

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

RAIMUNDO DE SOUZA MARTINS NETO

**LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA PARA MOBILIZAR RACIOCÍNIOS**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**São Paulo
2008**

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP**

RAIMUNDO DE SOUZA MARTINS NETO

**LÓGICA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO:
UMA PROPOSTA PARA MOBILIZAR RACIOCÍNIOS**

*Versão preliminar de dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do(a) Prof(a). Dr(a). Celina Aparecida Pereira Almeida Abar.*

**São Paulo
2008**

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de foto copiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

À minha mãe Ernestina V. Martins, pelo apoio, dedicação e incentivo. Aos meus filhos Guilherme e Antonio Henrique, pela paciência desprendida a mim em função dos momentos em que não pude estar ao lado deles.

AGRADECIMENTOS

À Prof.^a Dr.^a Celina Aparecida Pereira Almeida Abar, pela paciência dedicada a mim, pela orientação objetiva e profissional que possibilitou o desenvolvimento desta dissertação.

Ao Prof. Dr. Lafayette de Moraes e Prof. Dr. Gerson Pastre de Oliveira, pelas sugestões que muito contribuíram para ajustes em relação ao rumo e direção deste trabalho.

À amiga Karina de Paula Vezzaro, pois sem seu auxílio este trabalho não teria sido iniciado.

À companheira Jinlova O. Pantaleão, pelo apoio emocional e profissional, essenciais para a conclusão dessa dissertação.

Aos amigos de profissão João Ortiz e Nivaldo Junior, pela amizade, carinho e troca de opiniões que me auxiliam constantemente e resultam em ótimos momentos de aprendizagem e realização profissional.

Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni e Prof. João Calleja, pela dedicação e apoio nas observações realizadas durante as aplicações das atividades.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da Bolsa que contribui para meu aprimoramento profissional.

Aos alunos que participaram das atividades realizadas, por aceitarem os desafios propostos e dedicação nas resoluções das mesmas.

A todos meus familiares e amigos que, de alguma forma, se envolveram na realização deste trabalho, pois não somos plenos sem amigos e familiares.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estabelecer em que medida é possível desenvolver em alunos do ensino médio o domínio e a habilidade na utilização de regras da lógica clássica através de atividades que mobilizem raciocínios utilizando-se dos conectivos lógicos: negação, conjunção, disjunção, implicação, bicondicional e quantificadores. Os raciocínios lógicos, em relação à origem, uso e desenvolvimento, são analisados e interpretados à luz dos teóricos Piaget e Vigotsky. As atividades foram elaboradas e adaptadas de uma estrutura oferecida por um applet, aplicadas em alunos do 2º ano do ensino médio, totalizando sete encontros. O desenvolvimento, aplicação e análise das atividades respeitaram a metodologia da engenharia didática, fazendo-se análise *a priori*, aplicação e análise *a posteriori*. A aplicação e análises *a posteriori* confirmaram nossas previsões, indicando dificuldades dos alunos quanto ao uso dos conectivos lógicos, porém mostrou que as atividades promoveram um desequilíbrio entre o que o aluno sabe sobre estes conectivos e como ele os utiliza no contexto comum e no contexto da lógica clássica. O que valida também nosso trabalho é a possibilidade de se trabalhar lógica clássica no ensino médio.

Palavras-chave: Lógica Clássica. Conectivos Lógicos. Educação Matemática.

ABSTRACT

This work has the purpose of establishing how far it is possible to develop the high school students' skills concerning the power and the ability of using the rules of classical logic through activities that mobilize thoughts, using the logical connective: negation, conjunction, disjunction, implication, biconditional and quantitative. The logical reasoning, regarding the origin, use and development, are analyzed and interpreted in the light of the theoreticians Piaget and Vygotsky. The activities were prepared based and on adapted the structure offered by the applet, and applied to students from the second year of high school, during seven meetings. The development, the implementation and analysis met the methodology of teaching engineering, making, firstly, a prior analysis, implementation and, also, a subsequent analysis. The application and the subsequent analysis confirmed our predictions indicating difficulty student's with the use of logical connective, however they showed that the activities have promoted an imbalance between what student has knowledge these of connectives and how he uses them in context and in the classic logic context. It shows that is possible to work classic logic in the high school level.

Keywords: Classic Logic. Logical Connectives. Mathematics Education.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE QUADROS	viii
LISTA DE QUADROS	viii
INTRODUÇÃO	2
Trajetória pessoal	2
Justificativa	2
Problemática	15
CAPÍTULO 1 - REFERENCIAL TEÓRICO	22
1.1 Desenvolvimento do raciocínio lógico	22
1.2 Referencial das atividades propostas	31
CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA E EXPERIMENTO	36
2.1 Engenharia Didática	36
2.2 Análises Preliminares	38
2.3 Desenvolvimento das atividades	39
2.4 Experimentação e Análises das Atividades	43
2.4.1 Atividade I - Reconhecimento	45
2.4.1.1 Análise a Priori da Atividade I	45
2.4.1.2 Experimentação da Atividade I	49
2.4.1.3 Análise a Posteriori da Atividade I - Reconhecimento	56
2.4.2 Atividade II – Negação e Conjunção	57
2.4.2.1 Análise a Priori da Atividade II	57
2.4.2.2 Experimentação da Atividade II	60
2.4.2.3 Análise a Posteriori da Atividade II	64
2.4.3 Atividade III – Disjunção	65
2.4.3.1 Análise a Priori da Atividade III	66
2.4.3.2 Experimentação da Atividade III	68
2.4.3.3 Análise a Posteriori da Atividade III	73
2.4.4 Atividade IV – Revisão	74
2.4.4.1 Análise a Priori da Atividade IV	74
2.4.4.2 Experimentação da Atividade IV	78
2.4.4.3 Análise a Posteriori da Atividade IV	82

2.4.5 Atividade V – Implicação e Bicondicional	83
2.4.5.1 Análise a Priori da Atividade V	84
2.4.5.2 Experimentação da Atividade V	86
2.4.5.3 Análise a Posteriori da Atividade V	91
2.4.6 Atividade VI – Quantificadores	91
2.4.6.1 Análise a Priori da Atividade VI	93
2.4.6.2 Experimentação da Atividade VI	96
2.4.6.3 Análise a Posteriori da Atividade VI	99
2.4.7 Atividade VII – Finalizando.....	100
2.4.7.1 Análise a Priori da Atividade VII	100
2.4.7.2 Experimentação da Atividade VII	104
2.4.7.3 Análise a Posteriori da Atividade VII	110
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116
ANEXOS	119
Anexo A.....	120
Anexo B.....	121
Anexo C.....	123
Anexo D.....	124
Anexo E	125
Anexo F	127
Anexo G.....	128
Anexo H.....	130

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mundo criado a partir do programa Tarski's World	31
Figura 2 – Applet Tarski's World	32
Figura 3 – Material dos alunos.....	44
Figura 4 - Atividade I.1	46
Figura 5 - Atividade I.2	47
Figura 6 – Atividade I.3.....	49
Figura 7 - Atividade 1.3 proposta por um grupo.....	55
Figura 8 – Atividade I.3 apresentada por um grupo.....	57
Figura 9. Atividade II. 1 – Análise de sentenças	58
Figura 10 – Atividade II.2 – Construção do mundo.....	59
Figura 11 - Atividade II-2 resolvida por um grupo.....	62
Figura 12- Atividade III - 1.....	66
Figura 13- Atividade III . 2 – Construção do mundo	67
Figura 14 - Atividade III . 3 – Desafio dos mundos: Experimentação.....	71
Figura 15 - Atividade IV.1 – Análise de sentenças.....	75
Figura 16 – Atividade IV.2 – Construção do mundo	76
Figura 17 - Atividade IV. 3 – Transcrição e negação de sentenças: Experimentação	82
Figura 18- Atividade V.1 – Análise de sentenças.....	84
Figura 19- Atividade V.2 – Construção do mundo.....	85
Figura 20 - Atividade VI.1.....	93
Figura 21- Atividade VI.2 – Análise de sentenças.....	94
Figura 22 – Atividade VI. 3 – Construção do mundo	95
Figura 23 - Atividade VI.3 – 3 – Desafio dos mundos: Experimentação.....	99
Figura 24 - Atividade VII.1 – Análise de sentenças	100
Figura 25 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras	102
Figura 26 - Atividade VII. 1 – Análise de sentenças: Experimentação	105
Figura 27 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras: Experimentação	106
Figura 28 - Atividade VII. 3 – Descrever estratégia: Experimentação	111
Figura 29 - Atividade VII. 3 e VII. 4 – Experimentação.....	112

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Atividade I.1 Análise de sentenças: Experimentação.....	50
Quadro 2 –Atividade I.2 –Construção do mundo: Experimentação	51
Quadro 3- Atividade I.3 – Desafio dos mundos: Experimentação	52
Quadro 4 Atividade I.3 Desafios dos mundos: Experimentação.	54
Quadro 5 – Atividade II.1 – Análise de sentenças: Experimentação	61
Quadro 6 – Atividade II. 2 – Construção do mundo - Experimentação	61
Quadro 7 - Atividade II. 3 Desafio dos mundos - Experimentação	63
Quadro 8 - Atividade II. 3 – Desafio dos mundos - Experimentação	64
Quadro 9- Atividade III.1- Análise das sentenças: Experimentação	69
Quadro 10- Atividade III. 2 – Construção do mundo: Experimentação	69
Quadro 11- Atividade III.3 – Desafio dos mundos: Experimentação	70
Quadro 12- Atividade III.3 - Desafio dos mundos: Experimentação.....	72
Quadro 13- Atividade III.3 – Desafio dos mundos: Experimentação	73
Quadro 14 - Atividade IV. 1 – Análise de sentenças: Experimentação	79
Quadro 15 - Atividade IV. 2 –Construção do mundo: Experimentação	79
Quadro 16 - Atividade IV. 3 – Transcrição e negação de sentenças: Experimentação	80
Quadro 17 - Atividade V.1- Análise de sentenças: Experimentação	87
Quadro 18 - Experimentação Atividade V.2	88
Quadro 19 - Atividade V.3 – Desafio dos mundos: Experimentação	89
Quadro 20 - Atividade V. 3 – Desafio dos mundos: Experimentação	89
Quadro 21 - Atividade V. 3 – Desafio dos mundos: Experimentação	91
Quadro 22- Atividade VI.1- Análise de sentenças: Experimentação.....	96
Quadro 23 - Atividade VI.2 – Análise de sentenças: Experimentação	97
Quadro 24 - Experimentação Atividade VI.3	97
Quadro 25 - Atividade VI.3 – Desafio dos mundos: Experimentação.....	98
Quadro 26 - Atividade VI. 4 – Desafio dos mundos: Experimentação.....	99
Quadro 27 - Atividade VII. 1 – Análise de sentenças: Experimentação	104
Quadro 28 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras: Experimentação.....	105
Quadro 29 - Atividade VII. 3 – Descrever estratégia: Experimentação.....	106
Quadro 30 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação	108

Quadro 31 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação	108
Quadro 32 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação	109
Quadro 33 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação	109

INTRODUÇÃO

Trajectoria pessoal

A atividade de professor de matemática do ensino médio da rede pública estadual de São Paulo e rede particular na capital paulista, por treze anos, concomitantemente, aliado aos cursos de especialização, iniciação científica e verão, realizados no IME-USP, como aluno ouvinte na FE-USP, onde tive contato com a proposta de etnomatemática e diferentes visões sobre o conhecimento, e bacharelado em Filosofia, Universidade São Judas Tadeu, são responsáveis pelas inquietações que motivaram o início deste trabalho.

Iniciei o curso de mestrado acadêmico na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, no segundo semestre de 2006, com a intenção de desenvolver um trabalho que abordasse a difícil tarefa do professor de matemática, nos níveis de ensino fundamental II e médio, em relação à problemática do uso de raciocínio matemático com os fundamentos da lógica clássica. Mais precisamente, o relacionamento de juízos utilizados em sala de aula, fundamentados com estruturas de raciocínios matemáticos, e os utilizados no “cotidiano” pelo aluno.

Atualmente sou membro do grupo de pesquisa Tecnologias e Meio de Expressão em Matemática (TecMEM), PUC São Paulo, criado em 2001, que tem por objetivo investigar e pesquisar relações recíprocas entre práticas matemáticas, aprendizagem e tecnologias. Dentre outras atividades, o grupo trata do desenvolvimento de cenários de aprendizagem, abordando conteúdos específicos, integrando recursos tecnológicos, “incentivando o desenvolvimento de competências intelectuais mais complexas que a tradicional armazenagem de conteúdos e investigar as influências das ferramentas, atividades e intervenções que compõem estes cenários nas trajetórias de aprendizagem de seus participantes.”¹

As inquietações a que me referi envolvem a lógica clássica e suas influências nos processos de ensino e aprendizagem de matemática no ensino médio, desde já aceitando sua presença nos textos de livros didáticos, nas falas do professor, nas tentativas de formulações de justificativas, escritas e orais, por parte dos alunos. A partir de então,

¹ Extraído da página do grupo, <[http:// www.pucsp.br/tecmem](http://www.pucsp.br/tecmem)>. Acesso em: 10 junho 2008.

surgem questões como: em que medida a linguagem utilizada nos textos de livros didáticos de matemática, na apresentação de conceitos, questões e em supostas demonstrações, é facilitadora ou obstáculo para a interiorização de uma lógica elementar? Em que medida a lógica clássica está sendo utilizada corretamente e coerentemente por professores e autores de livros didáticos? A dificuldade que os alunos apresentam em produzir justificativa pode estar relacionada ao desuso, ou uso incorreto, de uma estrutura lógica básica? Uma suposta lógica cotidiana, fora do ambiente escolar, é um obstáculo para que o uso da lógica matemática torne-se operacional?

Estas questões, entre outras, que me parecem ser relevantes para a prática do professor de matemática, formam o ponto de partida desse trabalho de pesquisa, na qual procuramos estabelecer em que medida é possível desenvolver em alunos do ensino médio o domínio e a habilidade de utilização das regras da lógica clássica através de atividades que mobilizem pensamentos com essa estrutura.

Justificativa

Ao refletirmos sobre a questão da pesquisa, acreditamos que uma abordagem sobre a problemática do conhecimento, que está implícito ao se trabalhar em processos de ensino e aprendizagem de matemática, venha enriquecer nosso trabalho.

Assim, o tema de nossa pesquisa, que envolve a lógica clássica, nos remete à Filosofia e deste modo, faremos uma breve exposição de dois filósofos, Aristóteles e Kant, que em nosso entendimento têm papéis relevantes nos fundamentos de nosso trabalho. O primeiro por ser precursor do estudo da lógica e o segundo pela grande influência na discussão sobre a teoria do conhecimento.

Aristóteles, filósofo da Grécia antiga, (384-322 a.C.), tido como o pai da lógica clássica, já teria defendido diferentes tipos de conhecimento. O conhecimento *apodíctico*, que parte de premissas verdadeiras e imediatas, raciocínio que exclui toda forma de contingência, de opinião, de probabilidade, seria o tipo de conhecimento que sustentaria uma ciência de caráter rigoroso sem subjetividade. O outro conhecimento, também científico para Aristóteles, chamado de *dialético*, que parte de premissas prováveis, que sejam admitidas por todos ou pela maioria dos sábios.

Na obra *Ética a Nicômaco*, Aristóteles propõe diferenciar uso e restrições para esses diferentes tipos de conhecimentos.

Nossa discussão será adequada se tiver tanta clareza quanto comporta o assunto, pois não se deve exigir a precisão em todos os raciocínios por igual, assim como não se deve buscá-la nos produtos de todas as artes mecânicas. (...) Evidentemente, não seria menos insensato aceitar um raciocínio provável da parte de um matemático do que exigir provas científicas de um retórico. (ARISTÓTELES, apud RODHDEN, 2005, p.51)

A partir dessa citação, temos a possibilidade da existência e importância de dois tipos de conhecimentos. Neste trabalho daremos atenção ao chamado *apodíctico*, através do qual Aristóteles “buscou explicitar leis ou regras que garantam uma argumentação competente” (MACHADO, 2005, p.15).

O segundo filósofo, Immanuel Kant (1724-1804), aborda reflexão sobre o conhecimento, que com o passar dos anos foi se aprofundando e alterando seus olhares. Com a pretensão de acrescentar em nossa discussão algumas características de diferentes tipos de conhecimentos, como origem, abrangência e possibilidade de uso, apresentaremos, superficialmente, propostas de um filósofo que influenciou muitos estudiosos em diversas áreas do conhecimento, especialmente os interessados em epistemologia². Immanuel Kant (1724-1804), pensador “situado no cruzamento de três grandes correntes ideológicas que sulcavam o século XVIII” (MORENTE, 1970; p.219), racionalismo de Leibniz³, empirismo de Hume⁴ e a ciência de Newton⁵, é o responsável por estabelecer “um novo sentido do ser, que não é o ser ‘em si’, mas o ser ‘para’ o conhecimento, o ser no conhecimento” (ibid. 219).

As propostas de Piaget são utilizadas como base teórica deste trabalho. Segundo Brun (1996, p.18), quando Piaget questiona sobre a natureza dos conhecimentos, é influenciado por Kant. Segue citação que traz Inhelder, Célrier, e comentários de Brun.

Retiro da obra de Inhelder, Célrier e colaboradores (1992) a definição desse sentido: ‘A profunda originalidade de Piaget consistiu em ter orientado a sua obra, de forma imediata, para o estudo das categorias do conhecimento, sem as quais não seria possível qualquer adaptação à realidade nem qualquer pensamento coerente, o que lhe permitiu criar uma psicologia fundamental, que

² Teoria do conhecimento

³ Doutrina que privilegia a razão dentre todas as faculdades humanas, considerando-a como fundamentos de todo conhecimento possível. O racionalismo considera que o real é em última análise racional e que a razão é portanto capaz de conhecer o real e de chegar à verdade sobre a natureza das coisas. Opõe-se ao empirismo fazendo-se metódico, recorrendo à lógica e à matemática (p.ex., em Leibniz). (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.235-236).

⁴ Doutrina ou teoria do conhecimento segundo a qual todo o conhecimento humano deriva, direta ou indiretamente, da experiência sensível externa ou interna. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.84).

⁵ Newton empregou com sucesso o formalismo matemático na construção de sua teoria física, ao mesmo tempo defendeu a necessidade e a importância do método experimental. Foi grande a influência de Newton no desenvolvimento da ciência, podendo-se considerar que sua física fornece um paradigma de ciência que irá vigorar praticamente até o período contemporâneo. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006; p.200-201)

trata da construção de noções constitutivas, como o espaço, o tempo, a causalidade, etc. É neste sentido que o sujeito epistêmico aparece sobretudo como o sujeito de um conhecimento normativo' (20-21), o que vai na mesma linha da questão kantiana das categorias do conhecimento. (BRUN, p.18)

Kant preocupou-se em estabelecer uma ruptura entre diferentes conhecimentos, científico e metafísico, utilizando termos mais comuns em texto de filosofia, no prefácio da segunda edição da *Crítica da Razão Pura*, conforme segue:

O que nestas há de razão é algo que é conhecido a priori e esse conhecimento de razão pode referir-se ao seu objecto de duas maneiras: ou pela simples determinação deste e do seu conceito (que deverá ser dado noutra parte) ou então, realizando-o. O primeiro é o conhecimento teórico; o segundo, o conhecimento prático da razão. (KANT, 2001, B X)⁶

A citação anterior, grosso modo, nos sugere a igual possibilidade de se trabalhar nos campos conceitual ou experimental. Em seguida o pensador ressalta que:

A matemática e a física são os dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar a priori o seu objecto, a primeira de uma maneira totalmente pura e a segunda, pelo menos, parcialmente pura, mas também por imperativos de outras formas de conhecimento que não as da razão. (KANT, 2001, B X).

Kant parece deixar para a Matemática apenas os conhecimentos teóricos puros, ou seja, que não seriam acrescidos em nada pela experiência, aliás, não deveriam ser tratados fora do campo conceitual.

O autor em questão estabelece como fato importantíssimo no caminho trilhado pela Matemática, que ele coloca em nível de revolução, o uso apenas da lógica para se estabelecer conhecimento. Usa como exemplo uma proposta de demonstração do triângulo isósceles, onde ele afirma que:

[...] não tinha que seguir passo a passo o que via na figura, nem o simples conceito que ela possuía, para conhecer, de certa maneira, as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e que para conhecer, com certeza, uma coisa *a priori* nada devia atribuir-lhe senão o que fosse consequência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito”(KANT, 2001, B XII, os grifos são nossos).

Em nossa leitura, Kant retira a contribuição da experiência de *ver* um triângulo com dois lados de mesma medida, para deste extrair suas propriedades, a saber: há uma bissetriz, uma altura e uma mediana que são todas o mesmo segmento, e os ângulos da base, ao lado de tamanho desigual, são congruentes. Essas propriedades são necessárias para se ter triângulos isósceles.

Após estas citações, mesmo que fora do contexto da obra, poderíamos pensar que o ensino de matemática, nos ensinos fundamental II e médio, deveria dar prioridade aos

⁶ Para as citações da *Crítica da razão pura*, utilizaremos A e B para diferenciar as duas edições da obra. Os numerais identificam parágrafos, os numerais gregos indicam que pertencem à introdução.

estudos da lógica e dos conceitos, ou até mesmo desconsiderar quaisquer dados da experiência. Porém, na introdução da *Crítica da Razão Pura*, segunda edição, Kant traz uma frase que não segue essa proposta:

Não resta dúvida de que todo o nosso conhecimento começa pela experiência; efectivamente, que outra coisa poderia despertar e pôr em acção a nossa capacidade de conhecer senão os objectos que afectam os sentidos e que, por um lado, originam por si mesmo as representações e, por outro lado, põem em movimento a nossa faculdade intelectual e levam-na a compará-las, ligá-las ou separá-las, transformando assim a matéria bruta das impressões sensíveis num conhecimento que se denomina experiência?” (KANT, 2001, B 1), mas, “se, porém, todo o conhecimento se inicia *com* a experiência, isso não prova que todo ele derive *da* experiência”(ibid, B 2).

Então, poderíamos dizer que “o conhecimento por experiência” seria um conhecimento composto pelo que é fornecido pela experimentação, e por “algo” que temos carregado em nossas mentes⁷ que não depende dessa experiência, mas que a afeta.

Teríamos, portanto, de tratar de dois tipos de conhecimentos, que não depende da experiência, os conhecimentos *a priori*, e os que dependem da experiência, os *a posteriori*.

Entretanto, essa distinção em dois tipos de conhecimento, *a priori e posteriori*, é ainda pouco para se afirmar que os conhecimentos tratados pela matemática devam ou não ser empiricamente trabalhados. Avançando na discussão, Kant apresenta os juízos⁸ *analíticos* e os *sintéticos*, que originam das diferentes relações entre um sujeito e um predicado, ou seja, entre o objeto de estudo e suas características.

Os juízos analíticos aqueles em que “o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que nele estavam pensados (embora confusamente)” (ibid, B 11), conhece-se o sujeito sem a necessidade de experiência, enquanto que os juízos sintéticos são o que “pelo contrário, acrescentam ao conceito de sujeito um predicado que nele não estava pensado e dele não podia ser extraído por qualquer decomposição.” (ibidem), seriam os juízos que requerem de experiência.

Para Morente (1970), a relação entre sujeito e predicado nos juízos sintéticos é vista da seguinte forma:

O objeto do conhecimento não é objeto do conhecimento, senão enquanto está provido das condições do conhecimento. Pois bem; essas condições do conhecimento é o sujeito do conhecimento que as dá ao objeto, e torna a coisa em si como objeto do conhecimento.

(...) O animal caminha pelo mundo numa espécie de semi-sonho, de consciência obtusa, em que as impressões que recebe do mundo fazem dele e de seus instintos aquilo que uma lei biológica fez. Mas o homem ergue-se por cima de tudo isto. Essas impressões

⁷ O termo mente não é utilizado por Kant neste momento.

⁸ Kant considera apenas os juízos afirmativos, pois os negativos depois seriam de fácil aplicação.

múltiplas, essas vivências psicológicas, num determinado momento o homem as tem, sim, mas se detém e diz: **Que é?** No mesmo momento de dizer: que é? se torna sujeito cognoscente e logo depois suas impressões tornam-se objeto para conhecer. (MORENTE, 1970, 245)

Neste momento podemos falar da utilização dos juízos sintéticos *a priori*, oriundos de experiência, para ultrapassar os conhecimentos totalmente *a priori* dos conceitos dos juízos analíticos.

Onde estão então os juízos matemáticos? “Os juízos matemáticos são todos sintéticos”, responde Kant (2001, B14). São todos juízos *a priori*, não empíricos, e que apesar de parecerem analíticos, são, na verdade, sintéticos. Estamos falando de um tipo de conhecimento que Kant nomeia como *sintético a priori*. O exemplo dado por Kant é a expressão $7 + 5 = 12$, onde estão presentes os conceitos de soma, de sete e cinco ($7 + 5$), além do conceito de doze, portanto, juízo sintético. Estende esse pensamento também para a geometria pura, afirmando que “nenhum princípio de geometria pura é analítico” (KANT, 2001, B16).

Para exemplificar, Kant lança mão de “um princípio de geometria pura”:

Que a linha recta seja a mais curta distância entre dois pontos é uma proposição sintética, porque o meu conceito de recta não contém nada de quantitativo, mas sim uma qualidade. O conceito de mais curta tem de ser totalmente acrescentado e não pode ser extraído de nenhuma análise do conceito de linha recta. Tem de recorrer-se à intuição, mediante a qual unicamente a síntese⁹ é possível. (KANT, 2001, B 16)

Se dermos um caráter totalmente *a priori* aos juízos matemáticos, excluindo os experimentos estaríamos indo numa direção em que faltaria uma ação importante para se estabelecer um conhecimento mais “firme” por parte dos alunos; ação esta, como sugere Kant, só originada pela experiência. Por outro lado, apostar todas as fichas em experiência como fonte do conhecimento, não só por ser de caráter particular, menosprezando os conceitos e bases que “sustentam”, também acarretará prejuízo na produção do conhecimento tido como matemático.

Devemos ressaltar que Kant trata dos saberes matemáticos, praticados no âmbito acadêmico, e nosso trabalho trata do ensino de matemática, saber matemático praticado no âmbito escolar, que possuem características diferentes, mas que este último sofre influências do primeiro.

⁹ Na filosofia de Kant, a síntese é um ato da consciência pelo qual esta reúne em um todo a diversidade dos dados da sensibilidade: “Entendo por síntese, no sentido mais geral, o ato de juntar diversas representações umas às outras e de conceber sua multiplicidade sob a forma de um conhecimento único” (JAPIASSÚ; MARCONDES, p.254, 2006)

Neste momento, destacamos apenas que o saber escolar deve ultrapassar uma dimensão empírica, focada em experimentos pontuais, porém não deve se perder no isolamento da ciência pura, como nos propõe Pais (2001, p.52).

Por exemplo, um experimento para tratar de triângulos em geometria euclidiana, que mostre que ao recortar os ângulos de uma região triangular e alinhá-los de maneira a formar ângulo raso, repetindo algumas vezes em triângulos diferentes, prova que temos como correta a frase ‘a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° ’? Percebe-se que utilizamos o termo *de um* e não *do*, enfatizando o caráter da generalização, excedendo o caráter particular dos triângulos em questão. Acreditamos que não prova no âmbito matemático, porém esse experimento poderá despertar no aluno o interesse pelo assunto e promover uma assimilação mais *significativa* da propriedade tratada, que tem caráter universal assim como as regras da lógica clássica.

Segundo Otte (1993, p.299), Kant problematizou a relação entre o individual e o geral de uma maneira mais consistente que seus antecessores, e que a *Crítica da Razão Pura* marca um período importante na discussão sobre o conhecimento.

Não estamos defendendo como única via de conhecimento aquele produzido com o rigor científico, que é exigido no saber matemático acadêmico, mas devemos estar atentos para não desestruturar os tópicos tratados em matemática no ensino médio, quando estes estiverem sendo trabalhados. Como afirma Brousseau, a *transposição didática*¹⁰ deve ser colocada sob vigilância (BROUSSEAU, P.36). Acreditamos que a lógica clássica tem seu papel na construção desses conhecimentos e, portanto, não deve ser desprezada sua contribuição nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino médio.

Para reforçar a justificativa de nosso trabalho, mostraremos um breve panorama de como a lógica é tratada no âmbito do ensino de Matemática.

Nos pressupostos teóricos para o ensino de Matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, encontramos como princípios norteadores o argumentar logicamente, analisar e interpretar criticamente as informações. Ao estabelecer uma proposta para o ensino de Matemática, os PCN indicam que “a Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.” (BRASIL, 1999, p.256). Sugerem ainda que os objetivos gerais do ensino da

¹⁰ “O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática” (CHEVALLARD, apud. PAIS, 2001, p. 19)

Matemática no nível médio devem contemplar seu caráter formativo, auxiliar na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico. Entre esses objetivos, destacamos a valorização da linguagem matemática na comunicação de idéias, uso e reconhecimento de representações equivalentes de um mesmo conceito e o desenvolvimento da capacidade de raciocínio.

Em recente publicação, a Secretaria de Educação Básica, ao tratar dos conhecimentos de matemática, destacando seus conteúdos, ressalta que:

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, [...] argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.69)

Mesmo no Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais ao tratarem especificamente de matemática, apontam para a importância da lógica nos processos de ensino e aprendizagem.

Embora nestes Parâmetros a Lógica não se constitua como bloco de conteúdo a ser abordado de forma sistemática no ensino fundamental, alguns de seus princípios podem ser tratados de forma integrada aos demais conteúdos, desde as séries iniciais. Tais elementos, construídos por meio de exemplos relativos a situações-problema, ao serem explicitados, podem ajudar a compreender melhor as próprias situações. Assim, por exemplo, ao estudarem números, os alunos podem perceber e verbalizar relações de inclusão, como a de que todo número par é natural; mas observarão que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, pois nem todo número natural é par. No estudo das formas, mediante a observação de diferentes figuras triangulares, podem perceber que o fato de um triângulo ter ângulos com medidas idênticas às medidas dos ângulos de um outro triângulo é uma condição necessária, embora não suficiente, para que os dois triângulos sejam congruentes. (BRASIL, 1997, p.36).

Na introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), encontramos indícios que reforçam nossa proposta de trabalho, entre os quais destacamos a relação entre conhecimento formal e o aluno.

No final dos anos 70, pode-se dizer que havia no Brasil, entre as tendências didáticas de vanguarda, aquelas que tinham um viés mais psicológico e outras cujo viés era mais sociológico e político; a partir dos anos 80 surge com maior evidência um movimento que pretende a integração entre essas abordagens. Se por um lado não é mais possível deixar de se ter preocupações com o domínio de conhecimentos formais para a participação crítica na sociedade, considera-se também que é necessária uma adequação pedagógica às características de um aluno que pensa, de um professor que sabe e aos conteúdos dê valor social e formativo. Esse momento se caracteriza pelo enfoque centrado no caráter social do processo de ensino e aprendizagem e é marcado pela influência da psicologia genética. (BRASIL, 1997, p.32)

Assim como nós, a orientação contida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, p.31) reconhece a importância da participação construtiva do aluno e, ao mesmo tempo, da intervenção do professor para a aprendizagem de conteúdos específicos que favoreçam o desenvolvimento das capacidades necessárias à formação do indivíduo. Ao contrário de uma concepção de ensino e aprendizagem como processo único e que se desenvolve por etapas, em que a cada uma delas o conhecimento é “acabado”, o que se propõe é uma visão da complexidade e da provisoriidade do conhecimento. De um lado, porque o objeto de conhecimento é “complexo” de fato e reduzi-lo seria falsificá-lo; de outro, porque o processo cognitivo não acontece por justaposição, senão por reorganização do conhecimento. É também “provisório”, uma vez que não é possível chegar de imediato ao conhecimento tido como correto, mas somente por aproximações sucessivas que permitam sua reconstrução.

Ao falar da complexidade e da provisoriidade do conhecimento contamos com a proposta de Morin (2002), que ao se reportar sobre o conhecimento e a educação propõe que “a educação deve mostrar que não há conhecimento que não esteja, em algum grau, ameaçado pelo erro e pela ilusão”.(MORIN, 2002, p.19)

Utilizaremos as propostas de erro e ilusão, contidas na fala de Morin (2002), para justificar a complexidade do conhecimento.

Primeiramente tratemos da influência dos sentidos e sentimentos.

O conhecimento não é um espelho das coisas ou do mundo externo. Todas as percepções são, ao mesmo tempo, traduções e reconstruções cerebrais com base em estímulos ou sinais captados e codificados pelos sentidos. [...] O conhecimento, sob forma de palavra, de idéias, de teoria, é o fruto de uma tradução/reconstrução por meio da linguagem e do pensamento e, por conseguinte, está sujeito ao erro. [...] A projeção de nossos desejos ou de nossos medos e as perturbações mentais trazidas por nossas emoções multiplicam os riscos de erro. (MORIN, 2002, p.20)

Podemos considerar os erros oriundos dos sentidos, que foram alvo de várias críticas e atenção em diversos pensadores, como Descartes (1973, p.93-94) “tudo que recebi, até presentemente, como o mais verdadeiro e seguro, aprendi-o dos sentidos ou pelos sentidos: ora, experimentei algumas vezes que esses sentidos eram enganosos, e é de prudência nunca se fiar inteiramente em quem já nos enganou uma vez”; e os erros com origem nos sentimentos, como ódio e amor, por exemplo, que guiariam o sujeito cognoscente, mas “no mundo humano, o desenvolvimento da inteligência é inseparável do mundo da afetividade, isto é, da curiosidade, da paixão, que, por sua vez, são a mola da pesquisa filosófica ou científica”. (MORIN, 2002, p.20)

Acreditar que o conhecimento científico detecta e elimina os erros e ilusões gerados pelo sentido e sentimento parece ser consensual, porém “os paradigmas que controlam a ciência podem desenvolver ilusões, e nenhuma teoria científica está imune para sempre contra o erro”. (MORIN, 2002, p.21)

Temos então a complexidade de todo o conhecimento que, na proposta de Morin, tem um “espírito cognoscente cujas possibilidades e limites são os do cérebro humano e cujo suporte lógico, lingüístico e informacional vem duma cultura, e, portanto, duma sociedade” (MORIN, 1997, p. 86), ou seja, o sujeito que quer conhecer e que sofre influências do corpo, que está inserido em uma cultura e em uma sociedade científica. Esta, por último, possui e é possuída por paradigmas, como citado anteriormente.

A provisoriedade do conhecimento será abordada quanto à organização do conhecimento. Ao tratar dos “princípios do conhecimento pertinente”, Morin (2002, p.35-46) afirma:

[...] existe inadequação cada vez mais ampla, profunda e grave entre, de um lado, os saberes desunidos, divididos, compartimentados e, de outro, as realidades ou problemas cada vez mais multidisciplinares, transversais, multidimensionais, transnacionais, globais e planetários. (MORIN, 2002, p.36).

A inadequação acima citada retira a atenção e a devida importância do contexto na construção do conhecimento, que “determina as condições de sua inserção e os limites de sua validade” (MORIN, 2002, p.36), não situando as informações e os dados em seu contexto para que adquiram sentido. Nesta busca de sentido, temos que ter atenção para o fato de que “o todo tem qualidades ou propriedades que não são encontradas nas partes, se estas estiverem isoladas uma das outras, e certas qualidades ou propriedades das partes podem ser inibidas pelas restrições provenientes do todo”, ou seja, “é preciso efetivamente recompor o todo para conhecer as partes”. (MORIN, 2002, p.37)

Resumidamente, Morin (2002) destaca que:

O conhecimento pertinente deve enfrentar a complexidade, Complexus significa o que foi tecido junto; de fato, há complexidade quando elementos diferentes são inseparáveis constitutivos do todo (como o econômico, o político, o sociológico, o psicológico, o afetivo, o mitológico), e há um tecido interdependente, interativo e inter-retroativo entre o objeto de conhecimento e seu contexto, as partes e o todo, o todo e as partes, as partes em si. (MORIN, 2002, p.38)

Voltando a tratar mais especificamente da lógica clássica e sua contribuição para os processos de ensino e aprendizagem de matemática no ensino médio, onde se defende que ela, a lógica clássica, atue na formação e estruturação do pensamento e raciocínio dedutivo, destacamos seu papel quando “Trata-se de o aluno saber por seus próprios

meios se o resultado que obteve é razoável ou absurdo, se o procedimento utilizado é correto ou não, se o argumento de seu colega é consistente ou contraditório.” (BRASIL, 1997, p.51), pois para analisar determinado argumento, no âmbito da Matemática, faz-se uso da lógica clássica, como tratado anteriormente, e pede-se mobilização de um saber interiorizado e próprio. Os saberes formais, assim como outros saberes próprios do aluno, devem ser levados em conta, desde que não impossibilitem o uso de saberes necessários para domínio de novas situações e descobertas.

Como dito anteriormente, a lógica clássica possui raízes atribuídas ao filósofo grego Aristóteles, e, por isso, procuramos o termo *lógica* em livros específicos. O vocabulário técnico e crítico da Filosofia ao tratar do termo *lógica*, diz que é a “ciência que tem por objetivo determinar, por entre todas as operações intelectuais que tendem para o conhecimento do verdadeiro, as que são *válidas*, e as que o não são” (LALANDE, 1999, p.631)

O uso do termo *lógica* carece de cuidados. Em determinadas situações seu emprego requer mais detalhes. Japiassú e Marcondes (2006, p.171) destacam outros modos de se conceber o termo *lógica*, e referem-se também a outras lógicas como: *lógica modal*, *lógica indutiva*, *lógicas não-clássicas* e *lógica transcendental*.

Com a intenção de minimizar os problemas com o uso do termo *lógica*, neste trabalho, estamos fazendo referência à lógica clássica, “lógica de dois valores verdadeiro-falso, com axiomas que traduzem, com certa fidelidade, a argumentação corriqueira.” (HEGENBERG, 1973, p.156)

Algumas das características que o termo *lógica* carrega consigo, como “determinar *in abstracto*” e “estudo das leis intuitivas da demonstração”, por exemplo, são muito relevantes e apesar de se apresentar primeiramente no campo filosófico, a lógica tem uma grande participação no desenvolvimento da Matemática e no ensino de matemática, foco principal de nosso estudo.

Acreditamos em uma didática da matemática que procure tratar dos elementos que compõem uma *atividade didática*, aluno, professor e os diferentes saberes, por exemplo, não de forma isolada, mas de acordo com o modelo apresentado por Brousseau e Brun (1996, p.35-113). Não pretendemos mergulhar na proposta deste teórico, mas entre outros aspectos presentes, destacamos alguns que nos parecem relevantes neste momento.

Em primeiro lugar devemos refletir sobre a apresentação dos saberes, pois normalmente essa “apresentação apaga completamente a história destes saberes” e com

o intuito de “tornar mais fácil o seu ensino, isola determinadas noções e propriedades do tecido de actividades em que elas tiveram a sua origem, o seu sentido, a sua motivação e a sua utilização transpondo-as para o contexto escolar” (BROUSSEAU; BRUN, 1996, p.36).

A participação do aluno recebe atenção, pois não é simplesmente “saber” definições e teoremas. Utilizá-los de maneira coerente é sim algo pretendido, mas não o único objetivo.

Não se faz matemática simplesmente resolvendo problemas mas por vezes esquece-se que resolver um problema é apenas uma parte do trabalho; encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. Uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que são úteis, etc.(BROUSSEAU; BRUN, 1996, p.38)

Por último, o professor nesta proposta não desempenha o papel de transportador de conhecimento. Aliás, ele terá de propiciar uma *recontextualização* dos conhecimentos, que serão transformados em conhecimento pelo aluno. Essa não é tarefa simples: requer estudo e análise por parte do professor, pois “cada conhecimento tem de nascer da adaptação a uma situação específica.” (BROUSSEAU; BRUN, 1996, p.38). O professor precisa criar em sua aula um ambiente diferente dos padrões, uma microsociedade científica, nos termos de Brousseau, propiciando boas questões, debates, domínio de linguagens apropriadas, tanto para interpretação quanto para demonstrar soluções. Após as atividades citadas, o professor deve transcender o particular, possibilitando ao aluno *redescontextualizar* e *redespersonalizar* o seu saber, ou seja, demonstrar que este saber está relacionado com um saber científico e cultural de sua época. Brousseau (1996) finaliza sobre o trabalho do professor dizendo que “Trata-se, evidentemente, de uma simulação, que não é a <<verdadeira>> actividade científica, da mesma maneira que o saber apresentado de forma axiomática não é o <<verdadeiro>> saber.” (BROUSSEAU; BRUN, 1996, p.39)

Não se pretende tirar a veracidade dos saberes apresentados axiomáticamente. Pais (2001, p.36) trata de uma diferenciação entre saber e conhecimento que nos auxiliará na explicação da proposta de Brousseau (1996).

O saber se refere ao saber científico, fechado no contexto acadêmico e “estritamente definido pelos paradigmas da área” (ibidem), despersonalizado e com validação impessoal e objetiva.

O conhecimento, por sua vez, “refere-se mais à dimensão individual e subjetiva, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tenha uma experiência direta” (ibid, p.36-37), destacando seu caráter experimental e pragmático, contrapondo-se ao teórico e racional.

De acordo com Pais (2001, p. 37), Brousseau utiliza-se de uma análise a partir da utilidade para distinguir saber e conhecimento:

De conformidade com o tipo da situação, torna-se mais apropriado falar da existência de um conhecimento ou de um saber. Por exemplo, quando trabalhamos com um quadro de institucionalização, trata-se de buscar uma aproximação do conhecimento com o nível do saber, ou seja, o desafio consiste em partir do conteúdo estabilizado no plano intelectual do sujeito e trabalhar para que essa dimensão particular alcance a generalidade prevista pelos paradigmas da área. Por outro lado, as situações didáticas que envolvem procedimentos práticos estão mais próximas do conhecimento do que do saber. (PAIS, 2001, p. 37)

Destaca-se no processo de elaboração da objetividade, no saber matemático, o uso do “método lógico-dedutivo, que é entendido como forma de organizar o discurso matemático” (PAIS, 2001, p.36), o que nos alerta para a importância dos discursos que ocorrem durante os processos de ensino e aprendizagem matemática no ensino médio.

Os processos de ensino e aprendizagem fazem uso de diversos sujeitos, mecanismos e objetos, que estabelecem certa forma de diálogo. A maneira de se comunicar, fazer uso de linguagem, em situações de ensino e aprendizagem matemática requer nossa atenção. Tendo em mente que a matemática se utiliza de generalizações e de simbologia e regras próprias, é importante possibilitar uma comunicação eficiente que permita ao aluno utilizar-se da Matemática para interpretar e resolver problemas, tanto os pertencentes ao seu cotidiano, quanto àqueles que lhe são apresentados em abordagem formal, numa estrutura tipicamente matemática. “Nesse sentido, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la.” (BRASIL, 1999, p.251).

Podemos dizer que uma solução apresentada, no caso da lógica clássica, foi a chamada “teoria dos conjuntos”.

O ensino praticado na Matemática Moderna mostrou que a Lógica tornou-se um objeto de ensino em si, e que esse ensinamento serviu a si próprio, pois o aluno não reconhecia ou não sabia utilizar aquilo que havia formalmente estudado. A abordagem da lógica clássica ocorria, normalmente, na série inicial do ensino médio com o nome de *teoria dos conjuntos*, nome dado indevidamente segundo alguns autores, que trataremos

adiante, com uma abordagem que não sustenta o diálogo com os demais assuntos de matemática estudados em seguida.

Acreditamos que a maneira como os conjuntos foram utilizados, com o intuito de iniciar o desenvolvimento de um pensamento dedutivo e facilitar uma boa interiorização de conceitos a serem trabalhados, tornou-se mais um problema para o ensino e aprendizagem de matemática quando exageraram no rigor e nas notações utilizadas. Na nota da edição brasileira de obra da Association of Teachers of Mathematics, *Ensino Moderno da Matemática* (1972), Elon Lages Lima expõe com mais clareza o que pretendemos dizer.

O abuso de conjuntos merece um comentário à parte. A fim de dar maior precisão e generalidade às proposições, os matemáticos utilizam-se, em seu jargão cotidiano, da linguagem dos conjuntos. Esta prática é recente. Por isso “Matemática Moderna” para muita gente significa “Conjuntos”. É verdade que alguma familiaridade com a linguagem dos conjuntos contribui para esclarecer as idéias matemáticas. Mas não se deve confundir o Latim com a Missa.

Associado ao abuso dos conjuntos vem o exagero da axiomatização. Os sistemas axiomáticos são uma das características mais marcantes da Matemática dos nossos dias. Mas um conjunto de axiomas é o resultado final, o coroamento de um longo período de elaboração de uma teoria, não o começo. Perceber exatamente o significado dos axiomas requer experiência preliminar e maturidade. Estas são adquiridas através do exame de situações concretas. A Escola Secundária é o lugar adequado para se desenvolverem as experiências e se criar a maturidade. Pensar axiomáticamente é um processo sofisticado e abstrato, que não se pode impor a um adolescente como sistema de trabalho. (ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1972, VIII)

Diferenciar, mais uma vez, *saber científico* e *saber escolar*, como propõe Pais (2001), servirá de ponto de partida para examinar melhor a situação acima descrita. No intuito de caracterizar as diferenças entre esses dois saberes, destacamos a linguagem e a validação. Primeiramente falaremos sobre as linguagens:

Podemos destacar a existência de uma diferença entre a linguagem empregada no texto científico e escolar. [...] Se, por um lado, o saber científico é registrado por uma linguagem codificada, o saber escolar não deve ser ensinado nessa forma, tal como se encontram redigidos nos textos e relatórios técnicos. [...] A formalização precipitada do saber escolar, por vezes, através de uma linguagem carregada de símbolos e códigos, se constitui em uma possível fonte de dificuldade para a aprendizagem. (PAIS, 2001, p.21)

Sobre a validação, Pais (2001, p.22), afirma que “enquanto o saber científico é validado pelos paradigmas da área, o saber escolar está sob o controle de um conjunto de regras que condiciona as relações entre professor, aluno e saber”, e reforça a importância de sua análise ao propor uma *vigilância didática* (PAIS, 2001, p.23), em que o professor deve agir tendo conhecimento do saber científico e uma concepção educacional, para evitar a dependência da validade educacional com os vínculos do contexto do saber científico.

Uma sugestão, segundo o autor é que:

A educação escolar deve se iniciar pela vivência do aluno, mas isso não significa que ela deva ser reduzida ao saber cotidiano. No caso da matemática, consiste em partir do conhecimento nos números, das medidas e da geometria, contextualizados em situações próximas do aluno. (PAIS, 2001, p.28)

Há diferenças entre uma linguagem comum e uma linguagem matemática. Acreditamos não haver pontos de discórdia nesta afirmação, e isto pode dificultar uma rápida assimilação da maneira matemática de determinar suas definições, como veremos mais adiante nesse trabalho. Para a matemática, a negação de um conceito não é o uso de um antônimo, contrário ou oposto, o que normalmente ocorre na linguagem comum. Par não é antônimo de ímpar, por exemplo. Na matemática, temos também definição por inclusão, o quadrado é um tipo especial de retângulo. Outras confusões surgem quando se trata do “ou” utilizado na matemática; seria um “ou” inclusivo, união entre conjuntos, que tem significado diferente daquele utilizado na linguagem comum, do dia-a-dia, um “ou” excludente.

Nossa proposta é criar um conjunto de atividades para oferecer um ambiente agradável e estimulador ao aluno, trazendo situações que propiciam novo contexto para uso dos conectivos lógicos.

Pretendemos desenvolver conexões produtivas entre teoria e prática, utilizando de experimentos de ensino em ambientes de aprendizagem e engenharia didática.

Inseridos nesta linha de trabalho, as atividades propostas podem favorecer o entendimento dos operadores lógicos *se A então B*, *se e somente se*, *e*, *ou* e os *quantificadores*, fornecendo subsídios para que o aluno do ensino médio possa compreender algumas “regras” utilizadas em Matemática, úteis em situações de “demonstração” e “verificação”, visto que “o saber matemático está associado ao problema da validação dos conteúdos aprendidos” (PAIS, 2001, p.37) e que “o aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à ‘investigação científica’” (ibid, p.35), transpassando a subjetividade aliando uma valorização do raciocínio lógico e argumentativo. Tendo como objetivo específico estabelecer **em que medida é possível desenvolver em alunos do ensino médio o domínio e a habilidade de utilização de regras da lógica clássica.**

Problemática

O uso da lógica clássica nos processos de ensino e aprendizagem de matemática é atualmente objeto de estudo por profissionais da educação, e esse estudo não ocorre só no Brasil. Para apoiar essa afirmação, buscamos sustentação teórica nos trabalhos de

Machado & Nogueira (2005), Susanna S. Epp (2003) e Stephanou & Pitta-Pantazi (2006).

As investigações que apóiam este trabalho se referem à lógica clássica e educação matemática, e que contribuem, para ele, com diferentes abordagens. Encontramos nessas abordagens uma “lógica do cotidiano”, a linguagem materna e regras intuitivas, que em nosso entendimento, são pertinentes aos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

As primeiras autoras destacam “a questão de como fazer para que o aluno se aproprie da lógica elementar matemática e a torne operacional” (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.63), e levantam a ocorrência de um problema nos cursos de Matemática, afirmando que professores “raramente têm consciência da necessidade do estabelecimento de normas que determinem o que é considerada uma explicação e uma justificativa matemática aceitável” (ibid p.65), onde se espera encontrar conexões e implicações. Em suma, alunos e professores deixaram de utilizar o pensamento tipicamente matemático, originando uma dificuldade de estabelecer a passagem de uma argumentação descritiva, onde “os alunos geralmente fornecem relatos cronológicos de ações efetuadas” (ibidem), para uma argumentação justificativa, com características e estrutura oriundas da lógica clássica.

As autoras apresentam seus argumentos afirmando que “compreensão do que embasa o raciocínio matemático [...] é essencial para uma melhora qualitativa da aquisição de conhecimentos matemáticos.” (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.64), e o ensino de regras básicas da lógica matemática se justifica, visto que “o conhecimento de regras da lógica matemática, [é] fundamental à compreensão do raciocínio matemático.” (ibid, p.72)

A pesquisadora Epp (2003), inicia seu artigo dizendo que em seus vários anos de envolvimento com a educação matemática, em nível médio e universitário (EPP, 2003 p.886), tem voltado sua atenção para as dificuldades que os alunos possuem na escrita de provas.

A discussão sobre explicação e prova é utilizada, em ambos os artigos, como porta de entrada para se focar a relevância da lógica clássica nos processos de ensino e aprendizagem de matemática. A explicação tem ganhado importância nesses processos, onde ela serve, entre outras coisas, para que o professor possa entender o raciocínio do aluno, favorecendo uma intervenção caso seja preciso uma alteração na estrutura

utilizada, objetivando a passagem “de uma argumentação descritiva para uma argumentação justificativa”. (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.64)

As autoras, Machado e Nogueira, defendem que uma explicação exige clareza dos conceitos utilizados.

No sentido de auxiliar o aluno na passagem de uma argumentação apoiada em seqüências temporais para uma argumentação mais formal, utilizando conjecturas e relações lógicas entre as etapas do processo da argumentação, elas identificam um fator que contribui negativamente para o êxito do processo, a “lógica do cotidiano”. (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.67)

Acreditamos que o diferente modo de tratamento das informações enfatiza essa problemática, pois a matemática age de acordo com o princípio da economia científica, limita-se aos elementos que são logicamente úteis à conclusão, enquanto que em nosso cotidiano, ocorre uso máximo de informação, expondo até informações que não são úteis para a resolução de um problema.

Machado e Nogueira (2005) apresentam outras abordagens, onde se analisa o critério de verdade utilizado na “lógica cotidiana” e o critério utilizado na lógica matemática. Para apresentar essas abordagens, vamos propor uma análise do critério de verdade, em ambas as “lógicas”, para a seguinte sentença:

‘Para qualquer x, y reais, se $x > y$, então $x^2 > y^2$ ’.

Na ótica da “lógica cotidiana”, pode-se aceitar como verdadeira, utilizando-se x e y maiores que zero, $x = 3$ e $y = 2$, por exemplo, temos $x > y$ e $x^2 > y^2$. Porém, se $x = -2$ e $y = -3$, temos $x > y$, mantendo a premissa, mas $x^2 < y^2$. No ambiente proposto pela “lógica cotidiana”, isso seria uma exceção à regra, mas mantendo-se como regra.

No exemplo acima identificamos duas causas possíveis para a aceitação da sentença como verdadeira: a não observação com rigor da hipótese ou a aceitação de um relativismo, algo que no uso da lógica clássica, utilizada em matemática, não pode ocorrer.

Se a análise for baseada na lógica clássica, basta um contra-exemplo válido para tornar falsa uma sentença desse tipo. Mais precisamente, uma implicação ($a \Rightarrow b$) só tem critério de verdade *verdadeiro*, sendo o antecedente a verdadeiro, se o conseqüente b , também for verdadeiro. Algo que não ocorre para $x = -2$ e $y = -3$. Epp afirma que seus alunos possuem dificuldades em aceitar que “*p somente se q* é logicamente equivalente a *se p então q*” (Epp, 2003, p.889, grifo e tradução nossa) e que na “linguagem do dia-a-

dia as declarações *se ... então* e *apenas se*, são freqüentemente interpretadas como *se-e-somente-se*” (ibidem, grifo e tradução nossa).

Essa característica das implicações, na lógica clássica, é realçada pelas pesquisadoras Machado e Nogueira (2005, p.63) através de uma atividade chamada “circuito”, criada por Marc Legrand em 1990, onde são apresentadas sentenças em que o aluno determina a verdade ou falsidade, a partir da análise de um circuito elétrico. Nessa atividade ocorrem casos em que alunos defendem diferentes respostas, estimulando o debate e a formulação de argumentos para defender sua resposta. Os resultados foram observados quando algumas questões foram propostas aos alunos. As questões pediam a verificação de verdade ou falsidade de sentenças que envolviam assuntos abordados em Álgebra Linear, nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.74), onde a opção de verdade acarretaria uma demonstração, procurando seguir passagens lógicas formais, e no caso de falsa, o esperado seria apenas apresentar um contra-exemplo.

Os resultados apresentados pelas autoras são favoráveis. Em 40 respostas para as afirmações falsas, 32 foram justificadas através de um contra-exemplo e apenas uma sem justificativa (ibid.76). Quanto as 32 respostas para as afirmações verdadeiras, apresentam 23 com justificativas através de uma demonstração correta e 3 com tentativa de justificativa através de um exemplo.

No caso do uso de exemplo como justificativa, as pesquisadoras apresentam a conjectura a seguir:

(...) pode-se supor que quando a questão é mais difícil, os alunos recaem no raciocínio cotidiano, tentando dar um exemplo; por outro lado, é possível que ao testarem a proposição em um exemplo conhecido, os alunos procurassem fazer simplesmente uma verificação de sua veracidade. (MACHADO; NOGUEIRA, 2005, p.77)

Com relação às linguagens e as “diferenças entre a linguagem matemática e a linguagem do dia-a-dia” (EPP, 2004, p.888, tradução nossa), iniciamos com os exemplos oferecidos pela pesquisadora:

Os pais que desejam comunicar a uma criança. ‘Você pode ir ao cinema se, e somente se, você terminar sua lição de casa’, raramente, usam essa sentença. Normalmente os pais prometem ‘Se você terminar sua lição de casa, então você poderá ir ao cinema’ ou ameaçam ‘Você poderá ir ao cinema apenas se você terminar sua lição de casa’. [...] Similarmente, muitos alunos lendo o enunciado de um trabalho dizendo, ‘Aplicações serão consideradas se estas forem recebidas dentro do prazo’, assumindo que se a aplicação é submetida no prazo, ela será considerada. (EPP, 2004, p.889, tradução nossa)

Nos exemplos acima, a pesquisadora destaca as interpretações e uso mais comum de certos conectivos utilizados na lógica clássica. No exemplo dos pais, estamos tratando

das relações lógicas *se... então*, conhecida por implicação, e *se e somente se*, que nos referimos por bicondicional, como estruturas similares. No caso dos alunos ocorre uso da implicação em que a verdade do conseqüente resulta verdade do antecedente. Estas características e situações serão tratadas mais adiante nessa dissertação.

O artigo *The Impact of the intuitive rule “if A then B, if not A then not B”, in perimeter and area tasks* (STEPHANOU; PITTA-PANTAZI, 2006, v.5, p.177) que investiga o impacto da regra intuitiva e não válida ‘*se A então B, se não A então não B*’, em estudantes de nível escolar similar ao nosso fundamental II, através de atividades que envolvem área e perímetro, afirma que:

Os resultados mostram que um percentual significativo de estudantes responde de acordo com a regra intuitiva ‘se A então B, se não A então não B’, independentemente do sexo, nível escolar, contexto da atividade (perímetro/área) e presença ou não de diagrama. (ibidem, tradução nossa)

Para a coleta dos dados, os pesquisadores utilizaram as respostas dos alunos para dois testes de múltipla escolha. O primeiro teste era composto de quatro atividades, duas questionam os alunos sobre o que aconteceria com a área e o perímetro do retângulo quando duas dimensões, altura e largura, fossem alteradas e as outras duas, quando apenas uma dimensão fosse alterada. (STEPHANOU; PITTA-PANTAZI, 2006, v.5, p.179)

O segundo teste consistia de quatro tarefas semelhantes ao primeiro teste. Cada uma das atividades representava as tarefas do primeiro teste, porém acrescido das alterações das dimensões e de diagrama. O diagrama continha considerações sobre o retângulo, dimensões e perímetro ou área. (ibidem)

As alternativas eram:

- a) área/perímetro sofrerão alterações;
- b) área/perímetro algumas vezes se alteram e algumas vezes permanecem os mesmos;
- c) área/perímetro permanecem os mesmos;
- d) outros

O retorno das respostas dadas pelos alunos atesta que não houve mudanças substanciais quanto a diferentes formas de apresentação das tarefas, verbal e com diagrama. Em relação à alteração das duas dimensões, 64% a 76% dos estudantes responderam na linha que a regra intuitiva ‘a área/perímetro sofrerão alterações’, e 22% a 32% responderam corretamente ‘área/perímetro algumas vezes se alteram’. (ibid, p.180)

No caso das tarefas em que apenas uma dimensão era alterada, 66% a 74% dos estudantes responderam corretamente que ‘área/perímetro sofrerão alterações’, entre 19% e 25% responderam incorretamente que ‘área/perímetro algumas vezes se alteram’. (ibidem)

As justificativas para as respostas, alterando ambas as dimensões, foram classificadas em três categorias:

- a) Ambas as dimensões são alteradas, conseqüentemente área/perímetro irão mudar¹¹;
- b) Não há outros números que fornecem mesma área/perímetro;
- c) Área/perímetro algumas vezes alteram e algumas vezes permanecem o mesmo, dependendo dos números.¹²

Entre os alunos que selecionaram a alternativa ‘área/perímetro sofrerão alterações’, os dados apontam que 64% (área) e 55% (perímetro) dos alunos utilizaram de argumentação que se enquadram na categoria (a), enquanto que 16% (área) e 23% (perímetro) na categoria (b).

Para as justificativas, quando se propunha alterar apenas uma dimensão, também foram criadas três categorias:

- a) A largura/comprimento é alterado, o perímetro também será alterado;
- b) Não há outro número que fornece o mesmo perímetro¹³;
- c) O perímetro algumas vezes altera e alguma vez permanece o mesmo, porque apenas uma dimensão é alterada¹⁴.

Das justificativas apresentadas, os resultados apresentados são: 21% (área) e 26% (perímetro) dos estudantes que selecionaram a resposta correta ‘área/perímetro sofrerão alterações’ se encaixam na categoria (b), 38% (área) e 41% (perímetro) na categoria (a) e 16% (área) e 13% (perímetro) na categoria (c).

Os pesquisadores atribuem à concepção de causa efeito à base da regra intuitiva que abordam em sua pesquisa, lembrando que para Piaget “a noção de causa efeito inicia a partir do estágio de desenvolvimento cognitivo sensório-motor” (STEPHANOU; PITTA-PANTAZI, 2006, v.5, p.178, tradução nossa), no primeiro ano de vida da criança, e que influencia os alunos participantes da pesquisa, “37 da 4ª série, 30 da 5ª série e 35 da 6ª série” (ibid, p.179). E identificam dois fatores que contribuíram para os

¹¹ Justificativa de acordo com ‘Se A, então B. Se não A, então não B’.

¹² Justificativa correta.

¹³ Justificativa correta

¹⁴ Justificativa de acordo com ‘Se A, então B. Se não A, então não B’.

resultados da pesquisa, um se aplica nas atividades com alteração de ambas as dimensões e o outro quando ocorre a alteração de apenas uma dimensão.

A identificação desses dois fatores mostra que os estudantes são pouco influenciados pelo contexto específico da atividade (área ou perímetro) ou a presença de diagrama, mas são muito influenciados por fatores externos (alteração de uma/ambas as dimensões) das atividades que desencadeiam a regra intuitiva 'se A então B, se não A então não B'. (STEPHANOU; PITTA-PANTAZI, 2006, v.5, p.183, tradução nossa)

Acreditamos que o desenvolvimento de atividades que resultam em mobilização de pensamento com estrutura baseado na lógica clássica, utilizada na Matemática, e pensamento sem essa estrutura, baseados nas práticas do dia-a-dia ou regras intuitivas, não válidas, devem ser desenvolvidas e aplicadas nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, pois estas podem contribuir para o professor identificar possíveis origens de enganos cometidos pelos alunos e planejar melhorar suas atividades e intervenções, obtendo melhores resultados nos processos de ensino e aprendizagem de matemática.

CAPÍTULO 1 - REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Desenvolvimento do raciocínio lógico

Como ocorre o desenvolvimento do raciocínio lógico nas pessoas? Esta questão será abordada a partir dos estudos de Vigotsky e Piaget, juntamente com seus colaboradores, que nos orientaram na elaboração e análise das atividades que compõem este trabalho.

O fato de Luria (1979), colaborador de Vigotsky, discordar de Piaget em relação aos períodos de desenvolvimento do pensamento lógico, não nos impede de utilizar ambos, pois são cognitivistas e acreditam na possibilidade de estudar as *estruturas e formas* do pensamento através de experimentos.

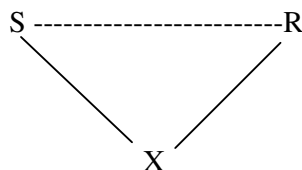
A afirmação a seguir reforça nossa proposta.

[...] em certo sentido são produtos do amadurecimento natural [...] permitiram mostrar que a criança 5-6 anos pode chegar ao pleno domínio de operações lógicas e que as normas etárias, determinadas por Piaget, não são, em hipótese alguma, limites absolutos que não podem ser ultrapassados nas condições de uma aprendizagem cientificamente organizada da criança. (LURIA, 1979, p.110-111).

Antes de tratarmos de alguns experimentos que os teóricos empregaram em seus estudos sobre o desenvolvimento do raciocínio lógico, acreditamos que devemos apresentar as bases que sustentam suas teorias.

Vigotsky, segundo Oliveira (1993), teve interesses especiais no estudo dos processos mentais superiores, aqueles em que “o ser humano tem a possibilidade de pensar em objetos ausentes, imaginar eventos nunca vividos, planejar ações a serem realizadas em momentos posteriores” (OLIVEIRA, 1993, p.26). O processo de mediação, “processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação” (ibidem), é base nas concepções de Vigotsky sobre o funcionamento psicológico, afirmando que:

[...] o processo simples estímulo-resposta é substituído por um ato complexo, mediado, que representamos da seguinte forma:



Nesse novo processo o impulso direto para reagir é inibido, e é incorporado um estímulo auxiliar que facilita a complementação da operação por meio indiretos. (Vigotsky apud Oliveira, 1993, p.26-27)

O S representa o estímulo, R a ação e X um mediador. Para melhorar a compreensão do esquema proposto, faremos uma ilustração. Pensemos em uma pessoa que pega uma xícara de água de dentro de um aparelho de micro ondas e se queima com o líquido quente; no processo de aquecimento, a xícara não está tão quente quanto o líquido, e reage afastando a xícara da boca, ação não mediada, ação direta, provocada pela dor. Podemos pensar nesta mesma ação, afastar a xícara da boca, mediada pela lembrança da dor ou pelo aviso de uma outra pessoa próxima.

Os experimentos de Vigotsky e seus colaboradores indicam que “o uso de mediadores aumentou a capacidade de atenção e de memória e, sobretudo, permitiu maior controle voluntário do sujeito sobre sua atividade [...] Os processos mediados vão ser construídos ao longo do desenvolvimento, não estando ainda presentes nas crianças” (OLIVEIRA, 1993, p.33). O que nos leva a procurar uma referência em relação ao período em que o indivíduo inicia o uso de mediadores para orientação e organização de suas ações, em nosso caso, a utilização de estruturas lógicas.

De acordo com Oliveira (1993), Vigotsky afirma que a linguagem exerce um papel fundamental no processo evolutivo dos seres humanos, distinguindo-nos de outros animais quando “a fala torna-se intelectual, com função simbólica, generalizante, e o pensamento torna-se verbal, mediado por significados dados pela linguagem” (ibid, p.47). É o que ocorre normalmente com as crianças enquanto membros de uma cultura já estabelecida e que dispõem de linguagem estruturada. A partir do contato com indivíduos mais velhos, as crianças vão assimilando significados daqueles adotados no grupo cultural e lingüístico em que está imerso (OLIVEIRA, 1993, p.40).

A afirmação anterior pode servir como início de discussão sobre o problema de interpretação do *ou* exclusivo, muito comum nas falas de nossos alunos, e *ou* inclusivo da lógica clássica, pois o *ou* exclusivo parece mediar o juízo de declarações em situações cotidianas e também em declarações em contexto da lógica clássica.

Destaca-se o fato de Vigotsky atribuir grande importância das influências do meio social em que o indivíduo está inserido. No processo de desenvolvimento do homem, a autora afirma que “um dos pilares do pensamento de Vigotsky é a idéia de que as funções mentais superiores são construídas ao longo da história social do homem” (OLIVEIRA, 1993, p.83), que nossa proposta de trabalho também leva em consideração.

A partir do princípio acima citado e das bases teóricas de Vigotsky, Luria, um de seus colaboradores, contribuiu com experimentos e teorias que tratavam do pensamento humano. Pensamento que não deve ser visto com o olhar materialista, “entendido como uma combinação de imagens da memória ou um produto da associação” (LURIA, 1979, p.100), nem com o olhar do idealismo extremo e “considerar o pensamento como manifestação de uma atividade ‘simbólica’ específica do espírito.” (LURIA, 1979, p. 101), mas como objeto possível de estudo a partir do desenvolvimento histórico-social da linguagem.

Luria apresenta exemplos para representar relações entre pensamento e linguagem simples, como pensamento espacial “eu vou a...”, “estou sentado na...” e relações mais complexas “o incêndio eclodiu em consequência de...”, “saí à rua, embora...”, afirmando que:

Esses meios objetivamente surgidos na história da linguagem refletem não mais relações espaciais externas ou temporais, porém relações *lógicas* bem mais complexas, entre as quais se situam tanto as relações de causa e efeito, quanto as relações de inserção no todo, de condições, restrições parciais e outras que vêm sendo elaboradas ultimamente por outro campo da ciência – a lógica matemática – e são representadas por um sistema especial de sinais. (LURIA, 1979, p.103).

Atrelando o domínio do sistema de uma língua ao domínio de relações lógicas, Luria defende a participação da vida social como base ao pensamento, não apenas mais uma “manifestação do espírito”, e que apesar do tratamento e da “denominação simbólica específica na lógica matemática”, essas relações “formaram-se no processo de desenvolvimento da cultura e refletem as formas básicas da complexa prática humana, que serviram de base às estruturas lógicas fundamentais” (LURIA, 1979, p.104), ou seja, “seria incorreto pensar que o homem nasce com ‘sentido lógico’ acabado e que as ‘sensações lógicas’ experimentadas pelo homem adulto desenvolvido são ‘propriedades do espírito’, que existem como inatas em toda pessoa” (LURIA, 1979, p.105). Devemos então, propiciar ao aluno o contato com estruturas de pensamento diferentes e dar possibilidade dele desenvolver o pensamento lógico com estrutura formal, sem com isso menosprezar seu modo de pensar em outras situações.

Uma vez que as relações lógicas não surgem de forma inata, mas de situações vividas pelo sujeito em seu meio cultural, a questão se volta para a “evolução”, no sentido de partir de relações mais simples, como *parte-todo* ou *todo-parte*, *gênero-espécie* ou *espécie-gênero*, para as mais complexas, tornando possíveis as conclusões lógicas, de dedução, “que não parte da experiência prática pessoal, mas se baseia nas

relações lógicas que se formaram na linguagem, por exemplo, em forma de silogismo”. (LURIA, 1979, p.105)

A evolução, no sentido acima descrito, mostra-se como resultado de um complexo desenvolvimento histórico, e a passagem de pensamento, partindo de uma estrutura baseada na prática para pensamento com estrutura tal, que permite estabelecimento de relações lógicas abstratas, e isso não ocorre de forma espontânea.

Em seus experimentos, Luria (1979) realizou pesquisa entre agricultores adultos com formação econômica atrasada e sem passagem por aprendizagem escolar. Propondo diferentes silogismos, observou que os agricultores oferecem “uma conclusão dos dados que se apóiam na sua experiência prática imediata, mas se negam a tirar conclusão desse mesmo silogismo se este não compreende a experiência própria deles” (LURIA, 1979, p.107). Os silogismos são:

“Em toda parte onde é quente e úmido nasce algodão”.

“Na aldeia X é quente e úmido”.

“Será que lá nasce algodão?”

Resposta: “É claro, lá ele deve nascer. Sendo quente e úmido, ele nascerá fatalmente, isto eu sei...”

Propondo, para o mesmo grupo de pessoas o silogismo a seguir;

“No extremo Norte, onde há neve o ano inteiro, todos os ursos são brancos”.

“O lugar X se encontra no Extremo Norte”.

“Será que os ursos de lá são brancos?”

Resposta: “Não posso afirmar! Não estive no Norte e não sei. É melhor você perguntar ao vovô M., ele esteve no Norte e lhe dirá...” (LURIA, 1979, p.107)

Na perspectiva do pesquisador, os resultados acima expostos reforçam a tese de que a passagem de um pensamento estruturado em práticas para um pensamento teórico não acontece no processo evolutivo do cérebro, visto que os pesquisados eram adultos, mas que este processo é externo. Atribui o “fracasso” dos agricultores a ausência do acesso aos meios de produção modernos e coletivos, aliado a falta de uma escolarização. Com isso, Luria (1979) propõe uma conclusão que nos parece bem relevante.

Mas é bastante uma aprendizagem escolar relativamente breve ou a sua inclusão na faina coletiva, que requer discussão conjunta e planificação do processo de trabalho, para o problema mudar radicalmente e o homem começar a incorporar-se facilmente à operação de conclusão lógica, dedutiva. (LURIA, 1979, p.108)

Após esta passagem rápida do surgimento e evolução do pensamento lógico, a partir da perspectiva de Vigotsky, devemos tratar do desenvolvimento desse pensamento nas crianças e, mais especificamente, nos adolescentes. Nessa empreitada, utilizaremos as propostas de Jean Piaget e seus colaboradores.

Piaget e Inhelder (1971), após a realização de diversos experimentos com crianças e adolescentes, afirmam que o início das estruturas lógicas, o começo do uso delas, está nos pensamentos que tratam de solucionar tarefas de classificação.

Diferentemente de Vigotsky, Piaget e Inhelder (1971) não atribuem tanta importância na linguagem para a formação e evolução das estruturas lógicas.

O estudo dos primeiros esquemas verbais, ou “pré-conceitos”, da criança foi esquematizado por um de nós e já demonstrou que, se a aquisição da linguagem acelera a formação de classes e permite, mais cedo ou mais tarde, uma transmissão das classificações coletivas, as coisas não são assim desde o início. Em todos os níveis, a linguagem ambiente é assimilada semanticamente às estruturas do sujeito e, se aquela contribui para modificar estas, nem por isso lhes está menos subordinada, inicialmente, no tocante à sua interpretação. [...] Por outras palavras, o fato de chamar gato a um gato ainda não prova, absolutamente, que a criança de certa idade possua a “classe” dos gatos, pois o nome que ela emprega, se bem que tenha sido tomado da linguagem do adulto [...] não pode ainda designar mais do que um esquema figurado a meio caminho entre o individual e o genérico. (PIAGET; INHELDER, 1971, p.14-15)

Tratando mais especificamente da linguagem e das relações entre a parte com o todo ou inclusões, que são necessárias para a formação de classes, Piaget e Inhelder (1971, p. 15) concluem que “a linguagem, por muito importante que seja o seu papel na elaboração das estruturas lógicas, não pode ser considerada, mesmo na criança normal, o fator essencial de formação dessas estruturas”.

Temos opiniões que vão em mesma direção e sentido quando se trata das atividades em que o sujeito, ao se utilizar das estruturas da lógica clássica, se apropria dos mecanismos lógicos. Os resultados de seus experimentos apontam para a afirmação a seguir:

É que não basta tais esquemas operantes corresponderem a ligações antecipadamente inscritas na linguagem ambiente para garantir a assimilação imediata das últimas; a sua compreensão e o seu emprego supõem, pelo contrário, uma estruturação e até uma série de reestruturações decorrentes de mecanismos lógicos que não se transmitem sem mais nem menos, mas, de fato, apóiam-se necessariamente nas atividades do sujeito. (PIAGET; INHELDER, 1971, p.15)

Ao tratar da ‘evolução’ do sujeito quanto à apropriação das estruturas lógicas, os autores utilizam o termo *maturação*, que seria como “alguma transformação das estruturas nervosas”, mas não exclusivamente, pois “entre a possibilidade de um comportamento e a sua atualização, é preciso contar ainda com a intervenção ativa do meio físico (exercício e experiência adquirida) e, além dessa aprendizagem, com todas as influências educativas do meio social”. (PIAGET; INHELDER, 1971, p.17)

O caminho adotado pelo pesquisador foi “de reconstituir a história a partir das estruturas cognitivas mais elementares, isto é, as estruturas perceptuais e sensório-motoras” (ibidem). Porém, nosso trabalho não está voltado para o estudo exclusivo da

origem das estruturas que servirão de base para o pensamento lógico, estruturas de classificação e seriação. Vamos dirigir nossa atenção para estágios mais avançados, apresentar as propostas de evolução e tratar do estágio em que se encontrariam nossos adolescentes do ensino médio.

Em um de seus trabalhos, Piaget e Inhelder (1976) propõem estudos sobre passagem de uma lógica da criança para uma lógica do adolescente. Atribuem essa passagem a “uma estruturação operatória inteiramente nova, fundada sobre a lógica das proposições, e sobre um pensamento ‘formal’ distinto do pensamento operatório ‘concreto’ de 7 a 11 anos (pois este não exige mais do que algumas operações da lógica de classes e de relações)”. (PIAGET; INHELDER, 1976, prefácio)

Encaminhamos o trabalho então, ao estudo desse pensamento formal, do ponto de vista do equilíbrio e do ponto de vista das estruturas, como sugere Piaget e Inhelder. (1976, p.184)

Ao utilizar o termo equilíbrio, Piaget não se refere a um sistema fechado, como em um experimento, mas de equilíbrio psicológico. Este equilíbrio ocorre “quando uma perturbação que modifica o estado do sistema tem seu oposto numa ação espontânea que o compensa. Consequentemente, o equilíbrio é uma função do comportamento do ator” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.183). Não devemos esquecer que essas compensações levam em conta as condições neurofisiológicas, ambiente físico e ambiente social.

Ao tratar do pensamento formal do ponto de vista do equilíbrio, ocorre a necessidade de detalhar algumas características do pensamento operatório concreto, que antecede, segundo Piaget, o estágio em que se encontram os alunos do ensino médio.

Ao deixar o estágio do pensamento pré-operatório em direção ao pensamento operatório concreto, ocorre uma:

[...] extensão do real na direção do virtual. Por exemplo, classificar os objetos significa construir conjuntos de tal forma que novos objetos possam ser ligados aos objetos já classificados, e novas inclusões se tornem possíveis. Seriar os objetos em ordem comporta igualmente novas subdivisões possíveis etc. Mas essas ‘possibilidades’ intrínsecas às operações concretas **não** estão ainda abertas para um campo mais ou menos amplo de hipóteses, como será o caso das possibilidades formais. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.187)

O equilíbrio das operações concretas estaria limitado por tratar de uma estruturação de dados reais, classificar e seriar comprimentos, pesos, por exemplo. Tratando apenas de operações possíveis, Piaget, caracteriza as operações concretas como uma extensão do real.

Em resumo, o pensamento concreto continua fundamentalmente ligado ao real, e o sistema das operações concretas, que constitui a forma final de equilíbrio do pensamento

intuitivo, chega apenas a um conjunto restrito de transformações virtuais, e, portanto, a uma noção do “possível” que é apenas uma extensão (não muito grande) do real. [...] a criança do nível concreto a rigor não cria hipóteses. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.188)

Fica estabelecida então a base da diferenciação entre os pensamentos concreto e formal: “com o pensamento formal ocorre uma inversão de sentido entre o real e o possível” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.189), sendo esse possível desassociado de ações executadas na realidade, colocando o real subordinado ao possível. Ou seja:

O pensamento formal é, na realidade, essencialmente hipotético-dedutivo: a dedução não mais se refere diretamente a realidades percebidas, mas a enunciados hipotéticos, isto é, a proposições que se referem as hipóteses ou apresentam dados apenas como simples dados, independentemente de seu caráter real. [...] realiza desde o início a síntese entre o possível e o necessário, deduzindo com rigor as conclusões de premissas, cuja verdade inicialmente é admitida apenas por hipótese, e, assim, vai do possível para o real. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.189)

Ao utilizar enunciados hipotéticos, em detrimento dos objetos concretos, passa-se a tratar de uma “lógica diferente”, a das proposições. Onde o conceito central é o *valor-verdadeiro*, o que não se resume em transformar operações do pensamento concreto em proposições, mas que possibilita “uma série de possibilidades operatórias novas, formadas por disjunções, implicações, exclusões, etc., que intervêm desde a organização da experiência e desde a leitura dos dados de fato, e se superpõe, nesse terreno, até aos simples agrupamentos de classes e de relações” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.190)

O possível no pensamento formal, citado anteriormente, mesmo independente da realidade, não está livre completamente. “O domínio do possível, atingido pelo pensamento formal, na realidade não é de forma alguma o do arbitrário, ou imaginação livre de qualquer regra e de toda objetividade” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.192). O possível deve ser observado em duas perspectivas: física e lógica.

Na perspectiva física, encontramos o possível na atitude inicial e espontânea de pensamento formal, em direção do equilíbrio do pensamento:

“para equilibrar suas afirmações sucessivas (o que significa evitar ser desmentido pelos fatos ulteriores), o sujeito tende a inserir, no conjunto das ligações reconhecidas como possíveis, as ligações inicialmente supostas como reais, de maneira a, depois, escolher as verdadeiras pelo exame de algumas transformações realizadas precisamente no interior dessas ligações possíveis”. (Piaget; Inhelder, 1976, p.192-193)

Na segunda perspectiva, a lógica, “o possível formal é o correlato obrigatório da noção de necessidade” que está relacionada ao fato de que “Uma dedução que se refere a uma hipótese (ou a um dado de fato, mas admitido como hipótese), é, ao contrário, necessariamente verdadeira, do ponto de vista formal, desde que seja correta, e isso independentemente do valor da hipótese admitida” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.193). Nas palavras de Piaget temos:

A conexão marcada pelas palavras “se... então” (implicação inferencial) consiste em ligar uma consequência necessária a uma afirmação simplesmente possível. [...] Ora, em que consiste este possível formal? É possível tudo que não é contraditório. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.193)

Segundo Piaget e Inhelder (1976), temos então que “no conjunto esses dois aspectos, físico e lógico, da noção do possível, psicologicamente constituem apenas um: ao situar um estado real num sistema de transformações possíveis” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.194). Constituindo, assim, o papel de fator de equilíbrio e de fator lógico que a noção do possível desempenha.

O fator de equilíbrio operatório da noção de possível é analisado em dois aspectos: o equilíbrio físico e o equilíbrio psicológico. Em ambos há os pontos de vista do real e do possível, porém o limite entre estes dois pontos de vista é muito mais complexo no domínio psicológico. A justificativa de Piaget e Inhelder (1976) é que “num estado de equilíbrio físico, de um lado uma ‘realidade’, que é causal e temporal, e, de outro lado, um conjunto de ‘possibilidades’ que são dedutivas, extemporâneas e situadas no cérebro do físico que faz a teoria do real” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.194). Ao passo que no equilíbrio psicológico temos algumas operações mentais e construção de algumas relações que se aplicam no momento da observação, mas que são insuficientes para o equilíbrio atingindo, sendo então necessário a intervenção de operações e de relações possíveis ou virtuais. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.194-195)

Simplificando, seria a influência de nossas interpretações naquilo que ‘vemos’. No equilíbrio físico é mais fácil determinar essa fronteira. No equilíbrio psicológico a interpretação age juntamente com ‘uma descrição’ do que se ‘vê’.

Como vimos anteriormente, o possível psicológico respeita certas regras. Essas regras do possível, ao serem tratadas por Piaget (1976), são classificadas em *materialmente possível* e *estruturalmente possível*. Denomina de *materialmente possível* as operações ou relações possíveis que o sujeito concebe como possíveis, mesmo que não as faça, e *estruturalmente possível* as “operações e relações que o sujeito seria capaz de efetuar ou de construir, mas sem que pense fazê-lo, isto é, sem que tome consciência dessa eventualidade, nem de sua capacidade a respeito”. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.195)

A distinção entre o *materialmente possível* e o *estruturalmente possível* se faz importante, pois quando o sujeito deduz algo a partir de hipótese, confirmando ou não no real, está interpretando as relações reais em função de um conjunto de ações virtuais, ou seja, “O *materialmente possível* não constitui mais do que uma modalidade do

pensamento real do sujeito” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.195). Sendo de grande importância para o pensamento formal, contribuindo para estabilizar o equilíbrio das operações na medida em que age na concepção das transformações possíveis. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.195-196)

Piaget (1976) apresenta o estágio do pensamento lógico-dedutivo como nível III, subdividido nos subestágios III A e III B. O nível III é assim apresentado:

Este nível se caracteriza pelos inícios do pensamento formal, revelados no aparecimento de um raciocínio hipotético-dedutivo, ao mesmo tempo que por uma busca ativa de verificação, mas sem que o sujeito esteja de posse do jogo completo das operações interproposicionais. Disso resulta que assistimos à gênese da implicação, da exclusão, etc. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.40)

Mais precisamente, Piaget (1976) procura caracterizar esse nível da seguinte forma:

Portanto a atitude de espírito deste nível III é essencialmente nova com relação à que caracteriza as operações concretas; consiste em não contentar-se do real dado em estado bruto, mas em compreendê-lo desde o início como um aspecto de um domínio muito mais amplo – o do possível. Na realidade, os sujeitos do estágio II se limitavam a registrar os dados sucessivos, em função de todas as relações e classes exigidas por sua diversidade, mas sem dissociar os fatores; portanto, sem criar hipóteses ou provas. Os sujeitos do nível III A, ao contrário, desde o início concebem o real como um produto de diferentes fatores que se organizam segundo um conjunto de combinações possíveis. Disso decorrem duas condutas que até então não tinham significado: a hipótese que consiste em reconstituir essas combinações e a prova que consiste em estabelecer quais, entre elas, efetivamente obedecem à experiência. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.41-42)

No início da fase III A, a operação formal de implicação é percebida “segundo a qual a criança supõe que determinado fator em todos os casos provoca a consequência percebida” (PIAGET; INHELDER, 1976; p.42), diferenciando do estágio II, onde “uma relação causal desse tipo era estabelecida por simples correspondência” (ibidem).

Na fase III B ocorre um avanço no sentido de promover uma prova rigorosa, com mais detalhes do que na fase III A, em que ocorreram alguns erros comuns.

Em seus experimentos, os pesquisadores observaram a ocorrência de um erro em especial. Os alunos que estariam na fase III A, diante de três fatores diretamente envolvidos na experiência, variavam os três fatores simultaneamente e procuravam estabelecer a influência de apenas um desses fatores no resultado do experimento, o que não ocorreria em alunos que estivessem na fase III B. Estando na fase III B, o sujeito faria a fixação de dois fatores e variações do fator que se quer estudar naquele momento. Procedendo assim com todos os fatores que se pretende estudar, e só depois disto feito, partir para as conclusões. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.45)

1.2 Referencial das atividades propostas

As atividades propostas neste trabalho foram inspiradas no uso do programa *Tarski's World*, criado pelos pesquisadores Barwise e Etchemendy (1996), com a intenção de propor ferramentas “[...] que poderiam facilitar a habilidade dos estudantes em visualizar o assunto abstrato em questão de lógica, e deste modo trabalhar mais eficientemente com estes”. (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.2-3, tradução nossa)

Com o objetivo de ensinar lógica de primeira ordem, o programa “[...] permite que os estudantes representem mundos tridimensionais, inserindo objetos geométricos de vários tipos e tamanhos, e testar sentenças de primeira ordem para ver se elas são verdadeiras ou falsas nestes mundos”. (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.5, tradução nossa)

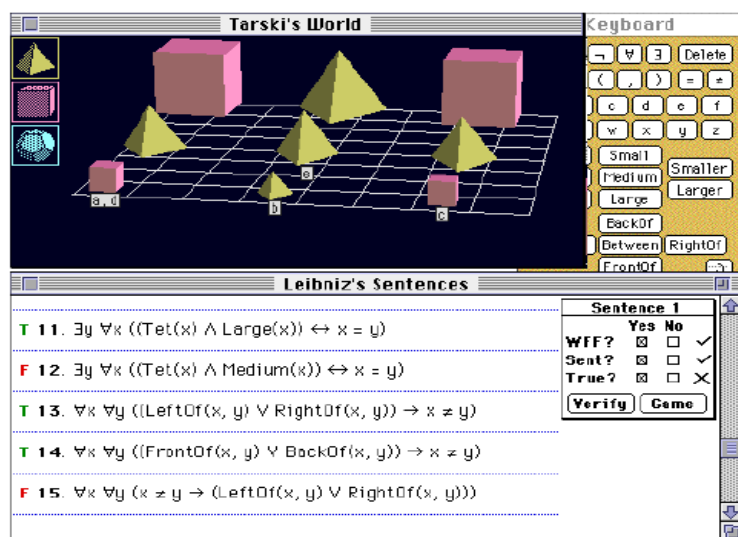


Figura 1 – Mundo criado a partir do programa *Tarski's World*¹⁵

Na figura anterior, podemos ver os T (true – verdadeiro) e F (false – falso) à esquerda das sentenças. A sentença 12, por exemplo, é falsa porque ela afirma que existe um único tetraedro médio, mas de fato ocorre que há três tetraedros de tamanho médio no mundo apresentado. As sentenças 13 e 15 merecem uma análise mais detalhada, pois apresentam uso da implicação, mantendo as mesmas proposições, mas alterando suas posições. A proposição que é antecedente na sentença 13 é conseqüente na 15 e vice-versa. O que exige dos alunos uma boa leitura e interpretação dessas sentenças para determinar o motivo de uma ser verdadeira e outra ser falsa.

¹⁵ BARWISE, ETCHEMENDY (1996, p.6)

O ambiente oferecido pelo programa possibilitou a criação de diferentes exercícios “que requeriam argumentação dedutiva para sua solução” (BARWISE, ETCHEMENDY, 1996, p.6, tradução nossa), e a partir destes, elaboramos nossas atividades.

Na mesma linha de proposta há um applet¹⁶, disponível na internet¹⁷, com base no programa *Tarski's World* e que oferece condições semelhantes, utilizando figuras em duas dimensões, e mesmos objetivos.

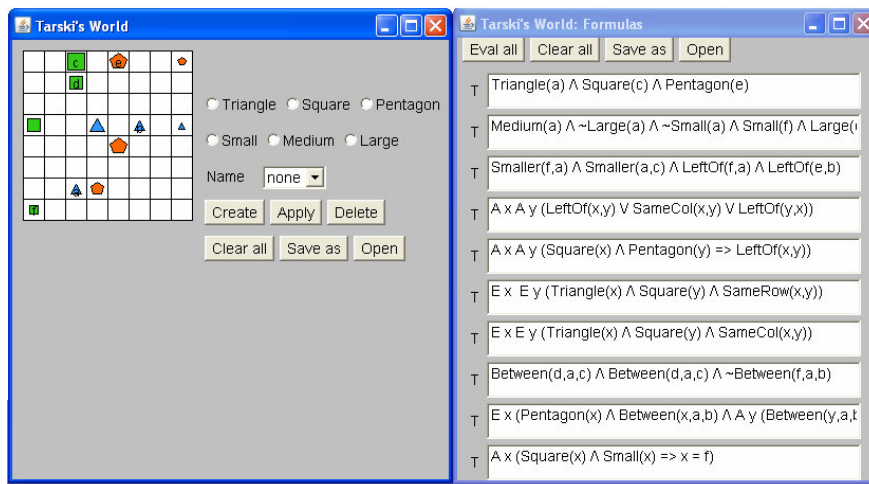


Figura 2 – Applet Tarski's World

A figura acima exhibe um mundo criado com uso do *applet*, que também recebeu o nome Tarski's World. À esquerda na figura temos o mundo com as figuras em duas dimensões, triângulos, quadrados e pentágonos, e os recursos para interagir com o mundo. Escolher forma, tamanho e nome da figura, excluir uma figura ou abrir um mundo já criado, por exemplo.

À direita na figura, temos a área onde estão os recursos destinados às sentenças, possibilitando a verificação de todas as sentenças, excluir todas as sentenças, salvar as sentenças em um arquivo e abrir um arquivo de sentenças.

Este *applet* permite abrir arquivos de diferentes mundos mantendo o arquivo de sentenças e vice-versa, o que facilita a elaboração de atividades nas quais se pretende fixar as sentenças ou um determinado mundo.

Como a rapidez na construção de mundos e verificação das sentenças, em mundos já criados, são características do *applet* que podem atrapalhar os objetivos da atividade, optamos primeiramente em utilizar a uma versão ‘concreta’, usando peças de

¹⁶ Trecho de programação em linguagem [Java](#) inserido em documentos [HTML](#)

¹⁷ <http://www.cs.plattsburgh.edu/~salvador/Tarski/> - acesso em 20 – maio – 2008.

E.V.A.¹⁸ e tabuleiro em papelão, pois nosso objetivo era que o aluno explorasse situações da lógica clássica e não desse respostas rápidas e sem reflexão.

O applet *Tarki's World* não foi utilizado diretamente nas atividades propostas neste trabalho, mas este serviu, como descreveremos adiante, de inspiração para a elaboração das mesmas. Acreditamos que o applet em questão se inclui na categoria de objeto de aprendizagem. David Wiley, apud Nunes (2007), sugere que “os objetos de aprendizagem são recursos digitais reutilizáveis e adequados ao uso educacional” (NUNES, 2007; p.216), acrescenta ainda que “na era digital em que vivemos torna-se viável e praticamente imprescindível que usemos e reutilizemos os bons materiais em diferentes contextos”. (ibidem)

Tarki's World está disponível na internet¹⁹ e com possibilidade de uso por professores a fim de elaborar e aplicar vários tipos de atividades, onde os alunos podem desenvolver certo grau de interatividade e desafio, dependendo das atividades propostas pelos professores.

Em nossas atividades o aluno tem papel ativo e na medida do possível também criativo, onde ao aluno tem a oportunidade experimentar e avaliar sua compreensão a respeito das regras da lógica clássica, sendo que “a verdadeira compreensão é demonstrada quando o aluno consegue pensar e agir flexivelmente com aquilo que aprendeu” (PERKINS, apud NUNES, 2007, p.222), visto que as atividades propiciam o pensar e o agir, que será abordado mais especificamente nas descrições das atividades.

Defendemos que nossas atividades “são instigantes e desafiadoras o suficiente para colocar o aluno num papel ativo de reflexão, investigação e mesmo de criação” (NUNES, 2007, p.222), pois elas oferecem um espaço para uso de diferentes formas de linguagem e uma mudança da cultura da sala de aula.

O objeto de aprendizagem por si só não oferece todas estas situações, é o professor ao preparar as atividades, fazendo o papel de arquiteto ou engenheiro, que torna o ambiente, que pode ser fisicamente a própria sala de aula, em um ambiente para discussão e construção de idéias, e “por mais sofisticados e interativos que sejam os objetos de aprendizagem, o processo de construção do conhecimento tendo o aluno como agente ativo implica em pensar sobre o objeto, discutir, argumentar, ser desafiado, conhecer os limites de validade do objeto, etc.” (NUNES, 2007, p.225). Logo, não

¹⁸ EVA - Etil Vinil Acetato - material sintético similar a borracha.

¹⁹ <http://www.cs.plattsburgh.edu/~salvador/Traski/> - acesso em 20 – maio – 2008.

vemos *Tarski's World* como uma solução por si só, seu uso precisa de planejamento por parte do professor.

O espaço para discussões e compartilhamento de estratégias é uma característica marcante e de importância considerável no processo de construção de conhecimento sobre uso da lógica clássica, característica presente em nossas atividades.

Para a avaliação do uso de objetos de aprendizagem, e mais especificamente o *applet* que nos serviu de inspiração, fizemos uso da proposta de Nunes (2007). Optamos pela participação dos alunos na medida em que estes refletissem sobre a evolução de suas idéias ao compararem suas respostas antes e após interação com os colegas e feedback do professor.

Como dito anteriormente, optamos pelo uso da estrutura oferecida pelo *applet* em uma versão 'concreta', usando de peças de E.V.A.²⁰ e tabuleiro. Essa opção é justamente para tornar a sala de aula, um espaço dito como comum e sem motivação, em um espaço de muita partilha e motivação com novos desafios e favorável a criação de conhecimento por alunos ativos e criativos, utilizando de uma nova linguagem e estrutura da lógica clássica.

Na atividade final está prevista a utilização dos recursos oferecidos pelo *applet*, que se utiliza da mesma linguagem, mas que acrescenta outras características próprias de ambientes digitais. Acreditamos que a rapidez na construção de mundos e verificação das sentenças são características que podem atrapalhar os objetivos da atividade, caso a intenção do aluno seja simplesmente oferecer respostas corretas ao invés de utilizar o momento para explorar e aumentar seu conhecimento em relação a lógica clássica.

Para acrescentar algumas informações a respeito do uso de objetos de aprendizagem, vamos apresentar RIVED, que Nunes (2007) cita como um repositório. Inicialmente denominada International Virtual Education Network (IVEN), hoje Rede Internacional Virtual de Educação para O melhoramento da Aprendizagem de Ciências e Matemática na América Latina, que foi criada para tornar-se um programa de auxílio a professores de Matemática, de Biologia, de Física e de Química.

RIVED foi concebida para desenvolver um ambicioso papel na América Latina: aumentar a qualidade da educação científica e colocar o ensino das ciências, já mencionadas, nos moldes de outros países mais desenvolvidos.

²⁰

EVA - Etil Vinil Acetato - material sintético similar a borracha.

Para atingir esse objetivo, o conceito de educação é aquele em que o aprendizado ocorre com fazeres práticos dos estudantes, visando o desenvolvimento de habilidades e processos mentais superiores em situações mais próximas da realidade. Resumidamente, um “aprendizado ativo, com ênfase conceitual e prática, e com contexto real”. (MENEZES, 2004, p.158)

O professor na proposta da RIVED, como mencionado anteriormente, não exerce a função de transmissor de conhecimento.

Sinteticamente, do professor se pretende que supere seu papel atual, centrado na transmissão de informações, e passe a assumir o de promotor de experiências de aprendizado significativo, de forma que o aluno deixe de ser mero receptor de informações para tornar-se participante ativo, criativo e crítico. (MENEZES, 2004, p.158)

A fundamentação do RIVED, disponível na internet, reforça o que foi dito ao expor o texto a seguir.

Espera-se com essa nova ferramenta que o professor assuma o papel de facilitador e líder do processo de ensino / aprendizagem e propicie aos alunos uma postura investigativa na resolução de problemas compatível com as demandas do mundo moderno.²¹

Para atingir o objetivo acima, o projeto foi estruturado para pôr em prática as seguintes ações:

Produção de material didático multimídia (organizado em módulos digitais). Cada módulo é formado por atividades interativas acompanhadas de guias do professor. Esses guias contêm orientações sobre a condução das atividades em sala-de-aula, dicas para o professor e sugestões de atividades complementares;
Capacitação de novas equipes de produção para multiplicar o desenvolvimento de módulos digitais;
Capacitação de professores para uso dos conteúdos produzidos;
Criação de um sistema de armazenamento e distribuição dos conteúdos produzidos (repositório de objetos de aprendizagem).²²

Para não confundir o projeto como reforma curricular, projeto de tecnologia, substituto para as práticas de sala de aula ou como um projeto de ensino a distância, Menezes (2004) deixa claro que o RIVED aceita como dados de realidade os currículos praticados nos países participantes, não está vinculado ao uso da internet, dinamiza a função do professor e procura apoiar e aperfeiçoar à distância as ações de professores que atuam em sala de aula. (MENEZES, 2004, p.158)

²¹ www.rived.proinfo.mec.gov.br/historico.php, acesso em 23/03/2008.

²² ibidem

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA E EXPERIMENTO

2.1 Engenharia Didática

A metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho possui como características situações de análises e de aplicação, ou experimentação, como caracterizou Michèle Artigue, “[...] como um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino”. (MACHADO, 1999, p. 199)

As análises a que nos referimos anteriormente são conhecidas por *análise a priori* e a *análise a posteriori*, e a confrontação entre essas análises resulta na *validação* da pesquisa, que nessa metodologia é interna:

Com efeito, as investigações que recorrem a experimentações na sala de aula situam-se, a maioria das vezes, numa abordagem comparativa com validação externa dos desempenhos de grupos experimentais e de grupos testemunho. Este paradigma não é o da engenharia didática, que se situa no lado oposto, no registro dos estudos de casos, e cuja validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a *análise a priori* e a *análise a posteriori*. (ARTIGUE; BRUN, 1996, p. 197).

Para a descrição da metodologia da engenharia didática, Artigue (1996) apresenta quatro fases, determinadas temporalmente:

1. Análises prévias;
2. Concepção e análise *a priori* das situações didáticas da engenharia;
3. Experimentação;
4. Análise *a posteriori* e validação.

As análises prévias, ou preliminares constituem a busca de apoios teóricos didáticos gerais, em conhecimentos didáticos já adquiridos e análises preliminares, que Artigue (1996) afirma serem, em maioria:

- a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
- a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;
- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- a análise do campo de constrangimento no qual virá a situar-se a realização didáctica efectiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objectivos específicos da investigação. (ibid, p.198)

Ressaltamos que os apoios citados anteriormente, como sugerem Artigue e Brun (1996, p.199), “são retomados e aprofundados ao cabo das diferentes fases do trabalho, em função das necessidades, não sendo prévio senão a um primeiro nível de elaboração”, o que, normalmente, não fica explícito no trabalho final.

Nessa fase, análise prévia, é onde ocorre um estudo sobre as “concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes” (ARTIGUE; BRUN, 1996, p.202), e onde a engenharia é criada com os objetivos de provocar, controladamente, alterações dessas concepções, com o objetivo a ser alcançado.

Na fase de concepção e análise *a priori* ocorre a tomada de “decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: *variáveis de comando*, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado” (ARTIGUE; BRUN, 1996, p.202). Entendemos que as dificuldades apresentadas pela análise prévia servirão de guia para determinar as variáveis de comando, que são dispostas em duas categorias, “as *variáveis macro-didáticas ou globais*, que dizem respeito à organização global da engenharia, e as *variáveis micro-didáticas ou locais*, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase”. (ibidem)

As variáveis no nível micro-didático são classificadas ainda por variáveis do problema e variáveis da solução, referentes à organização e à gestão do *meio*.

Ocorre uma interdependência entre as escolhas globais e locais, mesmo que geralmente as primeiras, de ordem geral, precedam a descrição de cada fase da engenharia, como afirma Machado (1999), “A análise *a priori* comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação a-didática que se quis criar e que se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação”. (MACHADO, 1999, p.205)

Na análise *a priori*, que se compõe de uma parte descritiva e uma parte preditiva, como afirmada anteriormente, Artigue determina as ações:

- Descrevem-se as escolhas efectuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação a-didática que delas decorrem,
- Analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de acção, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,
- Prevêem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efectuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem. (ARTIGUE; BRUN, 1996, p.205)

O papel do professor nesta fase da atividade é muito restrito, isso devido a intenção de dar ao aluno a vez da ação, o “professor intervém apenas a um nível descritivo, como se a situação o determinasse por completo enquanto actor do sistema” (ARTIGUE; BRUN, 1996, p.207), o professor seria coadjuvante, mesmo com as interferências do *contrato didático*, lembrando que o aluno é levado em conta em dois níveis, o descritivo e o preditivo.

A fase de experimentação recebe a classificação de *clássica*, por Artigue e Brun, que se baseia “no conjunto dos dados recolhidos aquando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela” (ibid, p.208), com uso de questionários, testes individuais ou em pequenos grupos.

Machado (1999) detalha ainda mais o que seria uma experimentação para uma proposta de engenharia didática:

- A explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
- O estabelecimento do contrato didático;
- A aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- O registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).(MACHADO, 1999, p.206)

A autora destaca a possibilidade de eventuais correções da “rota prevista” (MACHADO, 1999, p.206), quando a experimentação possui mais de uma sessão. São correções possíveis após uma análise *a posteriori* local, ou seja, uma análise após uma ou algumas sessões, comparando com as previsões contidas nas análises *a priori* realizadas.

Na quarta e última fase, da *análise a posteriori e da validação*, é que ocorre a confrontação entre as análises *a priori* e *a posteriori*, para se validar ou refutar as hipóteses levantadas no início da engenharia, pois nesta fase cotamos com os dados fornecidos pela experimentação, os quais receberão o tratamento pertinente ao objetivo a ser atingido, e apoiado nas análises prévias.

2.2 Análises Preliminares

As atividades foram desenvolvidas para serem aplicadas com alunos do 2º ano do ensino médio, na faixa etária entre 15 e 17 anos. Os teóricos Vigotsky e Piaget sustentariam nossa escolha. O primeiro porque se trata de pessoas que já tiveram grande

contato com conceitos matemáticos e que possuem uma vida social já intensa e crítica; o segundo, com o fato de que esses alunos se encontram em uma fase de desenvolvimento apropriada, denominado estágio operatório formal, desenvolvido a partir dos 12 anos de idade.

Do ponto de vista das estruturas lógicas, os resultados parecem comportar uma conclusão que distingue claramente o adolescente da criança. Este chega apenas a lidar com operações concretas de classes, de relações e números, cuja estrutura não ultrapassa o nível dos "agrupamentos" lógicos elementares ou dos grupos numéricos aditivos e multiplicativos. A criança chega, assim, a utilizar as duas formas complementares da reversibilidade (inversão para as classes e os números, reciprocidade para as relações), mas sem fundi-las nesse sistema único e total que caracteriza a lógica formal. O adolescente, ao contrário, superpõe a lógica das proposições à das classes e das relações, e assim desenvolve, pouco a pouco (atingindo seu patamar de equilíbrio por volta de 14-15 anos), um mecanismo formal fundamentado simultaneamente nas estruturas do reticulado e do grupo das 4 transformações; estas lhe permitirão reunir, num mesmo todo, além do raciocínio hipotético-dedutivo e da prova experimental baseada na variação de um único fator (desde que as outras coisas permaneçam iguais), certo número de esquemas operatórios que utilizará continuamente em seu pensamento experimental, bem como lógico-matemático. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.260)

As atividades foram aplicadas em uma escola em que o aplicador não tinha qualquer vínculo, facilitando o estabelecimento de um ambiente diferente daqueles em que os alunos estavam acostumados e descaracterizando uma possível cobrança em situações de avaliação com objetivo de gerar 'notas'.

Ficou estabelecido que as atividades fossem realizadas em dupla, os alunos formariam livremente as duplas, e que seriam identificados como grupo-cor. A opção da formação de dupla favorece o diálogo e troca de idéias entre os alunos, além de possibilitar a gravação em áudio que servirá como apoio na análise *a posteriori* das atividades.

Estabelecemos o número máximo de dez duplas, em virtude da demanda de atenção necessária para a aplicação da atividade, e verificação, análise e retorno entre as atividades realizadas.

O controle de presença e formação dos grupos seria realizado no início de encontro, gerando uma lista de presença com nome e assinalando presença mediante chamada, e uma outra lista para a formação do grupo.

2.3 Desenvolvimento das atividades

Nosso trabalho de pesquisa, de acordo com a metodologia, pretende estar atento às relações entre a investigação e a ação, sendo:

Comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projecto preciso, se apóia nos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um

controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos muito mais complexos do que os objectos depurados da ciência, e, portanto a estudar de uma forma prática. (ARTIGUE; BRUN, 1996, p.193)

Na fase das análises preliminares, elaboramos as atividades. Ou seja, a partir de estudos realizados, artigos explicitados anteriormente, e uso do applet *Tarski's World*, que propicia criação dos mundos e das sentenças que serão analisadas segundo regras da lógica clássica.

Foi proposto um total de sete encontros, que forneceram quatro fontes de dados diferentes (termo fonte de dados é utilizado por falta de um melhor). Duas duplas tiveram as atividades gravadas em áudio, uma dupla em vídeo, e todas as duplas geraram folhas com as respostas das atividades propostas, além de contar com relatório de dois observadores. Os observadores são conhecidos pelos alunos e estão diretamente relacionados com a disciplina Matemática, especificidade que não será alvo de análise.

As atividades foram direcionadas para duração de 1 hora e 30 minutos, tendo início às 11h00min e término às 12h30min. Os temas da lógica clássica e atividades que pretendíamos abordar foram distribuídos nos encontros da seguinte forma:

Encontro	Data	Atividades programadas	
1º Encontro	27/04/2007	Apresentações do aplicador, proposta do trabalho e material.	
		Atividade I – Reconhecimento	I.1 – análise de sentenças
			I.2 – construção do mundo
			I.3 – desafio dos mundos
2º Encontro	04/05/2007	Atividade II - Negação e Conjunção	II.1 – análise de sentenças
			II.2 – construção do mundo
			II.3 – desafio dos mundos
3º Encontro	11/05/2007	Atividade III – Disjunção	III.1 – análise de sentenças
			III.2 – construção do mundo
			III.3 – desafio dos mundos
4º Encontro	18/05/2007	Atividade VI – Revisão	IV.1 – análise de sentenças
		Sentenças em linguagem natural e matemática	IV.2 – construção do mundo
5º Encontro	25/05/2007	Atividade V - Implicações e Bicondicional	V.1 – análise de sentenças
			V.2 – construção do mundo
			V.3 – desafio dos mundos
6º Encontro	15/06/2007	Atividade VI – Quantificadores	VI.1 – análise de sentenças
			VI.2 – análise de sentenças
			VI.3 – construção do mundo
			VI.4 – desafio dos mundos
7º Encontro	15/06/2007	Atividade VII – Finalizando	VII.1 – análise de sentenças
			VII.2 – determinar as figuras
			VII.3 – descrever estratégia

Tabela 1 - Quadro da Organização das Atividades

No início dos encontros ocorre uma apresentação dos operadores lógicos envolvidos nas atividades do encontro, para expressar aos alunos as interpretações e características desses operadores lógicos, sem uso de tabela verdade. Por exemplo, sentenças com conjunção, *e*, é verdadeira se, e apenas se, todas as proposições envolvidas são verdadeiras, e em caso de disjunção, *ou*, basta uma proposição verdadeira para que a sentença seja verdadeira.

A opção de não utilizarmos a tabela verdade é pelo fato de estarmos em concordância com Epp (2003). A questão que nos é colocada: “Que papel deve desempenhar as tabelas verdade ao se falar dos princípios do raciocínio lógico?” (EPP, 2003, p. 896, tradução nossa). Não discutimos a importância de se apresentar as definições do *não*, *e* e *se - então*, porém procuramos não utilizar a tabela verdade para essa apresentação, pois o aluno pode fazer uma associação da tabela verdade apenas como recurso de memória, “e apesar de que tabelas verdade podem ajudar a transmitir os conceitos de equivalência lógica e validade dos argumentos, deve-se tomar o cuidado de orientar os estudantes para que não ocorra uma interpretação mecânica” (EPP, 2003, p. 896, tradução nossa). Pretendemos então evitar cometer esse equívoco em nossas atividades.

Cada encontro e atividade receberam atenção em separado, respeitando as quatro fases da engenharia didática, possibilitando a análise *a posteriori* e validação.

Para os diferentes encontros e temas abordados, fixamos uma estrutura para as atividades e formulário do observador, porém deixando a possibilidade de alterações quando houvesse necessidade. Respeitando a metodologia adotada.

As atividades possuem a seguinte estrutura básica:

- 1º) Uma breve retomada da atividade anterior, apresentado o desempenho dos grupos, expondo alguns erros detectados pelo aplicador ou questões relevantes sugeridas durante a atividade ou durante a análise da folha de atividades respondida pelos alunos. Acrescentando observações ou questões por eles elaboradas durante a aplicação da atividade que não foram atendidas.
- 2º) Apresentação e explicação do conteúdo a ser trabalhado naquele dia, normalmente com uso de apresentações realizadas em Microsoft PowerPoint e eventualmente quadro negro e giz.
- 3º) Entrega do material de cada dupla, identificado pela cor.
- 4º) Entrega da folha de respostas com as atividades 1 e 2.
- 5º) Recolhimento da folha de respostas com as atividades 1 e 2.

- 6º) Entrega da folha de atividade com a atividade 3.
- 7º) Recolhimento da folha de atividade com a atividade 3.
- 8º) Recolhimento do material de cada dupla.

Descrição da estrutura das atividades nas folhas de respostas:

- **Atividade 1** “Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein”²³.

Essa atividade apresenta uma figura com objetos, triângulos, quadrados e pentágonos, representando um mundo denominado Wittgenstein, e ao lado desta figura há algumas sentenças que contém os atributos e estruturas que estão sendo apresentados aos alunos no encontro, sem fazer uso da tabela verdade. Primeiro momento em que o aluno precisa examinar características do operador lógico em relação ao valor de verdade das proposições que formam a sentença. Ou seja, é a atividade que estabelece o primeiro contato do aluno com o operador lógico recém apresentado.

- **Atividade 2** “Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras”

Essa atividade tem por objetivos reforçar a leitura interpretativa e familiarização da estrutura das sentenças, e avançar no sentido de controle e análise do conjunto das sentenças, realizando encadeamento delas, pois uma análise individual das sentenças, como é feita na atividade 1, não é suficiente para sua realização de forma satisfatória. Possibilitando, na medida do possível, deixar o aluno optar por adotar uma proposição como verdadeira ou falsa, que contribuirá, nós acreditamos, para início de pensamento hipotético dedutivo.

- **Atividade 3** “Desafie seu oponente escrevendo cinco sentenças para que ele construa seu mundo”

Essa atividade, além de reforçar os objetivos anteriores, acrescenta o domínio da escrita da sentença, onde é cobrada a sintaxe da sentença, com uso correto das expressões, letras maiúsculas e minúsculas na sentença escolhida. Espera-se maior utilização das peças de E.V.A. e do tabuleiro, visto que o grupo não deverá deixar marcas na folha que facilitem o trabalho do grupo desafiado. Porém, há um objetivo intrínseco nesta atividade, que é o poder de

²³ O nome do mundo foi dado pelo autor do applet, no caso Wittgenstein (1889-1951) filósofo austríaco, é um dos fundadores da filosofia analítica e autor de obra que se insere na tradição da análise lógica da linguagem iniciada por Frege e Russell.(JAPIASSÚ; MARCONDES, p.282, 2006)

motivação que ela contém, pois desafiar o colega, normalmente, traz uma grande mobilização dos participantes e isso serve como motivação para os grupos.

- **Atividades específicas**

Há outras atividades que não fazem parte da estrutura geral dos encontros, que são pertinentes ao momento e ao tema do encontro especificamente, que serão apresentadas e justificadas quando a atividade estiver sendo tratada no trabalho.

Descrição das observações:

Demos atenção a certos critérios que, de acordo com nossa proposta, deveriam estar sendo anotados pelos observadores. A atividade do dia era dividida em partes onde o observador fazia suas anotações. Os critérios que fixamos são: a duração de cada parte e utilização do tabuleiro. Há um espaço para os comentários gerais do observador, para que este possa anotar algo que lhe apresente como relevante para nossa pesquisa.

2.4 Experimentação e Análises das Atividades

Segue a descrição da proposta do primeiro encontro.

- Apresentar o professor aplicador, os professores observadores e a estrutura em que as atividades ocorrerão:
 - O professor aplicador não poderá oferecer respostas para as questões dadas, sua participação, durante a atividade, difere daquelas, normalmente, atribuídas ao professor em sala de aula (contrato didático);
 - Os professores observadores têm apenas a tarefa de observar a dupla, não podendo ter qualquer outra participação na atividade;
 - Duas duplas, voluntárias, terão suas conversas gravadas em áudio, durante as atividades, e uma dessas duplas também terá gravação de vídeo;
 - Enfatizar a importância de se manter as duplas durante as atividades propostas.
- Apresentar o material que será utilizado na oficina:
 - O tabuleiro, com as características, quantidade de linhas e colunas, semelhantes aos que serão utilizados nas folhas de atividades;
 - As peças de E.V.A., que representam as figuras planas triângulo, quadrado e pentágono, com três tamanhos e cores diferentes, para serem utilizados no tabuleiro, caso a dupla queira;

- A pasta de cada dupla, contendo, além das peças de E.V.A. e do tabuleiro, uma folha com orientações para a “tradução” das sentenças utilizadas nas atividades, lápis, caneta, borracha e etiquetas. As etiquetas serão utilizadas para identificar as figuras de E.V.A. colocadas no tabuleiro.
- Apresentar a estrutura básica das atividades, que normalmente será:
 - Uma breve retomada da atividade anterior, apresentado o desempenho do grupo, e expondo alguns fatos, erros ou questões relevantes, que foram detectados durante a atividade ou na análise das atividades que eles entregaram e observações ou questões por eles elaboradas;
 - Apresentação e explicação do conteúdo a ser trabalhado naquele dia, normalmente com uso de apresentações realizadas em Microsoft PowerPoint e eventualmente quadro negro e giz.
- Realizar as atividades, nas folhas de respostas, com uso do material disponibilizado.

A figura a seguir, fornece a imagem do material recebido pelos alunos para a realização das atividades nos encontros. As cores dos objetos, triângulos em azul, quadrados em verde e pentágonos em vermelho, foram pensadas para ficar de acordo com as características do *applet*, evitando algum tipo de influência negativa quando uso simultâneo do material no tabuleiro e das folhas de atividades.



Figura 3 – Material dos alunos

As peças de E.V.A. possuem os três tamanhos - grande, médio e pequeno - e a percepção desta característica é muito fácil. Dentro da pasta, grupo amarelo na figura, está a folha de orientações, onde se encontra as “traduções” das sentenças utilizadas nas atividades²⁴.

²⁴ Ver anexo A

2.4.1 Atividade I - Reconhecimento

A Atividade I – Reconhecimento tem por objetivos a apresentação da estrutura das três atividades que ocorreram nos encontros, ou seja: o mundo de Wittgenstein que servirá para análise de sentenças com uso da linguagem do applet, o desafio da construção do mundo a partir de sentenças propostas pelo aplicador e a criação de seu mundo e desafiar os colegas do encontro. Acrescentando que deverá atender algumas expectativas geradas pelos alunos em relação à oficina e estabelecer, na medida do possível, um compromisso entre aplicador e aluno.

2.4.1.1 Análise a Priori da Atividade I

Atividade I.1 – Análise de sentenças.

Esse exercício possui como característica fundamental, o fato de o aluno utilizar o que ele vê, observa, em um mundo já criado, e a partir do observado propor resposta. A solução alia sentenças e um mundo pronto a ser observado. Com base em nossa leitura de Piaget, acreditamos não estar propiciando situação de uso de pensamentos formais, pois se referem as “realidades percebidas” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.189), o que descaracteriza, nesse aspecto, esse tipo de pensamento. Apesar de sugerir também sentenças que dispensam uso da observação, pois de acordo com a estrutura de nossas atividades e que fazem parte da proposta do *applet*, são verdadeiras ou falsas em qualquer mundo.

A característica citada acima está presente em todas as atividades iniciais dos encontros, onde a intenção é familiarizar os participantes com os termos utilizados nas sentenças, onde se estabelece forma, tamanho do objeto, ou comparação entre objetos, maior ou menor, por exemplo, e posicionamento entre objetos, mesma linha ou esquerda de, por exemplo. As sentenças utilizam texto em inglês, em virtude da programação original do *applet* que será utilizado posteriormente.

As fórmulas que estabelecem forma e tamanho – Triangle(a) e Large(d) – por exemplo, é necessário somente um elemento (argumento), enquanto que as fórmulas onde ocorrem comparação – Smaller(c,e) e SameSize(a,d) – e posicionamento – SameRow(d,e) e Between(a,c,e) – são necessários mais do que um elemento na fórmula.

Segue abaixo a proposta do exercício.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein

1	Large(d)		18	SameSize(b,c)	
2	Large(c)		19	SameSize(a,a)	
3	Small(a)		20	SameSize(c,b)	
4	Medium(b)		21	SameSize(a,b)	
5	Small(d)		22	SameRow(d,e)	
6	Large(f)		23	SameRow(e,e)	
7	Medium(f)		24	SameRow(e,d)	
8	Medium(c)		25	SameCol(a,b)	
9	Smaller(a,c)		26	SameCol(b,a)	
10	Smaller(c,e)		27	SameCol(d,f)	
11	Smaller(a,e)		28	Between(e,d,f)	
12	Smaller(d,e)		29	Between(c,c,c)	
13	Smaller(f,f)		30	Between(c,a,f)	
14	LeftOf(f,a)		31	Between(a,c,f)	
15	LeftOf(a,f)				
16	LeftOf(a,d)				
17	LeftOf(d,a)				

Figura 4 - Atividade I.1

Todos os elementos presentes no mundo de Wittgenstein, triângulos, quadrados e pentágonos, têm os três tamanhos possíveis, para que o aluno possa comparar e estabelecer juízo quando a sentença utilizar este tipo de atributo.

A seqüência das sentenças foi pensada em simplificar as análises, facilitando a assimilação dos termos e a estrutura das sentenças.

Algumas sentenças têm como objetivo gerar apreensão e debate entre as duplas do grupo, como as 13^a, 19^a, 23^a e 29^a. Pois teríamos a expressão que utiliza mais de um objeto, porém faz-se referência ao mesmo objeto, sendo declarações verdadeiras em qualquer mundo, 19^a e 23^a, e outras falsas em qualquer mundo, a 29^a, por exemplo.

O agrupamento de algumas sentenças, se analisado dessa forma, também foram pensados para gerar discussão entre os elementos da dupla. Como a frase “é lógico que se *a* está na mesma coluna de *b*, então *b* está na mesma coluna de *a*”, por exemplo. Segue adiante mais detalhes sobre a motivação de possíveis debates gerados pelo agrupamento de sentenças.

As sentenças 9, 10 e 11, se forem analisadas em grupo, serão vistas como exemplo clássico de comparação entre três elementos distintos, onde a terceira comparação não requer a necessidade de uma comparação visual, sendo uma inferência a partir das sentenças anteriores.

As sentenças 14, 15, 16 e 17, foram elaboradas para alertar o aluno em relação às particularidades de algumas sentenças, onde a falsidade não indica a veracidade de sua variação. Sendo $\text{LeftOf}(a,d)$ falsa, não indica a verdade da sentença $\text{LeftOf}(d,a)$, por exemplo.

As sentenças 14, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 30 e 31, tomadas duas a duas, fazem referência aos mesmos objetos e mesmos comandos, mas em diferentes ordens, com a finalidade de destacar essa importância em determinados comandos.

Atividade I.2 – Construção do mundo.

Com o objetivo de reforçar a leitura e familiarização com as sentenças, e avançar no sentido de controle e análise do conjunto das sentenças. Esta atividade não parte de um mundo observável, mas de sentenças que devam ser respeitadas, que permite algumas liberdades, mas que também traz algumas restrições para uma proposta de mundo. O objeto a deve ser triângulo, não permite outra forma, deve estar entre b e c , mas não necessariamente em uma mesma linha, pode ser em diagonal ou coluna, por exemplo.

A utilização do material nesta atividade deve ser expressiva, pois a procura em atender a todas as sentenças simultaneamente, como sugere o enunciado da atividade, requer inserção e manipulação dos objetos no tabuleiro. Reforçando que o tabuleiro sozinho não representa o mundo, pode ser um mundo específico, o vazio. O mundo é criado a partir do tabuleiro e dos objetos nele posicionado, fornecendo então ao mundo criado, algumas características.

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	Triangle(a)
2	Medium(a)
3	Pentagon(b)
4	Square(c)
5	Between(a,b,c)
6	Smaller(b,a)
7	LeftOf(b,c)
8	Smaller(a,c)

Figura 5 - Atividade I.2

Na figura anterior, temos as sentenças 5 e 7 que se relacionam ao tratarem de posicionamento, enquanto que as sentenças 2, 6 e 8, se relacionam ao tratarem do tamanho dos objetos.

Objetivo de cada uma das sentenças.

- 1) Estabelece o objeto a como triângulo.
- 2) Estabelece o objeto a como médio.
- 3) Determina que o objeto b deva ser pentágono.
- 4) Determina que o objeto c deva ser quadrado.
- 5) Estabelece que a deve estar entre b e c .
- 6) Determina que b deve ser menor que a , ou seja, b é pequeno, em virtude da 2ª sentença, promovendo o encadeamento das sentenças para produzir dedução.
- 7) Posiciona b a esquerda de c .
- 8) Estabelece que o objeto c é grande, pois como a é médio e é menor que c , este último só pode ser grande. Exigindo, novamente, dedução a partir do encadeamento das análises das sentenças.

Atividade I.3 - Desafio dos mundos.

Além de reforçar os objetivos anteriores, acrescenta o domínio da escrita da sentença, onde pedimos para ficarem atentos para a sintaxe correta da sentença, com uso correto de parêntese e letras maiúsculas e minúsculas na sentença escolhida. Está prevista a utilização das peças de E.V.A. e do tabuleiro, visto que o grupo não deverá deixar marcas na folha que facilitem o trabalho da dupla desafiada, e retratar um mundo que estamos vendo é mais fácil do que criá-lo na mente. Porém, há um objetivo intrínseco nesta atividade, que é o poder de motivação que ela contém, pois desafiar o colega, normalmente, traz uma grande mobilização dos participantes.

Podemos pensar em pelo menos duas modalidades de vencedores para o desafio. Se o grupo desafiado conseguir criar o mundo sem erros e se o mundo construído estiver igual ao criado pelo desafiador. Porém, adotamos que a construção de um mundo válido é o suficiente para que o desafiado tenha êxito, e que as sentenças do desafiador não tornem a criação do mundo, dentro da estrutura proposta, impossível de ser feita.

Esta atividade em particular, pode provocar certo conflito entre uma liberdade total e irrestrita da imaginação, e as restrições do “domínio do possível, atingido pelo

pensamento formal” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.192), pois o aluno aparentemente pode gerar quaisquer sentenças, e ao mesmo tempo deve respeitar as regras da lógica clássica.

A atividade é assim apresentada aos alunos.

3. Desafie seu oponente escrevendo cinco sentenças para que ele construa seu mundo.

1.....

2.....

3.....

4.....

5.....

Figura 6 – Atividade I.3

A quantidade de cinco sentenças foi estabelecida em função da duração da atividade, pois a elaboração das sentenças precisa de certo tempo, aliado ao fato de que a proposta de tornar a construção do mundo difícil para o desafiado requer mais atenção.

2.4.1.2 Experimentação da Atividade I

A atividade teve seu início e término nos horários previstos. Tivemos a formação de 9 grupos (duplas), contando com 9 meninas e 9 meninos.

Encontro	Data	Atividades programadas	
1º Encontro	27/04/2007	Atividade I – Reconhecimento	I.1 – análise de sentenças
			I.2 – construção do mundo
			I.3 – desafio dos mundos

A montagem do grupo ficou a critério dos alunos, originando três duplas de meninas, três duplas de meninos e três duplas mistas. Os grupos, dupla, observados foram o rosa e o azul II.

Primeiramente daremos vez aos grupos observados e depois teremos uma visão mais geral do que ocorreu com todos os grupos durante cada atividade do encontro.

Atividade I.1.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	3 min.	Não
	Observações	
	- “O menino tem mais iniciativa e liderança. Toma a maioria das decisões, mostrando para ela o porquê de sua decisão”. - “Discutem uma pergunta levando em conta outra pergunta acima. Finalmente, decidem se basear em cada uma das questões de cada vez”.	
Rosa	4 min.	Não
	Observações	
	- “Dificuldade na compreensão do comando LeftOf(a,b), item 14, consultaram a folha explicativa e resolveram”. - “Dúvida na 28, Between(a,b,c). Consultaram a folha explicativa”.	

Quadro 1- Atividade I.1 Análise de sentenças: Experimentação

Os alunos não tiveram muitos problemas para fazer essa atividade, com duração entre 5 e 6 minutos. A 29ª sentença foi a que mais gerou debate entre os elementos de uma mesma dupla. Destacamos a 14ª onde o questionamento era a necessidade ou não de os dois elementos, f e a , estarem na mesma linha. Em uma dupla com gravação de áudio encontramos o seguinte diálogo:

- “A resposta depende do ponto de vista de cada um?”

O colega responde

- “Não, a pergunta é única e clara”.

Como previsto, as sentenças que utilizaram dois ou três elementos foram as que mais ocasionaram dúvidas, 14ª e 28ª, por exemplo, fazendo com que os participantes utilizassem a folha de orientações entregue juntamente com o material.

Ocorrência de erro muito baixa, apenas dois erros, sentenças 9 e 29, em diferentes duplas.

Com a rapidez da realização do exercício, foi proposta a troca da folha de atividade entre as duplas para que eles próprios fizessem a verificação das respostas dos colegas. Essa atitude, que estava prevista caso ocorresse uma rapidez exagerada, contribuiu para motivá-los, pois a participação foi animada, gerando um clima propício de troca e interação entre os participantes.

Atividade I.2.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	12 min.	Não
	Observações	
	- “A rapidez na interpretação parece ser maior. Já estão familiarizados. Discutem bastante as perguntas do texto”.	
Rosa	6 min.	Sim
	Observações	
	- “Chamaram o professor para saber se o mundo é único ou se vários mundos poderiam ser construídos com as informações dadas. Os alunos esqueceram de colocar as etiquetas.” - “O professor pediu à dupla para observar a frente do tabuleiro e para observar o que é linha e o que é coluna”.	

Quadro 2 –Atividade I.2 –Construção do mundo: Experimentação

Da mesma maneira que a atividade anterior, os alunos não tiveram muitos problemas para criar o mundo a partir das sentenças dadas, porém o tempo exigido foi maior, entre 6 e 13 minutos.

A ocorrência de erro foi muito pequena, apenas um grupo cometeu erro, mas, de acordo com seus próprios comentários, por motivo de desatenção. Eles visavam atender a sentença cinco, $\text{Between}(a,b,c)$, e não perceberam que os objetos que eles desenharam não estavam alinhados em uma diagonal, como eles pretendiam.

No início houve algum uso do tabuleiro, mas logo os participantes optaram por utilizar o lápis e borracha, apagar e refazer quando havia erro. Como previsto, alguns dos participantes refizeram os objetos b e c , pois as sentenças 6 e 8 estabelecem comparações de tamanho entre b e a , a e c , respectivamente. A leitura das sentenças ocorria após as representações dos objetos já terem sido realizadas na folha de resposta, o que gerava a necessidade de uma nova proposta para os objetos.

Entre os nove grupos, todos inseriram três objetos no mundo, cinco deles com os três objetos em uma mesma linha e quatro utilizaram a opção da diagonal.

A questão que mais nos chamou a atenção foi: se o mundo proposto é único ou se vários mundos poderiam ser construídos com as informações dadas.

Foi pedido novamente que as duplas trocassem suas atividades para verificarem possíveis erros, e a interação ficou novamente em evidência.

Atividade I.3.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	7 min.	Não/Sim
	Observações	
	- “Dificuldades no que fazer no desafio. Procuraram orientação do professor”. - “Discutiram quais os critérios que adotarão para propor as questões de 1 a 5”. - “Procuram montar as figuras escrevendo na mesinha dificuldade proposta à outra dupla”. - “O menino toma a maioria das decisões”. - “Terminaram de propor questões”. - “Decidem montar no tabuleiro as questões propostas por eles”. - “Ao primeiro contato com as figuras de plástico, tentam verificar como classifica-las, por tamanho e sigla”.	
Rosa	10 min.	Sim
	Observações	
	- “A dupla queria colocar uma peça à direita. Mas disseram que não há comando que leve uma peça à direita.” - “A dupla posicionou 3 peças no tabuleiro mas sente dificuldade em escrever 5 sentenças somente para caracterizar a situação”. - “Os alunos pediram ajuda ao professor. Estava muito difícil caracterizar a situação pensada. Perguntaram se era necessário caracterizar a forma de cada peça (pentágono, triângulo,...). O professor disse que nesse momento não. Poderiam ignorar o formato das peças”.	

Quadro 3- Atividade I.3 – Desafio dos mundos: Experimentação

A motivação foi grande, ficou registrada em áudio a provocação de uma dupla de meninas com a seguinte frase:

- “Preparem-se que o nosso é bem difícil”

O tempo para o preparo das sentenças ficou entre 7 e 10 minutos, sempre com a intenção de dificultar a resolução do desafio acontecem diferentes estratégias.

O uso do tabuleiro foi prática comum, algumas duplas queriam fazer uso de outras sentenças das que não foram utilizadas, se queixaram da quantidade de sentenças, alegando que cinco eram poucas, e ainda com a intenção de dificultar a solução do

desafio, queriam utilizar mais dados em cada linha, acreditamos que antecipando o uso do conectivo *e*.

Ao criarem as sentenças, apenas duas duplas utilizaram mais do que três objetos, uma dessas duplas foi a dupla de meninos desafiada, citada anteriormente, no caso das meninas desafiadoras.

A incidência de erros em relação à sintaxe das sentenças foi pequena, apenas uma dupla não respeitou as instruções sobre letras maiúsculas e minúsculas, uma outra estruturou erroneamente a sentença que define a forma do elemento, escrevendo Pentagon(a,b,f). Questionados, eles alegaram economia de sentença, e acreditavam na necessidade de estabelecer a forma para todos os objetos utilizados em seu “mundo”, algo que não ocorreu com outras duplas.

Ocorrências durante o desafio:

Proposto pelo Grupo	Grupo Desafiado	Êxito
Azul II	Verde	Não
	Observações	
	São utilizados 3 objetos e todos têm tamanho e formato definido.	
	-“Começaram a ler as questões e colocaram as figuras no tabuleiro. Desistem. Passam a desenhar com lápis, numa folha, os formatos das figuras. Parece que acharam mais fácil usar o tabuleiro da folha. Decidem definir o tipo de formato das figuras do desafio da outra dupla apresentado para eles. Na folha apagam quando erram”. - “Passam a conferir o que fizeram na folha. Descobrem que erraram, pois uma questão é contraditória a outra. Refazem a leitura de todas as questões, fazem as alterações”.	
Rosa	Amarelo I	Sim
	Observações	
	São utilizados 3 objetos, e todos têm o formato e tamanho definidos, mesmo não sendo necessário.	
Azul I	Azul II	Sim
	Observações	
	São utilizados 3 objetos, e todos têm o formato e tamanho definidos, mesmo não sendo necessário.	
Amarelo I	Rosa	Sim
	Observações	
	São utilizados 4 objetos com 2 sem tamanho e formato definidos, o que não prejudica as sentenças do desafio.	
Vermelho	Amarelo II	Sim
	Observações	
	As sentenças do desafio não exigem formato para os objetos, mas todos são determinados como quadrados.	

Amarelo II	Vermelho	Sim
	Observações	
	São utilizados 3 objetos e todos têm tamanho e formato definidos, mesmo que não sendo necessários.	
Verde	Azul II	Sim
	Observações	
	São utilizados 5 objetos e todos têm tamanho e formato definidos. Marcas nas folha de atividades propõem dificuldades em estabelecer resposta final.	
Roxo I	Roxo II	Sim
	Observações	
	São utilizados 3 objetos e todos têm tamanho e formato definidos, onde as sentenças exigem apenas os formatos, deixando o tamanho dos objetos para livre escolha, caso queira, para o grupo.	
Roxo II	Roxo I	Sim
	Observações	
	São utilizados 3 objetos e todos têm tamanho e formato definidos, mesmo que isso não seja necessário.	

Quadro 4 Atividade I.3 Desafios dos mundos: Experimentação.

Na resolução do desafio a utilização do tabuleiro não foi comum, isto é flagrante ao se verificar o uso de borracha e as marcas deixadas na folha de atividades. Apenas uma dupla não teve êxito no desafio, deixando de verificar uma sentença *Between(a,c,b)* escrita pelos desafiados. Essa dupla já havia cometido um erro no exercício 2 na sentença 5, que também envolve o uso do comando, expressão, *Between*.

O desafio exibido a seguir reforça uma leitura parcial das sentenças pela dupla desafiada, e o interesse dos desafiadores em dificultar a solução do desafio.

Data: 27/04/2007 GRUPO Verde DESAFIADO Cezar II

Desafie seu oponente escrevendo cinco sentenças para que ele construa seu mundo.

1. Between(d, a, f)
2. Same Col(a, b)
3. Smaller(e, f)
4. Pentagon(b)
5. Between(b, a, c)

Figura 7 - Atividade 1.3 proposta por um grupo

Na digitalização da folha de resposta, não ficaram muito visíveis as marcas deixadas pela dupla ao apagarem na quarta coluna, onde se encontra o triângulo *d*, e se encontravam um pentágono *b* e um triângulo *c*, provavelmente equívoco provocado pela última sentença do desafio, *Between(b,a,c)*.

Das condições gerais das tarefas deste primeiro encontro, os observadores estavam dirigindo sua atenção às falas e ações dos alunos, anotando tempo de duração de cada atividade do encontro.

A facilidade com que os alunos realizaram suas atividades e a motivação gerada pela troca de atividades entre as duplas para conferência de respostas, promoveu alterações na proposta do encontro seguinte. Mantivemos as conferências de atividades

pelos alunos, aumentamos o grau de dificuldade nas sentenças da atividade de análise de sentenças, e ampliamos a quantidade de sentenças para o desafio dos mundos.

2.4.1.3 Análise a Posteriori da Atividade I - Reconhecimento

A atividade de reconhecimento correspondeu as nossas expectativas, possibilitou a apresentação da proposta da oficina como um todo, do material, do aplicador e principalmente, um ambiente estimulante e muito favorável à construção de conhecimento, onde os participantes, adolescentes do ensino médio, puderam ter um primeiro contato com um conhecimento prejulgado como chato e difícil.

A troca das atividades entre as duplas formadas, prevista apenas para o exercício 3, o desafio, ficou estabelecido para cada exercício, por causa na boa repercussão dessa prática. A alteração está de acordo com a proposta metodológica adotada, que entre os encontros, a análise posteriori pode sugerir alterações em um próximo encontro, desde que não descaracterize o objetivo da pesquisa.

A manifestação dos alunos sobre a possibilidade ou não de vários mundos para atender as sentenças da atividade I.2, possibilitou um diálogo sobre necessário e suficiente no âmbito dos conceitos matemáticos. O exemplo proposto foi em relação aos ângulos retos para os conceitos de retângulo e quadrado.

Acreditamos que a atividade *Desafio dos Mundos* forneceu indícios de mobilização de pensamentos, utilizando Piaget (1975), do possível real, concreto e o possível lógico. O grupo azul I preocupado em determinar forma para seu objetos, descrevendo seu mundo a partir do real, propõe, erroneamente, a sentença $Pentagon(a,b,f)$, enquanto que o grupo rosa, ao propor um mundo que atenda as sentenças do grupo amarelo I, não se preocupa em definir tamanho e forma para os objetos f e b , pois isto não é necessário levando em conta as sentenças propostas no desafio. Ou seja, o grupo azul I pretende controlar o possível concreto em seu mundo, enquanto o grupo rosa sente-se com liberdade para construir um mundo que atenda ao desafio e não determina certas características não necessárias. Como pode ser confirmado na folha de resposta do grupo rosa.

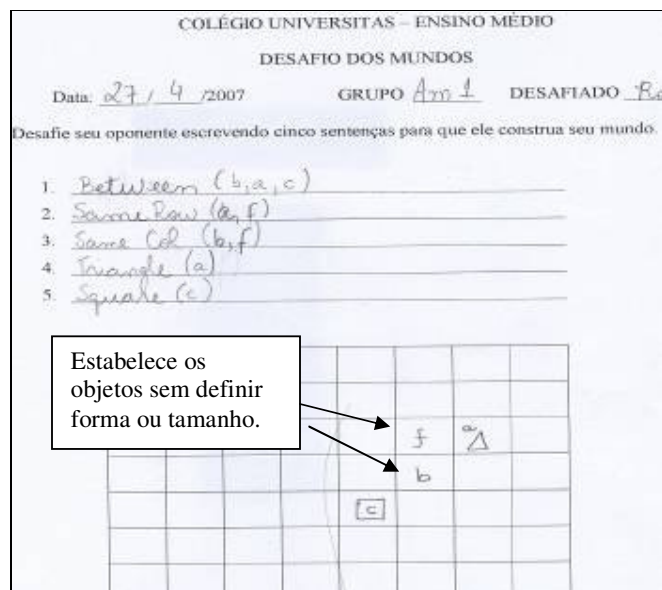


Figura 8 – Atividade I.3 apresentada por um grupo

2.4.2 Atividade II – Negação e Conjunção

A atividade em geral tem por finalidades, a apresentação da maneira de se negar uma sentença, no sentido da lógica clássica, que difere da maneira coloquial, na qual negar a declaração que a é pequeno (small) e triângulo (triangle), não possibilita afirmar que a é grande (large) e quadrado (square), por exemplo. A apresentação, também, do conectivo lógico e, juntamente com a maneira de como fazer juízo de sentenças com a utilização desse conectivo.

Na folha de atividade foi acrescentado um local para identificação da dupla que conferiu as respostas de outro grupo, visto que esta prática será mantida para os próximos encontros, caso tenhamos tempo suficiente para essa prática.

2.4.2.1 Análise a Priori da Atividade II

Atividade II.1 – Análise de sentenças.

Procura-se, como na atividade I.1 do encontro anterior, familiarizar os participantes com os novos símbolos nas sentenças, em que $\sim$ (til) significa a negação da sentença ou proposição, dependendo do uso parênteses, e $\wedge$ significa a conjunção (conectivo e). As sentenças utilizam esses símbolos, em virtude da programação original do *applet*²⁵ que será utilizado posteriormente.

²⁵

Trecho de programação em linguagem [Java](#) inserido em documentos [HTML](#)

O uso dos parênteses nas sentenças serve para ampliar as possibilidades do uso da negação e da conjunção, além de serem uma proposta de desequilíbrio, visando debate e a geração de conhecimento pelo aluno, pois o uso de parênteses permite ampliar o grau de dificuldade de se estabelecer juízo em relação à sentença alterando escopo dos conectivos lógicos.

Segue abaixo a proposta da atividade.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein

								1	$\sim \text{Large}(f)$	
								2	$\sim \text{Medium}(b)$	
								3	$\sim \text{BackOf}(f,a)$	
								4	$\sim \text{Between}(c,c,c)$	
								5	$\sim \text{SameRow}(d,e)$	
								6	$\sim \text{Square}(b)$	
								7	$\sim(\sim \text{Triangle}(e))$	
								8	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Larger}(f)$	
								9	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Small}(f)$	
								10	$\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Larger}(f)$	
								11	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge \text{Larger}(f)$	
								12	$\sim(\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Larger}(f))$	
								13	$\sim(\sim \text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Small}(f))$	
								14	$\sim(\sim \text{Triangle}(c) \wedge \text{Pentagon}(e))$	
								15	$\sim(\text{BackOf}(a,f) \wedge \text{LeftOf}(e,d))$	

Figura 9. Atividade II. 1 – Análise de sentenças

As sentenças de 1 a 6, são para apresentar o símbolo de negação e assimilar análise das sentenças com sua utilização. A 3ª sentença, $\sim \text{BackOf}(f,a)$, foi alterada verbalmente para $\sim \text{LeftOf}(f,a)$. O applet não reconhece seu uso e não se encontra na folha de “tradução” das sentenças.

A 7ª sentença propõe a análise de uma sentença que se caracteriza pela negação-da-negação. Pode surgir uma discussão sobre algumas frases comuns, como “Não tem ninguém em casa”, onde a palavra ninguém já carrega uma proposta de negação em relação à presença de alguém.

As sentenças 8 e 9, apresentam de forma simples o uso do conectivo $\wedge$, mantendo uma proposição e alterando a outra, que se referem a uma mesma característica do objeto.

As sentenças 8, 9, 10 e 11, quando analisadas conjuntamente, reforçam uma característica muito importante presente nas conjunções, que é a necessidade do critério de verdade para todas as proposições envolvidas na sentença, para que a sentença seja

classificada como verdadeira (V), e basta uma proposição ser falsa (F) para tornar a sentença falsa.

Nas sentenças seguintes, com o uso dos parênteses, o grau de dificuldade é elevado, exigindo maior concentração na leitura das sentenças, verificando o *é* que está sendo negado, ou seja, verificar o escopo da negação. Esta característica fica evidente ao comparar as sentenças 10 e 12, em que a 12ª sentença é a negação da 10ª.

A negação utilizada na sentença 15 procura negar apenas a primeira proposição, reforçando a necessidade de uma leitura mais atenta quanto ao uso dos parênteses.

Com as sentenças 10, 11 e 12 espera-se responder a provável dúvida em relação a utilização da negação da questão 12. Se pode ou não ser utilizada a propriedade distributiva da multiplicação como base de interpretação da sentença que, se utilizada, teríamos as sentenças 12ª e 11ª com mesmo valor de verdade.

Atividade II. 2 – Construção de um mundo.

Apresenta um grau de dificuldade maior que a proposta desta atividade no encontro anterior, pois as sentenças apresentam sempre mais do que um objeto.

Segue abaixo a proposta do exercício.

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\sim(\sim\text{Triangle}(a) \wedge \text{Pentagon}(a))$								
2	$\text{Triangle}(d) \wedge \text{Triangle}(a)$								
3	$\text{Pentagon}(f) \wedge \text{SameCol}(f,d)$								
4	$\sim(\text{Larger}(d) \wedge \text{Larger}(e))$								
5	$\text{Between}(d,e,f) \wedge \sim\text{Smaller}(a,f)$								
6	$\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{LeftOf}(d,e)$								
7	$\sim(\text{SameCol}(d,f) \wedge \sim(\text{Triangle}(d)) \wedge \sim(\text{Pentagon}(d)))$								

Figura 10 – Atividade II.2 – Construção do mundo

Ao tratar dos objetivos das sentenças, destacamos análise de caráter individual e/ou relações entre sentenças, quando isso ocorrer.

As duas primeiras sentenças foram dispostas para promover o debate sobre a forma do elemento *a*, pois na primeira sentença fica estabelecida a impossibilidade de ser pentágono, porém não impossibilita de *a* ser quadrado. Na segunda sentença se estabelece *a* e *d* como triângulos.

A sentença 3 estabelece a forma de f e a posição de f em relação a d , mesma coluna.

A sentença 4 é utilizada para estabelecer que e e d não podem ser ambos grandes.

A sentença 5 estabelece a posição do e , que deve estar na mesma coluna de d e f , estando d entre e e f , ver 3ª sentença, e a impossibilidade de a ser menor que f , destacando que não há impedimento de serem do mesmo tamanho.

A 6ª sentença fica por estabelecer a posição de b em relação a e , uma vez que a primeira premissa não acrescenta nenhuma informação sobre o mundo proposto, pois na lógica em questão, o elemento a ter o mesmo tamanho que ele mesmo, é verdade em qualquer mundo.

A última sentença tem a finalidade de reforçar a observação dos parênteses e o escopo da negação, pois a posição de d e f e a forma de d já haviam sido estipuladas nas sentenças anteriores.

Atividade II – 3 – “Desafio dos Mundos”.

A atividade que possibilita as duplas criarem seu próprio mundo para desafiar outra dupla não sofre alterações nos diferentes encontros, porém, para que os alunos se sentissem participativos, mesmo que modestamente, na elaboração das atividades, dispusemos a possibilidade deles escreverem oito sentenças, mas exigindo pelo menos cinco para a criação de seu mundo.

2.4.2.2 Experimentação da Atividade II

Encontro	Data	Atividades programadas	
2º Encontro	04/05/2007	Atividade II – Negação e Conjunção	II.1 – análise de sentenças
			II.2 – construção de um mundo
			II.3 – desafio dos mundos

A atividade teve seu início e término nos horários previstos. Tivemos a formação de 9 grupos (duplas), contando com 9 meninas e 9 meninos. Mantivemos os grupos rosa e azul II com os observadores. Iniciamos por estes grupos fatos ocorridos na experimentação das atividades.

Atividade II.1.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	4 min.	Não
Observações		

	- “Itens 13, 14 e 15: Discussão entre os dois alunos a respeito da colocação e significado do conectivo <u>e</u> ”. O grupo errou as sentenças 12 e 13. Como a dupla acertou a 10ª sentença, provavelmente não perceberam que a 12ª se tratava da negação da 10ª.	
Rosa	5 min.	Não
	Observações	
	- “Na atividade 1, questão 6, houve uma hesitação da dupla.”	

Quadro 5 – Atividade II.1 – Análise de sentenças: Experimentação

A incidência de erros foi pequena, além das duas sentenças citadas acima, apenas a última sentença provocou o erro do grupo roxo II. As ‘marcas’ deixadas na folha de atividade reforçam análise na determinação do escopo da negação.

Atividade II.2.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	15 min.	Sim
	Observações	
	- “Apresentam mais dificuldade na interpretação das sentenças”. - “Os alunos ficam em dúvida se está ocorrendo erro na sentença 7.” - “Não conseguem concluir a construção do mundo, as sentenças parecem ser contraditórias”.	
Rosa	20 min.	Não
	Observações	
	- “Na atividade 2 o último item provocou muita discussão, uma aluna disse que esse item é demorado e a outra disse que é complicado. No tabuleiro a dupla disse que pensou certo, mas que desenhou errado.” A última parte do comentário trata-se da justificativa para o erro presente em sua folha de atividade conferida por uma dupla ‘rival’.	

Quadro 6 – Atividade II. 2 – Construção do mundo - Experimentação

A partir das análises das folhas de atividades, percebemos que a incidência de erros no exercício aumentou, como previsto, em relação atividade do encontro anterior, a de reconhecimento.

Três grupos não tiveram êxito no desafio, sempre com apenas uma sentença não sendo atendida. A 3ª sentença provocou erro em uma dupla que não observou a mesma coluna de f e d . Uma dupla errou a 5ª sentença por estabelecer a menor que f , provavelmente por não observar a negação na proposição, e por último, o grupo rosa não atendeu a 6ª sentença, citada pelo observador, que não posicionou d a esquerda de e .

A última sentença, que tanto motivou debate, não provocou erro em dupla alguma, mas possui maior quantidade de marcas nas folhas de resposta, que em sua maioria procura reforçar a abertura e fechamento dos parênteses para determinar escopo da negação.

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

Atividade II – Negação e Conjunção

Data: 04/05/2007 GRUPO Am 1

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>$\sim \text{Large}(f)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>2</td><td>$\sim \text{Medium}(b)$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>3</td><td>$\sim \text{LeftOf}(f,a)$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>4</td><td>$\sim \text{Between}(c,c,c)$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>5</td><td>$\sim \text{SameRow}(d,e)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>6</td><td>$\sim \text{Square}(b)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>7</td><td>$\sim \text{Triangle}(c)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>8</td><td>$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>9</td><td>$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Small}(f)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>10</td><td>$\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>11</td><td>$\sim \text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$</td><td>F</td></tr> <tr><td>12</td><td>$\sim (\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f))$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>13</td><td>$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Small}(f))$</td><td>✓</td></tr> <tr><td>14</td><td>$\sim (\sim \text{Triangle}(c) \wedge \text{Pentagon}(c))$</td><td>F</td></tr> <tr><td>15</td><td>$\sim (\text{LeftOf}(c,d) \wedge \text{LeftOf}(d,e))$</td><td>✓</td></tr> </table>	1	$\sim \text{Large}(f)$	F	2	$\sim \text{Medium}(b)$	✓	3	$\sim \text{LeftOf}(f,a)$	✓	4	$\sim \text{Between}(c,c,c)$	✓	5	$\sim \text{SameRow}(d,e)$	F	6	$\sim \text{Square}(b)$	F	7	$\sim \text{Triangle}(c)$	F	8	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	✓	9	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Small}(f)$	F	10	$\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f)$	F	11	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	F	12	$\sim (\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f))$	✓	13	$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Small}(f))$	✓	14	$\sim (\sim \text{Triangle}(c) \wedge \text{Pentagon}(c))$	F	15	$\sim (\text{LeftOf}(c,d) \wedge \text{LeftOf}(d,e))$	✓
1	$\sim \text{Large}(f)$	F																																												
2	$\sim \text{Medium}(b)$	✓																																												
3	$\sim \text{LeftOf}(f,a)$	✓																																												
4	$\sim \text{Between}(c,c,c)$	✓																																												
5	$\sim \text{SameRow}(d,e)$	F																																												
6	$\sim \text{Square}(b)$	F																																												
7	$\sim \text{Triangle}(c)$	F																																												
8	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	✓																																												
9	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Small}(f)$	F																																												
10	$\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f)$	F																																												
11	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	F																																												
12	$\sim (\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f))$	✓																																												
13	$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Small}(f))$	✓																																												
14	$\sim (\sim \text{Triangle}(c) \wedge \text{Pentagon}(c))$	F																																												
15	$\sim (\text{LeftOf}(c,d) \wedge \text{LeftOf}(d,e))$	✓																																												

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

F F	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>$\sim \text{Triangle}(a) \wedge \text{Pentagon}(a)$</td></tr> <tr><td>2</td><td>$\text{Triangle}(d) \wedge \text{Triangle}(a)$</td></tr> <tr><td>3</td><td>$\text{Pentagon}(f) \wedge \text{SameCol}(f,d)$</td></tr> <tr><td>4</td><td>$\sim (\text{Large}(d) \wedge \text{Large}(e))$</td></tr> <tr><td>5</td><td>$\text{Between}(d,e,f) \wedge \sim \text{Smaller}(a,f)$</td></tr> <tr><td>6</td><td>$\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{LeftOf}(b,e)$</td></tr> <tr><td>7</td><td>$\sim (\text{SameCol}(d,f) \wedge (\text{Triangle}(d) \wedge \text{Pentagon}(d)))$</td></tr> </table>	1	$\sim \text{Triangle}(a) \wedge \text{Pentagon}(a)$	2	$\text{Triangle}(d) \wedge \text{Triangle}(a)$	3	$\text{Pentagon}(f) \wedge \text{SameCol}(f,d)$	4	$\sim (\text{Large}(d) \wedge \text{Large}(e))$	5	$\text{Between}(d,e,f) \wedge \sim \text{Smaller}(a,f)$	6	$\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{LeftOf}(b,e)$	7	$\sim (\text{SameCol}(d,f) \wedge (\text{Triangle}(d) \wedge \text{Pentagon}(d)))$
1	$\sim \text{Triangle}(a) \wedge \text{Pentagon}(a)$														
2	$\text{Triangle}(d) \wedge \text{Triangle}(a)$														
3	$\text{Pentagon}(f) \wedge \text{SameCol}(f,d)$														
4	$\sim (\text{Large}(d) \wedge \text{Large}(e))$														
5	$\text{Between}(d,e,f) \wedge \sim \text{Smaller}(a,f)$														
6	$\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{LeftOf}(b,e)$														
7	$\sim (\text{SameCol}(d,f) \wedge (\text{Triangle}(d) \wedge \text{Pentagon}(d)))$														

Conferido pelo grupo:

Rosa

a - Δ médio

b - $\square$ gde.

d - Δ gde.

e - Δ pequeno

f - $\square$ médio

Figura 11 - Atividade II-2 resolvida por um grupo

Na figura acima, folha de atividades do grupo amarelo I, se destaca a alteração da 3ª sentença da primeira atividade, a preocupação com o escopo da negação na 7ª sentença da atividade II.2 e as definições de forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo.

Atividade II. 3- Desafio dos mundos.

Tivemos quatro duplas que utilizaram as oito sentenças e apenas duas duplas cinco sentenças. As outras duplas se utilizaram de seis e sete sentenças cada uma.

A tabela abaixo faz referência aos dois momentos da atividade observada, a criação das sentenças e a resolução do desafio.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	30 min.	Não
	Observações	
	- “Usaram uma folha como rascunho e montaram um tabuleiro na folha.”	
Rosa	15 min.	Sim
	Observações	
	- “A dupla demorou muito para iniciar (1ª sentença), mas depois que se apropriaram do processo de criação de sentenças fizeram as outras em menos tempo”.	
Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Azul II	5 min.	Não
	Observações	
	O observador da dupla Azul II não fez comentários relevantes.	
Resolução do desafio		
Rosa	10 min.	Sim
	Observações	
	A resolução dos desafios gerou alguns erros e grande movimentação. O desafio da dupla Rosa, que consta de 8 sentenças.	
	- “A dupla descobriu um erro e chamou um elemento do outro grupo para discutir o erro. O elemento da outra dupla concordou que tinha cometido um erro”.	
- “A atividade em geral despertou muito interesse dos alunos. As interações ao longo do encontro foram intensas entre os componentes do grupo”.		

Quadro 7 - Atividade II. 3 Desafio dos mundos - Experimentação

Segue observações da experimentação de todos os grupos a partir das folhas de atividades. Nas observações encontra-se descrição das sentenças propostas e/ou do mundo proposto, dependendo da ocorrência.

Proposto pelo Grupo	Grupo Desafiado	Êxito
Vermelho	Roxo I	Sim
	Observações	
	Nas sentenças, o grupo vermelho propôs objetos identificados como <i>e</i> e outro como <i>l</i> , que na escrita cursiva gera problemas para diferenciá-los. Mesmo assim o grupo roxo I criou um mundo a partir das 8 sentenças, atribuindo E e L para indicar os objetos no mundo.	
Rosa	Amarelo I	Sim
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo.	
Azul I	Amarelo II	Sim
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo.	

Azul II	Verde	Não
	Observações	
	O grupo verde teve dificuldades com o tempo para realizar a atividade, não concluindo.	
Amarelo I	Rosa	Sim
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo.	
Amarelo II	Roxo II	Não
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo. O grupo não ficou atento para a sentença $\sim(\sim\text{SameCol}(e,b)\wedge\sim\text{LeftOf}(d,e))$, que no mundo criado, as proposições são verdadeiras, em função das negações delas, e a negação externa a torna falsa.	
Verde	Azul I	Não
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo. Não atendeu a duas sentenças, $\sim(\text{Smaller}(f,b) \wedge \sim\text{Large}(e))$, inserindo f pequeno, b médio e e médio, tornando a conjunção verdadeira e sua negação falsa; e a sentença $\sim(\sim(\text{Pentagon}(f) \wedge \text{Square}(b)))$, que demonstra problemas com escopo da negação.	
Roxo I	Vermelho	Não
	Observações	
	Atribuiu forma e tamanho para todos os objetos inseridos no mundo. A sentença que ocasionou o fracasso no desafio está com problemas em sua formulação, porém fica claro a intenção dela, a sentença é $\text{SameCol}(f,b) \wedge \sim\text{Large}(d,f)$. Onde a segunda proposição pretende afirmar que d e f são do mesmo tamanho ou f é maior que d , em função da negação.	
Roxo II	Azul II	Sim
	Observações	
	Todos os objetos tiveram tamanhos e formas definidas no mundo proposto.	

Quadro 8 - Atividade II. 3 – Desafio dos mundos - Experimentação

2.4.2.3 Análise a Posteriori da Atividade II

O conjunto das diferentes formas de coletarmos dados, folha de resposta, audiovisual e observadores se mostraram redundantes para a análise *a posteriori* deste encontro.

A característica da dupla negação não gerou o debate esperado, porém o uso dos parênteses, a associação e a propriedade distributiva corresponderam às nossas expectativas, mobilizando conhecimentos estudados em matemática em nossa proposta.

O uso do tabuleiro pela maioria dos grupos na construção do mundo e o não uso nas outras atividades, leva-nos a refletir sobre a necessidade do ‘concreto’ para essa atividade, pois com essa estratégia não ocorre a criação de mundo logicamente impossível, $\text{Smaller}(a,f) \wedge \text{SameSize}(a,b) \wedge \text{Smaller}(f,b)$, por exemplo. Desde que haja domínio na linguagem que está sendo utilizada.

Acreditamos que houve a mobilização de pensamentos com estrutura lógica clássica, tanto nas propostas de negação quanto nas de conjunção, sendo estes colocados em comparação ao pensamento cotidiano. Por exemplo, ao negar que d e e são grandes, $\sim(\text{Large}(d) \wedge \text{Large}(e))$, não impossibilita d ou e ser grande, o que não pode ocorrer é termos ambos grandes.

A dificuldade dos alunos em trabalhar com a negação, escopo e compreensão da sentença, parece estimular o uso delas nas sentenças do desafio, pois as negações estão presentes em várias sentenças propostas pelos alunos no desafio dos mundos, visto que dificultar o desafio tornou-se característica do exercício.

2.4.3 Atividade III – Disjunção

A atividade em geral tem por finalidades, a apresentação do conectivo lógico **ou**, e como fazer juízo de sentenças com a utilização desse conectivo. A disjunção no sentido da lógica clássica se difere da maneira coloquial. O fato de comprar um gato e um cachorro, após ter afirmado 'que comprarei um gato ou um cachorro' não caracteriza uma incoerência ou torna a pessoa ‘mentirosa’.

Estamos falando da diferença entre o **ou** exclusivo, de uso mais comum, e **ou** inclusivo, utilizado na lógica clássica.

Em Latim, para não haver qualquer confusão entre os usos do conectivo ou, havia duas palavras para representá-lo: *aut* significava o *ou exclusivo* (*ou isso, ou aquilo*), enquanto *vel* significava o *ou não-exclusivo*. (Na linguagem da Lógica Formal, o símbolo $\vee$, usado para representar o *ou*, é a inicial da palavra *vel*). (MACHADO; CUNHA, 2005, p.55)

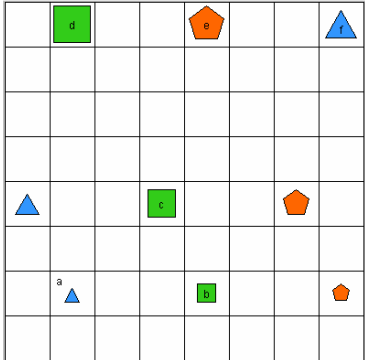
Na lógica clássica basta que uma proposição da disjunção seja verdadeira para que uma sentença disjuntiva seja verdadeira. O que nos permite explorar algumas situações, como escolher qual das proposições pode ser verdadeira em casos de declarações $A \vee B$, se optar por ter uma falsa, porém em casos como $\sim(A \vee B)$ ambas devem ser falsas para que a declaração seja verdadeira.

2.4.3.1 Análise a Priori da Atividade III

Atividade III.1 – Análise de sentenças.

Utilizaremos a atividade para apresentar o símbolo $\vee$ para a disjunção e apropriação das propriedades deste conectivo.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.



1	Triangle(f) $\vee$ Large(f)	
2	Triangle(f) $\vee$ Small(f)	
3	Triangle(f) $\vee$ $\sim$ Large(f)	
4	$\sim$ Triangle(a) $\vee$ $\sim$ Triangle(b)	
5	Pentagon(c) $\vee$ Smaller(c,b)	
6	$\sim(\sim$ Triangle(f) $\vee$ $\sim$ Small(f))	
7	$\sim(\sim$ Triangle(c) $\vee$ Pentagon(e))	
8	SameRow(c,a) $\vee$ Between(c,a,f)	
9	LeftOf(a,b) $\vee$ Smaller(e,d)	
10	Between(d,e,f) $\vee$ Medium(b)	
11	SameCol(a,d) $\vee$ SameRow(a,d) $\vee$ $\sim$ Square(e)	

Figura 12- Atividade III - 1

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Apresenta situação em que as proposições são verdadeiras, já apresentando a disjunção com proposta includente.
- 2) Apresenta situação em que uma das proposições é verdadeira, mantendo a sentença como verdadeira.
- 3) Utiliza a negação da segunda proposição da sentença 1, não alterando o valor de verdade da sentença inteira.
- 4) Utilizada para promover uma questão sobre a negação e a conjunção
- 5) Apresenta situação em que as proposições envolvidas em uma disjunção são falsas, tornando a sentença falsa.
- 6) Procura incentivar a questão da distributiva da negação, e utilizando a 2ª sentença, como parâmetro para se estabelecer uma resposta. Pois se a distributiva valer, teríamos a 2ª sentença e $\vee$ como resposta, o que não ocorre de fato.
- 7) Reforça a verificação do escopo da negação.
- 8) Utilizada para relembrar proposições que se tratam da posição dos objetos do mundo.

- 9) Apresenta novamente sentença com uma proposição falsa, mas com outra verdadeira.
- 10) Reforça a interpretação dos parâmetros do 'comando' Between, em que se lê “ d está entre e e f ”.
- 11) Apresenta uma sentença formada por três proposições e duas disjunções, e duas delas são mutuamente excludentes. Caso a e d estejam na mesma coluna exclui a possibilidade de estarem na mesma linha.

Atividade III. 2 – Construção de um mundo

Os objetivos da atividade no geral é estimular uso do encadeamento das sentenças, reforçando apropriação da disjunção no âmbito da lógica clássica.

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\sim(\sim\text{Triangle}(a) \vee \text{Pentagon}(a))$								
2	$\text{Medium}(a) \vee \text{Smaller}(a,b)$								
3	$\text{Pentagon}(b) \vee \sim\text{SameCol}(c,b)$								
4	$\text{Large}(c) \vee \text{Large}(a) \vee \text{Small}(b)$								
5	$\text{Between}(a,c,b) \vee \text{Between}(a,a,a)$								
6	$\text{SameSize}(a,a) \vee \sim(\text{LettOf}(d,e) \vee \text{Small}(a))$								
7	$\sim(\text{SameCol}(c,b) \vee \sim(\text{SameRow}(a,c)))$								

Figura 13- Atividade III . 2 – Construção do mundo

Análise das sentenças na proposta da atividade.

- 1) Estabelecer que o objeto a é triângulo, pois não pode ser pentágono nem quadrado. Este fato surge a partir do escopo da negação externa, pois ambas as proposições nos parênteses devem ser falsas para tornar a disjunção falsa, e sua negação tornará a sentença verdadeira.
- 2) Estabelecer tamanho para o objeto a , tendo duas possibilidades ser médio ou pequeno. Sendo médio, a primeira proposição é verdadeira e há a possibilidade da segunda também ser, caso b seja grande. Sendo a pequeno, a segunda proposição será verdadeira, caso b não também seja pequeno. O objeto a só não pode ser grande, pois tornaria as duas proposições falsas.

- 3) Sugere o formato do objeto b como pentágono, mas não necessariamente, pois na 7ª sentença, os objetos c e b não podem estar na mesma coluna, logo a negação dessa proposição é verdadeira.
- 4) Sugere tamanho para os objetos c e b , dependendo da proposta seguida na 2ª sentença.
- 5) Estabelece posições relativas de a , c e b , pois a segunda proposição não pode ser verdadeira.
- 6) Não estabelece coisa alguma em relação ao mundo, pois a primeira proposição é verdadeira sempre na lógica clássica. A existência do objeto d fica a critério do aluno.
- 7) Reforça a análise do escopo da negação, fixando os elementos a e c , em uma mesma linha e inviabilizando c e b em mesma coluna.

Atividade III. 3 – Desafio dos Mundos.

Será solicitado aos alunos que utilizem apenas a disjunção e a negação em suas sentenças, evitando uso da conjunção, pois o uso dos dois conectivos poderia atrapalhar a assimilação do conectivo proposto no encontro. Além do que, o uso dos conectivos e negação em uma mesma sentença está previsto para o próximo encontro.

2.4.3.2 Experimentação da Atividade III

Esse encontro teve seu início e término nos horários previstos. Tivemos a formação de 9 grupos (duplas), contando com 9 meninas e 9 meninos.

Mantivemos observador no grupo Rosa, formado por duas meninas, e observamos o grupo vermelho, formado por dois meninos. O que não implica em problemas quanto a análise *a posteriori*, pois temos as folhas de atividades dos grupos.

O grupo observado anteriormente, Azul II, terá as atividades gravadas em vídeo.

Encontro	Data	Atividades programadas	
3º Encontro	11/05/2007	Atividade III - Disjunção	III.1 – análise de sentenças
			III.2 – construção de um mundo
			III.3 – desafio dos mundos

Atividade III.1

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	5 min.	Não
	Observações	
	- “A resolução foi rápida.”	
Rosa	3 min.	Não
	Observações	
	- “Na parte I não houve discussão. A atividade foi considerada fácil pelos elementos do grupo.”	

Quadro 9- Atividade III.1- Análise das sentenças: Experimentação

Ocorreu o total de 5 sentenças com algum tipo de erro, sendo que a 6ª sentença contribuiu com 4 e a 10ª com um erro. Não podemos afirmar que houve comparação entre as sentenças 2 e 6, conjuntamente a um suposto uso da distributiva, pois não temos pistas para análise dessa conjectura.

Atividade III.2

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	11 min.	Não
	Observações	
	- “A presença do símbolo ~ com os parênteses () causou dificuldades de interpretação, o que fez os dois alunos discutirem intensamente. Por várias vezes, escreveram e apagaram os símbolos V ou F.”	
Rosa	17 min.	Sim
	Observações	
	- “A parte II propiciou muitas interações entre os elementos do grupo. Os itens 1,5 e 7 foram os primeiros a serem resolvidos. A seguir fizeram os itens 2, 3,4 e 6. Finalmente usaram o tabuleiro. Conferiram a produção da dupla Roxo 2 e detectaram erros. Comunicaram às duplas os erros que foram aceitos. Houve muitas interações nessa conferência.”	

Quadro 10- Atividade III. 2 – Construção do mundo: Experimentação

Encontramos várias 'marcas' de V ou F para as proposições nas folhas de atividades.

Nos erros mais comuns, destacamos a não presença dos objetos d e e , presentes nas sentenças 6 e 7, problemas com a proposição que nega a posição de a e c em uma mesma linha, que deve ser falsa, estabelecendo então que eles devem necessariamente

estar em uma mesma linha. Problemas com situação do tipo $\sim(A \vee B)$, em que as proposições devem ser ambas F.

O grupo Amarelo I não estabelece características para o objeto caso estas não sejam necessárias para a determinação do mundo proposto. Define a como triângulo médio, b como pentágono grande, c como grande, deixando d e e simplesmente como objetos em suas posições, sem características de forma e tamanho.

Todos os grupos definiram b como pentágono e nenhum grupo colocou os objetos c e b em uma mesma coluna.

Atividade III. 3.

Tivemos quatro duplas que utilizaram cinco sentenças, duas com seis sentenças, uma com sete e duas criaram oito sentenças.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	10 min.	Sim
	Observações	
	- “Comentário dos alunos: Esta aula é bem mais fácil que o trabalho da aula passada”.	
	- “Na construção das sentenças optaram em usar o tabuleiro com as figuras de borracha. À medida que foram construindo as sentenças alteravam as posições das figuras no tabuleiro”.	
Rosa	- “Os parênteses foram mais difíceis de se trabalhar do que o símbolo $\sim$, na opinião dos dois alunos”.	
	22 min.	Sim
	Observações	
	- “Na parte 3, começaram o desafio pelo tabuleiro. O pesquisador pede para que se utilize somente o OU e a negação no desafio. Houve muita discussão entre os componentes do grupo para a elaboração do desafio”.	

Quadro 11- Atividade III.3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Demos destaque na quantidade de sentenças criadas, para orientar-nos em relação a agilidade na produção, se há proposições necessariamente falsas, pois no caso da disjunção é algo que indicaria controle sobre as possibilidades de seu mundo e certa mobilização de raciocínio lógico formal. O escopo da negação auxilia-nos a verificar a complexidade da estrutura proposta pelo aluno, que pode servir de indícios do domínio desse operador lógico.

Recordemos que para a sentença com disjunção ser verdadeira basta uma proposição ser verdadeira. Quando se utiliza a negação devemos verificar qual escopo, pois em caso $\sim(A \vee B)$ as proposições devem ser falsas.

O grupo vermelho apresenta sentenças com algumas características, vamos reproduzir com a ordem proposta: 1. $\text{Triangle}(p) \vee \text{Triangle}(b)$ permite ser as duas proposições verdadeiras, mas temos a sentença 3. $\sim\text{Triangle}(p) \vee \sim\text{Triangle}(b)$, que inviabiliza termos os objetos b e p triângulos. Ocorre então, que nas duas sentenças temos obrigatoriamente uma proposição falsa (F).

Grupo amarelo II, a sentença 3. $\text{SameCol}(a,d) \vee \text{SameCol}(a,c)$ tem a primeira proposição falsa, pois na sentença seguinte 4. $\sim(\text{SameCol}(a,d) \vee \sim\text{Large}(b))$, não podemos ter os objetos a e d em uma mesma coluna. A figura a seguir é a proposta do grupo amarelo II.

DESAFIO DOS MUNDOS	
Data: <u>11 / 05 / 2007</u>	GRUPO <u>AMARELO II</u> DESAFIADO <u>VERMELHO</u>
Desafie seu oponente escrevendo, pelo menos, cinco sentenças para que ele construa seu mundo.	
1. $\overset{F}{\sim}(\overset{F}{\sim}\text{Triangle}(d) \vee \text{Smaller}(c,d))$ ✓ 2. $\text{Pentagon}(d) \vee \text{Between}(b,d,c)$ ✓ 3. $\text{SameCol}(a,d) \vee \text{SameCol}(a,c)$ ✓ 4. $\sim(\text{SameCol}(d,a) \vee \sim\text{Large}(b))$ ✓ 5. $\sim(\text{Pentagon}(b) \vee \sim\text{Square}(c))$ ✓ 6. _____ 7. _____ 8. _____	

Figura 14 - Atividade III. 3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Analizamos a atividade sob dois momentos distintos, a criação das sentenças e a criação do mundo, pois a criação das sentenças, a partir desse encontro, requer uma atenção especial em virtude do aumento da complexidade de uso dos conectivos lógicos.

O quadro a seguir mostra o retorno das sentenças criadas pelos alunos:

Grupo	Quantidade	Com proposições necessariamente falsas	Negação	Escopo da negação
Vermelho	7	2	2	$\sim A \vee \sim B$; $\sim(\sim A \vee \sim B)$
Rosa	8	2	4	$\sim(\sim A \vee B)$; $\sim(A \vee B)$; $\sim(A \vee \sim B)$; $A \vee \sim B$

Azul I	6	0	4	$\sim(A \vee B \vee \sim C)$; $\sim A \vee \sim B$; $A \vee \sim B$; $\sim(A \vee B \vee C)$
Azul II	5	0	2	$\sim(\sim A \vee B)$; $\sim(A \vee B)$
Amarelo I	8	1	6	$\sim(\sim A \vee B)$; $A \vee \sim B$; $\sim(A \vee \sim B)$; $\sim(A \vee \sim B)$; $\sim(A \vee B)$; $\sim A \vee B$; $A \vee \sim B$
Amarelo II	5	1	3	$\sim(\sim A \vee B)$; $\sim(A \vee \sim B)$; $\sim(A \vee \sim B)$
Roxo I	5	0	2	$\sim(A \vee B)$; $\sim(\sim A \vee B)$
Roxo II	5	0	4	$\sim A \vee \sim B$; $\sim A \vee \sim B$; $A \vee \sim B$; $A \vee \sim B$
Verde	6	0	5	$\sim(A \vee B)$; $A \vee \sim B \vee C$; $\sim A \vee B$; $\sim(\sim A \vee B)$; $\sim A \vee B$

Quadro 12- Atividade III.3 - Desafio dos mundos: Experimentação

Erros de escrita das sentenças ocorreram apenas no grupo Roxo I, Small(x,a) e Large(e,b), querendo dizer, provavelmente, Smaller(x,a) e Smaller(b,e).

Quanto a mundos impossíveis, isso não ocorreu.

Análise da resolução dos desafios por grupo.

Proposto pelo Grupo	Grupo Desafiado	Êxito
Vermelho	Amarelo II	Sim
	Observações	
	São utilizados 4 objetos e todos tem tamanho e formato definido. -“O grupo vermelho, inicialmente, achou que será rápido. Escreveram letras sobre as figuras de borracha, começaram a usar o tabuleiro e releram as sentenças. Ao reler as sentenças, apagaram e reescreveram as letras sobre as figura de borracha. Começaram a preencher o quadro na folha. Gostaram mais desta aula que a da semana passada.”	
Rosa	Amarelo I	Sim
	Observações	
	São utilizados 4 objetos, e 1 não tem o formato definido.	
Azul I	Roxo I	Não
	Observações	
	Não atendeu a sentença $\sim(\text{Square}(a) \vee \text{Large}(b) \vee \sim \text{LeftOf}(b,a))$, na última proposição, colocando a à esquerda de b , tornando a proposição verdadeira, e sua negação torna a sentença falsa.	

Azul II	Verde	Sim
	Observações	
	São utilizados 5 objetos e todos tem tamanho e formato definido.	
Amarelo I	Rosa	Não
	Observações	
	O desafio propõe 6 objetos, porém o grupo só utiliza 5, definindo tamanho e forma de 4 deles. A primeira sentença ($\sim \text{Between}(b,e,f) \vee \text{Smaller}(e,c)$) não é atendida, pois o objeto b não está entre e e f , tornando a proposição $\sim \text{Between}(b,e,f)$ e a sentença verdadeira, mas a negação externa torna a sentença falsa.	
Amarelo II	Vermelho	Sim
	Observações	
	São utilizados 4 objetos e todos tem tamanho e formato definido.	
Verde	Roxo II	Sim
	Observações	
	São utilizados 5 objetos e todos tem tamanho e formato definido.	
Roxo I	Azul I	Sim
	Observações	
	São utilizados 6 objetos e todos tem tamanho e formato definido. Os erros que ocorrem na criação das sentenças $\text{Small}(x,a) \vee \text{Between}(c,a,d)$ e $\sim(\sim(\text{SameCol}(d,e) \vee \text{Large}(e,b)))$ não interferem e são interpretadas de maneira que x é menor que a e b é menor que e .	
Roxo II	Azul II	Não
	Observações	
	São utilizados 3 objetos e todos tem tamanho e formato definido. Os erros aconteceram na 2ª e 3ª sentenças, o escopo da negação não foi atendida, pois nas sentenças as negações negam cada proposição individualmente, e não a sentença toda. As sentenças são; $\sim((\text{LeftOf}(a,c)) \vee \sim(\text{LeftOf}(c,b)))$; $\sim((\text{SameCol}(c,b)) \vee \sim(\text{Small}(a)))$	

Quadro 13- Atividade III.3 – Desafio dos mundos: Experimentação

2.4.3.3 Análise a Posteriori da Atividade III.

Há certa tendência em optar por estabelecer proposição verdadeira, quando é possível a opção por falsa, nas atividades II e III. Afirmamos isto em virtude das análises dos mundos criados a partir de sentenças propostas pelo pesquisador, atividade III.2 e pelos alunos, atividade III.3. Na 3ª sentença, atividade III.2, $\text{Pentagon}(b) \vee \sim \text{SameCol}(c,b)$, possibilita não se ter b como pentágono ou colocar c e b em mesma

coluna, o fato é que todos os grupos ofereceram b pentágono e posicionaram c e b em colunas diferentes, tornando ambas as proposições verdadeiras.

Outro fato que corrobora nossa conjectura, está na sentença nos mundos propostos em relação a sentença $\text{Large}(c) \vee \text{Large}(a) \vee \text{Small}(b)$, também presente na atividade III.2, que no contexto das outras sentenças, dá liberdade para escolha dos tamanhos dos objetos c e b . A grande maioria, 7 grupos, inseriram c como grande, primeira proposição verdadeira, desses 7 grupos temos 3 inserindo b como pequeno, atendendo a última proposição da disjunção.

Nas sentenças elaboradas pelos alunos, atividade III.3, observamos uso de proposições necessariamente falsas nas disjunções, o que no permite crer no estabelecimento de encadeamento lógico entre as sentenças e controle do possível lógico no mundo proposto pela dupla. Isto é, através do encadeamento lógico das sentenças propostas estabelece-se a necessidade da proposição ser falsa, e a necessidade de a proposição ser falsa caracteriza o possível lógico.

2.4.4 Atividade IV – Revisão

A atividade em geral tem por finalidades, a revisão dos operadores lógicos já trabalhados com os alunos, negação, conjunção e disjunção, a fim de reforçar sua compreensão. Teremos propostas de sentenças com operadores lógicos em diferentes linguagens materna e matemática, para provocar debate em situações ainda não trabalhadas, e possibilitar um diagnóstico sobre a assimilação e uso da lógica clássica, por parte dos alunos envolvidos, para decidirmos se podemos dar prosseguimento às atividades como programadas ou se deve ser feita alguma mudança.

2.4.4.1 Análise a Priori da Atividade IV

Atividade IV.1 – Análise de sentenças.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

	1	$\sim \text{Triangle}(f) \vee \text{Large}(f)$	
	2	$\sim (\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{SameCol}(d,d))$	
	3	$\text{Between}(c,a,f) \wedge \text{Between}(d,e,f)$	
	4	$\text{Smaller}(b,c) \vee \text{Smaller}(c,b)$	
	5	$\text{Smaller}(e,d) \vee \text{Smaller}(d,e)$	
	6	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge (\text{Large}(f) \vee \text{Square}(c))$	
	7	$\sim \text{Triangle}(f) \vee \text{Large}(f) \wedge \text{Square}(c)$	
	8	$\text{SameRow}(c,a) \wedge \text{SameCol}(c,a)$	
	9	$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \vee \sim \text{Small}(f)) \vee \text{Triangle}(a)$	
	10	$\text{Square}(a) \wedge \sim (\sim \text{Triangle}(c) \vee \text{Pentagon}(e))$	
	11	$\text{LeftOf}(a,b) \vee \text{Smaller}(e,d) \vee \text{LeftOf}(b,a)$	
	12	$\text{Smaller}(a,e) \wedge \text{SameSize}(e,a)$	
	13	$\sim (\text{Between}(a,a,a) \wedge \text{Smaller}(a,a) \vee \text{SameSize}(a,a))$	

Figura 15 - Atividade IV.1 – Análise de sentenças

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Rever análise da negação com disjunção, com uma proposição falsa e outra verdadeira.
- 2) Rever análise da conjunção e escopo da negação em sentença que, de acordo com nossa proposta, é verdadeira em qualquer mundo.
- 3) Relembrar interpretação do comando Between e análise de conjunção com proposições verdadeira e falsa.
- 4) Rever análise da disjunção com uma proposição falsa e outra verdadeira.
- 5) Rever análise da disjunção com uma proposição falsa e outra verdadeira.
- 6) Possibilitar análise de sentença com conjunção e disjunção sem uso de parênteses para determinar a prioridade dos conectivos, estimulando questionamentos sobre este fato. Dependendo da prioridade escolhida, há respostas diferentes.
- 7) Possibilitar análise de sentença com disjunção e conjunção, com as mesmas proposições da sentença anterior e sem uso de parênteses para determinar a prioridade dos conectivos, reforçando os questionamentos sobre este fato em que independente da escolha, a resposta é a mesma.
- 8) Sentença que não pode ser verdadeira em nossa proposta, independente do

mundo criado, possibilita motivar debate neste sentido.

- 9) Requer atenção nos escopos das negações para avaliar a sentença, caso o grupo perceba a verdade da segunda proposição, fora do escopo da negação, não há a necessidade de continuar a análise da sentença.
- 10) Colocar a primeira proposição como falsa na conjunção, determinando que a sentença seja falsa, sem a necessidade de analisar o restante, reforçando a característica da conjunção, e estabelecendo prioridade com uso de parênteses.
- 11) Estabelecer a primeira proposição como verdadeira, onde só há conjunções para reforçar propriedade deste conectivo lógico.
- 12) Novamente uma sentença impossível de ser verdadeira em nossa proposta, com uso da conjunção.
- 13) Propor novamente o debate sobre a prioridade da disjunção sobre a conjunção, pois adotada de outra maneira, gera outra resposta.

Atividade IV.2 – Construção de um mundo.

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

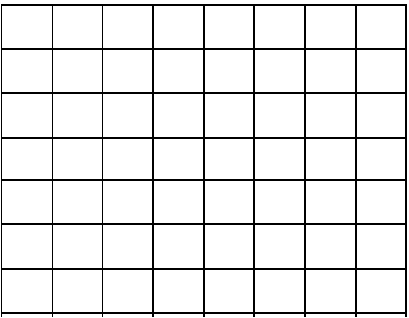
1	$\sim \text{Triangle}(a) \wedge \sim \text{Pentagon}(a)$	
2	$\sim (\text{Medium}(a) \vee \text{Smaller}(a,b)) \wedge \text{LeftOf}(a,b)$	
3	$\text{Pentagon}(b) \wedge \text{SameRow}(c,b)$	
4	$\sim (\text{Large}(c) \wedge \text{Large}(a) \vee \text{Small}(b))$	
5	$\text{Between}(a,c,b) \wedge \sim \text{Between}(a,a,a)$	
6	$\sim \text{Smaller}(a,d) \wedge \sim \text{Smaller}(d,a) \wedge \sim \text{Square}(d)$	
7	$\sim (\text{SameCol}(d,c) \vee \text{SameRow}(d,b) \vee \text{Between}(a,b,d))$	

Figura 16 – Atividade IV.2 – Construção do mundo

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Determinar o formato de a como quadrado, com uso da propriedade da conjunção.
- 2) Determinar que a não é médio, não pode ser menor que b , uso da negação e propriedade da disjunção, e coloca a à esquerda de b com uso da propriedade da

conjunção.

- 3) Determina que b deve ser pentágono e estar na mesma linha que c , usando propriedade da conjunção.
- 4) Determina que b não é pequeno, c e a não podem ambos ser grandes. Mobiliza propriedades da negação, conjunção e disjunção, bem como prioridade entre disjunção e conjunção.
- 5) Estabelece que a deve estar entre c e b , uso da propriedade da conjunção.
- 6) Estabelece que a e d são do mesmo tamanho e que d não pode ser quadrado, mobiliza uso da negação e conjunção.
- 7) Estabelece que d não pode estar na coluna de c , d não pode estar na mesma linha de b e a não pode estar entre b e d . Uso da negação, com verificação do escopo, e disjunção.

Atividade IV. 3 – Transcrição de e negação de sentenças

O objetivo da passagem das sentenças escritas em linguagem corrente para uma escrita com uso dos símbolos lógicos, é proporcionar situações em que o aluno possa identificar uso dos conectivos lógicos já vistos em nossos encontros, que são utilizados quotidianamente em nossas falas, observando o escopo da negação e negação da negação, mas sem propor declarações muito complexas. Aceitando sugestão de Epp (2003, p. 896), quando reforça o uso de exercícios que se misturam lógica, linguagem e matemática para sensibilizar os alunos da importância de tais expressões. Isso devido à complexidade e sutileza da lógica do discurso ordinário. No entanto, observamos a importância de formular tais exercícios de tradução de forma cuidadosa, de modo a torná-los inequívocos e significativos.

Neste primeiro exercício, as transcrições não devem oferecer muitas dificuldades aos alunos.

1) Sejam as proposições:

p: Paulo é inteligente.

r: Paulo é jogador.

Escreva, na forma simbólica, utilizando os símbolos lógicos, cada uma das proposições abaixo, e determine seu valor de verdade:

- a) Paulo não é inteligente.()
- b) Paulo é jogador.()
- c) Não é verdade que Paulo não é jogador.()

- d) Paulo é inteligente ou não é jogador.()
- e) Paulo não é jogador e é inteligente.()

Na transcrição das sentenças do segundo exercício, espera-se que os alunos encontrem mais dificuldades, e que as transcrições apresentem negações com uso de linguagem materna, em símbolos lógicos já estudados e mistura dessas linguagens, em virtude das atividades anteriores.

Assim como Epp, acreditamos que “o jeito informal de expressar negação de declarações contendo *e* ou *ou* pode também induzir alunos a erros quando eles vão trabalhar com situações em matemática formal”(Epp, 2003, p.890, tradução nossa), então temos a expectativa de que as respostas não atenderão as regras da lógica clássica em sua maioria, retornando algo como “Juvenal não é alto e Juvenal não é magro” para a primeira negação e “ $1 > x > 3$ ” para a segunda.

2) Escreva a negação de:

- a) Juvenal é alto e Juvenal é magro.

.....

- b) $1 \leq x \leq 3$

.....

2.4.4.2 Experimentação da Atividade IV

Esse encontro teve seu início no horário previsto e término com 5 minutos a mais que o previsto. Tivemos a formação de 7 grupos (duplas), contando com 6 meninas e 8 meninos.

Mantivemos observador no grupo Rosa, formado por duas meninas, e o grupo vermelho, que é formado por dois meninos.

Encontro	Data	Atividades programadas	
4º Encontro	18/05/2007	Atividade IV - Revisão	IV.1 – análise de sentenças
			IV.2 – construção de um mundo
			IV.3 – transcrição e negação de sentenças

Atividade IV.1.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	7 min.	Não
	Observações	
	- “A dificuldade encontrada pela dupla localiza-se nas sentenças que envolveram, simultaneamente, os símbolos V e $\wedge$. Mesmo assim, completaram esta etapa em 7 minutos. Os parênteses e a negação (~) não foram problemas conforme comentário da dupla.”	
Rosa	8 min.	Não
	Observações	
	- “A dupla perguntou qual o símbolo do 'e' e qual o do 'ou'”.	

Quadro 14 - Atividade IV. 1 – Análise de sentenças: Experimentação

Três grupos erraram a análise de quatro sentenças. O grupo amarelo II errou a 6ª e a 13ª sentença, os grupos azul II e roxo I erraram a 9ª sentença.

Os grupos que erraram a 9ª sentença deixaram marcas nas folhas de respostas que indicam problemas com o escopo da negação, pois atribuíram (V) para a última proposição da disjunção. O que seria suficiente para atribuir V para a sentença.

Atividade IV.2.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	7 min.	Sim
	Observações	
	3. “Os alunos usaram o tabuleiro, identificando as figuras de borracha com etiquetas. Primeiro, montaram o tabuleiro e, em seguida, repassaram para a folha desenhando as figuras.” 4. “Esta etapa foi considerada pela dupla mais fácil que a primeira etapa.”	
Rosa	17 min.	Sim
	Observações	
	– “Gastaram 10 minutos para analisar as 7 sentenças em seguida usaram o tabuleiro para concluir.” – “A dupla detectou um erro da dupla azul I.”	

Quadro 15 - Atividade IV. 2 – Construção do mundo: Experimentação

Nas folhas de atividades, encontramos várias 'marcas' de V ou F para as proposições e indicações de tamanho e forma para os objetos inseridos no mundo.

Três grupos não atenderam todas as sentenças em suas propostas de mundo. Todos tiveram problemas com a 2ª sentença.

O grupo azul I inseriu objeto a pequeno e b grande tornando a proposição $\text{Smaller}(a,b)$ verdadeira, com isso temos a disjunção verdadeira e sua negação falsa. Não há pistas para estabelecer uma conjectura sobre erro no escopo da negação usada na sentença.

Os grupos roxo I e rosa cometeram os mesmos equívocos, o objeto a é médio, b é grande e não colocaram a à esquerda de b . Não deixaram marcas nas folhas de atividades que possam dar pistas do motivo do erro.

Atividade IV.3.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Vermelho	8 min.	-----
	Observações	
	-”No exercício 2, após terem pensado por 3 minutos, a dupla, solicitou a presença do professor para tirar dúvidas. A orientação foi para que escrevessem em símbolos matemáticos.”	
Rosa	17 min.	Sim
	Observações	
	• “Na parte 3 houve uma discussão interessante para negar que Juvenal é alto e Juvenal é magro.” • “Para negar a sentença $1 \leq x \leq 3$ o observador pediu para que uma aluna lesse. Ela leu da seguinte maneira 'x é menor ou igual a 3 e o x é maior ou igual a 3'. Tiveram grande dificuldade para negar a expressão $1 \leq x \leq 3$.”	

Quadro 16 - Atividade IV. 3 – Transcrição e negação de sentenças: Experimentação .

As transposições foram analisadas de modo geral. Quanto ao valor de verdade não houve equívocos por parte dos alunos. Em relação à transcrição com uso dos símbolos lógicos, classificamos em três categorias as propostas dos alunos.

Categoria I	Categoria II	Categoria III
6 grupos	1 grupo	1 grupo
$\sim p$ r $\sim(\sim r)$ $p \vee \sim r$ $\sim r \wedge p$	$\sim \text{Inteligente}(p)$ $\text{Jogador}(p)$ $\sim(\sim \text{Jogador}(p))$ $\text{Inteligente}(p) \vee \sim \text{Jogador}(p)$ $\sim \text{Jogador}(p) \wedge \text{Inteligente}(p)$	$\sim I(P)$ $J(P)$ $\sim(\sim J(P))$ $I(P) \vee \sim J(P)$ $\sim J(P) \wedge I(P)$

Na categoria I colocamos as propostas que indicam uso direto das letras, expressando característica e objeto, e símbolos lógicos para representar a sentença.

Na categoria II incluímos sentenças que utilizam palavras para expressar a característica, letra para indicar objeto e símbolos lógicos.

Na categoria III incluímos as sentenças que distinguem característica do objeto, utilizando letras apenas, não palavras, e símbolos lógicos.

A análise da devolutiva das negações será feita separadamente.

Negar que “Juvenal é alto e Juvenal é magro” forneceu duas categorias de sentenças em relação ao escopo da negação, utilizando:

- a negação com escopo externo, mantendo a sentença, $\sim(A(j) \wedge M(j))$, surge em 3 propostas, com escritas como “ $\sim(a \wedge m)$ ”, “ $\sim(\text{alto}(\text{juvenal}) \wedge \text{magro}(\text{juvenal}))$ ” e “Não é verdade que Juvenal é alto e magro”;
- a negação para cada proposição da conjunção, $\sim A(j) \wedge \sim M(j)$, aparece em 4 propostas, como “Juvenal não é alto e não é magro”, “Juvenal não é alto e Juvenal não é magro”, por exemplo.

A utilização da negação e disjunção só é proposta por 1 grupo, com a sentença “Juvenal não é alto $\vee$ Juvenal não é magro”, onde destacamos o uso do símbolo $\vee$ para a disjunção.

O grupo rosa apresenta três propostas como resposta para a negação, sempre com a intenção de tornar a sentença proposta falsa, pois escreve que “Se negarmos uma das afirmações, a frase se torna falsa”. No caso, negar é tornar falsa, bastando falsificar uma das proposições, o que não ocorreria se assumisse a sentença como falsa. As sentenças propostas são: “Juvenal não é alto e não é magro”, “Juvenal não é alto e é magro” e “Juvenal é alto e não é magro”.

Na negação da segunda sentença, as respostas apresentadas pelos alunos são diferenciadas pelo uso da negação em escopo externo e uso de proposta de ‘antônimo’, pois maior seria o antônimo de menor, por exemplo.

Uso da negação com escopo externo, $\sim(1 \leq x \leq 3)$ ou $\sim(1 \leq x \text{ e } x \leq 3)$, aparece em 3 propostas.

Invertendo simplesmente as comparações, $1 \geq x \geq 3$, é proposta por 1 grupo.

Invertendo as comparações sem permitir a igualdade, $1 > x > 3$, é proposta por um grupo.

O uso da disjunção e negação, $\sim(x=1 \vee x=2 \vee x=3)$, acreditamos que assumindo x como número inteiro, surge na resposta de um grupo.

O uso da disjunção e inversão da comparação, excluindo a igualdade, $1 > x \vee x > 3$, é a resposta de um grupo.

O grupo rosa apresenta duas sentenças sem conectivos para atender a negação, $1 > x < 3$; $1 < x > 3$.

2.4.4.3 Análise a Posteriori da Atividade IV

A atividade IV.1, no sentido de reforçar a assimilação dos critérios de verdade das sentenças que envolve negação, conjunção e disjunção, teve grande sucesso. E ao promover o debate sobre a prioridade entre conjunção e disjunção, uma dupla relacionou conjunção com interseção de conjuntos e multiplicação. A disjunção foi relacionada com união de conjuntos e adição. Essas relações foram utilizadas para justificar a prioridade da conjunção em relação à disjunção.

As relações citadas anteriormente fizeram com que os alunos ficassem mais à vontade em relação aos dois conectivos, pois possibilitou um olhar que tornou esses operadores algo conhecido e já assimilado por eles em matemática, pelo menos quando o assunto era a prioridade desses conectivos.

Acreditamos que os alunos interiorizaram a estrutura das sentenças envolvendo negação, disjunção e conjunção quanto à proposta da lógica clássica. Porém utilizam a negação para tornar sentença assumida como verdadeira em falsa, não ocorre a hipótese de a sentença ser falsa e torná-la verdadeira. A figura a seguir, resposta do grupo rosa, reforça esta conjectura.

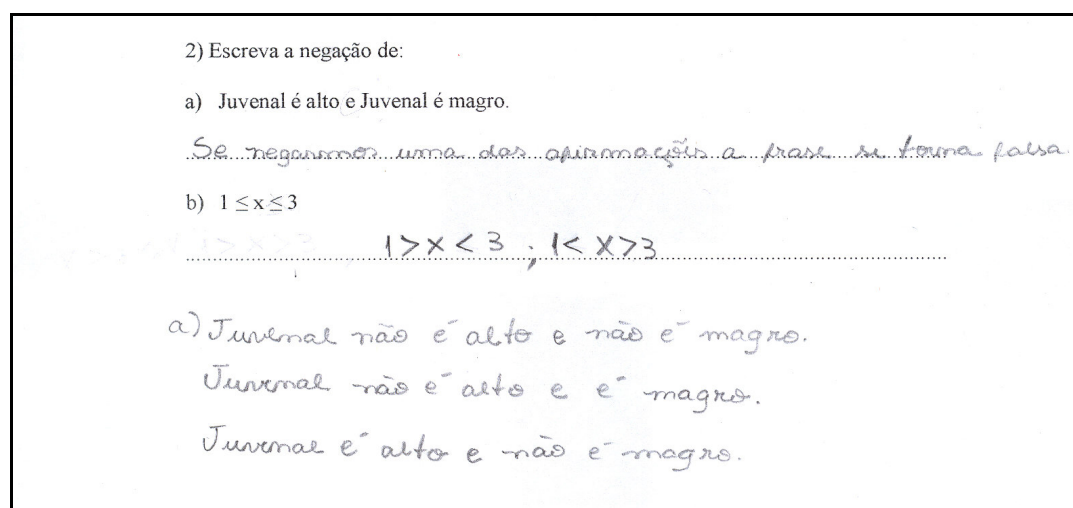


Figura 17 - Atividade IV. 3 – Transcrição e negação de sentenças: Experimentação

Percebemos ainda uma dificuldade maior em assumir a possibilidade, hipótese, da sentença ser falsa, no caso da sentença em linguagem natural, e a tentativa de exclusão de conjunto, no caso da sentença em linguagem matemática.

Para que o aluno expresse um pensamento lógico-dedutivo, proposto por Piaget e Inhelder (1976), fazendo uso de hipóteses em ambiente abstrato, devemos continuar as atividades planejadas, avançando no sentido de estimular debates que envolvam os diferentes possíveis, o possível físico e o possível lógico, tratados por Piaget e Inhelder (1976). Acreditamos que o uso de hipóteses será favorecido com as atividades com a implicação e a bicondicional.

2.4.5 Atividade V – Implicação e Bicondicional

A atividade em geral tem por finalidades, a apresentação das relações entre proposições em que a verificação da verdade ou falsidade da sentença pode ter início a partir de uma hipótese, e proporcionar situações em que o pensamento intuitivo e uso comum na língua natural se contrapõem à lógica clássica.

A implicação é formulada através de uma condição, “Se A, então B”, que “[...] na linguagem corrente, freqüentemente, as proposições simples constituintes traduzem uma idéia de ‘causa’ e ‘efeito’: é como se a segunda decorresse da primeira.” (MACHADO; CUNHA, 2005, p.55), porém no âmbito da lógica clássica temos que não é possível que A seja verdadeira e B seja falsa.

Acreditamos em possíveis problemas ao tratar dos conectivos lógicos com uso de linguagem materna, principalmente com relação à implicação, que fica mais difícil aceitar que “*p apenas se q* é logicamente equivalente a *se p então q*” (EPP, 2003, p.889, tradução nossa). Quando se utiliza declarações que envolvam situações do mundo real, isso pode ser complicador. Usaremos exemplo dado por Epp, “‘Se chove então eu não irei’ será equivalente a ‘Chove apenas se eu não for’”(ibidem), o que será evitado durante o encontro.

Os enunciados formados por “A se e somente se B” são chamados de bicondicionais, que podem ser visto como “se A então B e se B então A”. O uso da palavra ‘se’ com o sentido de ‘se e somente se’ é muito comum na linguagem natural, levando a conclusão equivocada quando se usa a lógica clássica.

Machado e Cunha (2005, p.58) nos oferecem um bom exemplo desse fato ao dizer; “Confessemos: quando afirmamos, por exemplo, ‘Se chover, João não irá à USP’,

quase automaticamente, pensamos que ‘Se não chover, João irá à USP’, o que não é uma associação legítima, a menos que, tacitamente, ‘se’, para nós, signifique ‘se e somente’.

2.4.5.1 Análise a Priori da Atividade V

Atividade V.1 – Análise de sentenças.

A atividade tem como objetivos apresentar os símbolos $\Rightarrow$ para a implicação e $\Leftrightarrow$ para a bicondicional, e apropriação das propriedades destes operadores lógicos, propondo sentenças que reforçam uma interpretação diferente de 'causa efeito', comum no quotidiano. Se a é quadrado, então a é pequeno, por exemplo.

Para que uma implicação seja falsa, é preciso ter antecedente verdadeiro e conseqüente falso, caso isso não ocorra, a implicação é verdadeira.

Para que o bicondicional seja verdadeiro, basta termos igualdades nos critérios de verdade das proposições envolvidas, caso contrário será falsa.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

					1	Square(d) $\Rightarrow$ Square(f)	
					2	Square(d) $\Rightarrow$ Triangle(f)	
					3	(Triangle(a) $\wedge$ Square(c)) $\Rightarrow$ Pentagon(d)	
					4	($\sim$ LeftOf(b,a) $\wedge$ SameRow(a,b)) $\Rightarrow$ LeftOf(a,b)	
					5	(Square(a) $\wedge$ Pentagon(e)) $\Rightarrow$ LeftOf(a,e)	
					6	Triangle(a) $\Leftrightarrow$ Small(a)	
					7	LeftOf(a,b) $\Leftrightarrow$ SameCol(c,f)	
					8	(Square(d) $\Rightarrow$ Square(f)) $\Leftrightarrow$ (Square(d) $\Rightarrow$ Triangle(f))	
					9	(SameSize(a,b) $\Rightarrow$ SameSize(b,a)) $\Leftrightarrow$ $\sim$ Smaller(a,b)	
					10	SameSize(c,e) $\Leftrightarrow$ $\sim$ Smaller(b,c)	
					11	Triangle(b) $\Rightarrow$ Square(a)	

Figura 18- Atividade V.1 – Análise de sentenças

Análise das sentenças na proposta da atividade acima.

- 1) Apresentar situação em que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso.
- 2) Apresentar situação em que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é verdadeiro.
- 3) Apresentar sentença em que o antecedente é formado pela conjunção de duas proposições.

- 4) Apresentar sentença em que o antecedente é formado pela conjunção de duas proposições acrescentando uso da negação.
- 5) Apresentar situação em que o antecedente é falso e o conseqüente é verdadeiro.
- 6) Apresentar uma bicondicional em que as proposições são verdadeiras.
- 7) Apresentar uma bicondicional em que a primeira proposição é verdadeira e segunda falsa.
- 8) Apresentar uma bicondicional em que a primeira proposição é falsa e segunda verdadeira, trazendo as sentenças 1 e 2 como proposições.
- 9) Apresentar uma bicondicional em que as proposições são verdadeiras, porém a primeira proposição, utilizando de implicação, tem a característica de verdade sempre, e a segunda é negação de uma situação que pode gerar dúvidas para sua inferência.
- 10) Apresentar uma bicondicional em que as proposições são falsas.
- 11) Apresentar situação em que o antecedente e o conseqüente são falsos.

Atividade V.2 – Construção do mundo.

Atividade proporciona uso e assimilação das estruturas dos operadores lógicos condicional e bicondicional, e reforça a liberdade na criação do mundo, porém com as restrições do possível lógico ao fazer os encadeamentos lógicos entre as declarações.

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	Square(a) $\Leftrightarrow \neg(\text{Square}(b) \vee \text{Triangle}(b))$
2	Large(b) $\Rightarrow \text{SameSize}(b,c)$
3	$(\text{SameRow}(b,c) \wedge \text{SameCol}(a,b)) \Rightarrow \neg \text{SameRow}(a,c)$
4	$\neg \text{Between}(b,a,c) \Leftrightarrow \text{Smaller}(a,c)$
5	$\text{Between}(d,a,c) \Leftrightarrow \neg \text{SameRow}(d,c)$
6	$(\text{LeftOf}(a,d) \wedge \text{LeftOf}(b,d)) \Leftrightarrow \text{LeftOf}(d,c)$
7	$(\text{Smaller}(d,c) \vee \text{Square}(c)) \Rightarrow \text{Smaller}(d,a)$

Figura 19- Atividade V.2 – Construção do mundo

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Procura estabelecer as formas dos objetos a e b , e uso de pensamento hipotético, se adotar a como quadrado, tornando a proposição verdadeira, b deve ser pentágono para tornar segunda proposição verdadeira. Caso a não seja quadrado, proposição falsa, b deve ser quadrado ou triângulo.
- 2) Pretende estabelecer tamanho para os objetos b e c , se adotar b como grande, então c também será grande. Caso não seja grande, não podemos fixar tamanho para c .
- 3) Pretende trabalhar com o posicionamento relativos dos objetos a, b e c . Com o antecedente utilizando conjunção para termos como verdadeiro ambas as proposições devem ser verdadeiras, com isso a e c não podem estar em mesma linha.
- 4) Procura ligar as posições relativas de a, b e c e os tamanhos de a e c em bicondicional, estabelecendo uma relação com a sentença anterior.
- 5) Procura ligar as posições relativas de a, c e d em bicondicional, acrescentando d na proposta do mundo.
- 6) Verifica confirmação de posicionamento entre os objetos a, b, c e d . Novamente com uma conjunção em uma proposição e relações entre as declarações anteriores.
- 7) Ao utilizar a disjunção no antecedente da implicação, estamos reforçando suas propriedades e estabelecendo tamanhos relativos entre a e d .

2.4.5.2 Experimentação da Atividade V

Esse encontro teve seu início e término nos horários previstos, porém alguns desafios ficaram para serem resolvidos no próximo encontro. Tivemos a formação de 9 grupos (duplas), contando com 9 meninas e 9 meninos.

Mantivemos observador no grupo Rosa, formado por duas meninas, e alteramos o outro grupo, amarelo II, que é formado por um casal.

Houve grande participação na retomada da revisão, e os alunos questionaram muito a possibilidade de termos implicações verdadeiras partindo de antecedentes falsos e bicondicional verdadeira a partir de proposições falsas.

Os alunos pediram para que ficasse fixa a projeção das regras da implicação e bicondicional.

Encontro	Data	Atividades programadas	
5º Encontro	25/05/2007	Atividade V - Implicações e Bicondicional	V.1 – análise de sentenças
			V.2 – construção do mundo
			V.3 – desafio dos mundos

Atividade V.1.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo II	4 min.	Não
	Observações	
	- “Não encontraram maiores dificuldades.”	
Rosa	8 min.	Não
	Observações	
	Não houve comentários.	

Quadro 17 - Atividade V.1- Análise de sentenças: Experimentação

Em todas as sentenças, em todos os grupos, ocorreram apenas dois erros, na 4ª e 5ª sentenças, em grupos diferentes.

No caso específico do grupo roxo I, que errou a 5ª sentença, encontramos na folha de respostas anotações que induziram ao erro. As anotações são essas: $F + V \rightarrow F$; $V + F \rightarrow F$; $V + V \rightarrow V$ e $F + F \rightarrow V$. Acreditamos que a primeira anotação levou o grupo ao erro, pois as marcas na sentença estabelece F para o antecedente e V para o conseqüente, concluído F .

Por causa do tempo da revisão das atividades do encontro anterior, não ocorreu a conferência por parte dos grupos.

Atividade V.2.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo II	21 min.	Não
	Observações	
	- “Conversaram com o professor Rai porque estavam encontrando dificuldade na interpretação dos símbolos. (conectivos)”. - “Começaram por dar o valor-verdade para cada parte das sentenças e a partir desta classificação recordaram a “regra” do condicional. Leram todas as sentenças de 1) a 7). A seguir, recomeçaram pela sentença 1). Voltaram a discutir todas as sentenças sem concluir.” - “O professor Rai aproximou-se da dupla para verificar as dificuldades. A análise das sentenças continuou até 12:32h” - “12:33h começaram a desenhar as figuras na folha. Os alunos encontraram mais dificuldade no exercício da 5ª aula, com relação aos dias anteriores.”	
	21 min.	Sim
Rosa	Observações	
	- “Na atividade (parte 2) a dupla tem uma dúvida e chama o pesquisador. A dúvida é relacionada ao tópico 2 $\text{Large}(b) \Rightarrow \text{SameSize}(b,c)$. De modo geral, a dificuldade foi maior em relação às sessões anteriores.”	

Quadro 18 - Experimentação Atividade V.2

O grupo rosa não teve êxito na construção do mundo, não atendeu a 7ª sentença, pois forneceu antecedente verdadeiro e conseqüente falso, em que d não é menor que a .

O grupo amarelo II não teve êxito na construção do mundo, não atendeu a 4ª sentença, tem a primeira proposição verdadeira e a segunda falsa. Nas marcas deixadas na folha de atividades encontramos V para $\text{Smaller}(a,c)$, que no mundo proposto é falsa, o que nos faz pensar em desvio de interpretação desta proposição, e não do operador lógico envolvido.

O grupo azul II não teve êxito na construção do mundo, não atendeu a 4ª sentença, as marcas deixadas na folha de atividades indica que não houve atenção na negação da primeira proposição, pois confirma $\text{Between}(b,a,c)$ como F e não verifica a negação que a torna V, o que tornaria necessário que $\text{Smaller}(a,c)$ também fosse V.

O grupo amarelo I não teve êxito na construção do mundo, apresentou erro nas sentenças 4, 5 e 6. Recorrendo as marcações deixadas na folha das atividades, percebemos erros na interpretação das proposições, atribui V para $\text{Between}(b,a,c)$ mas que no mundo construído é F, ocorre o mesmo para $\text{Between}(d,a,c)$. Na 6ª sentença atribui F para $\text{LeftOf}(a,d)$, mas que no caso é V, e $\text{LeftOf}(d,c)$ é verificada corretamente como F.

Os demais grupos tiveram êxito na construção do mundo.

Apesar de que objeto *a* não deva ser necessariamente quadrado para a construção do mundo, isso não ocorreu em apenas duas propostas de mundo. Escolher a primeira proposição como verdadeira foi estratégia assumida pela maioria dos grupos.

Atividade V.3.

Tivemos sete duplas que utilizaram cinco sentenças, uma dupla com quatro sentenças e uma dupla com três sentenças.

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo II	9 min.	Sim
	Observações	
	- “Usando o tabuleiro e as peças de borracha começaram a escrever as sentenças na folha DESAFIO, identificaram as peças com as etiquetas com nomes. Distribuíram as peças no tabuleiro.”	
Rosa	(não anotado)	-----
	Observações	
	- “Os alunos iniciaram a construção do mundo, mas não concluíram”.	

Quadro 19 - Atividade V.3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Análise das sentenças por grupo:

Grupo	Quantidade	Implicação	Bicondicional	Escopo da negação
Vermelho	5	2	3	$\sim(A \rightarrow B)$
Rosa	5	2	3	$\sim A \rightarrow B$; $\sim A \wedge B$ $\Leftrightarrow C$
Azul I	5	1	3	$(A \wedge \sim B) \rightarrow \sim C$ $A \wedge (\sim B \vee C)$ $A \Leftrightarrow \sim(A \wedge B)$ $A \Leftrightarrow \sim(A \vee B)$
Azul II	4	3	1	$\sim A \vee B \rightarrow \sim(C \vee D)$ $\sim(A \vee B \rightarrow C)$
Amarelo I	5	2	2	$\sim A \rightarrow B$
Amarelo II	5	1	4	$\sim(A \Leftrightarrow B)$
Roxo I	3	2	0	$A \vee \sim B$
Roxo II	5	1	1	$A \wedge \sim B$; $\sim A \rightarrow B$; $\sim A \Leftrightarrow \sim B$; $\sim A \wedge \sim B$; $\sim(A \wedge B)$
Verde	5	3	2	Não há negação

Quadro 20 - Atividade V. 3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Ocorreram muitos erros de sintaxe que não comprometeram a interpretação da sentença, como por exemplo, $\text{LeftOf}(p,c)$. Apenas sentenças do grupo Azul II e Roxo I apresentaram problemas mais sérios. Duas sentenças do grupo Azul II comprometeram, $\sim\text{Square}(a) \vee \text{Triangle}(c) \Rightarrow \sim(\text{Square}(c) \vee \sim\text{Pentagon}(d))$, pois não tem fechamento de parênteses para possibilitar inferência; e $\sim(\text{SameCol}(d,e,f) \vee \text{SameRow}(d,a) \Rightarrow \text{Square}(c))$ utiliza de três objetos em $\text{SameCol}(d,e,f)$, onde são permitidos apenas dois. A sentença $\text{Large}(c,a) \wedge \text{SameCol}(a,c) \Rightarrow \text{Large}(d)$, criada pelo grupo roxo I, utiliza $\text{Large}(c,a)$, expressão que permite apenas um objeto.

Quanto a mundos impossíveis, isso não ocorreu.

Análise da resolução dos desafios por grupo.

Proposto pelo Grupo	Grupo Desafiado	Êxito
Vermelho	Amarelo II	Não
	Observações	
	São utilizados 7 objetos e todos têm tamanho e formato definido. O grupo errou na sentença $\sim(\text{SameRow}(b,c) \Rightarrow \text{Square}(c))$, porque provavelmente não observou o escopo da negação, se fosse $\sim A \Rightarrow B$, a sentença teria sido respeitada no mundo proposto.	
Rosa	Não ocorreu	
	Observações	
Azul I	Verde	Não
	Observações	
	Não atendeu a sentença $(\text{Pentagon}(c) \wedge \sim\text{Square}(b)) \Rightarrow \sim\text{LeftOf}(b,c)$, tem antecedente verdadeiro e conseqüente falso. A sugestão do grupo azul I ao verificar o desafio foi a troca de posição entre os objetos b e c .	
Azul II	Não ocorreu	
	Observações	
Amarelo I	Vermelho	Sim
	Observações	
	O desafio propõe 5 objetos, que têm os tamanhos e formatos definidos.	
Amarelo II	Azul I	Não
	Observações	
	Não atendeu a duas sentenças de posicionamento relativo aos elementos. A sentença $\text{Between}(c,p,d) \Leftrightarrow \text{LeftOf}(p,a)$ tem a primeira proposição F e a segunda V, a sentença $\text{LeftOf}(p,a) \Rightarrow \text{LeftOf}(d,a)$ tem o antecedente V e o conseqüente F, no mundo proposto.	

Verde	Roxo I	Não
	Observações	
	Não atendeu a sentença $(\text{Smaller}(d,b) \vee \text{Triangle}(c)) \Rightarrow \text{SameSize}(b,c)$, pois o antecedente é V e o conseqüente é F, não observou o tamanho dos objetos b e c .	
Roxo I	Não ocorreu	
	Observações	
Roxo II	Amarelo I	Sim
	Observações	
	Todos os objetos tiveram tamanho e forma definidas no mundo proposto.	

Quadro 21 - Atividade V. 3 – Desafio dos mundos: Experimentação

2.4.5.3 Análise a Posteriori da Atividade V

A apresentação das interpretações da implicação e bicondicional, a partir da lógica clássica contribuiu para que os alunos confrontassem com uma interpretação cotidiana. Enxergamos uma preocupação deles em não se deixar influenciar por essa interpretação durante as atividades, quando eles pediram para deixar na lousa ou projeção, as regras lógicas da implicação e de bicondicional.

A atividade V.2, construção do mundo possibilitou, de forma mais contundente que em outros encontros, o pensamento com uso de hipótese, mesmo que preferiram iniciar a hipótese atribuindo V para a proposição. Apenas dois grupos não inseriram o objeto a como quadrado em sua proposta de mundo.

Com relação às propostas de sentenças, a diminuição da quantidade de sentenças, apesar da questão tempo, reforça a dificuldade do uso dos conectivos lógicos trabalhados.

O encadeamento lógico das declarações é garantido nas atividades de construção do mundo a partir de declarações verdadeiras, mesmo quando ocorre insucesso na criação do mundo proposto, pois entre os grupos que não obtiveram sucesso na construção do mundo, os erros cometidos, a maioria na 4ª sentença, não se relacionavam às outras sentenças.

2.4.6 Atividade VI – Quantificadores

O objetivo geral da atividade é apresentar os operadores lógicos quantificadores, que se referem à idéia de conjuntos, provavelmente já vista pelos alunos em séries

anteriores. Estamos tratando da lógica dos enunciados categóricos, que resumidamente trata-se de:

Nos enunciados, as classes de atributos estão, muitas vezes, relacionadas com uma outra por meio das expressões ‘todo’ e ‘algum’, denominados quantificadores. Os quantificadores também são operadores lógicos, eles expressam relações entre os conjuntos designados pelas classes de atributos. Enunciados da forma ‘Todo A é B’, afirmam que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B. (NOLT; ROHATYN, 1991, p.586)

Na lógica clássica encontramos quantificadores universal “ $\forall$ ” e existencial “ $\exists$ ”, que se referem a quantidade, aliados aos tipos de qualidades, afirmativa e negativa, formam quatro formas básicas de enunciados categóricos.

		QUALIDADE	
		Afirmativa	Negativa
QUANTIDADE	Universal	A	E
	Existencial	I	O

Utilizando uma linguagem mais “matemática”, teríamos a seguinte explicação proposta por Abar (2008).

A: "Todo P é Q" afirma que todos os elementos de P são elementos de Q, ou seja, que P é um subconjunto de Q, isto é, $P \subset Q$.

E: "Nenhum P é Q" afirma que os conjuntos P e Q não têm elementos em comum, isto é, que $P \cap Q = \emptyset$ ou ainda que $P \subset Q'$.

I: "Algum P é Q" afirma que os conjuntos P e Q têm pelo menos um elemento em comum, isto é, $P \cap Q \neq \emptyset$

O: "Algum P não é Q" afirma que P tem pelo menos um elemento que não está em Q, ou ainda, que $P \cap Q' \neq \emptyset$.²⁶

Interpretar Q' como complementar de Q.

Para a sentença $\forall x \text{ Pentagon}(x)$, a leitura pode ser “Todos os objetos do mundo considerado são pentágonos”, e para $\exists y \text{ Pentagon}(y)$ pode ser “Existe no mínimo um objeto no mundo considerado que é pentágono”.

Situações interessantes podem surgir quando pensamos em comparar a interpretação dos quantificadores, no âmbito da linguagem, nos diferentes contextos formal e informal. Em contexto formal, as declarações ‘todos A são B’ e ‘alguns A são B’ não são contraditórias, mas em contexto informal, se é fato a primeira declaração ao expressar a segunda o sujeito pode ser julgado como mentiroso, “Em outras palavras, a

²⁶

<http://www.pucsp.br/~logical/> - acesso em 22/07/2008

declaração ‘Alguns A são B’ é normalmente levado a implicar que ‘Alguns A não são B’. Mas em matemática, esta implicação é inválida.” (EPP, 2003, tradução nossa, p. 890)

Na linguagem natural encontramos outros tipos de quantificadores, por exemplo, muitos, poucos e quase todos, que não são tratados na lógica clássica.

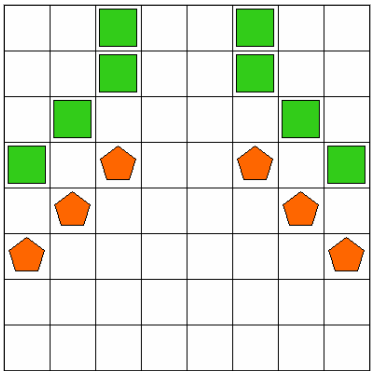
2.4.6.1 Análise a Priori da Atividade VI

Atividade VI.1 – Análise de sentenças.

Apresentar os símbolos dos quantificadores: “ $\forall$ ” para universal, e “ $\exists$ ” para o existencial, e verificação simples de algumas propriedades destes operadores lógicos, além de não ser necessário identificar os objetos no mundo e nas sentenças.

No uso do applet, são usados “A” e “E” como quantificadores, por exemplo, na sentença $E y (\sim \text{Triangle}(y) \vee \text{Square}(y))$, o applet interpretará como “existe pelo menos um objeto não-triângulo ou quadrado”, ou seja, quantificador existencial.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo Abar, em que todos são grandes (larges).



1	$\forall x \text{ Pentagon}(x)$	
2	$\exists y \text{ Triangle}(y)$	
3	$\exists y \text{ Pentagon}(y)$	
4	$\forall y \text{ Square}(y)$	
5	$\exists y \text{ Square}(y)$	
6	$\forall x \text{ Large}(x)$	
7	$\exists x \sim \text{Large}(x)$	
8	$\exists y (\text{Square}(y) \wedge \text{Large}(y))$	

Figura 20 - Atividade VI.1

Os símbolos “ $\forall$ ” e “ $\exists$ ” serão utilizados, pois os alunos provavelmente já tiveram contato com eles em textos matemáticos.

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Apresentar o quantificador universal em que a proposição é falsa. (A)
- 2) Apresentar o quantificador existencial em que a proposição é falsa. (I)
- 3) Apresentar o quantificador existencial em que a proposição é verdadeira. (I)
- 4) Propor outro quantificador universal em que a proposição é falsa. (A)
- 5) Propor outro quantificador existencial em que a proposição é verdadeira. (I)

- 6) Apresentar o quantificador universal em que a proposição é verdadeira. (A)
- 7) Apresentar o quantificador existencial com uso de negação, que torna a proposição analisada falsa. (O)
- 8) Apresentar o quantificador existencial com uma conjunção. (I)

Atividade VI.2. Análise de sentenças

A atividade tem o objetivo de ampliar situações de uso dos quantificadores, acrescentando conjunção e disjunção em um mundo com mais variações de objetos.

2. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

					1	$\exists y (\sim \text{Triangle}(y) \vee \text{Square}(y))$	
					2	$\forall y (\text{Pentagon}(y) \vee \sim \text{Large}(y))$	
					3	$\exists y (\text{Pentagon}(y)) \wedge \exists y (\text{Triangle}(y))$	
					4	$\exists y (\text{Pentagon}(y) \wedge \text{Triangle}(y))$	
					5	$\forall y (\text{Pentagon}(y) \vee \text{Large}(y))$	
					6	$\forall x (\text{Square}(x) \wedge \text{Medium}(x))$	
					7	$\exists x (\text{Square}(x) \wedge \text{Medium}(x))$	
					8	$\forall x (\text{Pentagon}(x) \vee \text{Square}(x) \vee \text{Triangle}(x))$	
					9	$\exists y (\text{Square}(y) \wedge \text{Large}(y))$	
					10	$\exists x (\sim \text{Square}(x) \wedge \sim \text{Large}(x))$	

Figura 21- Atividade VI.2 – Análise de sentenças

Análise das sentenças da atividade proposta.

- 1) Proporcionar análise do existencial com negação e disjunção, em uma situação em que as proposições envolvidas são verdadeiras. Uma maneira de torná-la falsa seria colocar apenas triângulos no mundo.
- 2) Proporcionar análise do universal com disjunção e negação, em uma situação em que todos os objetos devam ser pentágonos ou não-grandes, o que não ocorre.
- 3) Propiciar o debate sobre escopo de quantificadores, porém sem entrar muito em detalhes. Situação em que deve existir pelo menos um triângulo e um pentágono, por causa da conjunção.
- 4) Propor uma sentença que não pode ser verdade em mundo algum, respeitando nossa proposta e a lógica clássica, em virtude das propriedades utilizadas nas proposições e da conjunção, ou seja, ser pentágono e triângulo simultaneamente. Além de reforçar a importância do escopo do quantificador, se comparada com a

sentença anterior.

- 5) O quantificador universal propõe ser todos os objetos pentágonos ou grandes, reforçando a análise da disjunção no universal. Caso haja não-pentágono e não-grande, teremos a sentença falsa.
- 6) O quantificador universal propõe que todos os objetos devam ser quadrados e médio, reforçando a análise da conjunção no universal. Caso haja não-quadrado ou não-médio, teremos a sentença falsa, que no mundo é fato.
- 7) Propor a comparação entre os quantificadores, pois só ocorre a alteração do quantificador em relação à sentença anterior, alterando valor de verdade da sentença.
- 8) A sentença, na proposta do applet, será sempre verdadeira, pois qualquer mundo não vazio, terá um objeto nos formatos da sentença, podendo promover esse debate entre o grupo.
- 9) A sentença é proposta para dar suporte a interpretações em discussão que possa surgir a partir da sentença que vem em seguida.
- 10) A negação das proposições no quantificador existencial, utilizando-se de conjunção, pode não alterar o valor de verdade da sentença.

Atividade VI.3. Construção de um mundo.

3. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\exists x \text{ Pentagon}(x)$								
2	$\forall x (\text{Triangle}(x) \vee \text{Square}(x) \vee \text{Pentagon}(x))$								
3	$\exists y (\text{Pentagon}(x) \wedge \text{Large}(x))$								
4	$\exists y (\text{Triangle}(y) \wedge \text{Large}(y))$								
5	$\exists y (\sim \text{Medium}(y) \wedge \text{Square}(y))$								
6	$\forall x (\text{Square}(x) \vee \text{Large}(x))$								

Figura 22 – Atividade VI. 3 – Construção do mundo

Análise das sentenças da atividade acima.

- 1) Definir que existe pelo menos um pentágono.

- 2) Reforçar o debate sobre uma sentença que não acrescenta dicas sobre o mundo, pois é verdadeira em qualquer mundo, de acordo com a proposta do applet.
- 3) Estabelecer que pelo menos um pentágono é grande.
- 4) Estabelecer a existência de pelo menos um triângulo grande.
- 5) Estabelecer a existência de pelo menos um quadrado que não seja médio.
- 6) Estabelecer a impossibilidade de se ter objetos não-quadrado que sejam não-grande, mas possibilita que seja quadrado de qualquer tamanho.

2.4.6.2 Experimentação da Atividade VI

As atividades desse encontro tiveram seu início adiado em função do término dos desafios do encontro anterior. A apresentação em MS PowerPoint, com o assunto pertinente ao encontro, teve início após 30 minutos. A formação dos grupos não ocorreu como nos encontros anteriores, sendo que tivemos a formação de apenas 5 grupos (duplas) e uma pessoa fazendo individualmente as atividades.

O grupo Rosa não foi formado, observamos e gravação em áudio do grupo Amarelo I, formado por dois meninos muito participativos e gravação em áudio e vídeo do grupo Verde I, formado por casal.

A retomada dos desafios do encontro anterior não exigiu muito dos participantes, a pouca presença alterou um pouco a dinâmica dos encontros anteriores.

Encontro	Data	Atividades programadas	
6º Encontro	15/06/2007	Atividade VI – Quantificadores	VI.1 – Análise de sentenças.
			VI.2 – Análise de sentenças.
			VI.3 – Construção do mundo.
			VI – Desafio dos mundos

Atividade VI.1

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo I	2 min.	Não
		Observações
		- “Foi muito fácil”.

Quadro 22- Atividade VI.1- Análise de sentenças: Experimentação

Não houve erro em análise alguma por parte dos grupos.

Atividade VI.2

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo I	2 min.	Não
	Observações	
	- “Conforme expressão da dupla. Não é difícil . É só 'chatinho de ver' ”.	

Quadro 23 - Atividade VI.2 – Análise de sentenças: Experimentação

A pequena ocorrência de erros era esperada, porém o único erro, na sentença 4, não correspondeu à nossa expectativa, pois há a impossibilidade da verdade da sentença, independentemente do mundo analisado, situação que os alunos já estavam habituados.

Atividade VI.3

Dupla	Tempo	Uso do tabuleiro
Amarelo I	3 min.	Não
	Observações	
	- “Não encontraram dificuldades”. -”O professor Raí retornou com o trabalho do grupo Amarelo I, e discutiu com os alunos a interpretação dos quantificadores $\forall x$ e $\exists y$, com $\wedge$ e $\vee$. Os alunos mantiveram a sua interpretação. O professor argumentou que o mundo montado não corresponde à sentença número 6. A discussão durou aproximadamente 15 minutos”.	

Quadro 24 - Experimentação Atividade VI.3

O grupo amarelo I teve êxito ao criar o mundo, o debate girou em torno da proposta dos elementos do mundo, que não eram quadrados, pois apresentava um triângulo que 'aparentemente' era médio, e a explicação verbal apresentada pelo grupo, e depois escrita em proposta de explicação, apontava para que todos os objetos fossem grandes, o que não ocorre no mundo proposto. Acreditamos que houve falha na interpretação do mundo proposto.

Todos os mundos criados respeitaram as sentenças, e com apenas três objetos. Com exceção do grupo amarelo I, os objetos propostos tinham tamanho grande. Alguns com identificação outros grupos não se importaram com isso.

Atividade VI.3.

Tivemos cinco propostas de desafios, porém apenas dois foram respondidos, isso em virtude do pouco tempo disponível para a tarefa.

Análise das sentenças.

Um grupo utilizou sete sentenças; outro, quatro sentenças; e três grupos utilizaram 5 sentenças para proposta do mundo.

Vamos verificar o uso dos operadores lógicos utilizados nas sentenças propostas pelo grupo.

Grupo	Conjunção	Disjunção	Negação	Universal	Existencial
Vermelho	0	3	0	2	3
Azul I	4	2	3	1	1
Amarelo II	1	2	0	2	3
Roxo I	0	2	0	3	2
Verde	1	2	1	2	2

Quadro 25 - Atividade VI.3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Nas sentenças do grupo azul I encontramos uma sentença que será falsa em qualquer mundo, dentro da proposta do applet, pois estabelece que os objetos sejam pequenos e médios, a sentença proposta é $\forall x (Small(x) \wedge Medium(x))$. Outra sentença nos chamou a atenção em função da ausência de parênteses para definir prioridade dos bicondicionais, $Small(b) \Leftrightarrow \sim Triangle(b) \Leftrightarrow Large(a)$, o que altera a interpretação da sentença. O grupo fornece ainda a sentença $Between(b,c,a) \vee \sim (Small(c) \wedge Large(c))$ em que a segunda proposição da disjunção é sempre verdadeira, tornando a sentença disjuntiva verdadeira independentemente da primeira proposição.

O grupo vermelho ao escrever suas sentenças cometeu diversos erros, como por exemplo, nas sentenças $\forall (x) (Between(Pentagon, Triangle, Square))$ e $\forall (x)(Small \vee Triangle)$, mas que permite uma interpretação da intenção da sentença. A primeira sentença merece uma atenção especial, caso tenhamos a interpretação semelhante a sentença válida $\forall x \forall y \forall z (Pentagon(x) \wedge Triangle(y) \wedge Square(z) \Rightarrow Between(x,y,z))$, o pentágono deve estar entre o triângulo e o quadrado, caso tenhamos os três tipos de figuras no mundo, mas se a tivermos a sentença válida como $\forall x \forall y \forall z (Between(x,y,z) \Rightarrow Pentagon(x) \wedge Triangle(y) \wedge Square(z))$ o mesmo não ocorre.

As sentenças do grupo amarelo II propõem um mundo onde não pode haver triângulos e todos os objetos devem ser pequenos. As sentenças que permitem essa conclusão são $\forall x (Pentagon(x) \vee Square(x))$ e $\forall x (Triangle(x) \vee Small(x))$.

O grupo roxo I propõe um mundo em que todos os objetos sejam pequenos, $\forall x Small(x)$, e existência de quadrado e triângulo, com o quantificador existencial.

O grupo verde apresentou uma proposta de mundo em que não podemos ter quadrados, $\forall x (Pentagon(x) \vee Triangle(x))$ e os objetos não podem ser grandes ao acrescentar a sentença $\forall y (Square(y) \vee \sim Large(y))$.

Análise da resolução dos desafios por grupo.

Proposto pelo Grupo	Grupo Desafiado	Êxito
Vermelho	Amarelo II	Não
	Observações	
	São utilizados três objetos com formatos e tamanhos definidos. O mundo proposto não atende a proposta da sentença $\forall (x) (\text{Small } \vee \text{ Triangle})$, exigindo que não-triângulos sejam pequenos. A sentença $\forall (x) (\text{Between}(\text{Pentagon}, \text{Triangle}, \text{Square}))$ depende da interpretação para saber se é ou não atendida.	
Amarelo II	Vermelho	Não
	Observações	
	Não atendeu a duas exigências das sentenças, acrescentando triângulo e um objeto que não é pequeno.	

Quadro 26 - Atividade VI. 4 – Desafio dos mundos: Experimentação

2.4.6.3 Análise a Posteriori da Atividade VI

A devolutiva dos alunos sugere que os quantificadores nas atividades de análise de sentença não ofereceram muitos problemas, porém quando fizeram uso deles para construir ou propor mundo para o desafio, os problemas de interpretação desses operadores lógicos ficaram evidentes. Ocorreu pela primeira vez uma sentença que propõe um mundo impossível, a dupla propõe que todos os objetos do mundo são médios e pequenos. Sentença presente na figura a seguir.

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

DESAFIO DOS MUNDOS

Data: 01 / 06 / 2007 GRUPO Azul 1 DESAFIADO _____

Desafie seu oponente escrevendo, pelo menos, cinco sentenças para que ele construa seu mundo.

Sentença que propõe um mundo impossível →

1. $\forall x (\text{small}(x) \wedge \text{medium}(x))$
2. $(\text{Pentagon}(b) \Leftrightarrow \text{Large}(c)) \vee \text{square}(b)$
3. $\sim \text{Left of}(c, b) \wedge \text{same size}(b, c)$
4. $\exists a (\sim \text{smaller}(a, b) \wedge \text{Pentagon}(a))$
5. $\text{small}(b) \Leftrightarrow \text{triangle}(b) \Leftrightarrow \text{large}(a)$
6. $\text{Between}(b, c, a) \vee \sim (\text{small}(c) \wedge \text{large}(c))$
7. $\text{same row}(a, b) \rightarrow \text{same row}(b, c)$
8. _____

Figura 23 - Atividade VI.3 – 3 – Desafio dos mundos: Experimentação

Confronto entre interpretação formal e informal, quanto ao uso dos quantificadores, não ficou evidente.

2.4.7 Atividade VII – Finalizando

A última atividade será realizada individualmente, tendo como primeiro objetivo uma reflexão individual, pois sem o diálogo entre os participantes do grupo, o aluno deverá registrar suas respostas sem a intervenção do colega, o que pode ampliar nossa percepção sobre a mobilização de raciocínios com uso dos operadores lógicos a partir da lógica clássica e possíveis contribuições de nossas atividades. Um segundo objetivo é uma avaliação do aluno em relação ao conjunto das atividades aplicadas nos encontros.

2.4.7.1 Análise a Priori da Atividade VII

Atividade VII.1 – Análise de sentenças.

Rever algumas estruturas básicas da lógica clássica, com sentenças que não requerem verificação do mundo, pois, ou podem ser verdadeiras em qualquer mundo, dentro da proposta das atividades, ou falsas em qualquer mundo criado.

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

	1	Between(e,d,f)	
	2	Between(c,c,c)	
	3	SameSize(a,a)	
	4	Triangle(a) $\vee$ $\sim$ Triangle(a)	
	5	Triangle(a) $\wedge$ $\sim$ Triangle(a)	
	6	$\sim$ (SameCol(c,e) $\vee$ Larger(c,a)) $\wedge$	
	7	LeftOf(d,e) $\Rightarrow$ Square(a)	
	8	(Smaller(c,d) $\wedge$ Smaller(a,c)) $\Rightarrow$ Smaller(a,d)	
	9	(Smaller(e,c) $\vee$ Smaller(a,b)) $\Rightarrow$ Smaller(f,e)	
	10	Square(d) $\wedge$ Medium(d)	
	11	$\sim$ Square(d) $\wedge$ $\sim$ Medium(d)	
	12	$\sim$ Square(d) $\vee$ $\sim$ Medium(d)	
	13	$\forall x$ (Pentagon(x) $\vee$ Square(x) $\vee$ Large(x))	

Figura 24 - Atividade VII.1 – Análise de sentenças

Objetivo das sentenças da atividade proposta.

- 1) Recordar o comando Between.
- 2) Propor uma sentença que é falsa em qualquer mundo.
- 3) Propor uma sentença que é verdadeira em qualquer mundo.
- 4) Propor uma disjunção que é verdadeira em qualquer mundo.
- 5) Propor uma conjunção que é falsa em qualquer mundo.
- 6) Relembrar o escopo da negação e estrutura das disjunções e conjunções.
- 7) Rever a estrutura da implicação, em que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente falso.
- 8) Propor uma sentença com conjunção e implicação que é verdadeira em qualquer mundo.
- 9) Propor uma sentença que se utilizada de disjunção e implicação, em que o antecedente é falso e o conseqüente também é falso.
- 10) Sentença simples com conjunção.
- 11) Sentença que oferece uma possível negação da conjunção da sentença anterior.
- 12) Propõe a real negação da conjunção da 10ª sentença, onde se utiliza a disjunção.
- 13) Rever estrutura do quantificador universal que propõe existência de pentágono ou quadrados ou objetos grandes, permitindo triângulos somente grandes.

Atividade VII.2 – Determinar as figuras

Atividade nova, que pretende mobilizar a leitura de sentenças em linguagem natural e fazer uma interpretação nas bases da lógica clássica para realizar a atividade. São fornecidas pistas sobre objetos no mundo, e com estas pistas o aluno deve determinar os possíveis objetos em questão.

2. A partir das informações do mundo Universitas, determine quais podem ser as figuras A e B.

	Não há quadrado na linha de B e A não é quadrado.								
	B é pequeno ou B é grande.								
	A é maior que B								
	A e B possuem a mesma forma.								
	Se B é pequeno, então A não é triângulo.								

Figura 25 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras

Análise das sentenças propostas na atividade.

- 1) Propor posicionamento de B e formato para A, usando a conjunção e na linguagem natural.
- 2) Propor informação sobre o tamanho de B com a disjunção ou em linguagem materna.
- 3) Fixar tamanho de B, pequeno, encadeando análise com a sentença anterior e tornando possível A médio ou grande.
- 4) Fixar os formatos de A e B com iguais, não sendo quadrados.
- 5) Usar a implicação em linguagem materna, deduzindo os formatos de A e B como pentágonos, pois temos o antecedente verdadeiro, já determinado caso a seqüência de raciocínio seja esta, como o conseqüente também deve ser verdadeiro e a 1ª sentença inviabiliza A de ser quadrado, restando somente a forma pentagonal.

Atividade VII. 3 – Descrever estratégia

Pretendemos ter uma explicação para a resolução da atividade anterior, pois como as atividades são individuais, as gravações de áudio e vídeo ficam comprometidas.

3. Descreva a estratégia (justificativa, raciocínio) utilizada na questão anterior.

.....

.....

.....

Atividade VII. 4 – Negação de sentenças

Acreditamos que a maneira de expressar negações de declarações em linguagem materna, informal, contendo operadores lógicos, não favorece acertos quando a situação exige um tratamento lógico formal. Então vamos propor sentenças escritas em linguagem materna, utilizando alguns conectivos lógicos, conjunção, disjunção e implicação, e pedir para que os alunos escrevam sua negação, possibilitando a mobilização, ou não, da estrutura dos conectivos estudados nos encontros anteriores.

4. Escreva a negação de cada sentença abaixo:

a) Paulo é baixo e Paulo é gordo

O esperado é surgir a negação em contexto informal, mais comum, negando os dois atributos de Paulo e a possibilidade de se negar com estrutura lógica clássica com uso da disjunção.

b) Marco é baixo ou gordo.

O esperado é surgir a negação com estrutura comum, negando os dois atributos de Marcos, e a possibilidade de se negar com estrutura lógica clássica com adição da conjunção.

c) Se fizer sol então irei à praia.

O esperado é surgir a negação na estrutura comum, negando o antecedente e o consequente, afirmar o antecedente e negar o consequente, que pode ser interpretada como a falsificação de uma verdade, ou seja, o aluno não encara a sentença como hipótese, e a possibilidade de se negar com estrutura lógica clássica, afirmando o antecedente e negando o consequente, em uma conjunção.

Atividade VII.5 – Avaliação das atividades

Devolutiva dos alunos, fornecendo opinião e sugestões para melhorar as atividades que formaram a oficina.

5. Sua opinião é muito importante. Escreva o que você achou desta oficina e quais são suas sugestões para podermos melhorá-la. Obrigado!

.....

☐ Ótima

☐ Boa

☐ Ruim

2.4.7.2 Experimentação da Atividade VII

A atividade teve a estrutura diferente das anteriores, sendo realizada individualmente, contando com participação de doze alunos e um observador. A ausência de alguns alunos foi justificada pela realização de um evento na escola no mesmo horário do encontro. Mantivemos um observador e gravação de áudio e vídeo.

7º Encontro	15/06/2007	Atividade VII - Finalizando	VII. 1 – Análise de sentenças
			VII. 2 – Determinar as figuras
			VII. 3 – Descrever estratégia
			VII. 4 – Negação de sentenças
			VII. 5 – Avaliação das atividades

Atividade VII.1.

Aluno	Tempo	Uso do tabuleiro
Fortes	10 min.	Não
	Observações	
	- “O aluno perguntou ao professor sobre o símbolo <u>condicional</u> , pois estava confuso quanto ao seu significado”.	

Das doze folhas de respostas entregues, tivemos cinco sem erro algum na análise das sentenças. As sentenças em que ocorreram erros foram:

Sentença	Ocorrência
4	Uma ocorrência, sem pistas do motivo do erro.
6	Uma ocorrência, marcas deixadas apontam para erro de juízo na proposição $Larger(c,a)$, atribuindo F quando é V.
8	Uma ocorrência, sem pistas do motivo do erro.
9	Três ocorrências, em que dois alunos oferecem pistas do motivo do erro. Um propõe o antecedente V, que é F, o outro propõe $F \Rightarrow F$, corretamente, mas estabelece F para a implicação.
11	Três ocorrências, e não há marcas nas folhas de respostas.
12	Três ocorrências, marcas deixadas por um aluno indica que ele atribuiu F para a segunda proposição, desprezando a negação, que a torna V.

Quadro 27 - Atividade VII. 1 – Análise de sentenças: Experimentação

A figura a seguir expõe erro na 9ª sentença em que o aluno atribui V para o antecedente, que é falso, e conclui F. O erro não está no juízo da implicação, mas na proposição que forma o antecedente.

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

Atividade VII– Finalizando

Data: 15/06/2007 NOME: Mayara Mello

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

1	Between(e,d,f)	✓
2	Between(c,c,c)	F
3	SameSize(a,a)	✓
4	Triangle(a) ∨ ~Triangle(a)	✓
5	Triangle(a) ∧ ~Triangle(a)	F
6	~(SameCol(c,e) ∨ Larger(c,a)) ∧ Pentagon(e)	F
7	LeftOf(d,e) ⇒ Square(a)	F
8	(Smaller(c,d) ∧ Smaller(a,c)) ⇒ Smaller(a,d)	✓
9	(Smaller(e,c) ∨ Smaller(a,b)) ⇒ Smaller(f,e)	F
10	Square(d) ∧ Medium(d)	F
11	~Square(d) ∧ ~Medium(d)	F
12	~Square(d) ∨ ~Medium(d)	✓
13	∀ x (Pentagon(x) ∨ Square(x) ∨ Large(x))	F

Figura 26 - Atividade VII. 1 – Análise de sentenças: Experimentação

Atividade VII.2.

Aluno	Tempo	Uso do tabuleiro
Fortes	2 min.	Não
	Observações	
	- “O aluno mencionou que a parte 2 é muito mais legal que a parte 1”.	

Quadro 28 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras: Experimentação

Todos os participantes do encontro identificaram corretamente as figuras, objetos, A e B solicitados na atividade. O que difere em algumas respostas é o fato de que alguns alunos determinaram quais seriam todas as possibilidades para A e B: seis alunos, enquanto outros seis alunos apresentaram apenas uma proposta válida.

Em uma folha de respostas encontramos anotações em o aluno transcreve informação utilizando conectivos lógicos estudados, como por exemplo, ~Square(a).

2. A partir das informações do mundo Universitas, determine quais podem ser as figuras A e B.

Não há quadrado na linha de B e A não é quadrado.
B é <u>pequeno</u> ou B é grande.
A é maior que B
A e B possuem a mesma forma.
Se B é pequeno, então A não é triângulo.

Handwritten notes:
 $B \rightarrow 2^a$
 $N(\text{square})(B)$
 $A \rightarrow$
 $A > B$
 $A \text{ é maior que } B$

Figura 27 - Atividade VII. 2 – Determinar as figuras: Experimentação

Atividade VII.3.

Aluno	Tempo	Uso do tabuleiro
	5 min.	Não
Fortes	Observações	
	- “O aluno perguntou ao professor que tipo de triângulo estava desenhado na parte dois. A resposta do professor foi que realmente está meio confuso e identificou os 3 tamanhos dos triângulos no quadro ilustrativo da parte 2”.	

Quadro 29 - Atividade VII. 3 – Descrever estratégia: Experimentação

Os alunos apresentaram diferentes textos como justificativa para a resolução da atividade anterior. Apresentaremos algumas delas.

Aluno1 - “Se não havia quadrados na linha de B, então era a segunda ou quarta. Se B é pequeno ou grande e A é maior que B, então ele é pequeno. Já que B é pequeno, então pelas primeira e última dica, A não é quadrado ou triângulo, ou seja, é pentágono. Já que os dois têm a mesma forma, B é qualquer pentágono pequeno na segunda e quarta linha e A é qualquer pentágono maior que B”.

O aluno1 apresentou todas as possibilidades para os objetos A e B, como reforço no final da sua justificativa, e justamente ela aponta para uma análise que segue a ordem proposta das dicas.

Aluno2 - "Comecei pelas certezas definitivas, como a primeira sentença. Depois fui eliminando possibilidades até chegar em vários mundos possíveis, por fim, escolhi um dos que achei mais adequado".

O aluno2 identifica apenas um objeto para A e outro para B, mas deixa clara a possibilidade de outras respostas ao falar sobre os "vários mundos possíveis". Em relação às "certezas definitivas", acreditamos tratar-se da conjunção, em que as proposições devam ser verdadeiras para produzir sentença verdadeira, o que não ocorre na disjunção da 2ª dica e na implicação da última dica.

Aluno3 - "Eu assumi a última afirmação como completamente verdadeira, com isso descobri a forma de "a" e conseqüentemente de "b", e para descobrir as posições leva em consideração a 1ª afirmativa".

Acreditamos que o aluno3 inicia a justificativa propondo a análise da implicação afirmando que assume o antecedente e o conseqüente como verdadeiros, observando a possibilidade de ter o antecedente falso, e mesmo assim manter a dica como verdadeira, fazendo uma interpretação da implicação diferente daquela mais comum. A 4ª afirmação é utilizada quando ele conclui *"com isso descobri a forma de "a" e conseqüentemente de "b"*".

Aluno4 - "Primeiro li a 1ª sentença e eliminei as linhas onde B não pode estar. A 2ª sentença, agora é inútil. Li a 3ª sentença e assim, descobri que B é pequeno (através da 2ª sentença). Agora, a 4ª sentença em que A e B eram pentágonos, pois possuem a mesma forma. A 5ª sentença só confirma o que já havia descoberto".

O aluno4 segue a ordem das informações como lhe são apresentadas, destaca que a 2ª sentença só se faz útil após a leitura da sentença seguinte.

Aluno5 - "Se A é maior que B, então B não pode ser grande, por isso é pequeno. Porém só existe pentágono pequeno. Outra afirmativa diz que A tem a mesma forma de B, então A também é pentágono (médio ou grande). O pentágono pequeno não está na mesma linha que nenhum quadrado".

O aluno5, aparentemente, encadeia suas justificativas sem se importar com a seqüência em que as dicas lhe são apresentadas. Relaciona a segunda e terceira informações construindo uma implicação partindo do antecedente "A é maior que B", que é informação verdadeira, concluindo que B é pequeno a partir da conjunção "B é pequeno ou B é grande". Como não há restrições para A ser médio ou grande, não faz afirmações sobre o tamanho de A.

Atividade VII.4.

Aluno	Sentença	Tempo	Observações
Fortes	a	1 min	Não
	b	1 min	Não
	c	2 min	Não

Quadro 30 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação

As respostas para a negação das sentenças são variadas, então criamos alguns critérios para classificação das negações propostas e apresentamos todas, mesmo que repetidas.

As negações para a sentença “Paulo é baixo e Paulo é gordo”:

Intenção do aluno	Resposta apresentada
Negar a sentença utilizando a negação com o objetivo de torná-la falsa, considerando-a como verdadeira, negando as duas características de Paulo. Mantendo um raciocínio comum para se negar uma conjunção.	Paulo não é baixo e gordo Paulo não é baixo e Paulo não é gordo. Paulo não é baixo e não é gordo. Não é verdade que Paulo é baixo e gordo. Paulo não é baixo e Paulo não é gordo. Paulo não é baixo e não é gordo. Paulo não é baixo e Paulo não é gordo. ~Paulo é baixo $\wedge$ ~Paulo é gordo. ~(A $\wedge$ B)
Negar a sentença falsificando uma das características de Paulo, mas sem utilizar a negação. Avança na proposta de falsificar uma conjunção, pois basta uma proposição falsa, porém utiliza-se de antônimo, o que é comum no uso da língua materna.	Paulo é baixo e magro.
Negar a sentença com uso da disjunção e negação das características de Paulo. Demonstra um raciocínio diferente do comum, mesmo se utilizando da língua materna.	Paulo não é baixo ou não é gordo. Paulo não é baixo $\vee$ Paulo não é gordo

Quadro 31 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação

As negações para a sentença “Marco é baixo ou gordo”:

Intenção do aluno	Resposta apresentada
Negar a sentença com a negação de cada uma das características de Marco e mantendo a disjunção, ou negando a sentença utilizando-se do escopo da negação. Comum no cotidiano.	Marco não é baixo ou não é gordo. Marco não é baixo ou não é gordo. Marco não é baixo ou não é gordo. Marco não é baixo ou não é gordo Não é verdade que Marco é baixo

	ou gordo. $\sim(A \vee B)$
Negar a sentença com a negação de cada uma das características de Marco e trocando a disjunção pela conjunção, com uso de antônimos.	Marco não é baixo e não é gordo. Marco não é baixo e nem gordo. Marco não é baixo $\wedge$ Marco não é gordo.
Negar a sentença cada uma das características de Marco e trocando a disjunção pela conjunção.	Marco é alto e magro.
Negar a sentença com a negação da conjunção das características de Marco.	Marco não é baixo e gordo. Marco não é baixo e gordo.
Sem classificação.	$\sim$ Marco é baixo $\vee$ Marco gordo.

Quadro 32 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação

As negações para a sentença “Se fizer sol então irei à praia”:

Intenção do aluno	Resposta apresentada
Sentenças em que se negam o antecedente e o conseqüente, raciocínio comum para se negar uma implicação.	Se não fizer sol então não irei à praia. Se não fizer sol, não irei à praia. Se não fizer sol então não irei à praia. Se não fizer sol não irei à praia. Se não fizer sol não irei à praia.
Manter o antecedente e negando o conseqüente, que fica diferente de uma negação intuitiva da implicação, mas não acrescenta a conjunção.	Se fizer sol então não irei à praia. Se fizer sol então não irei à praia. Se fizer sol não irei à praia. Se fizer sol então não irei à praia.
Utilizar a negação com escopo externo à implicação.	$\sim(A \rightarrow B)$
Negar o antecedente e manter o conseqüente, que difere de uma negação mais comum de uma implicação, mas desprezando a propriedade da implicação que, tendo o antecedente falso, pode-se afirmar qualquer coisa.	Se não fizer sol então irei à praia. $\sim$ fizer sol $\rightarrow$ irei a praia.

Quadro 33 - Atividade VII. 4 – Negação de sentenças: Experimentação

Atividade VII. 5.

As opiniões e sugestões, como ficaram abertas, são apresentadas de diversas maneiras, então separamos como críticas positivas, críticas negativas e sugestões.

Críticas positivas:

O curso é muito bom; Achei interessantes os mundos; Tenho certeza de que aprendi algo mesmo que subconscientemente; Achei uma aula bem interessante; Aulas de lógica foram muito bem elaboradas; Achei muito interessante o curso, ele realmente faz raciocinar; Na minha opinião as aulas foram muito boas; Eu achei a oficina ótima, e

não tem como melhorar; Achei a oficina bem interessante; Eu gostei das aulas; Achei uma oficina muito interessante onde nós trabalhamos nossos pensamentos lógicos.

Críticas negativas:

Tornou-se repetitivo; depois de um tempo ficou monótona; achei as atividades cansativas; achei que em alguns momentos foi muito repetitivo; as aulas são um pouco cansativas por serem sempre exercícios parecidos; o único problema é o período entre uma aula e outra, que faz esquecer de muitos termos e dificulta a fluidez do curso.

Sugestões:

Minha sugestão é inovar nos exercícios a cada aula para torná-la mais dinâmica; Exercícios mais variados, e talvez desafios trazidos pelo professor; para melhorar a oficina deveria haver uma maior participação conjunta; Acho que se as atividades mudassem a cada semana seria mais interessante; Uma sugestão é torná-las um pouco mais diferentes, com exercícios mais variados; Acho que poderiam ter outras atividades explorando a lógica; Deveríamos ter mais tempo para praticar e poder usar melhor todos os símbolos que aprendemos; Em cada aula 15 min deveriam ter sido usados só para recordar as propriedades, ou uma folha com elas escritas deveriam ser entregues ao alunos.

Comentário completo que nos parece pertinente ao propósito da oficina.

- “Achei a oficina bem interessante. Deveríamos ter mais tempo para praticar e poder usar melhor todos os símbolos que aprendemos.”

- “Continuaremos “usando-as” nas negações do dia-a-dia. Com certeza, todos pensam duas vezes antes de fazê-las”.

A oficina foi avaliada como ótima por 4 alunos e como boa por 8 alunos, não houve avaliação ruim.

2.4.7.3 Análise a Posteriori da Atividade VII

O aumento da quantidade de erros na atividade Análise de sentenças, em que os alunos analisam valor de verdade das sentenças, sugere que o diálogo com o colega, componente do grupo, ajuda no estabelecimento de juízo sobre a declaração.

Dois erros cometidos pelos alunos sugerem conflito entre uso de pensamentos com estrutura lógica clássica e cotidiana. Primeiro, quando o aluno faz a anotação $F \Rightarrow F(V)$, mas que no momento da atribui F para a implicação, conjecturamos sobre o dilema de seguir “o que é dito como correto” e “o que eu acredito ser correto”. Dito de outro modo, seguir ou não a minha intuição.

O segundo erro que destacamos ocorre na disjunção, em que $F \vee F$ é considerado (V). Neste caso, o senso comum e lógica clássica estão de acordo, mas o aluno pode ter assimilado que a lógica clássica é contrária ao senso comum, ou lógica não-formal, portanto opta por ir contra sua intuição.

A atividade VII. 2, determinar as figuras, mobilizou raciocínios com estrutura de encadeamento lógico dedutivo. Essa afirmação tem respaldo na devolutiva da atividade VII. 3, descrever estratégia, não apenas pelo uso dos termos “se ... então...”, mas pela natureza da atividade e a evidência do pensamento hipotético, como na frase “Eu assumi a última afirmação como completamente verdadeira ...”

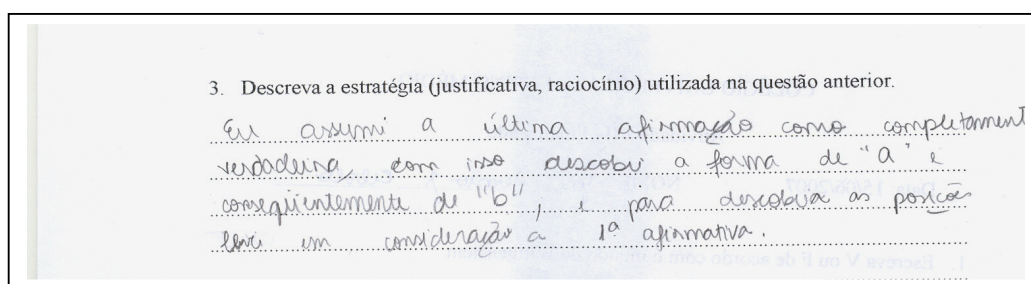


Figura 28 - Atividade VII. 3 – Descrever estratégia: Experimentação

Os resultados das negações das sentenças em linguagem natural reforçam a conjectura de que o uso de expressões em língua materna leva ao uso de pensamentos com estrutura não-formal, mesmo com a alteração dos códigos, pois mesmo quem transcreveu para os símbolos lógicos por nós utilizados, não apresentaram melhor desempenho. Negar é tornar uma declaração verdadeira em falsa.

Que os alunos perceberam a existência de diferentes maneiras de interpretar e fazer juízo – lógica clássica e cotidiana - em relação aos conectivos lógicos apresentados nas atividades, não nos parece ser alvo de dúvidas, assim como essas atividades não foram suficientes para que eles assimilassem equivalência entre algumas sentenças utilizadas nas atividades, como $\sim(A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$ ou $\sim(A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$ ²⁷. Porém, seguindo nossa proposta, o momento para estabelecê-las faz-se surgir, mesmo sem uso de tabela verdade.

Como nosso objetivo não era de ensinar lógica clássica, mas propor atividades em que se utilizassem dela para mobilizar pensamentos com sua estrutura, acreditamos que isso tenha ocorrido neste encontro finalizador.

²⁷ Leis de Morgan

3. Descreva a estratégia (justificativa, raciocínio) utilizada na questão anterior.

Comencei pelos cartões definitivos, comecei a primeira sentença. Depois fui eliminando possibilidades até chegar em vários mundos possíveis por fim escolhi um dos que achei mais adequados.

4. Escreva a negação de cada sentença abaixo:

a) Paulo é baixo e Paulo é gordo $b(p) \wedge g(p)$

Paulo é baixo e magro.

b) Marco é baixo ou gordo. $b(m) \vee g(m)$

Marco é alto e magro.

c) Se fizer sol então irei à praia. $\begin{matrix} \text{sol} & \Rightarrow & \text{praia} \\ \text{F} & & \text{V/F} \end{matrix}$

Se fizer sol não irei à praia.

Figura 29 - Atividade VII. 3 e VII. 4 – Experimentação

Ao descrever a estratégia da resolução da atividade VII. 2, destacamos o momento da frase em que o aluno diz “em vários mundos possíveis”, que sugere ação de “sujeitos do nível III A”, que “se organizam segundo um conjunto de combinações possíveis”(PIAGET; INHELDER, 1976, p.42).

As negações para as sentenças nos sugerem que houve identificação dos conectivos nas sentenças, mesmo escritas em linguagem natural, sem uso dos símbolos lógicos. Porém, não tivemos grande número de ocorrência de respostas que seriam consideradas corretas segundo as regras da lógica clássica e tabelas verdade. Lembrando que isto não é nosso objetivo. Dentre as onze folhas de atividades respondidas, destacamos duas negações corretas da conjunção e uma negando apenas uma proposição.

Nas negações da disjunção temos seis utilizando do conectivo “e” com respostas bem fundamentadas e a procura de destacar uso da conjunção. No caso das negações da implicação, temos cinco que apresenta, em nossa avaliação, o censo comum de negar as proposições envolvidas e quatro negações que sugerem manter o antecedente verdadeiro e negar o consequente, que sinaliza para uma boa assimilação desse conectivo, mas em nenhuma negação ocorre o uso da conjunção, que é necessário quando se utiliza o rigor de regras da lógica clássica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, que abrange a lógica clássica - conectivos lógicos - e educação matemática no ensino médio, procuramos responder a questão: em que medida é possível desenvolver em alunos do ensino médio o domínio e a habilidade de utilização de regras da lógica clássica?

Os estudos preliminares que fundamentaram nossa pesquisa mostraram que, ao tratarmos de conhecimento, não podemos ficar alheios aos movimentos e debates que ocorreram, e ainda ocorrem, na busca do seu entendimento, sua origem e como proceder para sua “transmissão”, validação e evolução.

As diferenças entre o conhecimento matemático acadêmico e o conhecimento matemático escolar não passam despercebidas, na linguagem, uso e justificativas. O aluno no ensino médio se depara com afirmações do tipo “*Dois matrizes A e B são iguais se, e somente se, têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais*” ou do tipo “ $A_{(m \times n)} = B_{(m \times n)} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$ ”, que aparentemente permeiam ambos os níveis de conhecimento, sem dar importância de como se dá a validação de tais afirmações no âmbito da matemática escolar, do uso do conectivo lógico bicondicional nesta validação e nem uso de uma linguagem que, mesmo quando não se utiliza de símbolos próprios da matemática, carrega algumas características próprias.

Acreditamos que as atividades, de nosso trabalho, da forma como foram conduzidas, favoreceram a criação de um ambiente estimulante e a partilha de conjecturas originadas a partir das experiências vivenciadas na realização das atividades. Com experiências, nos referimos a todas as percepções oriundas das realizações físicas, cognitivas e emocionais experimentadas pelos alunos ao interagirem com o material utilizado, com a lógica clássica e ambiente dos encontros.

A opção de trabalharmos com duplas, troca das folhas de atividades entre as duplas para conferência e o desafio dos mundos, contribuiu muito para uma interação e partilha de observações e opiniões entre os participantes dos encontros. Possibilitando estabelecer relações entre conhecimentos que atuam em diferentes situações e contextos. Compartilhar e rever com os colegas esse relacionamento e se posicionar em relação a uma nova visão, ou uso, de conhecimento aceito em diferentes contextos.

O material utilizado: peças de E.V.A. e tabuleiro, para criação de mundo, folha de tradução, para consulta sobre expressões e folhas de atividades, realização das atividades, favoreceu a correspondência entre o possível concreto, peças e tabuleiro, e o possível lógico, as sentenças lógicas utilizadas para descrever ou criar um mundo possível.

Ao fazer juízo de uma afirmação ou descrever um mundo a partir das sentenças lógicas, há o envolvimento e o domínio da linguagem utilizada. Criar sentenças ou interpretá-las, $\text{Smaller}(b,a)$ ou $\sim(\text{Large}(a) \wedge \text{Medium}(b))$, por exemplo, requer esse domínio.

Quando criamos um mundo a partir da interpretação de sentenças com estrutura da lógica clássica, envolvendo os conectivos lógicos, estabelecemos uso de um encadeamento de raciocínios que estão de acordo com a estrutura estabelecida pela lógica clássica, que procura, como na linguagem matemática, evitar a possibilidade de interpretações dúbias. Por exemplo, sendo verdadeira as sentenças $\text{Triangle}(a) \Leftrightarrow \text{Large}(a)$ e $\text{Larger}(b,a)$, impossibilita o objeto a ser triângulo, pois o objeto b deve ser maior que a , e para atender a bicondicional, onde a segunda proposição é falsa, visto que a não pode ser grande, a primeira proposição também deve ser falsa.

Com a proposta do desafio, o uso do tabuleiro e peças, mais comum nos primeiros encontros, a criação dos mundos coloca em confronto a liberdade total e a restrição imposta pela estrutura lógica, reforçando o encadeamento de raciocínio com estrutura lógica utilizada nas atividades.

No encontro em que utilizamos a disjunção, encontramos proposições que deveriam ser necessariamente falsas. Falsas em virtude das outras sentenças, o que reforça um controle sobre as sentenças e a nossa conjectura quanto ao uso do encadeamento lógico entre as sentenças propostas no desafio.

Situações desenvolvidas visando um confronto entre uma lógica “cotidiana” e a lógica clássica, também recebeu atenção e resultados satisfatórios. A negação da conjunção, disjunção e implicação, e a interpretação inclusiva da disjunção, geraram forte conflito entre o censo comum e a lógica clássica.

Podemos afirmar que o pico desse embate ocorreu quando fizemos uso da implicação, pois temos a interpretação causal enraizada *versus* a análise da lógica clássica. A implicação é normalmente utilizada como seqüência de fatos, causa e efeito, como, por exemplo, a afirmação “Se chover então não saio de casa”. Então, aceitar que o objeto a pode ser quadrado ao analisar a sentença $\text{Smaller}(a,a) \Rightarrow \text{Square}(a)$ não é muito

trivial, aliás aceitar que a implicação é verdade em qualquer mundo possível, respeitando estrutura de nossas atividades, é mais difícil.

As sentenças que são verdadeiras em qualquer mundo, $\text{SameSize}(a,a)$, por exemplo, quando eram propostas para a construção do mundo, repercutiram da forma esperada, não acrescentava nada, ou seja, não era uma dica útil para a construção do mundo, fato que incomodava os alunos nas atividades iniciais.

As sentenças que são falsas em qualquer mundo, $\text{Smaller}(a,b) \wedge \text{Large}(a)$, por exemplo, propostas nas análises de sentenças, criaram certa mobilização entre os alunos nos primeiros encontros, mas em seguida não causavam mais as agitações pretendidas.

Conseguir uma motivação intrínseca para uso e interpretação dos conectivos lógicos, a partir da lógica clássica, era uma das metas a ser atingida pelas atividades por nós propostas, pois é muito importante abordar uma situação problema de forma que seja interessante ao aluno. Procuramos então, fazer com que o aluno tivesse interesse a partir do estabelecimento de conflito entre o que ele sabe e o que ele quer saber.

Pelo que foi apresentado, acreditamos que as atividades, caracterizadas pelo uso de pensamentos com estrutura da lógica clássica, propiciaram situações em que foi possível aos alunos do ensino médio, desenvolver certos domínios e habilidades quanto ao uso de regras da lógica clássica.

Acrescentamos ainda que este trabalho possa incentivar outros profissionais a criar novas atividades, a partir da estrutura proposta pelo *applet Tarski's World*, com objetivo de desenvolver raciocínios com uso dos conectivos lógicos e quantificadores, em alunos de diferentes níveis escolares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAR, Celina A.A. Pereira. **Noções de lógica Matemática**. Disponível em: <<http://www.pucsp.br/~logica/>>. Acesso em: 22 jul. 2008.
- ARTIGUE, Michèle; BRUN, Jean (Org.). **Engenharia Didáctica: Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 193-217 p. (Horizontes Pedagógicos).
- ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS (Inglaterra). **Ensino Moderno da Matemática: Álgebra e Teoria dos Conjuntos**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972. 2 v. Tradução de Ligia M. C. de Souza Rodrigues.
- BARWISE, Jon; ETCHMENDY, John. **Computers, Visualization, and the Nature of Reasoning**. pub. em 1996. Disponível em: <<http://ggww2.stanford.edu/GUS/openproof/CVandNR.pdf>>. Acesso em: 01 jun. 2008.
- BARWISE, Jon; ETCHMENDY, John. **Language, Proof and Logic**. Stanford: Csl Publications, 2000. Center for the Study of Language and Information.
- BOOTH, Wayne C.; COLOMB, Gregory G.; WILLIAMS, Joseph M.. **A arte da pesquisa**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.
- BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Ministério da Educação (MEC). **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Governo Federal, 2006. 2 v.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Governo Federal, 1997. 3 v.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação (MEC). **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Governo Federal, 1999.
- DESCARTES, René. **MEDITAÇÕES: Concernentes à Primeira FILOSOFIA nas quais a Existência de Deus e a Distinção Real entre a Alma e o Corpo do Homem são Demonstradas**. 1ª São Paulo: Abril Cultural, 1973. 91-150 p. (Os Pensadores). Trad. J. Guinsburg e Bento Prado Júnior.

BROUSSEAU, Guy; BRUN, Jean (Org.). **FUNDAMENTOS E MÉTODOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 35-113 p. (Horizontes Pedagógicos).

BRUN, Jean (Org.). **FUNDAMENTOS E MÉTODOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: DIDÁTICA DAS MATEMÁTICAS**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. 11-34 p. (Horizontes Pedagógicos).

EPP, Susanna S. The Role of logic in Teaching Proof. **The America Mathematical Monthly: MAA**, United States of America, p. 886-899. 01 dez. 2003.

JAPIASSÚ, Hilton; MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3 ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

KANT, Immanuel. **CRÍTICA DA RAZÃO PURA**. 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

LALANDE, Andre. **Vocabulário Técnico e Crítico da Filosofia**. 3. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

LURIA, Alexander Romanovich. **CURSO DE PSICOLOGIA GERAL: Linguagem e Pensamento**. 8. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira S. A., 1979. 4 v.

MACHADO, Nílson José; CUNHA, Marisa Ortegoza da. **Lógica e Linguagem Cotidiana: verdade, coerência, comunicação, argumentação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. (Tendências em educação matemática).

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - UMA (NOVA) INTRODUÇÃO**. São Paulo: Educ - Puc, 1999. 197-208 p.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara; NOGUEIRA, Maria Tereza De Lima Carvalho. A LÓGICA ELEMENTAR DA MATEMÁTICA E O ENSINO SUPERIOR. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 7, n. 1, p.63-80, 2005. Anual.

MENEZES, Luis; Uma avaliação em percurso de rede internacional virtual de educação para o melhoramento da aprendizagem de ciência e matemática na américa latina (rived). In: Guiomar Namó de Mello. (Org.) **Ofício de Professor na América Latina e Caribe**. São Paulo, v., p.157-162. 2004.

MORENTE, Manuel Garcia. **FUNDAMENTOS DE FILOSOFIA: LIÇÕES PRELIMINARES**. 8. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1980.

- MORAN, José Manuel. **A integração das tecnologias na educação**. Disponível em: <<http://www.eca.usp.br/prof/moran/integracao.htm>>. Acesso em: 16 out. 2008.
- MORIN, Edgar; **Os sete Saberes necessários à Educação do Futuro**. 5ª São Paulo: Cortez Editora, 2002.
- MORIN, Edgar. **O MÉTODO**. 3ª Portugal: Publicações Europa-América, 1977.
- NOLT, John; ROHATY, Dennis. **Lógica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.
- NUNES, Cesar Augusto Amaral (Org.). O Bom Uso de Objetos de Aprendizagem. In: MORAES, Ubirajara Carnevale de. Tecnologia Educacional e Aprendizagem: O Uso dos Recursos Digitais. São Paulo: Livro Pronto, 2007. p. 215-231.
- OLIVEIRA, Marta Kohl de. **VYGOTSKY: APRENDIZADO E DESENVOLVIMENTO UM PROCESSO SÓCIO-HISTÓRICO**. São Paulo: Scipione, 1993. (PENSAMENTO E AÇÃO NO MAGISTÉRIO).
- OTTE, Michael. **O FORMAL, O SOCIAL E O SUBJETIVO: UMA INTRODUÇÃO À FILOSOFIA E À DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**. São Paulo: Unesp, 1993.
- PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Tendências em educação matemática).
- PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Livraria Pioneira, 1976.
- PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **Gênese das Estruturas Lógicas Elementares**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1971.
- ROHDEN, Luiz. **Hermenêutica filosófica: Entre a linguagem da experiência e a experiência da linguagem**. São Leopoldo: Unisinos, 2005. (Coleção idéias).
- STEPHANOU, Lambros; PITTA-PANTAZI, Demetra. The impact of the intuitive rule "If A then B, if not A then not B", in perimeter and area tasks. In: PROCEEDINGS 30TH CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30., 2006, Prague. **Research reports**. Prague: Novotná J., Moraová H., Krátká M & Stehlíková N, 2006. v. 5, p. 177 - 184. CD-ROM.

ANEXOS

Anexo A - Folha de orientações

Anexo B – Atividade I – Reconhecimento

Anexo C – Atividade II – Negação e Conjunção

Anexo D – Atividade III – Disjunção

Anexo E – Atividade IV – Revisão

Anexo F – Atividade V – Implicação e Bicondicional

Anexo G – Atividade VI – Quantificadores

Anexo H – Atividade VII - Finalizando

Anexo A**COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO****ORIENTAÇÕES**

“Tradução” das sentenças utilizadas nas atividades:

Triangle(a): **a** é um triângulo

Square(a): **a** é um quadrado

Pentagon(b): **b** é um pentágono

Small(b): **b** é pequeno

Medium(a): **a** é médio

Large(b): **b** é grande

Smaller(a,b): **a** é menor que **b**

LeftOf(b,a): A coluna de **b** está à esquerda da coluna de **a**

SameSize(a,b): **a** é do mesmo tamanho de **b**

SameRow(a,b): **a** está na mesma linha de **b**

SameCol(b,a): **b** está na mesma coluna de **a**

Between(a,b,c): **a** está entre **b** e **c** (na linha, coluna ou diagonal)

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

DESAFIO DOS MUNDOS

Data: ____/____/2007

GRUPO _____

DESAFIADO _____

Desafie seu oponente escrevendo, pelo menos, cinco sentenças para que ele construa seu mundo.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

[illegible]

Anexo C

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

Atividade II – Negação e Conjunção

Data: ____/____/2007

GRUPO ____

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

					1	$\sim \text{Large}(f)$	
					2	$\sim \text{Medium}(b)$	
					3	$\sim \text{BackOf}(f,a)$	
					4	$\sim \text{Between}(c,c,c)$	
					5	$\sim \text{SameRow}(d,e)$	
					6	$\sim \text{Square}(b)$	
					7	$\sim (\sim \text{Triangle}(e))$	
					8	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	
					9	$\text{Triangle}(f) \wedge \text{Small}(f)$	
					10	$\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f)$	
					11	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge \text{Large}(f)$	
					12	$\sim (\text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Large}(f))$	
					13	$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \wedge \sim \text{Small}(f))$	
					14	$\sim (\sim \text{Triangle}(c) \wedge \text{Pentagon}(e))$	
					15	$\sim (\text{LeftOf}(e,d) \wedge \text{LeftOf}(d,e))$	

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\sim (\sim \text{Triangle}(a) \wedge \text{Pentagon}(a))$
2	$\text{Triangle}(d) \wedge \text{Triangle}(a)$
3	$\text{Pentagon}(f) \wedge \text{SameCol}(f,d)$
4	$\sim (\text{Large}(d) \wedge \text{Large}(e))$
5	$\text{Between}(d,e,f) \wedge \sim \text{Smaller}(a,f)$
6	$\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{LeftOf}(b,e)$
7	$\sim (\text{SameCol}(d,f) \wedge \sim (\text{Triangle}(d)) \wedge \sim (\text{Pentagon}(d)))$

Conferido pelo grupo:

Anexo D**COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO****Atividade III – Disjunção**

Data: ____/____/2007

GRUPO ____

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

						1	Triangle(f) $\vee$ Large(f)	
						2	Triangle(f) $\vee$ Small(f)	
						3	Triangle(f) $\vee$ $\sim$ Large(f)	
						4	$\sim$ Triangle(a) $\vee$ $\sim$ Triangle(b)	
						5	Pentagon(c) $\vee$ Smaller(c,b)	
						6	$\sim(\sim$ Triangle(f) $\vee$ $\sim$ Small(f))	
						7	$\sim(\sim$ Triangle(c) $\vee$ Pentagon(e))	
						8	SameRow(c,a) $\vee$ Between(c,a,f)	
						9	LeftOf(a,b) $\vee$ Smaller(e,d)	
						10	Between(d,e,f) $\vee$ Medium(b)	
						11	SameCol(a,d) $\vee$ SameRow(a,d) $\vee$ $\sim$ Square(e)	

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\sim(\sim$ Triangle(a) $\vee$ Pentagon(a))
2	Medium(a) $\vee$ Smaller(a,b)
3	Pentagon(b) $\vee$ $\sim$ SameCol(c,b)
4	Large(c) $\vee$ Large(a) $\vee$ Small(b)
5	Between(a,c,b) $\vee$ Between(a,a,a)
6	SameSize(a,a) $\vee$ $\sim$ (LeftOf(d,e) $\vee$ Small(a))
7	$\sim$ (SameCol(c,b) $\vee$ $\sim$ (SameRow(a,c)))

Conferido pelo grupo:

Anexo E**COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO****Atividade IV – Revisão**

Data: ____/____/2007

GRUPO ____

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

1	$\sim \text{Triangle}(f) \vee \text{Large}(f)$	
2	$\sim (\text{SameSize}(a,a) \wedge \text{SameCol}(d,d))$	
3	$\text{Between}(c,a,f) \wedge \text{Between}(d,e,f)$	
4	$\text{Smaller}(b,c) \vee \text{Smaller}(c,b)$	
5	$\text{Smaller}(e,d) \vee \text{Smaller}(d,e)$	
6	$\sim \text{Triangle}(f) \wedge (\text{Large}(f) \vee \text{Square}(c))$	
7	$(\sim \text{Triangle}(f) \vee \text{Large}(f)) \wedge \text{Square}(c)$	
8	$\text{SameRow}(c,a) \wedge \text{SameCol}(c,a)$	
9	$\sim (\sim \text{Triangle}(f) \vee \sim \text{Small}(f)) \vee \text{Triangle}(a)$	
10	$\text{Square}(a) \wedge \sim (\sim \text{Triangle}(c) \vee \text{Pentagon}(e))$	
11	$\text{LeftOf}(a,b) \vee \text{Smaller}(e,d) \vee \text{LeftOf}(b,a)$	
12	$\text{Smaller}(a,e) \wedge \text{SameSize}(e,a)$	
13	$\sim (\text{Between}(a,a,a) \wedge (\text{Smaller}(a,a) \vee \text{SameSize}(a,a)))$	

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\sim \text{Triangle}(a) \wedge \sim \text{Pentagon}(a)$
2	$\sim (\text{Medium}(a) \vee \text{Smaller}(a,b)) \wedge \text{LeftOf}(a,b)$
3	$\text{Pentagon}(b) \wedge \text{SameRow}(c,b)$
4	$\sim (\text{Large}(c) \wedge (\text{Large}(a) \vee \text{Small}(b)))$
5	$\text{Between}(a,c,b) \wedge \sim \text{Between}(a,a,a)$
6	$\sim \text{Smaller}(a,d) \wedge \sim \text{Smaller}(d,a) \wedge \sim \text{Square}(d)$
7	$\sim (\text{SameCol}(d,c) \vee \text{SameRow}(d,b) \vee \text{Between}(a,b,d))$

Conferido pelo grupo:

COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO

Atividade IV – Revisão

Data: ____/____/2007

GRUPO ____

1) Sejam as proposições:

p: Paulo é inteligente.

r: Paulo é jogador.

Escreva, na forma simbólica, utilizando os símbolos lógicos, cada uma das proposições abaixo, e determine seu valor de verdade:

a) Paulo não é inteligente.()

b) Paulo é jogador.()

c) Não é verdade que Paulo não é jogador.()

d) Paulo é inteligente ou não é jogador.()

e) Paulo não é jogador e é inteligente.()

2) Escreva a negação de:

a) Juvenal é alto e Juvenal é magro.

.....

b) $1 \leq x \leq 3$

.....

Anexo F**COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO****Atividade V– Implicações e Bicondicional**

Data: ____/____/2007

GRUPO ____

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

1	Square(d) => Square(f)	
2	Square(d) => Triangle(f)	
3	(Triangle(a) ∧ Square(c)) => Pentagon(d)	
4	(~LeftOf(b,a) ∧ SameRow(a,b)) => LeftOf(a,b)	
5	(Square(a) ∧ Pentagon(e) => LeftOf(a,e)	
6	Triangle(a) <=> Small(a)	
7	LeftOf(a,b) <=> SameCol(c,f)	
8	(Square(d) => Square(f)) <=> (Square(d) => Triangle(f))	
9	(SameSize(a,b) => SameSize(b,a)) <=> ~Smaller(a,b)	
10	SameSize(c,e) <=> ~Smaller(b,c)	
11	Triangle(b) => Square(a)	

2. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	Square(a) <=> ~(Square(b) ∨ Triangle(b))
2	Large(b) => SameSize(b,c)
3	(SameRow(b,c) ∧ SameCol(a,b)) => ~SameRow(a,c)
4	~Between(b,a,c) <=> Smaller(a,c)
5	Between(d,a,c) <=> ~ SameRow(d,c)
6	(LeftOf(a,d) ∧ LeftOf(b,d)) <=> LeftOf(d,c)
7	(Smaller(d,c) ∨ Square(c)) => Smaller(d,a)

Conferido pelo grupo:

3. Construa um mundo para que as sentenças abaixo sejam simultaneamente verdadeiras.

1	$\exists x \text{ Pentagon}(x)$
2	$\forall x (\text{Triangle}(x) \vee \text{Square}(x) \vee \text{Pentagon}(x))$
3	$\exists y (\text{Pentagon}(x) \wedge \text{Large}(x))$
4	$\exists y (\text{Triangle}(y) \wedge \text{Large}(y))$
5	$\exists y (\sim \text{Medium}(y) \wedge \text{Square}(y))$
6	$\forall x (\text{Square}(x) \vee \text{Large}(x))$

[illegible]

Conferido pelo grupo:

Anexo H**COLÉGIO UNIVERSITAS – ENSINO MÉDIO****Atividade VII– Finalizando**

Data: 15/06/2007

NOME: _____

1. Escreva V ou F de acordo com o mundo de Wittgenstein.

1	Between(e,d,f)	
2	Between(c,c,c)	
3	SameSize(a,a)	
4	Triangle(a) $\vee$ $\sim$ Triangle(a)	
5	Triangle(a) $\wedge$ $\sim$ Triangle(a)	
6	$\sim$ (SameCol(c,e) $\vee$ Larger(c,a)) $\wedge$ Pentagon(e)	
7	LeftOf(d,e) $\Rightarrow$ Square(a)	
8	(Smaller(c,d) $\wedge$ Smaller(a,c)) $\Rightarrow$ Smaller(a,d)	
9	(Smaller(e,c) $\vee$ Smaller(a,b)) $\Rightarrow$ Smaller(f,e)	
10	Square(d) $\wedge$ Medium(d)	
11	$\sim$ Square(d) $\wedge$ $\sim$ Medium(d)	
12	$\sim$ Square(d) $\vee$ $\sim$ Medium(d)	
13	$\forall x$ (Pentagon(x) $\vee$ Square(x) $\vee$ Large(x))	

2. A partir das informações do mundo Universitas, determine quais podem ser as figuras A e B.

Não há quadrado na linha de B e A não é quadrado.
B é pequeno ou B é grande.
A é maior que B
A e B possuem a mesma forma.
Se B é pequeno, então A não é triângulo.

3. Descreva a estratégia (justificativa, raciocínio) utilizada na questão anterior.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Escreva a negação de cada sentença abaixo:

a) Paulo é baixo e Paulo é gordo

.....

b) Marco é baixo ou gordo.

.....

c) Se fizer sol então irei à praia.

.....

5. Sua opinião é muito importante. Escreva o que você achou desta oficina e quais são suas sugestões para podermos melhorá-la. Obrigado!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

☐ Ótima

☐ Boa

☐ Ruim