilidade de considerar a Geometria Euclidiana e a não Euclidiana, como casos particulares de uma superfície projetiva com uma seção cônica contígua. No ano seguinte, apresentou o programa *Erlanger* no qual mostrou como a Teoria dos Grupos poderia relacionar as Geometrias, Sintética e Algébrica.

Boyer (1996) assinala que o programa *Erlangen*, de 1872, descrevia a Geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações e que toda classificação de um grupo de transformações tornava-se uma codificação das Geometrias, ou seja, nesse programa, tentou-se unificar as diferentes Geometrias, recorrendo ao conceito de grupo de simetrias.

A abordagem de Klein trouxe notáveis mudanças, embora tivesse pouca divulgação nos primeiros 20 anos após sua publicação e marcou o desenvolvimento da Geometria do século XX.

3.2 O grupo das transformações no espaço

Para fazer o estudo das transformações no espaço, baseamo-nos em *Um estudo geométrico das transformações elementares* de Alves e Galvão (1996), e em *Isometrias* de Lima (2007).

Começamos por definir, de modo geral, o que é uma transformação, para depois estudar algumas transformações especiais, chamadas isometrias no espaço.

Consideremos uma aplicação F do conjunto de todos os pontos do espaço, E, em si mesmo, ou seja, uma correspondência que a cada ponto P de E associa um único ponto de E que denominamos $F(P)$. Esse fato é representado da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccc} F: & E & \to & E \\ & P & \mapsto & F(P) \end{array}$$

Dizemos que F é sobrejetora, quando para todo ponto Q do espaço de chegada – contradomínio – existe um ponto P do espaço de saída – domínio – tal que, $F(P) = Q$.

A aplicação F é injetora quando para quaisquer pontos P_1 e P_2 do espaço de saída, tais que $F(P_1) = F(P_2)$, tem-se $P_1 = P_2$.

Uma aplicação é bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora. Assim, se F é uma aplicação bijetora, podemos afirmar que para todo ponto P_2 do espaço existe um único ponto P_1 tal que $F(P_1) = P_2$.

Definição. Uma transformação no espaço é uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do espaço sobre si mesmo, isto é, $F{:}E \to E$ é uma transformação no espaço, se e somente se F é uma aplicação bijetora.

Sendo $F{:}E \to E$ bijetora, podemos definir a aplicação inversa $F^{-1}{:}E \to E$, tal que F^{-1} tem ação contrária à de F, isto é, se

$$\begin{array}{rcccc} F: & E & \to & E & \\ & P & \mapsto & Q = & F(P) \end{array}$$

então

$$\begin{array}{rccccc} F^{-1}: & E & \to & E & & \\ & Q & \mapsto & F^{-1}(Q) & = & F^{-1}(F(P)) = P \end{array}$$

Proposição. F^{-1} é bijetora.

- F^{-1} é injetora.

Dados os pontos P_1 e P_2 no espaço de chegada de F^{-1}, com $P_1 = P_2$, precisamos mostrar que $Q_1 = Q_2$, onde $F^{-1}(Q_1) = P_1$ e $F^{-1}(Q_2) = P_2$. Como $P_1 = P_2$, então $F(P_1) = F(P_2)$, ou seja, $Q_1 = Q_2$, sendo $Q_1 = F(P_1)$ e $Q_2 = F(P_2)$, ou seja, $F^{-1}(Q_1) = P_1$ e $F^{-1}(Q_2) = P_2$.

- F^{-1} é sobrejetora.

Dado $P \in E$, espaço de chegada de F^{-1}, então $F(P) \in E$, ou seja, basta tomar $F(P)$ pertencente ao espaço de saída de F^{-1} de modo que, $F^{-1}(F(P)) = P$. ■

Seja $\mathfrak{F}(E)$ o conjunto das transformações de E.

Se *f* e *g* $\in \mathfrak{F}(E)$ então a aplicação composta de *g* e *f* é a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & E & \to & E \\ & P & \mapsto & (f \circ g)(P) \end{array}$$

tal que $(f \circ g)(P) = f(g(P))$.

Proposição. Se *f* e *g* $\in \mathfrak{F}(E)$, então $(f \circ g) \in \mathfrak{F}(E)$, ou seja, a composta de duas transformações é uma transformação.

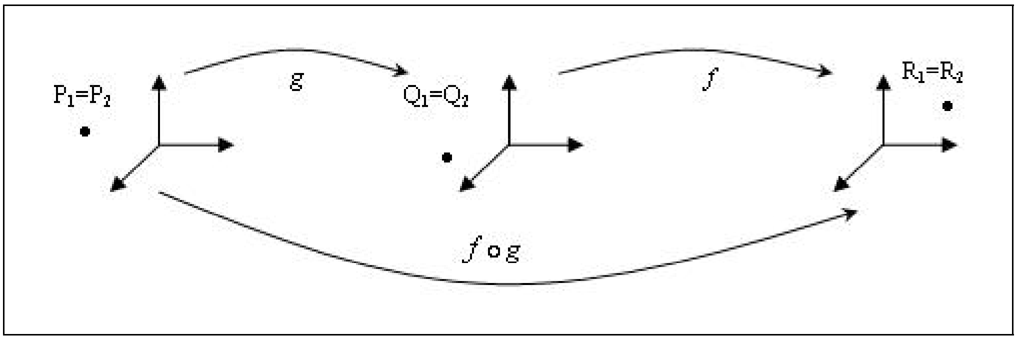


Figura 18. Composição de duas transformações

- $(f \circ g)$ é injetora.

De fato, sendo R_1 e R_2 no espaço de chegada $f \circ g$, com $R_1 = R_2$, precisamos mostrar que $P_1 = P_2$, onde $(f \circ g)(P_1) = R_1$ e $(f \circ g)(P_2) = R_2$. Como $R_1 = R_2$ e *f* é injetora, então $Q_1 = Q_2$ onde $f(Q_1) = R_1$ e $f(Q_2) = R_2$.

Como $Q_1 = Q_2$ e *g* é injetora, então $P_1 = P_2$ onde $g(P_1) = Q_1$ e $g(P_2) = Q_2$, o que termina a demonstração de que $f \circ g$ é injetora (Figura 18).

- $(f \circ g)$ é sobrejetora.

De fato, dado $R \in E$, espaço de chegada de $f \circ g$, precisamos mostrar que existe $P \in \mathbb{R}^3$, espaço de saída de $f \circ g$, tal que $(f \circ g)(P) = R$.

Como *f* é sobrejetora, dado $R \in E$, espaço de chegada de *f*, existe $Q \in E$, espaço de saída de *f*, tal que $f(Q) = R$.

Como *g* é sobrejetora, dado $Q \in E$, espaço de chegada de *g*, existe $P \in \mathbb{R}^3$, espaço de saída de *g*, tal que $g(P) = Q$.

Logo $(f \circ g)(P) = R$ e $f \circ g$ é sobrejetora. ■

Em outras palavras, como $f \circ g$ é uma transformação, diz-se que o conjunto $\mathfrak{F}(E)$ é fechado com relação à operação de composição.

Sendo *Id* a aplicação identidade do E, $Id(P) = P$, $\forall P \in E$, então $f \circ Id = Id \circ f = f$, $\forall f \in \mathfrak{F}(E)$.

De fato, $(f \circ Id)(P) = f(Id(P)) = f(P) = Id(f(P)) = (Id \circ f)(P)$. Por outro lado, $f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$ onde f é uma transformação qualquer no espaço e f^{-1} é a sua inversa.

Valem as seguintes propriedades da operação composição em $\mathfrak{F}(E)$:

a) Fechamento: para quaisquer *f* e *g* em $\mathfrak{F}(E)$, $f \circ g \in \mathfrak{F}(E)$, como já vimos acima;

b) Associativa: para quaisquer *f*, *g* e *h* em $\mathfrak{F}(E)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

De fato,

$$\forall P \in E,\ ((f \circ g) \circ h)(P) = (f \circ g)(h(P)) = f(g(h(P))) = f((g \circ h)(P))$$
$$= (f \circ (g \circ h))(P), \text{ ou seja, } (f \circ (g \circ h))(P) = f \circ (g \circ h)(P).$$

c) Existe em $\mathfrak{F}(E)$ um elemento Id, tal que $f \circ Id = f = Id \circ f$, $\forall f \in \mathfrak{F}(E)$, como já vimos acima.

d) Para todo $f \in \mathfrak{F}(E)$, existe $f^{-1} \in \mathfrak{F}(E)$, tal que $f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$.

O conjunto $\mathfrak{F}(E)$ com a operação composição que verifica as propriedades mencionadas, possui a estrutura algébrica de grupo. Diz-se que $\mathfrak{F}(E)$ é o grupo das transformações no espaço.

Definição. Um subconjunto não vazio $\mathfrak{G}(E)$ de transformações no espaço é um subgrupo de $\mathfrak{F}(E)$ se e somente se satisfaz as seguintes propriedades:

i) se $f, g \in \mathfrak{G}(E)$, então $f \circ g \in \mathfrak{G}(E)$;

ii) se $f \in \mathfrak{G}(E)$, então $f^{-1} \in \mathfrak{G}(E)$.

Notamos que se $\mathfrak{G}(E)$ é um subgrupo de $\mathfrak{F}(E)$ então $\mathfrak{G}(E)$ também é um grupo com a operação composição, posto que as propriedades que garantem a estrutura algébrica de grupo são satisfeitas.

De fato,

- a primeira propriedade (a) é satisfeita, pois vale i);
- a segunda (b) é satisfeita pelos elementos de $\mathfrak{G}(E)$, pois eles são elementos de $\mathfrak{F}(E)$;
- para a terceira (c), é suficiente verificar que $Id \in \mathfrak{G}(E)$. Como $\mathfrak{G}(E)$ é não vazio, existe um elemento $f \in \mathfrak{G}(E)$, logo de acordo com ii) $f^{-1} \in \mathfrak{G}(E)$ e segundo i) $f \circ f^{-1} \in \mathfrak{G}(E)$, ou seja, $Id \in \mathfrak{G}(E)$;
- a quarta propriedade (d) é satisfeita em virtude de ii).

Estudo de algumas isometrias no espaço

Definição. Uma transformação F de $\mathfrak{F}(E)$ é chamada uma isometria no espaço quando, para todo par de pontos distintos P_1 e $P_2 \in E$, tem-se $P'_1P'_2 = P_1P_2$, onde $P'_1 = F(P_1)$ e $P'_2 = F(P_2)$.

Em outras palavras, uma transformação F é uma isometria quando a distância entre dois pontos quaisquer P_1 e P_2 do espaço é igual à distância entre as imagens desses pontos pela *F*.

Assim, diremos que a isometria F preserva distâncias entre pontos do espaço.

Teorema. O conjunto de todas as isometrias $\mathfrak{I}(E)$ é um subgrupo de $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^3)$, ou seja,

i) se *f*, $g \in \mathfrak{I}(E)$ então $f \circ g \in \mathfrak{I}(E)$;

ii) se $f \in \mathfrak{I}(E)$, então $f^{-1} \in \mathfrak{I}(E)$.

Em primeiro lugar, sabemos que $\mathfrak{I}(E)$ é não vazio, pois a transformação identidade é uma isometria, isto é, $Id \in \mathfrak{I}(E)$.

Para provar i), consideremos *f*, $g \in \mathfrak{I}(E)$ e sejam P_1 e P_2 pontos distintos de E; temos então $P'_1P'_2 = P_1P_2$ pois *g* é uma isometria e $P''_1P''_2 = P'_1P_2{}'$, pois *f* é uma isometria, sendo $P'_1 = g(P_1)$ e $P'_2 = g(P_2)$ e $P_1{}'' = f(P'_1)$ e $P''_2 = f(P_2{}')$. Portanto, $P''_1P''_2 = P_1P_2$ onde $P''_1 = f(\mathrm{g}(P_1)) = (\mathrm{f} \circ g)(P_1)$ e $P''_2 = f(\mathrm{g}(P_2)) = (\mathrm{f} \circ g)(P_2)$, de modo que $f \circ g \in \mathfrak{I}(E)$.

Para provar se $f \in \mathfrak{I}(E)$ então $f^{-1} \in \mathfrak{I}(E)$, temos que provar que se *f* é uma isometria então f^{-1} também é uma isometria.

Já sabemos que f^{-1} é uma transformação e como f é uma isometria então, quaisquer que sejam P_1 e $P_2 \in E$, $P'_1P'_2 = P_1P_2$ onde $P'_1 = f(P_1)$ e

$P'_2 = f(P_2)$. Mas então f^{-1} também é uma isometria, pois, $P_1P_2 = P_1{}'P_2{}'$ onde $P_1 = f^{-1}(P_1{}')$ e $P_2 = f^{-1}(P'_2)$. ■

A seguir, apresentamos as isometrias: translação, reflexão em relação a um ponto ou simetria central, reflexão em relação a uma reta ou simetria axial, reflexão em relação a um plano e rotação.

3.2.1 Translação

Definição. Seja $A \in E$ um ponto qualquer e seja $\vec{v}$ um vetor dado no espaço. A translação no espaço, segundo o vetor $\vec{v}$, é uma aplicação $T_{\vec{v}}: E \to E$ tal que para todo ponto A do E, $T_{\vec{v}}(A) = A + \vec{v} = A'$, de modo que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, ou seja, tal que $\left|\overrightarrow{AA'}\right| = \left|\vec{v}\right|$, $\overrightarrow{AA'}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$ e o sentido de percurso $A \to A'$ coincide com o sentido do vetor $\vec{v}$.

Notamos que $T_{\vec{v}}(A) = A + \vec{v}$ significa que o ponto transladado $(T_{\vec{v}}(A))$ é igual à soma do ponto A dado com o vetor $\vec{v}$.

A operação soma do ponto A com o vetor $\vec{v}$ goza das seguintes propriedades:

1. $A + \vec{v} = A$, se somente se, $\vec{v}$ é o vetor nulo, ou seja, $\vec{v} = \vec{0}$;
2. $(A + \vec{v}) + \vec{x} = A + (\vec{v} + \vec{x})$, para quaisquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{x}$;
3. Se $A + \vec{v} = A + \vec{x}$ então $\vec{v} = \vec{x}$, para quaisquer vetores $\vec{v}$ e $\vec{x}$;
4. Se $A + \vec{v} = B + \vec{v}$ então $A = B$, para qualquer vetor $\vec{v}$.

Observamos que se $\vec{v} = \vec{0}$ temos $T_{\vec{0}}(A) = A + \vec{0} = A = Id(A)$, $\forall A \in E$, isto é, $T_{\vec{0}}$ é a translação identidade do E.

Ressaltamos que toda translação $T_{\vec{v}}$ é uma transformação no espaço, uma vez que é uma aplicação injetora e sobrejetora.

- $T_{\vec{v}}$ é injetora

De fato, $T_{\vec{v}}(A) = T_{\vec{v}}(B) \Rightarrow A + \vec{v} = B + \vec{v} \Rightarrow A = B$, pela propriedade 4 da operação soma de ponto com vetor.

- $T_{\vec{v}}$ é sobrejetora

Para todo ponto $A' \in \mathrm{E}$ consideramos o ponto $A = A' + (-\vec{v})$; então, utilizando a propriedade 2 da soma de ponto com vetor temos:

$$T_{\vec{v}}(A) = T_{\vec{v}}(A' + (-\vec{v})) = [A' + (-\vec{v})] + \vec{v} = A' + [(-\vec{v}) + \vec{v}] = A' + \vec{0} = A'. \ \blacksquare$$

Proposição. Toda translação $T_{\vec{v}}$ é uma isometria no espaço.

De fato, já sabemos que $T_{\vec{v}}$ é uma transformação; basta mostrar então que $T_{\vec{v}}$ preserva as distâncias.

Sejam *A* e *B* pontos do espaço e $A' = T_{\vec{v}}(A)$ e $B' = T_{\vec{v}}(B)$ onde $T_{\vec{v}}$ é uma translação.

Queremos mostrar que a distância entre A' e B' é igual à distância entre *A* e *B,* isto é, $d(A', B') = d(A, B)$.

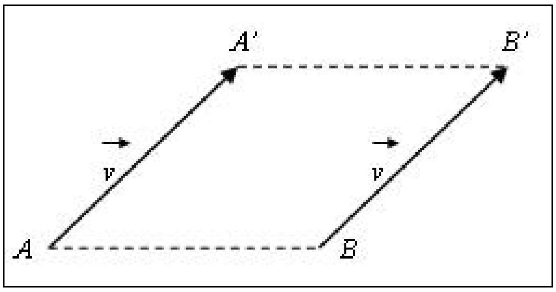


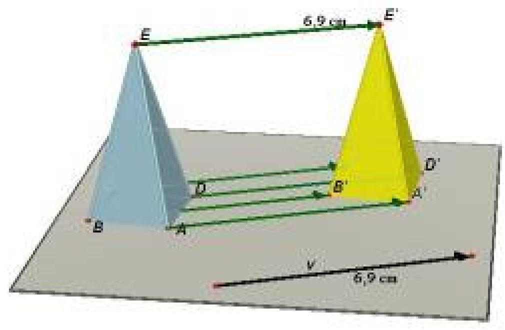
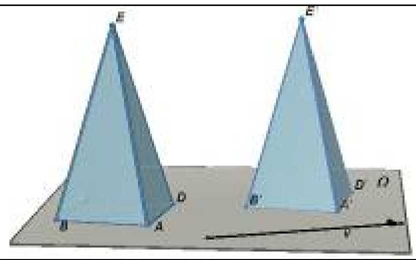
Figura 19. Translação dos pontos *A* e *B*, segundo o vetor $\vec{v}$

A Figura 19 mostra que o quadrilátero $ABB'A'$ é um paralelogramo, pois tem dois lados opostos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ paralelos e congruentes; logo os outros dois lados opostos também, são paralelos e congruentes, de onde segue que $d(A,B) = d(A',B')$. ■

Construção de uma translação com *Cabri 3D*

Nas construções do Quadro 12, mostramos a translação de uma pirâmide, segundo um vetor, utilizando *Cabri 3D*.

Quadro 12. Translação da pirâmide *ABCD* segundo o vetor $\vec{v}$

Criamos a pirâmide *ABCDE* e o vetor $\vec{v}$ do espaço. Consideramos vetores equipolentes ao vetor $\vec{v}$ traçados a partir dos vértices da pirâmide: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ e $\overrightarrow{EE'}$.	
Obtemos dessa forma a translação da pirâmide *ABCDE* segundo o vetor $\vec{v}$.	

3.2.2 Reflexão em relação a um ponto ou simetria central

Definição. É dado um ponto $X \in E$. A reflexão em relação a X é uma aplicação $S_X : E \to E$ que fixa o ponto X e que faz corresponder a cada ponto $P \in E$ o ponto $P' = S_X(P)$, tal que X é o ponto médio do segmento PP'.

Ressaltamos que toda reflexão S_X em relação a um ponto X é uma transformação no espaço, uma vez que é uma aplicação injetora e sobrejetora.

Sejam A e B pontos do espaço e X um ponto fixo do E.

- S_X é injetora

De fato, se $S_X(A) = S_X(B)$ onde $S_X(A) = A'$ e $S_X(B) = B'$ sabemos que X é ponto médio de $\overline{AA'}$ e que X é ponto médio de $\overline{BB'}$; como $A' = B'$ segue que $A = B$.

- S_X é sobrejetora

Para todo $A' \in E$, consideramos o ponto $A = S_X{}^{-1}(A')$. Afirmamos que $S_X(A) = A'$.

De fato, $S_X(A) = S_X(S_X{}^{-1}(A')) = Id(A') = A'$.

Observamos que $(S_X)^{-1} = S_X$, ou seja, S_X é uma involução no espaço[28]. ■

Proposição. Toda reflexão S_X em relação a um ponto X é uma isometria no espaço.

De fato, já sabemos que S_X é uma transformação; basta mostrar então que S_X preserva as distâncias.

Sejam $A' = S_X(A)$ e $B' = S_X(B)$

---

[28] Involução no espaço é uma transformação F no espaço diferente da identidade, tal que $F^2 = Id$. Alves e Galvão (1996, p. 98).

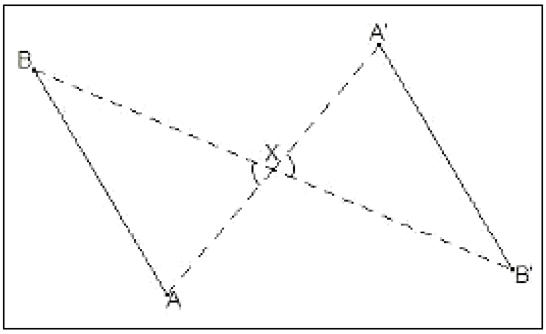


Figura 20. Simetria central dos pontos *A* e *B* em relação ao ponto *X*

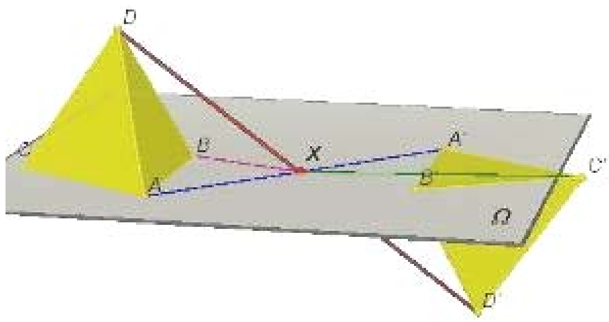
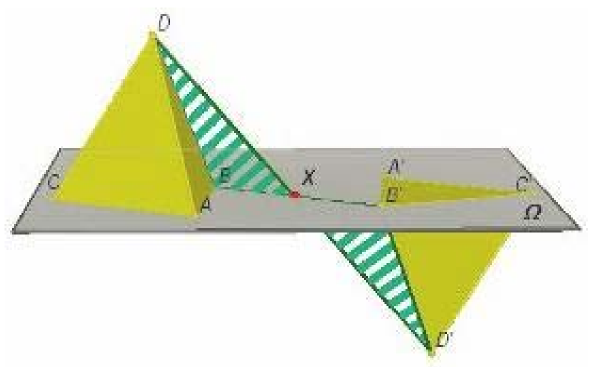
A Figura 20 mostra que os triângulos AXB e $B'XA'$ são congruentes, pois: $\overline{AX} \equiv \overline{XA'}$ e $\overline{BX} \equiv \overline{XB'}$ e, os ângulos $\measuredangle AXB \equiv \measuredangle A'XB'$ porque são opostos pelo vértice. Pela congruência de triângulos (*LAL*) $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.

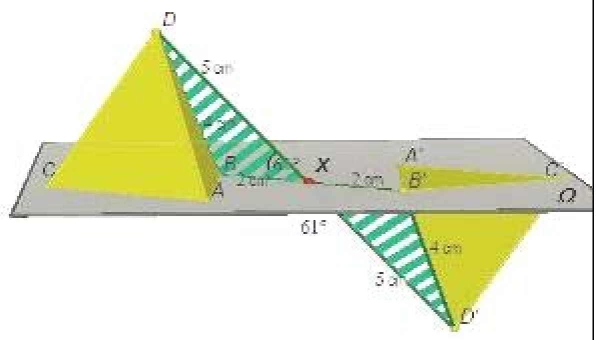
Logo, $d(S_X(A), S_X(B)) = d(A,B)$. ■

Construção de uma reflexão em relação a um ponto ou simetria central com *Cabri 3D*

A reflexão de um tetraedro regular em relação a um ponto do espaço é mostrada nas construções do Quadro 13 com *Cabri 3D.*

Quadro 13. Reflexão em relação ao ponto *X* do tetraedro regular *ABCD*

Criamos o tetraedro regular *ABCD* e um ponto *X* do espaço. O tetraedro *A'B'C'D'* é a imagem do tetraedro *ABCD* segundo a reflexão do sólido em relação ao ponto *X*.	
A reflexão em relação ao ponto fixo *X*, permite afirmar que os segmentos $DX \equiv XD'$ e $BX \equiv XB'$. Além isso, $\measuredangle BXD \equiv \measuredangle B'XD'$, por que são opostos pelo vértice. Assim, pela congruência de triângulos (*LAL*), temos que, $\Delta BDX \equiv \Delta B'D'X$ donde $\overline{BD} \equiv \overline{B'D'}$. O raciocínio acima mostra a isometria entre $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$; o mesmo o pode ser feito com todas as outras arestas do tetraedro.	

Dita verificação pode ser feita, também, com as ferramentas de medida “comprimento” e “ângulo” do *Cabri 3D*.	

3.2.3 Reflexão em relação a uma reta ou simetria axial

Definição. É dada uma reta qualquer, $j \subset E$. A reflexão em relação a *j* é a aplicação $R_j : E \to E$ que fixa todos os pontos de *j* e associa a cada ponto $A \in E$ que não pertence a *j*, o ponto A' tal que, *j* é a reta mediatriz do segmento AA'.

Notamos que toda reflexão R_j em relação a uma reta *j* é uma transformação no E, uma vez que é uma aplicação injetora e sobrejetora.

Sejam *A* e *B* pontos do espaço e *j* uma reta do E.

- R_j é injetora

De fato, se $R_j(A) = R_j(B)$ onde $R_j(A) = A'$ e $R_j(B) = B'$ sabemos que *j* é a reta mediatriz do segmento AA' e do segmento BB'; como $A' = B'$ segue que $A = B$.

- R_j é sobrejetora

Para todo $A' \in E$, consideramos o ponto $A = R_j^{-1}(A')$. Afirmamos que $R_j(A) = A'$.

De fato, $R_j(A) = R_j(R_j^{-1}(A')) = Id(A') = A'$.

Observamos que $\left(R_j\right)^{-1} = R_j$, ou seja, R_j é uma involução no espaço, isto é $R_j^{\,2} = Id$. ■

Proposição. Toda reflexão R_j em relação a uma reta *j* é uma isometria no espaço.

De fato, já sabemos que R_j é uma transformação; basta mostrar que R_j preserva as distâncias.

Sejam $A' = R_j(A)$ e $B' = R_j(B)$ e pela definição de reflexão em relação a uma reta, temos que *j* é a reta mediatriz dos segmentos AA' e BB'.

Precisamos mostrar que $d(A,B) = d(A',B')$.

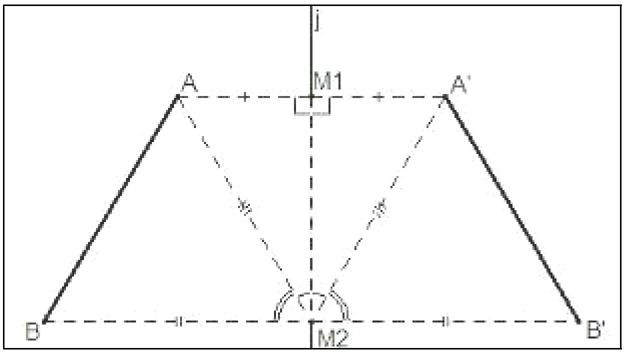


Figura 21. Reflexão em relação à reta *j* dos pontos *A* e *B*

A Figura 21 mostra que, sendo M_1 e M_2 pontos médios dos segmentos AA' e BB' respectivamente, então $\overline{AM_1} \equiv \overline{M_1A'}$ e $\overline{BM_2} \equiv \overline{M_2B'}$.

Também os ângulos AM_1M_2 e $A'M_1M_2$ são retos porque *j* é a reta mediatriz do segmento AA'. O segmento M_1M_2 é lado comum dos triângulos AM_1M_2 e $A'M_1M_2$; então, pela congruência de triângulos (*LAL*), $\Delta AM_1M_2 \equiv \Delta A'M_1M_2$.

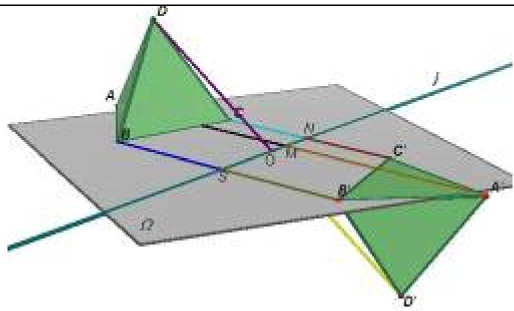
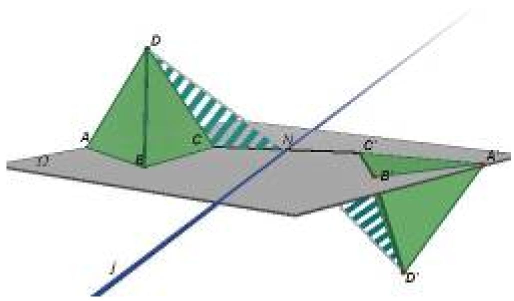
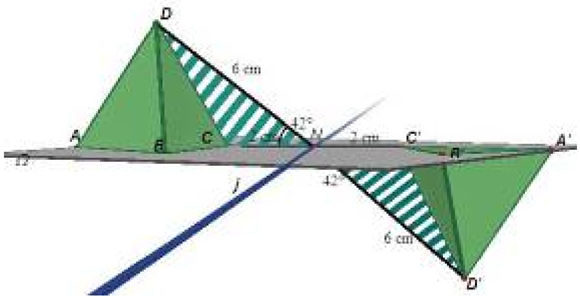
Logo, $\overline{AM_2} \equiv \overline{A'M_2}$ e $\measuredangle AM_2B \equiv \measuredangle A'M_2B'$, porque são complementos de ângulos congruentes.

Logo, $\Delta AM_2B \equiv \Delta A'M_2B'$ (LAL) donde segue, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e, portanto, $d(A,B) = d(A',B')$. ■

Construção de uma reflexão em relação a uma reta ou simetria axial com *Cabri 3D*

Apresentamos nas construções do Quadro 14, a reflexão de um sólido em relação a uma reta usando o *Cabri 3D.*

Quadro 14. Reflexão do tetraedro regular *ABCD* em relação à reta *j*

Criamos o tetraedro regular *ABCD* e a reta j do espaço. Os pontos *A’, B’, C’* e *D’*, são obtidos por reflexão de *A*, *B*, *C* e *D*, respectivamente, em relação à reta *j*. Obtemos o tetraedro regular *A’B’C’D’*, que é a imagem do tetraedro regular *ABCD.*	
A reflexão em relação à reta *j* permite afirmar que os segmentos $DN \equiv ND'$ e $CN \equiv NC'$ e que $CND \equiv C'ND'$ porque são opostos pelo vértice. Então $\Delta CND \equiv \Delta C'ND'$ (LAL) e, portanto, $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$. O raciocínio acima mostra a isometria entre $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, o mesmo o pode ser feito com todas as outras arestas do tetraedro. Logo, verificamos que a reflexão em relação a uma reta é uma isometria.	
Tal verificação pode ser feita, também, com as ferramentas de medida “comprimento” e “ângulo” do *Cabri 3D*.	

3.2.4 Reflexão em relação a um plano

Definição. É dado um plano qualquer $\Omega \subset E$. A reflexão em relação ao plano Ω, é a aplicação $R_\Omega : E \to E$ que, a cada ponto $A \in E$ que não pertence a Ω, associa o ponto A', tal que Ω é o plano mediador do segmento AA', o que significa que $\overline{AA'}$ é perpendicular a Ω e que se $\{M\} = \overline{AA'} \cap \Omega$ então $\overline{AM} \equiv \overline{MA'}$.

Uma consequência da definição é que para todo ponto $N \in \Omega$, tem-se também $\overline{AN} \equiv \overline{NA'}$ (Figura 22).

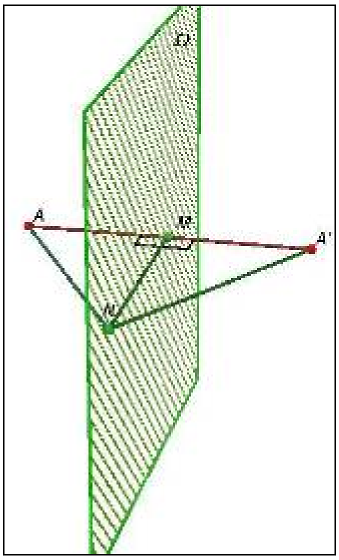


Figura 22. Reflexão em relação a um plano

Ressaltamos que toda reflexão em relação a um plano Ω é uma transformação no espaço, uma vez que é uma aplicação injetora e sobrejetora.

Sejam A e B pontos do espaço e Ω um plano do E.

- R_Ω é injetora

De fato, se $R_\Omega(A) = R_\Omega(B)$ onde $R_\Omega(A) = A'$ e $R_\Omega(B) = B'$ sabemos então que Ω é o plano mediador do segmento AA' e do segmento BB'; como $A' = B'$ segue que $A = B$.

- R_Ω é sobrejetora

Para todo $A' \in E$, consideramos o ponto $A = R_\Omega^{-1}(A')$. Afirmamos que $R_\Omega(A) = A'$.

De fato, $R_\Omega(A) = R_\Omega(R_\Omega^{-1}(A')) = Id(A') = A'$.

Observamos que $(R_\Omega)^{-1} = R_\Omega$, ou seja, R_Ω é uma involução no espaço, isto é $R_\Omega^2 = Id$. ■

Proposição. Toda reflexão R_Ω em relação a um plano Ω é uma isometria no espaço.

Como sabemos que R_Ω é uma transformação, basta mostrar que R_Ω preserva as distâncias.

Sejam $A' = R_\Omega(A)$ e $B' = R_\Omega(B)$ e, pela definição de reflexão em relação a um plano, temos que Ω é o plano mediador dos segmentos AA' e BB'. Precisamos mostrar que $d(A,B) = d(A',B')$.

Sejam $\{M_1\} = \overline{AA'} \cap \Omega$ e $\{M_2\} = \overline{BB'} \cap \Omega$. Temos que M_1 e M_2 pertencem a Ω, logo $\overline{M_1M_2} \subset \Omega$. Agora $\overline{AM_1} \equiv \overline{M_1A'}$ e $\overline{BM_2} \equiv \overline{M_2B'}$, e os ângulos AM_1M_2 e $A'M_1M_2$ são ambos retos e, portanto, congruentes, porque Ω é plano mediador do segmento AA' (Figura 23).

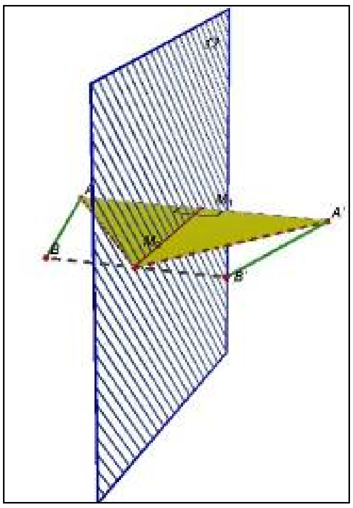


Figura 23. Reflexão em relação ao plano Ω dos pontos *A* e *B*

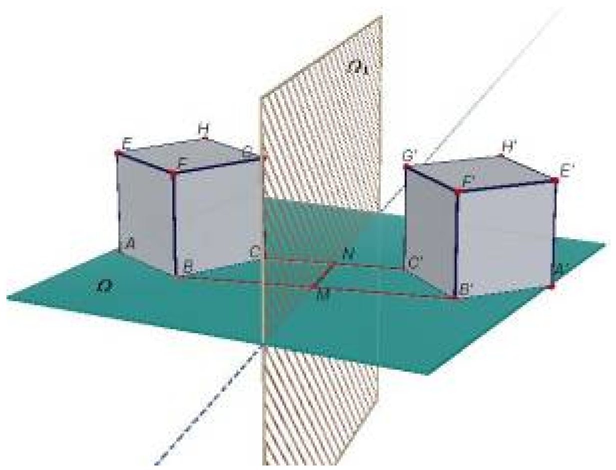
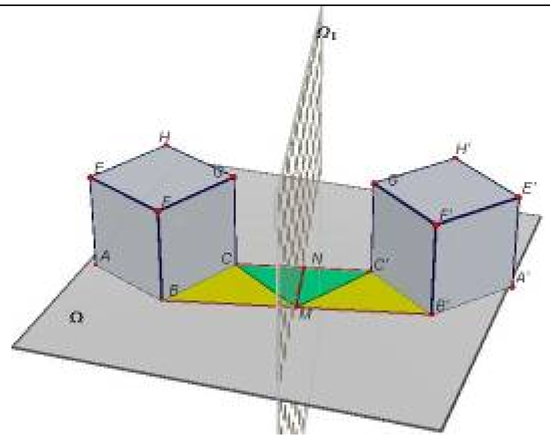
O segmento M_1M_2 é lado comum dos triângulos AM_1M_2 e $A'M_1M_2$; então, pela congruência de triângulos (*LAL*), $\Delta AM_1M_2 \equiv \Delta A'M_1M_2$. Logo, $\overline{AM_2} \equiv \overline{A'M_2}$, $\measuredangle AM_2B \equiv \measuredangle A'M_2B'$, pois são complementos de ângulos congruentes. Assim, $\Delta AM_2B \equiv \Delta A'M_2B'$ (*LAL*) donde segue, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e, portanto, $d(A,B) = d(A',B')$.

■

Construção de uma reflexão em relação a um plano com *Cabri 3D*

As construções (Quadro 15) mostram a reflexão de um cubo em relação a um plano, utilizando *Cabri 3D.*

Quadro 15. Reflexão do cubo *ABCDEFGH* em relação ao plano Ω_1

Criamos o cubo *ABCDEFGH* cuja base se encontra num plano Ω e, o plano $\Omega_1 \subset E$, $\Omega_1 \perp \Omega$. O cubo *A'B'C'D'E'F'G'H'* é a imagem do cubo *ABCDEFGH* segundo a reflexão em relação ao plano Ω_1. Podemos verificar, por construção que, por exemplo, os pontos $\{M\} \subset (\Omega \cap \Omega_1)$ e $\{N\} \subset (\Omega \cap \Omega_1)$ são pontos médios dos segmentos *BB'* e *CC'* respectivamente, ou seja, Ω_1 é o plano mediador desses segmentos.	
Se *M* e *N* são pontos médios dos segmentos *BB'* e *CC'*, respectivamente, temos pelo caso *LAL* de congruência de triângulos, que $\Delta CMN \equiv \Delta C'MN$ donde $\overline{CN} \equiv \overline{C'N}$ e $\measuredangle CNM \equiv \measuredangle C'NM$. Novamente, pelo caso *LAL*, $\Delta CMB \equiv \Delta C'MB'$ e, portanto, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. O raciocínio acima pode ser feito com todas as outras arestas do cubo. Verificamos assim, que a reflexão em relação a um plano é uma isometria.	

3.2.5 Rotação

Sejam um plano $\Omega \subset E$, uma reta $r \subset E$, tal que $r \perp \Omega$ e seja $\alpha = \measuredangle XOY$ um ângulo cujo vértice O pertence a r e cujos lados estão sobre o plano Ω. O ângulo α é considerado orientado[29], ou seja, subentende-se que $\overline{OX}$ é o primeiro lado e que $\overline{OY}$ é o segundo lado.

Definição. A rotação $\Gamma_{r,\alpha}$ de ângulo α em torno da reta *r* é definida como a aplicação $\Gamma_{r,\alpha}: E \to E$ que faz corresponder a cada ponto *A* do E o ponto $A' = \Gamma_{r,\alpha}(A)$ determinado pelas seguintes condições:

i) $A' \in \Omega \subset E$, sendo Ω o plano que passa por *A* e é perpendicular à reta *r*;

ii) se *O* é o ponto de interseção do plano Ω com *r*, tem-se $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$;

iii) α é o ângulo orientado AOA'.

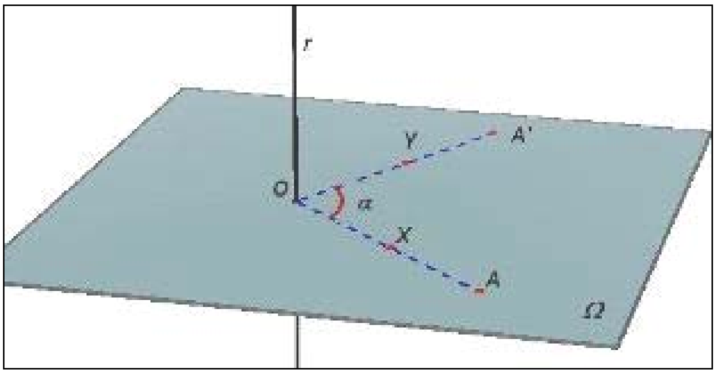


Figura 24. Rotação do ponto *A* em torno da reta *r*, segundo o ângulo α

Observamos que toda rotação $\Gamma_{r,\alpha}$ é uma transformação no espaço, uma vez que é uma aplicação injetora e sobrejetora.

Sejam *A* e *B* pontos do espaço e Ω um plano do E.

---

[29] O sentido anti-horário é, por convenção, o sentido positivo.

- $\Gamma_{r,\alpha}$ é injetora

De fato, se $A' = B'$ onde $A' = \Gamma_{r,\alpha}(A)$ e $B' = \Gamma_{r,\alpha}(B)$, então $\Gamma_{r,\alpha}(A) = \Gamma_{r,\alpha}(\mathrm{B})$.

Logo,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{r,-\alpha}(\Gamma_{r,\alpha}(A)) & = & \Gamma_{r,-\alpha}(\Gamma_{r,\alpha}(B)) \\ Id(A) & = & Id(B) \\ A & = & B \end{array}$$

- $\Gamma_{r,\alpha}$ é sobrejetora

Seja $A' \in E$. Afirmamos que $A = \Gamma_{r,-\alpha}(A')$ é tal que, $\Gamma_{r,\alpha}(A) = A'$.

De fato, $\Gamma_{r,\alpha}(\Gamma_{r,-\alpha}(A')) = A'$. ■

Sejam *O* um ponto de um plano Ω e α um ângulo orientado de vértice *O.* A rotação em torno do ponto *O* segundo o ângulo α é a aplicação $\Gamma_{o,\alpha} : \Omega \to \Omega$ assim definida: $\Gamma_{o,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Ω, $\Gamma_{o,\alpha}(X) = X'$ que é o ponto do plano Ω tal que $d(X,O) = d(X',O)$.

Proposição. Toda rotação $\Gamma_{o,\alpha}$ restrita a um plano é uma isometria nesse plano.

Tomemos dois pontos quaisquer *A* e *B* do plano, tais que, $A' = \Gamma_{o,\alpha}(A)$ e $B' = \Gamma_{o,\alpha}(B)$. Precisamos mostrar que $d(A,B) = d(A',B')$.

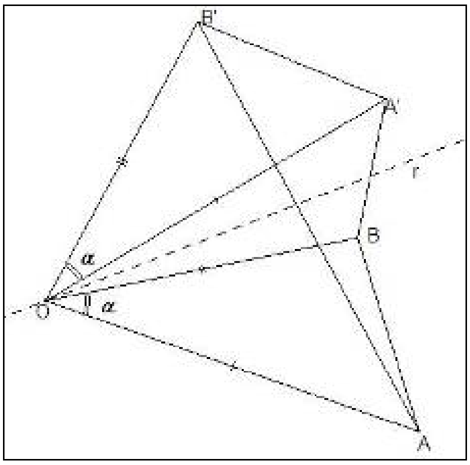


Figura 25. Rotação dos pontos *A* e *B* em torno de *O* segundo α

Como o sentido e o ângulo de rotação de *A* para *A’* e de *B* para *B’* é o mesmo, observamos que $\measuredangle AOA = \measuredangle AOB + \measuredangle BOA'$ e $\measuredangle BOB' = \measuredangle BOA' + \measuredangle A'OB'$ (Figura 25), de onde segue que $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A'OB'$.

Sendo $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$ e $\overline{OB} \equiv \overline{OB'}$, temos $\Delta AOB \equiv \Delta A'OB'$ (*LAL*).

Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e, portanto, $d(A,B) = d(A',B')$. ■

Proposição. Toda rotação $\Gamma_{r,\alpha}$ é uma isometria no espaço.

Tomemos dois pontos quaisquer *A* e *B* do *E* e sejam $A' = \Gamma_{r,\alpha}(A)$ e $B' = \Gamma_{r,\alpha}(B)$. Precisamos mostrar que $d(A',B') = d(A,B)$.

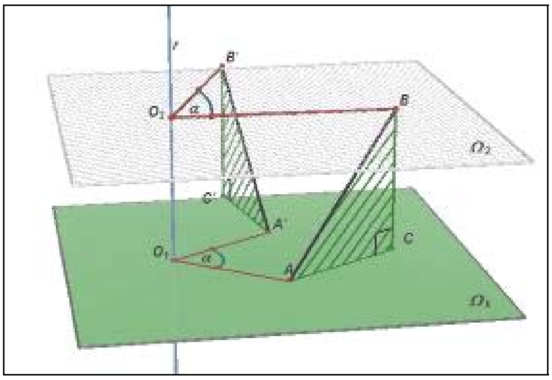


Figura 26. Rotação do segmento *AB* em torno de *r*, segundo α

Seja Ω_1 o plano perpendicular a *r* que contém os pontos *A* e *A’* e seja Ω_2 o plano também perpendicular a *r* e que contém *B* e *B’*. Consideremos os pontos *C* e C', projeções ortogonais dos pontos *B* e *B’*, respectivamente, sobre o plano Ω_1. O segmento *AB* é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Igualmente, $\overline{A'B'}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo $A'B'C'$ cujos catetos são $\overline{A'C'}$ e $\overline{C'B'}$ (Figura 26).

Observamos que $\overline{A'C'} \equiv \overline{AC}$ porque $\Gamma_{r,\alpha}$, restrita ao plano Ω_1, é uma isometria no plano.

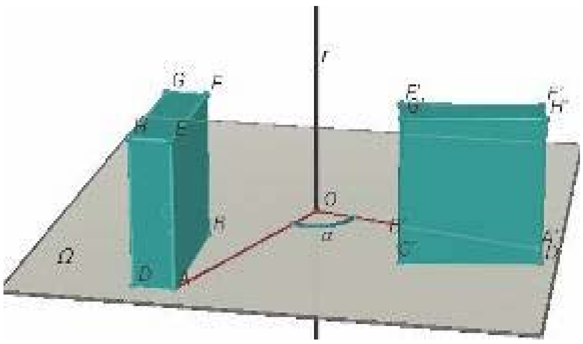
Além disso, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, pois os pontos *B* e *B’* pertencem ao plano Ω_2 perpendicular a *r* e, portanto, paralelo a Ω_1.

Logo, $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$. ■

Construção de uma rotação com *Cabri 3D*

Nas construções do Quadro 16, observamos a rotação de um sólido em torno de uma reta segundo um ângulo dado, utilizando *Cabri 3D.*

Quadro 16. Rotação do paralelepípedo ABCDEFGH em torno de r, segundo α

Criamos o paralelepípedo *ABCDEFGH* e a reta *r* perpendicular ao plano Ω do espaço. Os pontos *A’, B, C’, D’, E’, F’, G’* e *H’* são obtidos por rotação de *A, B, C, D, E, F, G* e *H* respectivamente, em torno de *r,* segundo o ângulo α. Observamos que o paralelepípedo *A’B’C’D’E’F’G’H’* é a imagem do paralelepípedo *ABCDEFGH*, isto é, $\Gamma_{r,\alpha}(ABCDEFGH) = A'B'C'D'E'F'G'H'$.	

3.3 Composição de algumas isometrias no espaço

No conjunto das isometrias no espaço, podemos fazer a operação de composição, pois $\Im(E)$ tem, com essa operação, a estrutura de grupo.

No que segue, vamos examinar cinco tipos de composições de algumas isometrias no espaço:

1. Composição de duas translações;
2. Composição de duas reflexões:
   2.1. Em relação a uma mesma reta;
   2.2. Em relação a duas retas paralelas;
   2.3. Em relação a duas retas concorrentes.
3. Composição de duas reflexões:
   3.1. Em relação a um mesmo plano;
   3.2. Em relação a dois planos paralelos; e
   3.3. Em relação a dois planos concorrentes.
4. Composição de duas rotações de mesmo centro:
   4.1. Em torno de uma mesma reta, segundo os ângulos α e $-\alpha$; e
   4.2. Em torno de uma mesma reta, segundo os ângulos α e β.
5. Composição de uma translação e uma reflexão em relação a um plano.

1. Composição de duas translações

i) A composta de duas translações é uma translação.

De fato,

$$
\begin{aligned}
(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{x}})(A) &= T_{\vec{v}}(T_{\vec{x}}(A)) = T_{\vec{v}}(A+\vec{x}) \\
&= (A+\vec{x})+\vec{v} = A+(\vec{x}+\vec{v}) = \\
&\quad T_{\vec{x}+\vec{v}}(A)
\end{aligned}
$$

ii) A composta de duas translações é comutativa.

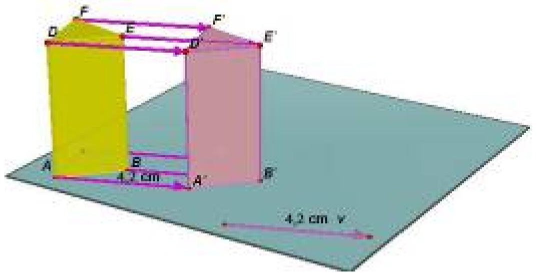
Seja $A \in E$ qualquer, precisamos mostrar que $(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{x}})(A) = (T_{\vec{x}} \circ T_{\vec{v}})(A)$.

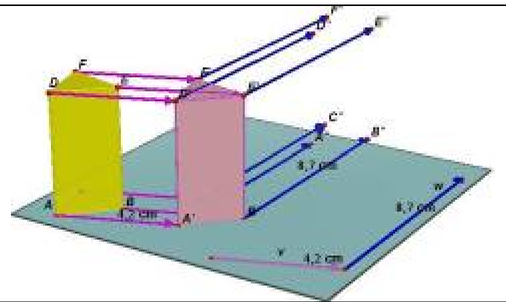
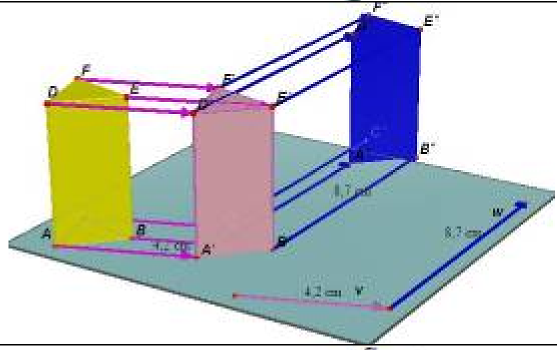
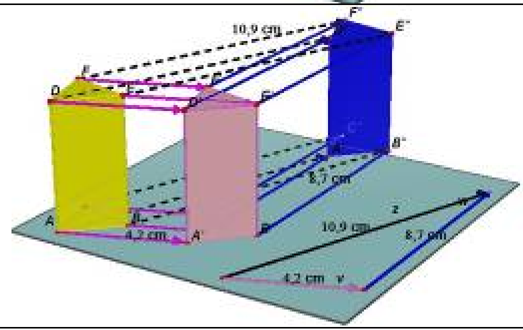
$$
\begin{aligned}
(T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{x}})(A) &= T_{\vec{v}}(T_{\vec{x}}(A)) = \\
&= T_{\vec{v}}(A+\vec{x}) = \\
&= (A+\vec{x})+\vec{v} = \\
&= A+(\vec{x}+\vec{v}) = \\
&= A+(\vec{v}+\vec{x}) = \\
&= (A+\vec{v})+\vec{x} = \\
&= T_{\vec{x}}(A+\vec{v}) = \\
&= T_{\vec{x}}(T_{\vec{v}}(A)) = \\
&= (T_{\vec{x}} \circ T_{\vec{v}})(A)
\end{aligned}
$$

■

Construímos no *Cabri 3D* (Quadro 17) a composição de duas translações de um sólido.

Quadro 17. Composição de duas translações do prisma *ABCDEF*

Dado um prisma triangular *ABCDEF* e um vetor $\vec{v}$, criamos os vetores equipolentes ao vetor $\vec{v}$ a partir dos vértices do prisma: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$, $\overrightarrow{EE'}$ e $\overrightarrow{FF'}$. A partir desses vetores equipolentes ao vetor $\vec{v}$, construímos o prisma triangular *A'B'C'D'E'F'* que é a imagem do primeiro prisma pela translação.	

Em seguida, a partir do prisma triangular *A’B’C’D’E’F’* e do vetor $\vec{w}$ dado, consideramos os vetores equipolentes ao vetor $\vec{w}$ a partir dos vértices do prisma *A’B’C’D’E’F’*: $\overrightarrow{A'A''}$, $\overrightarrow{B'B''}$, $\overrightarrow{C'C''}$, $\overrightarrow{D'D''}$, $\overrightarrow{E'E''}$ e $\overrightarrow{F'F''}$.	
Construímos o prisma triangular *A’’B’’C’’D’’E’’F’’* que é a imagem da imagem do primeiro prisma após as duas translações.	
Observamos que $T_{\vec{v}+\vec{w}} = T_{\vec{w}} \circ T_{\vec{v}}$, pois, o prisma *A”B”C”D”E”F”* pode ser diretamente obtido, fazendo a translação, segundo o vetor $\vec{v}+\vec{w}$	

2. Composição de duas reflexões

Dentre os casos de composição de duas reflexões, apresentamos os seguintes:

2.1 Em relação a uma mesma reta

A composta de duas reflexões em relação a uma mesma reta *j* do espaço coincide com a identidade.

Temos uma reflexão $R_j(A) = A'$ e *M* é o ponto médio de $\overline{AA'}$ (Figura 27). Fazendo a reflexão de A' em relação à reta *j*, encontramos $A = R_j^{-1}(A')$

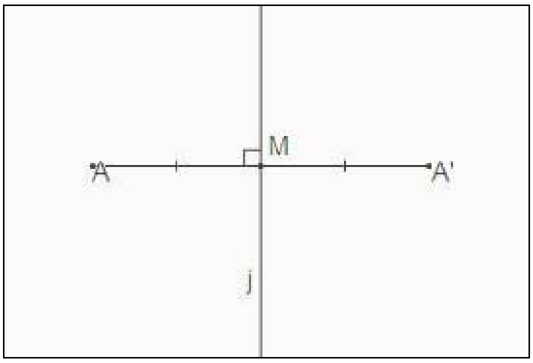


Figura 27. Reflexão do ponto *A* em relação à reta *j*

Assim,

$$\begin{aligned} (R_j^{-1} \circ R_j)(A) &= \\ = R_j^{-1}(R_j(A)) &= \\ = R_j^{-1}(A') &= A \end{aligned}$$

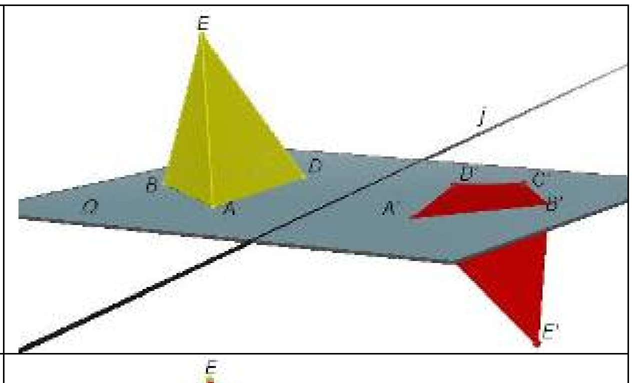
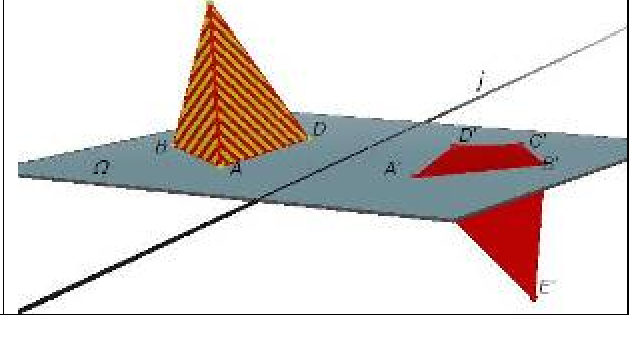
ou seja,

$$\left(R_j\right)^{-1} \circ R_j = Id \, .$$

Observamos também que, a partir da definição de reflexão em relação à reta *j*, $R_j \circ R_j = R_j^{\,2} = Id$, de donde concluímos que $R_j^{-1} = R_j$.

Mostramos nas construções do Quadro 18, a composição de duas reflexões em relação a uma mesma reta com *Cabri 3D*.

Quadro 18. Composição de duas reflexões em relação à reta *j*

Criamos a pirâmide *ABCDE* e uma reta *j* no plano de base. A pirâmide *A'B'C'D'E'* é a imagem da pirâmide *ABCDE,* segundo a reflexão em relação à reta *j*.	
Observamos que a pirâmide obtida pela composição de duas reflexões em relação à mesma reta coincide com a pirâmide *ABCDE* inicialmente dada. Concluímos que, a composição de duas reflexões em relação à mesma reta, corresponde à identidade.	

2.2 Em relação a duas retas paralelas

A composição de duas reflexões em relação a duas retas que são paralelas corresponde a uma translação.

De fato, consideremos j e k retas paralelas distintas do espaço e $A \in E$ um ponto qualquer que não pertence a *j* ou a *k*.

Sejam $A' = R_j(A)$ e $A'' = R_k(A')$ e, pela definição de reflexão em relação a uma reta temos que *j* é a mediatriz de $\overline{AA'}$ e *k* é a mediatriz de $\overline{A'A''}$, donde *M* e *N* são os pontos médios de $\overline{AA'}$ e $\overline{A'A''}$, respectivamente (Figura 28).

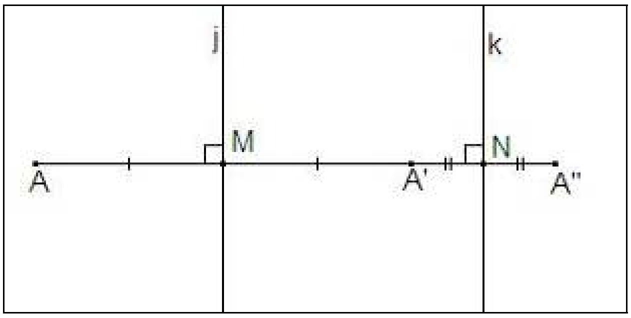


Figura 28. Reflexão do ponto *A* em relação às retas *j* e *k*

Logo, $\overline{AM} \equiv \overline{MA'}$, $\overline{A'N} \equiv \overline{NA''}$ e, portanto, $AM + NA'' = MA' + A'N$. Logo,

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'N} + \overrightarrow{NA''}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA''} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'N} = 2\overrightarrow{MN}$$

isto é,

$$A'' = A + 2.\overrightarrow{MN}$$

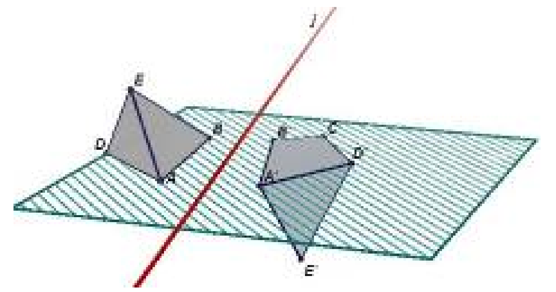
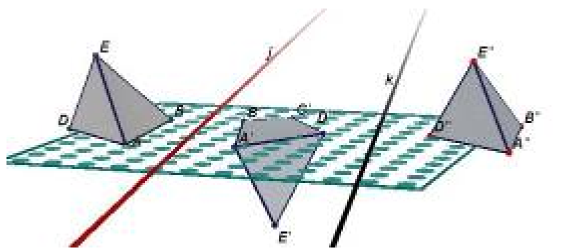
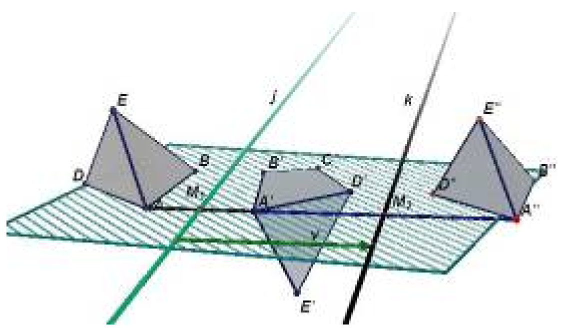
chamando $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$, temos $A'' = A + 2\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é o vetor cujo módulo é a distância entre as retas *j* e *k*. Logo, $R_K \circ R_j = T_{2\vec{v}}$. ■

Os dados do Quadro 19 mostram a composição de duas reflexões de uma pirâmide em relação a retas paralelas com *Cabri 3D.*

Quadro 19. Composição de duas reflexões da pirâmide *ABCDE* com relação às retas *j* e *k*

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Criamos a pirâmide ABCDE e a reta j do espaço.

A pirâmide A'B'C'D'E' é a imagem da pirâmide ABCDE pela reflexão em relação à reta j.

A pirâmide A''B''C''D''E'' é a imagem da imagem da primeira pirâmide ABCDE após as reflexões em relação às retas paralelas a j e k.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Observamos que a composição de duas reflexões em relação a retas paralelas corresponde à translação, segundo o vetor $2\vec{v}$, isto é, $R_k \circ R_j = T_{2\vec{v}}$, onde $\vec{v}$ é o vetor cujo módulo é a distância entre as retas j e k.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2.3 Em relação a duas retas concorrentes

A composição de duas reflexões, em relação às retas concorrentes *j* e *k*, com $j \cap k = \{O\}$, é uma rotação em torno da reta *r* que passa por *O* e que é perpendicular ao plano por *j* e *k*.

Sejam $A \in E$ um ponto qualquer e, *j* e *k* retas concorrentes distintas do espaço que se interceptam no ponto *O*.

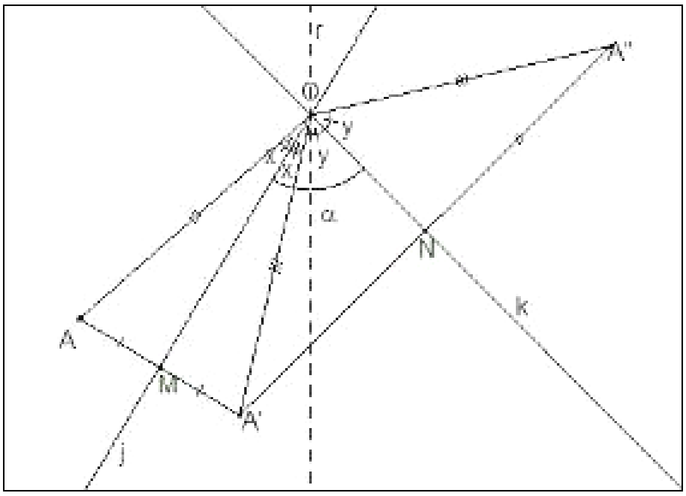


Figura 29. Reflexão do ponto *A* em relação às retas concorrentes *j* e *k*

Seja $A' = R_j(A)$ então *j* é a reta mediatriz de $\overline{AA'}$ e como $O \in j$ temos $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$ e M é o ponto médio de $\overline{AA'}$. Além disso, *j* contém a bissetriz do ângulo orientado $\measuredangle AOA'$.

Da mesma maneira, se $A'' = R_k(A')$ então *k* é a reta mediatriz de $\overline{A'A''}$, portanto, $\overline{OA'} \equiv \overline{OA''}$ e N é o ponto médio de $\overline{A'A''}$. Além disso, *k* contém a bissetriz do ângulo orientado $\measuredangle A'OA''$ (Figura 29).

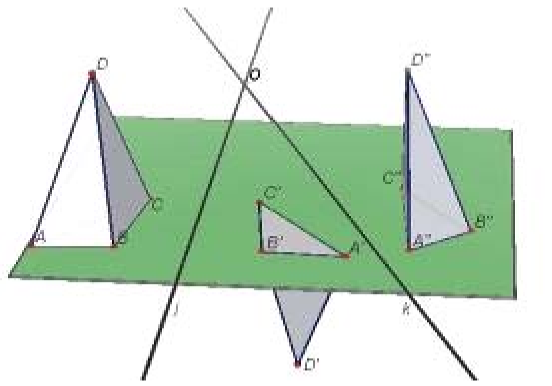
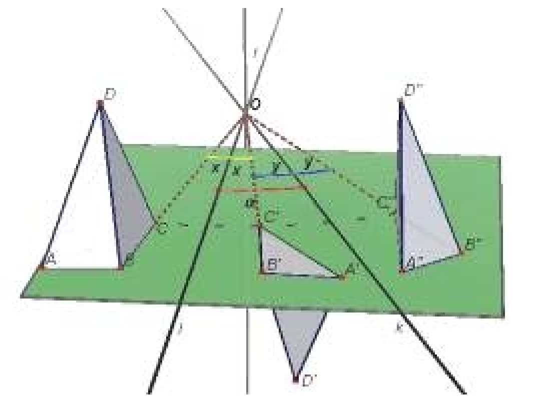
Assim, $\measuredangle AOA'' = \measuredangle AOM + \measuredangle MOA' + \measuredangle A'ON + \measuredangle NOA''$ onde, $\measuredangle AOM \equiv \measuredangle MOA'$ e $\measuredangle A'ON \equiv \measuredangle NOA''$.

Assim, sendo o ângulo α a soma de $\measuredangle MOA'$ com $\measuredangle A'ON$, ou seja, α é o ângulo MON, temos que $\measuredangle AOA'' = 2\alpha$.

Logo, $R_k \circ R_j = \Gamma_{r,2\alpha}$.

Mostramos nas construções do Quadro 20, a composição de duas reflexões de um sólido em relação a duas retas concorrentes, utilizando *Cabri 3D.*

Quadro 20. Composoção de duas reflexões de uma pirâmide em relação a duas retas concorrentes

Criamos a pirâmide *ABCD* e as duas retas concorrentes *j* e *k* do espaço, com $j \cap k = \{O\}$ que é o ponto de intersecção duas retas concorrentes *j* e *k* do espaço. A pirâmide *A'B'C'D'* é a imagem da pirâmide *ABCD* pela reflexão em relação à reta *j*. A pirâmide *A''B''C''D''* é a imagem da imagem da primeira pirâmide *ABCD* após as reflexões em relação à *j* e *k* respectivamente.	
Verificamos que a composição de duas reflexões da pirâmide *ABCD* em relação às retas concorrentes *j* e *k,* corresponde a uma rotação em torno de *r*, onde r é a reta perpendicular ao plano que passa pela base da pirâmide, segundo o ângulo de rotação 2α, isto é, $R_k \circ \left(R_j\left(ABCD\right)\right) = \Gamma_{r,2\alpha}\left(ABCD\right)$.	

3. Composição de duas reflexões

Dentre os casos de composição de duas reflexões, apresentamos os seguintes:

3.1 Em relação a um mesmo plano

Nesse caso, temos uma reflexão R_Ω tal que $R_\Omega(A) = A'$ e Ω é plano mediador de $\overline{AA'}$ (Figura 30). Fazendo a reflexão de A' em relação ao mesmo plano Ω, encontramos $A = R_\Omega^{-1}(A')$.

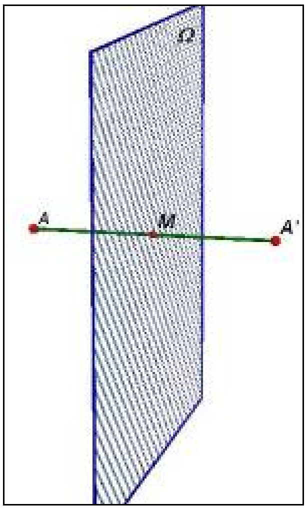


Figura 30. Reflexão do ponto *A* em relação ao plano Ω

Assim

$$\begin{array}{ccccc} & (R_\Omega^{-1} \circ R_\Omega)(A) & = & \\ = & R_\Omega^{-1}(R_\Omega(A)) & = & \\ = & R_\Omega^{-1}(A') & = & A \end{array}$$

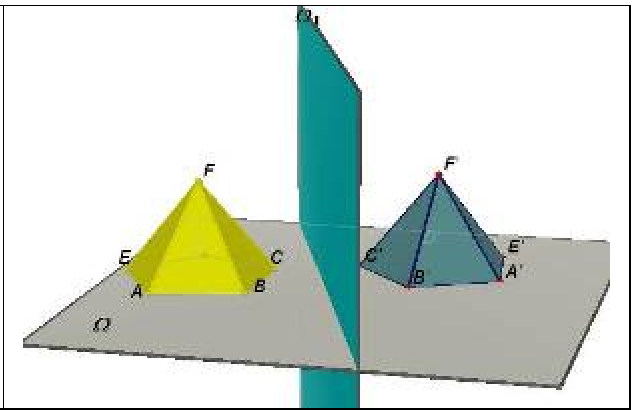
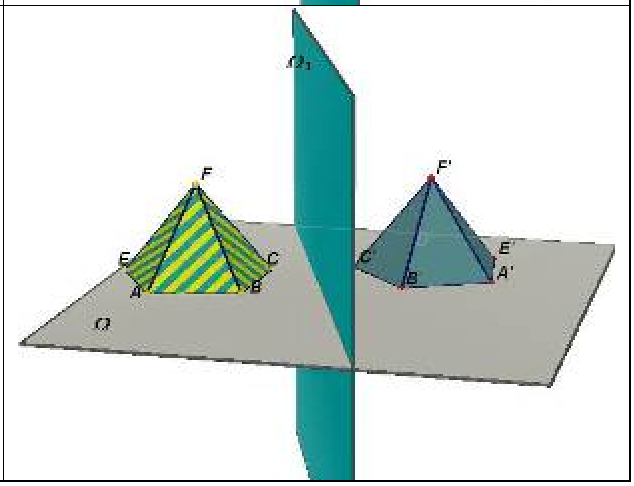
ou seja,

$$\left(R_\Omega\right)^{-1} \circ R_\Omega = Id \, .$$

Observamos também que, a partir da definição de reflexão em relação a um mesmo plano Ω, $R_\Omega \circ R_\Omega = R_\Omega{}^2 = Id$, de donde concluímos que $\left(R_\Omega\right)^{-1} = R_\Omega$.

Nas construções realizadas no Cabri *3D,* podemos observar (Quadro 21) a composição de duas reflexões de uma pirâmide em relação a um mesmo plano.

Quadro 21. Composição de duas reflexões de uma pirâmide *ABCDEF* em relação ao plano Ω_1

A pirâmide *A'B'C'D'E'F'* é a imagem da pirâmide *ABCDEF,* depois de aplicada a reflexão em relação ao plano Ω_1.	
Notamos que a composição de duas reflexões da pirâmide *ABCDEF* em relação ao mesmo plano, coincide com a identidade.	

3.2 Em relação a dois planos paralelos

A composição de duas reflexões em relação a dois planos paralelos corresponde a uma translação.

De fato, consideremos Ω e Ω_1 planos distintos e paralelos do espaço e $A \in E$ um ponto qualquer que não pertence a Ω ou a Ω_1.

Sejam $A' = R_{\Omega}(A)$ e $A'' = R_{\Omega_1}(A')$ e, pela definição de reflexão em relação a um plano (Figura 31), temos que Ω é o plano mediador de $\overline{AA'}$ e Ω_1 é o plano mediador de $\overline{A'A''}$ e, portanto, $M \in \Omega$ e $N \in \Omega_1$ são os pontos médios de $\overline{AA'}$ e $\overline{A'A''}$, respectivamente.

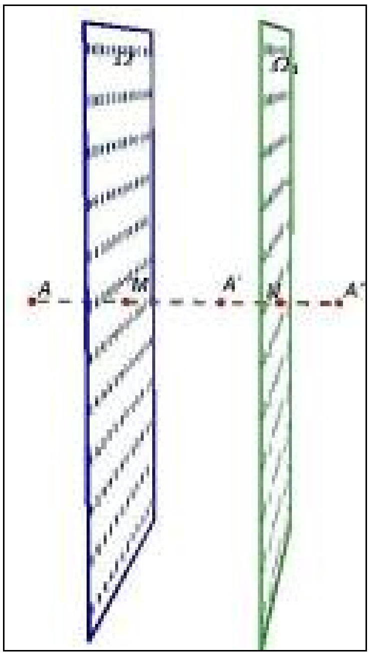


Figura 31. Reflexão do ponto *A* em relação aos planos paralelos Ω e Ω_1

Logo, $\overline{AM} \equiv \overline{MA'}$, $\overline{A'N} \equiv \overline{NA''}$ e, portanto, $AM + NA'' = MA' + A'N$. Logo,

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'N} + \overrightarrow{NA''}$$

ou seja,

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA''} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'N} = 2\overrightarrow{MN}$$

isto é,

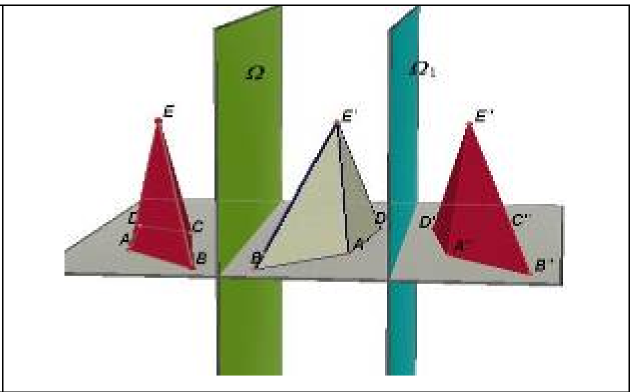
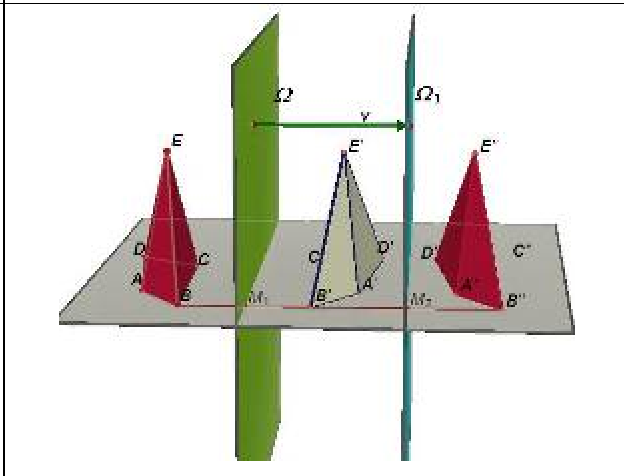
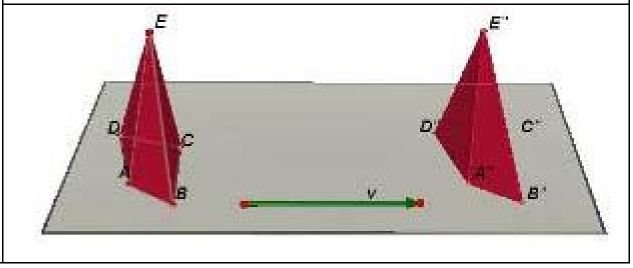
$$A'' = A + 2.\overrightarrow{MN}$$

Chamando $\overrightarrow{MN} = \vec{v}$, temos $A'' = A + 2\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é o vetor cujo módulo é a distância entre as retas Ω e Ω_1.

Logo, $R_{\Omega_1} \circ R_{\Omega} = T_{2\vec{v}}$.

Os dados do Quadro 22 mostram a composição de duas reflexões de uma pirâmide em relação a dois planos paralelos utilizando *Cabri 3D.*

Quadro 22. Composta de duas reflexões da pirâmide *ABCDE* em relação a dois planos paralelos

Criamos a pirâmide *ABCDE* e o plano Ω do espaço. A pirâmide *A'B'C'D'E'* é a imagem da pirâmide *ABCDE,* segundo a reflexão em relação ao plano Ω. Analogamente a pirâmide *A''B''C''D''E''* é a imagem da imagem da primeira pirâmide *ABCDE* após as reflexões em relação aos planos Ω e Ω_1 respectivamente.	
Observamos que a composição de duas reflexões em relação a planos paralelos corresponde à translação, segundo o vetor $2\vec{v}$, isto é, $R_{\Omega_1} \circ R_{\Omega} = T_{2\vec{v}}$, onde $\vec{v}$ é o vetor cujo módulo é a distância entre os planos Ω e Ω_1	 

3.3 Em relação a dois planos concorrentes

Sejam Ω_1 e Ω_2 dois planos concorrentes distintos do espaço, tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = r$.

Seja também, Ω um plano perpendicular a *r* e $\Omega \cap r = \{O\}$.

Consideremos $s = \Omega \cap \Omega_1$, $t = \Omega \cap \Omega_2$, *S* um ponto de *s* e *T* um ponto de *t* (Figura 32). Vamos verificar que a composição de duas reflexões em relação a Ω_1 e Ω_2, respectivamente, é uma rotação de um ângulo 2α, em torno da reta *r,* sendo $\measuredangle\alpha = \measuredangle SOT$.

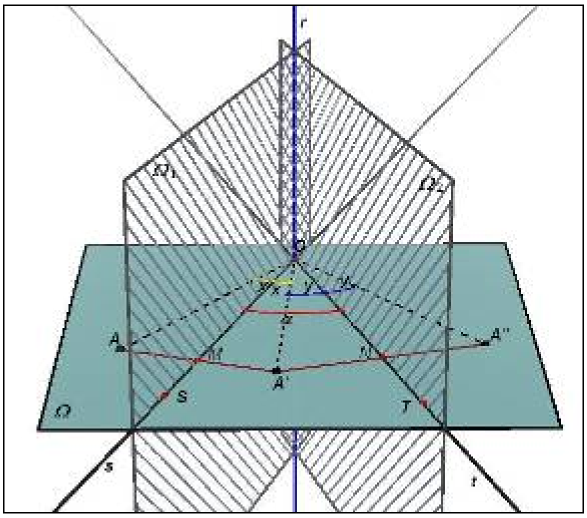


Figura 32. Reflexão do ponto A em relação aos planos concorrentes Ω_1 e Ω_2

Consideremos $A \in \Omega$, $A \neq O$. Se $A' = R_{\Omega_1}(A)$, então Ω_1 é o plano mediador de $\overline{AA'}$ e sendo $\{M\} = \Omega_1 \cap \overline{AA'}$, temos $\overline{OA} \equiv \overline{OA'}$ e M é o ponto médio de $\overline{AA'}$. Além disso, a reta $s = \Omega_1 \cap \Omega$ contém a bissetriz do ângulo orientado $\measuredangle AOA'$.

Da mesma maneira, se $A'' = R_{\Omega_2}(A')$, então Ω_2 é o plano mediador de $\overline{A'A''}$, sendo $\{N\} = \Omega_2 \cap \overline{A'A''}$, temos $\overline{OA'} \equiv \overline{OA''}$ e N é o ponto médio de $\overline{A'A''}$. Além disso, a reta $t = \Omega_2 \cap \Omega$ contém a bissetriz do ângulo orientado $\measuredangle A'OA''$ (Figura 32).

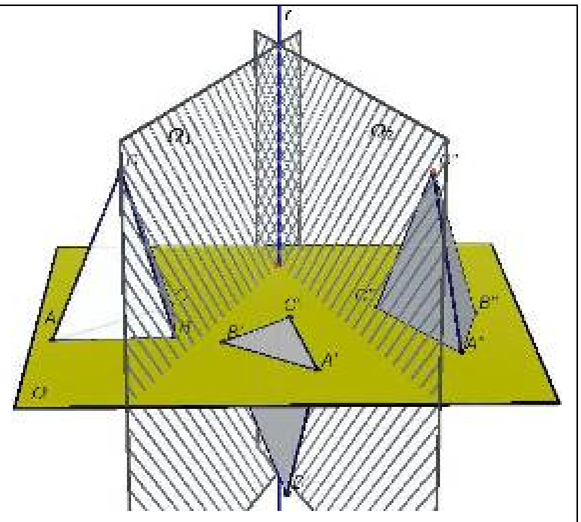
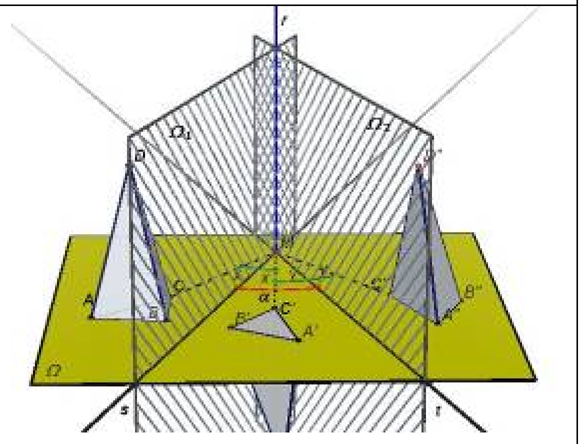
Assim, $\measuredangle AOA'' = \measuredangle AOM + \measuredangle MOA' + \measuredangle A'ON + \measuredangle NOA''$ onde, $\measuredangle AOM \equiv \measuredangle MOA'$ e, $\measuredangle A'ON \equiv \measuredangle NOA''$.

Assim, sendo o ângulo α a soma de $\measuredangle MOA'$ com $\measuredangle A'ON$, ou seja, α é o ângulo MON, temos que o $\measuredangle AOA'' = 2\alpha$

Logo, $R_{\Omega_2} \circ R_{\Omega_1} = \Gamma_{r,2\alpha}$.

A composição de duas reflexões de um sólido em relação a dois planos concorrentes no *Cabri 3D* é mostrada nas construções do Quadro 23.

Quadro 23. Composição de duas reflexões da pirâmide *ABCDEF* em relação a planos concorrentes

Criamos a pirâmide *ABCD* e dois planos Ω_1 e Ω_2 distintos, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = r$. Observamos que a pirâmide *A'B'C'D'* é a imagem da pirâmide *ABCD* segundo a reflexão em relação ao plano Ω_1 e, a pirâmide *A''B''C''D''* é a imagem da pirâmide *A'B'C'D'* segundo a reflexão em relação ao plano Ω_2 . Logo $R_{\Omega_2}\left(R_{\Omega_1}\left(ABCD\right)\right) = A''B''C''D''$.	
Constatamos que a composição de duas reflexões da pirâmide *ABCD* em relação aos planos concorrentes Ω_1 e Ω_2 corresponde a uma rotação em torno de *r,* segundo o ângulo de rotação 2α , isto é, $R_{\Omega_2} \circ R_{\Omega_1} = \Gamma_{r,2\alpha}$.	

4. Composição de duas rotações de mesmo centro

Existem vários casos de composição de duas rotações e, dentre eles, apresentamos os seguintes:

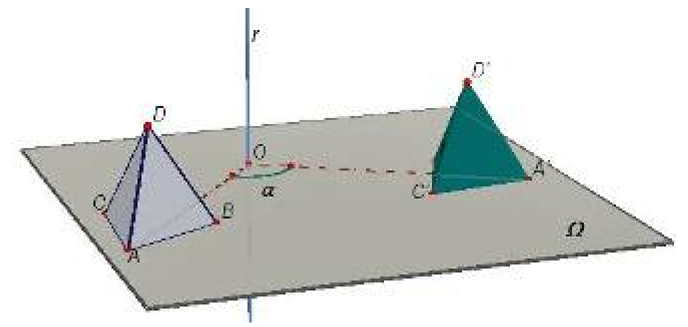
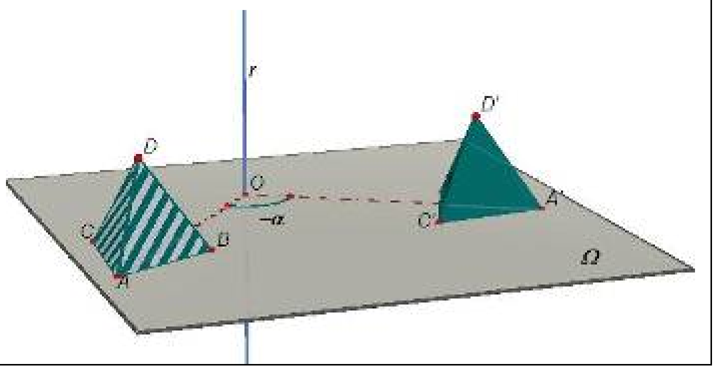
4.1 Em torno de uma mesma reta, segundo os ângulos α e $-\alpha$

A composta $\Gamma_{r,-\alpha} \circ \Gamma_{r,\alpha}$ coincide com a identidade.

De fato, seja $A' = \Gamma_{r,\alpha}(A)$ e como $\Gamma_{r,\alpha}$ é uma transformação, existe $\Gamma_{r,-\alpha} = (\Gamma_{r,\alpha})^{-1}$ tal que $\Gamma_{r,-\alpha}(A') = \Gamma_{r,-\alpha}(\Gamma_{r,\alpha}(A)) = A$, ou seja, $\Gamma_{r,-\alpha} \circ \Gamma_{r,\alpha} = Id$.

Os dados do Quadro 24 mostram a composição de duas rotações de um tetraedro regular em torno da reta *r,* segundo os ângulos α e $-\alpha$ com *Cabri 3D.*

Quadro 24. Composição de duas rotações de um tetraedro regular em torno da reta r segundo os ângulos α e $-\alpha$

Criamos o tetraedro regular *ABCD* e uma reta *r* do espaço perpendicular ao plano que contém a base do tetraedro, tal que $r \cap \Omega = O$ Observamos que o tetraedro regular *A'B'C'D'*, é a imagem do tetraedro regular *ABCD*, depois de aplicar a rotação em torno de *r,* segundo o ângulo α.	
Notamos que o tetraedro regular obtido pela rotação em torno de *r* segundo o ângulo $-\alpha$ coincide com o tetraedro regular *ABCD* inicialmente dado. Concluímos que a composição de duas rotações em torno de *r*, segundo os ângulos α e $-\alpha$ corresponde à identidade.	

4.2 Em torno de uma mesma reta, segundo os ângulos α e β

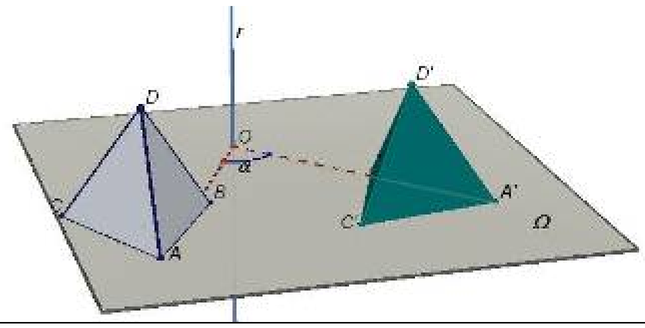
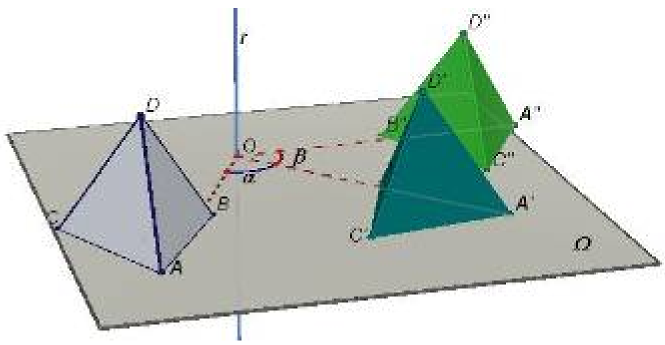
Sejam uma reta *r,* os ângulos orientados α e β. A composição de duas rotações em torno da reta *r,* segundo os ângulos orientados α e β, corresponde a uma rotação de ângulo $\alpha+\beta$, isto é, $\Gamma_{r,\beta} \circ \Gamma_{r,\alpha} = \Gamma_{r,\alpha+\beta}$.

Observamos que, $\Gamma_{r,\beta} \circ \Gamma_{r,\alpha} = \Gamma_{r,\alpha} \circ \Gamma_{r,\beta} = \Gamma_{r,\alpha+\beta}$, pois o subconjunto de todas as rotações de um mesmo centro em torno de uma mesma reta é um subgrupo abeliano do grupo das isometrias do plano[30].

Nos dados do Quadro 25, mostramos a composição de duas rotações de um sólido em torno da reta r segundo os ângulos α e β construída com *Cabri 3D.*

[30] Alves e Galvão (1996, p. 73).

Quadro 25. Composta de duas rotações de um tetraedro regular em torno da reta *r* segundo segundo os ângulos α e β

Criamos o tetraedro regular *ABCD*, e uma reta *r* perpendicular ao plano que contém a base do tetraedro regular *ABCD.* O tetraedro regular *A'B'C'D'*, é à imagem do tetraedro regular *ABCD*, depois e aplicar a rotação em torno da reta *r*, segundo o ângulo α.	
Observamos que o tetraedro regular *A''B''C''D''*, é à imagem do tetraedro regular *A'B'C'D'*, pela rotação em torno da reta *r,* segundo o ângulo β. Concluímos que a composição de duas rotações do tetraedro regular *ABCD* em torno da mesma reta *r*, segundo o ângulo de rotação, $\measuredangle AOA' \equiv \alpha$ e $\measuredangle A'OA'' \equiv \beta$ respectivamente, corresponde uma rotação em torno da reta *r,* segundo o ângulo $\alpha+\beta$.	

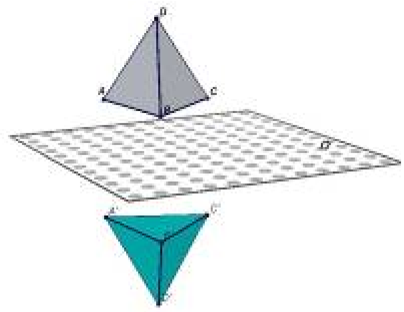
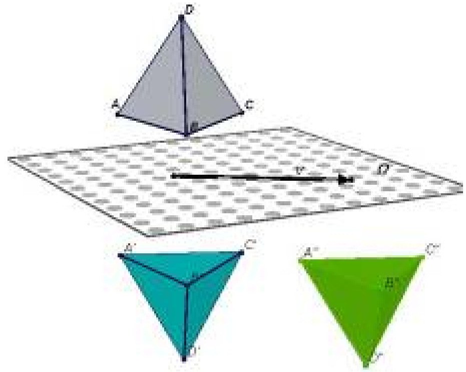
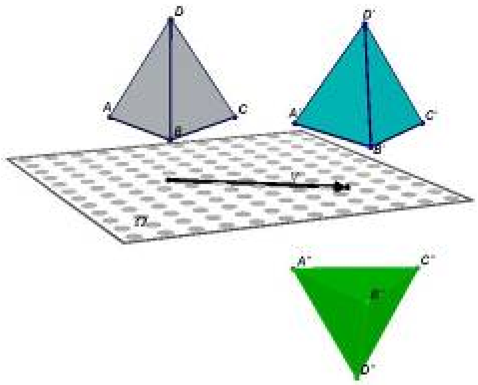
5. Composição de uma translação e uma reflexão em relação a um plano

Seja Ω um plano do espaço, $\vec{v}$ um vetor do espaço, uma reflexão R_Ω e uma translação $T_{\vec{v}}$.

A composição $T_{\vec{v}} \circ R_\Omega$, é uma reflexão transladada de plano mediador Ω, que pode ser escrita como a composição de uma translação $T_{\vec{v}}$ e de uma reflexão R_Ω, com o plano Ω paralelo ao vetor não nulo $\vec{v}$, sendo que a composição pode ser efetuada em qualquer ordem. A igualdade $T_{\vec{v}} \circ R_\Omega = R_\Omega \circ T_{\vec{v}}$ pode ainda ser vista como justificativa para as expressões reflexão transladada e translação refletida.[31]

[31] No sentido de Alves e Galvão (1996, p. 111 e 112).

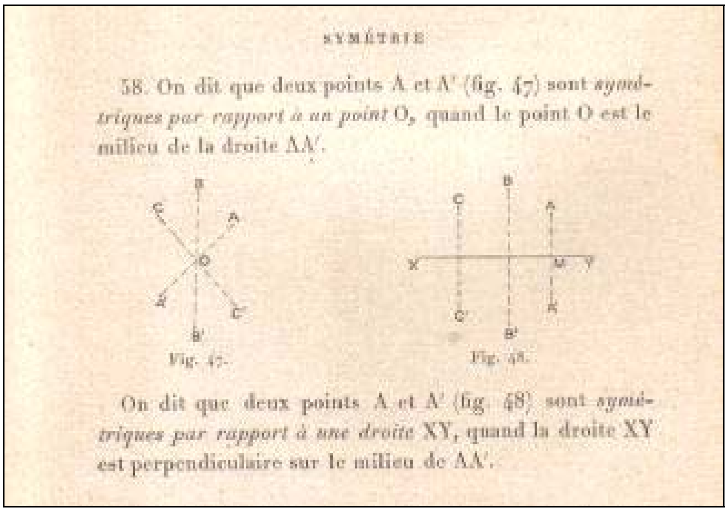
Quadro 26. Composição de uma translação e uma reflexão de um tetraedro regular *ABCD*

Seja um plano $\Omega \subset E$, um tetraedro regular *ABCD* e um vetor $\vec{v}$ do espaço paralelo a Ω. O tetraedro regular *A'B'C'D'* é a imagem do tetraedro regular *ABCD* segundo a reflexão em relação a Ω.	
Observamos que o tetraedro regular *A''B''C''D''*, é à imagem do tetraedro regular *A'B'C'D'*, após a translação, segundo $\vec{v}$ do espaço.	
Observamos que o tetraedro regular *A''B''C''D''*, é à imagem do tetraedro regular *A'B'C'D'*, após a reflexão em relação ao plano Ω do espaço. Concluímos que a composição da translação $T_{\vec{V}}(ABCD)$ com a reflexão $R_{\Omega}(ABCD)$ ou a composição da translação $T_{\vec{V}}(ABCD)$ com a reflexão $R_{\Omega}(ABCD)$ é comutativa, isto é, $(T_{\vec{V}} \circ R_{\Omega})(ABCD) \equiv (R_{\Omega} \circ T_{\vec{V}})(ABCD)$.	

3.4 Estudo do ponto de vista do ensino

Com a finalidade de entender os processos relacionados ao ensino das transformações geométricas e de como esse objeto matemático passa a ser um saber ensinado, apresentamos as pesquisas de Jahn (1998) e Luz (2007) que analisaram livros didáticos na França e no Brasil e as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Jahn (1998) pesquisou como as transformações geométricas foram inseridas no Ensino Fundamental e Médio na França. Assim, a autora assinala que as transformações foram introduzidas no ensino da Matemática na França, em 1923, no plano, com as transformações de figuras e no espaço, com a teoria dos vetores. Corroboramos isso, na pesquisa que realizamos de um livro francês de Geometria Plana “Géométrie Elémentaire” de 1929 (Figura 33), no qual a simetria em relação a um ponto e a uma reta, é apresentada.



SYMÉTRIE

58. On dit que deux points A et A' (fig. 47) sont *symétriques par rapport à un point* O, quand le point O est le milieu de la droite AA'.

Fig. 47.

Fig. 48.

On dit que deux points A et A' (fig. 48) sont *symétriques par rapport à une droite* XY, quand la droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA'.

Figura 33. Géométrie Elémentaire, 1929, p. 33

Jahn (1998) assinala que, durante o Movimento da Matemática Moderna, década de 1960, as transformações geométricas apareceram somente para introduzir o grupo de isometrias. A partir da reforma dos programas de ensino na França, em 1985, o estudo das transformações novamente foi introduzido. A primeira transformação geométrica foi a simetria axial, depois a simetria central, a translação e rotação. No programa de 1998, foram inseridos o ensino da rotação, a composição de duas translações e duas simetrias centrais e a composição de duas simetrias em relação a retas paralelas ou perpendiculares. A autora afirma que, depois da década de 1970, as transformações geométricas foram utilizadas na Geometria Descritiva, na Teoria das Cônicas e na Cinemática.

Por outro lado, a pesquisa de Luz (2007) mostra um estudo sobre o ensino de transformações geométricas no Ensino Fundamental no Brasil, desde o Movimento da Matemática Moderna, até os atuais Parâmetros Curriculares Nacionais. Para isso, a autora analisou os exercícios propostos, a respeito desse tema, nos livros didáticos publicados, entre 1960 e 2002, no Estado de São Paulo. Assim, analisa três blocos de livros didáticos:

Primeiro bloco: livros publicados durante o Movimento da Matemática Moderna, década de 1960 a 1969.

- "Matemática curso moderno" (6ª edição, 1969) de Osvaldo Sangiorgi e publicado no início do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. As transformações geométricas são apresentadas no terceiro volume, para a terceira série do curso ginasial. A autora assinala que as transformações geométricas apresentadas no livro são translações, rotações, simetria axial e simetria central.
- "Matemática curso moderno" (4ª edição, 1969) de Osvaldo Sangiorgi, volume quatro, para 4ª série do curso ginasial. Nesse livro didático, a transformação geométrica trabalhada é a homotetia que está no capítulo de semelhança.

Luz (2007) ressalta que, no livro de terceira série ginasial, Sangiorgi (1969) apresenta a transformação translação como uma correspondência que a cada ponto *A* do plano faz corresponder um ponto *A'*, extremidade do segmento orientado *AA'*. Quando trabalha translação de polígonos, o autor indica que a translação seja realizada para cada um dos vértices, segundo um segmento orientado.

A mesma autora afirma que Sangiorgi (1969) define a rotação como uma correspondência de pontos *P* e *P'* orientada por um arco de amplitude *w*. Nesse sentido, Sangiorgi (1969), citado por Luz (2007) sugere no caso de um polígono que se realize a rotação de cada um de seus vértices segundo uma amplitude e um ponto fixo *O*, isto é, utilizando a definição de rotação de um ponto no plano.

Quanto à simetria axial e central, no mesmo livro didático, Luz assinala que no livro didático da 3ª série

> [...] a transformação do plano que a cada ponto P faz corresponder um ponto P' tal que P e P' estão situados em semi-planos opostos em relação a uma reta dada, o eixo de simetria; a reta PP' é perpendicular ao eixo de simetria e a distância de P ao eixo é igual à distância de P' a esse mesmo eixo. [...] A simetria central foi definida como a transformação no plano que a cada ponto P faz corresponder o seu simétrico P' em relação a um centro fixo O, chamado centro de simetria, de forma que O seja o ponto médio do segmento PP'. (LUZ, 2007, p. 71)

De acordo com a autora, no livro didático da 4ª série ginasial, a homotetia é apresentada como uma transformação para ampliar e reduzir figuras. Além disso, o livro destaca que as figuras geométricas homotéticas são sempre semelhantes e a operação de composição de duas homotetias consecutivas, de mesmo centro, tem estrutura de grupo comutativo[32] e que as homotetias são transformações que conservam as proporções.

Pesquisamos no volume 3º para o ginásio do livro Matemática (curso moderno) de Sangiorgi de 1969 (Figura 34) e ressaltamos que, nessa nova edição, o autor apresenta a transformação translação, rotação e simetria no apêndice do livro. A translação é mostrada como uma correspondência que a cada ponto *A* do plano faz corresponder um ponto *A'*, extremidade do segmento orientado *AA'*. Nesse livro, a rotação é uma transformação apresentada como uma correspondência de pontos *P* e *P'*, orientada por um arco de amplitude *w*.

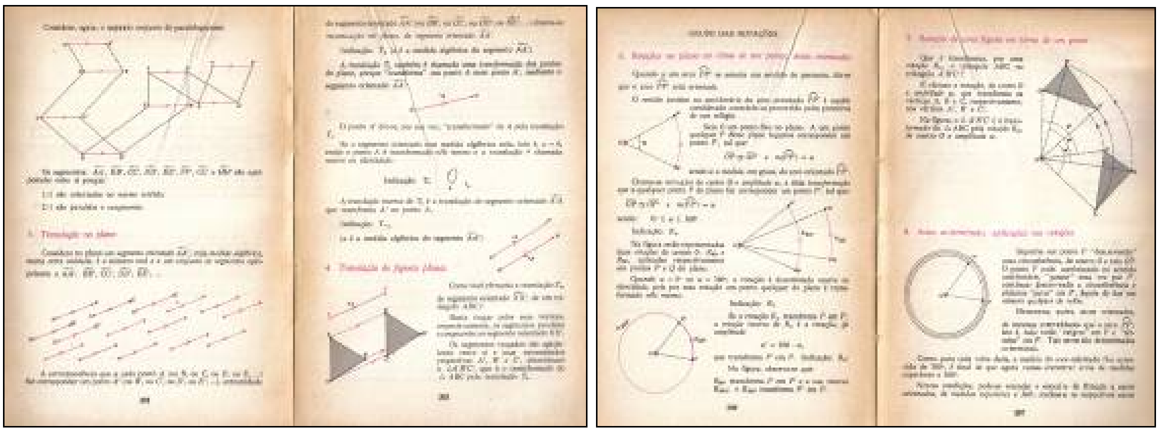


Figura 34. Transformações geométricas planas, Sangiorgi, 1969, p. 302-305

Como mostra a Figura 35, o livro trabalha a simetria axial e simetria central.

[32] Um grupo comutativo é um grupo (G, *) em que dados x, y elementos de G a operação * é comutativa em G, ou seja, x*y = y*x para quaisquer x, y em G.

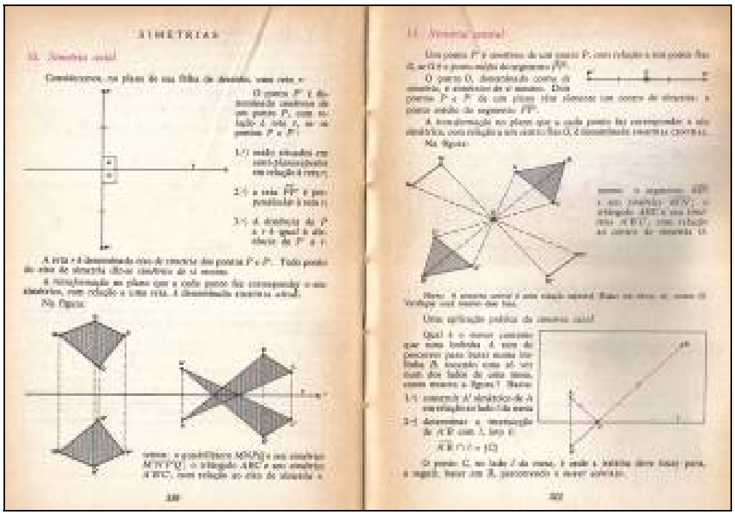


Figura 35. Simetria axial e central, Sangiorgi, 1969, p. 310-311

Segundo bloco: publicações da década de 1970, no período da elaboração do Guia Curricular de São Paulo.

- “Matemática para o ginásio” (1972) de Lamparelli; Canton; Morettin e Indiani, para 4ª série do ginásio.
- “Curso moderno de Matemática para o ensino de 1º grau” (1975 e 1977) de Averbuch; Bechara; Cohen e Liberman, integrantes do grupo de Ensino de Matemática Atualizada (GRUEMA)[33].

De acordo com Luz (2007), no livro “Matemática para o ginásio”, as transformações geométricas são apresentadas em dois momentos distintos. A autora assinala que as simetrias axial e central são apresentadas dentro do estudo das funções, isto é, as simetrias aparecem ao final de uma sequência de exercícios de aplicação do conceito de função com conjuntos numéricos. Nesse capítulo, os autores do livro didático apresentam de forma intuitiva a semelhança de figuras e a razão da semelhança, além disso distinguem segmentos comensuráveis e não comensuráveis. Depois disso, apresentam formalmente a noção de homotetia.

No livro “Curso moderno de Matemática para o ensino de 1º grau”, segundo Luz (2007), as noções de ponto simétrico e simetria axial são apresentadas no livro didático da 7ª série. A homotetia é mostrada no livro da 8ª série. A autora

[33] Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, da década de 1970.

sinaliza que, antes do tema simetria, o livro didático apresenta um estudo sobre circunferências porque a simetria axial é definida com o auxilio de exercícios de retas tangentes ou secantes a uma circunferência. Ainda de acordo com a autora, o livro apresenta uma série de exercícios que leva o aluno a descobrir algumas propriedades da simetria. Além do mais, a definição de simetria axial é apresentada como uma função que transforma pontos do plano em seus simétricos em relação a uma reta.

No livro da 8ª série, no qual a noção de homotetia aparece igual a anterior, são apresentados *Exercícios Preliminares*, que levam o aluno à definição de homotetia, bem como à descoberta de suas propriedades.

Terceiro bloco: livros didáticos entre os anos 2000 e 2002, que contemplam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

- “Matemática de hoje é feita assim” (2000) de Bigode para 7ª e 8ª séries de Ensino Fundamental.
- “Matemática para todos” (2002) de Imenes e Lellis, para 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries de Ensino Fundamental.

No livro de Bigode, da 7ª série, a simetria é trabalhada. De acordo com Luz (2007), há um texto introdutório “Simetria e regularidade” e outros de reflexão, no qual se estudam as propriedades de distância e os eixos de simetria de polígonos regulares. No caso da rotação, a autora afirma que se explicita a propriedade da manutenção das distâncias entre pontos, segundo o centro de rotação e, finalmente, de translação, como uma função, segundo um vetor que possui direção, comprimento e sentido do movimento.

No livro da 8ª série, a homotetia é apresentada com exercícios de ampliação e redução de figuras.

No livro didático de Imenes e Lellis, da 5ª série, os autores apresentam a simetria axial, como simetria das formas. No livro da 6ª série, o estudo da simetria está no capítulo sobre construções geométricas, bem como a simetria originada por uma meia volta (180^0). No livro didático da 7ª série, assinala Luz (2007), os autores apresentam um capítulo sobre rotação, simetria axial e central.

A autora assinala que tanto a simetria axial como a rotação são definidas, também, no espaço

> [...] a simetria axial é definida também no espaço, na qual se menciona um plano de simetria em substituição ao eixo da simetria no plano. Da mesma forma, a simetria rotacional é definida no espaço. Nela, menciona-se um eixo de rotação em substituição ao centro da rotação no plano. (LUZ, 2007. p. 155)

Por fim, na 8ª série, o livro traz um capítulo específico sobre as transformações geométricas: rotação, translação e simetria axial e central. Observamos que Luz (2007) apresenta em sua análise um exercício no qual pede a descrição de um plano e um eixo de simetria de uma pirâmide dada.

Ressaltamos que o enfoque de simetria axial e rotação no espaço, que se mostra dos livros da 7ª e 8ª séries, é novo, se comparamos com os outros livros didáticos analisados pela autora.

Além de nos ampararmos na pesquisa de Luz (2007), procuramos também outros livros didáticos, das décadas de 1960 e 1970 (Quadro 27) nos quais as transformações geométricas relacionadas à Geometria Espacial eram ensinadas no Ensino Médio e de que maneira esse conteúdo era abordado.

Quadro 27. Livros didáticos 1960 -1970

Livro	Autor	Ano
Geometria Elementar	(coleção F.T.D.)	1964
Matemática (Curso Colegial)	Organizador: School Mathematics Study Group	1966

No livro da coleção F.T.D., de 1964, de influência francesa, no que se refere ao estudo de Geometria Espacial, dentro do estudo de poliedros, aparece o conteúdo de simetria (Figura 36) com teoremas e suas demonstrações formais. Este é o único conteúdo abordado, envolvendo transformações geométricas.

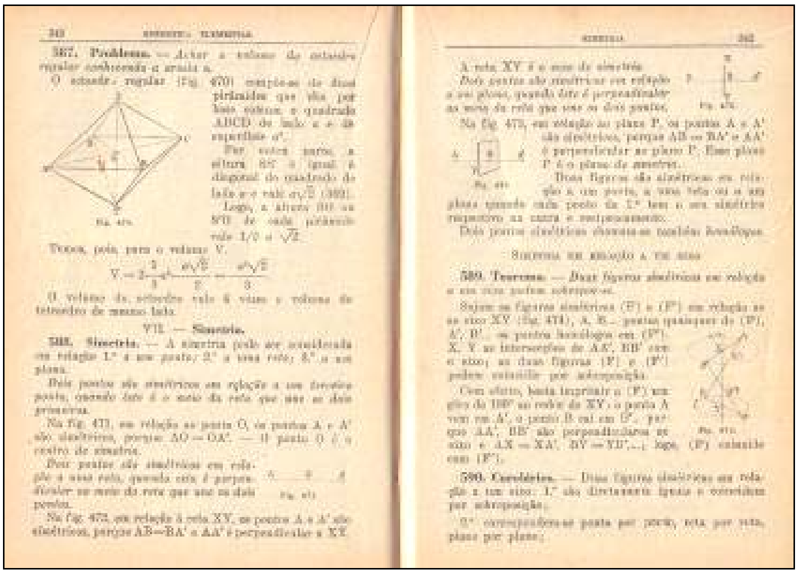


Figura 36. Geometria Elementar, Coleção F.T.D., 1964, p. 342-343

No livro Matemática, curso colegial, volume III de 1966 (Figura 37) de influência norte-americana, a visão apresentada é completamente diferente da anterior. Nele, as transformações do plano estão dentro do tema funções, que é trabalhado com vetores (Álgebra Linear).

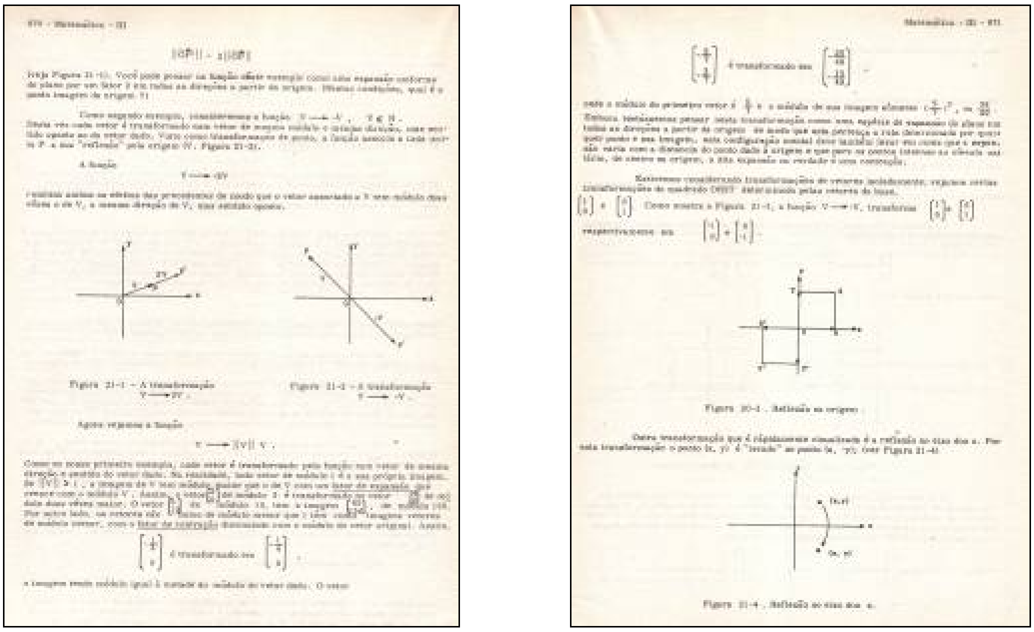


Figura 37. Matemática - Curso Colegial, 1966, p. 670-671

Além desses livros, a Secretaria de Estado da Educação - São Paulo, em 1979, entregou às escolas da prefeitura, Guias Curriculares, isto é, uma série de livros de atividades para o professor trabalhar em sala de aula, entre eles, o Guia

Curricular de Matemática – geometria para 1^0 grau (5ª a 8ª séries). Na revisão desse material, observamos que as transformações geométricas do plano são apresentadas em três capítulos do Guia:

- **Capítulo II:** “introdução ao estudo das isometrias” para a 6ª série, mostra atividades que objetivavam, por exemplo, caracterizar uma transformação do plano; a congruência de segmentos por meio de suas propriedades; a congruência de ângulos (por meio de congruência e segmentos, das **isometrias** e de suas propriedades), entre outros objetivos.

  Nas atividades que mostram uma espécie de roteiro, são apresentadas as propriedades de algumas transformações geométricas – reflexão, rotação e translação – que levam à noção de isometria. Observamos que a maneira de apresentar, tanto as transformações como as isometrias do plano é formal, ou seja, utilizam linguagem Matemática formal.

- **Capítulo III:** “introdução ao estudo das simetrias e suas aplicações”: para 7ª série, visa a construir, caracterizar, discriminar e relacionar figuras por simetria axial e central, determinar seus invariantes, diferenciar suas características e, no caso da simetria axial, construir o eixo de simetria de uma figura. Igual a sexta série, a sequência das atividades mostra um cuidado minucioso com relação ao conteúdo matemático e ao uso da linguagem Matemática.

- **Capítulo IV:** “noções sobre homotetia e semelhança e suas aplicações” para 8ª série, orientada a caracterização da projeção paralela e da homotetia por meio de suas propriedades. Nesse sentido, objetiva construir uma figura e determinar seus invariantes por homotetia. Para tal fim, a sequência introduz o teorema de Thales e as noções de contração, dilatação e semelhança de figuras.

Ressaltamos que o modo como são trabalhadas as transformações geométricas nessas séries, por meio desse guia de atividades mostra um trabalho sério, bem orientado, sequencial e organizado.

Os PCN do Ensino Fundamental (1998), no bloco “Espaço e Forma”, sugerem o trabalho com transformações geométricas. Assim, nas 7ª e 8ª séries, a abordagem sobre transformações encontra-se dentro do estudo das propriedades de polígonos e são trabalhadas de forma intuitiva. O documento assinala, como parte dos conteúdos:

- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações, como medidas dos lados, dos ângulos, perímetro e área.
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram, medidas dos ângulos, e dos que se modificam, como as medidas dos lados, do perímetro e da área.
- Conceito de congruências de figuras planas, a partir de transformações, como reflexões em retas, translações, rotações e suas composições, nas quais se determinam os invariantes.
- Noção de semelhança de figuras a partir de ampliações ou reduções, nos quais as medidas dos ângulos não mudam; no entanto, modificam-se as medidas dos lados da área e do perímetro.

No Ensino Médio, as orientações complementares, PCN+[34] (2002) sugerem as transformações, a partir da ampliação e/ou redução de figuras, contudo, não apresentam um estudo centrado nas transformações geométricas no plano, menos ainda com transformações no espaço.

[34] Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias.

Capítulo 4

EXPERIMENTO E ANÁLISE

No presente capítulo, caracterizamos a escola e os sujeitos da pesquisa, analisamos o questionário diagnóstico, para depois explicar o desenvolvimento do experimento e fazer a análise da sequência de atividades, segundo o quadro teórico e a metodologia de pesquisa.

4.1 Caracterização da escola e dos sujeitos

4.1.1 A escola

Realizamos a coleta de dados no laboratório de informática da escola particular *Colégio Universitas*, da cidade de Santos, Estado de São Paulo. Ressaltamos ter contado com a respectiva autorização para publicar o nome da escola e, inclusive, todos os dados coletados nela.

O *Colégio Universitas* foi fundado em 13 de maio de 1979, por 16 professores, em Santos, Estado de São Paulo. No Ensino Médio, a escola tem, como principais objetivos: consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o estudante como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; propiciar a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina; promover a preparação básica para o trabalho e cidadania, a fim de que o estudante torne-se capaz de adaptar-se, com flexibilidade, às novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores e transcender a dimensão cognitiva, considerando os aspectos afetivos e socioculturais.

A escola funciona em dois períodos, de manhã e à tarde, com 15 turmas de manhã e 5 à tarde. Em cada período, ministram-se 6 aulas de 50 minutos cada uma. É importante mencionar que as duas últimas aulas da manhã, de sexta-feira, e as duas primeiras aulas da tarde, de sexta-feira, são reservadas para as disciplinas *optativas*. Nessas disciplinas, não há avaliações, mas apenas um certificado de participação e frequência; sua finalidade é exercitar o processo de escolha e vivenciar diferentes áreas do conhecimento, ampliando o currículo do aluno e a qualidade de sua formação[35].

No primeiro semestre 2008, participamos desses *cursos optativos* com o curso *Animações com Cabri 3D* cujos dados mostramos no Quadro 28. A escola permitiu desenvolver a pesquisa durante seis semanas, todas às sextas-feiras, das 11h às 12h40. Quando foi realizada a coleta de dados da pesquisa, foram oferecidos os cursos optativos.

Quadro 28. Cursos optativos oferecidos no primeiro semestre 2008

	Horário dos cursos optativos	
	11h às 12h40	**13h10 às 14h50**
Cursos	Circo	Circo
	Moda	Introdução à Administração
	Informática	Informática
	Teatro	Teatro
	Animações com *Cabri 3D*	Dança criativa
	Educação Ambiental	Educação Ambiental

Desenvolvemos a pesquisa nessa escola, porque os *cursos optativos* permitem que pesquisadores de diferentes áreas possam desenvolver suas investigações, uma vez que os estudantes participantes já estão acostumados com trabalhos extracurriculares.

[35] Dados facilitados pela direção do *Colégio Universitas*.

4.1.2 Os sujeitos da pesquisa

No curso optativo, *Animações com Cabri 3D*, participaram 11 estudantes de segundo ano de Ensino Médio da mencionada escola (Quadro 29). Substituímos seus nomes por pseudônimos preservando, dessa maneira, sua identidade.

Quadro 29. Nome dos estudantes

Estudantes	Pedro	Carlos	Diego	Francisco	Patrícia
	Fernanda	Ivete	Andreya	Miguel	Luiz
	Álvaro				

Além dos estudantes, participaram o professor do curso – professor de Matemática da escola – três observadores, dois colegas da PUC/SP e um professor de Matemática da escola, que já tinha trabalhado com esses estudantes anteriormente e a pesquisadora.

É importante ressaltar que os estudantes trabalharam de maneira individual e cada um utilizou um computador fixo, isto é, o mesmo computador foi usado pelo mesmo aluno durante todos os encontros. Somente no quarto encontro, formou-se uma dupla (os estudantes trabalharam juntos de maneira espontânea). Para a análise *a posteriori*, durante os seis encontros, três estudantes: Andreya, Pedro e Carlos foram observados.

Para a parte experimental, optamos pela mesma terminologia utilizada na caixa de ferramentas “transformações” do *Cabri 3D*, isto é, “simetria central”, “simetria axial”, “reflexão”, “translação” e “rotação”.

4.3 Estudo diagnóstico

Elaboramos um questionário diagnóstico (ver apêndice A) com o intuito de fazer um levantamento dos conhecimentos de Geometria Dinâmica e de transformações geométricas dos participantes. O questionário constou de três momentos:

- **Parte I:** composta de dois itens teve por finalidade saber se os estudantes conhecem os ambientes *Cabri II* e/ou *Cabri 3D;*
- **Parte II**: formada de seis itens, divididos em três perguntas e três exemplos, visava a ter uma ideia dos conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas, especificamente, simetria axial, translação e rotação; e
- **Parte III**: visava a perceber se visualmente os estudantes reconhecem essas transformações geométricas.

A seguir, discutimos de maneira mais detalhada cada parte do questionário.

Parte I

Nesta parte, foi formulada a seguinte pergunta: *você já conhece ou utilizou o software Cabri II?* Dos 11 estudantes participantes, somente um deles, Pedro, já tinha utilizado o *Cabri II*, ele escreveu: *utilizei algumas vezes em animações em Matemática, utilizando gráfico de funções.* Quanto ao conhecimento ou utilização do *Cabri 3D*, o mesmo estudante, Pedro, manifestou que já tinha "visto" na aula de Química, modelos com *Cabri 3D*, ele escreveu: *sim, em animações e modelos de Física e Química.* Os outros dez estudantes assinalaram que conhecem um pouco, somente tiveram contato com *Cabri 3D*, quando os professores de Matemática e Biologia usaram-no como apoio em algumas aulas, contudo não manipularam o *software*.

Parte II

Nesta parte, desejávamos indagar o que os estudantes sabiam ou se lembravam das transformações geométricas, além de perceber, nas descrições ou desenhos, que tipo de representação ou quais descrições usavam para explicar a simetria axial, translação e rotação. Logo, na primeira pergunta: *o que você entende por simetria axial?* Oito, dos 11 estudantes, responderam que simetria é *a igualdade de duas partes* ou *a metade de um todo que pode ser medido*, além disso, dois deles falaram de eixos de simetria. Nos dados do Quadro 30, apresentamos as respostas dos estudantes.

Quadro 30. Primeira pergunta da parte II

Estudantes	O que você entende por simetria axial?
Pedro	Simetria é a igualdade de duas partes. Uma parábola (gráfica), por exemplo, quando dividimos o vértice obtemos duas partes simétricas.
Carlos	Tudo o que é simétrico é igual em algo, como um retângulo possui uma simetria bilateral e o círculo uma simetria radial, sendo, além disso, completamente simétrico.
Diego	Basicamente seria o corte da imagem de um ser em partes iguais. No ser humano, seria o corte no meio, tendo lados iguais, uma simetria bilateral.
Francisco	É o conceito de, vamos dizer, de médio, metade.
Patrícia	Simetria é quando um corpo possui mesmas medidas quando dividido, por exemplo, ou pode ser simétrico (igual) a um outro corpo.
Fernanda	É um “raio” que passa por uma figura se ela foi dividida em duas ou mais partes iguais, ele é uma figura bilateral.
Ivete	Cortes “traços”, a partir de um ponto de fuga.
Andreya	Simetria é dois lados com iguais proporções, simétricas.
Miguel	Simetria é quando há um ou vários eixos de simetria presente na figura.
Luiz	Conceito de igualdade no qual as metades separadas pelo eixo de simetria são iguais
Álvaro	Simetria é aquilo que, se for cortado, apresentará duas ou mais partes iguais, dependendo da quantidade de eixos usados.

Em suas respostas, os estudantes mostraram que, em alguns casos, confundem simetria com eixos de simetria. Para outros alunos, por exemplo, Andreya (Figura 38), a noção de simetria é sinônimo de metade, de pares iguais, ela manifestou isso, tanto na escrita como no desenho.

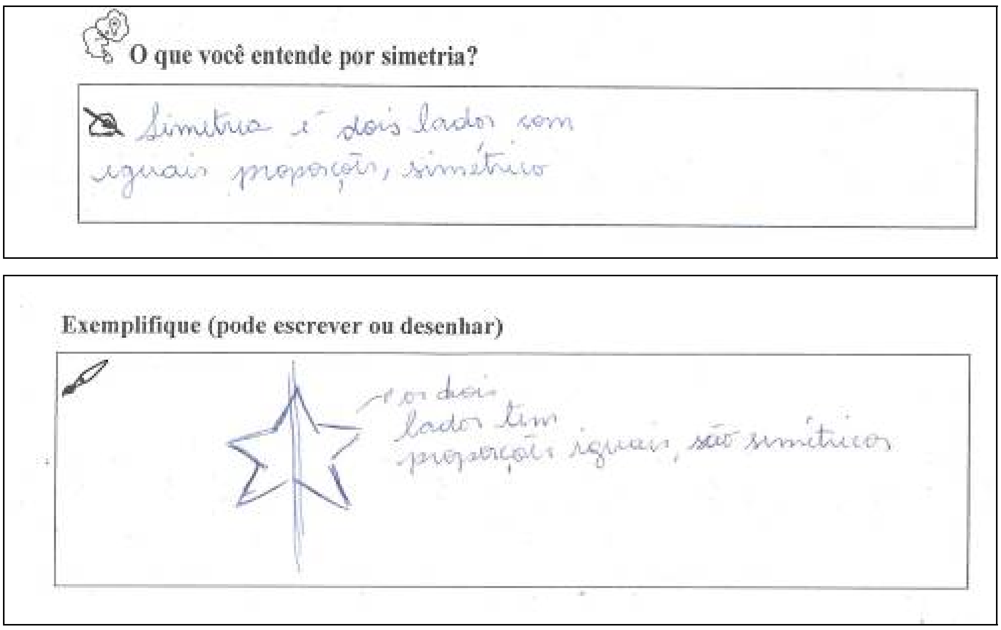


Figura 38. Resposta de Andreya com desenho

Por sua parte, Carlos relacionou a noção de simetria axial, na escrita e no desenho (Figura 39), com a “simetria bilateral” [36] estudada em Biologia.

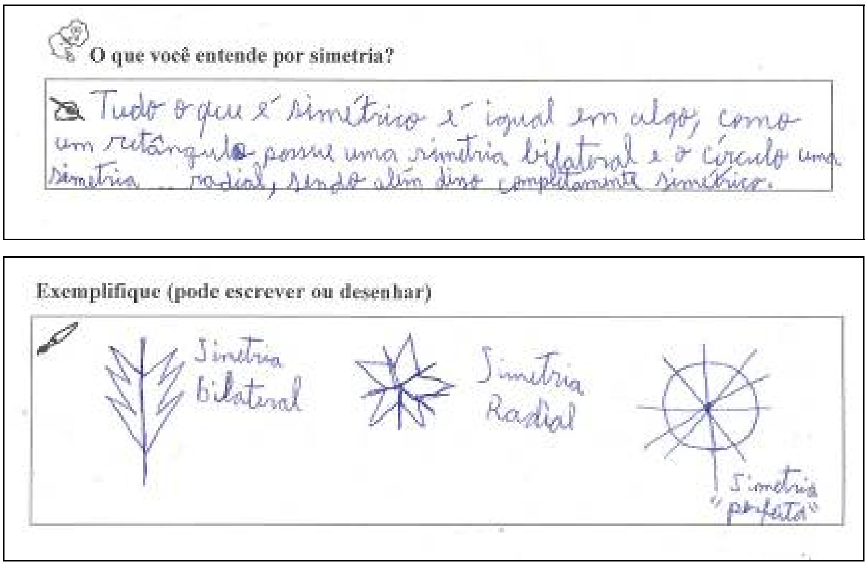


Figura 39. Resposta de Carlos com desenho

Quando foi pedido que exemplificassem com um desenho ou de forma escrita, três desenharam formas humanas (corpo, coração), uma estrela do mar ou uma folha dividida em duas partes (que chamam de simetria bilateral), cinco deles responderam desenhando figuras geométricas divididas por eixos, e os outros não fizeram desenhos.

Assim, percebemos que as respostas dadas pelos estudantes revelaram a mobilização noções de simetria axial, visto que alguns deles relacionam a citada noção, com figuras geométricas.

Em seguida, perguntamos o que entendiam por translação, como mostram os dados do Quadro 31, nove estudantes associaram translação com o movimento da Terra ao redor do Sol ou dos planetas no sistema solar, ou ao movimento de um corpo em torno de outro (objeto).

[36] Em Biologia, simetria bilateral é dada pela distribuição equilibrada do corpo dos organismos vivos.

Quadro 31. Segunda pergunta da parte II

Estudantes	O que você entende por translação?
Pedro	Movimento em torno de outro objeto.
Carlos	Não respondeu.
Diego	É o movimento dos planetas em torno do Sol.
Francisco	É o movimento de um corpo em torno de algo, de algum centro.
Patrícia	A volta que um corpo dá em volta de outro corpo.
Fernanda	A Terra rodando em torno do sol.
Ivete	É o movimento de um em torno de outro ponto.
Andreya	Não sei.
Miguel	É o movimento que o planeta Terra faz em volta do sol.
Luiz	Quando um objeto anda sobre um eixo circular e no meio desse eixo há um ponto fixo.
Álvaro	Movimento de um corpo ao redor de outro.

Isto levou a observar que eles associam a translação com movimento, mas não relacionam essa transformação geométrica com objetos matemáticos. Também observamos, em seus desenhos (Figura 40) o reflexo disso, pois desenharam o sistema solar, o movimento da Terra em torno do Sol, etc.

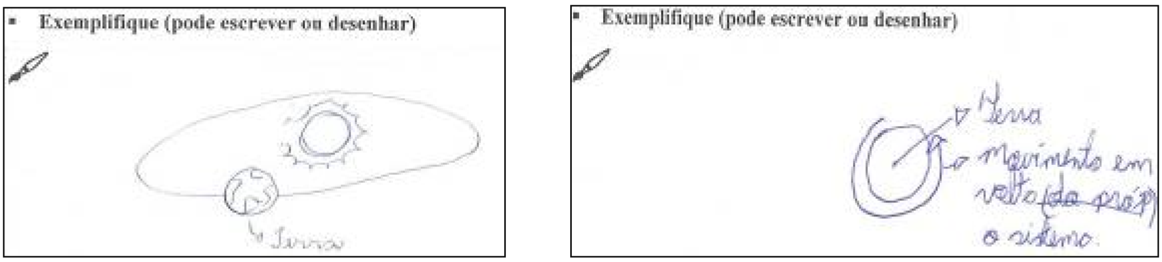


Figura 40. Desenhos realizados por Diego e Miguel

Quando perguntamos: *o que você entende por rotação?* (Quadro 32), da mesma forma que, no caso da translação, dez falaram do movimento da Terra ou do sistema solar, do movimento "giro" em torno ao próprio eixo.

Quadro 32. Resposta dos estudantes da terceira pergunta da parte II

Estudantes	O que você entende por rotação?
Pedro	Movimento em torno de outro do próprio eixo.
Carlos	Um movimento rotatório.
Diego	É um movimento planetário que consiste em uma volta nele próprio.
Francisco	O próprio corpo da "voltas" em torno de seu centro.
Patrícia	O giro (volta) que um corpo dá em volta de si mesmo.
Fernanda	A Terra rodando em torno de si mesma, que nos dá origem o dia e a noite.
Ivete	É um movimento em torno do próprio corpo.
Andreya	Um giro em volta de seu próprio eixo.
Miguel	É o movimento que a terra faz em volta de si mesmo.
Luiz	Rotação é quando uma figura ou objeto tridimensional movimenta-se sobre si mesmo.
Álvaro	Movimento giratório de um corpo no próprio eixo.

Quanto aos exemplos apresentados, dez dos estudantes representaram a Terra no sistema solar e, ao redor dela, flechas que indicaram o movimento giratório (no sentido horário e anti-horário) somente um estudante, Álvaro, utilizou o desenho de figuras geométricas (quadrado e retângulo). Mostramos nas figuras 41 e 42 desenhos de Miguel, Fernanda e Pedro, respectivamente.

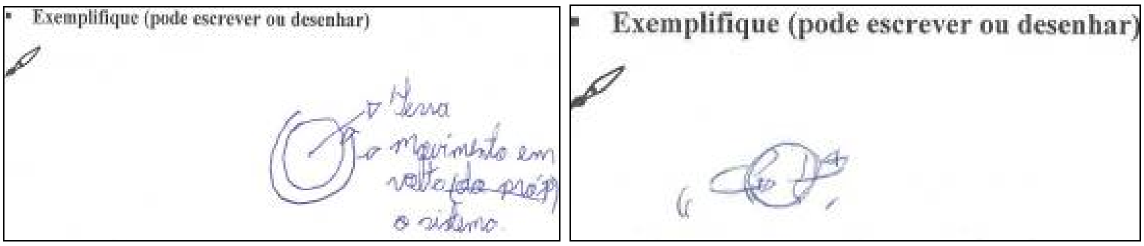


Figura 41. Desenhos realizados por Miguel e Fernanda

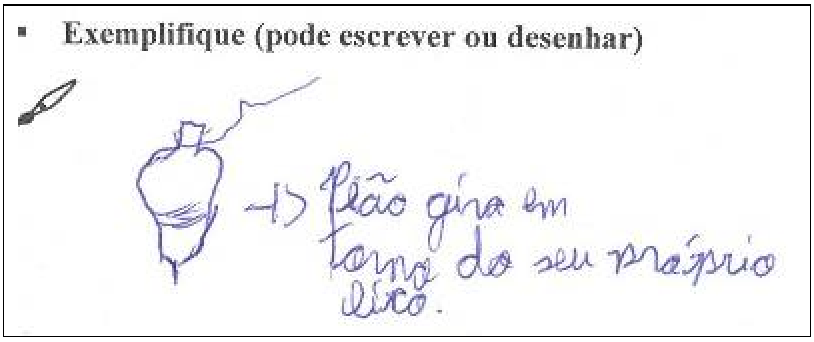


Figura 42. Desenho realizado por Pedro

Ressaltamos que a maioria dos estudantes, como no caso da translação, relacionou a rotação, com o movimento da Terra e não com a transformação geométrica.

Parte III

A parte III constava de três figuras – pintura de Escher; construção pré-Inca (Huaca del sol) e Catedral de Brasília – para as quais perguntamos: *nas figuras abaixo, descreva que transformações geométricas você observa?* O objetivo era saber quais transformações geométricas eram reconhecidas com maior frequência; se os estudantes identificavam corretamente essas transformações e se encontravam mais de um tipo de transformação em cada figura.

Para a Figura 43, pintura de Escher, todos os estudantes apontaram que a palavra “transformação” não era familiar para eles.

Figura 43. Pintura de Escher[37]

Motivo pelo que o professor fez uma intervenção para dar uma breve explicação, com exemplos, sobre o que significa a palavra "transformação", depois disso, os estudantes responderam esta parte do questionário. Os dados do Quadro 33 mostram que oito alunos conseguiram reconhecer simetria axial e rotação.

Quadro 33. Pintura de Esher

Estudantes	Respostas
Pedro	Três raias formam uma figura de seis pontos.
Carlos	Não respondeu.
Diego	É uma imagem de simetria radial que se repete.
Francisco	Não respondeu.
Patrícia	Figura com curvas (ondulações).
Fernanda	Os desenhos são iguais, assim, formando uma simetria.
Ivete	Rotação.
Andreya	Rotação de desenhos.
Miguel	Na pintura, há presença de rotação.
Luiz	Há vários eixos de simetria.
Álvaro	Não respondeu.

Para a Figura 44, cinco, dos 11 estudantes identificaram simetria e rotação e dois translação. Os outros estudantes não sabiam ou limitaram-se a descrever a figura.

[37] Fonte: http://www.mcescher.com/Gallery/symmetry-bmp/E69.jpg

Figura 44. Huaca del Sol-Peru [38]

Nos dados do Quadro 34, apresentamos as respostas dos estudantes que mostraram que eles reconheciam as transformações rotação e translação.

Quadro 34. Huaca do Sol

Estudante	Respostas
Pedro	Setas formam um mosaico simétrico em volta do huaco.
Carlos	Não sei.
Diego	É uma imagem de simetria bilateral.
Francisco	Não sei.
Patrícia	Figura com linhas retas e quadradas.
Fernanda	Simetria divide a imagem ao meio, os lados seriam iguais.
Ivete	Rotação e translação.
Andreya	Traços geometricamente trabalhados.
Miguel	O Quadro apresenta movimento de translação.
Luiz	Há um eixo de simetria no meio da figura.
Álvaro	Não sei.

Para a Figura 45 do questionário, como no caso anterior, os estudantes, reconheceram simetria e rotação.

[38] Fonte: http://peruhotel.com/images/articles/huaca_005.jpg

Figura 45. Catedral de Brasília[39]

Nesse caso, é importante assinalar que sete, dos 11 estudantes, afirmaram que a Catedral de Brasília – Quadro 35 – tem simetria ou rotação.

Quadro 35. Catedral de Brasília

Estudantes	Respostas
Pedro	A catedral é simétrica radialmente.
Carlos	Rotação.
Diego	Uma simetria radial, assim como a primeira imagem.
Francisco	Não sei.
Patrícia	Figura com curvas tipo de parábolas ao redor.
Fernanda	Simetria radial. Se dividirmos em pequenos pedaços como uma pizza, encontramos partes iguais.
Ivete	Rotação.
Andreya	Não respondeu.
Miguel	A catedral de Brasília apresenta uma simetria.
Luiz	Não respondeu.
Álvaro	É simétrica, porque tem vários eixos.

Na parte II do questionário diagnóstico, observamos que os estudantes explicitam, com mais facilidade, a simetria axial (que chamaram de “bilateral”). Os exemplos apresentados mostram que, na escola, essa noção é trabalhada nas aulas de Biologia; quanto à translação, aconteceu o contrário, os estudantes quase não descreveram o que é translação. Pelas respostas, percebemos uma certa confusão entre as noções de rotação e translação, porque para rotação utilizaram quase os mesmos exemplos de translação.

Na parte III do questionário diagnóstico, mostramos que os estudantes tiveram problemas para entender a palavra “transformação” e somente depois da intervenção do professor puderam relacionar transformação com simetria axial, rotação e translação.

[39] Fonte: fotografia do arquivo pessoal.

Assinalamos que as noções de translação, rotação e simetria foram estudadas na sétima e oitava séries de Ensino Fundamental, afirmamos isso, porque o professor da turma de segundo ano – observador do grupo – nos deu essa informação. Contudo, confunderam rotação e translação, especialmente.

O diagnóstico nos permitiu ter ideia dos conhecimentos matemáticos – relativos a transformações geométricas – dos estudantes e se eles já tinham trabalhado com *Cabri 3D*, além de nos auxiliar na elaboração das atividades que passamos a explicar.

4.4 Descrição do experimento

Nesses encontros (ver apêndices) as atividades propostas dividiram-se em duas etapas, como pode ser visto nos dados do Quadro 36.

Na primeira etapa, de dois encontros, objetivávamos fazer uma introdução das ferramentas e dos recursos do *Cabri 3D*, isto é, familiarizar o estudante com o *software*. Para o primeiro encontro, foram elaboradas dez atividades de Geometria Espacial. Para o segundo, construímos seis atividades de exploração em que foram introduzidas as ferramentas de transformações geométricas do *Cabri 3D*[40].

A segunda etapa aconteceu em quatro encontros e teve, como objetivo, a aplicação, por parte dos estudantes, dos conhecimentos adquiridos na etapa anterior. Nesta segunda etapa, os alunos trabalharam, tanto com o *Cabri 3D* quanto com as transformações geométricas, reutilizando ferramentas e/ou recursos do ambiente, em especial, a caixa de ferramentas “transformações” para construir modelos animados que envolvem essas noções. Para melhor entender a estrutura dos encontros (Quadro 36) o número de atividades variou, conforme os objetivos visados, o grau de dificuldade e a complexidade das construções.

[40] Para o experimento, usamos a mesma terminologia da caixa de ferramentas “transformações” utilizada no *Cabri 3D*.

Quadro 36. Etapas do experimento

Etapa	Nome das etapas	Encontro	Conteúdos
I	Introdução ao *Cabri 3D*	1	Dez atividades introdutórias (ferramentas e/ou recursos)
		2	Seis atividades: translação, simetria reflexão e rotação.
II	Construções de modelos animados	3	Quatro atividades: segmento animado, moinho e balanço com e sem animação.
		4	Uma atividade: casa.
		5	Duas atividades: bonecos.
		6	Uma atividade: três bonecos animados.

As atividades foram delineadas de maneira sequencial, para levar o aluno a se familiarizar com as ferramentas e recursos do *software*, a mobilizar noções de Geometria Plana e a introduzir, de maneira intuitiva, noções de transformações geométricas no espaço. É importante assinalar que os conteúdos de Geometria Espacial são novos para eles.

No que segue, apresentamos as atividades com suas análises *a priori* e *a posteriori.*

4.5 Análise das atividades

Nesta parte do trabalho, apresentaremos as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades da sequência de ensino, como exige a metodologia da Engenharia Didática.

Para perceber como as ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* favorecem a aprendizagem de transformações geométricas no espaço, devemos observar como acontece a Gênese Instrumental dos alunos quando interagem com o *software*, isto é, observar a construção dos instrumentos no trabalho com *Cabri 3D*.

A definição de instrumento dada por Rabardel (1995a), como entidade mista, composta de artefato e *esquemas de utilização*, faz com que consideremos a necessidade de estudar os *esquemas de utilização* que os estudantes desenvolvem. Seu estudo é de extrema importância, pois o artefato sem qualquer ação sobre ele não se transforma em instrumento. Esta transformação é um processo longo e complexo e depende da interação entre esse artefato, ou parte dele – *Cabri 3D* – e os *esquemas de utilização*, que podem ser cogitados por meio das ações do sujeito.

Nesse sentido, a tese de doutorado de Restrepo (2008) que enfatiza o estudo dos *esquemas de utilização* para analisar as ações dos sujeitos, deu-nos subsídios para estruturar a análise do estudo.

Para observar as Gêneses Instrumentais dos estudantes, bem como as apreensões das figuras e sua visualização, optamos por oito atividades que consideramos mais significativas. Na primeira etapa, para fazer essa análise, escolhemos a sétima atividade (primeiro encontro) "trave de futebol". Nela, os estudantes utilizaram várias ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D*, introduzidos nas atividades anteriores do mesmo encontro, além das atividades: translação, simetria axial, reflexão e rotação (segundo encontro), porque os alunos poderiam utilizar alguns conhecimentos prévios de transformações geométricas no plano e relacioná-los com as transformações geométricas no espaço.

Da segunda etapa, optamos por analisar, de maneira especial, os modelos animados, "moinho", "casa" e, de maneira conjunta, os três modelos dos "bonecos", como mostram os dados do Quadro 37, por entendermos que, na construção desses modelos, podemos diferenciar *esquemas de utilização*, ou seja, perceber o processo de Gênese Instrumental, além das diferentes apreensões de uma figura no registro figural dinâmico.

Quadro 37. Atividades escolhidas

Etapas	Nomes das etapas	Nome das atividades
I	Introdução ao *Cabri 3D*	Trave de futebol Translação Simetria axial Reflexão Rotação do cubo
II	Construção de modelos animados	Moinho Casa Bonecos

Destacamos, que as atividades “boneco”, “boneco animado” e “bonecos animados” (três modelos) são analisadas apenas com um dos três sujeitos observados, pois somente Carlos conseguiu finalizar as três atividades satisfatoriamente.

Os outros dois alunos observados não conseguiram construir os modelos. Pensamos que isso pode ter acontecido por vários fatores, como: uma estratégia de ação errada; a não apropriação das ferramentas e/ou recursos selecionados por eles para a construção; não mobilizaram as noções matemáticas necessárias para fazer a construção, embora tivessem mobilizado outras noções matemáticas. Contudo, não podemos ter certeza a respeito.

4.5.1 Etapa I: introdução ao *Cabri 3D*

Elaboramos atividades para introduzir algumas ferramentas e recursos do ambiente computacional *Cabri 3D.* Nesse primeiro contato com o *software*, pretendíamos dar uma visão geral do uso das ferramentas e/ou recursos necessários para desenvolver as atividades da seguinte etapa.

Portanto, o objetivo da primeira etapa foi fazer com que os estudantes explorassem e manipulassem algumas ferramentas e recursos, em especial, aquelas que envolvem transformações geométricas no espaço, além de na interação dos alunos com o *Cabri 3D* observar o processo de Gênese Instrumental orientada para o sujeito, ou seja, o processo de *instrumentação* com as ferramentas e recursos do ambiente.

Nos dados do Quadro 38, apresentamos uma visão detalhada de todas as atividades aplicadas na primeira etapa.

Quadro 38. Atividades introdutórias ao *Cabri 3D*

	Nome	Encontro	Atividades com *Cabri 3D*
ETAPA I	**Introdução ao *Cabri 3D***	**1**	1. Poliedros regulares
			2. Cubos congruentes
			3. Poliedro convexo
			4. Recorte de poliedro
			5. Plano paralelo
			6. Reta e plano perpendicular
			7. Trave de futebol
			8. Pirâmide de base quadrada
			9. Corpos redondos
			10. Prisma
		2	**1. Translação**
			2. Simetria axial
			3. Simetria central
			4. Reflexão
			5. Rotação de um triângulo
			6. Rotação de um cubo

No primeiro encontro, agrupamos as seis primeiras atividades em um primeiro “bloco”, pois queríamos observar as ações dos alunos durante a exploração e manipulação de algumas ferramentas e recursos do *Cabri 3D.*

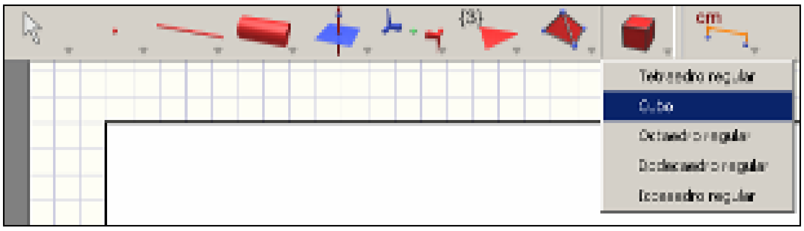
Dependendo da dimensão da Gênese Instrumental que se observa, de acordo com Rabardel (1995a), os *esquemas de utilização* podem ser: *esquemas de uso* (*instrumentação*) e/ou *esquemas de ação* instrumental (*instrumentalização*). Pensamos que os prováveis *esquemas de uso* que os alunos poderiam criar, fossem:

1. **“Criação de uma figura”**
    - **Regras-de-ação:** para criar as figuras, devemos clicar na caixa de ferramentas respectiva, na ferramenta desejada, na tela e arrastar o mouse na posição desejada.
2. **“Manipulação direta”**
    - **Regras-de-ação:** para explorar uma figura desde diferentes pontos de vista do observador, devemos manter pressionado o botão direito do mouse e arrastá-lo na posição desejada.

Primeiro encontro

Atividade 1: poliedros regulares

Criar, no plano cinza, os 5 poliedros regulares: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Salve, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Análise *a priori*

Esta atividade tem como objetivo utilizar a ferramenta “poliedros regulares” para criar, no plano de base (plano cinza), os cinco poliedros regulares apontados na ficha.

Na Figura 46, uma possível solução é apresentada. Utilizamos a caixa de ferramentas “poliedros regulares”, selecionando um poliedro, clicamos uma vez no plano de base, arrastamos o mouse (mantendo pressionado o botão esquerdo) até o tamanho desejado e clicar outra vez para validar a construção. O procedimento é repetido para criar os outros poliedros. Além disso, podem ser exploradas as figuras sob diferentes pontos de vista do observador[41].

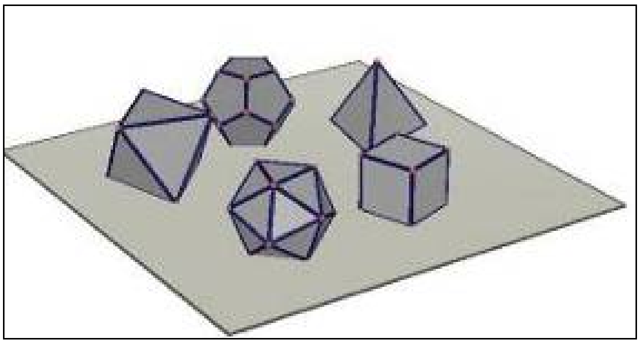


Figura 46. Poliedros regulares

[41] No *Cabri 3D* por meio da manipulação direta (manter pressionado o botão direito do mouse) pode-se ver a figura de diferentes posições.

Análise *a posteriori*

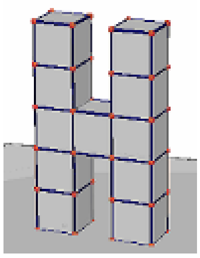
No início da atividade, os estudantes exploraram as ferramentas do *Cabri 3D*, isto é, seguindo as indicações do professor, abriram cada caixa de ferramentas do *software* para ter uma visão geral de sua localização.

Para criar os cinco poliedros regulares, seguiram a mesma sequência de ações que tínhamos pressuposto na *análise a priori*, nenhum deles apresentou dificuldade no uso da referida ferramenta, isso mostra que o objetivo da atividade foi atingido.

Além do mais, observando as ações dos alunos, temos indícios de que os *esquemas de uso* "criação de uma figura" e "manipulação direta", que tínhamos pressuposto na análise *a priori*, foram utilizados. Isso pode ter acontecido porque a atividade foi orientada para que os alunos manipulassem a caixa de ferramentas "poliedros regulares" diretamente, fato que não permitiu que tivessem necessidade de fazer outras ações, ou seja, criar outros *esquemas de uso*.

Atividade 2: cubos congruentes

O desenho abaixo mostra a construção da letra H a partir de cubos congruentes. Utilizando somente cubos, construir as letras E, U e A.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

Análise *a priori*

O objetivo é que os estudantes usem a ferramenta "cubo" e construam as letras **E, U** e **A.**

Na Figura 47, podemos ver uma possível solução de construção das letras solicitadas. Dessa forma, devemos criar um cubo – os cubos criados para formar a letra dependem da posição do primeiro – e com base nele, devemos continuar clicando sempre sobre uma face do cubo. É importante ressaltar que o *Cabri 3D* cria cubos consecutivos e de igual tamanho, indicando uma das faces de um cubo. Para isso, podemos mudar de vista – botão direito do mouse – para escolher sobre que face é necessário clicar. Pensamos que os alunos podem ter certa dificuldade, pela maneira como o *software* cria cubos consecutivos e de igual tamanho.

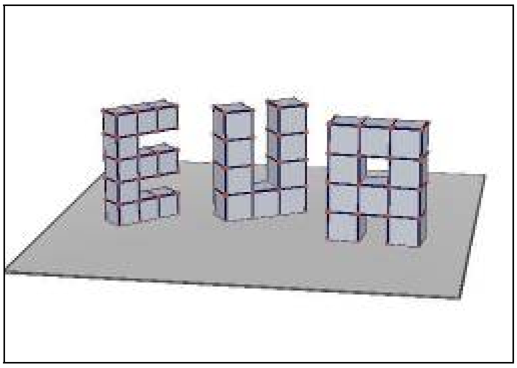


Figura 47. Construção das letras E, U e A

Análise *a posteriori*

Para a construção das letras, alguns estudantes apresentaram certas dificuldades, como tínhamos previsto na análise a *priori* como, por exemplo, não poder criar a fila de cubos para formar a letra, isto é, cubos consecutivos e de igual tamanho, por esse motivo, o professor sugeriu que mudassem a posição do plano (ponto de vista). Com a orientação dada, a maioria dos estudantes conseguiu construir as letras. Pensamos que os *esquemas de uso* similares aos esquemas da análise *a priori*: "criação de uma figura" e "manipulação direta", foram criados pelos alunos. No entanto, o aluno Pedro seguiu outra sequência de ações, fato que nos fez inferir que o aluno criou um *esquema de uso* diferente.

Esquema de uso de Pedro: "fila de cubos"

- **Regras-de-ação:** criou uma coluna de cubos e depois a copiou, tomando como referência o último cubo da coluna. Em seguida, colou essa coluna várias vezes para depois juntá-las (Figura 48). Finalmente, escondeu os cubos que não eram necessários para a construção de cada letra.

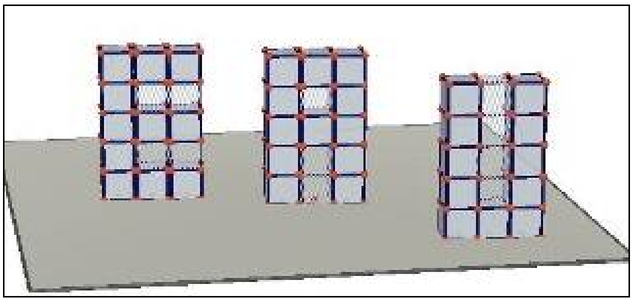


Figura 48. Construção realizada por Pedro

No entanto, quando tentou mover as letras, não conseguiu (Figura 49) porque se desfaziam, isto é, na construção eram observadas colunas paralelas de cubos, manipuladas manualmente de tal maneira que pareciam formar as letras solicitadas, contudo, quando o estudante quis movê-las como um todo, as colunas separaram-se e as letras desmancharam-se. Assim, começou outra vez, seguiu as orientações do professor e terminou satisfatoriamente a atividade.

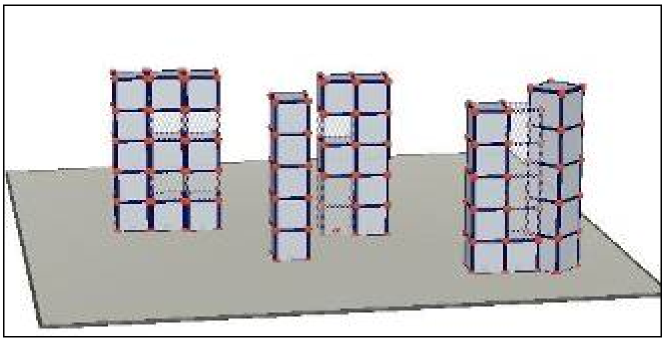


Figura 49. As letras desfazem-se ao serem manipuladas

Atividade 3: poliedro convexo

Criar um cubo com estilo de superfície vazia. A seguir, obter os pontos médios das 12 arestas. Usando a ferramenta "*poliedro convexo*", construir um poliedro que passe pelos 12 pontos criados.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

Análise *a priori*

Esta atividade visa a utilizar além da ferramenta "cubo", já introduzida na atividade anterior, as ferramentas "ponto médio", "poliedro convexo" e o recurso "atributos".

Uma possível construção do poliedro solicitado (Figura 50) é criar um cubo no plano de base; modificar a superfície do cubo para estilo "vazio"; criar os pontos médios nas 12 arestas do cubo; e, finalmente, construir o poliedro convexo com os 12 pontos médios do cubo. É importante assinalar que, para criar o poliedro pedido, precisamos clicar em pontos médios consecutivos.

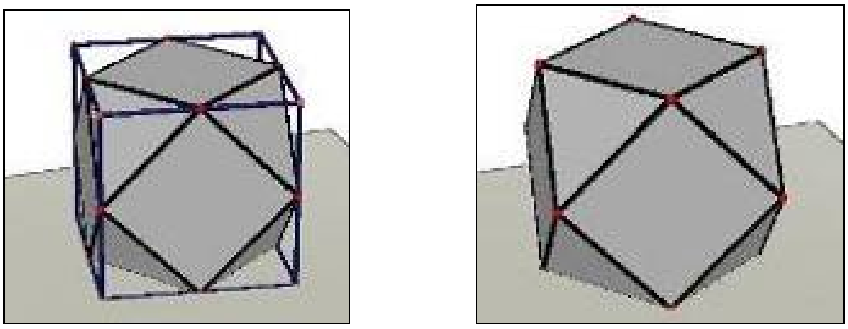


Figura 50. Construção do poliedro convexo

Análise *a posteriori*

Na atividade, a maioria dos estudantes trabalhou, seguindo a mesma sequência da análise *a priori* sem apresentar dificuldades, mas, uma situação, já prevista, aconteceu. Carlos seguiu a sequência de ações da análise *a priori*, mas, quando tentou construir o poliedro, não "ligou" de maneira correta, posto que como vemos na Figura 51(a), criou uma diagonal em uma das fases do poliedro, já na segunda tentativa, Figura 51(b), conseguiu construir o poliedro de maneira satisfatória.

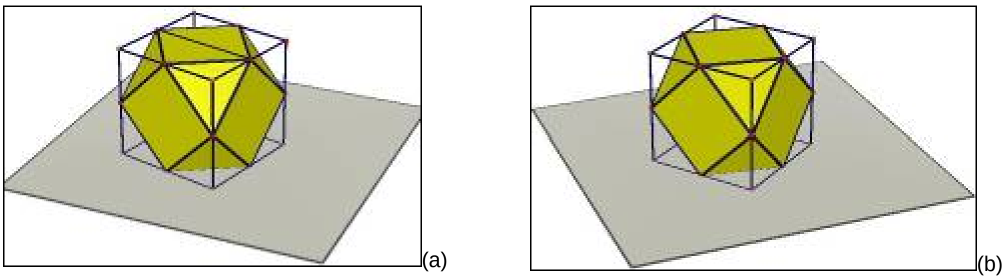
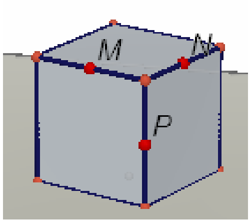


Figura 51. Duas construções realizadas por Carlos

Além disso, vários estudantes mudaram o ponto de vista para observar sua construção de diferentes ângulos. As ações realizadas pelos alunos nos fizeram pressupor que utilizaram, como nas atividades anteriores, os *esquemas de uso* pressupostos *a priori.*

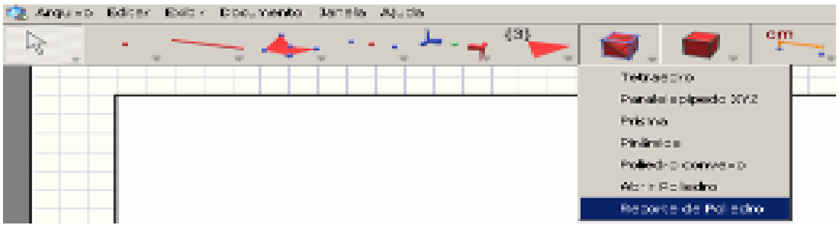
Atividade 4: recorte de poliedro

Criar um cubo e os pontos médios de três arestas conforme o desenho abaixo.



Obs.: *quatro são as maneiras de construir planos: por três pontos não alinhados, por duas retas concorrentes, por duas retas distintas paralelas e por uma reta e um ponto fora dela.*

Criar um plano pelos pontos *M*, *N* e *P* e, a seguir, usando a ferramenta “recorte de poliedro”, recortar o sólido pelos pontos *MNP*. Para isso, clique no sólido a ser recortado e, em seguida, no plano.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_4

Análise *a priori*

A atividade objetiva utilizar a ferramenta “recorte de poliedro”, além de outras ferramentas já introduzidas nas atividades anteriores.

Uma sequência provável de ações é a seguinte: construir um cubo; em seguida, criar os pontos médios *M*, *N* e *P* de três arestas concorrentes; criar um plano que passe pelos três pontos *MNP* (Figura 52); recortar a parte do poliedro que se intersecta com o plano e, em seguida, esconder o plano.

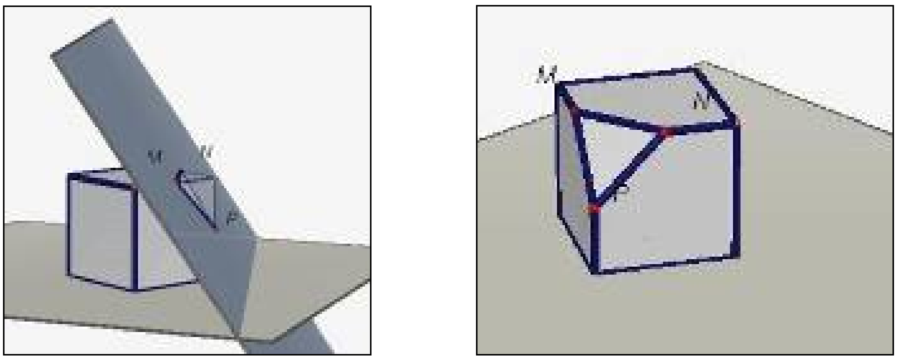


Figura 52. Uso da ferramenta “recorte de poliedro”

Análise *a posteriori*

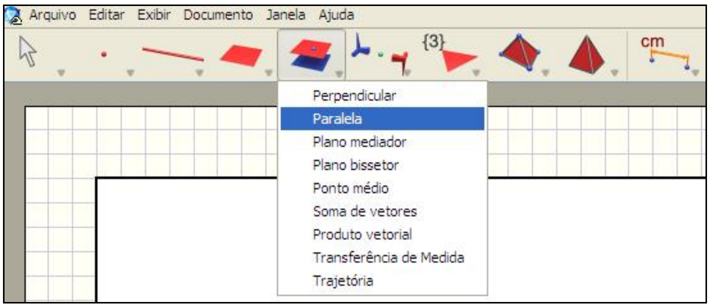
Os estudantes realizaram a construção sem problemas e de maneira rápida. “recortaram o cubo” como foi pressuposto na análise *a priori* e usaram o recurso “atributos” para modificar a cor da figura.

Na atividade, as ações dos estudantes fizeram com que observássemos o uso dos esquemas similares aos pressupostos (“criação de uma figura” e “manipulação direta” p. 152), o que nos dá indícios do processo de *instrumentação*, posto que nesses primeiros contatos com o *Cabri 3D,* eles conseguiram interagir bem com o *software*, além de rever alguns conceitos de Geometria Plana estudada no Ensino Fundamental.

Atividade 5: plano paralelo

a) Criar um ponto não pertencente ao plano de base. Nomear esse ponto de A (fazer isso imediatamente após tê-lo criado).

b) Criar um plano paralelo ao plano de base e passando pelo ponto A.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

Análise *a priori*

A atividade visa a utilizar a tecla *Shift* e a ferramenta “paralela”.

Em uma provável sequência de ações, o estudante deve criar um ponto não pertencente ao plano de base (para que o ponto não esteja no plano de base deve ser criado, mantendo pressionada a tecla *Shift*), em seguida nomeá-lo de *A* (Figura 53). Por fim, criar um plano paralelo ao plano de base que passe por esse ponto. Na atividade, os alunos podem apresentar alguns problemas relacionados à criação do ponto no espaço.

Toda vez que um ponto for criado na parte cinza ou na branca da tela, ressaltamos que ele pertencerá ao plano de base.

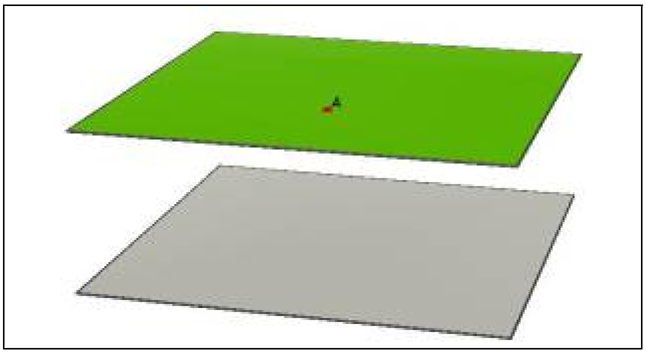


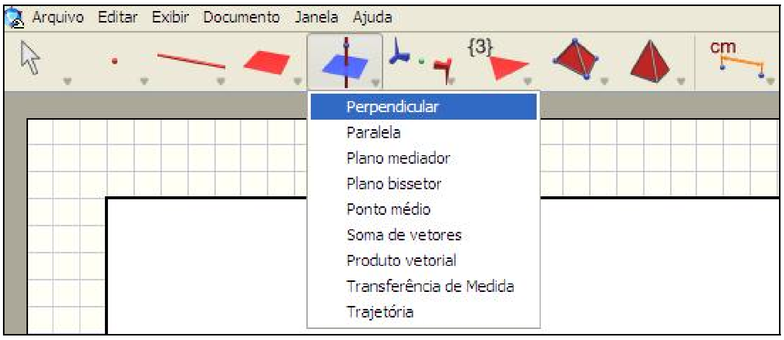
Figura 53. Plano paralelo ao plano de base

Análise *a posteriori*

Embora, no desenvolvimento da atividade, o professor orientasse sobre como criar o ponto no espaço com a tecla *Shift*, alguns estudantes sentiam dificuldades, o fato foi observado pelas várias tentativas que eles fizeram para criação do ponto no espaço. Com relação à construção do plano paralelo ao plano de base, nenhuma dificuldade foi apresentada.

Atividade 6: reta e plano perpendicular

a) Criar uma reta perpendicular ao plano de base.



b) Criar um plano perpendicular ao plano de base.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_6

Análise *a priori*

Com esta atividade, visamos a construir um plano perpendicular ao plano de base usando as ferramentas, “perpendicular” e “plano”.

A Figura 54 mostra uma possível sequência de construção – sob diferentes pontos de vista do observador. Na sequência, o estudante deve criar uma reta perpendicular ao plano de base com a respectiva ferramenta, depois para criar o plano perpendicular pedido na atividade deve construí-lo pela reta criada anteriormente.

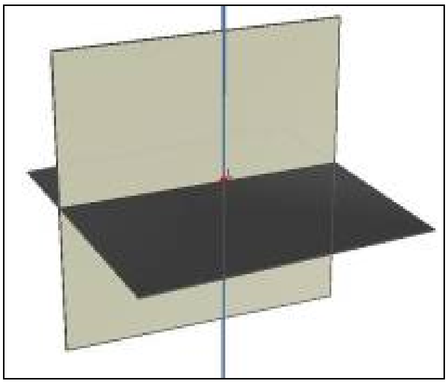


Figura 54. Criação do plano perpendicular

Análise *a posteriori*

O grupo não sentiu problemas na construção do plano perpendicular. Em geral, suas construções foram feitas como havíamos previsto, já que os estudantes utilizaram as ferramentas "reta" e "plano" além dos recursos introduzidos anteriormente.

Como nas atividades anteriores, houve indícios mostrando que pensamos que os alunos criaram *esquemas de uso,* similares aos pressupostos: "criação de uma figura" e "manipulação direta".

Considerações das seis primeiras atividades

Como as atividades visavam à exploração e manipulação do *Cabri 3D*, ou seja, à interação com o *software*, para sua análise, observamos nas ações dos alunos seus prováveis *esquemas de uso*, isto é, seus processos de *instrumentação* (dimensão da Gênese Instrumental, orientada ao sujeito).

De acordo com as ações realizadas pelos estudantes, pensamos que a maioria utilizou similares *esquemas de uso* ou até provavelmente os mesmos esquemas da análise *a priori:* "criação de uma figura" e "manipulação direta", visto que as atividades exploratórias e de manipulação direta estavam orientadas de tal maneira que seria difícil a criação de outros *esquemas de uso*.

Acreditamos que a parte do artefato *Cabri 3D* (ferramentas e recursos utilizados nessas atividades) deu-nos, com os *esquemas de uso* criados pelos estudantes durante a interação, subsídios para pensar que o processo de *instrumentação* estava em curso, pois como afirma Rabardel (1995a), a apropriação de novos artefatos, a criação de *esquemas de uso* ou a utilização de *esquemas de uso* preestabelecidos são dadas no processo de *instrumentação*. Além disso, este processo é complexo e requer tempo, pensamos que continuará ao longo dos encontros.

Nesse sentido, após o desenvolvimento das primeiras seis atividades introdutórias, acreditamos que os alunos estavam se apropriando, no uso, do artefato (ferramentas e recursos utilizados nas atividades), e o processo de transformá-lo em *instrumento* estava em andamento, isto é, nas ações dos estudantes observamos que a parte artefato do *Cabri 3D* e seus *esquemas de uso* estavam se acomodando.

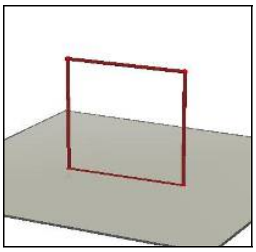
Observações das últimas atividades

As quatro últimas atividades: 7, 8, 9 e10 serão analisadas *a priori* em função dos *esquemas de utilização.*

A análise *a posteriori* de tais atividades será realizada em dois momentos. O primeiro, envolvendo a atividade 7, será analisado com os três alunos observados, uma vez que foi a primeira construção “livre” (atividade não dirigida) realizada por eles. No segundo momento, analisamos as primeiras seis atividades.

Atividade 7: trave de futebol

Construir, como mostra a figura, uma trave de futebol, considerando o plano de base como sendo o chão.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_7

Análise *a priori*

Com o intuito de observar as escolhas dos alunos, propomos a primeira construção “trave de futebol”. Esperamos que as ferramentas e recursos já introduzidas sejam utilizadas.

A priori, mostramos dois possíveis *esquemas de utilização* para a construção:

1. **Trave [1]**
   - **Conceitos-em-ato:** a construção ocorre por meio da mobilização de noções de segmento, plano paralelo e reta perpendicular.
   - **Regras-de-ação:** criar um segmento qualquer no plano de base, depois criar duas retas perpendiculares a esse plano que passem pelos extremos do segmento. Em seguida, marcar um ponto em uma das duas perpendiculares e criar um plano paralelo ao plano de base, passando por esse ponto, marcar, então, o ponto de interseção da outra perpendicular com o plano paralelo (Figura 55) feito isso, usar segmentos para construir a trave de futebol.

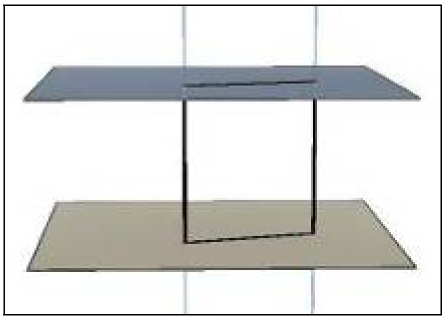


Figura 55. Construção da trave de futebol com plano paralelo

2. **Trave [2]**
   - **Conceitos-em-ato:** nesta construção, o aluno pode mobilizar a noção de segmento e retas paralelas e retas perpendiculares.
   - **Regras-de-ação:** criar uma reta no plano de base e, sobre ela, um segmento. Criar duas retas perpendiculares ao plano de base que passem pelos extremos do segmento. Em seguida, criar uma reta paralela ao segmento e marcar os pontos de intersecção com as

retas perpendiculares (Figura 56) Por fim, criar segmentos para construir a trave de futebol.

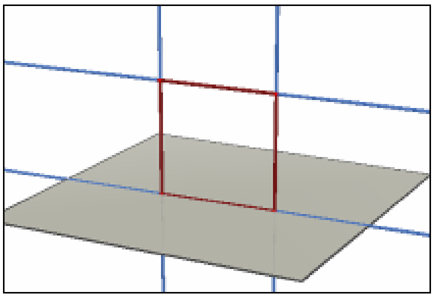


Figura 56. Construção da trave de futebol com retas paralelas

Análise *a posteriori*

A análise ocorreu em dois momentos: o primeiro, descreveu as ações de cada aluno para, em seguida, no segundo, poder analisar em conjunto os esquemas mobilizados e as escolhas feitas por Andreya, Pedro e Carlos.

Ações de Andreya: três tentativas de resolução da atividade foram desenvolvidas pela estudante. É importante observar que Andreya foi a única que utilizou uma estratégia totalmente diferente dos outros estudantes e da que nós pressupúnhamos.

Em sua primeira tentativa, criou um cubo, como mostra a Figura 57 e tentou "deletar" cinco de suas seis faces, de maneira que apenas uma sobrasse, esta seria a trave solicitada na atividade. Ao tentar validar essa ação, ficou surpresa ao notar que o cubo desaparecia quando uma de suas faces era destruída.

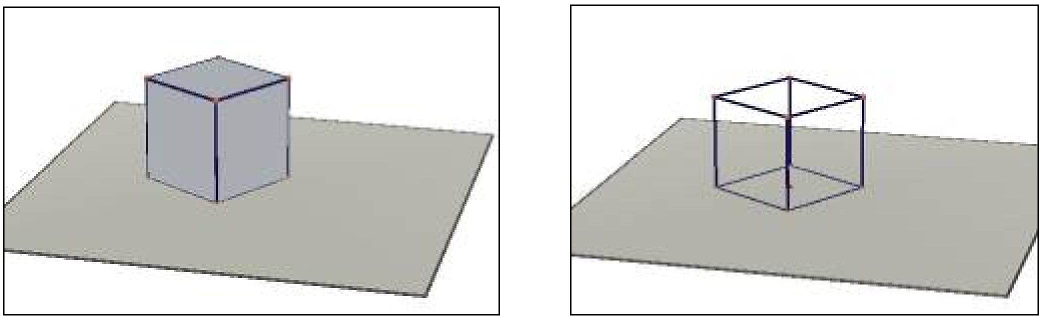


Figura 57. Primeira tentativa de construção realizada por Andreya

Em sua segunda tentativa, a estudante criou dois pontos na parte visível (de cor cinza) do plano de base e outros dois fora dele. Feito isso, criou segmentos a partir desses pontos e a trave foi construída. Em um primeiro momento, ficou satisfeita com sua construção que parecia estar correta. Instigada pelo professor a usar o recurso “mudar de vista” (Figura 58), alterou a posição do plano de base e observou que os pontos criados fora da parte visível ainda pertenciam a ele, o que mostrou que a trave não foi construída corretamente.

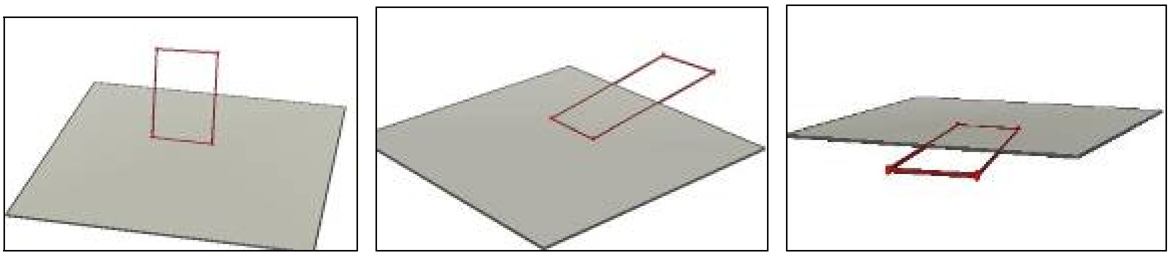


Figura 58. Segunda tentativa de construção realizada por Andreya

Já na terceira, Andreya voltou à estratégia que consistia em construir a trave a partir do cubo (Figura 59) e, novamente, um cubo foi criado, mas ela já sabia que não podia “destruir” os elementos que o compunham. Então, criou segmentos nas arestas de uma face do cubo e, em seguida, com o atributo “esconder/mostrar” escondeu o cubo e confirmou que sua construção estava correta, com o recurso “mudar de vista”.

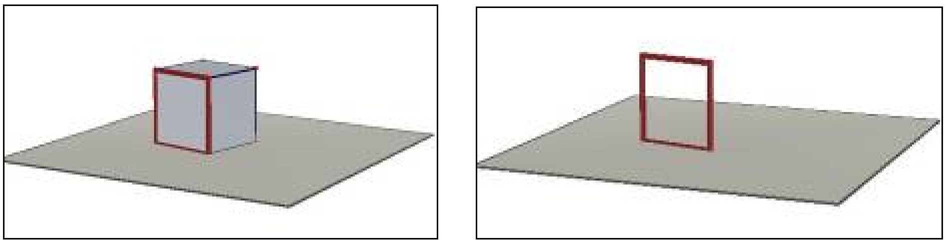


Figura 59. Terceira tentativa de construção realizada por Andreya

Ações de Pedro: diferente de Andreya, Pedro realizou só uma construção, criou um segmento no plano de base e depois duas retas perpendiculares ao plano de base, passando pelos extremos do segmento. Depois disso, criou segmentos em cada reta perpendicular para construir os lados da trave de futebol, verificou a medida dos segmentos paralelos e igualou os dois, manipulando-os manualmente. Por fim, criou outros dois segmentos para fechar a trave de futebol, como mostra a Figura 60. Outra vez, verificou que os dois novos segmentos tinham o mesmo comprimento e, dessa maneira, construiu sua trave de futebol.

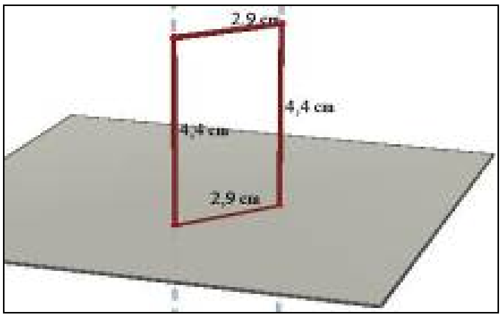


Figura 60. Construção realizada por Pedro

Ações de Carlos: o estudante observou detidamente a trave na ficha de atividades e criou um segmento, com um extremo no plano de base e o outro extremo no espaço. Para isso, utilizou a tecla *Shift*, mas teve uma dúvida e perguntou ao professor: *como faço o segundo segmento?* O professor orientou-o que mudasse de posição o plano de base – o botão direito do mouse – ele mudou e depois optou por copiar e colar o segmento já criado, obtendo dessa maneira dois segmentos paralelos (Figura 61). Em seguida, criou segmentos nos extremos dos segmentos paralelos e construiu a trave de futebol.

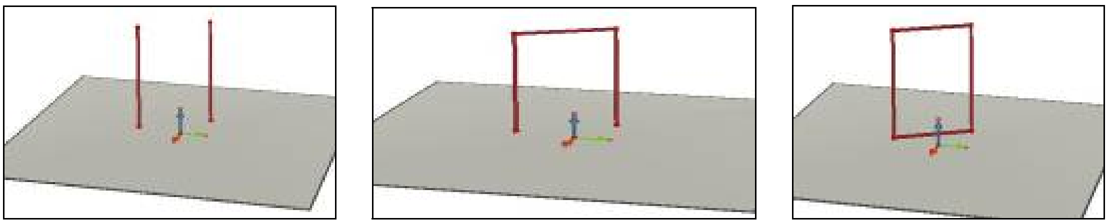


Figura 61. Processo de construção realizada por Carlos

Análise das ações

As ações de Andreya, Pedro e Carlos mostraram que eles utilizaram diferentes ferramentas do *Cabri 3D* (parte do artefato) e, também, esquemas distintos aos apresentados na análise *a priori*: Trave [1] e Trave [2]. Assinalamos que os esquemas podem ou não terem sido desenvolvidos baseados em esquemas preestabelecidos, isto é, repertório de esquemas a partir de esquemas desenvolvidos quando trabalharam outras atividades

Nesse sentido, temos indícios do processo de *instrumentação.* Isso se tornou evidente quando observamos o tratamento no registro figural dinâmico, já descrito, em cada construção.

Detivemo-nos nas ações que Andreya seguiu nas três tentativas para construir a trave, porque elas são diferentes da sequência de ações pressupostas e, também, porque diferem das construções dos colegas. Partimos da ideia de que a estudante, depois das quinta e sexta atividades, utilizaria as ferramentas do *Cabri 3D* – plano e reta – como aconteceu, com Pedro e Carlos. No entanto, isso não se verificou; o que nos fez pensar na possibilidade dessas ferramentas ainda serem artefatos para ela.

O esquema de construção da trave utilizado por Andreya partia do cubo. Isso nos fez considerar que, quando a aluna associou a trave de futebol às arestas de uma face do cubo, ela estendeu sua percepção visual (processo cognitivo de identificação espontânea de uma figura, segundo Duval), entretanto não podemos afirmar que visualizou no sentido de Duval (2002). Isso só poderia ser justificado se, além da associação entre as formas da face do cubo com a trave de futebol, relações Matemáticas (ângulo e lado) fossem registradas, o que, de fato, não aconteceu.

Dos três estudantes, somente Andreya verificou, por meio da manipulação direta, se a construção feita estava de acordo com o solicitado. Isso aconteceu na segunda tentativa, quando deslocou o plano de base em relação a um referencial, isto é, quando mudou seu ponto de vista.

As construções de Pedro e Carlos pareciam certas, e eles até mudaram o ponto de vista – botão direito do mouse – porém não manipularam as figuras construídas, (Figuras 62(a) e 62(b)). Se a manipulação fosse feita, teriam verificado que suas construções não conservavam as características da construção inicial, isto é, desfaziam-se (Figuras 62(c) e 62(d)).

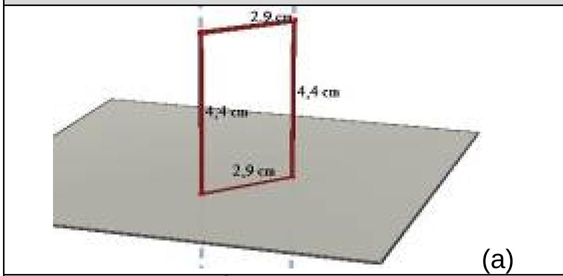
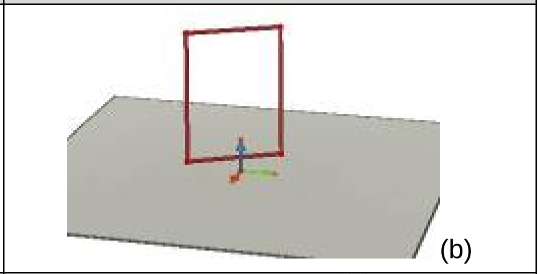
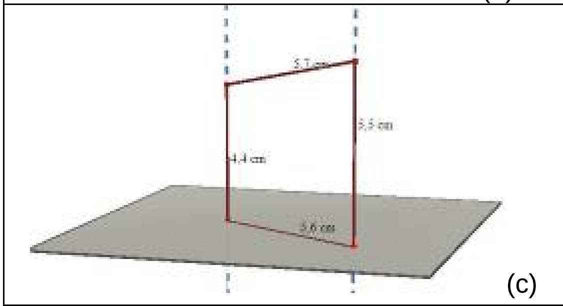
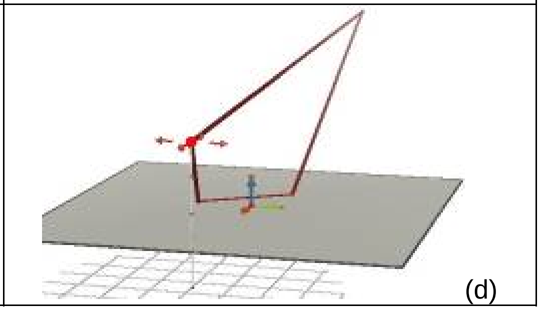
Construção de Pedro	Construção de Carlos
	
	

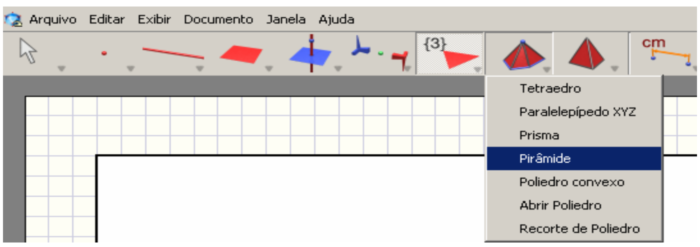
Figura 62. Manipulação da trave de futebol construída por Pedro e Carlos

Após observar as ações de Pedro e Carlos, podemos afirmar que os esquemas utilizados por eles limitaram-se à questão visual, ou seja, à percepção visual, pois, as estratégias usadas na construção apresentavam indícios que os dois alunos não tiveram preocupação com as propriedades matemáticas exigidas para a construção (lados paralelos dois a dois e ângulos retos). Nesse caso, podemos afirmar que a visualização não ocorreu.

Contudo, as Gêneses Instrumentais dos três alunos (processo de *instrumentação*), com as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, aconteceu.

Atividade 8: pirâmide de base quadrada

Criar um quadrado no plano de base. Pelo centro do quadrado, levantar uma reta perpendicular. Criar um ponto sobre a reta. Finalmente, criar uma pirâmide de base quadrada e vértice V.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_8

Análise *a priori*

O objetivo da atividade é introduzir a ferramenta “pirâmide” e reutilizar as outras ferramentas do *Cabri 3D*, além de introduzir a noção de pirâmide.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** a construção se dá por meio da mobilização de noções de quadrado, reta perpendicular, ponto e pirâmide.
- **Regras-de-ação:** devemos criar um quadrado no plano de base, em seguida, uma reta perpendicular ao plano de base que passe pelo centro do quadrado para depois com a ferramenta “pirâmide” clicar no quadrado e em um ponto qualquer da reta perpendicular (Figura 63) que será o vértice *V* da pirâmide construída.

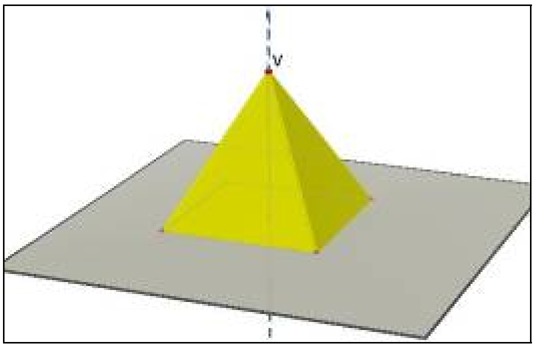


Figura 63. Pirâmide de base quadrada

Análise *a posteriori*

Nesta atividade, a maioria dos estudantes seguiu a mesma sequência de ações da análise *a priori* e realizou a construção satisfatoriamente. O que mostrou que foi usado um esquema similar da *análise a priori*.

Somente uma aluna, Fernanda, desenvolveu uma sequência de ações diferente. Ainda que tenha construído a pirâmide de acordo com as orientações da ficha, suas ações mostraram outro esquema de construção.

Esquema de utilização de Fernanda:

- **Conceitos-em-ato:** Fernanda mobilizou em sua estratégia de construção as noções de quadrado, reta perpendicular, ponto e pirâmide.

- **Regras-de-ação:** criou um quadrado no plano de base e pelo seu centro uma reta perpendicular. Marcou um ponto na perpendicular e por esse ponto criou retas que passam por cada vértice do quadrado (Figura 64(a). Em seguida, para compor as faces da pirâmide, utilizou a ferramenta “polígono” (Figura 64 (b)) e terminou sua construção (Figura 64(c)).

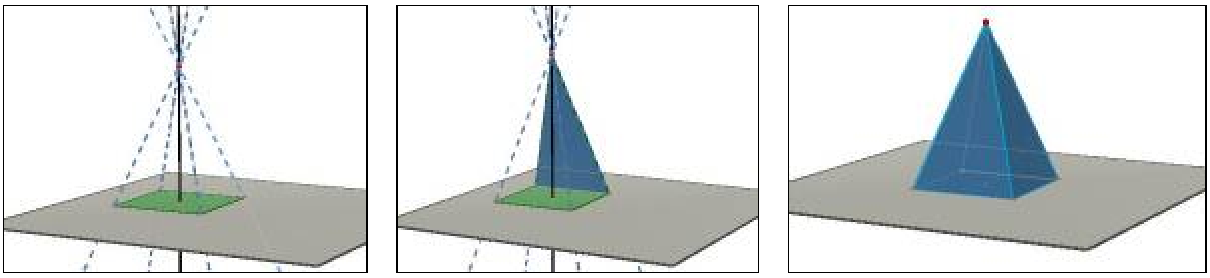
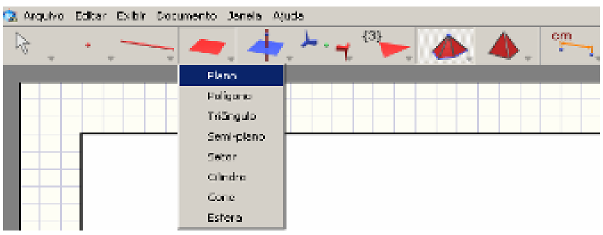


Figura 64. Pirâmide construída por Fernanda

Esta estratégia de construção mostrou que a aluna utilizou esquemas preexistentes, já que relacionou as arestas da pirâmide com as quatro retas concorrentes e as fases da pirâmide com triângulos. No sentido de Duval (2002), Fernanda visualizou a figura, porque a visualização baseia-se na produção de uma representação semiótica que organiza relações entre os elementos estruturais da figura. Além disso, Fernanda e outros estudantes utilizaram, também, a função “ajuda” (*F1*) e o recurso “atributos” para mudar a cor da figura.

Atividade 9: corpos redondos

Construir: um cilindro, um cone e uma esfera.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_9

Análise *a priori*

A atividade visa à exploração das ferramentas e das noções de cilindro, cone e esfera.

Apresentamos os prováveis *esquemas de utilização* na construção do cilindro, cone e esfera respectivamente.

Esquemas de utilização:

Cilindro [1]

- **Conceitos-em-ato:** a construção mobiliza noções de ponto, segmento e cilindro.
- **Regras-de-ação:** criar um segmento e um ponto no plano de base, como mostra a Figura 65(a); depois, para a construção, devemos utilizar a ferramenta “cilindro”.

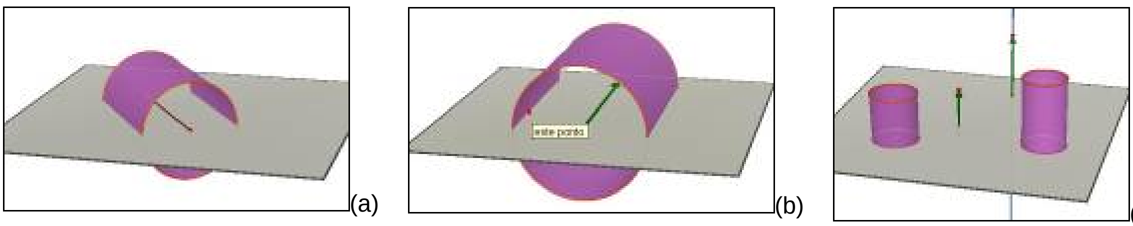
Cilindro [2]

- **Conceitos-em-ato:** são mobilizadas as noções de ponto, vetor e cilindro.
- **Regras-de-ação:** criar um vetor e um ponto no plano de base (Figura 65(b)) acionar e utilizar a ferramenta “cilindro”.

Cilindro [3]

- **Conceitos-em-ato:** a construção ocorre pela mobilização das noções de circunferência, reta perpendicular e vetor.
- **Regras-de-ação:** criar uma circunferência no plano de base e um vetor no espaço ou em uma reta perpendicular (Figura 65(c)); em seguida, criar a figura com a ferramenta cilindro.

Qualquer uma das três construções pode ser feita, já que os alunos podem usar as ferramentas que conhecem como, por exemplo, segmento, reta, vetor e circunferência.



(a) (b) (c)

Figura 65. Diferentes maneiras de construir um cilindro com *Cabri 3D*

Para o cone, temos os prováveis *esquemas de utilização*:

Cone [1]: construção de um cone a partir de um ponto no espaço

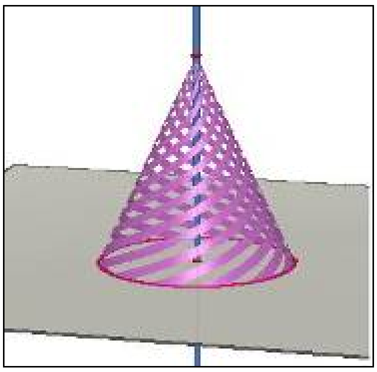
- **Conceitos-em-ato:** neste caso, o aluno pode mobilizar as noções de circunferência e ponto.
- **Regras-de-ação:** criar uma circunferência no plano de base, ativar a ferramenta “cone”, clicar na circunferência e pressionar a tecla *Shift* para deslocar verticalmente o vértice do cone.

Cone [2]: construção de um cone a partir de uma reta perpendicular

- **Conceitos-em-ato:** o aluno deve mobilizar as noções de circunferência, reta perpendicular e ponto para construir um cone a partir de uma reta perpendicular.
- **Regras-de-ação:** criar uma circunferência, uma reta perpendicular ao plano de base, passando pelo centro da circunferência criada; depois ativar a ferramenta cone e clicar na circunferência e em um ponto qualquer da reta (Figura 66(a)).

Cone [3]: construção de um cone a partir de um vetor no espaço

- **Conceitos-em-ato:** os conceitos de circunferência e de vetor no espaço devem ser mobilizados nesse processo de construção.
- **Regras-de-ação:** criar a circunferência e um vetor no espaço (Figura 66(b)), o vetor pode ser ou não perpendicular ao plano de base. Ativar a ferramenta “cone” e clicar na circunferência e no vetor.


(a)

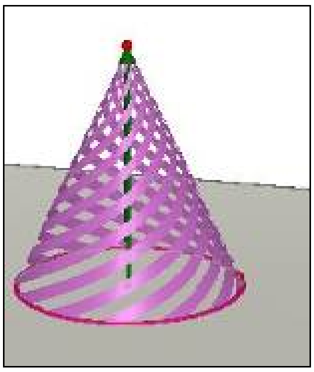

(b)

Figura 66. Cone passando por uma reta perpendicular e a partir de um vetor

Os alunos podem usar estratégias diferentes para construir o cone, contudo elas sempre devem ter como base uma circunferência.

Finalmente, para construir a esfera, temos os prováveis *esquemas de utilização a priori*:

Esfera [1]: esfera dado centro e um ponto

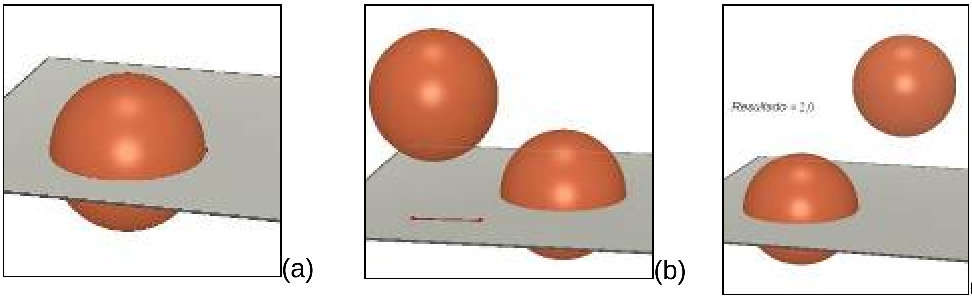
- **Conceitos-em-ato:** mobilizamos as noções de raio para criar uma esfera, dados o centro e um ponto.
- **Regras-de-ação:** para criar a figura, devemos utilizar a ferramenta "esfera", clicar duas vezes, arrastando o mouse sobre o plano de base ou no espaço. (Figura 67(a))

Esfera [2]: esfera dado o centro e um segmento (compasso)

- **Conceitos-em-ato:** para a construção da esfera, as noções de segmento e raio são mobilizadas.
- **Regras-de-ação:** criar um segmento qualquer no plano de base, depois com a ferramenta "esfera", clicar no segmento que será o raio da esfera e movimentar o mouse para qualquer ponto do plano de base ou do espaço para validar a construção. (Figura 67(b))

Esfera [3]: esfera dados o centro e um raio

- **Conceitos-em-ato:** neste caso, para criar uma esfera, as noções de ponto e de raio (medida do raio com a ferramenta "calculadora"), são mobilizadas.
- **Regras-de-ação:** criar um ponto – pode ser no plano de base ou no espaço – utilizar a ferramenta "calculadora" e digitar um número qualquer. Ativar a ferramenta "esfera" e criar a esfera com centro no ponto e de raio o número dado. (Figura 67(c))



(a) (b) (c)

Figura 67. Construção da esfera com segmento e calculadora

Análise *a posteriori*

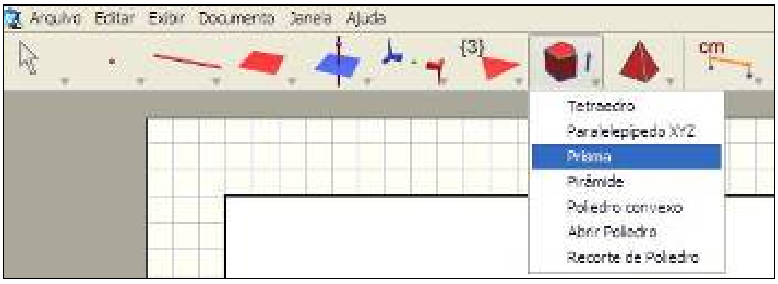
Para a construção do cilindro, cone e esfera, os estudantes utilizaram a função “ajuda” (*F1*) e, assim, perceberam que o *Cabri 3D* oferece várias maneiras de construir cada figura. Nas ações dos alunos, observamos que usaram as ferramentas já trabalhadas nas atividades anteriores, como segue:

- Para construir o cilindro, a maioria dos estudantes adotou a estratégia que havíamos previsto na análise *a priori*, isto é, foi usado um esquema similar ao esquema: cilindro [1]. Criaram uma circunferência no plano de base e um vetor no espaço ou em uma reta perpendicular.
- No caso do cone, os estudantes fizeram a construção, conforme a análise *a priori,* posto que o esquema de utilização empregado por eles foi similar ao esquema: cone [2].
- Na construção da esfera, os estudantes seguiram a mesma sequência de ações que usamos na análise *a priori* (Figura 67(a)), isto é, empregaram um esquema similar ao esquema: esfera [1].

As atividades permitem que consideremos que os alunos estão *instrumentados* nas ferramentas usadas, pois não apresentaram dificuldades em sua realização, talvez pelo fato de empregarem esquemas similares aos previstos na análise *a priori*.

Atividade 10: prisma

Criar um polígono qualquer no plano de base. Criar um ponto A no plano de base. Pelo ponto A, criar uma reta perpendicular ao plano de base. Escolher um ponto B na reta. A seguir, criar o vetor de origem A e extremidade B. Finalmente, criar um prisma clicando no polígono e no vetor.



🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_10

Análise *a priori*

Esta atividade tem como objetivo usar a ferramenta “prisma”, além do emprego das ferramentas vistas nas atividades anteriores.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** as noções de polígono, ponto, reta perpendicular e vetor devem ser mobilizadas para fazer a construção.
- **Regras-de-ação:** para construir a figura, devemos criar um polígono (regular ou não) no plano de base, uma reta perpendicular ao plano de base, marcar o ponto de interseção da reta com o plano, para depois criar um vetor nessa reta; com a ferramenta “prisma”, clica-se no polígono e no vetor para validar a construção (Figura 68).

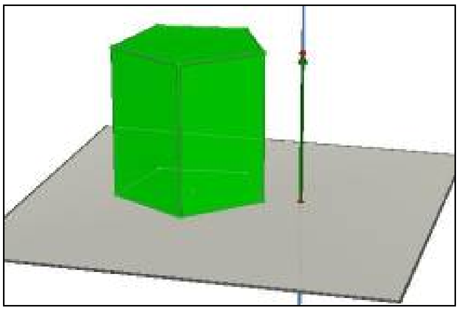


Figura 68. Construção de um prisma

Análise *a posteriori*

Na atividade, os estudantes realizaram a construção sem apresentar dificuldades e seguiram a mesma sequência das ações da análise *a priori*. Alguns continuaram utilizando a função “ajuda” (*F1*) e do mesmo modo que, nas atividades anteriores, o recurso "atributos" foi usado. Podemos afirmar que o processo de instrumentação aconteceu.

Segundo encontro

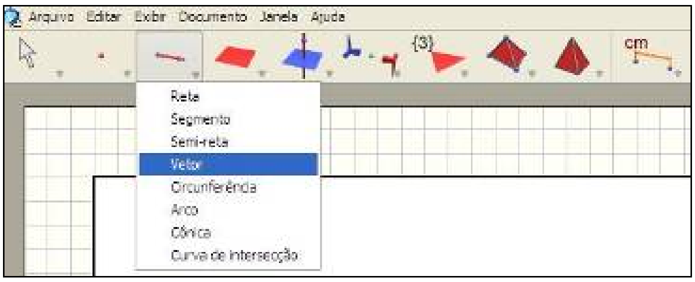
Todas as atividades desse encontro foram analisadas, empregando a abordagem Instrumental de Rabardel (1995b), segundo o modelo SAI, a fim de descrever, os prováveis conceitos-em-ato e as regras-de-ação, mobilizados para realização das atividades, isto é, indicar os prováveis *esquemas de utilização*.

Na análise *a posteriori*, descrevemos, de maneira geral, as ações e os conceitos matemáticos mobilizados, para verificar se os esquemas usados pelos alunos aproximavam-se dos pressupostos ou se novos *esquemas de utilização* foram criados.

Assim, centraremos a citada análise nas atividades de translação, simetria axial, reflexão e rotação, segundo a abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) e os Registros de Representação Semiótica de Duval (1995). Logo, na análise dessas atividades, descrevemos as ações de cada estudante, para, em seguida, analisar os esquemas mobilizados por eles, suas estratégias e quais apreensões das figuras eles têm quando realizam as atividades.

Atividade 1: translação

Criar um cubo e um vetor no plano de base.



A seguir, use a ferramenta "translação" para transformar o cubo em um outro cubo.

- Observe e descreva as características da ferramenta **"translação".**

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Análise *a priori*

Objetivamos utilizar a ferramenta “translação” do *Cabri 3D* para transladar uma figura tridimensional e introduzir a noção de translação no espaço.

Pressupusemos que os alunos desenvolvessem um esquema similar ao abaixo detalhado, já que a atividade era orientada para tal. (Figura 69)

Esquemas de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** as noções de poliedro (cubo), vetor e translação devem ser mobilizadas para esta atividade.
- **Regras-de-ação:** apresentamos nos dados do Quadro 39 uma provável sequência de ações para realização da atividade.

Quadro 39. Possível sequência de ações da atividade “translação”

Primeira atividade: translação			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de poliedros regulares
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cubo
3	Clica/manipula	Mouse/ferramenta cubo	Cubo
4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Cubo (validar)
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta do vetor
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
8	Clica/manipula	Botão esquerdo/ferramenta vetor	Vetor (ponto, vetor, ponto/validar).
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
11	Clica	Ferramenta translação	Cubo
12	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação do cubo)
13	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a translação

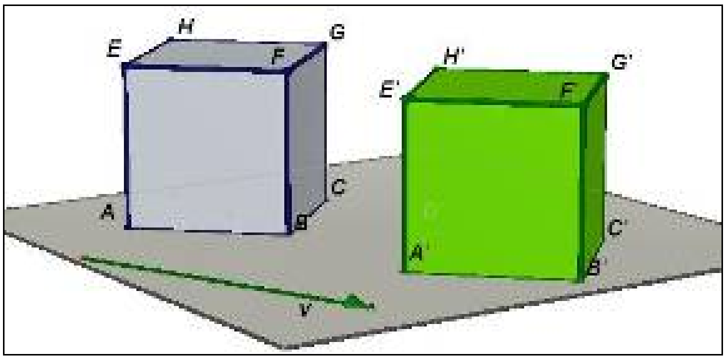


Figura 69. Translação do cubo

Análise *a posteriori*

Ações de Andreya: a estudante criou um cubo e um vetor no plano de base. Em seguida, (Figura 70) usou a ferramenta “distância” para medir a aresta (2,4cm).

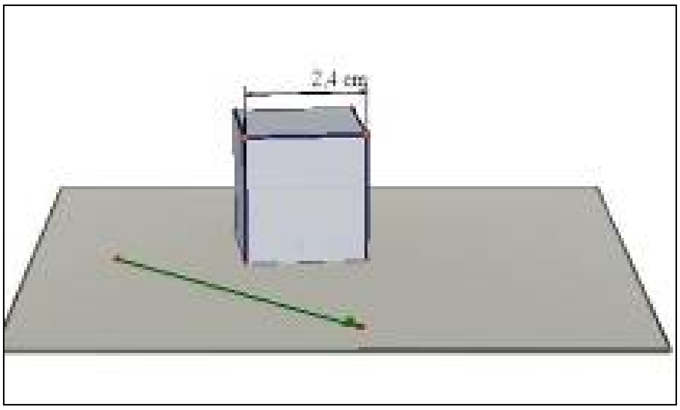


Figura 70. Medida de uma aresta do cubo

Depois, mediu o vetor (7,1 cm) e acionou o recurso “ajuda” (F1) e a ferramenta “translação” e transladou o cubo, segundo o vetor criado. (Figura 71)

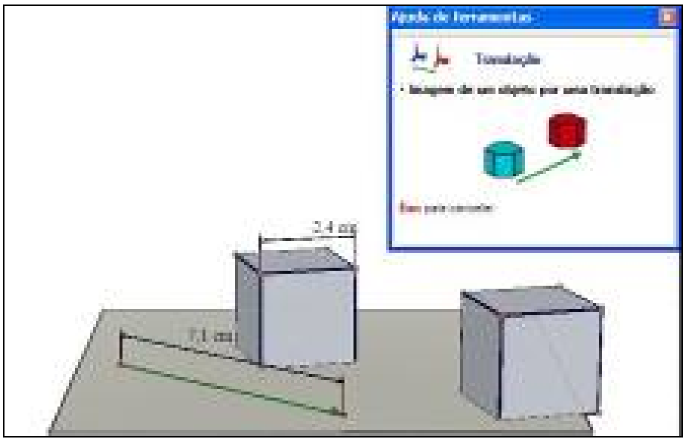


Figura 71. Translação do cubo realizada por Andreya

Para verificar se o cubo obtido era congruente ao primeiro, Andreya utilizou outra vez a ferramenta “distância” (Figura 72), mediu o comprimento da aresta do cubo transladada. Verificou que as arestas dos dois cubos tinham o mesmo comprimento.

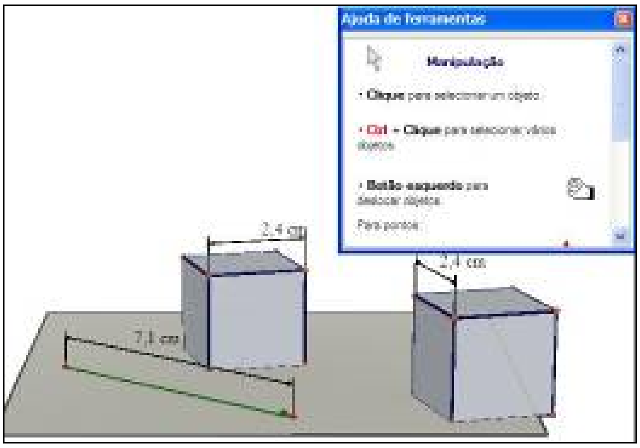


Figura 72. Medida do vetor e da aresta dos cubos

Em seguida (Figura 73), a aluna manipulou manualmente o tamanho do cubo original e usou o recurso “mudar de vista” (botão direito do mouse) para verificar se sua construção estava correta.

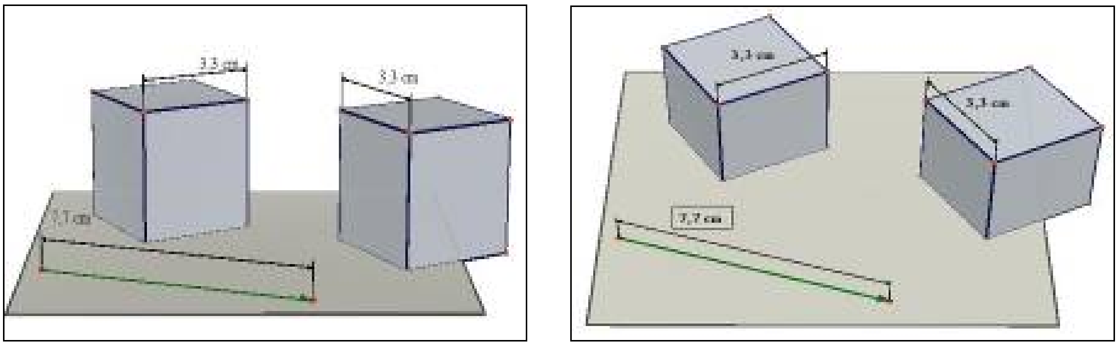


Figura 73. Andreya verifica sua construção

Ações de Pedro: utilizou a ferramenta “cubo” do *Cabri 3D* e criou um cubo no plano de base e com a ferramenta “vetor” criou um vetor nele. Em seguida, usou a ferramenta “translação” e clicando no cubo e no vetor realizou a translação do cubo criado. O aluno usou o recurso “ajuda de ferramentas” assim que começou a atividade. Por fim, valeu-se dos “atributos” para mudar a cor dos cubos e do vetor (Figura 74). Pedro assinalou: *mudei as cores, porque assim posso diferenciar qual é o cubo original e qual é o transladado*. Além disso, mudou o ponto de vista do observador, para ver a figura de diferentes posições.

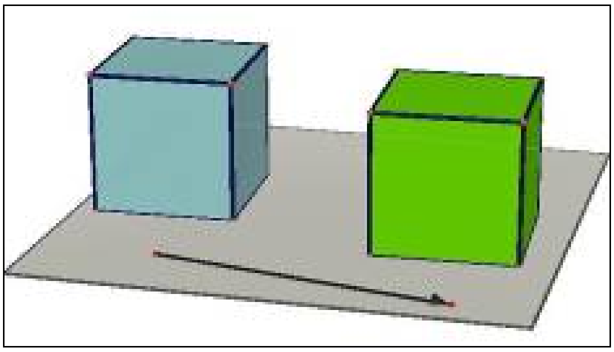


Figura 74. Translação do cubo realizada por Pedro

Ações de Carlos: da mesma forma que os outros alunos observados, Carlos utilizou o recurso ajuda para realizar esta atividade. Criou um cubo e um vetor no plano de base e com a ferramenta “translação” (Figura 75) transladou o cubo. Observamos que Carlos manipulou manualmente o comprimento e direção do vetor, somente depois de manipulá-lo, escreveu: *cubo 1 e cubo transladado*.

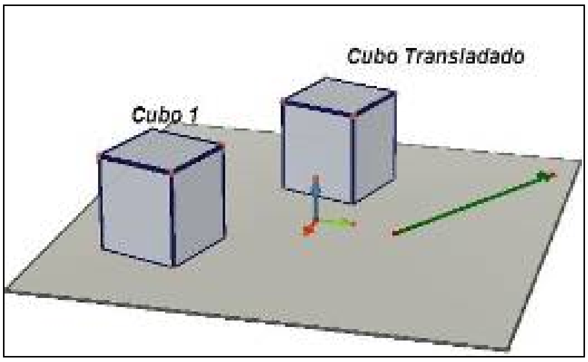


Figura 75. Translação do cubo realizada do Carlos

Análise das ações

Os três alunos observados desenvolveram basicamente a mesma sequência de ações que tínhamos previsto para esta atividade. Além disso, suas ações mostraram que, possivelmente, mobilizaram seus *esquemas preexistentes* de Geometria Plana, isto é, mobilizaram noções de translação já que não apresentaram dificuldades na atividade.

Notamos que Andreya utilizou a caixa de ferramentas “medida”, tanto para medir o comprimento da aresta do cubo como para o vetor, o que nos fez pensar que a métrica está fortemente presente. Os *esquemas de utilização* de cada um dos estudantes permitiram a organização de suas ações, isto é, gerar ações necessárias para usar os instrumentos, fato que observamos, por exemplo, quando a aluna Andreya repetiu suas ações (medir o cumprimento da aresta e do vetor), quando Pedro mudou a cor o cubo transladado e quando Carlos nomeou os cubos. Além disso, essas ações mostraram que eles já estavam instrumentados nas citadas ferramentas, porque foram além do solicitado na atividade.

Observamos, também, que os estudantes utilizaram o recurso (*F1*) “ajuda de ferramentas”. O uso corrente desse recurso e das ferramentas “cubo” e “vetor” nos permitiram inferir que eles já deixaram de ser artefatos e transformaram-se em instrumentos. Nesse sentido, a apropriação das noções Matemáticas envolvidas na translação, bem como as ferramentas do *Cabri 3D* escolhidas para a atividade fazem com que consideremos que os instrumentos para cada um deles estão sendo construídos no uso.

Na sequência de ações de Andreya, Pedro e Carlos, ressaltamos que os instrumentos construídos por eles, no sentido de Rabardel (1995b), e os objetos não permaneceram fixos, porque as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, às vezes, servem de instrumento e, às vezes, de objeto. Fato que também aconteceu na sequência de ações *a priori* de nossa análise. (Quadro 39)

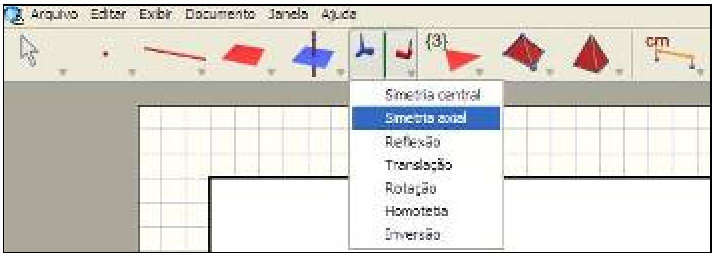
Inferimos que a *instrumentação* com as ferramentas usadas pelos estudantes nessa atividade aconteceu, porque eles foram descobrindo as possibilidades do uso desse artefato, explorando e apropriando-se das ferramentas e recursos do *Cabri 3D*.

A atividade permitiu aos alunos transferirem sua noção de translação do plano para o espaço, porque não apresentaram dificuldades na construção, o que mostra que estavam *instrumentados* nessa noção, além de levá-los a desenvolver a *apreensão perceptiva,* pois reconheceram de forma direta os objetos matemáticos: cubo e vetor. Também podemos afirmar que o mesmo aconteceu com a *apreensão operatória* (modificação posicional) definida por Duval (1995), pois, por exemplo, tanto Carlos como Pedro mudaram de direção e de comprimento o vetor (manipulação direta) e observaram a mudança de posição da imagem do cubo no plano de base; pensamos que eles podem ter intuído que a direção e o sentido da imagem do cubo dependem do vetor (elemento invariante da translação).

Verificamos esse fato, também, quando Pedro mudou a cor do cubo imagem. Assinalamos a vantagem que o *Cabri 3D* (dinamismo) apresenta, para que os alunos criem conjecturas sobre as propriedades dessa transformação.

Atividade 2: simetria axial

Criar um tetraedro regular e uma reta no plano de base. A seguir, use a ferramenta “simetria axial” para transformar o tetraedro regular em um outro tetraedro regular.



- Observe e descreva as características da ferramenta **“simetria axial”.**

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

Análise *a priori*

A atividade tem por objetivo construir um tetraedro regular simétrico (reflexão em relação a uma reta) por meio da utilização da ferramenta “simetria axial” do *Cabri 3D*, além de introduzir a noção de simetria axial no espaço.

Esquemas de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** são mobilizadas as noções de poliedro (tetraedro regular), reta e simetria axial.
- **Regras-de-ação:** nos dados do Quadro 40, mostramos uma provável sequência de ações. São criados um tetraedro regular e uma reta no plano de base (Figura 76); em seguida, ativando a ferramenta “simetria axial” o simétrico do tetraedro regular é criado.

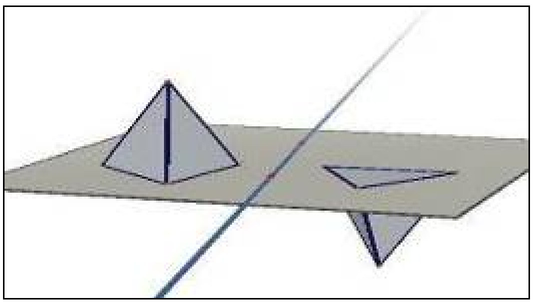


Figura 76. Simetria axial de um tetraedro regular

Quadro 40. Possível sequência de ações da atividade “simetria axial”

Segunda atividade: simetria axial			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas poliedros regulares
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta tetraedro regular
3	Clica/manipula	Mouse/ferramenta tetraedro regular	Tetraedro regular no plano de base
4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Tetraedro regular (validar)
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta reta
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta reta
8	Clica/manipula	Mouse/ferramenta reta	Reta no plano de base (criar)
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta simetria axial
11	Clica	Ferramenta simetria axial	Reta no plano de base
12	Clica	Ferramenta simetria axial	Tetraedro regular (validar tetraedro simétrico)
13	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a simetria axial

Provavelmente, os estudantes apresentem dificuldade, no que tange à posição do tetraedro – virado para baixo do plano de base (Figura 76) porque essa transformação quando realizada no plano é visualmente diferente para eles.

Análise *a posteriori*

Ações de Andreya: criou no plano de base um tetraedro regular e uma reta do *Cabri 3D* (Figura 77); em seguida, usou a ferramenta “simetria axial”, obtendo um novo tetraedro na parte inferior ao plano de base.

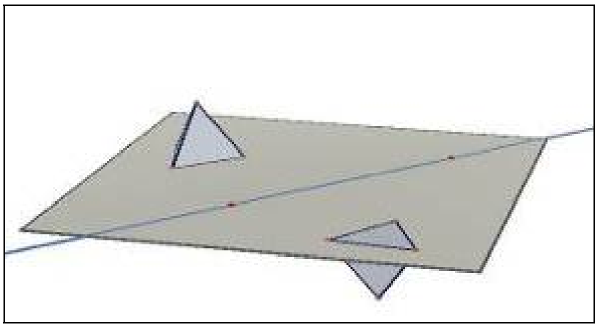


Figura 77. Simetria axial realizada por Andreya

A estudante observou sua construção, mas como não se convenceu do resultado, repetiu o procedimento e o mesmo tetraedro apareceu na parte inferior. Em vista disso, chamou o professor, ao mostrar sua construção, questionou: *Por que o tetraedro não fica na parte de cima? O* professor explicou que a construção estava correta, o tetraedro assumia essa posição, pois a simetria axial do tetraedro regular foi realizada em relação a uma reta contida no plano de base.

Depois, Andreya questionou mais uma vez: como posso deixar esse tetraedro na parte superior? O professor sugeriu que ela explorasse outras posições da reta em relação ao plano de base. Em seguida, com a ferramenta “perpendicular”, a aluna criou uma reta perpendicular ao plano de base e repetiu o procedimento anterior (Figura 78) construindo um tetraedro simétrico ao primeiro em relação à reta perpendicular ao plano de base. Esta vez ela não questionou e tomou, como correta sua construção.

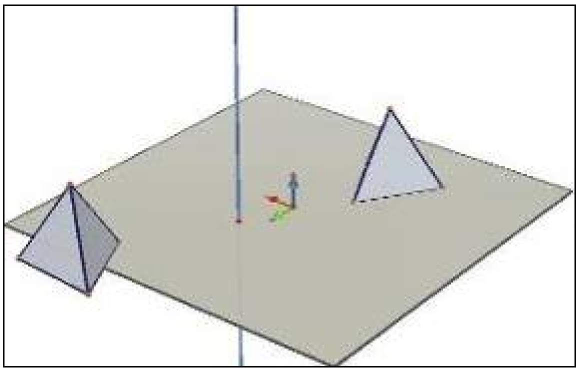


Figura 78. Simetria axial em relação a uma reta perpendicular realizada por Andreya

Continuando o desenvolvimento da atividade, criou uma reta, passando pelos vértices superiores dos dois tetraedros, marcou o ponto de interseção dessa reta com a perpendicular e, em seguida, com a ferramenta de medida “distância”, mediu a distância entre cada vértice e a perpendicular criada anteriormente (Figura 79). Por fim, utilizou o recurso “manipulação” para mudar o ponto de vista e finalizou a atividade.

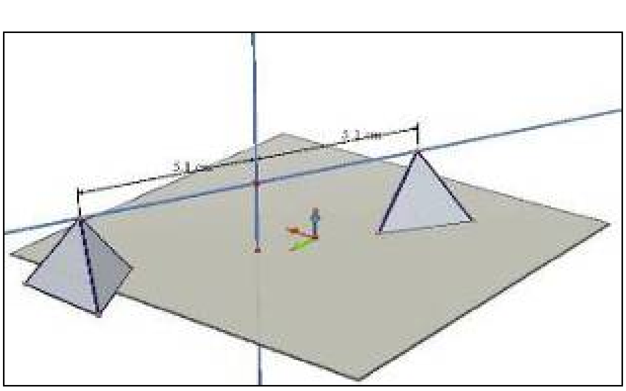


Figura 79. Simetria axial com medida de distância

As ações realizadas por Andreya seguiram a mesma sequência de construção que tínhamos previsto na análise *a priori*.

Ações de Pedro: com a ferramenta “tetraedro regular”, o estudante criou o tetraedro no plano de base, após criou uma reta no mesmo plano; entretanto a reta criada por ele passava por uma aresta da base do tetraedro regular. Depois disso, usou a ferramenta “simetria axial”, clicou no tetraedro e na reta e criou o tetraedro simétrico ao anterior. Embora Pedro tivesse observado que a imagem do tetraedro regular tinha ficado virada (Figura 80), não questionou porque aconteceu isso nem fez outra manipulação na figura, somente mudou o ponto de vista (botão direito do mouse) para ver o tetraedro simétrico em outra posição.

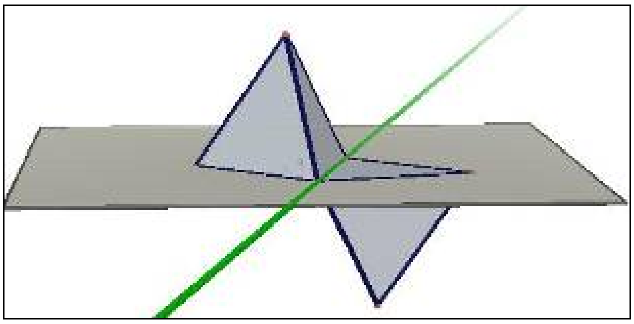


Figura 80. Simetria axial realizada por Pedro

Ações de Carlos: criou um tetraedro regular e uma reta no plano de base. Em seguida, mudou a posição da reta várias vezes e usou a ferramenta “simetria axial”, para construir o tetraedro simétrico ao primeiro (Figura 81). Assinalamos que empregou o recurso “atributos”, para mudar as cores das figuras e, também, o botão direito do mouse para ver de distintas posições sua construção.

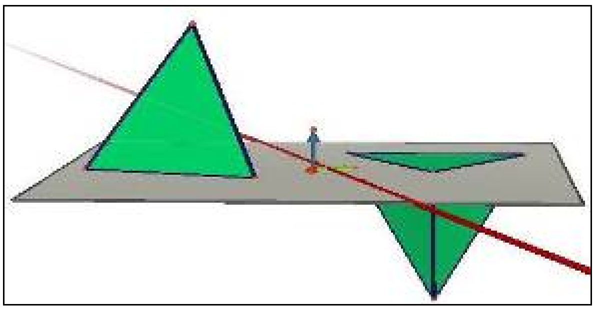


Figura 81. Simetria axial realizada por Carlos

Contudo, sem ser pedido na atividade, Carlos repetiu (Figura 82) o mesmo procedimento com um cubo. Após isso, pareceu convencido de que sua construção estava correta.

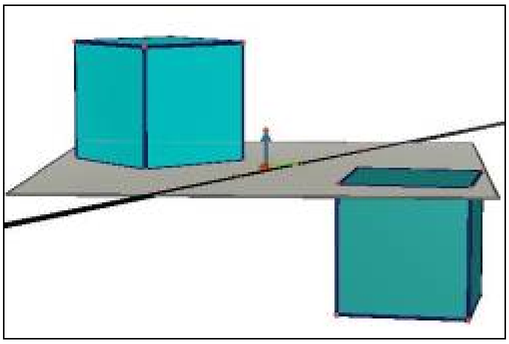


Figura 82. Simetria axial do cubo realizada por Carlos

Análise das ações

De acordo com as ações dos estudantes, pensamos que cada um deles tinha criado um esquema similar ao da análise *a priori*, porque a atividade, que tinha um “roteiro” foi orientada para isso. Assim, Pedro seguiu os passos que a atividade indicava, mas a diferença com a *análise a priori* foi que ele posicionou a reta de tal maneira que passasse por uma aresta da figura.

No caso de Carlos, podemos inferir que ele também utilizou um esquema similar ao previsto na análise *a priori,* posto que não convencido com o resultado da atividade, repetiu o mesmo procedimento com o cubo. Assim, a repetição da mesma estratégia com outra figura nos fez pensar que ele se instrumentou com a ferramenta “simetria axial” e que a noção da simetria axial no espaço estava sendo instrumentada nesse momento.

Acreditamos que Andreya empregou um *esquema de utilização* diferente da análise *a priori,* porque questionou o motivo do tetraedro estar “virado” abaixo do plano (Figura 77). Ela esperava que o tetraedro simétrico obtido fosse se posicionar na parte superior ao plano de base, o que não se verificou, fato que a levou a elaborar outra estratégia. Isso nos fez conjecturar que ela mobilizou seu esquema preexistente de noção de simetria axial, desenvolvido no ambiente de lápis e papel e um novo *esquema de utilização* de simetria axial no espaço, foi criado na interação com o *Cabri 3D*.

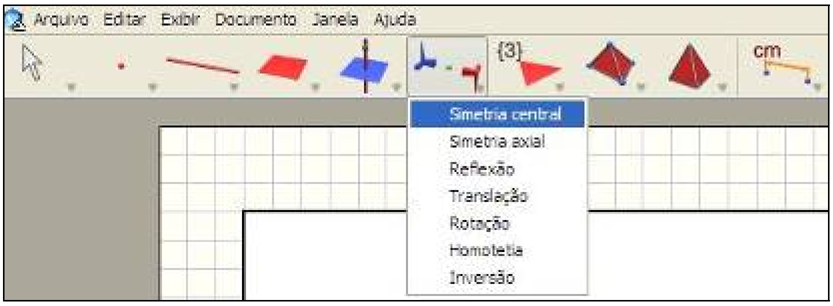
A surpresa demonstrada pela estudante Andreya quando o tetraedro simétrico apareceu na parte inferior do plano de base. Isso nos levou a pensar que a representação obtida no *Cabri 3D* foi diferente da representação mental produzida pela aluna. Depois, quando criou uma reta perpendicular ao plano de base, a estudante mediu a distância entre os tetraedros para “verificar” se a reta se mantinha e validou que, no plano e no espaço, a simetria axial tem as mesmas propriedades.

Pelas estratégias de Andreya e dos outros estudantes – quanto ao uso do *Cabri 3D* e, os conhecimentos geométricos mobilizados –, deram-nos indícios de que as Gêneses Instrumentais estavam acontecendo nos três alunos, porque suas ações mostraram que já estavam instrumentados no uso das ferramentas “tetraedro regular”, “reta” e “simetria axial”. Além disso, pelas ações dos três alunos inferimos que a noção de simetria axial no espaço foi introduzida de maneira intuitiva.

Por parte dos três alunos, podemos assinalar que houve evidência da apreensão perceptiva da figura – tetraedro regular e de reta –, segundo Duval (1995); da apreensão seqüencial, porque na interação com o *Cabri 3D* seguiram uma ordem de construção para realizar a atividade, isto é, criar um tetraedro regular, uma reta no plano de base e ativar a ferramenta “simetria axial”, entretanto na referida ferramenta a ordem pode variar (clicar no tetraedro e na reta ou vice-versa).

Atividade 3: simetria central

Criar um dodecaedro regular e um ponto no plano de base. A seguir, use a ferramenta “simetria central” para transformar o dodecaedro regular em um outro dodecaedro regular.



- Observe e descreva as características da ferramenta **“simetria central”**.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

Análise *a priori*

A atividade visa à construção de um dodecaedro regular simétrico com relação a um ponto do espaço por meio da ferramenta “simetria central” e introduzir a noção de simetria central no espaço.

Esquemas de *utilização a priori*:

- **Conceitos-em-ato:** para criar o dodecaedro simétrico em relação a um ponto, são mobilizadas as noções de poliedro – dodecaedro – ponto no espaço e simetria central.
- **Regras-de-ação:** nos dados do Quadro 41, apresentamos uma provável sequência de ações. Criamos um dodecaedro regular e um ponto no plano de base. Depois disso, com a ferramenta “simetria central do *Cabri 3D* o simétrico do dodecaedro regular é criado.

Quadro 41. Possível sequência de ações da atividade “simetria central”

Terceira atividade: simetria central			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa poliedros regulares
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta dodecaedro regular
3	Clica/manipula	Mouse/ferramenta dodecaedro regular	Dodecaedro regular no plano de base
4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Dodecaedro regular (validar)
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas ponto
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
8	Clica/manipula	Mouse/ferramenta ponto	Ponto no plano de base (criar)
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta simetria central
11	Clica	Ferramenta simetria central	Ponto (simetria em relação ao ponto)
12	Clica	Ferramenta simetria central	Dodecaedro regular (validar dodecaedro simétrico)
13	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a simetria central

Além do quadro, a Figura 83 mostra a simetria central de um dodecaedro regular em torno ao ponto *A*.

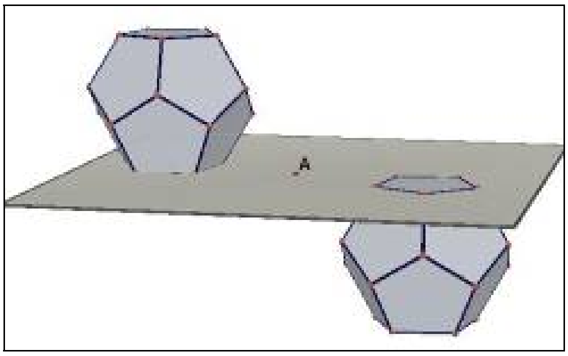


Figura 83. Simetria central de um dodecaedro

Análise *a posteriori*

Durante o desenvolvimento desta atividade, a maioria dos estudantes não apresentou dificuldades, seguiram a mesma sequência de ações e usaram o esquema da análise *a priori*, o que nos fez pensar em *esquemas de utilização* similares aos previstos e, por conseguinte, observamos que, para a maioria, a figura e a ferramenta dodecaedro já eram um *instrumento*, no sentido de Rabardel (1995a). Entretanto, só Patrícia (Figura 84) utilizou a ferramenta de medida “distância” e “reta” para verificar sua construção.

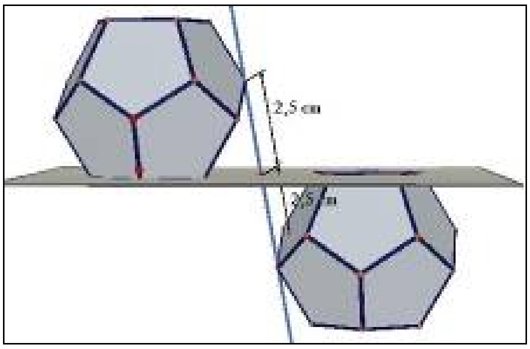


Figura 84. Simetria central realizada por Patrícia

Percebemos que a estudante verificou a propriedade “conservação de distância” da simetria central. Podemos inferir que Patrícia usou seus conhecimentos sobre simetria central no plano para verificar se as propriedades da simetria eram também válidas no espaço, o que pode indicar que mobilizou seus *esquemas preexistentes* de simetria no plano e acomodou-os em uma nova situação no espaço.

Atividade 4: reflexão

Criar uma pirâmide de base quadrada e um plano perpendicular ao plano de base. A seguir, usar a ferramenta “reflexão” para transformar a pirâmide em uma outra pirâmide.

- Observe e descreva as características da ferramenta **“reflexão”**.
- Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma:<nome>_Ativ_4

Análise *a priori*

Na atividade, objetivamos criar uma pirâmide por reflexão em relação a um plano, por meio da ferramenta “reflexão” do *Cabri 3D* e de outras ferramentas trabalhadas anteriormente; e introduzir a noção de reflexão em relação a uma reta no espaço.

Esquemas de *utilização a priori*:

- **Conceitos-em-ato:** nesta atividade, a construção realiza-se por meio da mobilização das noções de quadrado, reta e plano, pirâmide e reflexão.
- **Regras-de-ação:** nos dados do Quadro 42, apresentamos uma provável sequência de ações. Criamos uma pirâmide de base quadrada e uma reta perpendicular ao plano de base que passe pelo centro do quadrado e um plano perpendicular ao plano de base. A imagem da pirâmide, em relação ao plano, é criada (Figura 85).

Quadro 42. Possível sequência de ações da atividade “reflexão”

Quarta atividade: reflexão			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta polígonos regulares
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta quadrado
3	Clica/manipula	Mouse/ferramenta quadrado	Quadrado no plano de base
4	Clica	Ferramenta quadrado	Quadrado (validar)

5	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
6	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
7	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular
8	Clica	Botão esquerdo do mouse	Reta perpendicular no entro do quadrado (validar)
9	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
10	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas poliedros
11	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta pirâmide
12	Clica	Ferramenta pirâmide	Quadrado do plano de base
13	Pressiona/manipula	Tecla Shift/Mouse	Vértice da pirâmide
14	Clica	Botão esquerdo do mouse	Pirâmide (validar)
15	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
16	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
17	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular
18	Clica	Botão esquerdo do mouse	Reta perpendicular (validar)
19	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta plano
20	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta plano
21	Clica	Ferramenta plano	Reta perpendicular
22	Clica	Ferramenta plano	Plano de base (validar o plano)
23	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta transformações
24	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta reflexão
25	Clica	Ferramenta reflexão	Plano perpendicular
26	Clica	Ferramenta reflexão	Pirâmide (validar a reflexão da pirâmide)
27	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a reflexão

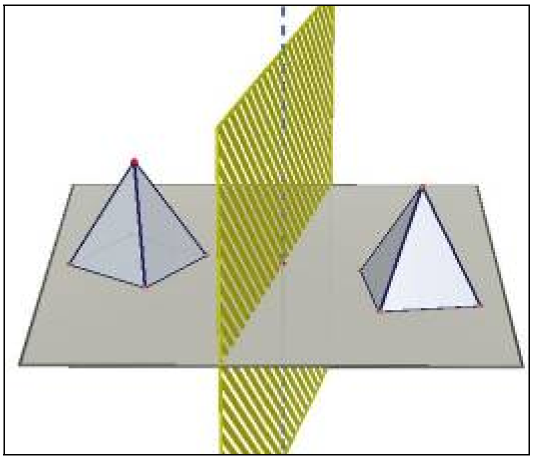


Figura 85. Reflexão de uma pirâmide em relação a um plano

Ações de Andreya: a aluna criou um quadrado no plano de base e um ponto no espaço (vértice da pirâmide). Acionou a ferramenta “pirâmide” e criou a pirâmide. Usando o recurso “mudar de vista”, percebeu que a pirâmide construída estava “torta”. Para torná-la mais “comportada”, manipulou manualmente o vértice (ponto no espaço) até obter uma pirâmide mais reta. Depois, criou uma reta perpendicular ao plano de base e nela, um plano. Acionou a ferramenta “reflexão” e criou a imagem da pirâmide em relação ao plano perpendicular.

A Figura 86 mostra que Andreya criou uma reta passando pelos vértices das pirâmides, mediu a distância de cada pirâmide com o plano usado para a reflexão e utilizou o recurso mudar de vista.

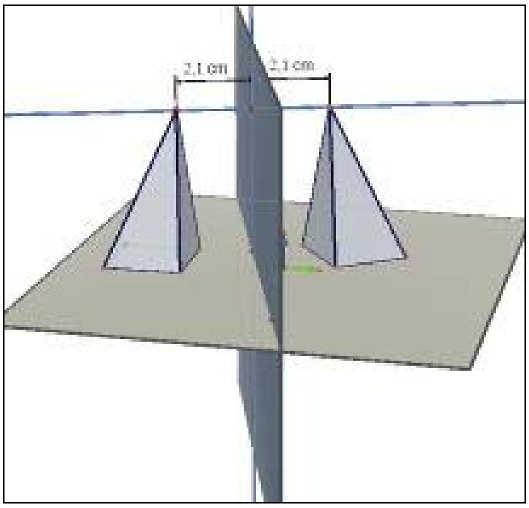


Figura 86. Reflexão de uma pirâmide realizada por Andreya

Ações de Pedro: para construir a pirâmide (Figura 87), Pedro criou um quadrado no plano de base, ativou a ferramenta “pirâmide”, mas não conseguiu criá-la. Após várias tentativas, ativou “ajuda de ferramenta” (F1), usou a tecla *Shift* e criou um ponto no espaço. Outra vez ativou a ferramenta “pirâmide” e conseguiu terminar sua construção.

Depois, criou uma reta perpendicular ao plano de base, utilizou a ferramenta “reflexão” e criou a imagem da pirâmide. Entretanto, quando movimentou o plano de base com o recurso “mudar de vista”, observou que a pirâmide criada e sua imagem não eram regulares[42]. Para fazê-la regular, manipulou manualmente o vértice da pirâmide criada. O aluno disse: *está bizarro!* Após três manipulações (modificou a posição do vértice da pirâmide), assinalou: *agora está melhor,* mudou outra vez o ponto de vista (botão direito do mouse), para verificar sua construção.

[42] Pirâmide regular é aquela cuja base é um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. (DOLCE, 2005, p. 187).

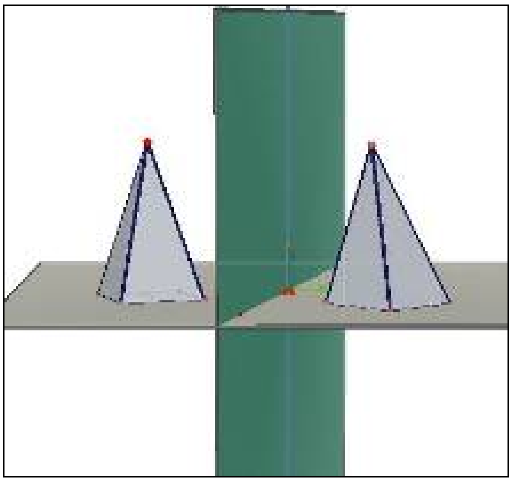


Figura 87. Reflexão realizada por Pedro

Ações de Carlos: o aluno criou uma reta perpendicular ao plano de base, um plano perpendicular nela, um quadrado no plano de base e um ponto no espaço. Ações estas que lhe permitiram construir a pirâmide de base quadrada e o plano perpendicular (Figura 88). Em seguida, com a ferramenta “reflexão” criou a imagem da pirâmide refletida em relação ao plano perpendicular, com “atributos” mudou a cor do plano perpendicular e observou as figuras de diferentes pontos de vista.

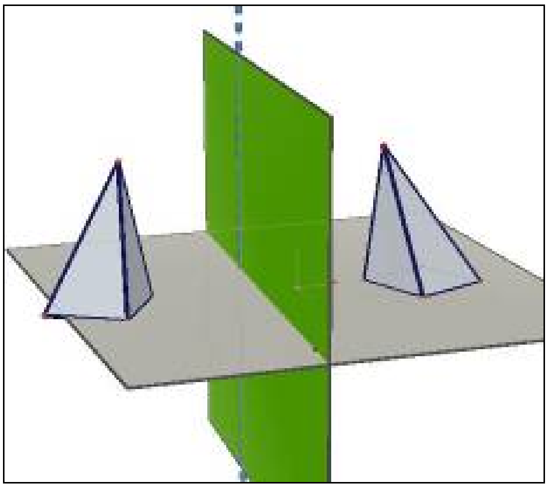


Figura 88. Reflexão de uma pirâmide realizada por Carlos

Análise das ações

As ações dos alunos observados mostraram que utilizaram esquemas similares aos da análise *a priori* (Quadro 42). Isso aconteceu, porque a maneira como foi apresentada a atividade, com uma sequência de ações preestabelecidas, permitia dificilmente que esquemas diferentes fossem criados.

Embora os três estudantes utilizassem o quadrado como base da pirâmide e a ferramenta “reflexão”, cada um deles empregou diferentes estratégias para realizar a atividade, isto é, criaram no uso distintos *esquemas de utilização* na construção da pirâmide.

Andreya, por exemplo, empregou o recurso “mudar de vista”, que lhe permitiu perceber que a pirâmide, como ela assinalou, estava “torta”, além disso, mediu a distância de cada pirâmide com o plano perpendicular ao plano de base. Observamos que, como em outras atividades, Andreya mobilizou seus conhecimentos de Geometria Plana – esquemas preexistentes, talvez de simetria axial – e adaptou-os à situação espacial. Pedro não empregou a reta perpendicular, usou ponto no espaço para criar o vértice da pirâmide, o que indica que ele estava *instrumentado* na criação do ponto no espaço. As ações de Carlos nos fizeram inferir que ele criou um esquema similar ao *esquema de utilização* de Pedro.

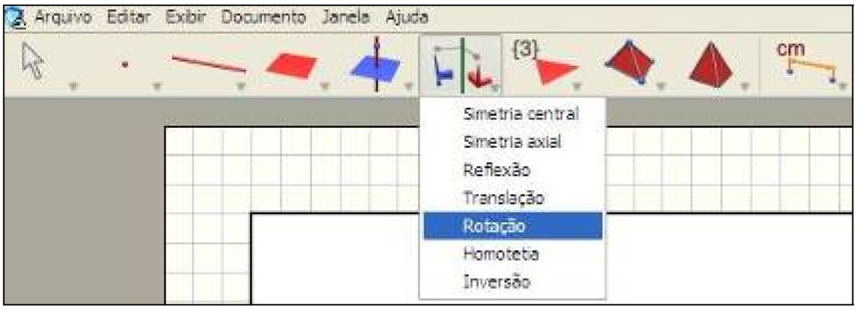
Pensamos que Andreya, Pedro e Carlos acomodaram seus *esquemas de utilização* que, de acordo com Rabardel (1995a), o processo de instrumentação aconteceu a respeito do emprego da ferramenta “reflexão” do *Cabri 3D* e da noção de reflexão.

Podemos assinalar que, por parte dos três alunos, houve evidências da apreensão perceptiva da figura, segundo Duval (1995), porque mobilizaram a noção, por exemplo, de tetraedro regular e de reta; da apreensão sequencial, porque na interação como o *Cabri 3D* seguiram uma ordem de construção para realizar a atividade, isto é, criar um tetraedro regular, uma reta no plano de base e ativar a ferramenta “simetria axial”; entretanto, na citada ferramenta a ordem pode variar (clicar no tetraedro e na reta ou vice-versa).

Por parte dos três alunos, apontamos a evidência da apreensão sequencial, pois seguiram a sequência de passos assinalada na atividade. Também, a apreensão perceptiva, isto é, eles identificaram e/ou reconheceram o objeto matemático: pirâmide de base quadrada. Por isso, apontamos que os alunos limitaram-se à percepção visual da figura, segundo Duval (2002).

Atividade 5: rotação de um triângulo

Criar um ponto *O* no plano de base e uma reta perpendicular ao plano de base, passando pelo ponto *O*. A seguir, crie dois pontos *A* e *B* no plano de base e um triângulo equilátero. Utilizando a ferramenta “rotação”, gire o triângulo em torno da reta sob um ângulo de medida *AOB*. (clicar na reta, no triângulo e nos pontos *A* e *B*)



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

Análise *a priori*

A atividade visa à utilização da ferramenta “rotação” do *Cabri 3D* e das outras ferramentas e recursos já utilizados nas atividades anteriores e a introdução da noção de rotação em torno de uma reta (eixo), segundo um ângulo de rotação.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** as noções mobilizadas para a construção são ponto, reta perpendicular, triângulo, ângulo e rotação.
- **Regras-de-ação:** são apresentadas, em detalhe, nos dados do Quadro 43, de acordo com a tabela do modelo SAI. No plano de base, são criados um triângulo equilátero e uma reta perpendicular. O ponto *O*, intersecção da reta com o plano e os pontos *A* e *B* e um triângulo qualquer no plano de base também são criados (Figura 89); por fim, rotaciona-se o triângulo em torno da reta (eixo) sob o ângulo *AOB*.

Quadro 43. Possível sequência de ações da atividade “rotação de um triângulo”

Quinta atividade: rotação de um triângulo			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
3	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
4	Clica/manipula	Mouse/ferramenta ponto	Ponto no plano de base

5	Digita	Tecla Shift/letra O	Nomear o ponto O
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular (reta)
8	Clica	Ferramenta perpendicular (reta)	Reta perpendicular (passando pelo ponto O)
9	Clica	Botão esquerdo do mouse	Reta perpendicular (validar)
10	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
11	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
12	Clica	Ferramenta ponto	Ponto no plano de base
13	Digita	Tecla Shift/letra A	Nomear o ponto A
14	Clica	Ferramenta ponto	Ponto no plano de base
15	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
16	Digita	Tecla Shift/letra B	Nomear o ponto B
17	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta polígonos
18	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta triângulo equilátero
19	Clica/manipula	Ferramenta triângulo equilátero	Triângulo equilátero
20	Clica	Ferramenta triângulo equilátero	Triângulo equilátero (validar)
21	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta transformações
22	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta transformações
23	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
24	Clica	Ferramenta rotação	Reta perpendicular
25	Clica	Ferramenta rotação	Triângulo equilátero
26	Clica	Ferramenta rotação	Ponto A
27	Clica	Ferramenta rotação	Ponto O
28	Clica	Ferramenta rotação	Ponto B (validar rotação segundo o ângulo AOB)
29	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a reflexão

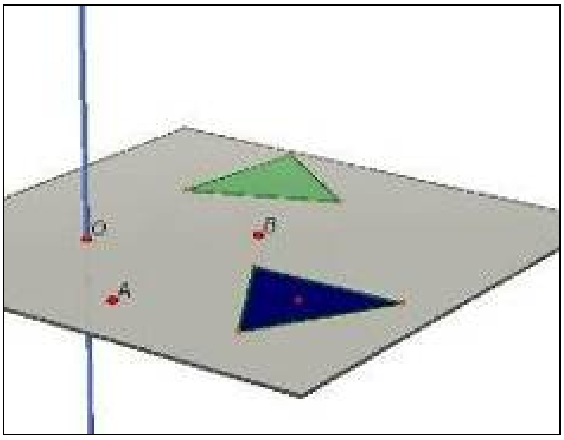


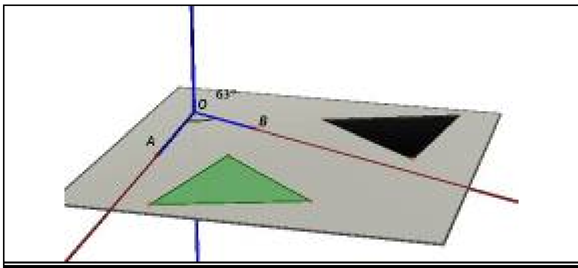
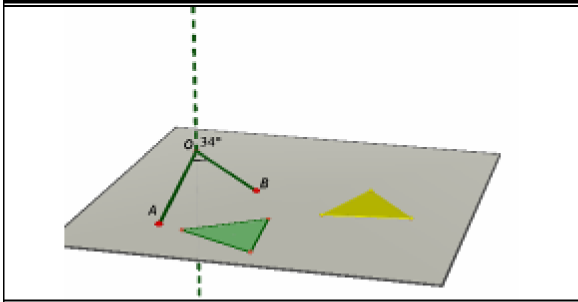
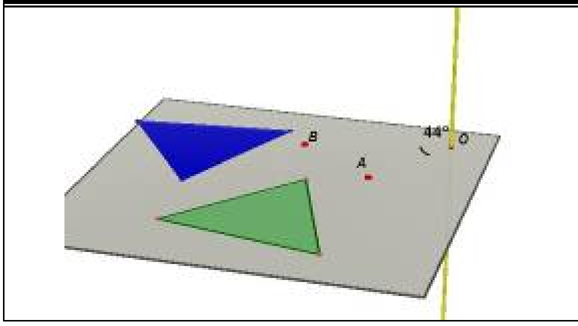
Figura 89. Rotação de um triângulo em torno de uma reta, segundo o ângulo *AOB*

Análise *a posteriori*

Na atividade, os estudantes trabalharam, conforme o previsto na análise *a priori* sem apresentar dificuldades. Além do mais, alguns adicionaram elementos novos, como é o caso dos estudantes: Pedro, Francisco e Patrícia que utilizaram o recurso "atributos" do *Cabri 3D* para mudar a cor da figura.

Os alunos usaram a ferramenta "ângulo" (Quadro 44) para marcar a medida do ângulo *AOB* e, quando manipularam os pontos *A* ou *B* perceberam, que a medida do ângulo variava, quando a posição da figura imagem do triângulo modificava-se, o fato pode indicar que eles tiveram uma apreensão operatória (posicional) da figura, porque observaram que esta se deslocou, segundo um referencial.

Quadro 44. Rotação de um triângulo em torno de uma reta, segundo o ângulo *AOB* realizada por Pedro, Francisco e Patrícia

	Pedro criou dois semirretas na intersecção da reta perpendicular com o plano de base, como mostra a figura, e, sobre eles, criou os segmentos *OA* e *OB*, depois disso, utilizou a ferramenta “ângulo” para medir o ângulo *AOB*.
	Francisco criou os segmentos *AO* e *OB* na interseção da reta perpendicular criada com o plano de base e também utilizou a ferramenta “ângulo” para medir o ângulo *AOB*.
	Patrícia usou diretamente a ferramenta “ângulo” e clicou sobre os pontos *AOB,* obtendo a medida do ângulo.

Além das indicações da ficha, os estudantes utilizaram os “atributos” do *Cabri 3D*, fato que nos levou a pensar que estavam *instrumentados* nas ferramentas e recursos usados, como instrumentos para a rotação.

Na atividade, os estudantes tiveram uma modificação posicional da figura posto que na rotação do triângulo podiam aumentar ou diminuir a medida do ângulo (movendo os pontos *A* ou *B*) e, por conseguinte, a posição do triângulo imagem do triângulo original. Além disso, a apreensão perceptiva, de acordo com Duval (1995), foi manifestada nas ações desenvolvidas pela maioria dos estudantes, pois eles identificaram a forma do objeto matemático (triângulo).

Atividade 6: rotação de um cubo
Criar uma reta perpendicular ao plano de base. A seguir, construir um cubo. Use a calculadora para criar um ângulo de 45^o. Finalmente, rotacione o cubo em torno da reta, segundo o ângulo de 45^o. • Observe e descreva as características da ferramenta **"rotação"** (atividades 5 e 6). 🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_6

Análise *a priori*

Objetivamos mobilizar a noção de rotação em torno de uma reta, segundo um ângulo de rotação preestabelecido, além de utilizar a ferramenta "rotação", "calculadora" e as outras ferramentas do *Cabri 3D* anteriormente utilizadas.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** nesta atividade, podem-se mobilizar as noções de ponto, reta perpendicular, cubo, ângulo e rotação.
- **Regras-de-ação:** são mostradas em detalhe, nos dados do Quadro 45, de acordo com a tabela do modelo SAI. Criamos uma reta perpendicular ao plano de base e um cubo. Indica-se o ângulo de 45^o e rotaciona-se o cubo em torno da reta, segundo esse ângulo (Figura 90).

Quadro 45. Possível sequência de ações da atividade "rotação de um cubo"

Sexta atividade: rotação de um cubo			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
3	Clica	Botão esquerdo do mouse	Reta perpendicular (validar)
4	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta poliedros regulares
5	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cubo
6	Clica/manipula	Botão esquerdo/ferramenta cubo	Cubo
7	Clica	Botão esquerdo do mouse	Cubo (validar)
8	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas de medida
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta calculadora
11	Digita	Teclado numérico	Ângulo de 45^0
12	Clica	Botão esquerdo do mouse	Insere medida do ângulo de 45^0
13	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 45^0 (validar)
14	Seleciona/Clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta transformações
15	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
16	Clica	Ferramenta rotação	Cubo
17	Clica	Ferramenta rotação	Reta
18	Clica	Ferramenta rotação	Medida do ângulo de 45^0 (validar rotação)
19	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza a rotação do cubo num ângulo de 45^0

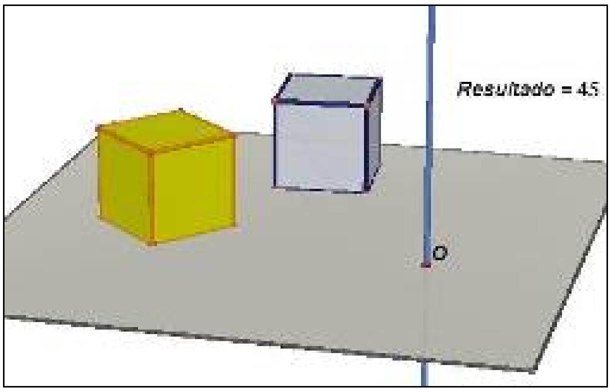


Figura 90. Rotação de um cubo em torno de uma reta, segundo o ângulo de 45º

A atividade foi desenvolvida pelo grupo de alunos de maneira rápida, sem apresentar maiores dificuldades, pois eles já conheciam as ferramentas utilizadas para tal. A seguir, mostramos as ações realizadas pelos estudantes observados.

Ações de Andreya: criou uma reta perpendicular ao plano de base e um cubo. Usou a ferramenta calculadora para inserir o número 45 que serviria de ângulo. Acionou a ferramenta “rotação” e rotacionou o cubo em torno da reta perpendicular, segundo o ângulo de 45º e obteve o cubo imagem. (Figura 91)

Quando a estudante tentou mudar a posição no plano de base, observamos que a imagem do cubo não se movimentava. Só quando movimentou o primeiro cubo criado, verificou que a imagem também se movimentava, isto é, que o movimento da imagem depende do primeiro cubo. Verificamos isso quando Andreya repetiu várias vezes o mesmo procedimento e disse: *para manipular o cubo, tenho que movimentar o primeiro cubo criado, ou seja, que o cubo rotacionado depende do primeiro.*

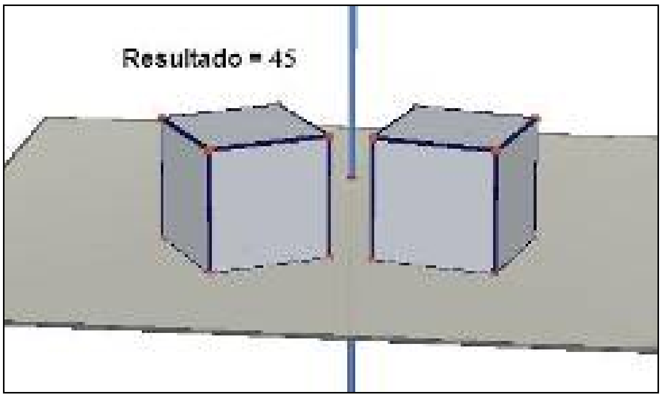


Figura 91. Rotação realizada por Andreya

Ações de Pedro: criou uma reta perpendicular ao plano de base, mudou o ponto de vista, e com a ferramenta "cubo" criou um cubo. Observou a ficha e percebeu que necessitava usar a ferramenta "calculadora" para inserir o ângulo de rotação, pareceu confuso, porque não entendia como usar a ferramenta "calculadora". Para resolver a situação, ativou a calculadora do *Office*, mas depois de explorar a barra de ferramentas do *Cabri 3D* descobriu a ferramenta "calculadora", porém não sabia usá-la. Após três tentativas, conseguiu utilizar a ferramenta corretamente e inseriu o ângulo de 45^o (Figura 92). Depois, ativou a ferramenta "rotação" e rotacionou o cubo em torno à reta e segundo o ângulo de 45^o. Para verificar a medida do ângulo, usou a ferramenta "ângulo" e movimentou o ponto de vista para ver a figura de diferentes posições.

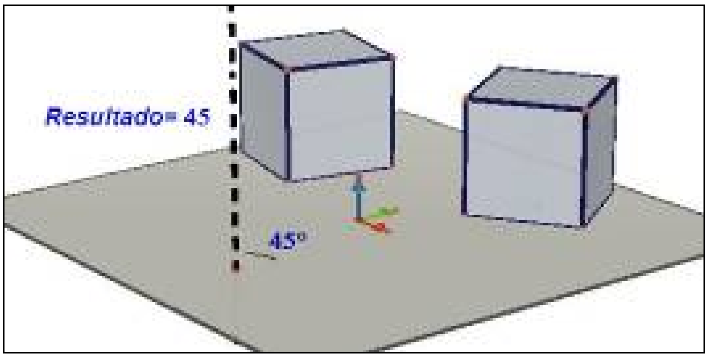


Figura 92. Rotação realizada por Pedro

Ações de Carlos: criou uma reta perpendicular ao plano de base e um cubo nesse plano. Tentou criar um ângulo de 45^0, com a calculadora do *Cabri 3D*, depois de duas tentativas conseguiu inserir o ângulo (Figura 93). Após isso, usou a ferramenta "rotação", clicou no cubo e no ângulo inserido e conseguiu realizar a rotação do cubo.

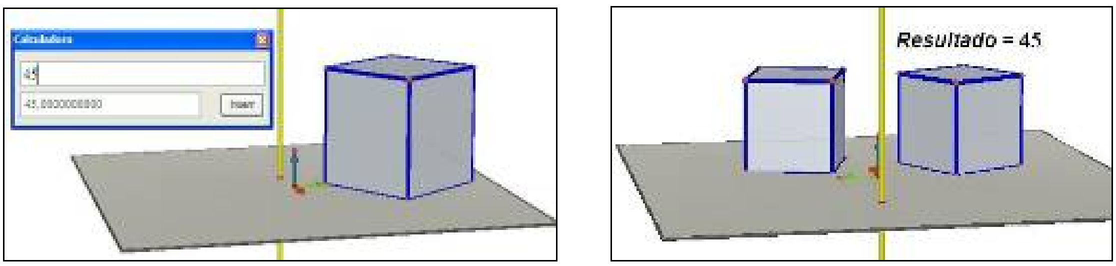


Figura 93. Rotação realizada por Carlos

Análise das ações

As ações dos alunos indicaram que, provavelmente, utilizaram esquemas similares aos previstos na análise *a priori,* isto é, possivelmente seguiram as mesmas regras-de-ação. A afirmação pode ser verificada na análise dos procedimentos usados pelos três alunos que seguiram a sequência da atividade. Somente Andreya realizou uma ação diferente, quando tentou mover duas vezes a imagem do cubo e percebeu que não podia movê-la, depois, movimentou o primeiro cubo e observou que o cubo criado por rotação movimentava-se somente se o primeiro cubo fosse movimentado, a aluna disse:

Para manipular o cubo rotacionado, tenho que movimentar o primeiro cubo criado, ou seja, que o segundo cubo depende do primeiro.

A afirmação da aluna deu-nos subsídios para inferir que, talvez só nesse momento, ela percebeu que ao usar a ferramenta “rotação”, a outra figura que apareceu, era a imagem da primeira (caráter funcional). Com relação a Pedro e Carlos, não podemos afirmar se nessa atividade eles perceberam ou não o modo funcional da transformação, já que não fizeram nenhum questionamento o respeito.

Por outro lado, a ação de Pedro, quando utilizou a calculadora do *Office*, mostrou que essa ferramenta, embora, não seja do *Cabri 3D*, pareceu ser um *instrumento* para ele.

Acreditamos, também, que o processo de Gênese Instrumental (*instrumentação*), segundo Rabardel, aconteceu. Porque nas ações dos alunos ao utilizarem as ferramentas e recursos já introduzidos, percebemos que para eles essas ferramentas e recursos, são *instrumentos* e que, ao mesmo tempo, novos *instrumentos* estavam sendo criados. Lembremos que para Rabardel (1995):

Instrumento = esquemas de utilização (esquemas preestabelecidos e/ou novos)
+ *artefato* (ferramentas e recursos já introduzidos)

Quanto às apreensões das figuras nesta atividade, de acordo com Duval (1995), observamos que a modificação posicional estava presente, já que na rotação no plano e no espaço obtém-se a imagem (figura congruente à inicial) por meio de certas relações entre os elementos da figura. Em relação à apreensão perceptiva, os alunos reconheceram de maneira imediata os objetos matemáticos: cubo e reta perpendicular. A apreensão sequencial estava presente nas ações dos alunos, visto que os três alunos seguiram a sequência de passos assinalada para o desenvolvimento da atividade.

Algumas considerações das atividades de transformações no espaço

É importante destacar que as atividades no *Cabri 3D*, com o uso direto da caixa de ferramentas “transformações”, induzem o aluno a refletir que, por meio de transformações geométricas constrói-se a imagem da figura inicial. No caso do professor, o emprego dessa caixa de ferramentas possibilita esclarecer que a nova figura é a imagem da figura inicial e mostrar as propriedades entre as duas figuras. Por exemplo, o professor pode sugerir, no caso da translação, que o aluno mude o comprimento ou a direção do vetor; para a simetria axial, que o aluno movimente a reta (eixo de simetria); mude de posição o plano perpendicular ao plano de base ou a posição da figura, no caso da reflexão e mude o ângulo de rotação ou a figura.

4.5.2 Etapa II: construção de modelos animados

Nessa etapa, visamos que os estudantes construíssem modelos animados, utilizando transformações geométricas no espaço. Para tal fim, eles deveriam usar as noções de translação, reflexão e rotação no espaço, bem como explorar a caixa de ferramentas “transformações” e a função “animação” do *Cabri 3D.*

Esperávamos, também, que os estudantes usassem a ferramenta “ajuda” (*F1*); “mudar de vista” e “atributos” para modificar o estilo dos objetos.

Subentendemos que a Gênese Instrumental dos estudantes na dimensão da *instrumentação* (orientada ao sujeito) com as ferramentas e recursos do *software* trabalhados anteriormente já aconteceu.

Para melhor entender a estrutura desta etapa, mostramos, nos dados do Quadro 46, todas as atividades desenvolvidas e grifamos as atividades escolhidas que serão analisadas *a posteriori*, segundo a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), e os registros de Representação Semiótica, de Duval (1995).

Quadro 46. Atividades da segunda etapa

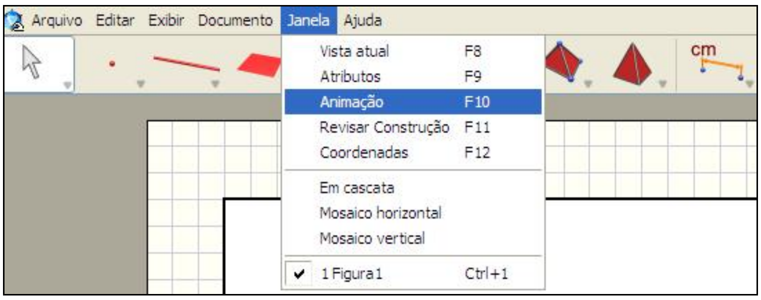
	Nome	Encontros	Atividades com *Cabri 3D*
ETAPA II	Construções de modelos animados	3	1. Rotação de um segmento
			2. Moinho
			3. Balanço
			4. Balanço com animação
			5. Sombra do balanço
		4	**1. Casa**
		5	1. Boneco
			2. Boneco animado
		6	**1. Bonecos animados**

Assinalamos, também, que as atividades escolhidas “moinho”, “casa” e “bonecos animados” possuem uma característica importante: são atividades livres, ou seja, não são dadas orientações sobre a construção nem na ficha nem pelo professor. Mas, os alunos podem construí-los, utilizando qualquer ferramenta e/ou recurso do *Cabri 3D*.

Terceiro encontro

Atividade 1: rotação de um segmento

Criar uma circunferência de centro *O* no plano de base e uma reta perpendicular ao plano pelo ponto *O*. A seguir, criar um novo ponto *P* sobre a circunferência. Criar um diâmetro que passa pelo ponto *P*. Rotacione o diâmetro em torno da reta segundo um ângulo de 90^o. Usar a ferramenta “animação” para movimentar o ponto *P* sobre a circunferência.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma:<nome>_Ativ_1

Análise *a priori*

Nesta terceira atividade que envolve noções de rotação, objetivamos utilizar a ferramenta “rotação”, o recurso “animação” e as outras ferramentas do *Cabri 3D* anteriormente utilizadas, além de introduzir a noção de rotação no espaço.

Pensamos que os alunos seguiriam as orientações da atividade e que a realizariam sem dificuldade.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** nesta atividade, o aluno deveria mobilizar noções de circunferência, ponto, diâmetro ângulo e rotação.
- **Regras-de-ação:** mostramos as ações em detalhe (Quadro 47), de acordo com a tabela do modelo SAI. Criamos uma circunferência de centro *O*, uma reta perpendicular ao plano de base que passe pelo centro da circunferência e por um ponto “livre” *P*, sobre a circunferência citada anteriormente (Figura 94). A partir dele, traçamos o diâmetro e rotacionamos o diâmetro da circunferência em torno da reta, segundo um ângulo de 90^{o}, por fim, acionamos a ferramenta “animação”.

Quadro 47. Possível sequência de ações da atividade “rotação de um segmento”

Primeira atividade: rotação de um segmento			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
3	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência
4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Circunferência (validar)
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta manipulação
7	Clica	Botão esquerdo do mouse	Centro da circunferência
8	Pressiona/digita	Tecla Shift/Letra *O*	Nomear o ponto *O*
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
11	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (passando pelo ponto *O*)
12	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (validar)
13	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
14	Clica	Ferramenta ponto	Ponto sobre circunferência
15	Pressiona/digita	Tecla Shift/Letra P	Nomear o ponto *P*
16	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta semirreta

17	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta semirreta
18	Clica	Ferramenta semirreta	Semirreta (origem em *P*)
19	Clica	Ferramenta semirreta	Semirreta (passando por *O*)
20	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
21	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
22	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo em *P*/ interseção semirreta/circunferência)
23	Seleciona	Mouse	Semirreta
24	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
25	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Semirreta (esconder)
26	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de medidas
27	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Calculadora
28	Digita	Teclado numérico	Ângulo de 90^0
29	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 90^0
30	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 90^0 (validar)
31	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
32	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
33	Clica	Ferramenta rotação	segmento
34	Clica	Ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo)
35	Clica	Ferramenta rotação	Ângulo de 90^0
36	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Menu janela
37	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Recurso de animação (F10)
38	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto *P*
39	Clica	Recurso de animação	Animação do ponto *P*
40	Clica/manipula	Recurso de animação	Velocidade de animação
41	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do diâmetro e sua rotação num ângulo de 90^0.

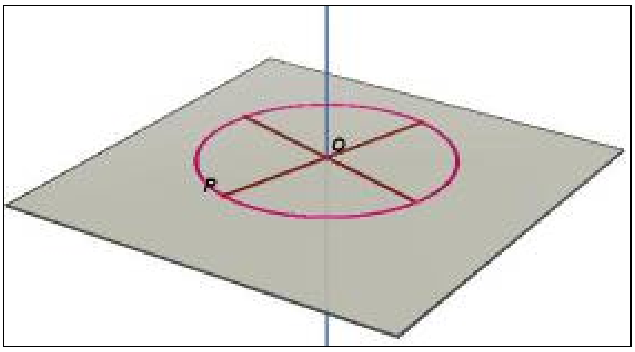


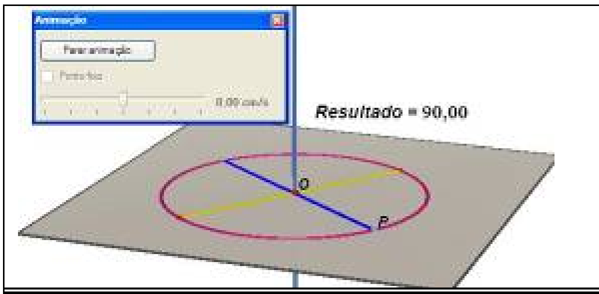
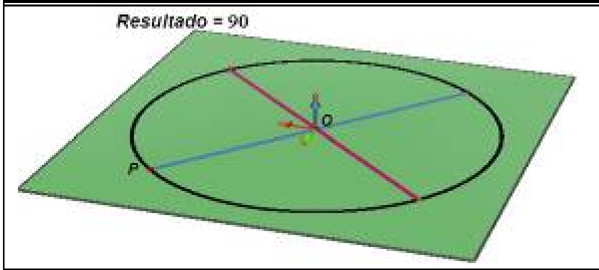
Figura 94. Rotação de um segmento em torno de uma reta, segundo um ângulo de 90^0

Análise *a posteriori*

No desenvolvimento da atividade, a maioria dos alunos não apresentou dificuldades, fato que pode significar que usaram *esquemas de utilização* similares ao pressuposto na análise *a priori*, porque seguiram as orientações da atividade. A introdução do recurso “animação”, como esperávamos, não apresentou dificuldades, já que o professor deu orientações sobre o emprego desse recurso, e os alunos exploraram as diferentes velocidades e sentidos (horário e anti-horário) que o recurso possui.

Os dados do Quadro 48 mostram dois exemplos de construções da atividade.

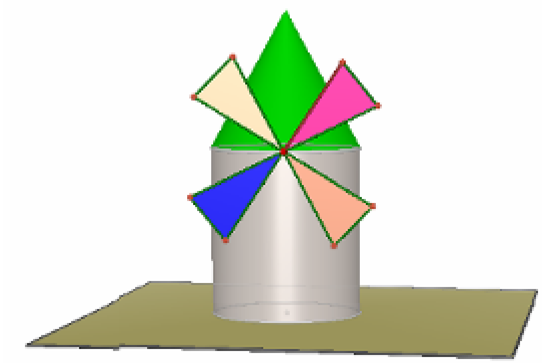
Quadro 48. Atividade “rotação de um segmento” realizada por Patrícia e Ivete

	Patrícia seguiu as orientações da ficha, usou o recurso “atributos” do *Cabri 3D*, modificou o ponto de vista e conseguiu animar o ponto *P*.
	Ivete utilizou o ponto *O* (intercepção dos eixos *x*, *y* e *z*), como centro da circunferência. Também, modificou o ponto de vista (botão direito do mouse), usou o recurso “atributos” e conseguiu animar o ponto *P*.

Além das ferramentas “rotação” e “animação” assinaladas para o desenvolvimento da atividade, as alunas usaram o recurso “atributos” do *Cabri 3D*. O emprego desse recurso nos fez conjeturar que elas já se apropriaram dele, ou seja, que estão *instrumentadas* com eles, porque o utilizaram de maneira espontânea e sem apresentar dificuldade. Isso é observável porque empregaram dois atributos básicos desse recurso: mudar a cor e o raio dos segmentos e da circunferência.

Além do mais, observamos, por exemplo, na ação da estudante Ivete, ao usar o eixo *z* como eixo de rotação, que criou um *esquema de utilização* similar ao previsto na análise *a priori*; porque na análise, a reta perpendicular ao plano de base pode interceptar o plano de base em qualquer ponto, a “diferença” pode ser observada nas ações 3 até 6 dos dados do Quadro 47.

Além disso, podemos afirmar que as alunas estavam *instrumentadas* nas ferramentas e recursos utilizados para esta atividade, uma vez que as empregaram com propriedade e sem apresentar dificuldades.

Atividade 2: moinho
Construir um moinho[43] conforme figura abaixo. Animar o moinho.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

Análise *a priori*

Na atividade, visamos a construir o primeiro modelo animado "moinho", utilizando a ferramenta "rotação", o recurso "animação" e outras ferramentas e recursos do *Cabri 3D* e, mobilizar a noção de rotação em torno de um mesmo eixo, segundo um mesmo ângulo, além de outras noções matemáticas envolvidas.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** para a construção do moinho, o aluno deveria mobilizar as noções de circunferência, vetor, cilindro, cone, reta, semirreta, plano, segmento, triângulo, ponto e rotação em torno de um mesmo eixo, segundo um ângulo dado.
- **Regras-de-ação:** apresentamos em detalhe as regras de ação nos dados do Quadro 49, de acordo com a tabela do modelo SAI.

Quadro 49. Possível sequência de ações da atividade "moinho"

Segunda atividade: moinho			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
3	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta circunferência	Circunferência

[43] Atividade apresentada por Jahn e Salazar (2007) no minicurso: Explorando Objetos Espaciais no Ambiente *Cabri 3D.* Encontro Nacional de Educação Matemática, 18-21 julho 2007, Belo Horizonte/MG, Brasil.

4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Circunferência (validar)
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
8	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (passando pelo centro da circunferência)
9	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (validar)
10	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta vetor
11	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
12	Clica	Ferramenta vetor	Vetor (passando pela reta perpendicular)
13	Clica	Ferramenta vetor	Vetor (validar)
14	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta cilindro
15	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cilindro
16	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta cilindro	Circunferência (criar cilindro)
17	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta cilindro	Vetor (validar cilindro como produto da circunferência e o vetor)
18	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta paralela
19	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta paralela
20	Clica	Ferramenta paralela	Vetor (passando pelo extremo superior)
21	Clica	Ferramenta paralela	Plano de base (validar o plano paralelo)
22	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta cone
23	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cone
24	Clica	Ferramenta cone	Plano paralelo (passando pelo extremo superior do cilindro)
25	Clica	Ferramenta cone	Cone (ponto na reta perpendicular/validar)
26	Seleciona	Mouse	Reta perpendicular
27	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
28	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (esconder)
29	Seleciona	Mouse	Plano paralelo
30	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
31	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Plano paralelo (esconder)
32	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
33	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
34	Clica/manipula	Mouse/ferramenta perpendicular	Ponto da circunferência da base do cone (criar a reta perpendicular)
35	Clica	Mouse/ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (ponto da circunferência da base do cone no plano de base)
36	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramenta ponto
37	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto de interseção
38	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto de interseção (da reta com a circunferência superior do cilindro/validar)
39	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas perpendicular
40	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
41	Clica/manipula/pressiona	Mouse/ferramenta perpendicular/tecla ctrl	Reta perpendicular (e tangente a outra reta no plano de base)
42	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta plano
43	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta plano
44	Clica/manipula	Mouse/ferramenta plano	Na reta perpendicular (e tangente à outra reta no plano de base/ criar o plano)
45	Clica/manipula	Mouse/ferramenta plano	Na reta perpendicular (e tangente ao cilindro/ validar o plano)
46	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
47	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
48	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta circunferência	Circunferência (criar a circunferência no plano perpendicular ao plano de base)

49	Clica/manipula	Botão esquerdo do mouse	Circunferência (validar)
50	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
51	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Plano (esconder)
52	Seleciona	Mouse	Reta no plano de base
53	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
54	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta no plano de base (esconder)
55	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
56	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
57	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (passando pelo centro da circunferência)
58	Clica	Ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (validar)
59	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
60	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Plano (esconder)
61	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
62	Clica	Ferramenta ponto	Ponto livre sobre circunferência (criar)
63	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta semirreta
64	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta semirreta
65	Clica	Ferramenta semirreta	Semirreta (origem no ponto livre)
66	Clica	Ferramenta semirreta	Semirreta (passando pelo centro)
67	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
68	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
69	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo no ponto livre/ interseção semirreta/circunferência)
70	Seleciona	Mouse	Semirreta
71	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
72	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Semirreta (esconder)
73	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de medidas
74	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Calculadora
75	Digita	Teclado numérico	Ângulo de 90^0
76	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 90^0
77	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 90^0 (validar)
78	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
79	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
80	Clica	Ferramenta rotação	Segmento (primeiro segmento)
81	Clica	Ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo)
82	Clica	Ferramenta rotação	Ângulo de 90^0 (valida a rotação)
83	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de medidas
84	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Calculadora
85	Digita	Teclado numérico	Ângulo de 45^0
86	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 45^0
87	Clica	Botão esquerdo do mouse	Medida do ângulo de 45^0 (validar)
88	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
89	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
90	Clica	Ferramenta rotação	Segmento (primeiro segmento)
91	Clica	Ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo)
92	Clica	Ferramenta rotação	Ângulo de 45^0 (valida a rotação)
93	Clica	Ferramenta rotação	Segmento (segmento rotacionado)
94	Clica	Ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo)
95	Clica	Ferramenta rotação	Ângulo de 45^0 (valida a rotação)
96	Seleciona	Mouse	Reta perpendicular (eixo)
97	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
98	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (eixo/esconder)
99	Seleciona	Mouse	Reta perpendicular (ponto da circunferência da base do cone no plano de base)

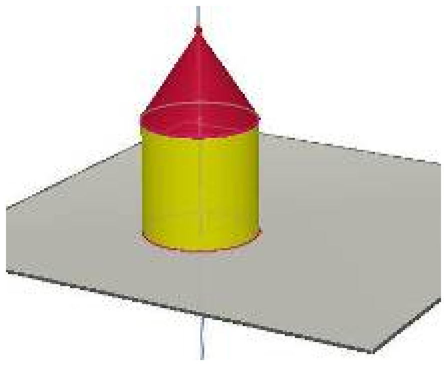
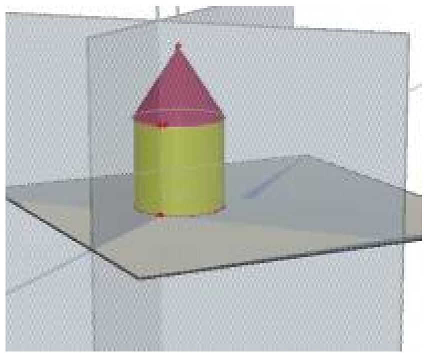
100	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
101	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta no plano de base (esconder)
102	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Menu janela
103	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta triângulo
104	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta triângulo
105	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta triângulo	Triângulo (como base dos pontos – segmentos da circunferência)
106	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta triângulo	Triângulo (com vértice no centro da circunferência/ validar)
107	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
108	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Circunferência (esconder)
109	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Recurso de animação (F10)
110	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto livre
111	Clica	Recurso de animação	Animação do ponto livre
112	Clica/manipula	Recurso de animação	Velocidade de animação
113	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do moinho

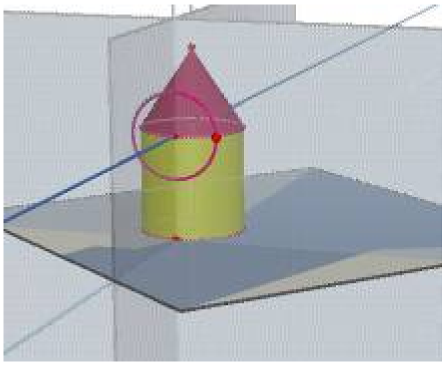
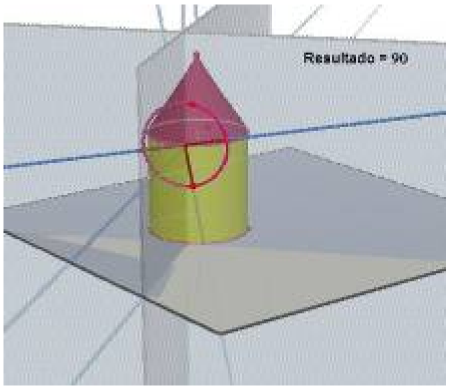
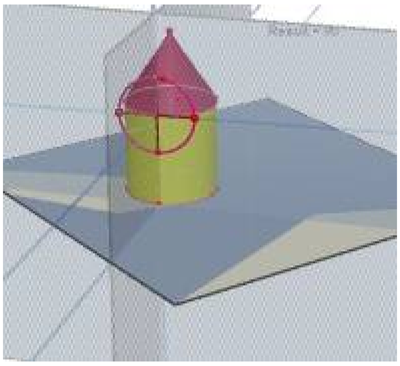
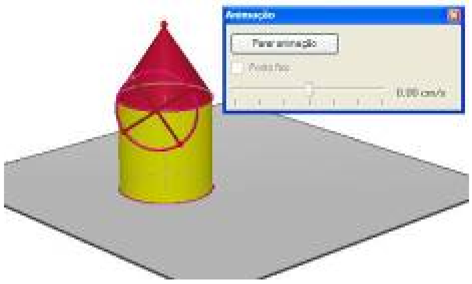
Análise *a posteriori*

Para a análise *a posteriori*, apresentamos em primeiro lugar a sequência de ações desenvolvidas pelos três alunos observados, para depois analisar essas ações.

1. Ações de Andreya

Quadro 50. Sequência de ações de Andreya para a construção da atividade "moinho"

Ações	Processo de construção
Criou uma circunferência no plano de base e pelo centro uma perpendicular e um vetor sobre a perpendicular e construiu um cilindro. Criou um ponto na perpendicular e transladou a circunferência, segundo o vetor para construir a base do cone. Clicou na circunferência (base) e no ponto (vértice), e construiu o cone.	
Criou um ponto na base do cilindro e o transladou segundo o vetor, obtendo o novo ponto na base do cone. Criou uma reta passando por esses pontos e um plano passando por essa reta, intersectando o plano de base. Depois disso, criou uma reta que intersecte o plano criado, o plano de base e um plano perpendicular ao plano de base, passando por essa reta e tangente ao cilindro.	

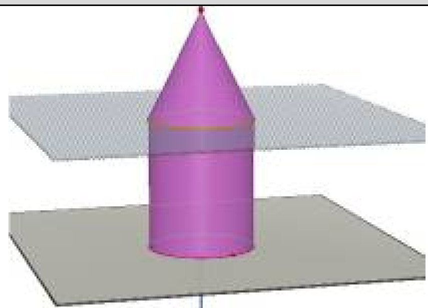
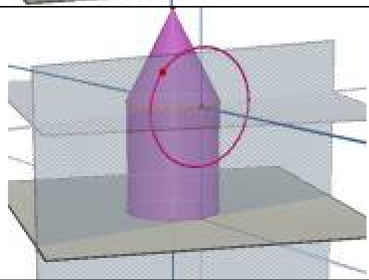
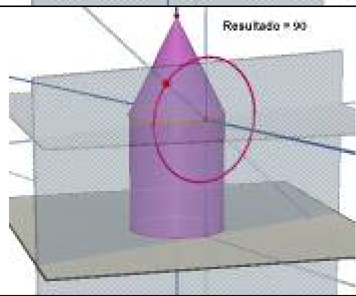
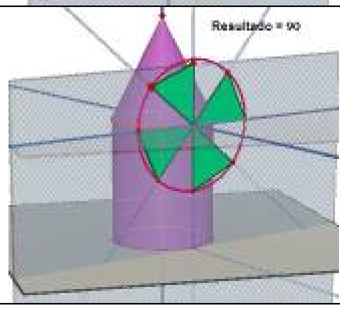
Criou um novo ponto na base do cone, por ele traçou uma reta paralela ao plano de base (eixo de rotação), uma circunferência, no plano perpendicular tangente ao cilindro, de centro esse novo ponto criado, um ponto livre na circunferência e anima-o para verificar se ele é móvel.	
Criou uma reta passando pelo ponto livre e pelo centro da circunferência. Marcou o ponto de intersecção e criou o diâmetro. Com a ferramenta "calculadora", inseriu o ângulo de rotação 90^0.	
Para as hélices do moinho, rotacionou o segmento em torno ao eixo e segundo o ângulo de 90º.	
Ativou o recurso animação e escondeu os elementos de construção não necessários.	

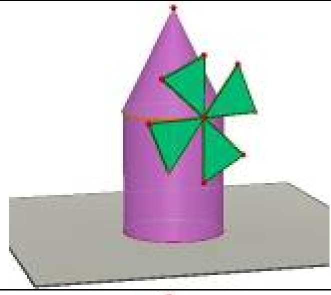
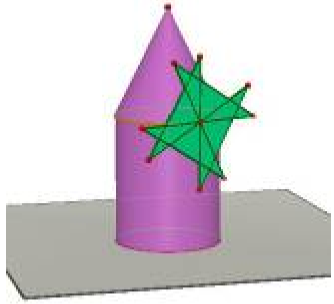
Assinalamos que Andreya não concluiu a construção do moinho da atividade. Contudo, utilizou os atributos e mudou a cor e o raio das hélices do moinho.

Apontamos que o aluno Pedro conseguiu construir as hélices do moinho na quarta tentativa, processo de construção mostrado nos dados do Quadro 51. Não tivemos registro das outras três tentativas, embora fossem interessantes, porque foram apagadas pelo aluno, fato que não nos permitiu acompanhar seus processos de construção.

2. Ações de Pedro

Quadro 51. Sequência de ações de Pedro para a construção da atividade “moinho”

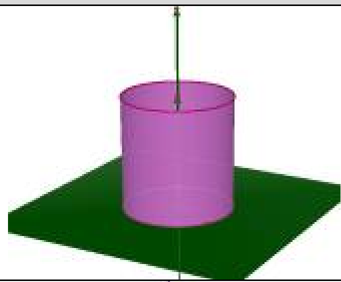
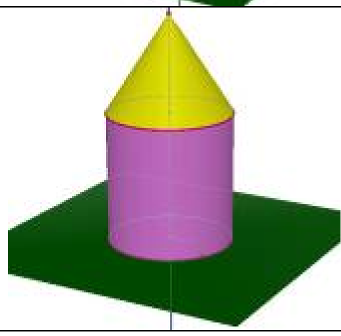
Ações	Processo de construção
Criou uma circunferência, uma reta perpendicular pelo centro da circunferência depois, um vetor na reta perpendicular e construiu o cilindro. Após isso, criou um plano paralelo ao plano de base (segundo vértice do vetor). Mudou o ponto de vista, construiu o cone (teto do moinho).	
Para as hélices, criou uma reta perpendicular ao plano de base, passando por um ponto da circunferência da base do moinho.	
Criou um plano perpendicular ao plano de base, uma circunferência e um ponto livre nela; no centro da circunferência criou uma reta perpendicular.	
Construiu um diâmetro que passa pelo ponto livre e pelo centro da circunferência, rotacionou-o 90^0 e criou os quatro triângulos que formam as hélices.	

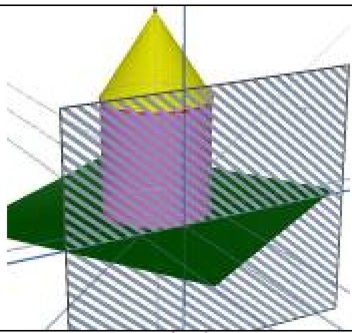
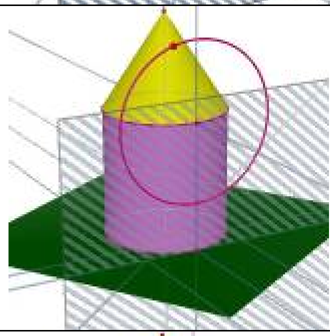
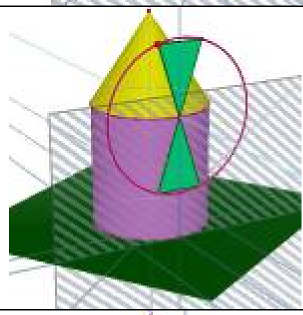
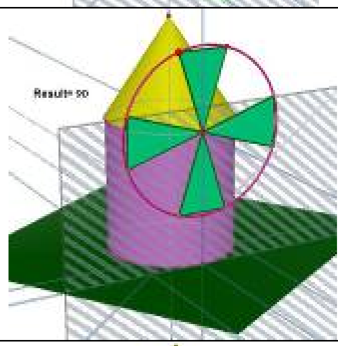
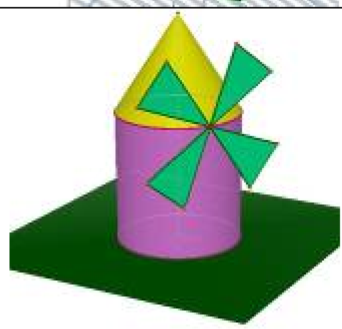
Escondeu os elementos de construção não necessários e animou o ponto livre.	
Não obstante, as hélices do moinho não se movimentam corretamente.	

O aluno Carlos conseguiu construir o moinho na primeira tentativa, o processo de construção é mostrado nos dados do Quadro 52.

3. Ações de Carlos

Quadro 52. Sequência de ações de Carlos para a construção da atividade "moinho"

Ações	Processo de construção
Criou uma circunferência no plano de base, uma reta perpendicular que passa pelo centro da circunferência e um vetor na reta perpendicular, depois disso, transladou a circunferência, segundo o vetor criado e construiu o cilindro.	
Depois, criou um segundo vetor na reta perpendicular, com um extremo na parte superior do primeiro vetor criado e construiu um cone.	

Criou uma reta tangente ao cilindro e perpendicular ao plano de base. Para construir o plano perpendicular e tangente ao plano de base que passa pela reta, criou retas paralelas e perpendiculares entre si.	
Criou uma circunferência no plano perpendicular ao plano de base com centro em um ponto da base do cone. Depois, criou uma reta perpendicular à circunferência passando pelo centro, definiu um ponto livre sobre a circunferência e animou o ponto para ver se este se movimentava.	
Construiu um triângulo com vértice no centro da circunferência e animou de maneira sincronizada os dois vértices do triângulo na circunferência.	
Depois, utilizou simetria central e, inseriu um ângulo de 90^0.	
Rotacionou o triângulo em torno da reta, segundo o ângulo de 90^0 e animou as quatro hélices do moinho.	

É importante observar que Carlos usou “ajuda de ferramentas” (*F1*) para ver como funcionam as ferramentas de “simetria central” e “rotação”. Como mostraram os dados do Quadro 52, mudou de ponto de vista para ver sua construção, as cores além de esconder alguns objetos.

Análise das ações

Verificamos que a *instrumentação* da ferramenta e da noção da figura cilindro ocorreu em Carlos, Andreya e Pedro. Ainda que, em alguns momentos da construção, os alunos seguiram ações similares às da análise *a priori*, evidenciamos estratégias diferentes de construção.

Por exemplo, Andreya e Pedro construíram o cilindro – base do moinho –, seguindo uma sequência de ações similares. A diferença observável radica em que Pedro fez uso do recurso “ajuda” (*F1*) para a construção, e Andreya não teve essa necessidade. O fato pode significar que, embora Pedro pudesse conhecer a figura cilindro, ainda não estava *instrumentado* nela.

Embora, Carlos tivesse construído o cilindro da mesma maneira que os outros alunos, ele utilizou além das ferramentas “circunferência” e “vetor”, a translação para construir a segunda circunferência. Pensamos que sua intenção pode ter sido “tampar o cilindro”. O fato nos fez inferir que o aluno sabia que o cilindro tinha duas bases formadas por círculos. Tal ação nos deu subsídios para considerar que usou um *esquema de utilização* novo e diferente dos colegas, que não tiveram a mesma preocupação.

Na construção do teto do moinho (cone), os alunos apresentaram estratégias distintas. Para construir o cone, Andreya transladou a circunferência da base do cilindro e Pedro criou um plano paralelo ao plano de base na parte superior. Em seguida, indicaram um ponto qualquer na perpendicular (vértice do cone) e o cone foi criado. Já Carlos, como havia transladado a circunferência base do cilindro, preocupou-se com o vértice do cone; por isso, criou um novo vetor na reta perpendicular. Nessas ações, verificamos que as ferramentas, recursos e noções (mobilização das noções matemáticas envolvidas) usadas pelos alunos mostraram que para eles podem ser instrumentos.

Para nós, a transformação rotação foi de especial interesse nesta atividade, pois detivemo-nos na análise da construção das hélices do moinho, visto que é por meio dessa construção que tal transformação pode ser observada.

Ainda que os alunos percebessem a necessidade de utilizar a rotação para a construção, apresentaram certas dificuldades. Estas podem ter sido geradas porque, apesar da *instrumentação* do uso da ferramenta ou da noção de rotação, pode ter acontecido, depois da realização das três atividades que envolviam esta noção, o processo de *instrumentalização* da ferramenta rotação, estava no estágio de descoberta e seleção que de acordo com Trouche (2004), neste processo, o aluno seleciona e apropria-se das ferramentas necessárias para a construção.

Andreya usou a transformação rotação, mas não concluiu sua construção. Por sua parte, Pedro conseguiu construir as hélices em sua quarta tentativa e utilizou o esquema da atividade: "rotacionar um segmento", mas, quando os triângulos que formam as hélices foram construídos, desfaziam-se quando animados. O fato permitiu observar que ele igual a Andreya estava no estágio de descoberta e seleção da *instrumentalização*. Carlos foi o único que conseguiu concluir a atividade satisfatoriamente, utilizou a simetria central e a rotação para construir as hélices.

A estratégia empregada por Carlos denota a criação de novo *esquema de utilização* que de acordo com Rabardel (1995a) acomoda os esquemas preexistentes a uma nova situação. Tal acomodação evidencia sua *instrumentalização* (estágio de descoberta e seleção), visto que sua estratégia mostrou que a noção e a ferramenta simetria central, que não constavam em nossa análise *a priori*, poderiam ser utilizadas para essa construção, além da rotação.

Consideramos que os três estudantes utilizaram de modo adequado as ferramentas do *Cabri 3D* e mobilizaram a noção da transformação rotação, necessárias para fazer essa construção, porque relacionaram a atividade com as anteriores, o que reflete a pertinência da sequência, já que usaram além das transformações rotação, translação e simetria central o recurso de animação do *software*.

Apontamos que as ações dos alunos indicaram a apreensão perceptiva da figura, segundo Duval (1995), porque identificaram de maneira imediata os objetos matemáticos que formam o moinho, isto é: rotação, cilindro, cone, e triângulo. Percebemos também que tiveram apreensão sequencial, porque cada aluno desenvolveu uma sequência de ações (passo) diferente para sua construção, como mostram os dados dos Quadros 50, 51 e 52.

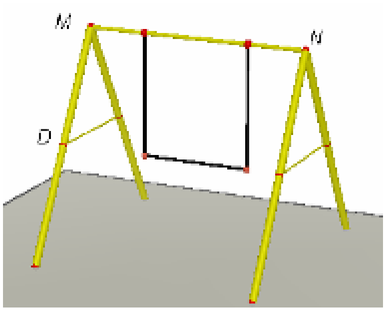
A maneira como a atividade foi desenvolvida pelos alunos, leva-nos a inferir que a visualização no sentido de Duval (2002) aconteceu, pois esta se apoia na produção de uma representação semiótica que organiza as relações entre os elementos estruturais de uma figura, como aconteceu nessa atividade. Essa visualização só foi possível por meio da apreensão operatória da figura.

Neste sentido, a atividade permitiu que os alunos desenvolvessem sua construção com liberdade, isto é, sem seguir um roteiro de construção. Nesse sentido, as escolhas das ferramentas e recursos do *Cabri 3D* e, as estratégias usadas pelos alunos fizeram-nos coligir que eles relacionaram o moinho com conceitos matemáticos, tais como: cilindro (corpo do moinho); cone (teto) e triângulos (hélices do moinho). Além de, mobilizar noções de algumas transformações geométricas trabalhadas anteriormente.

Assim, no processo de construção do moinho com *Cabri 3D*, percebemos que os alunos mobilizaram de maneira intuitiva, noções de transformações geométricas no espaço e usaram, com propriedade, ferramentas e recursos do *software*. Esta observação nos deu subsídios para afirmar que a *Gênese Instrumental* aconteceu.

Atividade 3: balanço

Criar um balanço e o seu suporte conforme desenho abaixo



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

Análise *a priori*

A atividade visa à construção do modelo "balanço"[44] por meio do uso das ferramentas "reflexão", "translação" e outras ferramentas e recursos do *Cabri 3D,* introduzidas nas atividades anteriores. Além de mobilizar a noção de reflexão em relação a um plano (para a construção dos dois pés do balanço) e de translação (para os outros dois pés) introduzidas, também, nas atividades anteriores.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** devemos mobilizar as noções de reta paralela e perpendicular, segmento, vetor, plano perpendicular, reflexão e translação para construir o modelo desta atividade.
- **Regras-de-ação:** as ações para o desenvolvimento dessa atividade são apresentadas em detalhe nos dados do Quadro 53, conforme a tabela do modelo SAI.

Quadro 53. Possível sequência de ações da atividade "balanço"

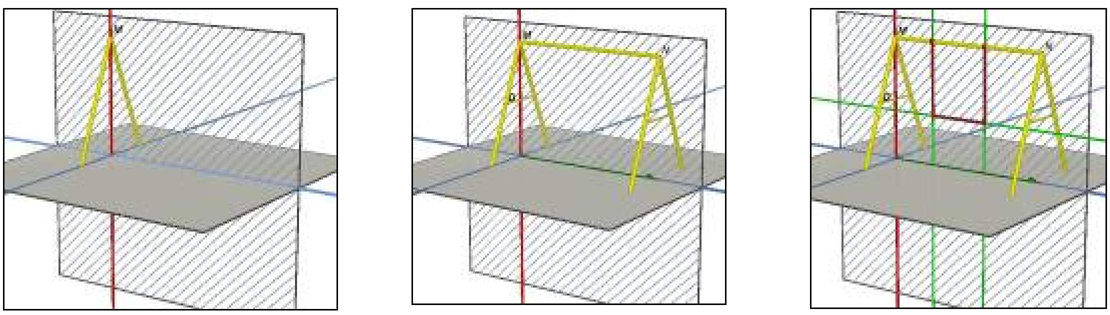
Terceira atividade: balanço			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
3	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
4	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta perpendicular	Perpendicular (interseção num ponto no plano de base)
5	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
6	Clica	Ferramenta ponto	Ponto na reta perpendicular
7	Digita	Tecla Shift/Letra M	Nomear o ponto M
8	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
9	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
10	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta segmento	Segmento inclinado (extremo no ponto M)
11	Clica/manipula	Mouse/Ferramenta segmento	Segmento inclinado (outro extremo no plano de base/validar)
12	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta plano
13	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta plano
14	Clica	Ferramenta plano	Reta perpendicular ao plano de base
15	Clica	Ferramenta plano	Plano de base (criar o plano perpendicular / validar)
16	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
17	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta reflexão

[44] Atividade adaptada. Fonte: CABRILOG http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html

18	Clica	Ferramenta reflexão	Plano perpendicular (reflexão em relação a este plano)
19	Clica	Ferramenta reflexão	Segmento (reflexão do segmento/ validar)
20	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas do vetor
21	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
22	Clica/manipula	Mouse	Vetor (ponto, vetor, ponto).
23	Clica	Botão esquerdo do mouse	Vetor no plano de base (validar)
24	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
25	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
26	Clica	Ferramenta translação	Segmento
27	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação do segmento)
28	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
29	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta reflexão
30	Clica	Ferramenta reflexão	Plano perpendicular (reflexão em relação a este plano)
31	Clica	Ferramenta reflexão	Segmento (reflexão do segmento/ validar)
32	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
33	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo no ponto M)
34	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (outro extremo)
35	Digita	Tecla Shift/Letra N	Nomear o ponto N
36	Seleciona	Mouse	Plano perpendicular
37	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
38	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Plano perpendicular (esconder)
39	Seleciona	Mouse	Reta perpendicular
40	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
41	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (esconder)
42	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
43	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
44	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo num segmento)
45	Digita	Tecla Shift/Letra D	Nomear o ponto D
46	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (outro extremo no seu segmento simétrico/validar)
47	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
48	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
49	Clica	Ferramenta translação	Segmento
50	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação do segmento)
51	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
52	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
53	Clica/manipula	Mouse/ferramenta perpendicular	Plano de base (criar a reta perpendicular)
54	Clica	Mouse/ferramenta perpendicular	Reta perpendicular (passando pelo segmento MN/validar)
55	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas do vetor
56	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
57	Clica/manipula	Mouse /ferramenta vetor	Vetor (ponto, vetor, ponto).
58	Clica	Botão esquerdo do mouse	Vetor no segmento MN (validar)
59	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
60	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
61	Clica	Ferramenta translação	Reta perpendicular
62	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação da reta perpendicular)
63	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
64	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
65	Clica/manipula	Mouse/ferramenta segmento	Segmento (criar segmento na reta perpendicular)
66	Clica	Botão esquerdo do mouse	Segmento (validar)

67	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
68	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
69	Clica	Ferramenta translação	Segmento
70	Clica	Ferramenta translação	Vetor (validar a translação do segmento)
71	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
72	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
73	Clica	Ferramenta segmento	Segmento (criar com extremos nos dos segmentos anteriores)
74	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (esconder)
75	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
76	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (esconder)
77	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular (transladada)
78	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
79	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Reta perpendicular criada por translação (esconder)
80	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Vetor (do plano de base)
81	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
82	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Vetor (esconder)
83	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Vetor (no segmento MN)
84	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
85	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Vetor (esconder)
86	Seleciona	Mouse	Segmento
87	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
88	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Segmento (raio da curva largo)
89	Clica	Botão esquerdo do mouse	Segmento (raio da curva largo/validar)
90	Seleciona	Mouse	Segmento
91	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
92	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Segmento (cor da curva/amarelo)
93	Clica	Botão esquerdo do mouse	Segmento (cor da curva/amarelo/validar)
94	Repete a mesma sequência (mudar de estilo) para os outros três suportes do balanço		
95	Manipula	Botão direito do mouse	Visualizar o balanço de diferentes pontos de vista

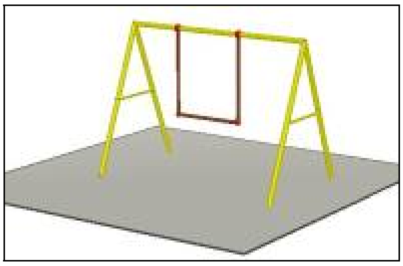
A Figura 95 mostra passo a passo o processo de construção do balanço, de acordo com a análise *a priori.*



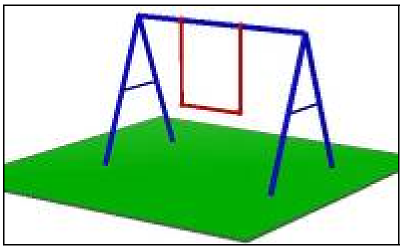
(a) reflexão do segmento em torno ao plano

(b) translação segundo o vetor

(c) construção de retas paralelas e perpendiculares para o balanço



(d) balanço com objetos ocultos



(e) utilização dos atributos “cor” e “raio da curva”

Figura 95. Possível processo de construção do balanço da análise *a priori*

Análise *a posteriori*

Com exceção de Carlos, todos os outros estudantes conseguiram fazer a construção, usando a mesma estratégia de construção que havíamos previsto na análise *a priori* (a Figura 94 mostra o processo de construção que a maioria dos alunos seguiu). Apontamos que, na construção do balanço, como esperado, a maioria dos alunos utilizou as ferramentas “reflexão” e “translação”, bem como as ferramentas “perpendicular”, “paralela” e os “atributos” do *Cabri 3D*. Demonstraram em suas ações esquemas de utilização similares à análise *a priori*.

Entretanto, como a atividade de construção do balanço tem a característica de ser “livre”, isto é, permite que os alunos desenvolvam sua construção sem seguir um roteiro, já que a figura é apresentada na ficha, a construção pode ser feita utilizando diferentes ferramentas e/ou recursos trabalhados anteriormente.

Assinalamos isso, visto que o aluno Carlos realizou uma construção diferente da que havíamos previsto na análise *a priori*, pois empregou basicamente retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio e segmento (Figura 96), sem usar nenhuma das transformações que tínhamos pensado. Pensamos que o fato pode ter sido em razão de várias possibilidades:

1. Embora Carlos tivesse realizado com sucesso as atividades nas quais as ferramentas de translação e reflexão foram introduzidas, nada garante que está *instrumentado* o uso das citadas ferramentas. Pode ser que ele já estivesse *instrumentalizado* em outras ferramentas do *Cabri 3D* (retas paralelas e perpendiculares) preferiu utilizar as citadas ferramentas ou não relacionou as atividades de transformações geométricas realizadas anteriormente com a construção do modelo solicitado na atividade.

2. Pensamos que Carlos poderia estar *instrumentado* nas noções de translação e reflexão, além das outras noções mobilizadas nos encontros anteriores; entretanto, pode ter acontecido que para ele foi mais fácil ter usado as noções trazidas da Geometria Plana, ou seja, que ele poderia ter usado os esquemas preestabelecidos da Geometria Plana e transportado ao espaço.

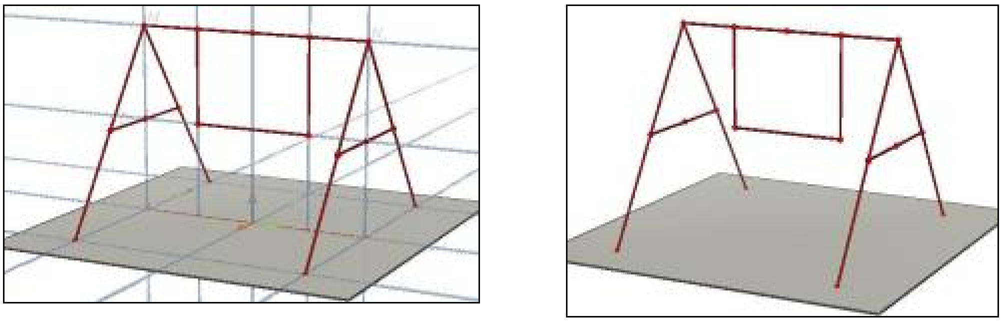
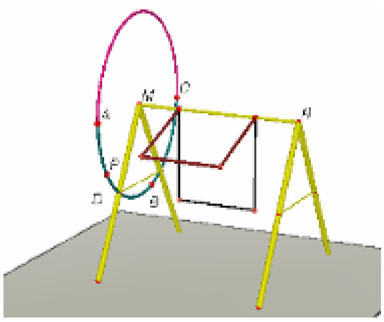


Figura 96. Balanço construído por Carlos

Por fim, podemos afirmar que tanto Carlos como os outros alunos estavam *instrumentados* com as ferramentas usadas nessa construção.

Atividade 4: balanço com animação

Criar uma circunferência em torno do segmento *MN* de raio *MD*. A seguir, criar um arco *ABC*. Criar um ponto *P* sobre o arco. Rotacionar cada segmento do balanço em torno do segmento *MN*, segundo o ângulo *BP*. Finalmente, esconder os três segmentos e animar o ponto *P*.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_4

Análise *a priori*

Nesta atividade, tomaremos como base a construção do balanço da atividade anterior e adicionaremos dois elementos ao modelo: a noção e ferramenta “rotação” e a utilização do recurso “animação” (figura da atividade) além das outras transformações, ferramentas e recursos do *Cabri 3D*.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** as noções de rotação, reflexão, translação, circunferência, arco, segmento, vetor, plano e ponto devem ser mobilizados para esta construção.
- **Regras-de-ação:** são apresentadas em detalhe nos dados do Quadro 54, de acordo com a tabela do modelo SAI. Criamos uma circunferência de raio *MD* em torno do segmento *MN*, um arco *ABC* na circunferência e um ponto *P* sobre o arco. Rotacionamos cada segmento do balanço em torno do segmento *MN*, segundo o ângulo de rotação *BMP* e, por fim, animamos o ponto *P* com o recurso de animação. (*F10)*

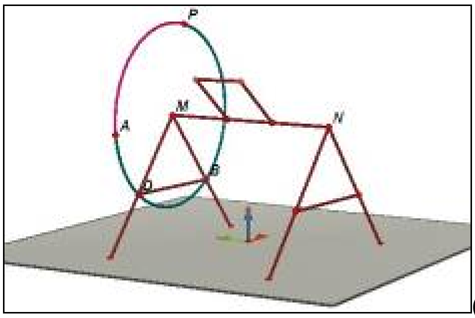
Quadro 54. Possível sequência de ações da atividade "balanço com animação"

Quarta atividade: balanço com animação			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
3	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência (em torno do segmento MN e de raio MD)
4	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
5	Clica	Botão esquerdo do mouse	Circunferência (de raio MD/validar)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta arco
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta arco
8	Clica/manipula	Botão esquerdo do mouse/ferramenta arco	Arco (passando pelos pontos A, B e C/valida)
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
11	Clica	Ferramenta ponto	Ponto livre no arco ABC
12	Pressiona/digita	Tecla Shift/Letra P	Nomear o ponto P
13	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
14	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
15	Clica	Ferramenta rotação	Segmento MN (entorno dele)
16	Clica	Ferramenta rotação	Segmento (desse segmento)
17	Clica	Ferramenta rotação	Ângulo BP
18	Repete a mesma sequência (ferramenta rotação) para os outros três segmentos do balanço		
19	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
20	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Segmento do balanço (esconder)
21	Repete a mesma sequência (caixa estilo/esconder) para os outros três segmentos do balanço		
22	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Recurso de animação (F10)
23	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto livre P
24	Clica	Recurso de animação	Animação do ponto livre
25	Clica/manipula	Recurso de animação	Velocidade de animação
26	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do balanço

Análise *a posteriori*

Observamos que a maioria dos estudantes seguiu as sugestões de construção do modelo animado utilizando a atividade anterior. Entretanto, por exemplo, o aluno Luiz construiu o ponto *P* como extremo do arco *ABC*, ou seja, o arco *ABP* e não como “ponto livre” e fez a rotação do balanço em torno de MN, mas quando animou o ponto dava a volta inteira e o balanço girava 360^0 (Figura 97(a)).

Outro exemplo que trazemos é do aluno Diego. Ele finalizou o modelo animado (Figura 97(b)), entretanto não empregou o modelo da atividade anterior nem as ferramentas que pressupúnhamos. Construiu a base do balanço, empregando basicamente retas e planos paralelos, perpendiculares – como fez o aluno Carlos na atividade anterior – além da ferramenta “medida”, para o balanço animado usou a rotação e animou o ponto *P* e, como na construção de Luiz, o ponto animado dava a volta inteira e o balanço girava 360^0.



(a)

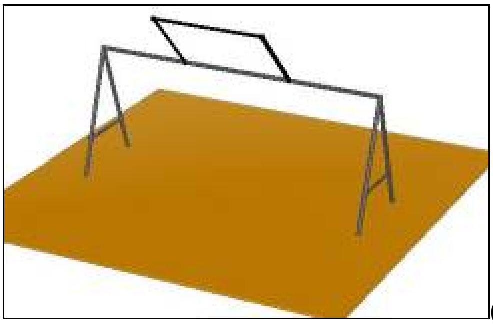

(b)

Figura 97. Balanço com animação construído por Luiz (a) e Diego (b)

Embora Luiz e Diego utilizassem uma estratégia comum e diferente da prevista na análise *a priori* para suas construções, as ações de todos os alunos mostraram que atingiram o objetivo da atividade, isto é, mobilizar noções da transformação rotação, a ferramenta “rotação”.

Em sua maioria, os estudantes, conseguiram relacionar a atividade anterior com esta, bem como reutilizar suas construções, fato que sinaliza o processo de *instrumentação*, porque usaram seus esquemas preexistentes (criados na atividade anterior) e ampliaram-nos.

A repetição e adaptação do mesmo *esquema de utilização* a outra situação similar mostra que o processo de *instrumentação* dos alunos, que assinalamos também na atividade anterior, consolidou-se.

Atividade 5: sombra do balanço
Criar a sombra do balanço da atividade anterior. Escolher uma direção qualquer.
🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

Análise *a priori*

Na atividade, visamos a empregar a caixa de ferramentas "transformações", especificamente, mobilizar as noções de: rotação, translação e reflexão introduzidas nas atividades anteriores. Além de usar as outras ferramentas do *Cabri 3D* e complementar o trabalho da atividade anterior, acrescentando a "sombra" do balanço orientada em qualquer direção.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** nesta atividade, devemos mobilizar as noções de circunferência, arco, segmento, vetor, plano, ponto, rotação, translação e reflexão.
- **Regras-de-ação:** uma possível sequência de ações foi apresentada em detalhe nos dados do Quadro 55 e na Figura 98, conforme a tabela do modelo SAI.

Quadro 55. possível sequência de ações da atividade "sombra do balanço"

Quinta atividade: sombra do balanço			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta reta
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta reta
3	Clica/manipula	Ferramenta reta	Reta (por um novo ponto no plano de base)
4	Clica/pressiona	Botão esquerdo do mouse/tecla Shift	Reta (por um novo ponto no espaço) / validar
5	Clica	Teclado/funções	Função F1 (ajuda)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta paralela
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta paralela

8	Clica/manipula	Botão esquerdo do mouse/ferramenta paralela	Reta
9	Clica/manipula	Botão esquerdo do mouse/ferramenta paralela	Ponto (passando por N)
10	Repete a mesma sequência (ferramenta paralela) para os outros pontos do balanço		
11	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
12	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
13	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (pelos pontos colineares das interseções das retas paralelas com o plano de base)
14	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (pelos pontos das interseções das retas paralelas que formam a sombra do balanço no plano de base)
15	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
16	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Retas paralelas (esconder)
17	Repete a mesma sequência (caixa estilo/esconder) para as outras retas paralelas		
18	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (forma a sombra do balanço no plano de base)
19	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
20	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Segmento (mudar de cor/ cinza)
21	Repete a mesma sequência (caixa estilo/cor) para os outros segmentos da sombra		
22	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Recurso de animação (F10)
23	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto livre P
24	Clica	Recurso de animação	Animação do ponto livre P
25	Clica/manipula	Recurso de animação	Velocidade de animação
26	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do balanço com sombra

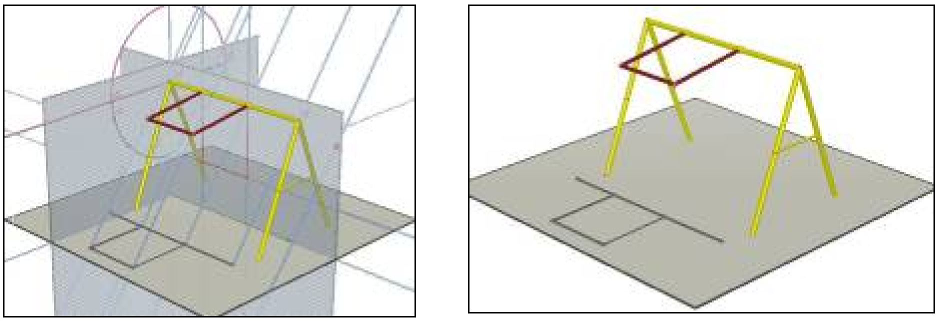


Figura 98. Possível construção do modelo "sombra do balanço"

Análise *a posteriori*

Como esta atividade tinha a mesma sequência de ações das duas anteriores, os alunos não apresentaram dificuldades e trabalharam, usando as estratégias previstas na análise *a priori,* empregando a transformação rotação, além das outras transformações geométricas no espaço.

Por exemplo, o aluno Álvaro (Quadro 56) reutilizou o modelo da atividade anterior e construiu a sombra do balanço sem apresentar dificuldade, fato que nos fez supor que empregou um esquema semelhante ao pressuposto na análise a *priori*. Além disso, manipulou e movimentou sua construção, utilizando as ferramentas respectivas.

Quadro 56. Modelo “sombra do balanço” construída por Álvaro

	O aluno criou uma reta inclinada que se intersecta com o plano de base e retas paralelas a esta que passam pelos vértices do balanço.
	Álvaro terminou sua construção e mudou o ponto de vista, além de animar o balanço.

Como Álvaro, outros alunos como, por exemplo, Francisco e Carlos, utilizaram como base o modelo “balanço com animação” da atividade anterior para construir a sombra do balanço.

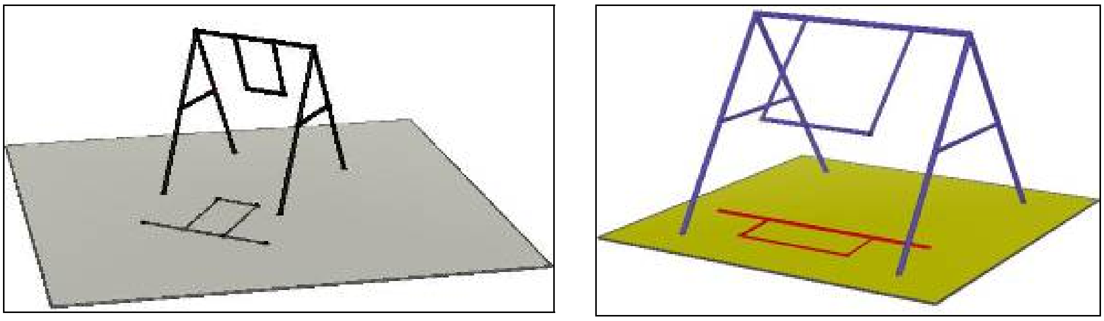


Figura 99. Sombra do balanço construída por de Francisco (a) e Carlos (b)

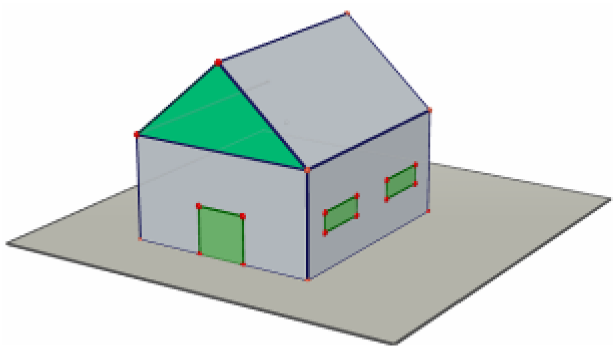
Francisco e Álvaro criaram uma reta inclinada ao plano de base, após criaram retas paralelas a primeira e no ponto de interseção dessas retas com o plano de base (chão) construíram a sombra do balanço. (Figura 99)

Na presente atividade, os alunos já *instrumentados* com as ferramentas e os recursos do *software*, necessários para essa construção, mostraram estar *instrumentados* também em relação às ferramentas utilizadas nas atividades anteriores, o que nos fez afirmar que usaram esquemas preexistentes e instrumentos (parte das ferramentas do *Cabri 3D*).

Quarto encontro

Atividade: casa

Construir uma casa sendo que a porta e as duas janelas deverão ter um movimento de rotação



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Você pode usar as funções:
"Ajuda de ferramentas" ***(F1)****: fornece informações sobre como construir um determinado objeto; "Desfazer"* ***(CTRL+Z)****: desfaz a última operação realizada; "Mudar de vista": a partir do botão direito do mouse.*
Quando desejar, você pode modificar o estilo dos objetos (cor, espessura, preenchimento, **esconder / mostrar,** etc.) selecionando o objeto com o botão direito do mouse

Análise *a priori*

No modelo animado "casa", objetivamos utilizar a ferramenta "rotação" do *Cabri 3D* acompanhada do recurso "animação" e mobilizar noção de rotação para que as portas e janelas da casa mostrem movimento.

Nesse encontro, é importante assinalar que só esse modelo é trabalhado, porque pensamos que, em razão de seu grau de complexidade, essa construção possa demandar tempo.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** além da noção de rotação, poliedro, retângulo, circunferência, arco, reta (reta perpendicular), segmento, vetor, plano, ponto e ponto médio, a construção pode ser feita, também, por meio da mobilização de simetria axial e translação.

- **Regras-de-ação:** são apresentadas em detalhe nos dados do Quadro 57, de acordo com a tabela do modelo SAI. Criamos um paralelepípedo, um ponto médio na aresta superior e uma reta perpendicular que passa por esse ponto.

Em seguida, são criados: um prisma triangular (Figura 100); o ponto de intersecção entre a perpendicular e o plano de base; um ponto qualquer na aresta da base do paralelepípedo e outro simétrico a este. Por esses dois pontos, retas perpendiculares ao plano de base e uma reta paralela, também, ao plano de base, são criadas, bem como um polígono (porta). Para criar as janelas, repetimos o mesmo procedimento de construção da porta, criamos uma janela e a outra por reflexão. Para o movimento da porta e das janelas, criamos uma circunferência em torno à reta, um arco e um ponto livre nele. Em seguida, fazemos a rotação da a porta em torno à reta, segundo o ângulo de rotação desejado e animamos o ponto livre. Para o movimento das janelas, realizamos o mesmo procedimento.

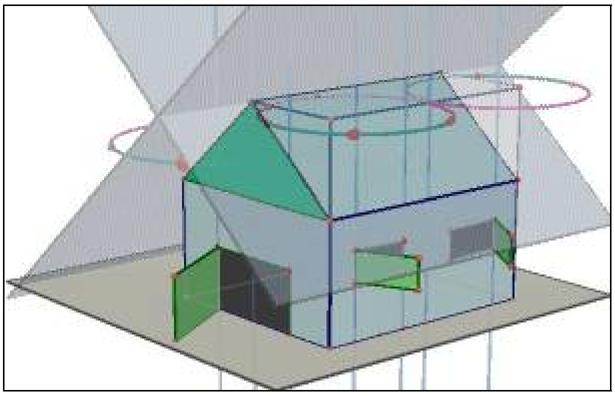


Figura 100. Processo de construção da casa *a priori*

Quadro 57. Possível sequência de ações da atividade "casa"

Atividade: casa			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas poliedros
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta paralelepípedo
3	Clica/pressiona	Botão esquerdo do mouse/tecla SHIFT	Paralelepípedo (plano de base)
4	Clica	Botão esquerdo do mouse	Paralelepípedo (valida)
5	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas poliedros
6	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta paralelepípedo
7	Clica/pressiona	Botão esquerdo do mouse/tecla SHIFT	Paralelepípedo (sobre o outro construído)
8	Clica	Botão esquerdo do mouse	Paralelepípedo (valida)
9	Clica	Teclado	Função F1
10	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
11	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio
12	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta ponto médio	Ponto (qualquer vértice do segundo paralelepípedo)
13	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta ponto médio	Ponto (vértice oposto do segundo paralelepípedo/ valida)
14	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta plano
15	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta "plano"
16	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto médio (criar o plano no segundo)
17	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto (vértice da base do segundo paralelepípedo)
18	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto colinear (vértice da base do segundo paralelepípedo/valida)
19	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta recorte de poliedro
20	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta recorte de poliedro
21	Clica	Botão esquerdo do mouse	Plano (para recortar poliedro)
22	Clica	Botão esquerdo do mouse	Paralelepípedo (prisma triangular criado pela interseção do plano com o paralelepípedo)
23	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa estilos
24	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Plano (esconder)
25	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta plano
26	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto médio (criar o plano no segundo/lado oposto)
27	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto (vértice da base do segundo paralelepípedo)
28	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta plano	Ponto colinear (vértice da base do segundo paralelepípedo/valida)
29	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta recorte de poliedro
30	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta recorte de poliedro
31	Clica	Botão esquerdo do mouse	Plano (para recortar poliedro)
32	Clica	Botão esquerdo do mouse	Paralelepípedo (prisma triangular criado pela interseção do plano com o paralelepípedo)
33	Seleciona/clica	Mouse/botão direito do mouse	Plano (Caixa estilos)
34	Clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Esconder plano
35	Seleciona/clica	Mouse/botão direito do mouse	Ponto no espaço (Caixa estilos)
36	Clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Esconder ponto no espaço
37	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
38	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio

39	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Aresta (lateral da base do primeiro paralelepípedo/ plano de base)
40	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
41	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
42	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ponto médio (aresta lateral da base do primeiro paralelepípedo/ plano de base)
43	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Plano de base (validar a reta perpendicular que passa pelo ponto médio)
44	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
45	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio
46	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Vértice e ponto de interseção da perpendicular com aresta da base (validar ponto médio).
47	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Vértice da base e ponto médio criado anteriormente
48	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Ponto médio e perpendicular (validar)
49	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
50	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
51	Clica	Botão esquerdo do mouse	Ponto médio (dois últimos criados/ criar e validar as perpendiculares)
52	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta polígono
53	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta polígono
54	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta polígono	Ponto nas retas perpendiculares (quatro pontos para criar um retângulo)
55	Clica	Botão esquerdo do mouse	Retângulo (validar)
56	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
57	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta simetria axial
58	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Retângulo
59	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta simetria axial	Reta perpendicular (passa pelo pto. médio da aresta da base do paralelepípedo/obtendo o objeto simétrico do retângulo)
60	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
61	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
62	Seleciona/clica	Mouse/ ferramenta perpendicular	Ponto (vértice superior do paralelepípedo recortado - forma triangular)
63	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta perpendicular	Plano de base (validar)
64	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
65	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio
66	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Vértice e ponto de interseção à perpendicular e o plano de base (validar ponto médio)
67	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
68	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
69	Seleciono/clica	Mouse/ferramenta perpendicular	Ponto médio (entre a perpendicular e o vértice esquerdo do paralelepípedo/ validar a perpendicular)
70	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
71	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio
72	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Vértice e ponto de interseção à perpendicular e o plano de base (validar ponto médio)
73	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
74	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
75	Seleciono/clica	Mouse/ferramenta perpendicular	Ponto médio (entre a perpendicular e o vértice direito do paralelepípedo/validar a perpendicular)
76	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto

77	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
78	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta ponto	Ponto (última perpendicular criada)
79	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
80	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta simetria axial
81	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Ponto
82	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta simetria axial	Reta perpendicular (obtendo o objeto simétrico do retângulo)
83	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta polígono
84	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta polígono
85	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta polígono	Ponto nas retas perpendiculares (quatro pontos para criar um retângulo)
86	Clica	Botão esquerdo do mouse	Retângulo (validar)
87	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto médio
88	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto médio
89	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto médio	Aresta (lateral da base do primeiro paralelepípedo/ plano de base)
90	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Reta (não servirá de eixo) (Caixa estilos)
91	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Reta (Caixa estilos)
92	Clica	Botão esquerdo do mouse	Esconder reta
93	Repete o mesmo procedimento para esconder as três retas que não são eixos da porta e janela da construção		
94	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
95	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
96	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta circunferência	Circunferência (em torno à reta)
97	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta circunferência	Circunferência (validar)
98	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta arco
99	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta arco
100	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta arco	Três pontos da circunferência (validar arco)
101	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
102	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
103	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto	Ponto livre (no arco)
104	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
105	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
106	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo da circunferência)
107	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Retângulo (janela da casa)
108	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Ponto livre
109	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Ponto (extremo do arco sentido horário)
110	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ponto livre
111	Pressiona	Tecla F10	Animação
112	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Iniciar animação
113	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de transformações geométricas
114	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular (eixo de simetria axial)
115	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Reta perpendicular (eixo janela/ validar)
116	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Circunferência (validar)
117	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Reta perpendicular (eixo janela/ validar)
118	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Arco (validar)

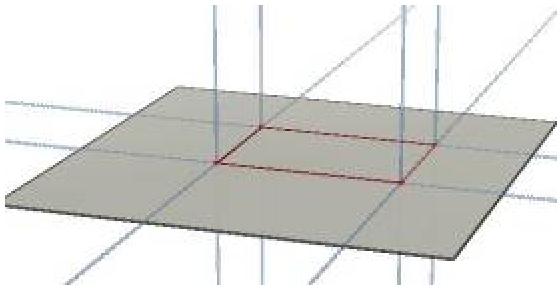
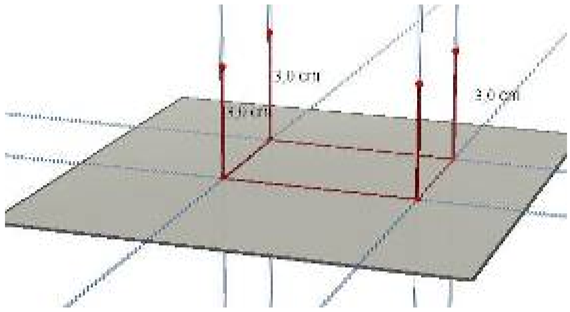
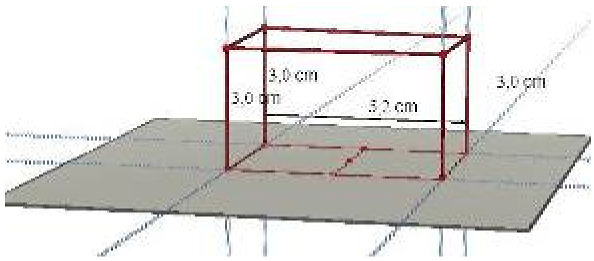
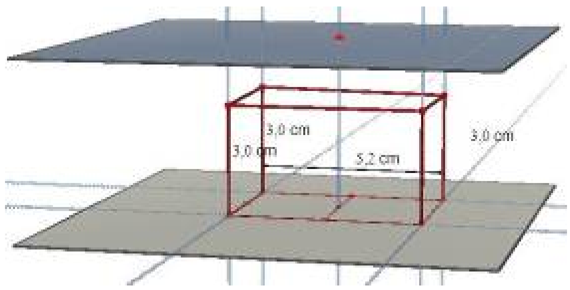
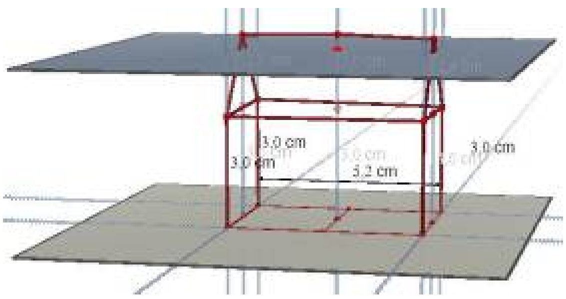
119	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Reta perpendicular (eixo janela/ validar)
120	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta simetria axial	Ponto livre (validar)
121	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
122	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta Rotação
123	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo janela)
124	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Polígono (retângulo)
125	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Ponto livre
126	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Ponto (extremo do arco/ sentido anti-horário)
127	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
128	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Reta perpendicular (eixo da porta/ validar)
129	Clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta circunferência	Circunferência (validar)
130	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta arco
131	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta arco
132	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta arco	Três pontos da circunferência (validar arco)
133	Seleciona/clica	Mouse/Botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
134	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
135	Seleciona/clica	Mouse/ferramenta ponto	Ponto livre (no arco)
136	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa de ferramentas transformações
137	Aciona	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
138	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ferramenta rotação	Reta perpendicular (eixo da circunferência)
139	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Retângulo (porta da casa)
140	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Ponto livre
141	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse/ ferramenta rotação	Ponto (extremo do arco sentido horário/ validar a rotação)
142	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ponto livre
143	Pressiona	Tecla F10	Animação
144	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Iniciar animação
145	Esconder todos os objetos criados que não comportem o modelo da ficha		
146	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação da casa com movimento de rotação das janelas e a porta

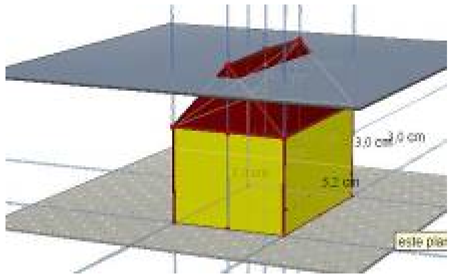
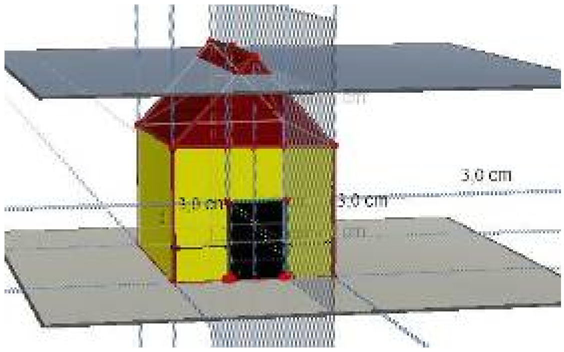
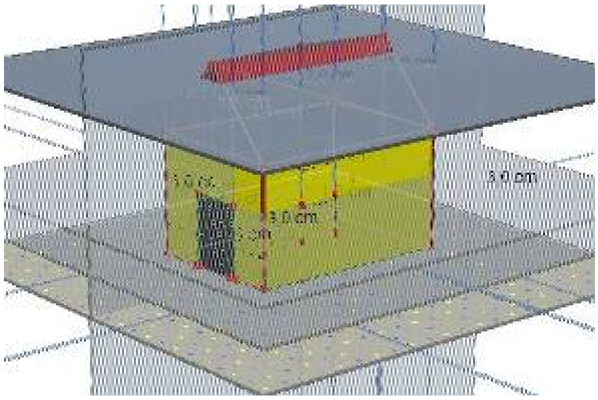
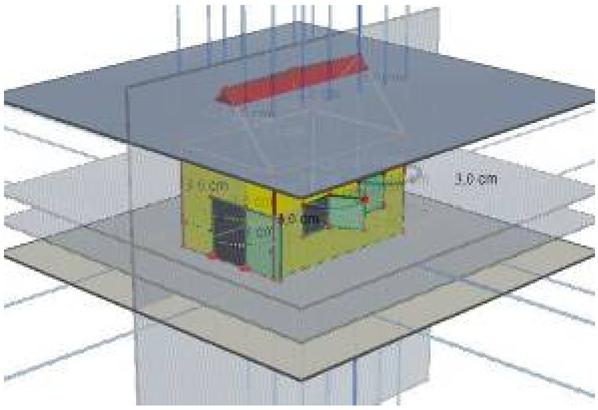
Análise *a posteriori*

A atividade “casa” foi analisada *a posteriori,* segundo a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) e os registros de Representação Semiótica, de Duval (1995) que foi desenvolvida pelos três alunos observados.

1. Ações de Andreya

Quadro 58. Sequência de ações de Andreya para a construção da atividade "casa"

Ações	Processo de construção
Criou duas retas no plano de base perpendiculares entre si e duas paralelas a estas. Criou quatro segmentos de extremos os pontos de intersecção entre as retas. Criou quatro retas perpendiculares ao plano de base com cada uma passando por um ponto de interseção.	
Por uma dessas retas, criou um ponto e mediu a distância entre esse ponto e o plano de base. Manipulou o ponto até obter 3 cm de medida. Repetiu o procedimento para as demais perpendiculares para criar quatro segmentos, em cada uma delas, com 3 cm de medida.	
Mais quatro segmentos foram criados para assim formar a estrutura do poliedro. Mediu os segmentos, obteve o ponto médio de dois segmentos paralelos para criar um segmento entre eles.	
Marcou o ponto médio desse segmento e por esse ponto criou uma perpendicular ao plano de base. Por essa perpendicular, criou um ponto e um plano paralelo ao de base, passando por esse ponto.	
Marcou os pontos médios dos segmentos laterais e por eles traçou uma perpendicular ao plano de base. Por essa perpendicular, criou dois segmentos e formou o perímetro do triângulo. Mediu a altura do triângulo para e criou outro do lado oposto, utilizando o mesmo procedimento. Criou um novo segmento, tendo como extremos os vértices dos triângulos.	

O telhado foi coberto por triângulos e as paredes, com quadriláteros.	
Para construir a porta, marcou um ponto no segmento (contido no plano de base). Mediu a distância desse ponto com o vértice do quadrilátero contido no plano de base e por ele traçou uma perpendicular. Marcou outro ponto no mesmo segmento, para que a porta fosse construída.	
Para construir umas das janelas, traçou duas perpendiculares de tal forma que entre elas houvesse uma distância para construir um quadrilátero. Marcou dois pontos em cada perpendicular de maneira que estivesse na mesma altura. (Andreya criou esses pontos aleatoriamente e manipulou-os de maneira que "ficassem" na mesma direção, como se fossem vértices de um quadrado, em nenhum momento usou *simetria* axial ou *reflexão)*. Criou dois planos paralelos ao plano de base, um plano passando pelo os dois pontos superiores e outro plano pelos pontos inferiores.	
Criado o plano superior, decidiu terminar a construção da porta. Para isso, criou uma circunferência no plano paralelo superior em torno da perpendicular (eixo); um arco sobre essa circunferência e por ele um ponto livre. Rotacionou o polígono em torno do eixo (perpendicular), deslocando o ponto livre criado. O ponto livre foi animado para dar movimento à porta. Para as janelas, o mesmo procedimento foi realizado.	

Por fim, para ver sua construção, mudou o ponto de vista e escondeu alguns objetos.	

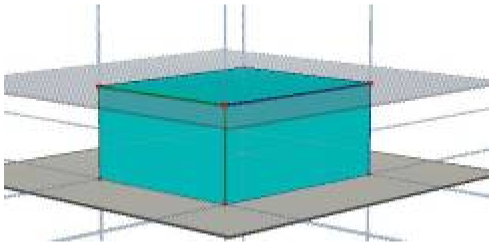
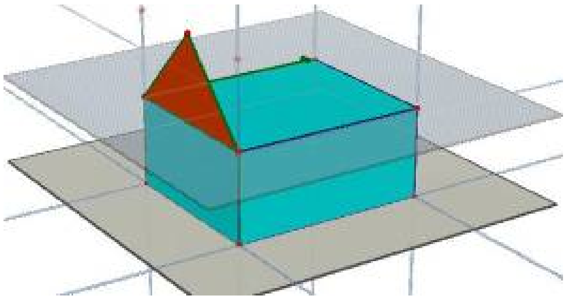
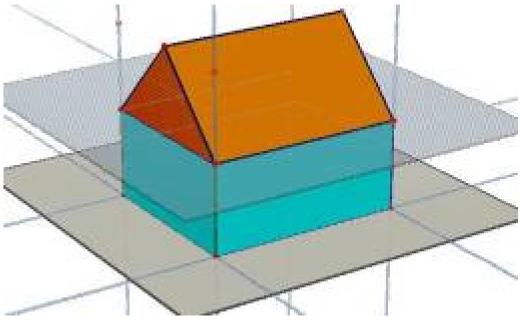
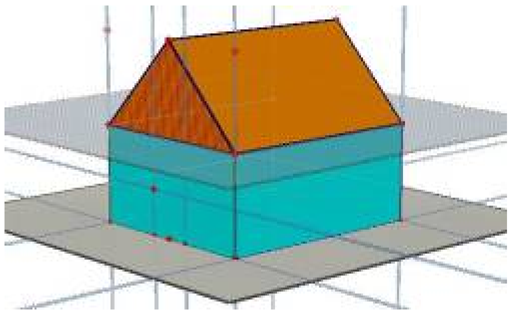
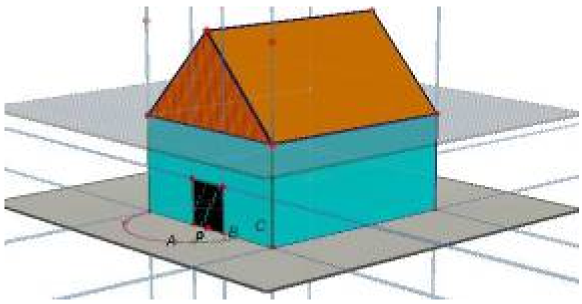
2. Ações de Pedro

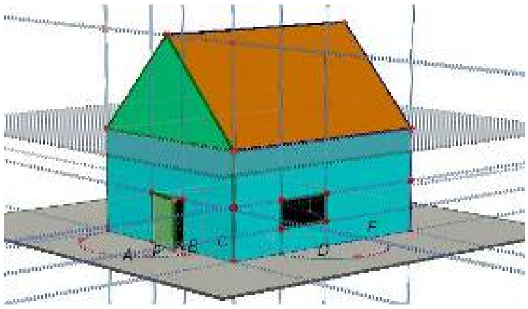
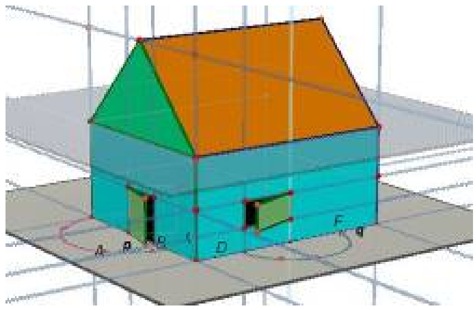
Para fazer a base da casa, Pedro criou quatro retas perpendiculares no plano de base e quatro segmentos para juntá-los (fazer um quadrado), depois criou um plano paralelo e um polígono nele. Após isso, para fazer as paredes da casa com a ferramenta “plano” criou planos que passam pelas retas perpendiculares (Figura 101) e, em seguida, criou um polígono (triângulo - para fazer o teto da casa) e um vetor paralelo com a mesma medida que o segmento da base, após, usou a ferramenta prisma e construiu o teto da casa.

Não obstante, ao ocultar os planos que formavam as paredes percebeu que elas desapareciam. Logo, apagou sua construção e começou novamente. Os dados do Quadro 59 mostram a segunda tentativa de construção realizada por Pedro.

Figura 101. Primeira construção da casa realizada por Pedro

Quadro 59. Sequência de ações de Pedro para a construção da atividade “casa”

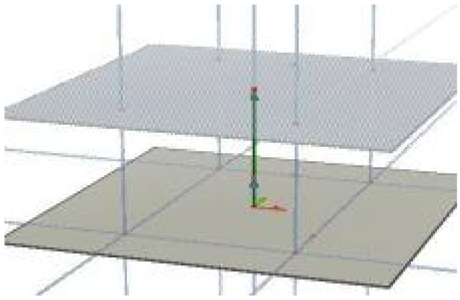
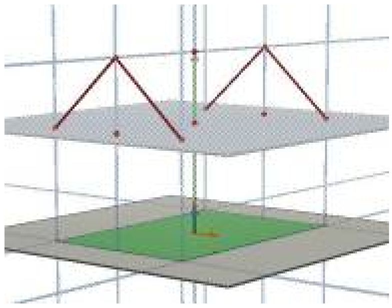
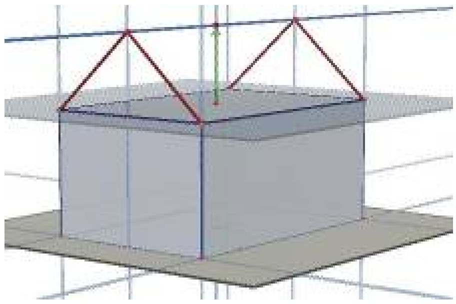
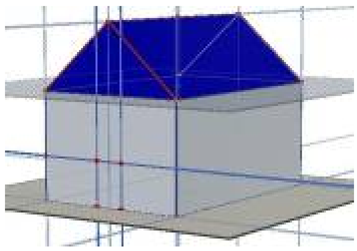
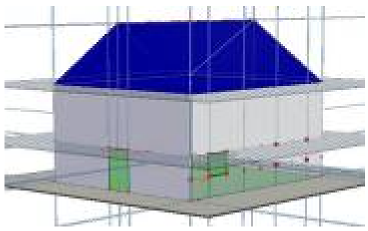
Ações	Processo de construção
Criou retas paralelas e construiu perpendiculares a estas e um plano paralelo ao plano de base para fazer o “esqueleto da casa”. Marcou os pontos de interseção, criou um poliedro convexo.	
Marcou dois pontos em duas retas perpendiculares (frente da casa), tal que ambos estejam na mesma altura ao plano de base e o ponto médio entre eles, e depois criou um triângulo.	
Depois disso, criou um vetor que passa por uma aresta superior do poliedro para construir um prisma (teto da casa).	
Criou o ponto médio de uma das arestas da base da casa (frente) e utilizou a simetria central para criar dois pontos simétricos. Passou por eles, retas perpendiculares e, depois, uma reta paralela ao plano.	
Criou um polígono (porta), uma circunferência com centro na perpendicular no plano de base, um arco e um ponto livre nele.	

Construiu a imagem do polígono em torno dessa reta, segundo o ângulo – dos pontos do arco, sendo um deles o ponto livre – animou o ponto livre e conseguiu dar movimento à porta.	
Para a janela, repetiu o mesmo procedimento. Criou duas retas paralelas ao plano de base para construir a estrutura da janela (a janela é, nesse caso, um retângulo). Após disso, para animar a janela, repetiu o mesmo procedimento.	
Por último, escondeu os objetos para ver sua construção.	

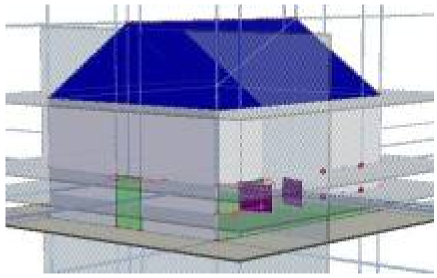
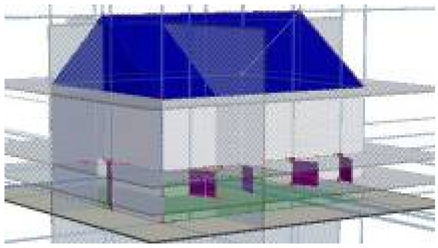
Pedro utilizou o recurso “atributos” para mudar as cores da casa, mas, mesmo que pudesse construir a segunda janela da casa, não realizou essa construção. Pensamos que ele não construiu a outra janela porque talvez quisesse passar à seguinte atividade ou como conseguiu construir a primeira janela, perdeu o interesse em fazer a outra.

3. Ações de Carlos

Quadro 60. Sequência de ações de Carlos para a construção da atividade "casa"

Ações	Processo de construção
Criou retas paralelas, construiu retas perpendiculares no plano de base, retas perpendiculares ao plano da base; um vetor de medida aleatória na reta perpendicular que passa pelo centro e transladou o plano de base segundo esse vetor.	
Depois disso, marcou os pontos médios dos lados que representam a frente e o fundo da casa e criou um novo vetor na perpendicular do centro e perpendiculares ao plano de base pelos pontos médios já criados (frente e fundo).	
Criou uma reta paralela a uma das retas do plano de base passando pelo extremo do segundo vetor, criou segmentos que formam parte do telhado e um retângulo no plano de base e para as *paredes*, construiu um prisma.	
Para o *telhado,* utilizou polígonos: triângulos, frente e fundo e retângulos para as laterais. Após mudar a cor do telhado, iniciou a construção da *porta*.	
Criou um ponto próximo ao ponto médio à *frente da casa* e seu simétrico, retas perpendiculares ao plano de base passando por esses pontos. Marcou um ponto na perpendicular que passa pelo ponto médio e traçou uma reta paralela ao lado "frente" do retângulo. Criou um retângulo para indicar a porta e um plano paralelo ao plano de base de mesma altura da porta, cobriu com polígonos a frente da casa	

<table>
<tr><td>Pelo plano paralelo, criou uma circunferência com centro em uma das perpendiculares, um arco na circunferência e um ponto livre sobre ele.

Rotacionou a porta em torno da perpendicular, centro da circunferência, segundo um ângulo (dois pontos no arco) e animou a porta.</td><td></td></tr>
<tr><td>Em cada lateral da casa, foram construídas duas janelas. A primeira foi construída e animada utilizando o mesmo procedimento de construção e animação da porta e empregando a transformação reflexão. As outras três foram construídas com as transformações reflexão e translação.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Por fim, cobriu com polígonos toda a casa e utilizou os atributos para a cor, escondeu alguns objetos e mudou o ponto de vista para ver sua construção.</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Análise das ações

As estratégias de construção dos alunos foram diferentes das que havíamos pressuposto na análise *a priori*. Cada aluno utilizou um *esquema de utilização* diferente. Isso se torna evidente quando observamos o tratamento dado ao *registro figural dinâmico*.

Assim, as ações de Andreya e Pedro para a construção da casa mostram a mobilização de *esquemas de utilização*, já desenvolvidos em outras atividades, assim, quando Pedro construiu as paredes da casa com planos paralelos e perpendiculares ao plano de base. Especificamente, utilizou seu esquema relativo ao funcionamento e manipulação do *Cabri 3D*, posto que já *instrumentado* nessas ferramentas e recursos, no sentido de Rabardel (1995a), conseguiu utilizá-las de maneira independente, sem as orientações do professor ou da ficha.

Por sua parte, Andreya, por exemplo, construiu a casa (paredes e teto), criando em primeiro lugar a estrutura com retas, segmentos e polígonos. Essas ações mostram o uso de seu *esquema de utilização* que acomoda o esquema preestabelecido à nova situação. Além disso, é importante mencionar que empregou a transformação geométrica rotação. Observamos, também, que tanto Andreya como Pedro utilizaram a rotação para movimentar a porta e as janelas, conseguindo dessa maneira terminar seus modelos com sucesso.

Ressaltamos que o processo de construção da casa realizada por Andreya e Pedro mostrou que estão *instrumentalizados* nessas ferramentas e recursos do *Cabri 3D* além de, também, estar *instrumentalizados* na noção de rotação, sem a qual não poderiam ter terminado a casa como solicitado na atividade.

Por sua parte, Carlos (Figura 102) adotou a seguinte ordem de construção: base, estruturas das paredes e do telhado, preenchimento da casa e, por fim, portas, janelas e sua animação. Em sua estratégia de construção, mobilizou noções de: retas, planos paralelos e perpendiculares, ponto médio, polígonos, prisma, poliedros e transformações geométricas no espaço.

Figura 102. Carlos construindo a estrutura da casa

Além disso, pudemos observar que Carlos mostrou-se motivado e criativo, já que adicionou outros elementos ao modelo apresentado na ficha, pois construiu e animou quatro janelas com duas “folhas” e não apenas duas com uma “folha” (Figura 103). Além disso, construiu três janelas por reflexão e translação baseado em uma já construída e animada, para que o movimento delas estivesse vinculado ao movimento da primeira.

Figura 103. Carlos construindo as das janelas da casa

Diante essas ações, observamos que os alunos tiveram apreensão sequencial, porque embora cada um deles desenvolvesse uma estratégia diferente e sua sequência de ações (passo) para realizar a construção da casa foi também diferente (ver Quadros 58, 59 e 60), conseguiram terminar a referida construção. Assinalamos, também, que as ações dos alunos indicam sua apreensão perceptiva da figura, porque eles identificaram de maneira imediata os objetos matemáticos que formam a estrutura da casa.

Além disso, a maneira como a atividade foi desenvolvida, nos faz coligir que a visualização, conforme Duval (2002) ocorreu, porque a atividade permitia que os alunos realizassem sua construção com alvedrio, já que não tinham necessidade de seguir um roteiro de construção.

Essa visualização só foi possível por meio da apreensão operatória que os alunos tiveram além de articular com sucesso a apreensão perceptiva e operatória, de acordo com Duval (1995), visto que conseguiram terminar e validar suas construções. Assim, observamos que em suas estratégias de construção, quando usaram as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, estabeleceram relações entre casa e objetos matemáticos: retas e planos paralelos e perpendiculares, vetor, polígono (retângulos, quadrados, triângulos), paralelepípedo e transformações geométricas (rotação, translação, reflexão), ou seja, houve identificação de elementos matemáticos, bem como organização entre suas relações.

Conforme a abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), as ações apresentadas pelos alunos mostram que os processos de *instrumentação* e *instrumentalização* aconteceram. Esses processos, embora diferentes para cada sujeito, confirmam-se por meio das ações que evidenciaram esquemas preestabelecidos e/ou desenvolvimento de novos *esquemas de utilização*.

As ações dos alunos na construção do modelo animado “casa” e os conhecimentos geométricos mobilizados possibilitaram a utilização de movimentos regidos por transformações geométricas, especialmente, da transformação rotação, como tínhamos previsto na análise *a priori*.

Percebemos também que, na interação com o *Cabri 3D*, os alunos conseguiram transferir seus conhecimentos geométricos aprendidos em sala de aula, até então, de Geometria Plana, para o espaço.

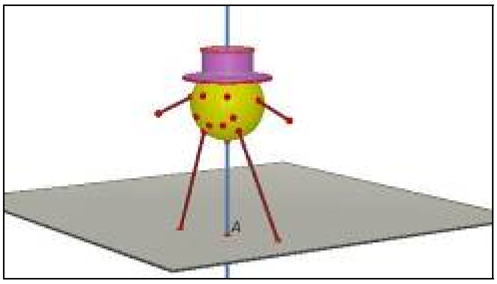
Por fim, podemos afirmar que, durante o desenvolvimento das ações na interação com o *Cabri 3D*, bem como na mobilização das noções de transformações geométricas no espaço, a Gênese Instrumental dos alunos aconteceu nessa atividade.

Quinto encontro

Neste quinto encontro, planejamos o desenvolvimento de duas construções de modelos chamadas: “boneco” e “boneco animado”, em que utilizamos as ferramentas e recursos do *Cabri 3D* “transformações” e outras introduzidos nas atividades anteriores, além de mobilizar noções de transformações geométricas.

Atividade 1: boneco

Construir um boneco (cabeça, mãos, pés, olhos, chapéu) a partir de uma reta perpendicular ao plano de base, passando por um ponto A.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_boneco_1

Análise *a priori*

Para construir o boneco sem animação: cabeça, mãos, pés, olhos e chapéu – visamos à utilização das ferramentas “simetria axial” e “rotação” além ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D* usadas ao longo dos encontros. Além de mobilizar as noções de transformações no espaço e as outras noções matemáticas introduzidas nas atividades anteriores.

Pensamos que a construção do modelo “boneco” podia ser difícil para os estudantes, uma vez que estavam envolvidos muitos conteúdos geométricos que eles poderiam não ter estudado ainda.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** Para a construção do modelo “boneco”, o aluno deve mobilizar noções de rotação, simetria axial, cilindro, cone, esfera, circunferência, arco, reta, segmento, vetor, plano e ponto.
- **Regras-de-ação:** são mostradas em detalhe nos dados do Quadro 61, conforme a tabela do modelo SAI.

Quadro 61. Possível sequência de ações da atividade “boneco”

Primeira atividade: boneco			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
3	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto/valida
4	Digita	Letra A	Nomear o ponto A
5	Digita	Teclado	Nomear o ponto A (estilo)
6	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
7	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
8	Clica/manipula	Ferramenta perpendicular	Perpendicular (passa pelo ponto A)/valida
9	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
10	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
11	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (no plano de base)/valida
12	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
13	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na reta perpendicular) /valida
14	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta esfera
15	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta esfera
16	Clica/manipula	Ferramenta esfera	Esfera (pelo ponto criado na reta perpendicular ao plano de base)/valida
17	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta plano
18	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta plano

19	Clica/manipula	Ferramenta plano	Plano (pelo ponto livre A perpendicular ao plano de base)/valida
20	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
21	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	plano (esconder)
22	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta curva de intersecção
23	Clica/manipula	Ferramenta curva de intersecção	Curva de intersecção (pelo plano perpendicular e a esfera)/valida
24	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
25	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
26	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na esfera – formar olho do boneco) /valida
27	Repete a mesma sequência cinco vezes para o outro olho e a boca do boneco		
28	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto de intersecção
29	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto de intersecção
30	Clica/manipula	Ferramenta ponto de intersecção	Intersecção (da esfera com a reta perpendicular)
31	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
32	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
33	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na parte superior da esfera)/valida
34	Clica/manipula	Ferramenta plano paralelo	Plano paralelo ao plano de base pelo ponto na esfera)/valida
35	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta curva de intersecção
36	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta curva de intersecção
37	Clica/manipula	Ferramenta curva de intersecção	Curva de intersecção (pelo plano paralelo e a esfera)/valida
38	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
39	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
40	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência (no plano paralelo e como centro a esfera)/valida
41	Clica/manipula	Ferramenta curva de intersecção	Curva de intersecção (pelo plano paralelo e a esfera)/valida
42	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
43	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência
44	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência (no plano paralelo e como centro a esfera)/valida
45	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta vetor
46	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
47	Clica/manipula	Ferramenta vetor	Vetor (no plano paralelo e na reta perpendicular)/valida.
48	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta cone
49	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cone
50	Clica/manipula	Ferramenta cone	Cone (no plano paralelo e na circunferência e como vértice o centro da circunferência) /valida.
51	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta cilindro
52	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta cilindro
53	Clica/manipula	Ferramenta cilindro	Cilindro (no plano paralelo, na circunferência e no vetor)/valida
54	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto
55	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
56	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na curva de intersecção com o plano) /valida
57	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta simetria axial
58	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta simetria axial

59	Clica/manipula	Ferramenta simetria axial	Simetria axial (do ponto em torno da reta perpendicular)/valida
60	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
61	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento.
62	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (no plano de base)/valida
63	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta esfera
64	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta esfera
65	Clica/manipula	Ferramenta esfera	Esfera (de raio o segmento que passa pelo ponto criado na intersecção)/valida
66	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta rotação
67	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
68	Clica/manipula	Ferramenta rotação	Rotação da esfera (em torno da reta perpendicular, segundo o ângulo de 180^0) /valida
69	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
70	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Esfera direita (superfície hachuras finas)
71	Clica	Botão direito do mouse	Caixa de estilos
72	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo	Esfera esquerda (superfície hachuras finas)
73	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto de intersecção
74	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto de intersecção
75	Clica/manipula	Ferramenta ponto de intersecção	Ponto (da esfera com o plano perpendicular)/valida
76	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
77	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
78	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento na esfera (um extremo no centro outro no ponto (68)/valida
79	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta rotação
80	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
81	Clica/manipula	Ferramenta rotação	Rotação do segmento (em torno da reta perpendicular, segundo o ângulo de 180^0)/valida
82	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
83	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência.
84	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência (com centro no ponto A no plano de base ponto)/valida
85	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
86	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
87	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo na esfera e o outro em um ponto da circunferência (77)/valida
88	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta rotação
89	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
90	Clica/manipula	Ferramenta rotação	Rotação do segmento (80) em torno da reta perpendicular, segundo o ângulo de 180^0/valida.

A sequência de construção do boneco (Figura 104) mostra sua complexidade, pois ao deslocar a figura ela deverá conservar suas propriedades, isto é, as mãos, pés, olhos e chapéu, partes do boneco devem manter suas posições, como um todo.

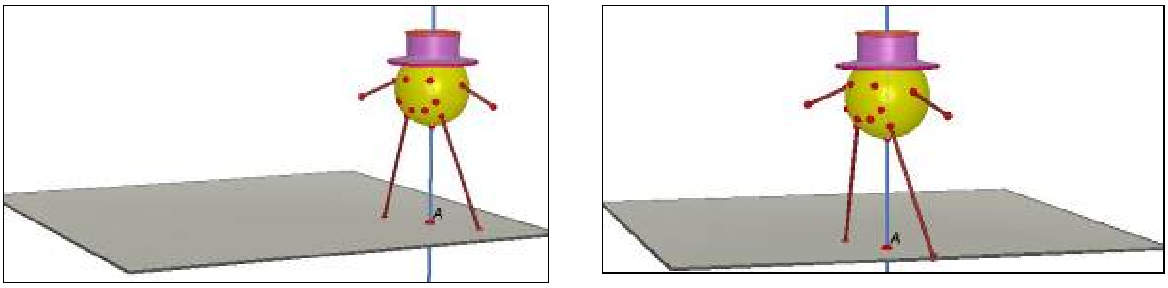


Figura 104. Modelo boneco em duas posições

Análise *a posteriori*

A construção do modelo boneco foi difícil para a maioria dos alunos, como tínhamos previsto, além de tomar mais tempo do planejado (todo o quinto encontro). Embora os alunos apresentassem dificuldades, observamos que Fernanda, por exemplo, (Figura 105) usou, tanto a ferramenta "reflexão" do *Cabri 3D* como a noção de reflexão para construir as partes do boneco.

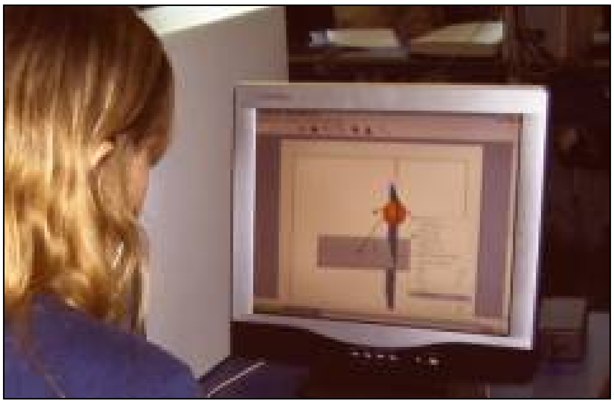
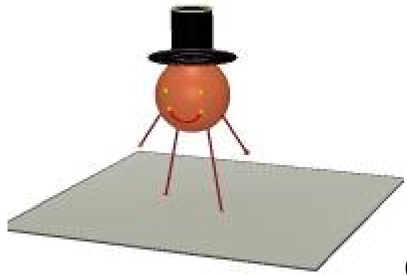
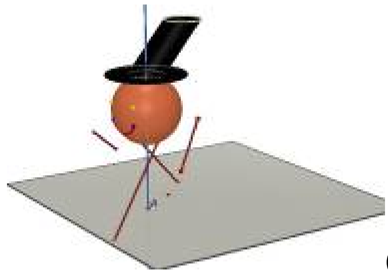


Figura 105. Processo de construção do boneco realizada por Fernanda

Outro aluno Pedro, por exemplo, empregou a transformação translação e outros conceitos de geometria e conseguiu fazer o boneco "estático". No entanto, quando mudou a posição do boneco, algumas partes, como chapéu e braços, não conservaram sua forma original, por exemplo, os braços do boneco desarranjaram-se. A figura (a) do Quadro 62 apresenta o boneco, após construído e, a figura (b) do mesmo quadro mostra o boneco, depois de mudar a posição original (não preserva suas propriedades).

Quadro 62. Processo de construção do boneco realizado por Pedro

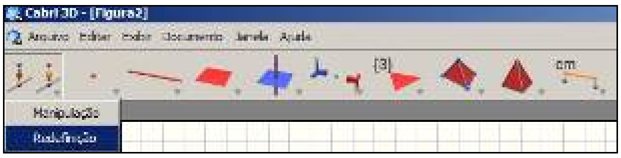
Ações	Processo de construção
O aluno construiu o boneco utilizando a transformação translação para os olhos, pontos extremos da boca e chapéu. Para os braços e pés, criou planos paralelos e segmentos.	 (a)
Não obstante, quando manipulou o boneco, este não preservou suas propriedades originais.	 (b)

A maioria dos alunos não conseguiu terminar o boneco satisfatoriamente. Nos dois exemplos apresentados, os alunos usaram as transformações reflexão e translação e não a rotação, que esperávamos que utilizassem segundo nossa análise *a priori*.

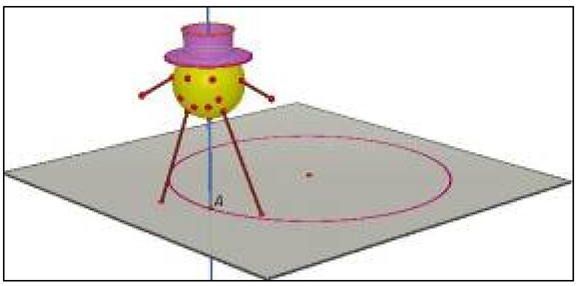
Notamos que só o modelo construído por Carlos conservava suas propriedades ao manipulá-lo.

Atividade 2: boneco animado

Criar uma circunferência e redefinir o ponto A, como sendo ponto da circunferência.



Animar o boneco ao redor de uma circunferência.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_boneco [animado]_1

Análise *a priori*

A atividade tem por objetivo construir o modelo “boneco animado”. O boneco deve movimentar-se ao redor da circunferência e utilizar a transformação rotação, além das outras transformações, ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D*.

A construção dos modelos bonecos é sequencial, e como aconteceu no modelo “boneco”, a construção do modelo “boneco animado” poderia também ser difícil para os alunos, visto que estão envolvidos conteúdos geométricos que eles poderiam ou não conhecer. Contudo, apresentamos a atividade por ser desafiadora e porque pensamos que proporcionam subsídios para observar o processo de *Gênese Instrumental*.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** Para realizar esta construção, as noções que podem ser mobilizadas são: rotação, simetria axial, cilindro, cone, esfera, circunferência, arco, reta, segmento, vetor e plano.
- **Regras-de-ação:** apresentamos em detalhe (Quadro 63) uma possível sequência de construção do modelo “boneco animado”, de acordo com a tabela do modelo SAI.

Quadro 63. Possível sequência de ações da atividade “boneco animado”

Segunda atividade: boneco animado			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
Utiliza a mesma sequência de ações que no boneco sem animação			
1	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta circunferência
2	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta circunferência.
3	Clica/manipula	Ferramenta circunferência	Circunferência (com centro no ponto A no plano de base ponto)/valida
4	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta segmento
5	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta segmento
6	Clica/manipula	Ferramenta segmento	Segmento (um extremo na esfera e o outro em um ponto da circunferência/valida)
7	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta rotação
8	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação

9	Clica/manipula	Ferramenta rotação	Rotação do segmento (6)(em torno da reta perpendicular, segundo o ângulo de 180^0)/valida
10	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Ponto livre
11	Pressiona	Tecla F10	Animação
12	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Iniciar animação
13	Esconder todos os objetos criados que não comportem o modelo da ficha		
14	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do boneco

Segundo os dados do Quadro 63, para a construção do modelo “boneco animado” (Figura 106), foi reutilizado o modelo “boneco” da atividade anterior.

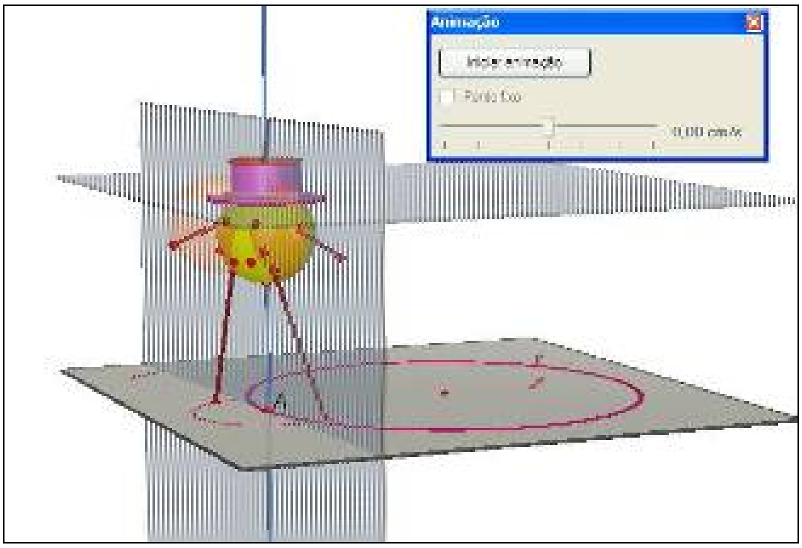


Figura 106. Construção do modelo “boneco animado”

Análise *a posteriori*

Da mesma forma que a atividade anterior, vários alunos não conseguiram realizar a construção solicitada porque, ao manipularem a figura, esta se desfazia. Assim, continuaram trabalhando no primeiro modelo “boneco” e alguns começaram o “boneco animado”, mas sem lograr que conservasse suas propriedades.

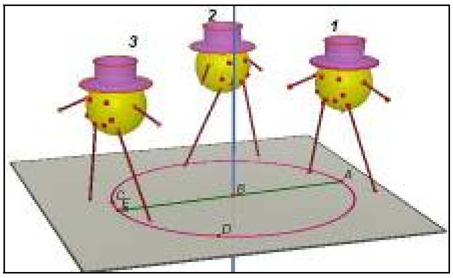
Como na atividade anterior, o aluno Carlos foi o único que conseguiu terminar o modelo “boneco animado” corretamente, isto é, conservando suas propriedades ao ser manipulado.

Sexto encontro

Nesse encontro, realizamos uma atividade, pois as construções dos modelos "boneco", "boneco animado" e "bonecos animados" por sua complexidade requerem tempo. Além disso, como os alunos demonstram dificuldades, o encontro anterior e o presente são dedicados à construção desses modelos.

Atividade: bonecos animados

Use o boneco construído no encontro anterior e crie dois pontos *C* e *D* na circunferência e uma reta perpendicular ao plano de base passando pelo centro *B* da circunferência. A seguir, rotacionar o boneco 1 em torno da reta com um ângulo de rotação *CBD* (clicar no eixo, em cada componente do boneco e, finalmente, nos pontos *C* e *D*), obtendo o boneco 2 . Em seguida, transladar o boneco 1, segundo o vetor *AE* obtendo o boneco 3. Animar o ponto *A*.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_boneco [animado]_2

Análise *a priori*

Visamos a terminar as construções dos modelos "boneco" e "boneco animado", já que a maioria dos alunos não terminou tais modelos das atividades anteriores.

Objetivamos também, construir o modelo "bonecos animados", no qual os bonecos 1, 2 e 3 devem-se movimentar ao redor de uma circunferência. Para tal, valemo-nos das noções de rotação, reflexão e translação, além das ferramentas e recursos do *Cabri 3D*.

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** para realizar a construção do modelo, devemos mobilizar as noções de: rotação, reflexão, translação, cilindro, cone, esfera, circunferência, arco, reta, segmento, vetor e plano.

- **Regras-de-ação:** são mostradas em detalhe nos dados do Quadro 64, de acordo com a tabela do modelo SAI.

Quadro 64. Possível sequência de ações da atividade "bonecos animados"

Atividade: bonecos animados			
	Ações	**Instrumento**	**Objeto**
Utiliza a mesma sequência de ações que no boneco sem animação e com animação			
1	Digita	Número 1	Nomear o boneco 1
2	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
3	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
4	Clica/manipula	Ferramenta perpendicular	Perpendicular (passa pelo centro dos eixos do plano de base da circunferência)/valida
5	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta ponto de intersecção
6	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto de intersecção
7	Clica/manipula	Ferramenta ponto de intersecção	Ponto de intersecção (perpendicular com o plano de base)/valida
8	Digita	Letra B	Nomear o ponto B (ponto de intersecção da perpendicular com o plano de base)
9	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
10	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na circunferência) /valida
11	Digita	Letra C	Nomear o ponto C (na circunferência)
12	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta ponto
13	Clica/manipula	Ferramenta ponto	Ponto (na circunferência) /valida
14	Digita	Letra D	Nomear o ponto D (na circunferência)
15	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta perpendicular
16	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta perpendicular
17	Clica/manipula	Ferramenta perpendicular	Plano perpendicular passando pelos pontos B e D/valida
18	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta rotação
19	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta rotação
20	Clica/manipula	Ferramenta rotação	Rotação da esfera em torno da reta B, segundo o ângulo CBD/valida
21	Repete o mesmo procedimento para cada objeto que forma o boneco		
22	Digita	Número 2	Nomear o boneco 2
23	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta vetor
24	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta vetor
25	Clica/manipula	Ferramenta vetor	Vetor passando pelos pontos B e D/valida
26	Seleciona/clica	Mouse/botão esquerdo do mouse	Caixa da ferramenta translação
27	Aciona	Botão esquerdo do mouse	Ferramenta translação
28	Clica/manipula	Ferramenta translação	Translação da esfera, boneco 1, segundo o vetor/valida.
29	Repete o mesmo procedimento para cada objeto que forma o boneco		
30	Seleciona/clica	Botão esquerdo do mouse	Iniciar animação
31	Digita	Número 3	Nomear o boneco 3
32	Esconder todos os objetos criados que não comportem o modelo da ficha		
33	Manipula	Botão direito do mouse	Visualiza animação do boneco

Análise *a posteriori*

Como assinalamos anteriormente, pelo alto grau de dificuldade da construção dos três modelos de bonecos, a maioria dos alunos continuou trabalhando nos modelos: “boneco” e “boneco animado”, sem chegar sequer ao modelo proposto para este último encontro. Entretanto, ressaltamos que os alunos não desistiram de fazer as construções e alguns até conseguiram fazer construções que, em principio, pareciam corretas, mas, quando a posição do boneco era mudada (manipulação direta), não conservavam as propriedades invariantes do modelo solicitado.

Contudo, observamos que os alunos, já instrumentados nas ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, mobilizaram noções de transformações geométricas no espaço. Mas, como Carlos foi o único aluno que conseguiu terminar os três modelos, optamos por apresentar suas ações e analisá-las.

Análise das ações de Carlos

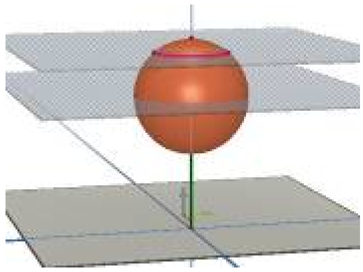
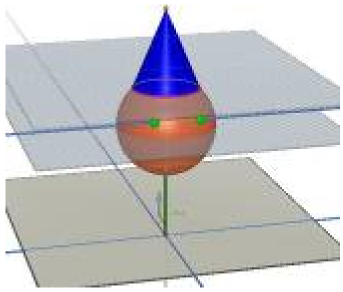
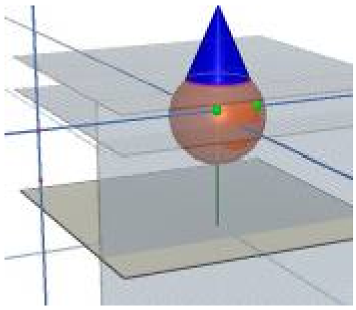
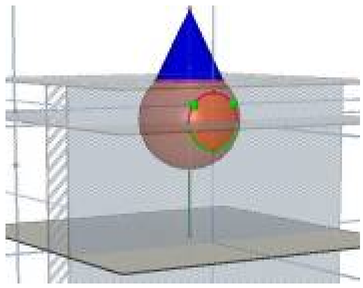
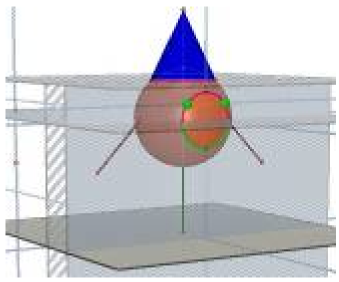
Carlos terminou os três modelos, mas utilizou uma estratégia diferente da prevista na análise *a priori*. Esse fato mostra que criou um novo *esquema de utilização.*

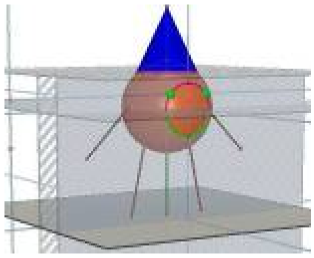
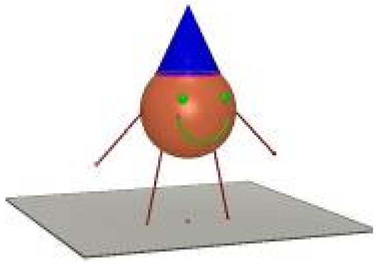
Esquema de utilização de Carlos

Esquema de utilização:

- **Conceitos-em-ato:** na construção, são mobilizadas as noções de reta paralela, reta perpendicular, plano paralelo, plano perpendicular, segmento, circunferência, arco, vetor, esfera, cone, reflexão em relação a uma reta (simetria axial), rotação e translação.
- **Regras-de-ação:** na construção dos três modelos, as ações são apresentadas em detalhe nos dados dos Quadros 65, 66 e 67.

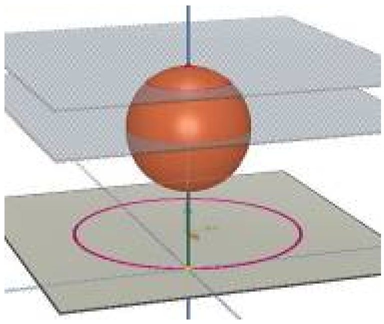
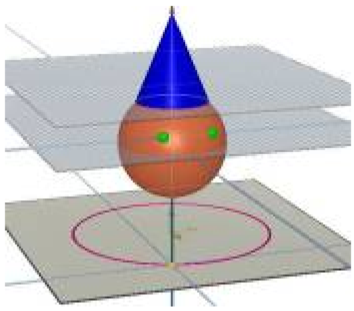
Quadro 65. Sequência de ações para a atividade “boneco” realizada por Carlos

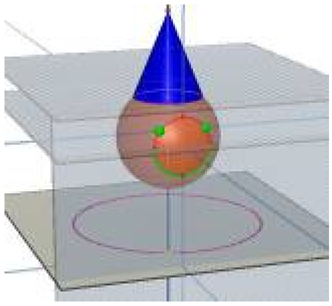
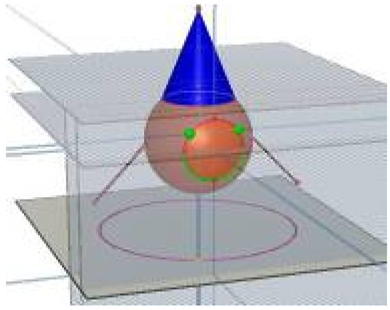
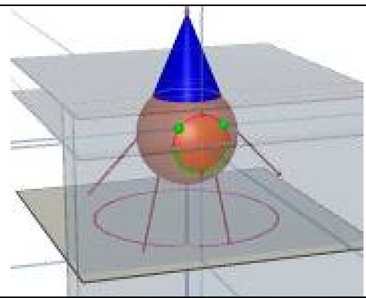
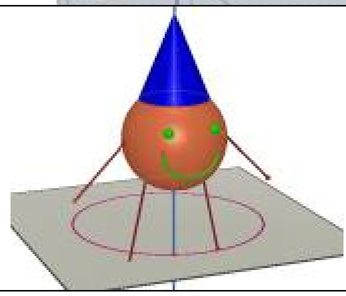
Ações	Processo de construção
Criou retas perpendiculares no plano de base, uma reta perpendicular ao plano da base; um vetor de medida aleatória e transladou o plano de base, segundo esse vetor. Criou uma esfera com centro, vértice do vetor e outro plano paralelo na parte superior dela. Após isso, marcou a curva de interseção.	
Construiu um cone (chapéu do boneco). Criou um ponto na esfera e uma reta paralela ao plano de base, passando por esse ponto. Na interseção, marcou o outro ponto (olhos do boneco).	
Criou uma reta que passa pelo centro da esfera – paralela ao plano de base e perpendicular à reta anteriormente criada – e outra reta perpendicular à reta que passa pelos olhos do boneco e, por fim, um plano.	
Marcou a curva de interseção da esfera com o plano, um arco na curva (boca do boneco) e outra reta perpendicular ao plano de base, passando por esse plano e um plano paralelo.	
Marcou a curva de interseção entre o plano e a esfera; criou um ponto (braço) e outro (pé). Em cada ponto criou um segmento de extremo a esfera e o outro extremo no plano (hachuras). Após, utilizou a reflexão em relação ao segmento (simetria axial) para criar os braços.	

Realizou o mesmo procedimento para os pés do boneco.	
Utilizou os atributos para esconder alguns objetos e mudou o ponto de vista para ver sua construção.	

Embora a estratégia de construção do segundo modelo “boneco animado”, seguido por Carlos seja similar à primeira, observamos que não reutilizou o modelo anterior (Quadro 66), como tínhamos pressuposto na análise *a priori*, ação que confirmou, uma vez mais, que ele usou outra estratégia de construção.

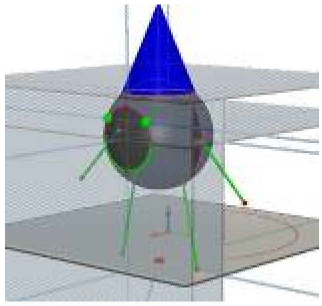
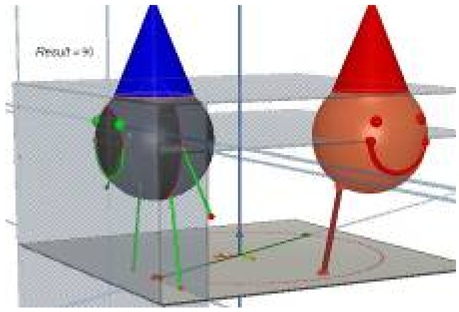
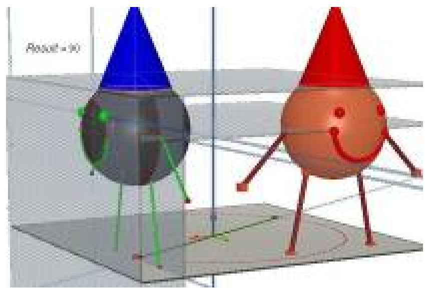
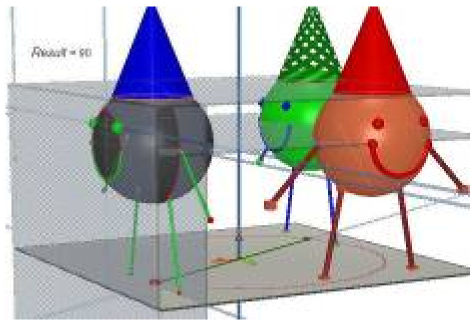
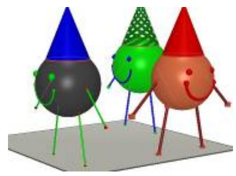
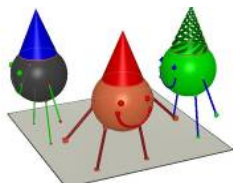
Quadro 66. Sequência de ações para a atividade “boneco animado” realizada por Carlos

Ações	**Processo de construção**
Criou uma circunferência no plano de base e um ponto livre nela. Depois, criou retas perpendiculares no plano de base, tal que se interceptam no ponto livre. Uma reta perpendicular ao plano da base (interseção das perpendiculares) foi criada e nela, um vetor de medida aleatória. Um plano paralelo ao plano de base foi criado, além de uma esfera com centro, vértice do vetor, outro plano paralelo na parte superior da esfera e marcou a curva de interseção entre a esfera e o plano paralelo.	
Construiu um cone (chapéu do boneco), criou um ponto na esfera e uma reta paralela ao plano de base passando por esse ponto. Na outra interseção da reta com a esfera, marcou o outro ponto (olhos do boneco). Criou uma reta que passa pelo centro da esfera – paralela ao plano de base e perpendicular à reta anteriormente criada – e outra reta perpendicular à reta dos olhos do boneco e um plano com elas	

Marcou a curva de interseção da esfera com o plano, um arco na curva (boca do boneco) e outra reta perpendicular ao plano de base, passando por esse plano e um plano paralelo.	
Criou um segmento com um extremo na esfera e outro no plano paralelo e perpendicular ao plano de base. Após, criou o simétrico ao segmento em torno à reta perpendicular central. Fez o mesmo procedimento para os pés do boneco, isto é, com a transformação simetria axial para a construção.	
Por fim, utilizou os atributos para esconder alguns objetos, animou a construção com a tecla F10 e mudou o ponto de vista para ver o modelo.	 

Para a construção do terceiro e último modelo “bonecos animados”, a sequência de construção do modelo (Quadro 67) indica que Carlos reutilizou o modelo “boneco animado” da atividade anterior.

Quadro 67. Sequência de ações para a atividade “bonecos animados” realizada por Carlos

Ações	Processo de construção
Reutilizou o modelo “boneco animado”, entretanto, com o recurso “atributos”, mudou a cor e a posição do boneco.	
Criou uma reta no plano de base e um vetor sobre ela, tal que ambos interceptaram a circunferência. Criou uma reta perpendicular, no eixo perpendicular do plano de base, e inseriu um ângulo de 90^0 e rotacionou cada parte do boneco em torno ao eixo, segundo o ângulo.	
Com o recurso “atributos”, mudou a cor, raio da boca, olhos e pés do boneco.	
Após, utilizou a transformação translação para transladar cada parte do boneco, segundo o vetor anteriormente criado. Mudou a cor, o estilo da superfície do chapéu, o raio da boca, os olhos e os pés do boneco.	
Por último, escondeu alguns objetos, ativou a animação (*F10*) e por fim, mudou o ponto de vista para verificar sua construção.	 

Percebemos que em alguns momentos, Carlos realizou ações similares às previstas na análise *a priori* (Quadros 61, 63 e 64), mas, seguiu uma estratégia diferente de construção, o que indica que está instrumentado nos conteúdos matemáticos mobilizados e nas ferramentas e recursos do *Cabri 3D* usadas nesta atividade.

Notamos, também, que, nas ações que Carlos desenvolveu para a construção dos dois primeiros modelos, (Quadros 65 e 66), utilizou duas vezes a transformação reflexão em relação a uma reta (simetria axial) e, somente no último modelo usou, além da simetria axial, as transformações rotação e translação.

Assim, as ações de Carlos confirmam que:

1. Mobilizou noções matemáticas das atividades anteriores e criou um novo *esquema de utilização*, além de reutilizar seus esquemas preexistentes (adaptação a uma nova situação) sejam estes de uso ou de ação instrumental.
2. Empregou as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, trabalhados nas atividades anteriores, o que ratifica que existe apropriação da parte artefato do instrumento. Isto é,
   - O uso das diferentes ferramentas e recursos desse ambiente de Geometria Dinâmica na construção dos modelos, além da mobilização de noções de Geometria, nos fez inferir que para Carlos estes são instrumentos. O fato constatou que o processo de *Gênese Instrumental* de Carlos aconteceu.
3. Ao confrontar o processo de construção dos modelos “boneco” e “bonecos animados” da análise *a priori* e os modelos construídos por Carlos (Figura 107 e 108), verificamos que:
   - A estratégia de Carlos na construção dos modelos mostra, de acordo com Rabardel (1995a), que a posição instrumental do artefato depende da ação do sujeito que o usa.

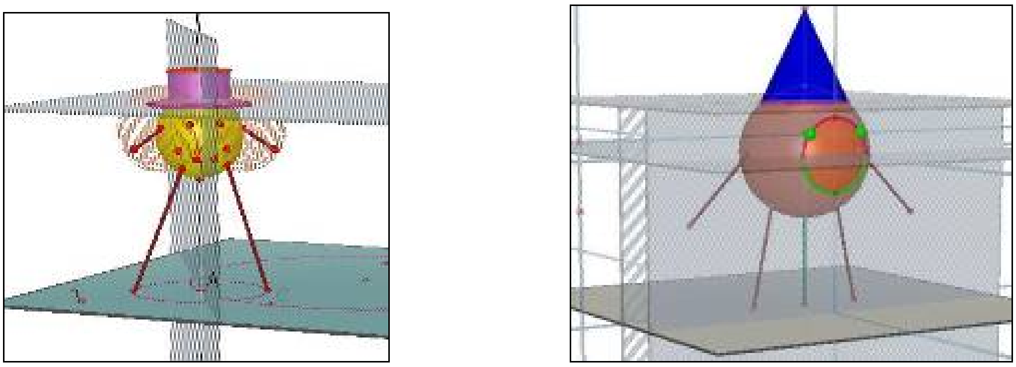


Figura 107. Construção da análise a *priori* e de Carlos, do modelo “boneco animado”

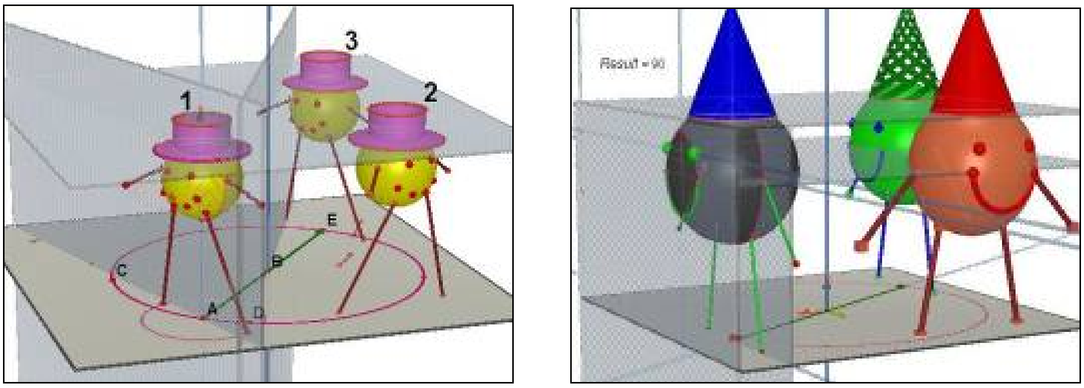


Figura 108. Construção da análise a *priori* e de Carlos do modelo “bonecos animados”

Consideramos que Carlos utilizou corretamente as ferramentas necessárias para construir os modelos, pois relacionou as três atividades de bonecos com as anteriores dos modelos animados (moinho, balanço e casa), o que reflete a pertinência da sequência.

Apontamos que a estratégia de construção dos modelos que Carlos desenvolveu, fez conjecturar que o aluno teve apreensão sequencial, porque, seguiu uma ordem de construção.

Além disso, a apreensão perceptiva esteve presente, pois identificou e interpretou a forma das figuras geométricas do boneco, tais como: esfera, segmento, ponto, esfera e cone. No modelo previsto na análise *a priori,* o chapéu do boneco era formado por um círculo e um cilindro, no entanto, Carlos construiu o chapéu com um cone. (Figura. 109)

Quanto à apreensão operatória, esta ocorreu em Carlos durante todo o processo de construção dos bonecos, conforme Duval (1995), é esta apreensão que permite ter uma visão dinâmica da figura além de permitir obter novos elementos que podem conduzir à solução de um problema, no caso dos bonecos, a visão dinâmica que Carlos teve, permitiu que ele construísse os modelos com sucesso e, por conseguinte, a visualização, segundo Duval (2002), da figura aconteceu em Carlos.

Além do mais, a visualização só foi possível pela apreensão operatória que Carlos teve, pois conseguiu fazer relações entre os três modelos e os conceitos geométricos: segmento, retas, planos paralelos e perpendiculares, cone, esfera, circunferência, arco de circunferência e transformações geométricas.

Figura 109. Processo de construção dos bonecos animados

Podemos afirmar que o processo de *Gênese Instrumental* aconteceu ao longo do processo de construção dos três modelos de bonecos realizados por Carlos, a utilização das ferramentas e recursos do *Cabri 3D* e a mobilização das noções de transformações geométricas no espaço, além de outras noções matemáticas envolvidas nessas construções.

Algumas considerações

Nesta parte, apresentamos algumas considerações baseadas especificamente nas conversas com alguns alunos no último encontro, em suas respostas, após a aplicação do questionário final e nas dificuldades que apresentaram no uso de certas ferramentas e recursos do *software*.

- Na conversação com os alunos sobre o *Cabri 3D* e as transformações geométricas no espaço (apêndice E), registramos as falas de Andreya, Carlos e a dupla, Luiz e Álvaro.

A respeito da experiência com *Cabri 3D*, os alunos manifestaram que foi uma experiência interessante e boa e que poderá ajudá-los a entender melhor a Geometria. Por exemplo, Carlos disse:

> *No início, foi difícil mas depois melhorou, mas foi uma boa experiência [...] até se familiarizar e saber qual ferramenta usar na hora certa...*

Quanto às transformações geométricas no espaço usadas na construção de modelos: moinho, balanço, casa e bonecos, os alunos explicaram que empregaram as transformações geométricas introduzidas no segundo encontro. No entanto, apontaram que a transformação geométrica mais difícil de entender e utilizar foi a rotação e a mais fácil foi simetria axial e reflexão. Por exemplo, a dupla, Luiz e Álvaro disse:

> *Rotação [...] não sabia onde clicar primeiro e sempre me perdia... [...] ah! Demoramos um tempo até entender [...] na "casa", por exemplo, demoramos muito por causa da rotação...*

Em geral, os alunos, manifestaram que, embora o estudo das transformações no espaço fosse um conteúdo novo, eles entenderam que existe uma relação com as transformações no plano e que essa relação foi percebida melhor nas atividades dos últimos encontros (modelos animados).

- Além dos comentários, aplicamos um questionário final para obter uma visão geral da influência do *Cabri 3D* no processo de aprendizagem.
  - Quando perguntamos quais foram os recursos e ferramentas mais usados, em sua maioria, afirmaram haver usado os recursos "desfazer", "mudar de vista" e "atributos" (modificar o estilo das figuras) o que reforçou nossa afirmação da ocorrência do processo de *instrumentação*.

- A respeito de dificuldades de manipulação das ferramentas, especialmente, a caixa de ferramentas “transformações geométricas” usadas nos modelos animados “moinho”, “casa” e “bonecos animados”, os estudantes apontaram que, com as orientações do professor sobre o uso do recurso “ajuda de ferramentas” (*F1*), as transformações no espaço: translação, simetria axial e reflexão não foram difíceis de entender e usar, não obstante, a transformação geométrica mais difícil tenha sido rotação.

Advertimos que, quando o professor do grupo percebeu essa dificuldade durante a construção dos modelos animados, deu orientações sobre o uso da ferramenta e a noção da transformação rotação. Assim, durante a construção do “moinho” e “casa”, eles conseguiram usá-la, mas, com certa dificuldade.

- Percebemos, também, que no desenvolvimento das atividades com *Cabri 3D*, o professor do grupo precisou intervir em determinados momentos pelo fato de, alguns alunos terem mostrado dificuldade com certas ferramentas e/ou recursos do *software*, dentre estas, apontamos as seguintes:
  - **Criação de ponto no espaço:** esta dificuldade originou-se no uso incorreto da ferramenta “ponto”. Os alunos não pressionavam a tecla *Shift* e solicitavam ajuda do professor do grupo que os orientou para que usassem “ajuda de ferramentas” (*F1*);
  - **Criação de cubos congruentes:** alguns alunos não conseguiram criar cubos congruentes para formar as letras, como foi solicitado na atividade (primeiro encontro, atividade 2). Para superar essa dificuldade, o professor sugeriu que se deve clicar sempre sobre uma fase do cubo anterior, pois o tamanho e a posição dos cubos congruentes dependem do primeiro cubo criado;
  - **Calculadora:** para as atividades nas quais era necessário inserir o ângulo de rotação, ou seja, fazer uso da calculadora do *Cabri 3D*, os alunos mostraram algumas dificuldades para realizar a transferência de medidas. Eles pensavam que a calculadora era utilizada igual à calculadora cientifica, tanto que alguns usaram em um primeiro

momento a calculadora do *Office*. Novamente, o professor interveio, e mostrou um exemplo de uso da ferramenta “calculadora”;

- **Transformação geométrica rotação:** os alunos não apresentaram dificuldade no uso da transformação geométrica rotação nas atividades “rotação de um triângulo” e “rotação de um cubo” (primeira etapa). Contudo, quando necessitaram utilizá-la nas atividades com modelos animados como, por exemplo, “moinho” e “casa” (segunda etapa), alguns não conseguiram. Por esse motivo, o professor precisou fornecer orientações mais específicas sobre a ordem em que a ferramenta pode ser usada, isto é, rotação da figura, em relação ao eixo, ou vice-versa, segundo o ângulo de rotação (pode-se criar um ângulo inserindo um número com a ferramenta “calculadora” ou com dois pontos. Ressaltamos que o *Cabri 3D* entende que o vértice do ângulo de rotação está na intersecção do eixo com o plano de base;
- **Animação:** por exemplo, na atividade com animação “rotação de um segmento” o uso do recurso de animação, para dar a ideia de movimento, sempre deve ser sobre um ponto livre, isto é, ponto sobre um objeto (arco, segmento, circunferência, etc.), entretanto, alguns alunos apresentaram problemas, porque o ponto que permitia a animação da figura era fixo, ou seja, formava parte da figura ou era um ponto de intersecção. O professor orientou que usassem “ajuda de ferramentas” (*F1*), e ativassem “animação” (*F10*).

Considerações Finais

As questões relativas ao ensino-aprendizagem da Geometria Espacial, em particular, os problemas associados às representações planas de objetos tridimensionais, sua visualização, compreensão e apropriação, são similares no Ensino Fundamental e Médio no Brasil e no Peru, meu país.

Por outro lado, a utilização dos ambientes de Geometria Dinâmica, especificamente do *Cabri 3D*, no ensino e aprendizado de conteúdos de Geometria Espacial, somado às dificuldades assinaladas e à falta de pesquisas sobre transformações geométricas no espaço motivaram a realização deste estudo.

Assim, o trabalho teve por objetivo observar a interação dos alunos com o *Cabri 3D* e perceber em suas ações, como visualizam uma figura tridimensional, quando realizam atividades que mobilizam noções de transformações geométricas no espaço.

Nestas considerações finais, discorremos a respeito dos aspectos que consideramos importantes no trabalho, tais como: o Quadro teórico e metodológico utilizado, a parte experimental, os principais resultados e novas perspectivas de investigação.

Quadro Teórico e Metodológico

Consideramos que a abordagem Instrumental de Rabardel (1995a) foi pertinente para nosso estudo por acreditarmos que por meio dela pudemos observar e analisar de maneira detalhada as ações dos estudantes quando interagiram com o ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*, isto é, observar como acontece o processo Gênese Instrumental dos alunos (transformação de artefato em instrumento), em suas duas dimensões: *instrumentação* e *instrumentalização*.

Para analisar essa passagem de artefato à entidade mista *instrumento* (*esquema de utilização* + *artefato*) observamos as ações dos alunos, por meio dos *esquemas de utilização*, podem ser de uso ou ação instrumental além de poder ser esquemas preestabelecidos ou novos esquemas.

Utilizamos o modelo SAI – Situações de Atividades Instrumentais, proposto por Rabardel (1995b) e Verillon (1995), que descreve as relações entre *sujeito* e *objeto* mediado pelo instrumento e evidencia as múltiplas interações que intervêm nas atividades instrumentais. Assim, considera além da interação sujeito-objeto [S-O], sujeito-instrumento [S-i] e o instrumento-objeto [i-O], a relação sujeito-objeto mediada pelo instrumento [S(i)-O].

Com esse modelo, pudemos descrever detalhadamente a possível sequência de ações (regras–de–ação na análise *a priori*) que os alunos seguiram no desenvolvimento das atividades, bem como os instrumentos e objetos utilizados.

Consideramos que a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995) ofereceu-nos subsídios para compreender como os estudantes veem ou visualizam uma figura, tendo em vista que o registro *figural dinâmico* facilita reconhecer as diferentes apreensões dos estudantes na interação com o *Cabri 3D*.

Por outro lado, utilizamos aspectos da Engenharia Didática de Artigue (1988), para orientar a pesquisa. Assim, ao longo do trabalho desenvolvemos as quatro fases da mencionada metodologia. Nesse sentido, apresentamos alguns estudos de Geometria Espacial que mostram quais dificuldades podem estar associadas à complexidade de representar objetos tridimensionais em um suporte bidimensional. Existem pesquisas que mostram a importância do uso da Geometria Dinâmica no ensino, como meio facilitador da aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

No estudo matemático das transformações geométricas no espaço, detivemo-nos em algumas isometrias no espaço: translação, reflexão em relação a um ponto, reflexão em relação a uma reta, reflexão em relação a um plano e rotação, além de construir com *Cabri 3D* ditas isometrias. Na análise *a priori* das atividades, como mencionado acima, descrevemos os possíveis esquemas de utilização dos estudantes e por meio do modelo SAI, a possível sequência das ações dos alunos; na análise *a posteriori* validamos ou não as hipóteses levantadas na análise *a priori.*

Principais resultados

No primeiro encontro, conforme Rabardel, o *Cabri 3D* era um artefato para os estudantes, já que os alunos não tinham trabalhado anteriormente com nenhum ambiente de Geometria Dinâmica, por isso, não conheciam as ferramentas e recursos desse ambiente.

Observamos que a falta de experiência dos alunos, para interagir com o *Cabri 3D,* não foi uma barreira para que trabalhassem bem com o *software*. O fato foi uma descoberta no trabalho, pois, pensávamos que o contrário ocorreria.

Assim, na etapa de introdução ao *Cabri 3D*, formada por dois encontros, acreditamos ter atingido nosso objetivo, que era *instrumentar* os alunos com as ferramentas e recursos do *Cabri 3D*, além de introduzir algumas noções de Geometria Espacial.

Fazemos essa afirmação porque, segundo Rabardel (1995a), a apropriação de novos artefatos*,* a criação de *esquemas de uso* ou a utilização de *esquemas de uso* preestabelecidos são dadas no processo de *instrumentação*. Nesse sentido, a parte do artefato *Cabri 3D*, ferramentas e recursos utilizados, com os *esquemas de uso* criados pelos estudantes durante o desenvolvimento dessas atividades foram similares aos esquemas da análise *a priori:* “criação de uma figura” e “manipulação direta”, dão-nos subsídios para pensar que a *instrumentação* com o *Cabri 3D* e com as noções de geometria aconteceu.

As tabelas empregadas na análise *a priori*, construídas com base no modelo de Situações de Atividades Instrumentais (SAI) de Rabardel (1995b), permitiram-nos observar as regras-de-ação, ações envolvidas em cada atividade que formam parte dos esquemas de utilização. Nesse sentido, de acordo com o modelo SAI, a tríade, o sujeito, o instrumento e o objeto na pesquisa, são compostos como segue:

- ✓ **Sujeito (*S*)**: Andreya, Pedro, Carlos ou o grupo de alunos;
- ✓ **Instrumento (*i*)**: conteúdos matemáticos, ferramentas e/ou recursos do *Cabri 3D*; e
- ✓ **Objeto (*O*)**: construção final solicitada em cada atividade.

No entanto, percebemos na análise *a priori* e depois constatamos na análise *a posteriori* que objeto (***O***) e instrumento (***i***) não permanecem estáticos durante as ações realizadas pelos estudantes, o que nos fez refletir sobre a relação sujeito–objeto mediado pelo instrumento. Inicialmente, pensávamos que essa relação fosse sempre a mesma; no entanto, constatamos que o instrumento e o objeto podem mudar de função ao longo da atividade.

Concordamos com Rabardel (1995a), quando assinala que os instrumentos dão possibilidades ao sujeito de novas maneiras de organizar sua ação. Mesmo assim não podemos ter certeza do momento exato, em que parte do artefato *Cabri 3D* ou os conteúdos matemáticos mobilizados transformaram-se em instrumentos para os alunos, visto que o processo de transformação de artefato para instrumento acontece de maneira diferente para cada aluno, porque o instrumento é uma entidade mista, formada pelo artefato e pelos *esquemas de utilização* de cada sujeito.

Ressaltamos que a escolha das ferramentas e os recursos do *Cabri 3D* e a sequência de ações dependeram exclusivamente da tomada de decisão de cada estudante. Assim, não podemos afirmar que existe uma única sequência para uma atividade. Entretanto, para que os alunos utilizem *esquemas similares* aos que o professor prevê, cabe a ele fazer as escolhas adequadas e orientar o desenvolvimento do trabalho, de acordo com o conteúdo escolhido.

Apontamos que as atividades introdutórias ao *Cabri 3D*, embora não fossem o foco do trabalho, foram fundamentais para que os alunos explorassem e manipulassem o *software*, pois permitiram observar os primeiros contatos dos alunos com o *Cabri 3D* e o início do processo de Gênese Instrumental dos alunos (*instrumentação*), ou seja, como os estudantes interagiam com as ferramentas, as dificuldades e descobertas, independente das orientações do professor que os alunos tiveram, além de verificar em suas ações que a maioria usou os mesmos esquemas de uso da análise *a priori*.

Assim, as ferramentas e os recursos do *Cabri 3D* utilizados nas primeiras atividades com os *esquemas de uso,* "criação de uma figura" e "manipulação direta", compuseram a entidade mista, chamada por Rabardel de instrumento.

Por exemplo, na atividade "plano paralelo" (primeiro encontro) a ferramenta ponto no espaço foi introduzida, e a maioria dos alunos percebeu que, ao mudar o ponto de vista do observador, embora o plano cinza representasse o plano de base e fosse limitado visualmente, os pontos que eles construíram, aparentemente, fora dele sem pressionar a tecla *Shift*, continuaram sendo pontos do mesmo plano. Por esse motivo, pensamos que a manipulação direta que o *Cabri 3D* possui, permitiu acabar com essa falsa visão.

Acreditamos que a exploração e a manipulação das ferramentas e recursos do *Cabri 3D* durante os seis encontros mostraram nas ações dos estudantes, a aplicação de seus *esquemas de utilização*, isto é,

- ✓ *Esquemas de uso,* durante as atividades introdutórias ao *Cabri 3D* da parte I, porque os alunos descobriram progressivamente as propriedades do artefato (uso das ferramentas), e de maneira progressiva, criaram instrumentos no uso.
- ✓ *Esquemas de ação instrumental,* durante as atividades com modelos animados da parte II.

Esses *esquemas de ação instrumental* foram desenvolvidos ao longo dos encontros, no caso de serem *esquemas preestabelecidos*, foram reutilizados dos conhecimentos anteriores já incorporados, organizados (invariantes operatórias), e adaptados a novas situações como, por exemplo, nas construções de modelos animados.

Observamos que a maioria dos *esquemas de utilização* que os alunos mobilizaram nas atividades orientadas, necessárias para a construção dos modelos animados, foi similar aos esquemas que apresentamos nas análises *a priori*. Entretanto, os *esquemas de utilização* usados pelos alunos nas atividades de “construções livres”, como os modelos, foram diferentes.

Ao longo dos encontros, as ações realizadas pelos alunos, ao longo dos seis encontros, levaram-nos a compreender que o *esquema de utilização* tem poder assimilador, provocado pela repetição deles na mesma atividade, bem como de acomodação, porque os estudantes realizaram a mesma ação em situações diferentes.

Embora a transformação rotação já não fosse um artefato aos alunos, poderia dar indícios de não ser um instrumento para a maioria deles. Justificamos esta afirmação porque sabemos, de acordo com Rabardel (1995a), que a transformação de artefato em instrumento é complexa e requer tempo, visto que a maioria dos estudantes teve dificuldades com a noção de rotação e com o uso da ferramenta.

Durante as atividades com transformações geométricas no espaço, percebemos que uma das potencialidades do *Cabri 3D* pode enfocar, de maneira diferente, conteúdos de Geometria já trabalhados, em muitos casos, pouco compreendidos pelos alunos, mas auxiliam a mobilizar conteúdos de Geometria Espacial.

As atividades trabalhadas facilitaram o desenvolvimento de diferentes estratégias no uso do *Cabri 3D*, além de estabelecer relações entre o *software* e os conhecimentos matemáticos dos estudantes. Nesse sentido, temos indícios da ocorrência do processo de *Gênese Instrumental*, já que as ações dos alunos evidenciaram *esquemas de utilização* (esquemas de uso e/ou de ação instrumentada) preestabelecidos ou o desenvolvimento de novos esquemas, tanto nas atividades introdutórias ao *Cabri 3D* como no desenvolvimento das outras atividades.

A interação dos alunos com o *Cabri 3D* facilitou a apreensão perceptiva das figuras, porque permitiu, durante o desenvolvimento das atividades, a exploração delas sob diferentes pontos de vista do observador, além de identificar e interpretar, de modo direto, as formas diferentes de objetos matemáticos envolvidos nas construções realizadas nas atividades.

O *Cabri 3D* facilitou a apreensão sequencial dos alunos, pois todos seguiram uma ordem de construção, nos dois primeiros encontros a sequência de construção foi mais orientada, pelas ferramentas e os recursos do *software* foram introduzidos, mas nos outros encontros, ou seja, nas atividades que envolviam a construção de modelos, as atividades foram mais livres, e eles criaram suas próprias sequências de construção. Pensamos que esse fato dependeu dos conhecimentos matemáticos introduzidos e/ou mobilizados pelos alunos, além da instrumentação e/ou instrumentalização dos alunos com as ferramentas e com os recursos do ambiente.

Nesse ambiente de Geometria Dinâmica, as construções permitiram aos alunos “dinamizar” a figura, isto é, superar seu caráter estático, próprio do ambiente de lápis e papel. O *registro figural dinâmico* que o *Cabri 3D* propicia, facilitou a observação da apreensão operatória das figuras, isto é, a modificação mereológica, pois, por exemplo, para a construção do modelo moinho, os alunos observaram a figura como um todo e depois a separaram em subfiguras (base do moinho: cilindro; teto: cone; e hélices: triângulos. Pensamos que esta modificação foi evidente para eles. Enquanto a modificação posicional tornou-se mais evidente quando usaram a transformação rotação nas construções dos modelos: moinho, balanço e casa.

Na construção dos modelos, pensamos que os alunos visualizaram as figuras, no sentido de Duval (2002), porque na construção dos modelos relacionaram os elementos estruturais deles, com as noções matemáticas, dentre elas, as transformações geométricas.

Na construção dos modelos animados, acreditamos que as trocas de informações entre alunos/professor e aluno/aluno são necessárias e importantes para a apropriação do instrumento, no sentido de Rabardel (1995a), o que favorece os processos de *instrumentação e instrumentalização*, isto é, a Gênese Instrumental.

Notamos que o *Cabri 3D* pode contribuir para o ensino “dinâmico” da Geometria Espacial, tendo em vista que o professor pode usá-lo como mais um recurso didático e, ao aluno, pode servir para ver, visualizar, manipular, conjecturar e representar objetos espaciais, observando-os sob diferentes pontos de vista.

Além disso, temos indícios, de acordo com as ações, de que a dupla formada de maneira espontânea por Luiz e Álvaro (quarto encontro, atividade “casa”), do surgimento de *esquemas de atividade coletiva instrumental*. Como assinala Rabardel (1995, p. 92), porque, cada um deles com seus *esquemas de utilização* coordenou ações individuais e associou-as para atingir um mesmo objetivo, que era a construção da casa com portas e janelas com movimento de rotação.

Observamos que é necessário levar em conta o impacto dos ambientes computacionais no ensino e, fazer uma análise detalhada das limitações e vantagens que possuem, quando elaboramos uma sequência de atividades.

Nas atividades com transformações geométricas no espaço, percebemos que precisávamos ir além de sua concepção, ou seja, pensamos que poderíamos ter apresentado as situações de modo que os alunos pudessem explorar, ainda mais, a articulação espaço-plano. Também ressaltamos que as estratégias que os alunos desenvolvem, podem ser reutilizadas e reformuladas em outras situações.

Por fim, ao terminar o estudo, acreditamos ter respondido as questões de pesquisa, visto que observamos o processo de *instrumentação* e *instrumentalização* (Gênese Instrumental) dos alunos, isto é, a apropriação tanto das ferramentas e recursos do *Cabri 3D* como dos conteúdos matemáticos mobilizados.

Acreditamos que nas construções dos modelos: moinho, balanço, casa e bonecos animados, noções de transformações geométricas no espaço foram introduzidas de maneira intuitiva. Além do mais, pensamos que a integração deste ambiente de Geometria Dinâmica, favorece a aprendizagem deste conteúdo e de outros conteúdos de Geometria Espacial, pois, a manipulação direta e o *registro figural dinâmico* facilitam a visualização de figuras espaciais.

Observamos, nas investigações de Trouche (2002; 2004) e Restrepo (2005; 2008), realizadas com calculadora gráfica e *Cabri II,* respectivamente, e baseadas na abordagem Instrumental de Rabardel (1995a), que os conteúdos matemáticos mobilizados formam parte do currículo francês, entretanto, em nossa pesquisa, isso não acontece.

Assim, acreditamos que uma contribuição desta investigação é que o estudo das transformações geométricas no espaço na interação com o *Cabri 3D*, ou com outro ambiente de Geometria Dinâmica, pode ser introduzido de maneira intuitiva no Ensino Médio.

Perspectivas futuras

Apoiados nos resultados desta investigação, podemos pensar em outras pesquisas que aprofundem o estudo de transformações geométricas no espaço, especialmente, o estudo das isometrias na interação com o *Cabri 3D* (ou com outros ambientes de Geometria Dinâmica) e que articulem, ainda mais, os ambientes informático e de lápis e papel, com sequências de atividades, que levem os estudantes a fazer conjecturas e demonstrar as propriedades das isometrias no espaço.

Além disso, pensamos que, o estudo das composições de isometrias no espaço merece uma pesquisa mais detalhada daquela que conseguimos realizar neste trabalho.

Igualmente, pensamos que são necessárias outras investigações de Geometria Plana e Geometria Espacial baseadas na abordagem Instrumental de Rabardel e na interação com outros ambientes de Geometria Dinâmica.

Referências

ARTIGUE M., Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE M., DOUADY R., MORENO L.. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñaza y el aprendizaje de las Matemáticas. Bogotá: grupo editorial Iberoamérica, 1995.

ALMOULOUD, S., MANRIQUE, A. L.; SILVA M. J. FERREIRA DA, MENDONÇA CAMPOS, T..A geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Revista Brasileira de Educação. n. 27, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2008.

ALMOULOUD, S. A.. Fundamentos da didática da Matemática. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALVES, S.; GALVÃO, M. E. E. L.. Um estudo geométrico das transformações elementares. São Paulo: IME/USP, 1996.

ARAÚJO, J. A.; NACARATO, A. M.. Atuais Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: um olhar sobre os Anais dos ENEM´s. In: VIII Encontro Paulista de Educação Matemática. São Paulo, 2004.

BOYER, C.B.. História da Matemática. Trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgar Bhücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental - Matemática. Brasília, 1998.

_____. INEP/MEC - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/>. Acesso em: 12 mar. 2007.

_____. ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio. Disponível em: <http://www.enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 25 mar. 2007

_____. ENC-Provão - Exame Nacional de Cursos. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/superior/provao/default.asp>. Acesso em: 26 mar. 2007.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2008.

BKOUCHE, R.. De la géométrie et des transformations. In: Repères IREM nº. 4 ,julho, p. 134-157, 1991.

CABRERA, E. S.. Los Elementos de Euclides como exponente del "milagro griego". Buenos Aires. Librería del Colegio, 1949.

CABRI 3D. Manual do usuário. Disponível em: <http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/ctridimensionalv2/user_manual_pt_br.pdf>. Acesso em: 14 set. 2007.

CAVALCA, A. de P.. Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 1997.

_____. Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. São Paulo: EDUC: FAPESP, 1998.

COLEÇÃO F.T.D. Geometria Elementar. Livraria Paulo Azevedo. São Paulo. 1964.

COXFORD, A. F.. A transformation Approach to Geometry. In: Geometry in the mathematics curriculum, 36º. Yearbook, National Council of teachers of Mathematics. Reston, Virginia, 1973.

COSTA, C. O.. A perspectiva no Olhar: Ciência e arte do Renascimento. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CURI, E.. Formação de professores de Matemática: Realidade presente e perspectivas futuras. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHAACHOUA, H. Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace étude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Tese de Doutorado em Didática da Matemática. Universidade Joseph Fourier. Grenoble 1, França, 1997.

DUVAL, R.. Semiosis et pensée humaine. Bern, Peter Lang, 1995.

_____. Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Representations and Mathematics Visualization. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME-NA-Cinvestav-IPN. Ed. Fernando Hitt. p. 311-335 Mexico, 2002.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. São Paulo: PAPIRUS, 2003.

DE VILLIERS, M.. Transformations: A golden thread in school mathematics. Spectrum, n. 31(4), p. 11-18, 1993.

EVES, H.. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995.

FERNANDES S.H. A. A.. Uma análise Vigotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,São Paulo, 2004.

FLORES, C. R.. Abordagem histórica no ensino de Matemática: o caso da representação em perspectiva. Revista Contra-Pontos. (2), 6. Itajaí, set-dez. 2002.

_____. Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva. São Paulo. Musa, 2007.

GRAVINA, M. A. Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001

GUIN, D. e TROUCHE, L.. Mastering by the Teacher of the Instrumental Genesis in CAS Environments: Necessity of Instrumental Orchestrations. ZDM. v. 34, n. 5, 2002.

HEALY, S.V. (L.). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri Constructions. In: Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*.* Proceedings… Hiroshima: vol. 1, p. 84-89, 2000.

HUGOT, F.. Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D. Mémoire de Recherche, Environnements Informatiques d'Aprentissage Humain et Didactique. Université Joseph Fourrier. Paris, 2005.

JAHN, A. P. Des Transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. (Tese Doutorado em Didática da Matemática) Université Joseph Fourier. Paris, 1998.

KALEFF, A. M..Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao calculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. EdUFF, 2003.

LABORDE, C.. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning . vol. 6., 2001.

LABORDE C., CAPPONI B.. Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques. n. 14, p. 165-210, 1994.

LIMA, E. L.. Isometrias. Coleção do Professor de Matemática. Ed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2007.

LUZ, V. de A. Um estudo sobre o Ensino de Transformações Geométricas: da reforma da Matemática Moderna aos dias atuais. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

MABUCHI, S. T.. Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MEGA, E.. Ensino/aprendizagem da rotação na 5ª série: um estudo comparativo em relação ao material utilizado. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

MATEMÁTICA. Curso Colegial. School Mathematics Study group. v. III. 1966.

MONTENEGRO, G. Inteligência Visual e 3–D: Compreendendo Conceitos Básicos da Geometria Espacial. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

NIEWENGLOWSKI, B. ; GÉRARD L.. Géometrie Elémentaire. Gauthier-Villars. France, 1929.

OLIVERO, F. e ROBUTTI, O.. Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. In: Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, 25, Netherlands. Proceedings… utrecht: PME, 2001. v. 4, p. 9-16.

PARZYSZ B.. Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics, n.19, 79-92, 1988

_____. Representation of space and students' conceptions at High school Level. Educational Studies in Mathematics, n.22, p. 575-593, 1991.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. In: Revista Zetetiké, n.1. p. 7-17, 1993.

_____.Que Geometria pode ser significativa para a vida? 2004. Disponíveis em: <http://www.redebrasil.tv.br/salto/boletins2004/cm/tetxt5.htm>. Acesso em: 20 nov. 2008.

PRETTI, E. do L.. Transformações Geométricas: uma experiência na formação de professores utilizando um ambiente informatizado. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

RABARDEL, P. Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains. Paris. Armand Colin, 1995a.

_____. Qu'est-ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. In: Outils pour le calcul et le traçage de courbes CNDP–DIE – mar. 1995b. Disponível em: <http://www.cndp.fr/archivage/valid/13420-1126-1194.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2008.

RESTREPO, M. A.. Instrumentation du déplacement dans Cabri-Geomètre par des élèves de 6^e. Mémoire de Master 2, Environnements Informatiques d'Aprentissage Humain et Didactique. Université Joseph Fourrier, Paris, 2005.

_____. Genèse Instrumentale du déplacement en Géométrie Dynamique chez des élèves de 6^e. Thèse de docteur. École Doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de L'information, Informatique. Université Joseph Fourier, Paris, 2008.

ROMMEVAUX, M.-P.. Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. Revista Educação Matemática Pesquisa. v. 1, n. 1, p 13-65, 1999.

SANGIORGI, O.. Matemática Curso Moderno. v. 3, ed. 6. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estúdios e Normas Pedagógicas. Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática: geometria para o 1^0 grau – 5ª a 8ª séries – atividades. São Paulo, 1979.

SILVA, C. I.. Proposta de Aprendizagem sobre a Importância do Desenho Geométrico e da Geometria Descritiva. Dissertação de Mestrado em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006.

SILVA M. J. F.. Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tese (Doutorado em educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

TROUCHE L.. Une Approche Instrumentale de l´apprentisage des Mathématiques dans des Environnements de Calculatrice Symbolique. In: Calculatrices symboliques Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique. La Pensée Sauvage. Grenoble. p. 187-212, 2002.

_____. Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? Educational Studies in Mathematics. v. 55. p. 181-197, 2004.

_____. Constructions et Conduite des Instruments dans les Apprentissages Mathématiques: Nécessité Des Orchestrations. Cherches em Didactiques des Mathématiques, v. 25, n.1. p. 91-138, 2005a.

_____. An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Mathematics Education Library. Springer, v. 36, p. 137-162, 2005b.

VALENTE, J. A. Diferentes Usos do Computador na Educação. In: J.A. Valente (Org.), Computadores e Conhecimento: repensando a educação. UNICAMP, p.1-23, 1993.

VELOSO, E.. Geometria: temas atuais: materiais para professores (Desenvolvimento curricular no ensino secundário; 11). Ed. Instituto de Inovação Educacional. Portugal, 2000.

_____. Transformações Geométricas e Simetrias. Matemática para professores. Associação de Professores de Matemática. Escola Superior de Educação de Lisboa. Portugal, 2008. Disponível em: <http://transfgeom.eduardoveloso.com/. TA02_Transfgeom.PDF>. Acesso em: 05.jul. 2008.

VERGNAUD, G.. A teoria dos campos conceptuais. In: Jean Brun (Ed.). Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERILLON P. e RABARDEL, P.. Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrument activity. European Journal of Psychology in Education. v. 9, n. 3, p. 77-101, 1995.

VERILLON, P.. Artifacts and cognitive development: how do psychogenetic theories of intelligence help in understanding the influence of technical environments on the development of thought? 1995. Disponível em: <http://www.iteaconnect.org/Conference/PATT/PATT15/Verillon.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2008.

VIANNA, H. M.. Pesquisa em Educação: a observação. Ed. Plano. Brasília, 2003.

VYGOTSKY, L. S.. A Formação Social da Mente. Org. Michael Cole, et al. Tradução José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. Ed. 6. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Apêndices

Questionário Diagnóstico

PUC-SP

Animações com *Cabri 3D*

PESQUISA: Gênese Instrumental de alunos de Ensino Médio com *Cabri 3D*: estudo de algumas transformações no espaço.

DOUTORANDA: Jesus Victoria Flores Salazar

ORIENTADOR: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Caros participantes,

O seguinte questionário diagnóstico tem como objetivo levantar informações referentes seus conhecimentos de Geometria Dinâmica e de Geometria. Os dados coletados através desse instrumento serão utilizados unicamente para fins de pesquisa, sendo garantido o sigilo da identidade dos participantes. Agradecemos desde já sua colaboração!

1. Você já conhece ou utilizou o software *Cabri II*?

Sim (   )   Não (   )

Se sua resposta foi sim, descreva brevemente:

____

____

2. Você conhece ou utilizou o software *Cabri 3D*?

Sim (   )   Não (   )

Se sua resposta foi sim, descreva brevemente:

____

____

O que você entende por simetria?

Exemplifique (pode escrever ou desenhar)

O que você entende por translação?

- Exemplifique (pode escrever ou desenhar)

O que você entende por rotação?

- Exemplifique (pode escrever ou desenhar)

☞ Nas figuras abaixo descreva que transformações você observa


Figura 1: Pintura de Esher[45]


Figura 2: Huaca do Sol - Peru[46]


Figura 3: Catedral de Brasília[47]

[45] http://www.mcescher.com/Gallery/symmetry-bmp/E69.jpg
[46] http://peruhotel.com/images/articles/huaca_005.jpg
[47] Foto do arquivo pessoal

Questionário Final

PUC-SP

Animações com *Cabri 3D*

Pesquisa: Gênese Instrumental de alunos de Ensino Médio com *Cabri 3D*: estudo de algumas transformações no espaço.

Doutoranda: Jesus Victoria Flores Salazar

Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Caros participantes,

O seguinte questionário tem como objetivo levantar informações referentes à sua participação no curso optativo: Animações com *Cabri 3D*. Os dados coletados através deste instrumento serão utilizados unicamente para fins de pesquisa, sendo garantido o sigilo da identidade dos participantes. Agradecemos desde já sua colaboração!

Você utilizou as funções:

1. "Ajuda de ferramentas" (F1)?

Sim (   )   Não (   )

2. "Desfazer" (CTRL + Z)?

Sim (   )   Não (   )

3. "Mudar de vista" (botão direito do mouse)?

Sim (   )   Não (   )

4. "Modificar o estilo dos objetos" (selecionando o objeto com o botão direito do mouse)?

Sim (   )   Não (   )

5. Você encontrou alguma dificuldade na manipulação ou no uso da caixa de ferramentas “transformações” (translação, rotação, reflexão, etc.)?

Sim (   )   Não (   )

Se sua resposta foi <u>sim</u>, descreva brevemente:

6. Cite as ferramentas do *Cabri 3D* com as quais você já se considera familiarizado.

7. Em relação às atividades, qual lhe chamou a atenção ou foi mais marcante para você? Por quê? Comente:

8. A construção “animada” do <u>*Moinho*</u> é uma atividade que você acha:

Muito interessante (   )   Interessante (   )

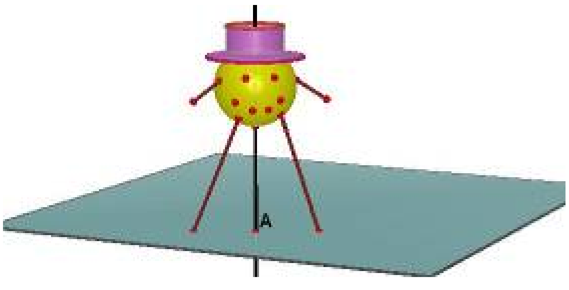
Pouco interessante (   )   Nada interessante (   )

9. A construção “animada” da <u>*Casa*</u> é uma atividade que você acha:

Muito interessante (   )   Interessante (   )

Pouco interessante (   )   Nada interessante (   )

Qual é sua opinião no à construção animada <u>*Boneco*</u>*?*



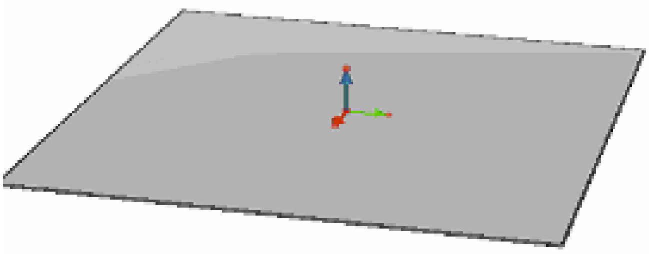
Descreva, em poucas palavras, sua experiência com *Cabri 3D*

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

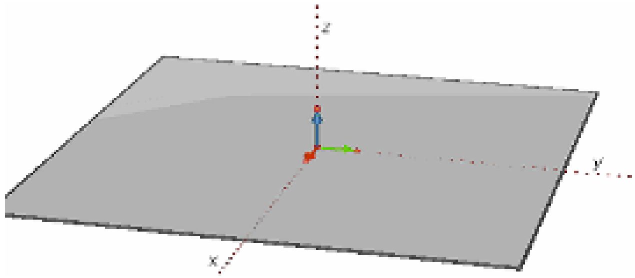
Primeiro encontro

Animações com *Cabri 3D*

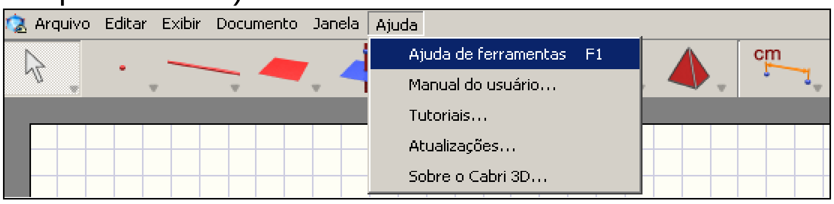
Ao abrir o software *Cabri 3D*, você verá, na tela, um plano cinza chamado plano de base e os representantes de três vetores de comprimento 1 que são dois a dois perpendiculares.



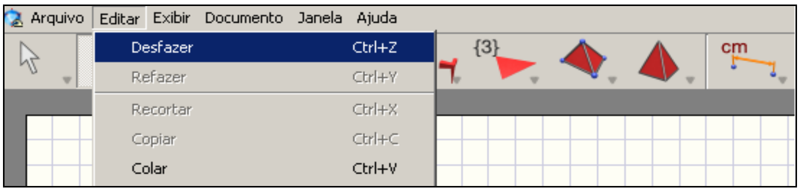
Podemos considerar o vetor vermelho como sendo aquele que fornece a direção e sentido do eixo x, o vetor verde fornecendo a direção e sentido do eixo y e o vetor azul fornecendo a direção e o sentido do eixo z.



Para se familiarizar com as diferentes ferramentas, recomenda-se usar as funções “Ajuda de ferramentas” e “Mudar de vista” (a partir do botão direito do mouse mantido pressionado)

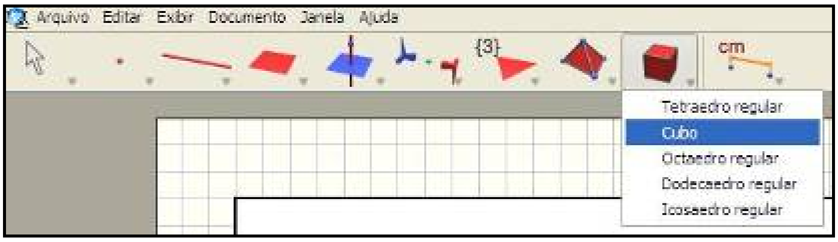


Para eliminar a última operação realizada, utilize a ferramenta “refazer”



Atividade 1: poliedros regulares

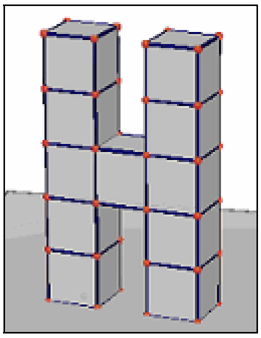
Construir no plano cinza os 5 poliedros regulares: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Atividade 2: cubos congruentes

O desenho abaixo mostra a construção da letra H a partir de cubos congruentes. Utilizando somente cubos, construir as letras E, U e A.



Salve sua construção nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

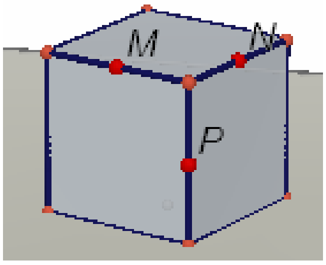
Atividade 3: poliedro convexo

Construir um cubo com estilo de superfície vazia. A seguir, obter os pontos médios das 12 arestas. Usando a ferramenta “*poliedro convexo*”, construir um poliedro que passa pelos doze pontos criados.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

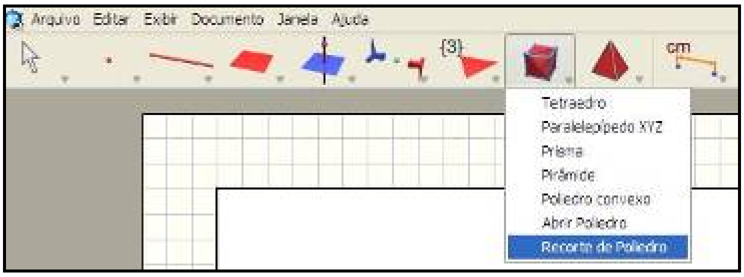
Atividade 4: recorte de poliedro

Construir um cubo e os pontos médios de três arestas conforme desenho abaixo.



> Obs.: *quatro são as maneiras de construir planos: por três pontos não alinhados, por duas retas concorrentes, por duas retas distintas paralelas e por uma reta e um ponto fora dela.*

Criar um plano pelos pontos *M*, *N* e *P* e a seguir, usando a ferramenta "*Recorte de Poliedro*", recorte o sólido *MNP*. Para isso, clique no sólido a ser recortado e em seguida no plano.

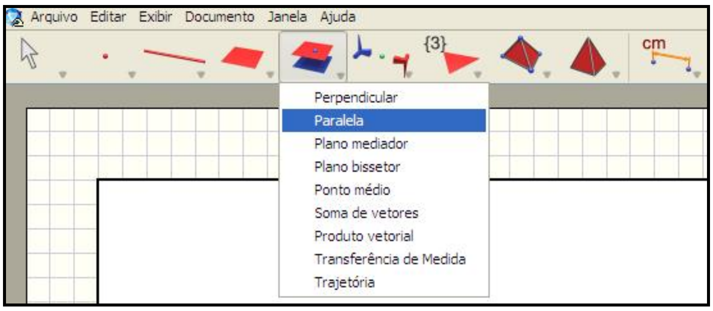


Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_4

Atividade 5: plano paralelo

a) Criar um ponto não pertencente ao plano de base. Nomear esse ponto de A (fazer isso imediatamente após tê-lo criado).

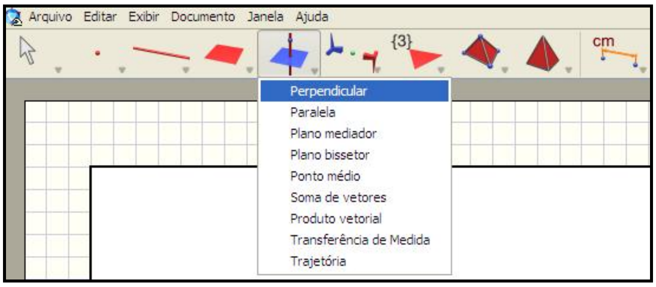
b) Criar um plano paralelo ao plano de base e passando pelo ponto A.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

Atividade 6: plano perpendicular

c) Criar uma reta perpendicular ao plano de base.

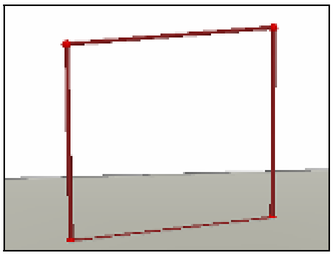


d) Criar um plano perpendicular ao plano de base.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_6

Atividade 7: trave de futebol

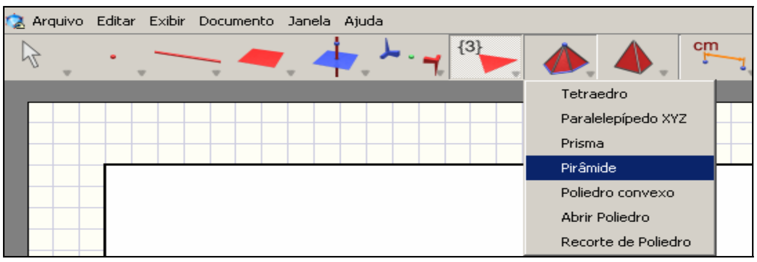
Construir uma trave de futebol considerando o plano de base como sendo o chão.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_7

Atividade 8: pirâmide de base quadrada

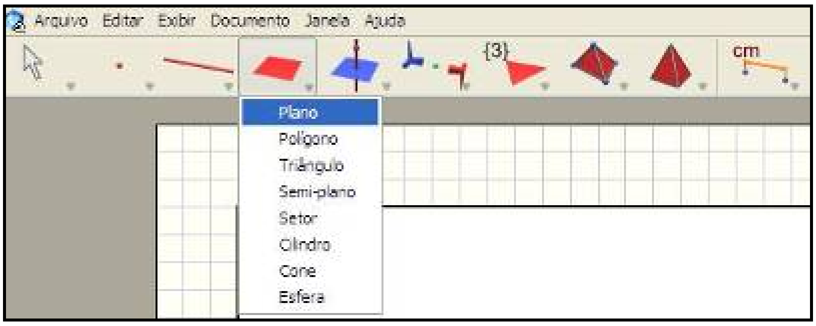
Criar um quadrado no plano de base. Pelo centro do quadrado levantar uma reta perpendicular. Criar um ponto sobre a reta. Finalmente, criar uma pirâmide de base quadrada e vértice V.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_8

Atividade 9: corpos redondos

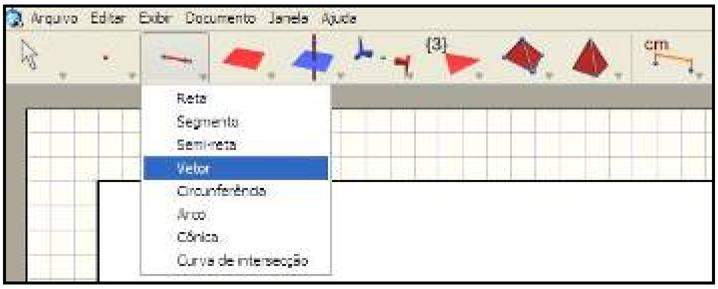
Construir: um cilindro, um cone e uma esfera.



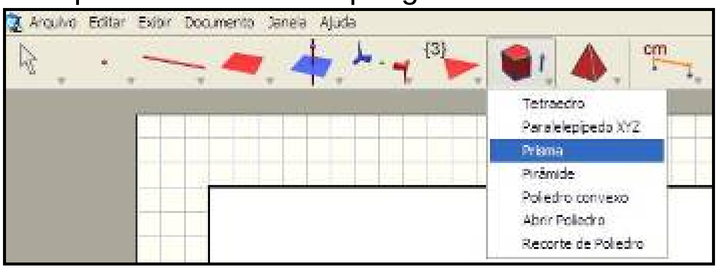
Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma:<nome>_Ativ_9

Atividade 10: prisma

Criar um polígono qualquer no plano de base. Criar um ponto A no plano de base. Pelo ponto A, criar uma reta perpendicular ao plano de base. Escolher um ponto B na reta. A seguir criar o vetor de origem A e extremidade B.



Finalmente, criar um prisma clicando no polígono e no vetor.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_10

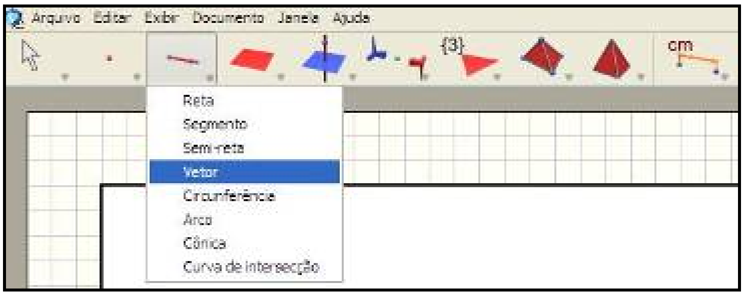
Segundo encontro

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

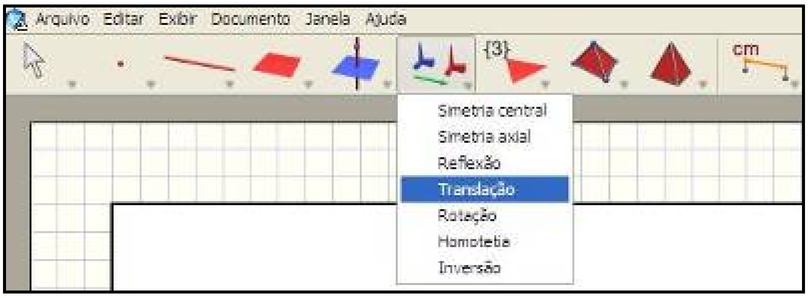
Animações com *Cabri 3D*

Atividade 1: translação

Criar um cubo e um vetor no plano de base.



A seguir, use a ferramenta “translação” para transformar o cubo num outro cubo.

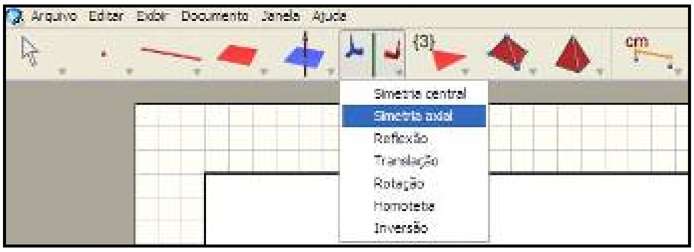


- Observe e descreva as características da ferramenta **“translação”.**

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Atividade 2: simetria axial

Criar um tetraedro regular e uma reta no plano de base. A seguir, use a ferramenta “simetria axial” para transformar o tetraedro regular num outro tetraedro regular.

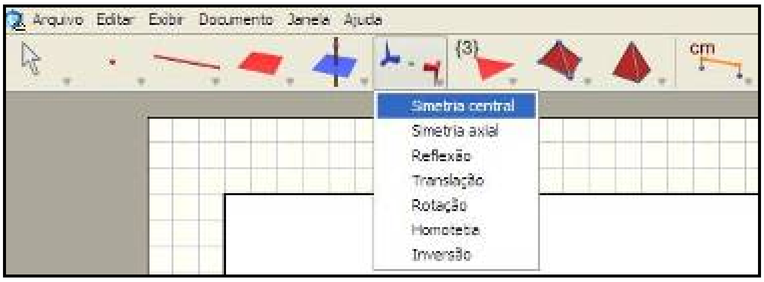


- Observe e descreva as características da ferramenta **"simetria axial".**

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

Atividade 3: simetria central

Criar um dodecaedro regular e um ponto no plano de base. A seguir use a ferramenta "simetria central" para transformar o dodecaedro regular num outro dodecaedro regular. Observe:

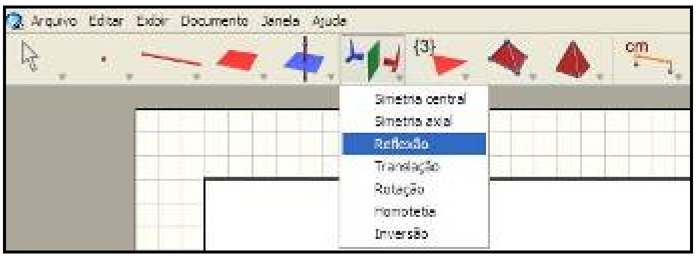


- Observe e descreva as características da ferramenta **"simetria central"**.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

Atividade 4: reflexão

Criar uma pirâmide de base quadrada e um plano perpendicular ao plano de base. A seguir, use a ferramenta "reflexão" para transformar a pirâmide numa outra pirâmide. Observe:

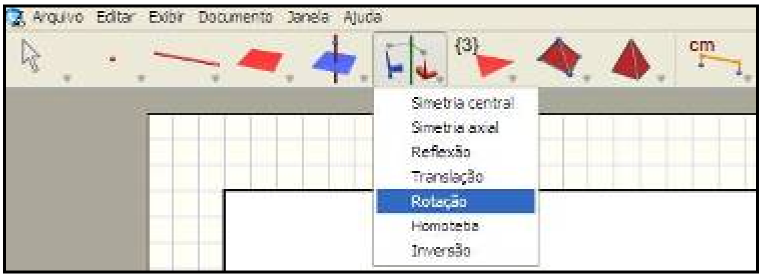


- Observe e descreva as características da ferramenta **"reflexão"**.

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_4

Atividade 5: rotação de um triângulo

Crie um ponto O no plano de base e uma reta perpendicular ao plano de base passando pelo ponto O. A seguir, criar dois pontos A e B no plano de base e um triângulo equilátero. Utilizando a ferramenta “rotação”, gire o triângulo em torno da reta sob um ângulo de medida AOB. (clicar na reta, no triângulo e nos pontos A e B)



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

Atividade 6: rotação de um cubo

Criar uma reta perpendicular ao plano de base. A seguir, construir um cubo. Use a calculadora para criar um ângulo de 45^o. Finalmente, rotacione o prisma em torno da reta segundo o ângulo de 45^o.

- Observe e descreva as características da ferramenta **“reflexão”** (atividades **5** e **6**).

Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_6

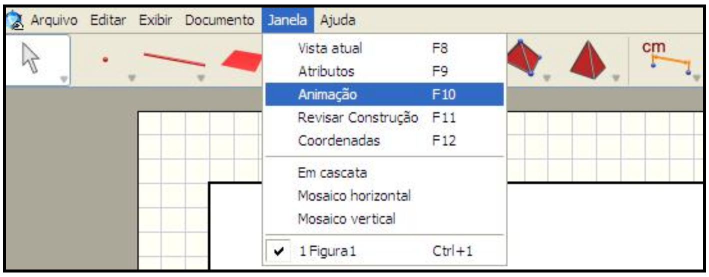
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Terceiro Encontro

Animações com *Cabri 3D*

Atividade 1: rotação de um segmento

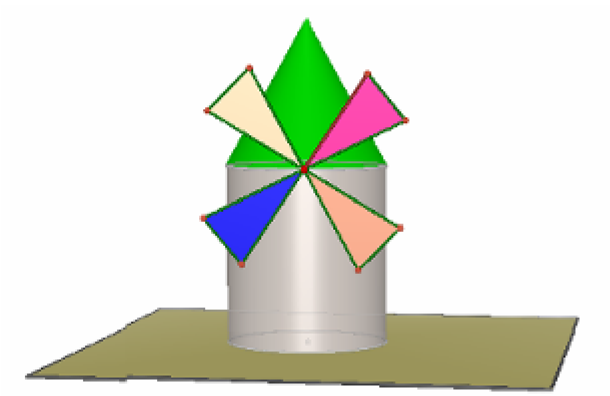
Criar uma circunferência de centro *O* no plano de base e uma reta perpendicular ao plano pelo ponto *O*. A seguir, criar um novo ponto *P* sobre a circunferência. Criar um diâmetro que passa pelo ponto *P*. Rotacione o diâmetro em torno da reta segundo um ângulo de 90^{o}. Use a ferramenta “animação” para movimentar o ponto *P* sobre a circunferência.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Atividade 2: moinho

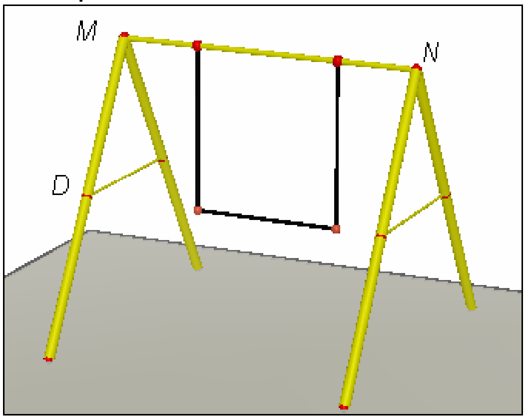
Construir um moinho conforme figura abaixo. Animar o moinho.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_2

Atividade 3: balanço

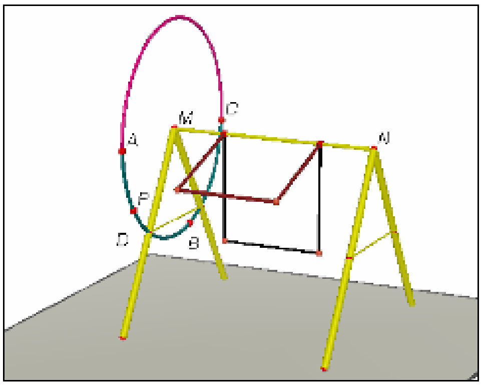
Criar um balanço e o seu suporte conforme desenho abaixo[48]



🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_3

Atividade 4: balanço com animação

Criar uma circunferência em torno do segmento *MN* de raio *MD*. A seguir, criar um arco *ABC*. Criar um ponto *P* sobre o arco. Rotacionar cada segmento do balanço em torno do segmento *MN,* segundo o ângulo *BP*. Finalmente, esconder os três segmentos e animar o ponto *P*.



🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_4

Atividade 5: sombra do balanço

Criar a sombra do balanço da atividade anterior. Escolha uma direção qualquer.

🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_5

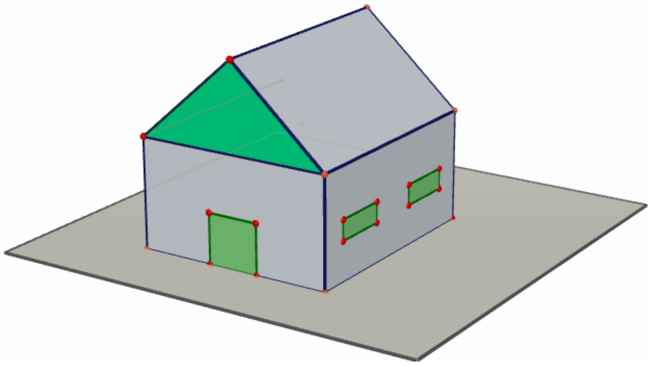
[48]Atividade adaptada. Fonte CABRILOG http://www.cabri.com/download-cabri-3d.html

Quarto encontro

Animações com *Cabri 3D*

Atividade: casa

Construir uma casa sendo que a porta e as duas janelas deverão ter um movimento de rotação.



Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_Ativ_1

Você pode usar as funções:

"Ajuda de ferramentas" ***(F1)****: fornece informações sobre como construir um determinado objeto.*

"Desfazer" ***(CTRL+Z)****: desfaz a última operação realizada.*

"Mudar de vista": a partir do botão direito do mouse.

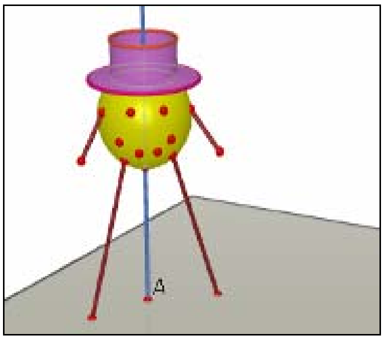
Quando desejar, você pode modificar o estilo dos objetos (cor, espessura, preenchimento, ***esconder / mostrar,*** *etc.) selecionando o objeto com o botão direito do mouse.*

Quinto encontro

Animações com *Cabri 3D*

Atividade 1: boneco

Construir um boneco (cabeça, mãos, pés, olhos, chapéu) a partir de uma reta perpendicular ao plano de base passando por um ponto *A*.

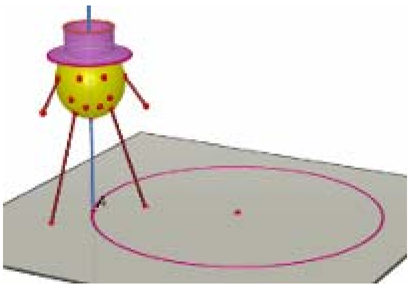


🖫 Salve sua construção nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_boneco

Atividade 2: boneco animado

Criar uma circunferência e redefinir o ponto *A* como sendo ponto da circunferência.

Animar o boneco ao redor de uma circunferência.



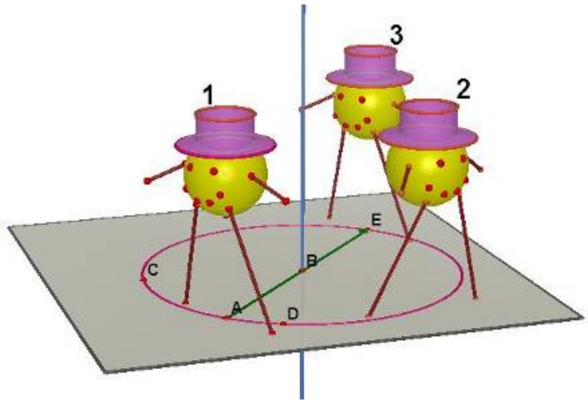
🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma: <nome>_boneco [animado]_1

Sexto encontro

Animações com *Cabri 3D*

Atividade: bonecos animados

Use o boneco construído no encontro anterior e crie dois pontos *C* e *D* na circunferência e uma reta perpendicular ao plano de base passando pelo centro *B* da circunferência. A seguir, rotacionar o boneco 1 em torno da reta com um ângulo de rotação *CBD* (clicar no eixo, em cada componente do boneco e finalmente nos pontos *C* e *D*) obtendo o boneco 2 . Em seguida, transladar o boneco 1 segundo o vetor AE obtendo o boneco 3. Animar o ponto *A*.



🖫 Salve sua construção, nomeando o arquivo da seguinte forma:

<nome>_boneco [animado]_2

ROTEIROS PARA OBSERVAÇÃO DOS ENCONTROS

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Roteiro de observação 1

Data: 25/04/08

Nome do observador: ____

Nome do aluno observado: ____

✍ Descrever detalhadamente das ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento de cada atividade.

✍ Focar especialmente nas ações nas quais o aluno vai se apropriando das ferramentas e recursos do *Cabri 3D.*

✍

Roteiro de observação 2

Encontro 2
Data: 09/05/08
Nome do observador: ____
Nome do aluno observado: _______________________________________

Descreva detalhadamente as ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento das atividades, mas focalize especialmente as ações e os comentários que o aluno faz, quando utiliza as ferramentas: translação, simetria axial, simetria central, reflexão, rotação.

Fique atento para que o aluno **complete** a ficha.

Depois de terminado o trabalho, **recolher** a ficha do aluno.

Observe em todos os casos se o aluno utiliza as funções:

- "Ajuda de ferramentas" (F1)
- "Desfazer" (CTRL+Z): desfaz a última operação realizada.
- "Mudar de vista": a partir do botão direito do mouse.
- "Estilo dos objetos" (cor, espessura, preenchimento, esconder/mostrar, etc.)

Observações:

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Roteiro de observação 3

Encontro 3
Data: 16/05/08
Nome do observador: ____
Nome do aluno observado: _______________________________________

Descreva detalhadamente as ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento das atividades, mas focalize especialmente as ações e os comentários que o aluno faz quando utiliza a ferramenta "transformações": **simetria axial, simetria central translação, reflexão e rotação.**

Observe em todos os casos se o aluno utiliza as funções:

- "Ajuda de ferramentas" (F1)
- "Desfazer" (CTRL+Z): desfaz a última operação realizada.
- "Mudar de vista": a partir do botão direito do mouse.
- "Estilo dos objetos" (cor, espessura, preenchimento, esconder/mostrar, etc.)

Observações:

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Roteiro de observação 4

Encontro 4
Data: 30/05/08
Nome do observador: ____
Nome do aluno observado: ____

Descreva detalhadamente as ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento das atividades, mas focalize especialmente as ações, quantas vezes o aluno refaz a tarefa até conseguir a construção final e alguns comentários que ele faz quando usa as diferentes ferramentas, especialmente "transformações".
Peça para o aluno que utilize a ferramenta **"Estilo dos objetos" (esconder/mostrar)** e não apague as construções que ele acha errada (para uma melhor análise) ou que salve o arquivo (que ele acha errado) e depois comece outra vez ou re-nomeie e salve no final.

✍ **Observações:**

Roteiro de observação 5

Encontro 5
Data: 06/06/08
Nome do observador: ____
Nome do aluno observado: ____________________________________

Descreva detalhadamente as ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento das atividades, mas focalize especialmente as ações, quantas vezes o aluno refaz a tarefa até conseguir a construção final e alguns comentários que ele faz quando usa as diferentes ferramentas, especialmente "transformações".

Peça para o aluno que utilize a ferramenta **"Estilo dos objetos" (esconder/mostrar)**.

✍ **Observações:**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Roteiro de observação 6

Encontro 6
Data: 13/06/08
Nome do observador: ____
Nome do aluno observado: ____________________________________

1. Descreva detalhadamente as ações do aluno de maneira sequencial durante o desenvolvimento das atividades.
2. Focalize especialmente as ações e expressões ou na mudança de comportamento [*expressões de alegria, descontento, etc*.].
3. Quantas vezes o aluno refaz a tarefa até conseguir a construção final e se solicita a intervenção do professor com frequência.
4. Alguns comentários que ele faz quando usa as diferentes ferramentas, especialmente aponte como utiliza a ferramenta “transformações” [*se você observa que ele já está familiarizado ou ainda não*].
5. Peça para o aluno que utilize a ferramenta *“Estilo dos objetos” (esconder/mostrar*) e salvar a construção numa pasta nova no <meus documentos> que nomeie [NOME DO ALUNO_ 6]

Observações:

Comentários dos estudantes: Andrya, Carlos, Luiz e Álvaro

Comentário de Andreya

Pesquisador: que você achou da experiência com *Cabri 3D*?
Andreya: achei legal, interessante e que vai me ajudar bastante com Geometria.
Pesquisador: você gosta de Geometria Espacial?
Andreya: gosto bastante, mais que da Matemática normal...
Pesquisador: assim, por quê?
Andreya: Eu acho mais fácil, entendi melhor que o que faço na sala de aula
Pesquisador: você acha que o *Cabri 3D* ajuda?
Andreya: Na Geometria mesmo...
Pesquisador: e melhorou, ampliou seus conhecimentos?
Andreya: bastante, eu tinha outros conceitos de translação, rotação quando eu cheguei à aula...
Pesquisador: qual foi a transformação mais fácil de utilizar?
Andreya: a simetria.

Comentário de Carlos

Pesquisador: como foi sua primeira experiência com *Cabri 3D*?
Carlos: no início foi difícil, mas depois melhorou, mas foi uma boa experiência...
Pesquisador: por que no início foi difícil?
Carlos: até se familiarizar e souber qual ferramenta usar na hora certa...
Pesquisador: e das transformações geométricas, quais foram as que você mais utilizou?
Carlos: translação, simetria e rotação.
Pesquisador: e qual foi a que você achou mais difícil de utilizar?
Carlos: rotação.
Pesquisador: por que a rotação?
Carlos: porque não entendi direito no começo como funcionava...
Pesquisador: e agora?
Carlos: já entendi.
Pesquisador: qual foi a transformação mais fácil de utilizar?
Carlos: a simetria.

Comentário da dupla, Luiz e Álvaro.

Pesquisador: Que acharam do *Cabri 3D*?
Luiz e Álvaro: ah! Muito legal. Legal porque se pode criar qualquer coisa...
Pesquisador: e das transformações geométricas, qual foi a que vocês tiveram mais dificuldades de trabalhar com *Cabri 3D*?
Luiz e Álvaro: rotação [...] não sabia onde clicar primeiro e sempre me perdia... [...] ah! Demoramos um tempo até entender...
Pesquisador: por que a rotação?
Luiz e Álvaro: na “casa”, por exemplo, demoramos muito por causa da rotação...
Pesquisador: qual foi a transformação que vocês mais trabalharam com *Cabri 3D*?
Luiz e Álvaro: reflexão.

Termo de compromisso dos estudantes

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado – atividades realizadas, gravações em áudio e em vídeo, transcrições, registros escritos – servirão de base para as análises que procuram entender melhor em que medida e de que forma o uso das ferramentas disponíveis no *Cabri 3D* influencia no desenvolvimento da atividade Matemática do aluno, especificamente em situações de resolução de problemas no espaço.

O acesso aos registros em vídeo será exclusivo dos pesquisadores e só poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nas transcrições e registros escritos, os mesmos terão seus nomes substituídos por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos, no material escrito, produzido a partir dos dados coletados durante a realização da pesquisa.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 25 de abril de 2008.

________________________	________________________
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud Orientador	Jesús Victoria Flores Salazar
________________________	________________________
Professor responsável	Estudante

Termo de compromisso do professor do curso

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

O presente termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos da pesquisa, principalmente os relativos à utilização dos dados coletados.

O material coletado – atividades realizadas, gravações em áudio e em vídeo, registros escritos – servirá de base para análises que procuram entender melhor em que medida e de que forma a utilização do ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D* influencia no desenvolvimento da atividade Matemática dos alunos, especificamente em situações que envolvem conteúdos de transformações geométricas no espaço.

O acesso aos registros em vídeo será exclusivo dos pesquisadores e só poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nos registros escritos, terão os nomes serão substituídos por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ainda ser utilizadas pelo pesquisador em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 25 de abril de 2008.

____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Orientador

____
Jesús Victoria Flores Salazar

____
Assinatura do professor do curso optativo
Animações com *Cabri 3D*

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Autorização de participação

Eu, ____, autorizo meu filho, _______________________________________estudante de segundo ano do Ensino Médio, a participar do curso optativo: Animações com *Cabri 3D,* nos dias e horários discriminados abaixo.

Dia: sexta-feira

Horário: 13h10 às 14h50

Mês	Dias
Abril	25
Maio	9 – 16 – 23 – 30
Junho	6
Total de encontros	**6**

São Paulo, 25 de abril de 2008.

____

Assinatura do responsável (pai ou mãe do estudante)

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Ilmo.Sra.
Diretora do *Colégio Universitas* de Santos
Ref.: **Solicitação de deferimento dos procedimentos de pesquisa.**

O presente documento tem como objetivo dar ciência e solicitar autorização para os procedimentos relativos à pesquisa, desenvolvida no curso optativo: Animações com *Cabri 3D* no *Colégio Universitas* de Santos, principalmente aos que se refere à coleta e à utilização dos dados.

A coleta de dados se dará por meio de gravações em vídeo e observações realizadas em registros escritos. Para tanto, sempre que necessário, nos comprometemos a solicitar autorização dos participantes ou responsáveis no caso desses serem menores de idade.

O material coletado servirá de base para análises que procuram entender melhor em que medida e de que forma a utilização do ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D* influencia no desenvolvimento da atividade Matemática dos alunos, especificamente em situações que envolvem conteúdos de transformações geométricas no espaço. O acesso aos registros em vídeo será exclusivo dos pesquisadores e somente poderá ser apresentado com a autorização dos participantes. Nos registros escritos, terão os nomes serão substituídos por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos.

As informações provenientes das análises do material coletado poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 25 de abril de 2008.

____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Orientador

____
Jesús Victoria Flores Salazar

____
Diretora

Autorização para publicar o nome da escola

DECLARAÇÃO

Declaro, para os devidos fins e efeitos legais, que autorizo a Jesús Victoria Flores Salazar, doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP a publicação, com fins científicos, do nome e dados históricos do *Colégio Universitas*, onde foi realizada a pesquisa: Gênese Instrumental de alunos de Ensino Médio com *Cabri 3D:* estudo de algumas transformações no espaço, como parte dos cursos optativos que a escola ofereceu no primeiro semestre de 2008.

São Paulo, 18 de Novembro de 2008.

Diretora do Colégio Universitas