

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Daniela Milaneze Rodrigues

**A compreensão de alunos, ao final do Ensino Médio,
relativa ao conceito de variável**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Daniela Milaneze Rodrigues

**A compreensão de alunos, ao final do Ensino Médio,
relativa ao conceito de variável**

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Prof. Doutor Benedito Antonio da Silva.

SÃO PAULO

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ Local e data: _____

Este trabalho é dedicado ao meu esposo, pelo seu companheirismo, apoio, incentivo e compreensão nos momentos em que deixei de lhe dar atenção e carinho por conta da dedicação à vida acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos...

... Ao meu orientador, Professor Benedito Antonio da Silva, por aceitar a orientação desta pesquisa, pela disponibilidade prestada, pelas correções, sugestões e discussões, que tanto contribuíram para minhas reflexões como pesquisadora, pela paciência, atenção, confiança e incentivo à conclusão do trabalho no momento em que mais precisei.

... À minha família, por me amparar e me ajudar, da forma como foi possível, a concluir esta etapa de minha vida acadêmica. Em especial, agradeço à minha amada avó, Olézia, pela preocupação e por me acalmar, muitas vezes, dizendo: “Já está acabando, falta só mais um pouco”; ao meu pai que sempre diz: “O mérito é todo seu!” (Mas sem o apoio e o incentivo que recebi de você para estudar, e procurar fazer sempre o melhor, eu não teria realizado tudo o já fiz até hoje); à minha mãe que cansou de perguntar: “Já terminou o trabalho?” E cansou de ouvir: “Ainda não!” (Obrigada mãe, pela força que você me deu quando eu pensei em desistir de tudo); ao meu irmão, pelos conselhos e pelas dúvidas esclarecidas quanto à redação do trabalho.

... Ao meu esposo, por todo o incentivo, companheirismo, compreensão, carinho, paciência e amor.

... À professora Iole de Freitas Druck, por aceitar participar da banca examinadora, pela docente exemplar que sempre foi, pelo respeito, pelo carinho, pela consideração e pelas valiosas sugestões e críticas realizadas na ocasião da qualificação. Sinto por não ter condições de manter o contato que gostaria, mas sempre lembrarei dos momentos que tivemos no IME.

... À professora Sonia Barbosa Camargo Iglioni, pela grande contribuição em minha formação no mestrado, pelas críticas e questionamentos que despertaram tantas reflexões e me fizeram

amadurecer enquanto educadora, e por sua participação na banca examinadora.

... À minha querida amiga Juliana, pela sua ajuda, por me acompanhar durante toda a trajetória de desenvolvimento desta pesquisa, por participar como observadora no momento da aplicação do questionário, sempre se dispondo a me ouvir falar sobre este trabalho. Obrigada, Jú, pelo apoio prestado, pelo companheirismo, pelo incentivo, pela paciência em ler todo o meu trabalho e me auxiliar na revisão e formatação. Enfim, obrigada pela felicidade que sinto em ter sua amizade.

... Aos professores do Programa com quem tive o privilégio de conviver e aprender. Sem dúvida, cada um a seu modo, contribuiu para o meu crescimento profissional.

... A CAPES pelo apoio financeiro, pois sem ele, provavelmente, não teria chegado até aqui.

... A Rose pelas conversas sobre o 3UV, pelas sugestões, pelas questões que sempre levantávamos quando começávamos a falar sobre nossas pesquisas, pelo apoio, incentivo, pela força, pela troca de experiências; sem dúvida, tudo isso foi muito importante para a finalização desta etapa.

... Ao Paulo por todo o material disponibilizado que contribui muito para a fundamentação do trabalho.

... Aos meus queridos alunos, por participarem da pesquisa, pelos momentos que tivemos ao longo dos três anos do Ensino Médio, pela admiração, respeito e carinho que sempre recebi de vocês.

... À coordenação e direção da escola em que trabalho e a todos os professores que, de alguma forma, se preocuparam comigo, compreenderam meu cansaço e me incentivaram a não desistir de meu objetivo.

... Aos colegas do G2, e àqueles com quem mais convive durante o curso (Alexandra, Marcelo e Vanderlei), pelas conversas, troca de conhecimentos e experiências.

... Aos meus amigos Lila e Ed, pela amizade, e a todos aqueles que torceram para que eu conseguisse concluir esta grande tarefa.

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar a compreensão de alunos do terceiro ano do Ensino Médio a respeito do conceito de variável. Para o seu desenvolvimento, foi utilizada uma ferramenta teórico-metodológica denominada modelo 3UV, elaborada pelas pesquisadoras Trigueros e Ursini (2001). Tal modelo apresenta uma decomposição do conceito de variável em seus três principais usos em álgebra elementar - incógnita, número genérico e variáveis relacionadas, ou variáveis em relação funcional – e as habilidades essenciais à compreensão de cada um deles para a aquisição do conceito de variável. Essa ferramenta serviu como guia na elaboração de um questionário contendo 22 itens, envolvendo o emprego dos três usos da variável. As questões formuladas exigiram as capacidades de simbolização, manipulação e interpretação dos alunos relativas à variável em seus três usos, juntamente com a mobilização das habilidades sugeridas no modelo 3UV. Com base nos dados coletados, por meio do questionário e das entrevistas realizadas após sua aplicação, observou-se que os estudantes não apresentaram dificuldades em interpretar, simbolizar e manipular a variável como incógnita. Por outro lado, a compreensão da variável como número genérico e em relação funcional demonstrou lacunas, as quais estão diretamente relacionadas à falta de explicitação de algumas das habilidades específicas de manipulação e de interpretação apresentadas no modelo 3UV como necessárias à compreensão do conceito. Dessa forma, tal investigação possibilitou o apontamento de dificuldades dos alunos ao lidar com problemas em que o conceito de variável fazia-se presente, indicando, para o desenvolvimento de futuras pesquisas, as habilidades que deveriam ser melhor exploradas no processo de ensino para favorecer sua compreensão.

Palavras-chave: Variável. Incógnita. Número genérico. Relação funcional. Simbolização. Manipulação. Interpretação.

ABSTRACT

The aim of this research was to investigate the third year of high school students' comprehension of the concept of variable. For its development, it was used a theoretical framework called 3UV model formulated by researchers Trigueros e Ursini (2001). The model involves a decomposition of the concept of variable in its three main uses in elementary algebra – unknown, general number and related variables, that is, variables in functional relationship – and the essential abilities to comprehend each of them to acquire the concept of variable. This theoretical framework was used as guideline in the design of a questionnaire with 22 items, in which the three uses of variable were used. The questions demanded the capabilities of symbolization, manipulation and interpretation from the students related to the three uses of variable, jointly with the mobilization of the abilities that the 3UV model suggests. According to data collected, through the questionnaire and the interviews, which were realized after the application of the first, it was noticed that the students didn't show difficulties to interpret, symbolize and manipulate the variable as unknown. On the other hand, the comprehension of the variable as a general number and as related variables showed gaps related directly to the lack of mobilization of some abilities of manipulation and interpretation present in the 3UV model as needed abilities to the comprehension of the concept. Thus, this investigation helped to point up the difficulties of the students to deal with problems related to concept of variable and to indicate the abilities that should be better worked, in the teaching process of the concept of variable, to provide its comprehension.

Keywords: Variable. Unknown. General number. Functional relationship. Symbolization. Manipulation. Interpretation.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Decomposição do conceito de variável	29
Quadro 2. Habilidades necessárias à compreensão da variável em seus três usos: incógnita, número genérico, variáveis relacionadas	33
Quadro 3. Relacionamento entre as habilidades descritas no quadro 2 e as capacidades de simbolização, interpretação e manipulação da variável em seus três usos	34
Quadro 4. Programação do 1º ano do Ensino Médio	43
Quadro 5. Programação do 2º ano do Ensino Médio	44
Quadro 6. Protocolo da dupla D1- Questão 2	70
Quadro 7. Protocolo da dupla D3 – Questão 2	73
Quadro 8. Exercícios retirados do material didático da escola em que foi desenvolvida esta pesquisa	75
Quadro 9. Protocolo da dupla D4 – Questão 2 – item c)	76
Quadro 10. Protocolo da dupla D6 – Questão 2	78
Quadro 11. Protocolo do trio T7 – Questão 2- item a)	80
Quadro 12. Protocolo do trio T7 – Questão 2 - itens b) e c)	81
Quadro 13. Protocolo da dupla D1 – Questão 3	84
Quadro 14. Protocolo da dupla D5 – Questão 3	89
Quadro 15. Protocolo do trio T7 – Questão 4 – item c)	99
Quadro 16. Protocolo da dupla D1– Questão 4 – item d)	101
Quadro 17. Protocolo da dupla D3 – Questão 5 – itens c), d) e e)	106
Quadro 18. Protocolo da dupla D4 – Questão 5 – itens c), d) e e)	109
Quadro 19. Protocolo da dupla D5 – Questão 5 – itens c), d) e e)	110
Quadro 20. Protocolo da dupla D6 – Questão 5 – itens c), d) e e)	112
Quadro 21. Protocolo da dupla D1 – Questão 6 – itens b), c) e d)	117
Quadro 22. Protocolo da dupla D3 – Questão 6 – itens b), c) e d)	118
Quadro 23. Protocolo da dupla D4 – Questão 6 – itens b), c) e d)	120
Quadro 24. Protocolo da dupla D5 – Questão 6 – itens b), c) e d)	121
Quadro 25. Protocolo da dupla D6 – Questão 6 – itens b), c) e d)	122
Quadro 26. Protocolo do trio T7 – Questão 6 – itens a), b), c) e d)	123
Quadro 27. Protocolo da dupla D1 – Questão 6 – itens e), f) e g)	124
Quadro 28. Protocolo da dupla D2 – Questão 6 – itens e), f) e g)	125
Quadro 29. Protocolo da dupla D3 – Questão 6 – itens e), f) e g)	126
Quadro 30. Protocolo da dupla D4 – Questão 6 – itens e), f) e g)	127
Quadro 31. Protocolo do trio T7 – Questão 6 – itens e), f) e g)	128

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	12
CAPÍTULO 1	
PROBLEMÁTICA.....	14
O PROBLEMA DE PESQUISA, SUA ORIGEM, SUA IMPORTÂNCIA.....	16
CAPÍTULO 2	
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA.....	22
2.1 O MODELO 3UV.....	31
2.2 ALGUMAS APLICAÇÕES DO MODELO 3UV.....	34
CAPÍTULO 3	
O QUESTIONÁRIO.....	40
3.1 O QUESTIONÁRIO PILOTO.....	40
3.2 A ESCOLA E OS ALUNOS	41
3.3 A APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO.....	45
3.4 AS QUESTÕES E O MODELO 3UV.....	48
CAPÍTULO 4	
ANÁLISE DOS DADOS.....	64
4.1 QUESTÃO 1.....	64
4.2 QUESTÃO 2.....	69
4.3 QUESTÃO 3.....	83
4.4 QUESTÃO 4.....	92
4.5 QUESTÃO 5.....	103
4.6 QUESTÃO 6.....	115
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	132
REFERÊNCIAS.....	136
APÊNDICE.....	139
ANEXO.....	142

APRESENTAÇÃO

A pesquisa apresentada neste relatório teve como objetivo investigar a compreensão de alunos, na fase de conclusão do Ensino Médio, a respeito do conceito de variável. Para tanto, elaboramos um questionário, contendo seis questões, subdivididas em 22 itens, envolvendo os principais aspectos relativos ao conceito de variável. Tais questões foram elaboradas com base no modelo teórico denominado 3UV (O modelo dos três usos da variável) desenvolvido pelas pesquisadoras María Trigueros e Sonia Ursini (2001).

O modelo 3UV apresenta uma decomposição do conceito de variável em três de seus principais usos: incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional. Segundo Trigueros e Ursini, tal modelo pode ser utilizado como guia para:

- elaborar ferramentas que proporcionem o desenvolvimento de análises diagnósticas a respeito da concepção de alunos e, também de professores, sobre o conceito de variável;
- elaborar atividades de ensino relativas ao conceito de variável em álgebra elementar;
- realizar a análise de livros didáticos e outros materiais de ensino relacionados ao conceito.

Ao longo do capítulo II, apresentamos, de forma detalhada, o modelo 3UV, sua origem, a descrição das habilidades essenciais à compreensão de cada um dos usos da variável, e alguns exemplos de sua aplicação.

Salientamos que utilizamos o modelo 3UV como fundamentação teórico-metodológica com o intuito de realizar uma análise diagnóstica da compreensão de alunos do terceiro ano do Ensino Médio sobre o conceito de variável, sem nos preocuparmos com suas demais aplicações.

A investigação foi desenvolvida com alunos de uma escola particular do Grande ABC e contou com a participação de 15 estudantes. Para responder o questionário, os participantes trabalharam em duplas e, por conta de seu número ímpar, formou-se um trio. Após a aplicação do questionário, realizamos entrevistas com os estudantes com o intuito de esclarecer alguns dados encontrados em seus

protocolos. A caracterização da escola e dos participantes da pesquisa é apresentada no capítulo III, juntamente com a exposição de nosso instrumento de investigação e dos procedimentos metodológicos utilizados.

Os resultados da pesquisa encontram-se no capítulo IV, em que expomos a análise dos dados coletados com a aplicação do questionário e o que apuramos com as entrevistas que complementaram as respostas dadas pelos alunos às questões.

Por fim, apresentamos na etapa do relatório denominada “Considerações finais” as conclusões que formulamos com base no trabalho realizado e também algumas sugestões para complementação dos estudos concernentes ao ensino e à aprendizagem do conceito de variável.

A seguir, no capítulo I, intitulado “Problemática”, descrevemos o percurso que nos motivou a desenvolver esta pesquisa, momento em que expomos, brevemente, nossa caminhada acadêmico-profissional, as inquietações que nos levaram ao problema da pesquisa e sua relevância para a área da Educação Matemática.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

Ao longo de nossa atividade pedagógica contracenamos com diferentes personagens que desenham, aos poucos, cenas que ilustram características da Educação Básica brasileira. Dentre eles encontramos professores de diferentes áreas de ensino - alguns mais experientes, outros nem tanto - coordenadores, orientadores, pesquisadores, mas os principais personagens, os que mais nos despertam a atenção, são, sem dúvida, os alunos, cada um deles com suas particularidades, suas habilidades, dificuldades, com comportamentos que nos encantam e merecem, de fato, nossa atenção. Afinal, sem eles nosso papel de educador perderia o sentido.

Nossa atuação em sala de aula iniciou-se durante nossa formação secundária, quando cursávamos o magistério. Tivemos pouco contato com os alunos da Educação infantil e das séries iniciais. Após concluirmos o primeiro ano de licenciatura em Matemática, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, começamos a estagiar numa escola da rede particular da região do Grande ABC. Dois anos depois, estávamos lecionando para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e notamos uma motivação natural de nossa parte ao lidarmos com os adolescentes na fase final da Educação Básica. A partir de tal motivação, carregada de um certo desafio e ao mesmo tempo de muito entusiasmo, nos mantivemos até os dias atuais lecionando para alunos do Ensino Médio.

É importante observar que nossa experiência mais desafiadora aconteceu nos primeiros anos de trabalho quando lecionávamos para alunos da rede pública de ensino no período noturno. Nessa fase, conhecemos a difícil realidade de quem trabalha durante o dia e estuda à noite. Pessoas que, muitas vezes, não têm disposição para aprender e nem ideais ou sonhos que valorizem a educação. Porém, nosso desafio de ensinar nunca foi deixado de lado, mesmo em tais circunstâncias. Após 11 anos de experiência, com diferentes grupos de alunos, na faixa etária de 15 a 18 anos, pudemos observar algumas dificuldades comuns na aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos.

Notamos que o desempenho dos alunos ao resolver inequações do segundo grau e no estudo de funções polinomiais de primeiro e segundo graus nem sempre era satisfatório. Porém, antes de ingressarmos no curso de mestrado da PUC-SP, não tínhamos elementos suficientes para sustentar nossas suspeitas a respeito dos problemas, no processo ensino-aprendizagem, relacionados aos temas citados. Foi, então, por meio de leituras de trabalhos de pesquisadores na área da Educação Matemática e, também, pela troca de idéias entre colegas de nosso grupo de pesquisa da PUC-SP - o G2¹ - que pudemos observar, novamente, os problemas que já havíamos notado só que, dessa vez, sob uma nova perspectiva, a do pesquisador iniciante.

Surgiram, assim, novas inquietações e questionamentos que foram pouco a pouco sendo alimentados pelas discussões que desenvolvíamos entre nossos colegas do G2.

Através do conteúdo de uma das discussões ocorridas no grupo, aliada as nossas observações do desempenho dos alunos em sala de aula, começamos a refletir sobre o conceito de variável e sobre nossa prática pedagógica ao explorarmos esse conceito em distintas situações-problema presentes na Matemática do Ensino Médio. Essa reflexão nos levou, ainda, a relacionar a compreensão do conceito de função à compreensão do conceito de variável, dada à importância da correspondência e dependência entre as variáveis no estudo de funções.

Diante de nosso interesse sobre o papel das variáveis na aprendizagem matemática, montamos uma espécie de subgrupo do G2 para pesquisarmos e estudarmos a importância do conceito de variável na matemática da Educação Básica. Nosso subgrupo era formado por três integrantes, cada um com uma preocupação. Um deles interessou-se em investigar as concepções de professores do Ensino Médio a respeito do conceito de variável, o outro estava preocupado com a aprendizagem de alunos do Ensino Fundamental, enquanto nós pretendíamos investigar a compreensão de alunos do Ensino Médio sobre tal conceito, por conta de nossa vivência com esses alunos e pelo fato de acreditarmos que nessa fase da

¹ O grupo G2 – *Matemática no ensino superior: Didática do Cálculo* – desenvolve estudos e investigações científicas de caráter histórico, epistemológico e didático, explorando, entre outros, os conceitos de função, limite, derivada e integral. Nas reuniões do grupo, seus integrantes recebem orientações para o desenvolvimento de sua pesquisa, discutem e apresentam resultados, anseios e limitações quanto ao desenvolvimento de seus trabalhos.

Educação Básica os estudantes enfrentam problemas, em diferentes contextos, nos quais as variáveis assumem seus mais diversos usos.

Unindo nossa prática pedagógica aos estudos que desenvolvíamos no G2, e mais especificamente, no subgrupo estabelecido, formulamos, então, nosso problema de pesquisa, o qual descrevemos a seguir detalhando o percurso que levou à sua elaboração.

O PROBLEMA DE PESQUISA, SUA ORIGEM, SUA IMPORTÂNCIA

Consideramos, dentre outros conceitos matemáticos presentes no Ensino Médio, que a compreensão do conceito de variável é de grande importância para o desenvolvimento de estudos posteriores no campo da Análise, do Cálculo e da Álgebra.

A presença de variáveis nos mais diversos contextos da matemática torna difícil sua definição e complexo o seu conceito. No Cálculo, e também na Análise, reconhecer e compreender o papel das variáveis é fundamental no estudo de funções, derivadas, limites, entre outros. Na Álgebra, a linguagem utilizada é constituída de símbolos - tais como $[]$, $+$, $=$, $\sqrt{2}$, π , 1 , 0 , -3 , $\{ \}$, $>$, \leq , entre outros - e letras que assumem ora o papel de incógnita, ora o papel de parâmetro, ora o de variável.

Segundo Caraça (1940, p. 1):

O conceito de variável apresenta, [...] , um duplo aspecto – o aspecto simbólico, da letra ou símbolo tomados, e o aspecto substancial, do conjunto que esse símbolo representa; esses dois aspectos são inseparáveis, e a sua síntese é o conceito de variável.

Diante de nossa temática de interesse, buscamos, então, estudos realizados a respeito do conceito de variável e sua presença no ensino e aprendizagem da Matemática. Para tanto, fizemos, inicialmente, uma busca no *Banco de Teses EduMat* do CEMPEM (Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática) da Faculdade de Educação da UNICAMP. Pesquisamos os títulos de dissertações e teses produzidas no Brasil de 1971 até 2003 que estariam, de alguma forma, relacionados ao nosso trabalho. Complementamos tal pesquisa

visitando as páginas, na *internet*, da CAPES e da PUC-SP em busca de trabalhos mais recentes (2004 a 2008).

Escolhemos, assim, 34 trabalhos cujos títulos nos chamaram a atenção, dentre os quais encontram-se o de Pelho (2003) e Christo (2006), que dão destaque à compreensão das variáveis por alunos da Educação Básica, e o de Queiroz (2008) que apresenta aspectos da compreensão de professores da Educação Básica a respeito do conceito de variável.

Pelho, em sua dissertação, demonstrou preocupação com relação à dependência das variáveis presentes numa relação funcional.

Algumas pesquisas realizadas sobre funções, nos levaram a conjecturar que muitas das dificuldades ocorrem devido ao formalismo existente, sendo necessário resgatar o caráter dinâmico deste conceito, por meio de abordagens que proponham situações tais que permitam ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a dependência de uma variável em relação a outra e identificar variável dependente e independente. (PELHO, 2003, p. 27).

Christo, em seu trabalho, desenvolvido com alunos da 6^a série do Ensino Fundamental, cita Arcavi (1987 apud CHRISTO, 2006) o qual defende que a compreensão do conceito de variável é a base para o aluno apreender a passagem da aritmética à álgebra, sendo tal passagem necessária à matemática mais avançada.

Prosseguindo em nossa busca por estudos realizados a respeito da compreensão de alunos sobre o conceito de variável, encontramos um número considerável de investigações desenvolvidas no México pelas pesquisadoras María Trigueros e Sonia Ursini.

Em um de seus trabalhos, apresentado em 2001, no PME 25 (*Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*), as pesquisadoras descrevem o modelo teórico denominado 3UV:

O modelo tem por objetivo servir como ferramenta para realizar análises diagnósticas a respeito da concepção de alunos, e também de professores, sobre o conceito de variável, além de possibilitar a análise de livros didáticos e permitir a elaboração de atividades de ensino que explorem os três principais usos da variável em álgebra elementar: incógnita, número genérico e variáveis relacionadas. (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 327, tradução nossa).

Observamos que as autoras utilizam o termo “variáveis relacionadas” quando se referem às variáveis dependente e independente presentes numa relação funcional.

Dentre alguns resultados das pesquisas realizadas por Trigueros e Ursini, destacamos uma constatação encontrada num dos artigos escrito pelas autoras com a participação de Reyes:

Uma possível explicação para a persistência das dificuldades dos estudantes pode ser o fato de que atualmente as práticas de ensino no nível médio reforçam cada um dos diferentes aspectos da variável separadamente e de uma forma hierárquica, enfatizando sua manipulação específica e técnicas ou regras de transformação. No entanto, diferentes usos da variável compartilham o mesmo simbolismo, sintaxe e regras de manipulação. Este fato deveria ser levado em conta, explicitamente, a fim de evitar possíveis confusões e incompreensões. (REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996, v. 4, p. 321, tradução nossa).

A partir de resultados das pesquisas realizadas por Trigueros e Ursini (1997, 1999, 2000, 2001) observamos que as dificuldades de compreensão do conceito de variável e as interpretações dos alunos a respeito dos aspectos envolvidos nesse conceito podem estar relacionadas às práticas de ensino dos professores, o que nos leva a uma reflexão sobre como tal conceito é visto por eles e como abordam situações, em sala de aula, envolvendo a presença de variáveis.

Em seu trabalho, Queiroz (2008) apresenta resultados que mostram as dificuldades dos professores do Ensino Médio quanto à utilização e interpretação das variáveis. O autor realizou suas análises baseando-se no modelo 3UV e identificou problemas na compreensão dos professores quanto as variáveis em relações funcionais e, em menor escala, como números genéricos. Nas situações em que a variável assumia o papel de incógnita, os professores não apresentaram dificuldades.

Além das pesquisas já citadas, temos também as de Tinoco *et al* (2007) que defendem a noção de variável e a de equivalência como sendo duas noções fundamentais para que o ensino da Álgebra contemple a generalização da aritmética, a resolução de problemas, a variação de grandezas e o estudo das estruturas matemáticas, além de contribuir com o desenvolvimento de uma aprendizagem mais significativa para o aluno.

A falta de compreensão do conceito de variável pode ser a causa de dificuldades encontradas por alunos, ao longo do Ensino Médio, no trato de

problemas que envolvem equações, inequações e funções. Nos *PCN + Ensino Médio* (2002), encontramos sugestões que, novamente, despertam reflexões sobre a importância do conceito de variável e a presença de seus diferentes usos na Matemática.

Os conceitos de variação e igualdade podem ser explorados a partir de situações envolvendo variáveis. Assim, uma equação como, por exemplo, $y = 3x - 2$ poderia representar a lei de conversão de uma moeda em outra, numa casa de câmbio, onde 3 seria a taxa de câmbio do dia, e 2, a tarifa fixa cobrada pela operação. Ao apresentar uma equação dessa forma, o professor pode explorar o conceito de variação e contribuir para a compreensão do relacionamento das variáveis envolvidas num problema. Já a equação $y = x^2$ poderia ser interpretada como a representação da área y de uma sala quadrada de lado x . Numa outra situação, poder-se-ia investigar a igualdade $3x - 2 = x^2$, ou seja, para quais valores de x a sentença é verdadeira. Ou, então, poderiam ser exploradas as curvas representadas por tais equações a partir da interpretação geométrica do sistema formado por elas. Assim, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ representaria os pontos de intersecção da reta de equação $3x - y - 2 = 0$ com a parábola $y = x^2$. (PCN + Ensino Médio, 2002).

Tais exemplos mostram que a interpretação e o uso que é feito das variáveis dependem do contexto do problema em que elas aparecem, o que deve ser levado em conta quando se pretende explorar o conceito de variável.

A partir de nossa prática docente, com alunos do Ensino Médio, notamos que muitos apresentam dificuldades na resolução de inequações do segundo grau. Muitas vezes, os alunos tratam as inequações como equações e admitem que a incógnita presente numa desigualdade, em \mathfrak{R} , assume um número finito de valores quando, em certos casos, a solução seria dada por um intervalo real. Percebemos a angústia de nossos alunos e sua incompreensão, em casos como esse, quando somos questionados sobre o que escrever como conjunto solução de uma inequação. Os alunos perguntam: “Quando tenho que escrever x pertence aos reais tal que x maior que ‘3’ ? Por que não posso colocar só x igual a ‘3’?”

Mesmo aqueles que resolvem, corretamente, uma inequação do segundo grau parecem seguir, ou mesmo memorizar, um procedimento que percebem ser válido para tratá-la. No entanto, percebemos em nossa prática de ensino que as

estratégias algébricas e aritméticas adotadas pelos alunos em busca da solução para uma inequação do segundo grau distanciam os estudantes do seu significado.

Resultados da pesquisa de Blanco e Garrote (2007) desenvolvida com a participação de 91 alunos do primeiro ano de educação pré-universitária, na Espanha, na faixa etária de 16 a 17 anos, mostraram que muitos estudantes não fazem diferenciações conceituais entre equações e inequações e que apresentam dificuldades em resolver inequações e interpretar suas soluções. Além disso, os autores observam que os alunos têm problemas para compreender um intervalo real e o conceito de variável, principalmente, nas situações em que a variável deveria ser interpretada como um número genérico.

A dificuldade enfrentada pelos alunos no momento de resolver uma inequação é compreensível, pois para que o aluno compreenda, de fato, o que representa o conjunto solução de uma inequação é preciso que ele mobilize dois usos da variável: a variável como incógnita e a variável numa relação funcional. Além disso, a relação de ordem deve estar clara para o aluno. Assim, para resolver, em \mathfrak{R} , a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$ é preciso que o aluno determine as raízes da função que está associada a essa desigualdade, manipulando, assim, a variável como incógnita, para, posteriormente, realizar o estudo do sinal da função, identificando quais valores de x tornam a imagem da função estritamente positiva, ou seja, $y > 0$ para $x < 2$ ou $x > 3$. Como tal dependência entre as variáveis não está explícita na representação algébrica de uma inequação, a dificuldade aumenta, fazendo com que o aluno se apóie naquilo que domina melhor, isto é, nos procedimentos, ou técnicas, utilizados para resolver uma equação do segundo grau.

Admitindo-se, portanto, que o conceito de variável é de grande importância para o ensino da Matemática e que para compreender tal conceito é necessário saber diferenciar os usos da variável, integrá-los como aspectos de um mesmo objeto matemático, simbolizá-los, manipulá-los e interpretá-los, faz-se, então, pertinente a indagação de como os alunos, que estão concluindo o Ensino Médio, compreendem esse conceito. Realizar uma investigação sobre a compreensão desses estudantes relativa ao conceito de variável é o objetivo deste trabalho.

Para possibilitar tal diagnóstico, utilizamos o modelo 3UV como guia na elaboração de um questionário com problemas em que a variável assume seus três principais usos: incógnita, numérico genérico, variáveis relacionadas. Em algumas questões, apresentamos elementos da Geometria com o objetivo de verificarmos de

que forma esses elementos influenciariam a interpretação dos alunos a respeito das variáveis nelas presentes.

Nossa pesquisa contou, ainda, com o desenvolvimento de entrevistas com os estudantes que participaram da aplicação do questionário. Nosso objetivo era esclarecer, a partir de tais entrevistas, os dados coletados com o questionário e até mesmo obter novos dados, a partir das falas dos alunos, quando esses estivessem sendo entrevistados.

Para fundamentar nossas escolhas apresentamos, no próximo capítulo, a fundamentação teórico-metodológica da pesquisa.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

A presença de variáveis nos mais diversos contextos da matemática, empregadas com distintos significados, torna árdua a tarefa de definir tal objeto.

A complexidade presente em seu conceito pode ser notada nas palavras de Caraça (2000, p. 120):

Quando dizemos, por exemplo: seja E o conjunto dos números reais do intervalo $(0,1)$, e seja x a sua variável, que queremos significar? Que o símbolo x , sem coincidir individualmente com nenhum dos números reais desse intervalo, é susceptível de representar a todos; é, afinal, o símbolo da vida coletiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, mas não se reduz a ela.

O caráter contraditório do conceito de variável – “a variável é e não é cada um dos elementos de um conjunto” (*ibid.*) – seu duplo aspecto, o do símbolo e o da substância, e seus possíveis e diferentes usos fazem com que sua compreensão não seja algo trivial.

As primeiras investigações sobre a compreensão de estudantes da Educação Básica a respeito do conceito de variável ganharam força nas décadas de 70 e 80, com pesquisadores como Collis e Küchemann.

Em seu artigo intitulado *Algebra*, Küchemann (1981) observa que o vasto uso do termo “variável” na aritmética generalizada é uma prática comum a qual tem contribuído para encobrir tanto o significado desse termo quanto as diferenças de significado que podem ser dadas às letras.

As pesquisas realizadas pelo autor inseridas no projeto *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS), com organização de Hart (1981), trouxeram elementos para que pesquisadores como Trigueros e Ursini complementassem os estudos sobre a interpretação das letras, em contexto algébrico, e sua compreensão por alunos, e também por professores. A elaboração do modelo 3UV, pelas autoras, sofreu influências da categorização proposta por Küchemann a respeito das interpretações dos estudantes sobre as variáveis.

O autor elaborou e analisou um questionário de álgebra aplicado a estudantes na faixa etária dos 13 aos 15 anos de idade, baseando-se em dois critérios: um

referente ao nível de complexidade das questões e o outro, aos significados que os estudantes poderiam dar às letras.

Küchemann fundamentou a elaboração de suas questões baseando-se na proposta de Collis. Para Collis (1975 apud KÜCHEMANN, 1981, p. 103), a “complexidade estrutural” de uma questão pode ser caracterizada pelo número de variáveis que a questão envolve e pela natureza dos elementos nela presentes. Segundo ele, a principal distinção a ser feita quanto à natureza dos elementos é se esses são números “pequenos”, “grandes”, ou, ainda, se são letras.

De acordo com Küchemann (*ibid.*), mais importante do que essa classificação dos elementos é o argumento de Collis de que as dificuldades originam-se da carência de significado desses elementos para os alunos. Assim, por exemplo, uma criança de 8 anos pode aceitar facilmente uma expressão como $2+3$, pois ela pode relacionar os elementos, e sua combinação, diretamente à sua realidade cotidiana (duas bolas e três bolas juntas resultam em cinco bolas). Porém, ela pode não aceitar que uma expressão envolvendo números além de seu campo de verificação, como $274+356$, também dê um único resultado. Da mesma forma, na aritmética generalizada, o alcance do significado dado pelos estudantes às variáveis é de fundamental importância na determinação do nível de dificuldade das questões.

Analisando as respostas dadas pelos estudantes às questões por ele formuladas, Küchemann (1981) identificou seis formas de interpretação e uso das letras: **letra avaliada**, **letra não usada**, **letra como objeto**, **letra como incógnita**, **letra como número genérico**, **letra como variável**.

Segundo o autor, as três primeiras categorias são as mais elementares e representam formas de evitar a aritmética generalizada. As questões presentes em seu instrumento de investigação, relacionadas a essas três interpretações, foram puramente numéricas ou tiveram uma estrutura simples.

A categoria **letra avaliada** se aplica às respostas em que a letra é, desde o princípio, designada como um valor numérico. Nesse caso, os estudantes evitam realizar operações com a incógnita atribuindo a ela um valor específico. Vejamos um exemplo de questão envolvendo essa interpretação.

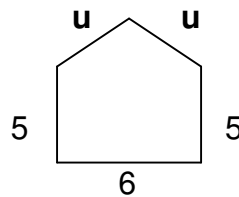
“O que você pode dizer sobre **a**, se $a + 5 = 8$?” (*ibid.*, p. 105, tradução nossa)

Quando os estudantes ignoram a letra, ou reconhecem sua existência, mas sem dar a ela um significado, Küchemann classifica essa interpretação como **letra não usada**. Tal categoria pode ser identificada numa questão como:

“Se $a + b = 43$, então $a + b + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.” (KÜCHEMANN, 1981, p. 106, tradução nossa).

Quando os estudantes consideram as letras como rótulos para objetos ou como objetos em si mesmos, identifica-se, então, a categoria **letra como objeto**.

Numa das questões de Küchemann, em que era solicitado o perímetro de algumas figuras, o autor identificou nas respostas dos alunos a interpretação das variáveis como objetos. Considerando a figura abaixo, como exemplo desse tipo de questão, o autor identificou a seguinte resposta: “ $2u + 2.5 + 1.6$ ”



Segundo o pesquisador, os estudantes interpretaram a variável u como um rótulo para o lado da figura e não como um comprimento desconhecido de um de seus lados.

De acordo com o autor, usar a letra como um objeto, implica em reduzir seu significado de algo abstrato a algo concreto e “real”, o que leva os estudantes a resolverem corretamente algumas questões que eles não conseguiriam se não recorressem a essa interpretação. Porém, essa redução no significado das variáveis, freqüentemente, ocorre quando não deveria. Isso acontece, particularmente, com questões que envolvem “objetos” (lápiz, frutas etc.), em que é essencial distinguir entre os próprios objetos e os números que representam suas quantidades. (KÜCHEMANN, 1981, p. 107, tradução nossa)

A interpretação da **letra como incógnita** pode ser observada quando o aluno a considera como um número específico, porém desconhecido, podendo operar diretamente com ela. Por outro lado, quando o aluno interpreta a letra como representante de vários valores, ou compreende que ela pode assumir vários valores, identifica-se, nesse caso, a categoria **letra como número genérico**. Essas duas categorias, segundo Küchemann, podem ser entendidas como “dois lados diferentes de uma mesma moeda” já que é provável que os estudantes encontrem muitos problemas de álgebra em que será necessário passar de uma a outra interpretação dependendo do que for momentaneamente mais conveniente na resolução de um problema.

Para exemplificar sua observação, o autor apresenta a seguinte questão:

Cada lápis azul custa 5 *pence* e cada lápis vermelho custa 6 *pence*. Comprei alguns lápis azuis e alguns vermelhos, gastando ao todo 90 *pence*. Se **a** é o número de lápis azuis e **v** o número de lápis vermelhos, o que você pode escrever sobre **a** e **v**? (KÜCHEMANN, 1981, p. 107, tradução nossa.)

Dentre as respostas encontradas pelo autor, destaca-se a seguinte:

“ $5a + 6v = 90$ ”.

Segundo ele, os estudantes que deram essa resposta podem ter interpretado as variáveis **a** e **v** como incógnitas, mas, ao mesmo tempo, podem ter percebido que essa resposta representa todos os possíveis valores de **a** e **v** que satisfazem a igualdade, o que, nesse último caso, corresponderia à interpretação das letras como números genéricos.

O autor declara que a compreensão da **letra como variável** vai além do reconhecimento das letras como incógnitas ou como números genéricos. Perceber a letra como variável é compreender que ela representa um domínio de valores não específicos e que existe uma relação sistemática entre dois determinados conjuntos de valores.

Retomando o exemplo dado acima, Küchemann observa que reconhecer as variáveis como incógnitas implica observar que para a relação $5a + 6v = 90$ existe um par específico de números que a torna verdadeira, porém essa observação é essencialmente estática e não envolve a idéia de mudança. Por outro lado, quando as letras **a** e **v** são interpretadas como números genéricos há uma percepção de que elas mudam, mas não de como mudam. Para perceber como se processa essa mudança é preciso ir além dessas duas interpretações, analisando a relação que existe entre as variáveis **a** e **v**.

Um primeiro passo a partir do qual pode ser feita uma análise dessa relação seria ordenar pares de números que satisfazem a sentença $5a + 6v = 90$, como, por exemplo, (0, 15), (6, 10), (12, 5), (18, 0). Analisando esses pares, percebe-se que quando **a** aumenta, **v** diminui. Poderia-se ir mais longe ainda, descrevendo essa variação da seguinte forma: o aumento em **a** é maior do que a (correspondente) diminuição em **v**; ou um aumento em **a** de 6 é 1 a mais do que a correspondente

diminuição em v de 5, ou o aumento em a é $\frac{6}{5}$ da diminuição em v , etc. (KÜCHEMANN, 1981, tradução nossa).

Diante das seis interpretações das letras apresentadas, o autor estabelece quatro níveis de compreensão relacionando-os com o grau de complexidade das questões formuladas para o seu questionário de investigação. Ao classificar as questões em cada nível de compreensão, Küchemann levou em conta a complexidade estrutural e a natureza dos elementos presentes em cada uma delas.

As questões no nível 1 de compreensão apresentaram elementos puramente numéricos ou, ainda, uma estrutura simples e exigiram o uso das letras como objeto, letra avaliada ou letra não usada. Como exemplo de questão desse nível, envolvendo apenas dados numéricos, o autor apresenta:

$$6 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad A = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{A representa a área da figura})$$

10

As questões, em nível 1 de compreensão, com uma estrutura simples nas quais eram empregadas as interpretações da letra como objeto, letra avaliada ou letra não usada são exemplificadas abaixo.

a) letra como objeto:

$$e \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} e \quad p = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{p representa o perímetro da figura})$$

e

b) letra avaliada:

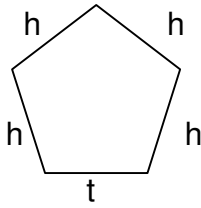
$$a + 5 = 8, \quad a = \underline{\hspace{2cm}}$$

c) letra não usada:

$$a + b = 43, \quad a + b + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Já as questões enquadradas no nível 2 apresentaram uma complexidade maior do que as de nível 1, devido ao aumento no número de variáveis nelas presentes, porém, também envolveram as categorias letra como objeto e letra avaliada. Vejamos alguns exemplos de questões desse nível.

a) letra como objeto:



$p = \underline{\hspace{2cm}}$ (p representa o perímetro da figura)

b) letra avaliada:

$$m = 3n + 1, \quad n = 4, \quad m = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nas questões de nível 3, exigia-se o uso das letras como incógnitas. Exemplo: “O que você pode dizer sobre r se $r = s+t$ e $r+s+t = 30$?” (KÜCHEMANN, 1981, p. 105, tradução nossa.)

Já as questões classificadas como de nível 4 tiveram maior complexidade que as de nível 3, no que se refere à interpretação da letra como incógnita, e algumas exigiram a interpretação das letras como números genéricos e variáveis. O problema dos lápis azuis e vermelhos, citado anteriormente (Cf. p.25), representa uma questão de nível 4 de compreensão.

De acordo com os resultados de sua pesquisa, Küchemann identificou que a maioria dos estudantes de 13, 14 e 15 anos de idade estava nos níveis 1 e 2 de compreensão (73%, 59% e 53%, respectivamente) e que esses não foram capazes de lidar de forma adequada com questões em que as letras deveriam ser, no mínimo, interpretadas como incógnitas, ou seja, com questões propriamente algébricas.

As interpretações da letra como incógnita, como número genérico e como variável foram consideradas por Trigueros e Ursini, em seus estudos, em busca da elaboração de uma ferramenta de análise a respeito da compreensão de estudantes dos níveis médio e superior, e também de professores, sobre o conceito de variável. Segundo as autoras, essas categorias de interpretação são as mais relevantes para uma compreensão significativa de problemas algébricos elementares. Porém, as autoras não relacionaram essas três categorias a níveis de compreensão como fez Küchemann. Além disso, ao contrário do pesquisador que utiliza a terminologia “letra como incógnita”, “letra como número genérico” e “letra como variável”, as autoras utilizam os termos “variável como incógnita”, “variável como número genérico” e “variáveis em relação funcional”. A respeito da terminologia “variável como incógnita” as autoras observam:

Há quem considere inadequada a terminologia “variável como incógnita”, pelo fato de que uma incógnita representa um valor fixo. No entanto, consideramos que a primeira percepção das letras, quando presentes em problemas algébricos, é, ou deveria ser, a de símbolos que representam qualquer valor e que só num segundo momento se define seu papel específico no problema. Assim, por exemplo, frente a uma equação, se toma consciência de que a variável representa valores específicos só depois de se considerar, mesmo que mentalmente, as operações necessárias que permitam perceber que se trata efetivamente de uma equação e não, por exemplo, de uma tautologia. Por essa razão, nos parece que o uso da terminologia “variável como incógnita” é adequado. (TRIGUEROS; URSINI, 1998, p. 447-448, tradução nossa)

Observamos, ainda, que, para as autoras, o conceito de variável abrange essas três diferentes nuances (incógnita, número genérico, variáveis em relação funcional) as quais são consideradas por elas como as principais componentes do conceito, o que pode ser justificado pelos estudos já realizados concernentes a esse tema.

Baseando-se, parcialmente, na proposta de Dubinsky, para a construção de conceitos matemáticos, as autoras apresentam o que seria uma “decomposição genética” do conceito de variável.

Segundo Dubinsky (1991 apud REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996), para entender a forma como os estudantes aprendem matemática é necessário analisar os diferentes conceitos envolvidos nessa aprendizagem a fim de isolar seus principais componentes e dar descrições explícitas de possíveis relações entre eles. O produto dessa análise é chamado de decomposição genética do conceito. Tal decomposição pode ser uma ferramenta útil para desenvolver pesquisas sobre a compreensão dos estudantes em matemática e pode servir como um guia na elaboração de estratégias de ensino.

Assim, as autoras defendem que a decomposição do conceito de variável em incógnita, número genérico e variáveis relacionadas baseia-se, por um lado, num minucioso estudo desse conceito e, por outro, nas já conhecidas dificuldades dos estudantes ao lidarem com situações em que as variáveis estejam presentes.

Contrastando, em parte, com a decomposição genética proposta por Dubinsky, a decomposição do conceito de variável, apresentada pelas pesquisadoras, enfatiza apenas aqueles aspectos que parecem ser relevantes, sob o ponto de vista de um especialista, para a construção desse conceito, e admite que todos os aspectos considerados têm a mesma hierarquia. As autoras pontuam:

É importante observar que nós não pretendemos estabelecer estágios para a aprendizagem deste conceito, nós preferimos indicar diferentes características que podem ser construídas pelos estudantes de uma forma não linear e que são importantes para se alcançar uma visão global do conceito de variável. (REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996, v. 4, p. 316, tradução nossa).

Para elas, compreender o conceito de variável implica na capacidade de integrar seus diferentes aspectos e passar de um ao outro de forma flexível. Além disso, para lidar com cada um deles é necessário ser capaz de simbolizá-los, manipulá-los e interpretá-los.

O quadro seguinte apresenta os aspectos da decomposição do conceito de variável, considerados pelas pesquisadoras, numa primeira tentativa de estruturar uma ferramenta que tivesse, a princípio, o objetivo de favorecer a análise de dados relativos à compreensão desse conceito por alunos e professores.

	Simbolização	Interpretação	Manipulação
Incógnita	Simbolização de um termo desconhecido em uma situação particular e/ ou em uma equação.	Interpretação de um símbolo como uma incógnita presente em equações nas quais ele aparece uma ou mais vezes.	Fatorar, simplificar, desenvolver, balancear uma equação para tornar a variável o sujeito dessa equação.
Número genérico	Simbolização de um objeto genérico envolvido em métodos ou regras gerais, deduzidos de padrões numéricos e/ou geométricos, ou em famílias de problemas similares.	Interpretação de um símbolo como um objeto genérico presente em expressões algébricas ou em regras gerais.	Fatorar, simplificar e desenvolver para reorganizar uma expressão.
Variáveis em relação funcional	Simbolização de relações funcionais a partir de uma tabela, um gráfico ou um problema em língua natural.	Interpretação da correspondência entre variáveis e de sua variação conjunta dada por meio de expressões algébricas, tabelas ou gráficos.	Fatorar, simplificar, desenvolver para reorganizar uma expressão; substituir valores para determinar intervalos de variação, valores de máximo e mínimo ou para analisar o comportamento global da relação.

Quadro 1. **Decomposição do conceito de variável.** Baseado em REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996, p. 317, tradução nossa.

Baseando-se nessa decomposição, as autoras elaboraram um questionário com 65 questões, o qual foi aplicado a 164 alunos do primeiro ano dos cursos de Economia, Administração, Contabilidade, Ciências Políticas e Relações Internacionais, de uma universidade particular, no México, com o objetivo de investigar a compreensão desses estudantes a respeito do conceito de variável.

Tal questionário teve sua origem numa versão piloto com 52 questões aplicada a 73 estudantes de uma universidade particular, iniciantes em estudos universitários, com o objetivo de identificar seu desempenho frente a problemas que exigiam a interpretação, manipulação e simbolização da variável em seus três principais usos: incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional. Dessas questões, 35 foram retiradas do questionário utilizado por Ursini (1994) em sua tese de pós-doutorado, que por sua vez foi embasado em questões de projetos como o já citado CSMS, o qual contou com a participação de Küchemann. As outras 17 questões foram elaboradas especialmente para abordar problemas em que as variáveis apareciam em relações funcionais dadas por suas representações gráficas, algébrica ou, ainda, na forma de tabelas.

A partir da Teoria Clássica dos Testes (Muñiz, 1992), as autoras analisaram quantitativamente o questionário piloto e concluíram que, de forma geral, ele era confiável e consistente para identificar a compreensão dos estudantes a respeito do conceito de variável. Porém, algumas das questões relativas à variável como incógnita não trouxeram dados que pudessem contribuir para a investigação desejada. Dessa forma, as autoras decidiram modificá-las, apresentando um grau de dificuldade maior naquelas questões em que a variável assumia esse uso. Além disso, algumas questões em que se pedia uma leitura direta de uma tabela ou de um gráfico, ou, ainda, uma interpretação do papel das variáveis na questão, foram substituídas por outras, por não possibilitarem informações suficientes sobre o uso da variável relacionado à decomposição considerada. (QUINTERO; REYES; TRIGUEROS; URSINI, 1996)

Assim, em 1998, Trigueros e Ursini apresentaram, no artigo *Dificuldades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable*, o questionário² com as 65 questões e uma nova decomposição do conceito de variável em que são considerados os aspectos básicos para sua compreensão.

² O questionário formulado pelas autoras encontra-se, na íntegra, em "Anexo" na página 142.

Inicialmente, a decomposição se baseou na forma como os pesquisadores entendiam o conceito de variável e em nossa experiência como mestres e como aprendizes com relação às construções mentais que considerávamos necessárias para compreender esse conceito. [...] Essa decomposição foi refinada a partir das informações que obtivemos de uma primeira análise das respostas dos estudantes aos nossos instrumentos de investigação. (TRIGUEROS; URSINI, 1998, p. 447, tradução nossa).

2. 1 O MODELO 3UV

A partir do refinamento na decomposição do conceito de variável, realizado em 1998, as autoras elaboraram, em 2001, o modelo 3UV.

Segundo elas, dado o caráter multifacetado da variável seus diferentes usos, freqüentemente, estão presentes em uma mesma situação, em um mesmo problema, e tal fato deve ser levado em consideração durante o processo de ensino. Do ponto de vista das autoras, desconsiderar os diferentes usos da variável dentro de uma mesma situação-problema pode ser a causa de muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos quando esses iniciam seus estudos em álgebra. Já ao contrário, considerar sua flexibilidade pode ser a fonte de uma compreensão mais rica desse conceito.

O modelo 3UV apresenta uma decomposição da variável em seus três principais usos (incógnita, número genérico, variáveis em relação funcional), de forma delimitada, descrevendo as habilidades necessárias à compreensão de cada um deles, o que permite verificar qual desses aspectos é o mais problemático para os alunos e quais habilidades devem ser melhor exploradas para favorecer sua compreensão.

Baseando-se, assim, em anos de estudos e pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de variável, Trigueros e Ursini julgam que a compreensão desse conceito, em nível elementar, poderia ser descrita em termos das seguintes capacidades básicas:

- executar cálculos simples e operações com símbolos literais;
- desenvolver uma compreensão sobre a funcionalidade dessas operações;
- distinguir os diferentes usos da variável;
- transitar entre os diferentes usos da variável de uma forma flexível;

- integrar os diferentes usos da variável como facetas do mesmo objeto matemático. (TRIGUEROS; URSINI, 2001, tradução nossa).

Para cada um dos três principais usos da variável, presentes na decomposição de Trigueros e Ursini, encontramos no modelo 3UV as habilidades necessárias à compreensão de cada um deles. Tais habilidades envolvem a interpretação, simbolização e manipulação de cada um dos usos da variável considerados.

Segundo as autoras, para compreender a **variável como incógnita** é preciso reconhecer e identificar em um problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado ao serem consideradas as restrições e condições dadas no enunciado. É necessário interpretar o símbolo, que representa a variável, como um valor específico, e ter condições de encontrá-lo a partir de operações e manipulações algébricas e aritméticas. Além disso, nas situações em que a variável assume o papel de incógnita é preciso ser capaz de simbolizar as quantidades desconhecidas estabelecendo, assim, equações que permitam encontrar o valor da incógnita. Substituir o valor, ou valores, da variável que fazem das equações sentenças verdadeiras também é uma habilidade presente no entendimento da variável como incógnita.

Compreender a **variável como número genérico**, segundo Trigueros e Ursini, implica em ser capaz de reconhecer padrões em seqüências numéricas ou geométricas, em famílias de problemas e encontrar, ou deduzir, regras e métodos gerais que os descrevem. Além disso, interpretar a variável como uma entidade indeterminada que pode assumir qualquer valor, simbolizar uma regra, ou método genérico, distinguindo os elementos variáveis dos constantes presentes num problema, e manipular (simplificar, desenvolver) expressões algébricas também são habilidades necessárias à compreensão da variável como número genérico.

Para compreender as **variáveis em relação funcional** é preciso reconhecer nos problemas a correspondência e dependência das variáveis envolvidas e sua variação conjunta, independentemente da representação dada, a qual pode ser tabular, gráfica, verbal ou algébrica. Ainda segundo as pesquisadoras, a partir do reconhecimento de uma existente relação entre as variáveis, o estudante deve ser capaz de determinar o valor de uma variável dado o valor da outra, ou o intervalo de variação de uma, dado o intervalo de variação da outra. Além disso, simbolizar uma relação funcional e manipular essa relação de forma conveniente, para que se

possam observar as características da variação apresentada num problema, também são habilidades necessárias à compreensão das variáveis em relações funcionais.

No quadro abaixo, temos, de forma sintetizada, a decomposição da variável e as habilidades, consideradas por Trigueros e Ursini, essenciais à compreensão de cada um dos aspectos dessa decomposição.

Incógnita	Número genérico	Variáveis relacionadas (ou, em relação funcional)
I1- reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema;	G1- reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas;	F1- reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas);
I2- interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos;	G2- interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor;	F2- determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente;
I3- substituir na variável o valor ou valores que fazem da equação uma sentença verdadeira;	G3- deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas;	F3- determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente;
I4- determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas;	G4- manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica;	F4- reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas);
I5- simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação.	G5- simbolizar afirmações genéricas, regras ou métodos.	F5- determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra;
		F6- simbolizar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema.

Quadro 2. **Habilidades necessárias à compreensão da variável em seus três usos:** incógnita, número genérico, variáveis relacionadas. (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 328-329, tradução nossa).

Segundo as pesquisadoras, lidar com cada um dos três usos da variável apresentados no modelo 3UV implica na capacidade de reconhecer a aplicação de cada um deles em uma dada situação, operar com cada um de acordo com a tarefa exigida pelo problema e utilizá-los simbolicamente para formular equações, expressões algébricas genéricas ou relações funcionais em uma dada situação-problema.

Podemos, assim, relacionar as habilidades apresentadas no quadro 2 (Cf. p. 33) com as capacidades de interpretação, simbolização e manipulação destacadas na decomposição da variável no quadro 1 (Cf. p. 29) a fim de elucidar o refinamento elaborado pelas autoras na construção de uma ferramenta que possibilitasse a análise de dados relativos à compreensão do conceito de variável. Dessa forma, construímos o quadro abaixo para expressar esse relacionamento.

	Simbolização	Interpretação	Manipulação
Variável como incógnita	I5	I1 e I2	I3 e I4
Variável como número genérico	G5	G1, G2 e G3	G4
Variável em relação funcional	F6	F1 e F4	F2, F3 e F5

Quadro 3. Relacionamento entre as habilidades descritas no quadro 2 e as capacidades de simbolização, interpretação e manipulação da variável em seus três usos.

2. 2 ALGUMAS APLICAÇÕES DO MODELO 3UV

Para compreendermos de que forma tais habilidades podem ser mobilizadas na resolução de um problema apresentamos, a seguir, alguns exemplos.

Exemplo 1: Um taxista cobra uma taxa fixa de R\$ 10,00 mais R\$ 1,50 por quilômetro rodado para realizar viagens dentro de um mesmo município. Um determinado passageiro tem R\$ 25, 00 para pagar a corrida a esse taxista. Nessas condições, quantos quilômetros ele poderá rodar dentro de seu município?

Para resolver essa questão, é preciso que o estudante mobilize, primeiramente, a habilidade **I1**, ou seja, é necessário perceber que existe algo desconhecido a ser determinado considerando-se as condições do problema. A partir dessa percepção, ele poderá simbolizar o termo desconhecido por uma letra e formular uma equação. Por exemplo: $10 + 1,5 \cdot x = 25$. Dessa forma, o estudante estaria mobilizando a habilidade **I5**. Ao interpretar x como algo que assume um valor específico o estudante estaria mobilizando a habilidade **I2**.

De posse da equação formulada, pode-se resolvê-la empregando os devidos procedimentos aritméticos, manipulando, assim, a variável como incógnita (**I4**). Ou seja:

$$10 + 1,5 \cdot x = 25$$

$$1,5 \cdot x = 25 - 10$$

$$1,5 \cdot x = 15$$

$$x = \frac{15}{1,5} = 10.$$

Para verificar a validade da resposta encontrada, o estudante poderia, ainda, mobilizar **I3**, isto é, calcular $10 + 1,5 \cdot 10$ e encontrar como resultado o montante que o passageiro possui para pagar a corrida.

Vejam, agora, um exemplo em que a variável assume o papel de número genérico e a mobilização das habilidades, descritas no modelo 3UV, necessárias à resolução do problema.

Exemplo 2: Observe as seguintes igualdades e complete:

$$1 + 2 + 3 = \frac{(3 \cdot 4)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{(4 \cdot 5)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{(5 \cdot 6)}{2}$$

...

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

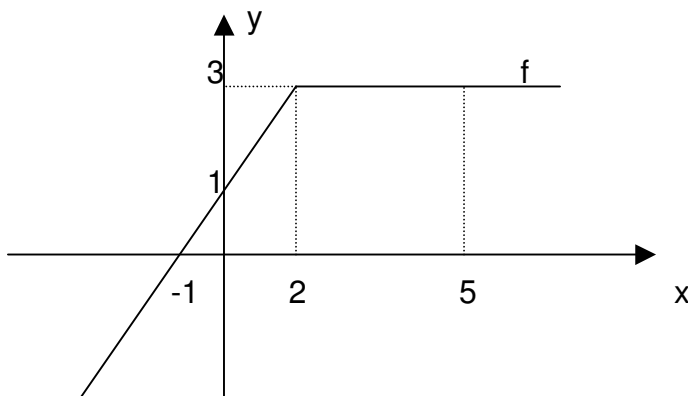
Para resolver essa questão, é preciso que o aluno interprete a variável n como um número genérico (**G2**) e perceba um padrão, ou uma regra nas somas da seqüência apresentada (**G1**).

A partir dessa percepção, o estudante pode deduzir que a soma de n elementos da seqüência 1, 2, 3, ... é igual à metade do produto de n por $n + 1$ (**G3**) e com isso simbolizar uma regra geral como, por exemplo, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{[n(n+1)]}{2}$ (**G5**).

O aluno pode ainda, manipular a expressão $\frac{[n(n+1)]}{2}$ escrevendo-a como $\frac{n^2 + n}{2}$ (**G4**).

A seguir, apresentamos um exemplo envolvendo variáveis em uma relação funcional.

Exemplo 3: Considere a função f representada, graficamente, abaixo:



- Qual é a imagem de 4?
- Determine x para $f(x) = 1$.
- Escreva uma sentença algébrica para representar f .
- Determine o conjunto imagem de f .
- Classifique f quanto a sua monotonicidade.

Para resolver os itens dessa questão é preciso que o aluno reconheça, a partir da representação gráfica de f , uma relação entre as variáveis x e y , identificando, assim, a correspondência entre elas. (**F1**)

Especificamente, no item a) o estudante deve mobilizar a habilidade **F2**, ou seja, dado o valor da variável independente calcular o da variável dependente. No item b), é preciso mobilizar **F3**, isto é, calcular o valor da variável independente dado o valor da variável dependente.

Já no item c), é necessário simbolizar uma relação entre as variáveis **x** e **y**, de acordo com os dados apresentados no gráfico (**F6**). Nesse caso, o estudante poderia escrever a seguinte relação:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$$

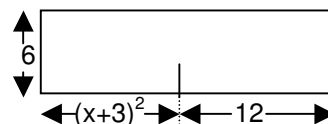
Para determinar o conjunto imagem de **f**, o aluno deve ser capaz de encontrar o intervalo de variação de **y** considerando o intervalo de variação de **x** dado a partir da representação gráfica apresentada na questão (**F5**).

Observando que para $x \leq 2$ os valores de **y** aumentam, e para $x > 2$, **y** fica constante, o aluno estaria mobilizando a habilidade **F4**, e poderia concluir que a função **f** é crescente.

Pontuamos que nem todos os problemas envolvem, de forma separada, cada um dos aspectos da variável, como apresentamos nos exemplos acima. Pelo contrário, podemos verificar nos materiais didáticos utilizados no Ensino Médio que muitos problemas, em contextos algébricos, exploram a variável em suas diferentes nuances à medida que a mobilização de cada uma delas se torna necessária durante as etapas de resolução do problema. Tal afirmação está embasada na análise que fizemos do material didático utilizado, ao longo do Ensino Médio, pelos alunos participantes de nossa investigação.

A fim de explorar, numa atividade de ensino, a diferenciação e integração dos três usos da variável, Trigueros e Ursini (2001) apresentam um problema, elaborado com base no modelo 3UV, e algumas questões direcionadoras para realizar tal exploração. Tal problema foi proposto a alunos do primeiro ano universitário de um curso denominado pré-cálculo.

Para quais valores de **x** a área do retângulo abaixo varia entre 168 e 288? Se o valor de **x** aumenta ou diminui o que acontece com a área? (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 331, tradução nossa).



De acordo com as autoras, nesse problema, a variável x tem que ser reconhecida como um número genérico. É preciso, ainda, identificar que existem quantidades desconhecidas a serem determinadas considerando-se os dados do problema. Deve-se notar a dependência e correspondência entre os valores de x e os valores da área do retângulo e analisar a variação conjunta dessas grandezas para, assim, determinar os possíveis intervalos de variação de x . Diferentes estratégias podem ser usadas para resolver o problema em questão e os alunos podem mobilizar cada um dos usos da variável dependendo do seu conhecimento anterior e de suas experiências ao longo da matemática escolar. (TRIGUEROS; URSINI, 2001, tradução nossa)

De acordo com as autoras, algumas questões direcionadoras - tais como “O que x representa no problema? Quantos valores x pode assumir?” - podem ser formuladas para ajudar os estudantes a perceberem a variável x como um número genérico (**G2**). Além disso, segundo as pesquisadoras, os estudantes têm a tendência de usar fórmulas memorizadas para resolver problemas de áreas, sem levar em conta os dados específicos presentes num problema. Assim, apresentar a seguinte questão “Como você expressaria a área desse retângulo?” pode levar os alunos a focalizarem sua atenção nos dados do problema e buscar uma simbolização (**G5**) para a variável como número genérico, manipulando-a (**G4**) para obter a expressão $6((x+3)^2 + 12)$. (*ibid.*)

Duas outras questões sugeridas pelas autoras são: “Para quais valores de x a área é igual a 168? Quando a área é igual a 288?”. Tais questões, segundo elas, podem ser formuladas para ajudar os estudantes, que usam como ponto de partida a estratégia comum de resolver as equações $6((x+3)^2 + 12) = 168$ e $6((x+3)^2 + 12) = 288$, a encontrar a solução para a inequação $168 < 6((x+3)^2 + 12) < 288$.

Quando os estudantes usam essa estratégia eles, freqüentemente, assumem que todos os valores entre as soluções obtidas das equações tornam a inequação verdadeira. Mas nem sempre isso é verdade. [...] Em termos dos usos da variável, responder essa questão implica formular as equações do segundo grau (**I5**), desenvolver as expressões gerais (**G4**) e resolver ambas as equações (**I4**). Como cada equação tem duas soluções, os alunos precisam considerá-las e perceber que ambas são possíveis e significativas de acordo com o problema dado (**I3**). (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p. 332, tradução nossa).

Uma questão como “Para quais valores de x a área é maior que 168 e menor que 288?”, segundo as pesquisadoras, leva os alunos, que adotaram a estratégia citada anteriormente, a utilizarem as soluções das equações a fim de estabelecer os intervalos apropriados para a variável x , ou seja, “ $-9 < x < -7$ ” ou “ $1 < x < 3$ ”.

De acordo com Trigueros e Ursini, uma outra possível estratégia para resolver essa questão seria estabelecer uma relação funcional entre a variável x e a área do retângulo (**F1**). Nesse caso, responder a questão implica em definir os intervalos de variação para a variável dependente (**F5**) e determinar, a partir do gráfico da função, os correspondentes intervalos para a variável independente. Diante dessa estratégia, questões como “O que acontece com a área do retângulo quando x varia? Como varia a área quando o valor de x aumenta/ diminui?” podem despertar reflexões para que os alunos possam determinar os valores de uma variável quando são conhecidos os da outra (**F2-F3**) e analisar a variação conjunta (**F4**) das variáveis envolvidas no problema.

O mesmo problema, proposto pelas autoras, pode ser formulado usando outras expressões ao invés de “ $(x+3)^2$ ”. Para estudantes que estão começando a resolver problemas em contextos algébricos, pode-se utilizar apenas x ou, ainda, $x+1$, enquanto que para alunos, que já tiveram anos de estudos em álgebra, poderia ser utilizada uma expressão mais complexa como, por exemplo, $\frac{1}{x}$.

Com tais exemplos, procuramos apresentar uma das aplicações do modelo 3UV – a de ferramenta auxiliadora na elaboração de atividades de ensino - ilustrando de que forma as habilidades descritas no quadro 2, da página 33, relativas à compreensão da variável em seus três usos, podem ser mobilizadas e exploradas. No próximo capítulo, apresentamos uma outra aplicação do modelo, a de ferramenta direcionadora na formulação de instrumentos de investigação para realizar análises diagnósticas a respeito da compreensão de alunos sobre o conceito de variável. Essa foi a função do modelo empregada em nossa pesquisa.

CAPÍTULO 3

O QUESTIONÁRIO

Nesse capítulo, descrevemos o processo de elaboração de nosso instrumento de investigação, citando os objetivos de cada questão, as habilidades descritas no modelo 3UV necessárias a sua resolução e as mudanças que fizemos no piloto até chegar à versão final do questionário. Apresentamos, ainda, características da escola e dos alunos que participaram de nossa pesquisa.

3.1 O QUESTIONÁRIO PILOTO

O questionário piloto foi composto por seis questões, as quais sofreram algumas modificações após analisarmos os dados que conseguimos com sua aplicação. Tanto o piloto quanto a versão final foram aplicados a alunos do terceiro ano do Ensino Médio de escolas da rede particular de ensino do ABC. A escola em que aplicamos o piloto fica na cidade de São Caetano do Sul. Já o questionário final foi aplicado a alunos da cidade de São Bernardo do Campo.

Na ocasião do piloto, contamos com a participação de 3 duplas e 3 trios de alunos e sua aplicação ocorreu durante o período normal de aulas; o que não foi possível quando aplicamos a versão final.

Utilizamos uma aula de 50 minutos para a realização da investigação e não contamos com a ajuda de um professor observador ou de gravadores, como fizemos na aplicação do questionário final. Tal fato, sem dúvida, deve ser levado em conta, pois notamos que muitos dados interessantes, que poderiam ser obtidos através das conversas entre os alunos no momento da elaboração de suas respostas, foram perdidos. Conseguimos anotar alguns pontos importantes da discussão entre alguns estudantes, mas percebemos que sem a ajuda de um outro professor e a utilização de gravadores perderíamos dados valiosos.

Esse relato demonstra uma das contribuições do piloto, pois quando tivemos de pensar na aplicação da versão final tomamos alguns cuidados que anteriormente

não haviam sido considerados. Além disso, observamos que a reformulação de algumas questões, ou, ainda, o acréscimo de certos itens na versão final do questionário ocorreram graças aos resultados encontrados na ocasião da aplicação do piloto. Assim, melhoramos e adequamos as questões para que pudéssemos investigar a compreensão de alunos do Ensino Médio a respeito do conceito de variável.

Antes da aplicação do piloto, fizemos uma análise das questões, refletindo sobre sua formulação, objetivos e possíveis estratégias de resolução que os alunos viriam a desenvolver. Após sua aplicação, reavaliamos essa análise e aperfeiçoamos certos pontos a partir dos dados que encontramos nos protocolos dos alunos investigados. Todas as mudanças realizadas serão apresentadas ao longo desse capítulo.

O questionário, em sua versão final, pode ser encontrado em “Apêndice”, na página 139.

3.2 A ESCOLA E OS ALUNOS

Destacamos, nesta etapa do relatório da pesquisa, características da escola e dos alunos que participaram de nossa investigação. Salientamos que esses alunos estudaram durante os três anos do Ensino Médio na escola em que aplicamos o questionário e que, portanto, todas as informações que apresentamos, a seguir, são válidas na compreensão do histórico escolar desses estudantes no que se refere aos assuntos abordados no ensino da Matemática nessa etapa da Educação Básica.

A escola em que aplicamos a versão final de nosso questionário é uma escola particular bem conceituada na região do Grande ABC. Ela é reconhecida pelos resultados de destaque que seus alunos apresentam em provas como o ENEM e pelo considerável número de aprovações em vestibulares que dão acesso a cursos em universidades públicas.

Os alunos do Ensino Médio têm 4 aulas de Matemática semanais durante o primeiro e o segundo anos. No terceiro ano, o número de aulas sobe para cinco.

A organização do material didático, utilizado pela escola, é feita em divisões chamadas de “frentes”. No primeiro e segundo anos, os alunos encontram a programação de Matemática dividida em duas “frentes”, as quais são trabalhadas

pelos professores de forma paralela, ou seja, duas aulas semanais são dedicadas ao ensino e à aprendizagem dos assuntos abordados na “frente 1” e duas aulas são destinadas à “frente 2”. Já no terceiro ano, o material didático apresenta quatro “frentes”. Para a “frente 1” são dedicadas duas aulas semanais e para as demais “frentes” – 2, 3 e 4 – uma aula semanal para cada, perfazendo, assim, as cinco aulas de Matemática previstas na grade curricular.

Ao longo do ano letivo, os alunos e professores do primeiro e do segundo anos utilizam, nas aulas, 4 cadernos, dois no primeiro semestre e dois no segundo semestre, os quais compõem o material didático da escola. Já os estudantes do terceiro ano, além dos 4 cadernos utilizados durante o ano, recebem em novembro dois cadernos de revisão com exercícios de vestibulares que são realizados em sala de aula com a orientação dos professores até a última semana do ano letivo.

Apresentamos, a seguir, um quadro que sintetiza a programação do 1º ano do Ensino Médio na disciplina Matemática.

1º semestre	Frente 1	Caderno 1	Potências e propriedades; Raízes e propriedades; Fatoração e produtos notáveis; Simplificação de expressões algébricas;
		Caderno 2	Trigonometria no triângulo retângulo; Arcos notáveis; Trigonometria na circunferência; Funções trigonométricas; Equações e inequações trigonométricas;
1º semestre	Frente 2	Caderno 1	Conjuntos e operações; Diagramas e relações binárias; Função (definição, domínio, contradomínio e imagem); Funções monotônicas; par; ímpar; periódica; limitada; sobrejetora; injetora; bijetora; Função composta; Função inversa.
		Caderno 2	Equações do 1º e do 2º graus; Sistemas de equações; Problemas com equações e sistemas; Noções de conjuntos numéricos; Função polinomial do 1º grau e do 2º graus; Vértice de parábola e conjunto imagem; Inequações do 1º grau e do 2º graus; Sistemas de inequações; Inequações produto e quociente.

2º semestre	Frente 1	Caderno 3	Adição e subtração de arcos; Lei dos senos e dos cossenos; Seqüências numéricas; Progressão aritmética (definição, propriedades e soma).
		Caderno 4	Progressão geométrica (definição, propriedades) Soma dos termos de uma PG; Soma dos infinitos termos de uma PG convergente;
2º semestre	Frente 2	Caderno 3	Função exponencial; Equações e inequações exponenciais; Logaritmos; Função logarítmica; Equações e inequações logarítmicas;
		Caderno 4	Função modular; Equações e inequações modulares; Razões e Proporções; Divisão proporcional; Regra de três simples e composta; Porcentagem; Juros simples e compostos.

Quadro 4. **Programação do 1º ano do Ensino Médio.** Fonte: Material didático da escola onde a pesquisa foi realizada.

Com base no quadro 4, observamos que no primeiro ano do Ensino Médio os alunos estudam assuntos pertinentes à aritmética, álgebra e trigonometria, sendo que a maior parte dos estudos encontra-se em contexto algébrico.

Abaixo, apresentamos a programação do 2º ano.

1º semestre	Frente 1	Caderno 1	Matrizes; Determinantes; Sistemas lineares (Regra de Cramer; Escalonamento)
		Caderno 2	Discussão de um sistema linear; Sistema linear homogêneo; Fatorial e número binomial; Análise Combinatória (Arranjos, Permutações e Combinações); Probabilidade (definição; união e intersecção de eventos; lei binomial de probabilidade).
1º semestre	Frente 2	Caderno 1	Introdução à Geometria; Paralelismo; Triângulos (segmentos notáveis, condição de existência, congruência); Polígonos; Quadriláteros notáveis; Linhas proporcionais (Teorema de Tales; Teorema das bissetrizes interna e externa); Semelhança de triângulos.

		Caderno 2	Relações métricas no triângulo retângulo; Lugares geométricos; Pontos notáveis do triângulo; Ângulos na circunferência; Potência de ponto; Área das figuras planas.
2º semestre	Frente 1	Caderno 3	Sistema cartesiano ortogonal; Distância entre dois pontos; Ponto médio de um segmento; Estudo da reta; Paralelismo e perpendicularismo; Distância de ponto à reta.
		Caderno 4	Estudo da circunferência; Posição relativa de reta e circunferência; Estudo das cônicas (Elipse; Hipérbole; Parábola)
2º semestre	Frente 2	Caderno 3	Estudo de sólidos geométricos como prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e suas partes (áreas e volumes).
		Caderno 4	Troncos de cone e pirâmide (áreas e volumes) Inscrição e circunscrição de sólidos; Sólidos de revolução; Retas e planos no espaço; Diedros, triedros e poliedros; Poliedros de Platão.

Quadro 5. **Programação do 2º ano do Ensino Médio.** Fonte: Material didático da escola onde a pesquisa foi realizada.

Notamos que, ao contrário do que acontece no primeiro ano, a maioria dos assuntos estudados pelos alunos, no segundo ano, encontra-se em contexto geométrico. Assim, no segundo ano, a álgebra dá espaço à geometria e só volta a ter seu domínio no terceiro ano.

A programação da escola para o terceiro ano, além de retomar todos os assuntos trabalhados no primeiro e no segundo anos, comporta também o estudo dos números complexos, dos polinômios, das equações algébricas - de grau maior que dois - e das noções de Estatística descritiva. Nesse último estudo, os alunos aprendem a calcular algumas medidas de tendência central, como a média, a mediana e a moda, e algumas medidas de dispersão, como a variância e o desvio padrão.

Diante da programação da escola, podemos observar que, ao longo dos três anos do Ensino Médio, os alunos, que participaram de nossa investigação, enfrentaram mais questões e problemas em contexto algébrico do que em outros contextos. O conhecimento do material didático utilizado por eles, principalmente no que se refere ao conteúdo de Álgebra, nos auxiliou na análise das respostas dadas

por esses estudantes às questões que propomos, as quais apresentamos no tópico 3.4 desse capítulo.

3.3 A APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO

A aplicação do questionário, em sua versão final, aconteceu no dia 07-11-07, no período posterior ao das aulas normais dos estudantes que participaram da pesquisa.

Fomos bem recebidos pelos responsáveis pela administração da escola onde aplicamos nosso questionário de investigação. A coordenadora educacional se sentiu lisonjeada por poder contribuir com nosso trabalho. Decidimos realizar a investigação em nosso local de trabalho, pois sabíamos que seria mais fácil conversar com os responsáveis pela escola, ter sua atenção e esclarecer a importância de pesquisas na área educacional. Tal liberdade contribuiu, sem dúvida, para a realização da pesquisa e ficamos gratos pelo apoio dos professores, coordenadores e diretora da escola.

Na ocasião da aplicação, pedimos a autorização da coordenadora educacional para utilizarmos uma das maiores salas da escola para que pudéssemos dispor os alunos de forma que não ficassem muito próximos uns dos outros, pois gravaríamos as discussões entre eles durante o momento em que estivessem respondendo às questões.

Conseguimos, graças à ajuda de colegas do grupo G2 e também dos alunos que se dispuseram a participar da pesquisa, gravadores para cada dupla participante, para a professora-pesquisadora e, ainda, para a professora que participou como observadora.

O convite aos alunos para participar de nossa pesquisa ocorreu uma semana antes da aplicação do questionário. Numa sala de terceiro ano do Ensino Médio, de 48 alunos, passamos uma lista solicitando os nomes daqueles que estivessem interessados em participar. Observamos que já conhecíamos os alunos. Compúnhamos a equipe de professores que havia lecionado para eles durante os três anos do Ensino Médio. Os estudantes que participaram da pesquisa encontravam-se na faixa etária de 17 a 18 anos.

Quando questionamos os alunos sobre seu interesse em participar da pesquisa, explicamos que trabalharíamos em duplas para responder o questionário, com isso, nossa intenção era que os voluntários formassem naturalmente seus pares. Optamos pelo trabalho em duplas, pois acreditamos que a discussão entre alunos, durante o desenvolvimento de uma tarefa, pode trazer dados interessantes para análises diagnósticas.

Esclarecemos aos estudantes que a aplicação do questionário seria no dia 07-11-07, às 13h, o que possibilitaria, um intervalo para o lanche entre o final do período de aulas e a nossa atividade. Alguns alunos, que já haviam demonstrado certo interesse em participar da pesquisa, desistiram e não assumiram o compromisso, pois no dia e horário agendados já tinham outras tarefas a fazer, como cursos de idiomas e aulas de recuperação. Contudo, conseguimos 16 alunos voluntários para participar de nossa investigação, o que resultaria em 8 duplas.

Como imprevistos sempre acontecem, no dia e horário marcados apareceram 15 alunos dos 16 que haviam se comprometido. Um deles ficou sem o parceiro de classe e logo nos questionou se poderia se juntar a uma das duplas já formadas. Seu interesse era notável, assim, não impossibilitamos sua participação. Após nosso consentimento, ficamos, então, com 6 duplas e um trio.

Organizamos a sala com a ajuda da professora-observadora, colocando os gravadores em posições estratégicas e solicitamos aos alunos que sentassem onde queríamos para que ficassem longe uns dos outros. Explicamos que o objetivo da disposição estratégica era potencializar a qualidade das gravações.

Observamos que a professora-observadora era nossa colega de trabalho, e, assim como nós, já conhecia os alunos; trabalhamos em equipe quando os estudantes estavam no segundo ano do Ensino Médio.

Orientamos os participantes da pesquisa sobre como usar os gravadores no caso da fita terminar, como ligar e iniciar a gravação e como desligar. Após todas as orientações e esclarecimentos sobre as gravações, perguntamos se havia alguma dupla que não gostaria de ser gravada. Todos os alunos concordaram com a gravação e, após o início da aplicação, notamos que eles se divertiam com o fato de suas falas serem gravadas.

Começamos a aplicação às 13h 28min e encerramos às 15h 27min. Não estipulamos um tempo limite para que os estudantes respondessem às questões, mas acreditávamos que levariam 1h 30min, em média, para responder todo o

questionário. Preferimos não dar um limite de tempo para que eles não sentissem uma pressão que pudesse inibir sua participação natural. Todas as duplas e o trio entregaram o questionário após às 14h, sendo que a primeira dupla a finalizá-lo foi a dupla que nomearemos por D2.

A dupla D2 entregou o questionário respondido às 14h 08min. Observamos que os alunos dessa dupla estavam inquietos e sem muita paciência para pensar sobre as questões. O histórico escolar dos integrantes de D2 aponta dificuldades em Matemática durante os três anos do Ensino Médio. Por acompanharmos tais alunos, ao longo do Ensino Médio, temos condições de avaliá-los e compreender suas limitações e problemas na aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Ambos passaram por muitos processos de recuperação e concluíram os estudos na disciplina com muita dificuldade. Acreditamos que tais observações serão úteis mais adiante quando apresentarmos as respostas dessa dupla para cada uma das questões.

O último protocolo foi entregue às 15h 07min pelo trio formado entre os 15 alunos que participaram como voluntários em nossa pesquisa. Ao finalizarem o questionário, os integrantes do trio estavam agitados e nos questionaram sobre os objetivos das questões respondidas por eles. Como pretendíamos realizar futuras entrevistas com os participantes, para esclarecer os dados observados em seus protocolos, decidimos, na ocasião da aplicação do questionário, não fazer comentários sobre os objetivos das questões e sobre a intenção da pesquisa, assim não correríamos o risco de influenciar os alunos no momento de dar suas respostas durante as entrevistas.

Após a aplicação do questionário, passamos à etapa das entrevistas. Analisamos, então, as gravações que fizemos no momento em que os alunos respondiam as questões, e as respostas escritas dadas por eles. Com base nessa análise, formulamos algumas perguntas que faríamos no momento das entrevistas em busca de esclarecimentos sobre os dados coletados na ocasião da aplicação do questionário.

Com o objetivo de tornar mais prática nossa escrita, usamos as notações D1, para a dupla 1, D2, para a dupla 2, e assim por diante, até a dupla 6. O trio foi denominado T7. Quando assumimos o papel de professora-pesquisadora utilizamos a notação PP. Para a professora-observadora usamos PO.

3. 4 AS QUESTÕES E O MODELO 3UV

Com base nas reformulações que fizemos no piloto, a versão final de nosso instrumento de investigação ficou composta por seis questões, subdivididas em 22 itens.

Abaixo, transcrevemos, a questão 1.

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para:

- a) representar um número que multiplicado por 12 seja igual a 144.
- b) representar um número dividido por 3 somado a 7.
- c) representar um número que é igual a 15 mais um outro número.

Tínhamos como objetivo para a questão 1 verificar a capacidade de simbolização dos alunos. Assim, para resolver o item a), os alunos deveriam mobilizar a habilidade **I5**, ou seja, simbolizar o termo desconhecido identificando-o na situação dada e usá-lo para representar uma equação. No item b), seria necessário mobilizar **G5** para simbolizar a sentença dada em língua natural. Para responder o item c), os alunos deveriam mobilizar **F6**, expressando, assim, uma relação entre duas quantidades desconhecidas.

Por influência dos enunciados da questão de Trigueros e Ursini (1998), que tomamos por base para a elaboração da questão 1, no questionário piloto escrevemos em todos os itens dessa questão a frase “representar um número desconhecido”. Apesar de a expressão “desconhecido” não ter sido questionada pelos alunos na ocasião da aplicação do piloto, decidimos retirar tal expressão dos enunciados da versão final, pois imaginamos que poderíamos influenciar a interpretação dos alunos a respeito do uso que estaria sendo feito da variável, já que a palavra “incógnita”, muitas vezes, é substituída por “termo desconhecido”. Além disso, nessa questão, optamos por não escrever “não calcule o número”, observação essa utilizada pelas autoras no enunciado da questão que nos serviu de inspiração.

Embora, no item a), alguns alunos tivessem determinado o valor da incógnita, na ocasião do piloto, acreditamos que esse fato não interferiu em sua interpretação

a respeito da letra que, por ventura, utilizaram para representar a incógnita, por isso, não incluímos a observação apresentada na questão das autoras.

A seguir, apresentamos nossas hipóteses quanto às possíveis estratégias de resolução dos alunos para a questão 1.

No item a), a sentença dada exige o emprego da variável como incógnita. Para responder esse item, pensamos que os alunos poderiam utilizar, por exemplo, x para representar o número e escrever $12.x = 144$, ou, ainda, $x.12=144$, mobilizando, assim, a habilidade **I5**. Alguns alunos poderiam, ainda, determinar o valor de x , isto é, $12x = 144 \Rightarrow x = 12$. Nesse caso, além de **I5**, os estudantes estariam mobilizando também **I4**.

No item b), a sentença dada exige o emprego da variável como número genérico. Os alunos poderiam utilizar, por exemplo, x para representar um número qualquer e escrever $\frac{x}{3} + 7$ (**G5**). Ou ainda, utilizariam uma outra variável para representar o resultado de $\frac{x}{3}$ e escreveriam erroneamente $\frac{x}{3} = y + 7$, mobilizando, assim, **F6**. Essa última resposta encontra-se em nossa análise por conta do que observamos no piloto, pois, antes de aplicarmos a primeira versão de nosso questionário, não havíamos pensado que os alunos dariam tal resposta. Alguns alunos, poderiam, ainda, formular a equação $\frac{x}{3} + 7 = 0$ (**I5**) e determinar o valor de x (**I4**).

Já no item c), temos a presença de variáveis relacionadas. Os alunos poderiam escrever $x = 15 + y$ (**F6**) para simbolizar uma relação entre as quantidades desconhecidas. Alguns alunos poderiam tentar determinar x e y mobilizando para isso as habilidades **F2**, ou **F3**, e **I4**, isto é, poderiam estabelecer valores para x , ou y , e calcular, assim, o valor da outra variável.

Reproduzimos, abaixo, a questão 2.

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

a) $y = y$

b) $7y^2 = 2x - 5$

c) $t+3$

Nosso objetivo com essa questão era analisar a interpretação dos alunos a respeito das variáveis x , y e t , ou seja, analisar qual uso (incógnita, número genérico, variáveis relacionadas) da variável estaria sendo admitido pelos alunos, em cada item da questão. Além disso, procuramos identificar quais seriam os campos de variação, para cada uma das variáveis, que, possivelmente, estariam sendo considerados pelos alunos a partir dos valores atribuídos, como exemplos, para as variáveis. Pontuamos que, para atingir esse último aspecto de nosso objetivo, recorreremos a análise dos dados que obtivemos com as entrevistas para complementar as informações que conseguimos a partir das respostas encontradas no questionário.

Para responder os itens a) e c), os alunos deveriam mobilizar **G2**, interpretando, assim, y e t como números genéricos que podem assumir qualquer valor. Poderiam citar como exemplos números racionais, irracionais, ou, ainda, números complexos. Já no item b), é necessário mobilizar as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, ou seja, reconhecer a correspondência entre as variáveis x e y e sua variação conjunta. Nesse caso, para dar exemplos, os alunos poderiam mobilizar **G4** e **F5**. Ao manipular a relação $7y^2 = 2x - 5$ para isolar em um dos membros da igualdade uma das variáveis, os alunos estariam mobilizando **G4**. Após tal manipulação, poderiam perceber que y pode assumir qualquer valor real, e que, diante desse campo de variação, na relação dada, x pertence ao intervalo $[\frac{5}{2}, \infty[$, determinando, assim, o conjunto dos possíveis valores reais de x (**F5**). Poderiam, ainda, citar, como exemplos, alguns pares de números que satisfazem a relação $7y^2 = 2x - 5$, mobilizando para isso as habilidades de manipulação **F2** (ou **F3**) e **I4**.

Nessa questão, na versão piloto, não havíamos solicitado aos alunos que dessem exemplos dos possíveis valores que as variáveis poderiam assumir. Com

isso, percebemos que sem solicitar tais exemplos não teríamos pistas para identificar quais conjuntos numéricos estariam sendo considerados pelos alunos como domínio das variáveis. Tal fato, ocorreu, novamente, por conta da influência da questão de Trigueros e Ursini³ que nos serviu de inspiração para a questão 2. Na versão das autoras não eram solicitados os exemplos, pois as pesquisadoras não tinham como objetivo identificar os campos de variação que estariam sendo considerados pelos alunos para as variáveis em questão. Assim, nos questionamos: como os estudantes estariam interpretando as variáveis presentes na questão 2? Como elementos representativos dos inteiros? Ou do conjunto dos reais? Ou, quem sabe, ainda, dos complexos? Os alunos identificam o domínio de variação das variáveis? Antecipamos que conseguimos verificar quais eram os domínios de variação considerados pelos alunos, para as variáveis presentes na questão 2, analisando os dados encontrados em seus protocolos e suas respostas dadas no momento das entrevistas realizadas.

Tínhamos como hipótese que os alunos poderiam escrever “infinitos” como resposta para os itens a) e c), nos quais a variável assume o papel de número genérico (**G2**), e que citariam, como exemplos, apenas números inteiros e positivos, ou, ainda, incluiriam os negativos. Pensamos, também, que alguns alunos poderiam citar alguns números decimais, racionais ou, até mesmo, números irracionais que lhes fossem mais familiares como, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π . De modo geral, alguns alunos poderiam pensar em y e t como variáveis reais, ou, até mesmo, como variáveis complexas.

No item b), tínhamos por hipótese que alguns alunos poderiam tentar resolver a equação (**I4**) aplicando algum procedimento algorítmico que lhes fosse de conhecimento, como por exemplo, a utilização da “fórmula de Báskara”, nome com o qual é, freqüentemente, apresentada. Pensamos nessa hipótese pela influência que o termo do segundo grau poderia ocasionar. Outros estudantes poderiam, ainda, responder “infinitos valores para x e y ” e citar como exemplo números quaisquer, sem dar atenção à relação de dependência entre as variáveis. Supomos, também, que alguns alunos poderiam pensar nessa relação de dependência (**F1**) e citar alguns pares de números reais que satisfizessem tal relação, estabelecendo valores para uma das variáveis e determinando, assim, os da outra (**F2**, ou **F3**, e **I4**).

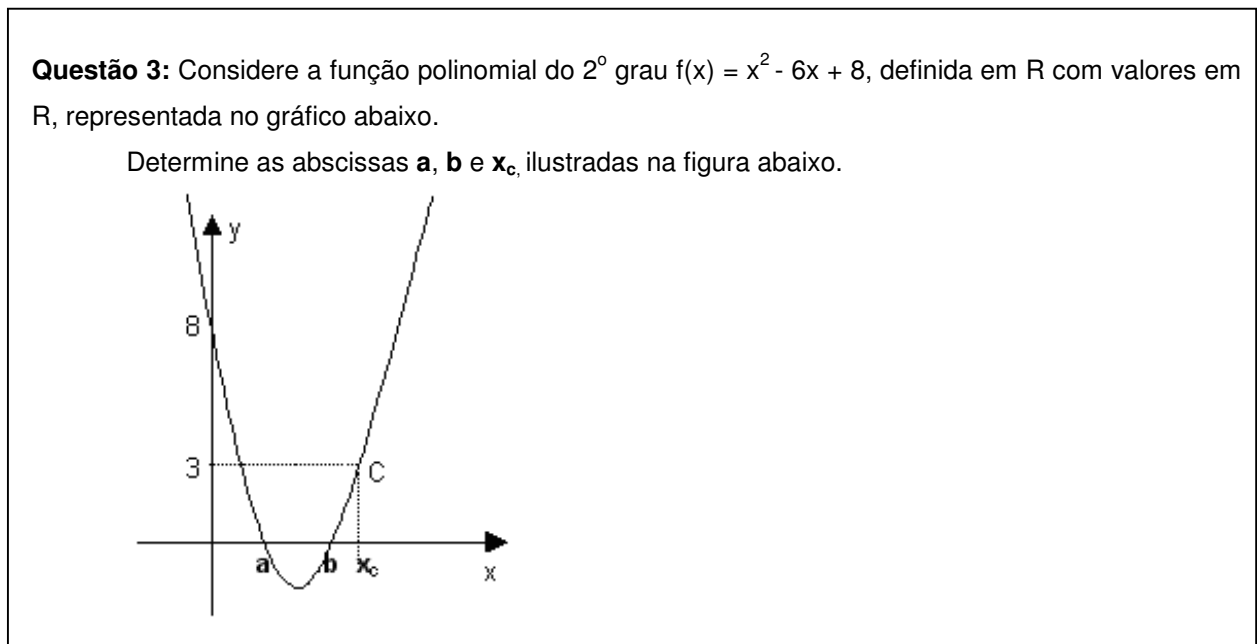
³ As questões de Trigueros e Ursini (1998), que nos serviram de inspiração para a elaboração das questões 1 e 2, podem ser encontradas em “Anexo” na página 142.

Além disso, pensamos que alguns alunos poderiam pensar em x como variável dependente e y independente, e outros, ainda, considerarem o contrário. Ou seja, tínhamos como hipótese que encontraríamos nas respostas dos alunos, após manipularem a expressão dada, as seguintes relações:

$$“y = \pm \sqrt{\frac{2x-5}{7}}, \text{ para } x \geq 5/2, \text{ com } x \text{ real}”, \text{ ou, então, } “x = \frac{7y^2 + 5}{2}.”.$$

Nesse último caso, os alunos poderiam não perceber que x nunca assumirá, em \mathfrak{R} , valores menores que $5/2$. Em ambos os casos, os estudantes poderiam, ainda, citar que y pode assumir qualquer valor real. Para chegar a essas conclusões, eles precisariam mobilizar as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, e as habilidades de manipulação **G4** e **F5**.

Apresentamos, a seguir, a questão 3.



Tínhamos como objetivo para a questão 3 verificar a interpretação dos alunos a respeito das variáveis **a**, **b**, x e **x_c** , e os procedimentos utilizados por eles na manipulação dessas variáveis. Para tanto, observamos quais relações os alunos estabeleceram entre as incógnitas **a**, **b** e **x_c** e as variáveis da função polinomial do 2º grau dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Contudo, tínhamos, ainda, por objetivo analisar a influência da representação gráfica na interpretação dos estudantes a respeito das variáveis apresentadas na questão.

Observamos que a questão 3 envolve, essencialmente, o uso da variável como incógnita. Para resolvê-la, os alunos teriam de mobilizar as habilidades **I1**, **I2** e **F1** de interpretação, a habilidade **I5** de simbolização, e **F3** e **I4** como habilidades de manipulação.

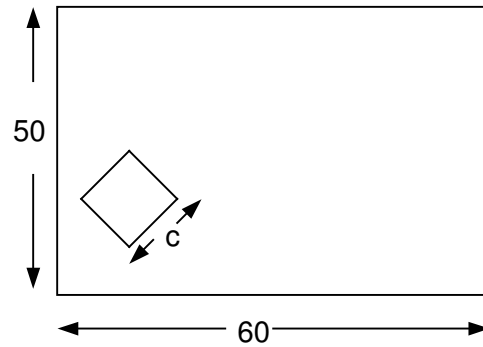
A variável x (independente), presente na função dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, está associada a variável y (dependente), logo, para calcular o que se pede na questão, os alunos deveriam reconhecer a correspondência entre essas variáveis (**F1**) para, em seguida, mobilizar **F3**, isto é, determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente. Ao reconhecerem a , b e x_c como incógnitas (**I1**), os estudantes deveriam formular as equações $x^2 - 6x + 8 = 0$ e $x^2 - 6x + 8 = 3$ (**I5**), e determinar o valor dessas incógnitas (**I2**, **I4**).

Nossas hipóteses, quanto às possíveis estratégias dos alunos para a resolução da questão 3, eram as seguintes:

- Os alunos poderiam reconhecer a e b como incógnitas (**I1**), relacionado-as às raízes da função dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$ (**F1**, **F3**), formular a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ (**I5**), e determinar, a partir de sua resolução, que $a = 2$ e $b = 4$ (**I2**, **I4**).
- Os alunos poderiam encontrar alguma dificuldade em relacionar a e b com x' e x'' , ou x_1 e x_2 , notações comumente utilizadas para representar as raízes de uma equação, ou os zeros de uma função.
- Os alunos poderiam relacionar a e b com os parâmetros que aparecem na representação algébrica ($f(x) = ax^2 + bx + c$) de uma função polinomial do 2º grau por serem essas letras, geralmente, utilizadas em tal representação.
- Os alunos poderiam reconhecer x_c como incógnita (**I1**), identificar que a notação $f(x)$ representa y , substituir y por 3 (**F1**, **F3**) e, assim, resolver a equação $3 = x^2 - 6x + 8$ (**I5**) para determinar x_c (**I2**, **I4**). Ao encontrarem duas soluções, 1 e 5, os alunos poderiam analisar o gráfico de f e perceber que 1 não convém devido a localização do ponto C, e, portanto, $x_c = 5$.
- Os alunos poderiam mostrar dificuldades em calcular a abscissa do ponto C da parábola, já que C não representa um ponto de intersecção com os eixos coordenados.

A seguir, reproduzimos a questão 4.

Questão 4: A área representada abaixo ilustra as medidas de um terreno retangular destinado à construção de um condomínio, onde será colocado um jardim, de formato quadrado, com c metros de medida para seu lado. Analisando a figura que representa esta situação, responda às questões:



- Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área destinada ao condomínio desconsiderando a área do jardim?
- O que a letra c representa no problema?
- Que valores c pode assumir?
- Quais são os valores de c para os quais a área ocupada pelo jardim é menor do que 16m^2 ?

Nosso objetivo, com a questão 4, era verificar a capacidade de interpretação, simbolização e manipulação dos alunos com relação à variável c apresentada no problema.

Procuramos, nessa questão, explorar o uso da variável em uma relação funcional. Assim, para resolvê-la os alunos teriam de mobilizar as habilidades **G5**, ou **F6**, de simbolização; **G2**, **F1** e **F4**, de interpretação; e as habilidades **I4**, **G4** e **F5**, de manipulação.

Inicialmente, os estudantes deveriam interpretar c como uma variável que depende dos parâmetros explícitos 50 e 60, os quais representam as medidas dos lados do retângulo dado no problema. Num segundo momento, deveriam notar que a área do jardim depende da variável c . Ou seja, nesse último caso, c assume o papel de variável independente na relação estabelecida entre a área do quadrado e a medida de seu lado.

Observamos que no questionário piloto, as medidas dadas ao retângulo foram 3 e 4. Apesar de não termos recebido críticas dos alunos quanto a tais medidas,

decidimos alterá-las por conta do contexto dado, para que fossem mais adequadas à realidade. Além disso, fizemos algumas modificações na redação do enunciado da questão e reformulamos os itens a) e d) apresentados no piloto.

Quando aplicamos a primeira versão do questionário, muitos alunos nos interrogaram sobre o significado da expressão “livre do jardim”, em tal ocasião, apresentamos o seguinte enunciado:

“a) Represente, através de uma sentença matemática, a área destinada à construção livre do jardim.”

Os alunos nos chamavam para confirmar o que haviam entendido por “livre do jardim”. Eles perguntavam: “Professora, ‘livre do jardim’ é a área do condomínio menos a do jardim?”

Para evitar problemas na interpretação do enunciado, reescrevemos o item a) apresentando-o como se segue:

“a) Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área destinada ao condomínio desconsiderando a área do jardim?”

Pontuamos que o novo enunciado não trouxe dúvidas aos alunos no momento de sua leitura e interpretação.

Quanto ao item d), com as alterações feitas nas medidas do retângulo, tivemos de escolher uma nova medida para a área citada nesse item, de forma que ficasse mais adequada ao contexto da questão. Mudamos de 4m^2 para 16m^2 .

Para responder o item a), os estudantes deveriam mobilizar a habilidade de simbolização **G5**, representando, dessa forma, a área solicitada como $3000 - c^2$. Poderiam, ainda, utilizar uma outra variável e escrever, por exemplo, a relação $A = 3000 - c^2$, mobilizando, assim, **F6**. No item b), os alunos deveriam interpretar c como um número genérico (**G2**). Para responder o item c), eles deveriam mobilizar as habilidades **F1** e **F4**, ou seja, reconhecer que a variação de c depende das medidas dos lados do retângulo e interfere na variação da área do quadrado (jardim); além disso, deveriam notar que a medida da diagonal do quadrado depende de c e, portanto, para determinar o intervalo de variação dessa variável (**F5**) seria necessário pensar no intervalo de variação da diagonal. No item d), os alunos deveriam mobilizar a habilidade de simbolização **G5**, para escrever $c^2 < 16$, e as habilidades de manipulação **G4**, **I4** e **F5** para encontrar o intervalo que contém os possíveis valores de c .

Nossas hipóteses, quanto às possíveis estratégias dos alunos para a resolução da questão 4, eram:

- No item a), os alunos poderiam escrever a seguinte expressão: $3000 - c^2$ (**G5**). Ou ainda, poderiam utilizar uma outra variável para representar a área em questão, como, por exemplo, $A = 3000 - c^2$ (**F6**).

- No item b), os alunos poderiam responder que c representa o lado do quadrado que ilustra a superfície do jardim. Ou poderiam dizer que c representa a medida do lado do quadrado, ou ainda que c representa um número positivo. Pensamos também que alguns alunos responderiam que c representa um número real estritamente positivo (**G2**).

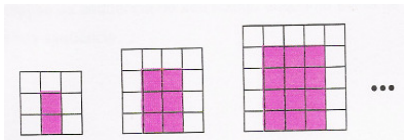
- No item c), os alunos poderiam responder $0 < c \leq 50$, ou ainda $0 < c < 50$. Alguns alunos poderiam, simplesmente, escrever $c > 0$, ou “ c pode assumir só valores positivos”. Talvez alguns alunos utilizariam as representações geométricas dadas e deduziriam um valor para c compatível com a medida do lado do quadrado quando comparassem esse com as medidas do retângulo. Pensamos, ainda, que alguns alunos poderiam utilizar instrumentos de medida, como uma régua, para fazer medições e comparações entre as medidas dadas e estimar um valor para c .

- Os alunos poderiam, também, utilizar como estratégia o cálculo da medida da diagonal do quadrado, por conta da posição em que esse é apresentado na figura. Ao reconhecerem que a medida da diagonal do quadrado depende de c (**F1**), os estudantes poderiam concluir que sendo 50 o maior valor possível para a diagonal do quadrado, então $c\sqrt{2} \leq 50$ (**F4**), ou seja, $c \leq \frac{50\sqrt{2}}{2}$. Ou, ainda, poderiam escrever $0 < c \leq 25\sqrt{2}$, determinando, assim, um possível intervalo de variação de c a partir do maior intervalo possível de variação da diagonal do quadrado (**F5**).

- No item d), os alunos poderiam formular a seguinte inequação $c^2 < 16$ (**G5**), manipular essa desigualdade (**G4, I4**) e chegar a seguinte resposta $-4 < c < 4$ (**F5**). Poderiam, ainda, concluir, diante do contexto geométrico do problema, que esse intervalo para c não é válido, e, então, escrever como resposta $0 < c < 4$ (**F5**). Eles poderiam, também, apresentar, de forma incorreta, a seguinte solução para a inequação: $c < \pm 4$. Outros poderiam formular a inequação $c^2 < 16$ e concluir apenas que $c < 4$.

A seguir, apresentamos uma questão clássica sobre padrões, a qual incluímos em nosso questionário como a questão de número 5.

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



a) Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?

OBS: Considere como contorno da figura os quadradinhos que não estão em destaque.

b) Desenhe a 5ª figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?

c) Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência.

d) Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada?

e) Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

Nosso objetivo, com a questão 5, era verificar se os alunos reconheceriam um padrão na seqüência apresentada e se utilizariam variáveis para generalizar a contagem dos quadradinhos que compõem o contorno das figuras.

Nessa questão, exploramos o uso da variável como número genérico, assim, para responder os itens a) e b), os alunos deveriam mobilizar a habilidade **G1**, ou seja, reconhecer um padrão, ou uma regra, na seqüência apresentada. A partir da dedução de uma regra (**G3**), no item c), os alunos deveriam escrever uma sentença genérica para simbolizá-la (**G5**). Ainda nesse item, poderiam mobilizar a habilidade **G4** a fim de manipular tal sentença. Para responder o item d), eles deveriam perceber que a resposta dada no item c) satisfaz a questão e, dessa forma, interpretar a variável, eventualmente utilizada na resposta do item anterior, como um número genérico (**G2**). No item e), os alunos deveriam responder que ambos os itens solicitam a mesma informação, porém de formas diferentes, mostrando, assim, que interpretaram a variável, que representa a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada, como um número genérico (**G2**).

Na ocasião do questionário piloto, a questão 5 era composta por 4 itens, o item e) foi elaborado após observarmos, nos dados coletados com o piloto, que

muitos alunos não relacionaram os itens c) e d), apresentando respostas distintas a esses dois itens que solicitavam a mesma coisa só que de maneiras diferentes.

Ao reformularmos o item c), utilizando, no item d), a palavra “Quantos”, tínhamos a intenção de verificar se os alunos admitiam como resposta para tal questão uma sentença com variáveis, e não um resultado numérico como, geralmente, é esperado para questões formuladas com essa palavra. Dessa forma, estaríamos identificando a interpretação dada pelos alunos às variáveis por eles, eventualmente, utilizadas no item anterior. Assim, aqueles que apresentassem uma sentença genérica como resposta para ambos os itens estariam considerando a variável como número genérico. Com a inclusão do item e), procuramos estimular a reflexão dos alunos sobre as respostas que foram apresentadas nos dois itens anteriores, evidenciando, dessa forma, sua interpretação a respeito das variáveis por eles utilizadas na questão.

Além do acréscimo do item e), alteramos o termo “figura genérica” por “figura qualquer”, já que fomos questionados por muitos alunos sobre o significado de “genérica”. O termo “figura genérica” mostrou-se estranho aos alunos e esses o substituíram por “qualquer”. Percebemos que alguns alunos atribuíram ao termo “qualquer” o sentido utilizado no senso-comum, e não aquele que é esperado nos processos de generalização em matemática. No entanto, decidimos utilizar “figura qualquer” ao invés de “figura genérica”.

Observamos, ainda, que o item a) trouxe algumas dúvidas aos alunos no momento em que foram respondê-lo, por isso acrescentamos a observação “Considere como contorno da figura os quadradinhos que não estão em destaque” .

Nossas hipóteses, quanto às possíveis estratégias dos alunos para a resolução da questão 5, eram:

- Para os itens a) e b), os alunos, a partir da análise das figuras e do desenho da quarta e quinta figuras, responderiam 16 e 19 quadradinhos, respectivamente, sem apresentar dificuldades, mobilizando, assim, **G1**.
- No item c), os alunos poderiam encontrar dificuldades em deduzir a regra (**G3**) sugerida na seqüência. Alguns alunos poderiam pensar no cálculo da área do quadrado e do retângulo que aparecem na seqüência e escrever, utilizando n como a variável que representa a quantidade de quadradinhos no lado de cada figura, ou, ainda, outra letra qualquer, $n^2 - (n-1)(n-2)$ (**G5**) para representar a quantidade solicitada. Ou poderiam, também, utilizar uma outra variável para representar a

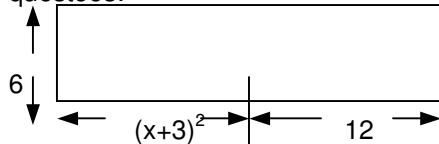
quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência, ou seja, $Q = n^2 - (n-1)(n-2)$ (**F6**). Eles poderiam, ainda, manipular tal expressão (**G4**) até chegar em $Q = 3n - 2$.

- Quanto ao item d), pensamos que alguns alunos repetiriam a resposta dada no item c), demonstrando, assim, que interpretaram a variável, por eles eventualmente utilizada, como um número genérico (**G2**). Devido à reformulação da pergunta apresentada no item c), acreditamos que alguns alunos não perceberiam que a resposta já havia sido dada no item anterior. A palavra “Quantos” no início da pergunta poderia fazer com que os alunos associassem a resposta a um único resultado numérico, ou, ainda, que relacionassem a quantidade de quadradinhos do contorno das figuras com a seguinte seqüência numérica: 7, 10, 13, 16, ..., reconhecendo, assim, uma regra (**G1**). A partir de tal seqüência, que constitui uma progressão aritmética de razão 3, os alunos poderiam escrever o termo geral da P.A da seguinte forma “ $a_n = a_1 + (n-1).r$, onde $a_1 = 7$, $r = 3$, n é a posição da figura na seqüência dada”. Ao manipularem tal sentença (**G4**), poderiam, ainda, apresentar como resposta final “ $a_n = 7 + (n - 1). 3 = 3n + 4$ (**G5**).” Alguns alunos poderiam escrever tal relação sem atribuir o devido significado à variável n utilizada na expressão, isto é, poderiam interpretar, erroneamente, n como a variável que representa o número de quadradinhos do contorno de cada figura, ao invés da posição de cada figura na seqüência.

- No item e), imaginamos que todos os alunos responderiam sim, mas as explicações dependeriam do que eles escreveriam nos itens anteriores. Para os alunos que apresentassem respostas distintas nos itens c) e d), acreditamos que esses tentariam igualar uma resposta a outra utilizando procedimentos algébricos para justificar alguma relação. Já os alunos que respondessem aos itens c) e d) apresentando uma única relação, imaginamos que diriam que os dois itens solicitam a mesma coisa, porém de formas diferentes, o que demonstraria a interpretação da variável, eventualmente por eles empregada, como um número genérico (**G2**).

Reproduzimos, abaixo, a questão 6.

Questão 6: Observe o retângulo abaixo com as medidas indicadas para os seus lados e responda às questões:



- Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área desse retângulo?
- Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?
- Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?
- Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?
- Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?
- E se x diminuir, o que acontece com a área do retângulo?
- De acordo com o que vocês responderam nos itens anteriores, o que vocês pensam sobre o papel do x nesta situação?

Nosso objetivo, com a questão 6, era verificar a interpretação, simbolização e manipulação dos alunos com relação à variável x , e sua habilidade em mobilizar e integrar os diferentes usos da variável descritos no modelo 3UV.

Procuramos, portanto, apresentar um problema que envolvesse a variável em seus três usos (incógnita, número genérico e variável em relação funcional). Assim, para resolvê-lo, os alunos poderiam mobilizar as habilidades **I5**, **G5** e **F6**, de simbolização; **I2**, **G2**, **F1** e **F4**, de interpretação; e as habilidades **I3**, **I4**, **I5**, **G4**, **F2**, **F3** e **F5**, de manipulação; de acordo com a estratégia de resolução adotada.

Para responder o item a), os alunos deveriam mobilizar a habilidade de simbolização **G5**, escrevendo a expressão $[(x+3)^2 + 12].6$ para representar a área do retângulo dado. Poderiam, também, associar à variável x a uma outra variável, por exemplo A , e apresentar como resposta $A = [(x+3)^2 + 12].6$, expressando, assim, uma relação entre a variável A (área do retângulo) e a variável x (**F6**).

No item b), os alunos deveriam formular a desigualdade $[(x+3)^2 + 12].6 < 288$ (**G5**), manipulá-la (**I4**, **I5**, **G4**), e encontrar o intervalo $-9 < x < 3$ (**F5**), a partir do reconhecimento da variação conjunta (**F4**) das variáveis sugeridas no problema. De forma análoga, no item c), eles deveriam escrever $[(x+3)^2 + 12].6 > 168$ (**G5**), manipular essa desigualdade (**I4**, **I5**, **G4**), e encontrar os possíveis valores de x que

satisfazem a desigualdade, ou seja, $x < -7$ ou $x > 1$ (**F5**), demonstrando, assim, o reconhecimento da variação conjunta (**F4**) das variáveis sugeridas no problema.

No item d), os alunos deveriam fazer a intersecção entre os intervalos encontrados nos itens anteriores e concluir que a área do retângulo varia entre 168 e 288 para $-9 < x < -7$ ou $1 < x < 3$ (**F5**).

Os estudantes poderiam, também, utilizar uma outra estratégia de resolução para os itens b), c) e d). Construindo e analisando o gráfico da função $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$ (**F6**), eles poderiam determinar os valores de x para os quais a área é igual a 168 e 288 (**F3**), ou seja, formulariam as equações $[(x+3)^2 + 12].6 = 168$ e $[(x+3)^2 + 12].6 = 288$ (**I5**), determinado, em seguida, os valores de x que tornam as igualdades verdadeiras (**I4**). Com isso, analisariam no gráfico construído, para quais valores de x se verifica a desigualdade $168 < A(x) < 288$ (**F4**, **F5**).

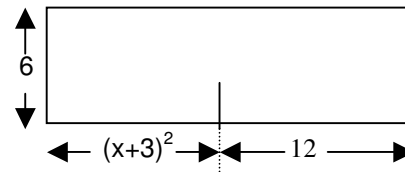
Para responder os itens e) e f), os alunos deveriam mobilizar a habilidade **F4**, ou seja, reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas no problema. Nesse caso, deveriam notar que o menor valor possível para a área do retângulo ocorre quando $x = -3$ e que para $x > -3$ ou $x < -3$ a área aumenta. Tal análise poderia ser feita a partir do gráfico da função dada por $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$, o qual para ser construído exigiria desde a habilidade de simbolização da função $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$ (**F6**) e sua manipulação (**G4**) até o cálculo do vértice da parábola.

Para realizar esse cálculo, seriam necessárias as habilidades **I4**, **F1** e **F2**. Ao reconhecer a correspondência entre a variável x e a área do retângulo (**F1**), os alunos poderiam, a partir da manipulação da relação $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$, chegar a expressão $A(x) = 6x^2 + 36x + 126$ (**G4**); calcular o x do vértice (x_v) da parábola, fazendo $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-36}{2.6} = -3$ (**I4**); e daí encontrar o valor da variável dependente (**F2**) calculando, para isso, o y do vértice (y_v), ou seja, $y_v = A(-3) = 6.(-3)^2 + 36.(-3) + 126 = 72$ (**I4**).

Para responder o item g), os alunos deveriam interpretar x como uma variável da qual depende a área do retângulo. Para tanto, deveriam mobilizar a habilidade de interpretação **F1**.

Pontuamos que, em nosso questionário piloto, havíamos utilizado a questão elaborada por Trigueros e Ursini (2001), já apresentada na página 37, reproduzida, novamente, a seguir:

Para quais valores de x a área do retângulo abaixo varia entre 168 e 288? Se o valor de x aumenta ou diminui o que acontece com a área? (p. 331, tradução nossa).



Muitos alunos encontraram dificuldades ao responder tal questão, pois essa envolvia a mobilização da maior parte das habilidades necessária à compreensão do conceito de variável. Tal observação, pode ser melhor fundamentada pelos resultados obtidos na ocasião da aplicação do piloto. Das 3 duplas e 3 trios que participaram dessa aplicação, apenas uma dupla concluiu corretamente a questão. Um dos trios desistiu da questão deixando como resposta: “? ã sabemos”. Os demais, conseguiram desenvolver parte da solução da questão, considerando apenas o intervalo em que x era positivo. A importância dada aos elementos geométricos foi maior do que aquela dada aos elementos algébricos, ou seja, os alunos não deram a devida atenção à expressão $(x+3)^2$ deixando de observar que, nesse caso, x poderia ser tanto positivo quanto negativo.

Assim, como não era de nosso interesse que os alunos entregassem as questões sem respostas, reformulamos tal questão subdividindo-a em itens como apresentamos na versão final do questionário.

Tínhamos por hipótese que as respostas dos alunos para o item a), poderiam ser: “ $[(x+3)^2 + 12].6$ ” (G5), “ $A = [(x+3)^2 + 12].6$ ” (F6), ou, ainda, “ $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$ ” (F6).

Para os itens b) e c), pensamos que alguns alunos resolveriam as inequações do segundo grau (G5, G4, I4, F5), formuladas por eles com o auxílio do que já havia sido feito no item a), recorrendo à resolução de uma equação do segundo grau (I5, I4) e, no momento, de apresentar a resposta final utilizariam os sinais das desigualdades.

Imaginamos também que eles poderiam utilizar uma representação gráfica (F6) para fazer o estudo dos sinais das funções do segundo grau associadas às inequações (F4, F5) e resolvê-las a partir da análise do estudo dos sinais das funções. Alguns alunos poderiam, ainda, tentar substituir alguns valores numéricos que satisfizessem as desigualdades (I3).

Acreditamos que para responder o item d), os alunos poderiam utilizar as soluções encontradas nos itens b) e c) e determinar a intersecção dos intervalos encontrados nesses itens (**F5**).

Para responder os itens e) e f), os alunos poderiam analisar o que já haviam feito nos itens anteriores, ou, ainda, substituiriam valores numéricos para a variável x . Supomos que alguns alunos poderiam representar graficamente a função dada por $f(x) = (x+3)^2$ (**F6**) e estudar a variação da área do retângulo (**F1**, **F4**) a partir dessa função. Imaginamos, ainda, que alguns alunos representariam graficamente a função área dada por $A(x) = [(x+3)^2 + 12].6$ (**F6**) e a partir da análise do gráfico (**F1**, **F4**) dessa função responderiam as questões.

Elaboramos o item g), de forma que a pergunta ficasse mais pessoal para que os alunos pudessem ter a liberdade de expressar sua compreensão a respeito da variável x explorada no problema. Apesar da subjetividade imposta à questão, acreditamos que alguns alunos diriam que x representa uma variável da qual a área do retângulo é dependente (**F1**). Outros poderiam dizer que x representa um número positivo, ou o lado do retângulo, ou, ainda, um número qualquer.

Com a reformulação das questões, após a aplicação do piloto, com os objetivos já definidos, com nossas expectativas e hipóteses quanto às respostas dos alunos para tais questões fomos, dessa forma, a campo para efetivarmos a aplicação do questionário final. Seguimos, então, em nossa trajetória de apresentação da pesquisa, exibindo, no próximo capítulo, a análise dos dados coletados em nossa investigação sobre a compreensão de alunos do Ensino Médio a respeito do conceito de variável.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, apresentamos a análise, com base no modelo 3UV, dos dados coletados por meio do questionário de investigação e das entrevistas realizadas com os alunos que participaram de nossa pesquisa.

4.1 QUESTÃO 1

Transcrevemos, abaixo, a questão 1 de nosso instrumento de investigação.

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para:

- a) representar um número que multiplicado por 12 seja igual a 144:
- b) representar um número dividido por 3 somado a 7:
- c) representar um número que é igual a 15 mais um outro número:

Com essa questão, pretendíamos verificar a capacidade de simbolização dos alunos. Logo, para resolvê-la era necessário mobilizar as habilidades de simbolização **I5** (simbolizar o termo desconhecido identificando-o na situação dada e usá-lo para representar uma equação), **G5** (simbolizar uma afirmação genérica) e **F6** (simbolizar uma relação baseando-se nos dados da questão).

No item a), mobilizando a habilidade de simbolização **I5**, os alunos das duplas D4 e D6, e do trio T7, responderam: “ $12x = 144$ ”.

D1 e D5 escreveram: “ $x.12 = 144$ ”, o que também demonstra a mobilização de **I5**, porém percebemos uma diferença na ordem da escrita, ora $12x$, ora $x12$. Nessa última representação há a conservação da ordem dada no enunciado, enquanto que na primeira aparecem as manipulações usuais, ou seja, o coeficiente numérico é apresentado antes da variável.

A conversa entre os pares da dupla D4 e os da D6, durante a elaboração de suas respostas para esse item, mostrou que mesmo não tendo calculado o valor de x , pensaram em fazê-lo e discutiram se deveriam, ou não, apresentar tal valor.

Apesar da grande insegurança, demonstrada em suas falas, optaram por não escrever o que a dupla D3 escreveu. D3 respondeu: “ $12 \cdot x = 144$ $x = \frac{144}{12} = 12$ ”.

Notamos, assim, que além de mobilizar a habilidade de simbolização **I5**, essa dupla também mobilizou **I4** (determinar o termo desconhecido que aparece na equação) o que demonstra uma necessidade de apresentar uma resposta numérica para a questão.

Houve a mesma discussão entre os alunos do T7 sobre calcular, ou não, o valor de x , porém um dos alunos do trio retomou o enunciado enfatizando o termo “expressão algébrica” e o verbo “representar” o que levou os demais a concordarem que não deveriam determinar o valor de x .

Até o momento, as respostas exibidas foram previstas em nossas hipóteses, porém a dupla D2 apresentou algo que não esperávamos que acontecesse. A dupla respondeu: “12”. Foi a única dupla que não utilizou variáveis para simbolizar as sentenças descritas em língua natural. Adiantamos que todas as respostas dessa dupla foram, essencialmente, numéricas. Porém, no item a), mesmo que os alunos dessa dupla não tenham utilizado uma variável para representar o que era solicitado, acreditamos que, ao apresentarem “12” como resposta, a noção de variável como incógnita foi empregada por eles.

Com exceção da dupla D2, todos os estudantes utilizaram a letra x para simbolizar a incógnita, no item a), o que demonstra a influência do uso que fazemos dessa letra nos problemas e questões abordados em sala de aula.

Para o item b), encontramos como respostas de D1, D5 e D6: “ $\frac{x}{3} + 7$ ”, o que demonstra a mobilização da habilidade de simbolização **G5** (simbolizar afirmações genéricas, regras ou métodos). O trio T7 escreveu “ $\frac{x}{3} + 7 = \frac{x + 21}{3}$ ”, mobilizando, além de **G5**, a habilidade de manipulação **G4**.

Durante a conversa entre os alunos do T7, no momento em que respondiam a esse item da questão 1, um deles comentou: “Nossa, mas é estranho fazer uma coisa assim que não tem igual do outro lado!”. Com isso, observamos no comentário de um dos integrantes do trio a insegurança ao escrever uma sentença genérica.

Já D3 respondeu: “ $\frac{x}{3} + 7 = z$ ”.

Em entrevista, questionamos o emprego da igualdade e o uso da variável z no segundo membro. A seguir, transcrevemos o diálogo que tivemos com os alunos dessa dupla, simbolizando por D3-1 e D3-2 as falas dos dois integrantes de D3, já que as respostas partiram de ambos e houve até uma discussão entre eles.

PP: “O que esse z representa aqui? Por que vocês utilizaram o z ? Poderia ficar só x sobre ‘3’ mais ‘7’?”

D3-1: “Ah, é verdade!”

D3-2: “É a representação de qualquer número!”

D3-1: “O número é o x já.”

D3-2: “É, mas é porque vai dar um número diferente do x ! Bom, não necessariamente, né?”

D3-1: “É ... Acho que sim!”

D3-2: “É!”

D3-1: “ z é só o resultado que vai dar.”

A partir da discussão dos alunos, observamos que as pausas representadas por demonstram intervalos em que eles pensam sobre o que escreveram e o que estão dizendo. Percebemos, ainda, que eles chegam a um acordo, explicando que z representa o resultado das operações envolvidas na expressão “ $\frac{x}{3} + 7$ ” e que z não pode assumir o mesmo valor que x . A fala dos integrantes de D3 demonstra que esses estudantes interpretaram x como um número genérico (**G2**), e que estabeleceram uma relação, por meio da igualdade formulada, entre as variáveis x e z por eles adotadas, mobilizando, assim, **G5**. Apesar de tal interpretação, notamos que os alunos sentiram a necessidade de escrever em sua resposta uma igualdade ao invés da expressão $\frac{x}{3} + 7$.

Quanto à resposta de D4, para o item b) da questão 1, encontramos em seu protocolo: “ $\frac{x}{3} + 7 = \frac{9}{3} + 7 = 3 + 7 = 10$ ”. Em entrevista, questionamos os alunos da D4 sobre o fato de substituírem o x por 9. Relemos com eles o enunciado da questão e perguntamos:

PP: “Por que vocês substituíram o x por ‘9’ e fizeram esse cálculo?”

D4: “Para confirmar!”

PP: “Para confirmar?”

D4: “É! Porque a gente procurou um múltiplo de três para dar sempre um valor exato.”

PP: “Mas o x só pode ser um múltiplo de três?”

D4: “Não! Mas é que a gente queria um valor exato, mas não precisa ser um valor exato, pode ser qualquer um!”

PP: “Qualquer um?”

D4: “Espera aí, deixa eu pensar...”

PP: “Está correto escrever que x sobre ‘3’ mais ‘7’ é igual a ‘9’ sobre ‘3’ mais ‘7’? Pensem no que vocês escreveram aqui.”

D4: “x não pode ser zero! ... Ah, não! Pode ser! Não pode ser embaixo.”

D4: “Na verdade, x pode ser qualquer valor. A gente só quis comprovar, por isso usamos o ‘9’.”

PP: “Vocês quiseram comprovar dando um exemplo?”

D4: “É! E nós queríamos um número exato!”

Analisando a fala dos alunos da dupla D4, notamos que “número exato” se referia a um número inteiro. Além disso, observamos que para eles x poderia assumir qualquer valor, mas, no papel, substituíram um único valor para x de forma que pudessem apresentar como resposta um número inteiro .

Percebemos, assim, a necessidade dos alunos de encontrar um valor para a variável em questão, ou ainda, um resultado numérico para as operações realizadas com a variável x. Nos estudos de Tinoco et al (2007, p. 14) com alunos de 6^a, 7^a e 8^a séries do Ensino Fundamental encontramos resultados semelhantes; os autores pontuam:

Em geral, os alunos não parecem admitir que o resultado de uma contagem, de uma operação ou de uma medição possa ser dado por uma expressão algébrica, principalmente se esta expressão tiver mais de um termo. Daí a frequência de respostas nas quais a variável é substituída por um valor numérico, pelos mais diversos critérios.

Já os alunos de D2 responderam no item b): “ $6 \div 3 = 2+7 = 9$ ”. Na gravação da discussão ocorrida no momento em que respondiam a questão 1, observamos que a dupla decidiu “pular” esse item e ir para o próximo. Após terem respondido o item c), os alunos voltaram para o item b) e um deles achou que esse tinha relação com o número 144 que aparecia no item a). Imediatamente, o outro discordou. Após mais um tempo de discussão, os estudantes chamaram a professora-pesquisadora:

“Professora, essa questão aqui ‘representar um número dividido por 3 somado a 7’. Nós não entendemos!”

A professora leu, com os integrantes de D2, o enunciado da questão, olhou o que eles haviam respondido nos itens a) e c) e disse que deveriam representar o que estava sendo solicitado, assim como pensaram numa representação para os itens a) e c). Novamente, os alunos não pensaram numa representação envolvendo variáveis, e sim apenas números. No item c), os integrantes de D2 responderam: “ $10+5=15$ ”.

Não podemos justificar as respostas da dupla D2, encontradas na questão 1, como respostas que foram dadas sem atenção ao que estava sendo solicitado; como havíamos cogitado a princípio; pois os alunos demonstraram um padrão de resposta, todas elas foram numéricas. Antecipamos que, no protocolo dessa dupla, apenas as respostas dos alunos para a questão 3 e para o item a) da questão 6 apresentam o emprego de variáveis, as demais respostas são todas numéricas, mesmo em situações nas quais o uso de uma variável é necessário para representar a solução da questão.

No artigo *The notion of variable in semiotic contexts different*, Malisani (2002) traz resultados sobre uma de suas pesquisas desenvolvidas com alunos de 16 a 18 anos de idade, faixa etária correspondente a de nossos alunos no Ensino Médio, destacando que, para esses alunos, a linguagem natural e/ou aritmética impera como sistema simbólico em ausência de um adequado domínio da linguagem algébrica.

Podemos observar que os resultados encontrados por Malisani (*ibid*) são corroborados nas respostas dos alunos da dupla D2, pois identificamos que esses estudantes não têm o domínio da linguagem algébrica, fazendo da linguagem natural, e/ou aritmética, sua única forma de comunicação e expressão em Matemática.

As demais duplas e o trio T7 responderam para o item c) “ $x = 15 + y$ ”, mobilizando, assim, **F6** (simbolizar uma relação baseando-se nos dados da questão).

Essa resposta corresponde a uma de nossas hipóteses sobre as possíveis soluções dos alunos para esse item da questão 1, porém pensamos que alguns tentariam determinar os valores de x e y , o que não aconteceu. Tal fato, demonstra que todos os alunos, com exceção dos integrantes de D2, interpretaram x e y como

variáveis relacionadas, simbolizando-as dessa forma, provavelmente, por influência do uso de tais letras nos problemas e questões abordados em sala de aula.

Resumidamente, notamos, a partir da análise das respostas dos alunos apresentadas na questão 1, que a maioria não apresentou dificuldades para simbolizar as sentenças dadas em língua natural. Eles utilizaram variáveis como incógnitas, números genéricos e em relação funcional, demonstrando, assim, que as habilidades de simbolização **I5**, **G5** e **F6**, necessárias à compreensão do conceito de variável, podem ser mobilizadas pela maioria dos estudantes sem dificuldades.

Porém, observamos que, no momento de simbolizar afirmações genéricas (**G5**), os integrantes das duplas D3 e D4 sentiram a necessidade de utilizar o sinal de igualdade demonstrando a busca por algum resultado. Podemos, também, notar tal fato na fala de um dos integrantes de T7: “Nossa, mas é estranho fazer uma coisa assim que não tem igual do outro lado!”. Com essa observação, identificamos que, das habilidades de simbolização apresentadas no modelo 3UV, **G5** deveria ser mais explorada nas atividades de ensino e aprendizagem matemática. Com base na análise do material didático utilizado, ao longo do Ensino Médio, pelos alunos que participaram de nossa pesquisa, notamos que a maioria dos exercícios e problemas propostos já apresentava, em seus enunciados, igualdades ou desigualdades, ou, então, exigia em sua resolução o emprego de sinais como =, >, < na formulação de sentenças algébricas necessárias ao desenvolvimento das questões.

4. 2 QUESTÃO 2

Reproduzimos, abaixo, a questão 2 .

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

- a) $y = y$
- b) $7y^2 = 2x - 5$
- c) $t+3$

Pretendíamos, com essa questão, analisar a interpretação dos alunos a respeito das variáveis x , y e t , isto é, identificar qual uso (incógnita, número genérico,

variáveis relacionadas) da variável estaria sendo admitido pelos alunos, em cada item da questão. Procuramos, também, com os dados obtidos por meio do questionário e das entrevistas realizadas identificar quais seriam os domínios de variação que, possivelmente, estariam sendo considerados pelos alunos para as variáveis presentes na questão. Pontuamos que, para alcançar esse último aspecto de nosso objetivo, as entrevistas foram fundamentais, pois as falas dos alunos revelaram mais sobre os conjuntos numéricos considerados como campos de variação para x , y e t do que os dados que encontramos nos protocolos.

Além das habilidades de interpretação **G2** (interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor), **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas) e **F4** (reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação), a questão 2 envolve habilidades de manipulação necessárias, no item b), para que se possa encontrar possíveis valores para as variáveis relacionadas, x e y . Tais habilidades foram citadas em nossa análise preliminar e podem ser reconhecidas, mais adiante, nas diferentes estratégias utilizadas pelos alunos na busca desses possíveis valores.

Vejamos, a seguir, o protocolo da dupla D1, no que se refere a essa questão.

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

a) $y = y$

Infinitos valores como exemplos: $1=1$, $\frac{13}{2} = \frac{13}{2}$, $-13 = -13 \dots$

b) $7y^2 = 2x - 5$

Infinitos valores, pois variamos uma incógnita, varia a outra.

Exemplos: $f(1)^2 = 2x - 5 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$, $f(2)^2 = 2x - 5 \Rightarrow 28 = 2x - 5$

c) $t + 3$

Infinitos valores uma vez que a equação não está sendo igualada a nada, ou seja, poderia ser $t = 7$, $t = \frac{1}{2}$, $t = -144 \dots t = \alpha$.

$t = \infty$

Quadro 6. Protocolo da dupla D1- Questão 2.

As respostas de D1, para os itens a) e c), foram, em parte, ao encontro das hipóteses que levantamos no momento da análise preliminar das questões.

Pensamos que os alunos escreveriam “infinitos”, porém não imaginamos que utilizariam igualdades para dar os exemplos. Notamos, novamente, a necessidade dos estudantes de apresentar um resultado após o sinal de igual, mesmo que no enunciado não apareça uma igualdade, como é o caso do item c).

Apesar de os alunos citarem que as variáveis y e t poderiam assumir infinitos valores (**G2**), ao escreverem os exemplos utilizaram igualdades para fazê-los o que nos faz pensar que o uso da variável como incógnita, para esses alunos, é muito mais significativo que o de número genérico. Porém, observamos que no item b) a presença de duas variáveis, numa única equação, fez com que os alunos pensassem na relação de dependência entre elas demonstrando que a visão estática apresentada nas respostas dos itens a) e c) adquiriu, nesse item, um certo dinamismo, o que nos leva a concluir que os integrantes dessa dupla mobilizaram as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, isto é, perceberam a correspondência e dependência entre as variáveis x e y e sua variação conjunta. Para dar exemplos, a dupla atribuiu y como variável independente e x dependente. Assim, estabelecendo alguns valores para y os alunos calcularam, em seguida, os correspondentes valores de x , mobilizando, dessa forma, as habilidades de manipulação **F2** e **I4**; como havíamos previsto em nossa análise preliminar.

Em entrevista com essa dupla, questionamos se haviam pensado que as variáveis dadas na questão poderiam representar números irracionais, e a resposta foi não. Os alunos disseram: “Nós só pensamos nos números inteiros e nas frações.”

Transcrevemos uma parte do diálogo que tivemos com a dupla:

PP: “Analisando o que vocês responderam para o item b), percebi que vocês atribuíram alguns valores para y e depois calcularam os de x . Em algum momento vocês pensaram em fazer o contrário, jogar valores para x e calcular os de y ?”

D1: “Não!”

PP: “Por que isso? Se estivesse escrito ‘ $2x - 5 = 7y^2$ ’, vocês acham que teriam feito o contrário?”

D1: “Acho que sim!”

PP: “Então vamos pensar sobre isso agora. O x poderia ser zero?”

D1: “Sim!”

PP: “Vamos calcular então!”

Fizemos o cálculo com os alunos e mesmo antes de terminá-lo um deles já se manifestou.

D1: “Ah, não! Daria negativo e não existe raiz quadrada de número negativo!”

PP: “Se nós estivermos pensando nos reais isso não é válido. Então, tudo dependeria de como vocês estão olhando essas variáveis, vocês chegaram a pensar nos números complexos quando começaram a atribuir valores?”

D1: “Não!”

Sobre o item c), perguntamos durante a entrevista:

PP: “O que significa t igual a alfa?”

D1: “Ai, não era alfa, era infinito! A gente esqueceu de arrumar.”

PP: “Infinito é um número?”

D1: “Pode ser qualquer número!”

PP: “Pode ser qualquer número? Então, representa qualquer número?”

Antes de responder a essa questão, houve uma pausa, os alunos pensaram durante alguns instantes e depois um deles manifestou um “sim” bem tímido.

Analisando as respostas dadas pelos alunos, percebemos, de forma geral, que a dupla D1 pensou no conjunto dos racionais como domínio de variação para as variáveis presentes na questão 2.

Devido à utilização do símbolo ∞ nas respostas dos alunos, resolvemos, então, conversar um pouco sobre o infinito, porém sem a pretensão de elucidá-lo em poucas palavras, pois sabemos o quanto ele é abstrato, e, ao mesmo tempo, fascinante. Mas acreditamos que esclarecemos que o símbolo de infinito não pode ser utilizado para representar um elemento de um conjunto numérico, seja ele qual for, e que a noção de infinito é utilizada quando nos referimos, por exemplo, a certos conjuntos, como o conjunto dos números reais. Indicamos a leitura da revista *Scientific American*, nº 15, cujo título é **As diferentes faces do infinito** e citamos, resumidamente, o conteúdo de alguns artigos que os alunos poderiam encontrar nessa edição da revista.

Quanto às respostas de D2, para o item a) da questão 2, encontramos: “ $1=1$ infinito”. No item b), os alunos responderam: “29”; e, para o item c), escreveram: “5”. Ao ouvirmos a gravação da discussão entre os alunos durante a resolução das questões, notamos que eles “pularam” a questão 2 quando se depararam com os itens b) e c) e, após responderem as demais questões, voltaram ao problema deixado para trás e escreveram “29” e “5”, respectivamente. Em entrevista, os alunos disseram que não sabiam o que responder nesses itens e para não deixar

em branco escreveram tais respostas. Não apresentaram nenhuma justificativa, por meio de cálculos, para as respostas apresentadas. Conversamos com os alunos e percebemos que interpretaram as variáveis, presentes na questão, como números inteiros positivos. Os alunos não observaram nenhuma relação entre as variáveis x e y , dadas no item b), e pouco quiseram falar durante a entrevista. Assim, notamos que os integrantes dessa dupla não mobilizaram as habilidades de interpretação **G2**, **F1** e **F4** necessárias para responder a questão 2.

A dupla D3 apresentou, para o item a), algo semelhante ao que foi encontrado no protocolo de D1. Novamente, encontramos igualdades nos exemplos citados. Trazemos, a seguir, o protocolo de D3.

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

a) $y = y$

infinitos valores. Ex.: $9 = 9 / 1582 = 1582 / 28 = 28 / \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

b) $7y^2 = 2x - 5$

S.P.I. ∴ admite infinitos valores. Ex.: $\begin{cases} y = 3 \\ x = 34 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases}$

c) $t + 3$

não há resolução pois não há igualdade.

Quadro 7. Protocolo da dupla D3 – Questão 2

Com relação ao item a), observamos que, apesar de os alunos não apresentarem, nos exemplos, números complexos, durante a conversa entre eles, citaram esses números. Disseram que y poderia assumir qualquer valor, podendo, até mesmo, ser um número complexo. Assim, notamos que os integrantes dessa dupla interpretaram y como um número genérico (**G2**) cujo domínio de variação poderia ser o conjunto dos complexos.

Sobre o item b), em entrevista com os alunos, perguntamos:

PP: “O que é S.P.I?”

D3: “Sistema Possível e Indeterminado.”

PP: “E isso é um sistema?”

D3: “Hahaha.... É verdade, né? É uma equação, né!”

PP: “Vocês atribuíram primeiro alguns valores para y e aí fizeram os cálculos para determinar quais eram os valores de x correspondentes?”

D3: “Sim!”

PP: “Nesses exemplos, vocês pensaram em que números, só em números inteiros?”

D3: “É, na verdade a gente colocou que era infinitos valores.”

PP: “Mas em que conjuntos vocês pensaram?”

D3: “Acho que caberia qualquer conjunto aí. É, ... até os complexos caberia.”

PP: “Vocês pensaram em atribuir valores a y para calcular os de x , poderia ser o contrário?”

D3: “Claro!”

PP: “Então eu vou atribuir um valor para x , por exemplo, ‘1’. E aí, o que acontece?”

Sem hesitar, um dos alunos de D3 respondeu:

D3: “Vai dar um número complexo!”

PP: “E isso é possível?”

D3: “É possível!”

Deixamos em aberto, na questão 2, o domínio de variação de x , y e t , para, justamente, identificar quais seriam os possíveis valores que estariam sendo admitidos pelos alunos para tais variáveis. Podemos deduzir, pelas respostas encontradas, que os integrantes de D3 entenderam que o domínio de variação de y era o conjunto dos números complexos. O que nos leva a concluir que, para esses alunos, x poderia representar um número real ou, ainda, um complexo. Assim, notamos que os integrantes dessa dupla mobilizaram as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, e as habilidades **F2** e **I4** para determinar, no item b), alguns possíveis valores para x e y . Quanto à resposta dada ao item c), em entrevista, um dos alunos da dupla D3 mostrou-se indignado com a expressão “ $t+3$ ”.

Transcrevemos o diálogo estabelecido, denominando por D3-1 e D3-2 cada um dos alunos da dupla.

PP: “E aqui, no item c), vocês escreveram: ‘Não há resolução, pois não há igualdade.’”

D3-1: “Isso! Não tem o igual, então pra mim não é nada!”

PP: “Esse t é nada?”

D3-1: “‘t +3’, se você não põe uma igualdade eu acho que toda equação tem uma igualdade, um igual, um menor, ou maior, ou menor igual, maior igual, algum sinal para você poder sair daí.”

D3-1: “O t pode ser qualquer valor, mas você não pode jogar nada se não tem uma igualdade.”

D3-1: “Mas se você fala ‘t mais três igual a zero’, aí, sim, você joga um número para dar zero!”

PP: “Nesse caso, você tem um valor específico para t.”

D3-1: “Exatamente!”

D3-2: “Pode ser qualquer coisa!”

D3-1: “Ai gente, se não tem uma igualdade, pra mim, não significa nada.”

Percebemos a necessidade do aluno de encontrar um resultado para a variável t, e como esta não se encontrava numa equação, então a conclusão foi de que t não poderia representar nada. Tal necessidade mostra a influência do uso da variável como incógnita, o qual, sem dúvida, é mais explorado nos problemas abordados em sala de aula do que aqueles em que a variável é apresentada como número genérico em expressões como “t +3”.

Ao analisarmos o material didático utilizado pelos alunos que participaram de nossa pesquisa, encontramos exercícios envolvendo expressões genéricas no momento em que os estudantes estão recordando casos de fatoração para posteriormente aplicá-los nos exercícios que envolvem simplificação de expressões algébricas, ou, ainda, naqueles em que é exigida apenas a manipulação dessas expressões. Porém o sinal de igualdade está presente na maioria deles, indicando que o aluno deve fazer alguma manipulação, ou algum cálculo para encontrar um resultado, mesmo que esse seja uma expressão. Vejamos alguns exemplos:

Simplifique as frações, supondo cada denominador diferente de zero:

$$a) \frac{5x^2 - 5}{x^2 - 2x + 1} =$$

$$b) \frac{x^2 + xy + x + y}{x^2 - 1} =$$

Desenvolva a expressão $(a-1)(a^2+a+1)$ usando a propriedade distributiva.

Quadro 8. **Exercícios retirados do material didático da escola em que foi desenvolvida esta pesquisa.**

Assim, é natural que a expressão “ $t+3$ ” causasse estranheza aos alunos, pois esses não tiveram a oportunidade de lidar com problemas em que a variável fosse, de fato, explorada como um número genérico, limitando-se apenas ao trabalho de manipulação de expressões genéricas e ao desenvolvimento de exercícios em que o emprego de procedimentos aritméticos e algébricos é suficiente para sua resolução.

Em uma de suas pesquisas, os resultados encontrados por Trigueros e Ursini (2001) mostraram que nem todos os professores fizeram diferenciações dos usos da variável como incógnita e número genérico e que em uma expressão algébrica adicionavam o sinal de igual transformando-a numa equação para encontrar o valor da variável em questão (**G2** transformado em **I2**⁴). Os alunos da dupla D3 não fizeram isso, mas demonstraram nos diálogos que “não aceitaram” a expressão algébrica “ $t+3$ ” e que interpretaram t como uma incógnita, a qual só não foi determinada, porque não havia uma igualdade.

Já a dupla D4 adotou a mesma estratégia que os professores que participaram da pesquisa de Trigueros e Ursini. A resposta dessa dupla, para o item c), foi:

The image shows a student's handwritten response to item c). On the left, it says "c) t+3". To the right, there are two lines of work: the first line is " $\Rightarrow t+3=0$ " and the second line is " $t=-3$ ". To the right of these equations, the student has written "infinitos valores".

Quadro 9. Protocolo da dupla D4 – Questão 2 – item c)

Novamente, podemos observar a influência do uso da variável como incógnita na aprendizagem matemática desses alunos. Apesar de admitirem que a variável t poderia assumir infinitos valores, o que corresponderia à interpretação dessa variável como número genérico (**G2**), no momento de apresentar um exemplo, os estudantes recorrem a uma igualdade, demonstrando, assim, a necessidade de encontrar um valor específico para t (**I2**). As demais respostas dessa dupla trazem dados semelhantes aos que já citamos, porém, para o item b), D4 escreveu:

“ $y =$ infinitos valores, $x \neq 0$ todos os outros valores.”

⁴ **I2**- interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos; **G2**: interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor.

Os exemplos dessa dupla, para o item em questão, envolveram apenas números inteiros, como os exemplos dados por D3. Durante a discussão entre os integrantes da D4, no momento da resolução da questão 2, notamos que excluíram o zero do domínio de variação de x , pois disseram que “ $7y^2$ ” teria que dar um resultado positivo. Um dos alunos da dupla comentou, enquanto pensava em x igual a zero: “só se y for complexo.” Após toda a discussão, os alunos decidiram excluir o zero do campo de variação de x admitindo, assim, que o domínio das variáveis não seria o conjunto dos complexos. Em entrevista, notamos que os alunos pensaram em x e y como variáveis reais.

Da mesma forma, encontramos no protocolo da D5 respostas equivalentes as que foram apresentadas nos protocolos das duplas D3 e D4. No entanto, no item b), a dupla D5 atribuiu apenas números ímpares à variável y . Em entrevista, questionamos os alunos dessa dupla sobre tal fato:

D5: “Se a gente colocasse o y como um número par as contas ficavam horríveis, dava umas frações, e aí a gente ignorou.”

PP: “Vocês pensaram em números negativos?”

D5: “Não!”

PP: “Vocês pensaram em atribuir valores para o x e a partir daí calcular os de y ?”

D5: “Sim, mas aí a gente fez e deu fração, e então a gente ignorou.”

PP: “Mas vocês consideram que essas frações são válidas? Ou seja, x e y poderiam representar frações?”

D5: “Sim, poderiam.”

Notamos, novamente, a preferência dos alunos pelos números inteiros e positivos. Na ocasião da resolução do questionário, D5 admitiu como domínio das variáveis, x e y , apenas o conjunto dos inteiros positivos.

Observamos, também, que quando os alunos dessa dupla se depararam com o item c), que apresentava a sentença “ $t+3$ ”, ficaram intrigados, assim como os integrantes de D3, e nos chamaram para perguntar se não deveria ser uma igualdade. Dissemos que a sentença era “ $t+3$ ” e nada mais. Os estudantes continuaram demonstrando dúvida. Deixamos, então, que pensassem sobre esse item sem dizer mais nada. Nos exemplos, eles apresentaram igualdades como “ $t = 1$ ”, “ $t = 5$ ” e escreveram “ ∞ valores”.

Tal fato reforça o que já destacamos anteriormente, ou seja, a influência das práticas de ensino na formação do conceito de variável pelos alunos que

participaram de nossa pesquisa. Em sua grande maioria, os problemas abordados em sala de aula exploram o uso da variável como incógnita, sendo, portanto, necessária a presença de problemas em que as variáveis possam assumir o papel de número genérico, ou seja, problemas envolvendo generalizações da aritmética, para que os estudantes possam compreender e aceitar expressões genéricas como “ $t+3$ ”.

A dupla D6 apresentou dados com características diferentes daquelas apresentadas nos outros protocolos. Vejamos o protocolo de D6.

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

a) $y = y$

Todos os valores. ex: $0,01 = 0,01$

b) $7y^2 = 2x - 5$

É incógnita y^2 , qualquer valor porque está elevado ao quadrado e seu resultado sempre será positivo, por uma razão de x , terá que assumir um valor maior ou igual à 2,5.

c) $t + 3$

Todos os valores. ex: $1/2 + 3$

Quadro 10. Protocolo da dupla D6 – Questão 2.

Notamos que, no item a), o exemplo dado foi escrito por meio de uma igualdade, o que demonstrou, a princípio, que os alunos da D6 interpretaram a variável y como uma incógnita. Porém, na discussão que ocorreu durante a elaboração da resposta, percebemos que os integrantes da dupla associaram a variável y a conjunto numérico e pensaram até mesmo no conjunto dos números complexos. Observemos o diálogo entre os alunos.

D1-6: “Nossa, y igual a y , pode ser milhares!”

D1-6: “Pode ser qualquer número! Porque um número é sempre igual a ele mesmo!”

D2-6: “Escreve o que, então?”

D1-6: “Coloca ‘qualquer número’, ou ‘todos os conjuntos’? Conjunto dos complexos.”

D2-6: “É, poderia ser!” (risos)

D1-6: “Põe ‘todos os conjuntos’?”

D1-6: “Põe ‘todos os valores’.”

Notamos, através do diálogo entre os estudantes, que, para eles, o domínio de variação de y poderia ser qualquer conjunto numérico, inclusive o dos complexos, dessa forma, a dupla D6 interpretou a variável y como um número genérico (**G2**).

Já no item c), o exemplo dado por D6 não apresenta igualdade, reforçando a percepção da variável como um número genérico. Novamente, os alunos dispensaram um tempo discutindo o que escrever como resposta para esse item, e o diálogo foi parecido com o que transcrevemos acima.

Observamos, neste ponto da análise, que as conversas entre os alunos, durante a resolução das questões, trouxeram dados valiosos para complementar àqueles que encontramos no papel e que sem esses dados não conseguiríamos identificar quais foram os possíveis domínios de variação considerados pelos alunos para as variáveis apresentadas na questão 2.

Dentre as respostas dadas pela dupla D6, a que mais nos chamou a atenção foi a do item b). Os integrantes de D6 foram os únicos a escreverem o domínio real de variação de x , expressando-o em língua natural.

Quando entrevistamos a dupla, notamos que os alunos haviam reconhecido a correspondência (**F1**) e dependência entre as variáveis x e y e que mobilizaram as habilidades **F2**, **F3** e **F4**⁵ encontrando, assim, o domínio de variação das variáveis relacionadas. Porém, o termo “qualquer valor” dificultou nossa interpretação do domínio de variação considerado, por eles, para as variáveis x e y . E mesmo durante a conversa gravada entre os integrantes da dupla, na ocasião da resolução do questionário, não conseguimos identificar quais seriam os conjuntos de variação por eles considerados. Então, decidimos fazer algumas perguntas na entrevista para que pudéssemos esclarecer nossa dúvida. Questionamos os estudantes sobre como chegaram ao “2,5” e um deles respondeu:

⁵ **F1**: reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões algébricas); **F2**- determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente; **F3**: determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente; **F4**- reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas).

D6: "É porque tem o cinco subtraindo, então se eu colocar um valor que dê menor do que cinco vai ficar negativo e como o y está ao quadrado não pode dar um resultado negativo."

PP: "Vocês pensaram em y como sendo um número real?"

D6: "É, o y pode ser qualquer valor!"

PP: "Mas o que significa qualquer valor? Poderia ser um número complexo?"

D6: "Sim, mas aqui nós não pensamos nos complexos, só nos reais."

Com base nesse diálogo, identificamos, assim, que os alunos de D6 interpretaram, no item b), x e y como variáveis reais.

Analisando a resposta do trio T7 para a questão 2, no que se refere ao item a), percebemos que os alunos não utilizaram igualdades, o que demonstra a interpretação da variável y como um número genérico (G2). No diálogo, durante a elaboração da resposta do item a), pontuamos que um dos alunos, após ler o enunciado da questão respondeu, imediatamente: "Reais!". Em seguida, um outro aluno completou: "Complexos!", e, por fim, o terceiro integrante da dupla disse: "Infinitos!". Houve, então, uma discussão sobre o que escreveriam como resposta e, após chegarem a um acordo, os alunos apresentaram os seguintes dados:

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

a) $y = y$

infinitos ex: 7, π , -127
03

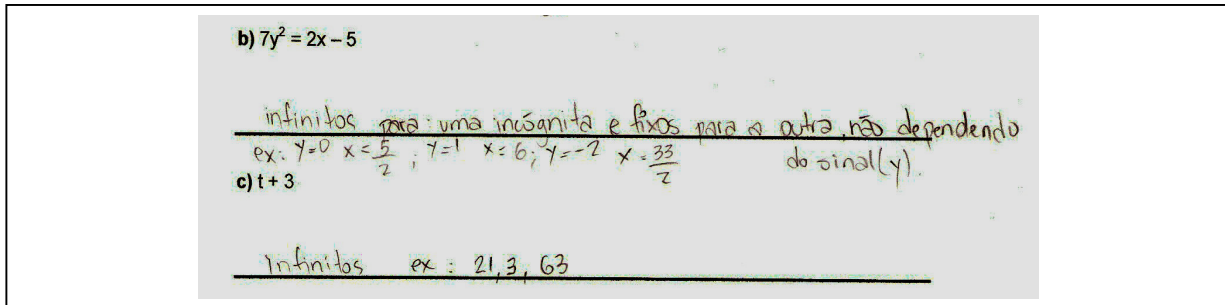
Quadro 11. Protocolo do trio T7 – Questão 2- item a).

Notamos, pelos exemplos citados, que os estudantes interpretaram y como uma variável que poderia assumir valores reais, e observamos, ainda, na fala de um dos integrantes do trio T7, que esse considerou que tal variável poderia representar um número complexo.

Em entrevista, com os alunos do trio, questionamos a resposta dada no item b). Os alunos disseram que haviam atribuído alguns valores a y para a partir daí calcular os valores de x, mas que não haviam pensado o contrário. Talvez, devido ao fato de aparecer primeiro na equação a variável y e depois a variável x, ou ainda, pela influência que a letra x representa nos problemas e questões que os alunos têm o hábito de resolver; já que x, geralmente, é a letra utilizada para simbolizar a

incógnita de um problema, ou seja, o valor a ser determinado, então, nada mais natural do que determinar o valor de x .

Vejamos parte do diálogo dos alunos, enquanto discutiam o item b), e, ainda, sua resposta para o item c).



Quadro 12. Protocolo do trio T7 – Questão 2 - itens b) e c).

T7-1: "Que loucura isso!"

T7-2: "Olha, y e x são números diferentes!"

T7-1: "Então põe qualquer coisa!"

T7-3: "Ah, é?!"

T7-2: "É, acho que sim!"

T7-3: "Será que não tem que passar tudo para o mesmo lado?"

T7-2: "Calma... pode ser qualquer valor, qualquer coisa! Se a gente determinar um valor para uma das incógnitas conseguimos calcular o valor da outra."

T7-3: "É verdade!"

T7-1: "É claro que é verdade!"

T7-2: "Mas a gente tem que fixar uma e calcular a outra."

T7-1: "É, óbvio, porque uma depende da outra!"

Notamos que os alunos reconheceram a correspondência entre as variáveis (**F1**), porém não visualizaram o intervalo $[5/2, \infty[$ como um possível campo de variação de x , apenas disseram, durante a entrevista, que y poderia assumir qualquer valor real, pois estava elevado ao quadrado.

Perguntamos, durante a entrevista, se, no item b), eles haviam pensado em números complexos, e a resposta foi: "Não, a gente nem parou para pensar nisso, a gente foi jogando valores e calculando."

A busca por um resultado mostrou-se clara nos diálogos dos alunos e também nos cálculos que apresentaram. Assim, apesar de observarem a dependência e correspondência entre x e y (**F1**), e interpretarem tais variáveis como números reais

notamos que os integrantes de T7 trataram x e y como incógnitas, agindo mecanicamente em busca de resultados numéricos, de forma pontual. Com isso, tiveram certa dificuldade de reconhecer a variação conjunta de tais variáveis e não explicitaram o intervalo $[5/2, \infty[$ como o campo de variação de x (F5).

Já no momento em que os alunos chegaram ao item c), houve o seguinte comentário:

T7-1: “t mais três? Isso não tem uma igualdade?”

T7-2: “É, acho que tem algum erro!”

T7-1: “Professora, aqui não tem igualdade?”

PP: “Não. É isso mesmo, t mais três!”

T7-1: “Ah, tá!”

T7-2: “Que bom! t mais três!” (risos)

T7-3: “Então vamos colocar qualquer valor, infinitos!”

T7-1: “Espera, vamos ler o enunciado de novo para ver se não tem alguma pegadinha.”

Após uma pausa, o mesmo aluno que levantou a dúvida, respondeu:

T7-1: “Ah, acho que está certo.... sei lá. Vamos colocar os exemplos!”

Novamente, percebemos a insegurança dos alunos frente a uma sentença genérica. A ausência do sinal de igual, na sentença dada, perturbou os integrantes do trio T7, e esses preferiram citar como exemplos apenas números inteiros positivos, ao contrário do que fizeram no item a), onde a igualdade trouxe certa segurança aos alunos.

Apesar dos exemplos, encontrados no protocolo de T7 para o item c), serem apenas números inteiros, seus integrantes admitiram, em entrevista, que t poderia assumir qualquer valor real ou, ainda, ser um número complexo. Sobre esse item, um dos alunos do trio comentou: “Nós escolhemos para citar como exemplos números que gostamos mais. Cada um de nós escolheu um.”

De forma resumida, observamos que o item c), da questão 2, foi o que trouxe mais dúvidas e insegurança aos alunos. Muitos acharam que deveria haver uma igualdade para que a expressão “ $t+3$ ” pudesse fazer algum sentido. Alguns não aceitaram tal expressão como uma afirmação válida. Esse foi o caso da dupla D3 que escreveu: “não há resolução, pois não há igualdade”. Outros, acrescentaram o sinal de igual em busca de um resultado, ou melhor, de um valor específico para t , como fizeram os integrantes da D4. Pontuamos, ainda, que na maioria dos

exemplos citados pelos alunos houve a utilização de igualdades para representar os possíveis valores que a variável t poderia assumir. Os únicos que não utilizaram igualdades foram os alunos da dupla D6 e os integrantes do trio T7. Acreditamos que essa falta de interpretação da variável como um número genérico e a estranheza que uma expressão genérica como “ $t+3$ ” causou aos alunos estão relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem, e aos problemas e exercícios propostos no material didático utilizado por esses estudantes, o qual não apresenta questões que explorem a análise e interpretação de expressões genéricas como a que citamos.

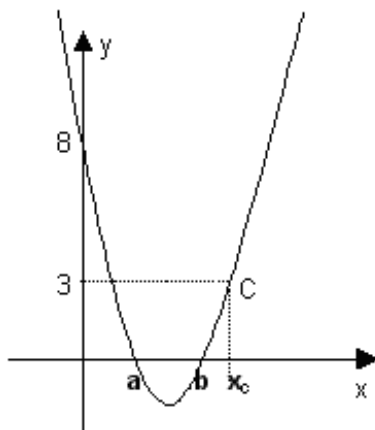
Além disso, observamos que a interpretação dos alunos sobre o domínio de variação das variáveis, apresentadas na questão, vai do conjunto dos naturais ao dos complexos. A maioria dos alunos demonstrou sua preferência pelos números inteiros e positivos, utilizando-os em seus cálculos e exemplos. Porém, alguns estudantes admitiram em suas falas que o conjunto dos reais, e, também, o dos complexos, poderiam ser campos possíveis de variação de x , y e t . Apesar de admitirem tal possibilidade, apenas o trio T7 apresentou um exemplo mais ousado, escrevendo no item a) “ $\sqrt{\pi}$ ”. Tal fato pode demonstrar que, em sala de aula, a utilização dos números reais e complexos ainda é pouco explorada nas questões e problemas trabalhados, o que justifica a preferência dos alunos pelos inteiros.

4.3 QUESTÃO 3

Transcrevemos, abaixo, a questão 3.

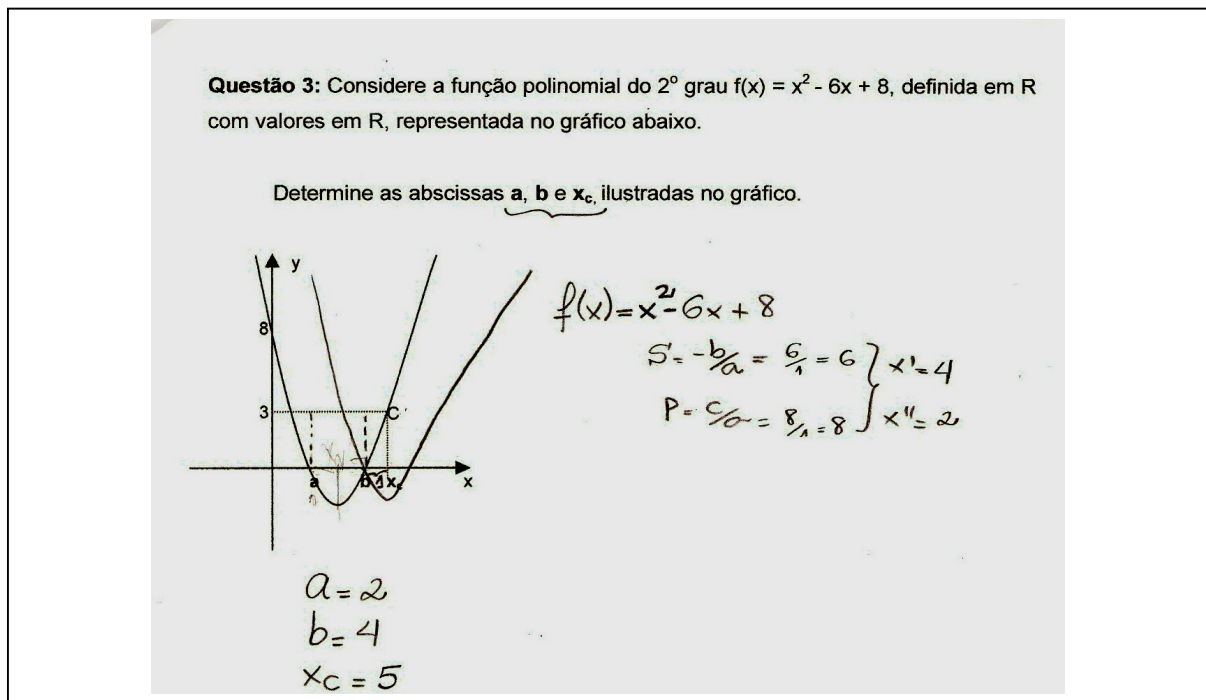
Questão 3: Considere a função polinomial do 2º grau $f(x) = x^2 - 6x + 8$, definida em \mathbb{R} com valores em \mathbb{R} , representada no gráfico abaixo.

Determine as abscissas **a**, **b** e **x_c** , ilustradas na figura abaixo.



Pretendíamos com essa questão verificar a interpretação dos alunos a respeito das variáveis **a**, **b**, x e x_c , e os procedimentos utilizados por eles na manipulação dessas variáveis. Assim, observamos quais relações os alunos estabeleceram entre as incógnitas **a**, **b** e x_c e as variáveis da função polinomial do 2º grau, dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, e analisamos a influência da representação gráfica na interpretação dos estudantes a respeito dessas variáveis. Essencialmente, a questão 3 envolve o uso da variável como incógnita, porém é necessário que o aluno mobilize a habilidade de interpretação **F1**, ou seja, que ele reconheça a correspondência e dependência das variáveis presentes numa relação funcional e que determine o valor da variável independente dado o da dependente (**F3**).

Apresentamos, abaixo, o protocolo da dupla D1 com suas respostas para a questão 3.



Quadro 13. Protocolo da dupla D1 – Questão 3.

Observamos que D1 determinou, pelo procedimento da soma e produto, as raízes da função dada (**I4**), denominando por x' e x'' tais raízes, como havíamos previsto em nossa análise preliminar das questões, e, no momento de apresentar a resposta final, trocaram x'' e x' por **a** e **b**, respectivamente, interpretando, assim, as raízes da equação como os zeros da função denominados por **a** e **b** (**I2**).

Para tanto, os alunos mobilizaram, além de **I2** (interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos), as

habilidades de interpretação **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada) e **I1** (reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema), e as habilidades de manipulação **F3** (determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente) e **I4** (determinar o termo desconhecido que aparece na equação executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas).

Essa dupla mostrou em sua resposta algo que não havíamos pensado em nossa análise preliminar. Os alunos esboçaram uma outra parábola e marcaram no gráfico, entre **b** e **x_c** , “1”.

No momento em que discutiam o cálculo de **x_c** , um dos alunos da dupla falou:

D1-1: “Eu não sei explicar, mas acho que é assim, aqui vale ‘1’, porque não parece que está no meio?”

D1-2: “É, mas como você vai justificar?”

D1-1: “Então, esse é o problema, eu acho que é isso, mas não sei explicar. Tem uma fórmula para calcular esse ‘ x_c ’, mas eu não lembro. Ele estaria no ‘5’.”

D1-2: “É, seria o vértice.”

D1-1: “É! Entendeu o que eu quis dizer?”

D1-2: “Entendi!”

D1-1: “Aqui, com certeza, é ‘1’! O que você acha?”

D1-2: “Eu acho que se estiver certo, a gente tá no caminho certo!”

Notamos pelo diálogo entre os alunos de D1 que a representação gráfica foi decisiva no momento em que pensavam no cálculo de **x_c** . A partir da análise do gráfico, os alunos agiram de forma intuitiva. Demonstraram consciência de que só a intuição não bastava, pois disseram que não sabiam como justificar ou explicar o que haviam intuído, porém, mesmo assim, deixaram como resposta “ $x_c = 5$ ”, sem apresentar uma justificativa. Observamos, ainda, que os alunos associaram o cálculo de **x_c** ao emprego de uma fórmula de que não se lembravam no momento da resolução da questão.

Em entrevista, perguntamos como haviam encontrado a distância entre as abscissas **b** e **x_c** .

D1-1: “A gente encontrou o ‘a’ e o ‘b’ e para encontrar esse ‘ x_c ’ a gente pensou no x do vértice.”

D1-2: “É, pra gente comprovar que ‘ x_c ’ é o x do vértice, é como se a gente deslocasse essa parábola para a direita, para comprovar que seria ‘1’ essa distância.”

PP: “Mas onde está o x do vértice da parábola dada?”

D1-2: “Aqui no meio.”

PP: “Mas qual é a posição dele?”

D1-2: “Três.”

PP: “Por que?”

D1-2: “Porque se o ‘a’ é ‘2’ e o ‘b’ é ‘4’, então fica ‘1’ pra lá e ‘1’ pra cá, então o x do vértice é ‘3’.”

PP: “Ah, vocês pensaram no eixo de simetria da parábola, é isso?”

D1-2: “É!”

PP: “Mas o que garante que a distância entre b e ‘ x_c ’ também é ‘1’?”

D1-1: “É que a gente deslocou toda a parábola para a direita então o ‘ x_c ’ vai ser o x do vértice.”

PP: “E esse ‘3’ marcado no eixo y, vocês não utilizaram esse dado no momento de resolver a questão?”

D1-2: “Não.”

Ficamos surpresos, e encantados, com o procedimento de resolução adotado pela dupla D1. A dupla utilizou uma estratégia de resolução incomum para a questão apresentada, porém, os alunos não conseguiram justificar matematicamente o que haviam intuído. Como havíamos previsto, o ponto C, por não ser um ponto de intersecção da parábola com os eixos coordenados, trouxe dificuldades aos alunos no momento de resolver a questão.

Eles pensaram na translação da parábola, mas não souberam explicar que transladando o gráfico em duas unidades para a direita, as posições das raízes seriam transladadas para (4, 0) e (6, 0), e teríamos uma nova representação para a função, a qual seria:

$$f(x) = (x-4).(x-6) = x^2-10x+24.$$

A partir de sua representação algébrica, é possível calcular o x_v , abscissa do vértice da parábola transladada:

$$x_v = \frac{-(-10)}{2.1} = \frac{10}{2} = 5.$$

A dupla D2, também, determinou **a** e **b** por meio do cálculo da soma e do produto, denominando as raízes da função, dada por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, como x_1 e x_2 . Os alunos mobilizaram, portanto, as habilidades **F3** e **I4** e ao apresentarem a resposta final, escreveram:

$$\begin{aligned}x_1 &= a = 2 \\x_2 &= b = 4 \text{ (I2)}\end{aligned}$$

Assim, notamos que os integrantes dessa dupla interpretaram as raízes da equação como os zeros da função, mobilizando, dessa forma, além de **I2**, as habilidades **F1** e **I1** de interpretação. Observamos que eles haviam “pulado” a questão 3, devido à representação gráfica apresentada no enunciado. No momento de resolver a questão, disseram:

D2-1: “Nossa! Essa tem gráfico, eu não sei gráfico.”

D2-2: “Eu sei!”

D2-1: “Sério? Então faz!”

D2-2: “Não sei não, depois a gente faz.”

Antes de entregar o questionário, os alunos nos chamaram:

D2-1: “Professora, a gente não consegue, só falta essa.”

PP: “O que é pedido na questão?”

D2-1: “Para representar no gráfico.”

D2-2: “Não! É para determinar as abscissas ilustradas no gráfico.”

PP: “Certo! O que vocês acham que ‘a’ e ‘b’ representam?”

D2-1: “São os valores de ‘ x_1 ’ e ‘ x_2 ’.”

PP: “Ou seja, são as raízes da função, não é?”

D2-1: “É!”

PP: “Como vocês podem, então, encontrar essas raízes, ou seja, como podemos calcular o ‘ x_1 ’ e o ‘ x_2 ’?”

D2-1: “Ah, é só fazer soma e produto!”

D2-2: “Eu ia falar isso!”

Percebemos que o fato de termos denominado as raízes da função por **a** e **b** dificultou a percepção dos alunos. Quando, no diálogo, utilizamos os termos citados por eles, isto é, x_1 e x_2 , imediatamente, os estudantes pensaram num procedimento para determinar tais raízes. Notamos que, para esses alunos, a questão 3 se resumiu na aplicação de um procedimento algébrico, e que a relação de dependência e correspondência (**F1**) entre as variáveis da função dada não foi

identificada por eles. Essa conclusão ficou evidente quando ouvimos a conversa dos alunos no momento em que faziam os cálculos para determinar as incógnitas **a**, **b** e x_c . Para calcular x_c , os alunos analisaram o gráfico e concluíram:

D2-1: “Se aqui é ‘2’ e aqui é ‘4’, então ‘ x_c ’ é ‘5’! É um pontinho só pra lá.”

D2-2: “Isso!”

Percebemos que os alunos de D2, assim como os de D1, não deram atenção às informações apresentadas no eixo y , não relacionado a abscissa x_c com a ordenada 3.

Em entrevista, questionamos os integrantes de D2:

PP: “Por que ‘ x_c ’ é igual a ‘5’? Como vocês calcularam?”

D2-1: “A gente não calculou, só olhou no gráfico!”

PP: “Mas pelo gráfico dá para concluir isso?”

D2-1: “É porque é um ponto depois do ‘4’.”

PP: “Mas não foi dada a escala do gráfico. Poderia ser ‘1,5’, ou ‘1,2’, por exemplo, depois do ‘4’. E aí, dá para concluir o que vocês concluíram só olhando o gráfico?”

D2-1: “É, acho que não, mas normalmente é de ‘1’ em ‘1’, não é?”

PP: “Muitos gráficos são dados com essa escala, mas não podemos admitir que todos sejam assim, não é?”

D2-1: “É.”

PP: “Vocês saberiam determinar ‘ x_c ’ de outra forma?”

D2-1: “Não!”

D2-2: “É, eu também não sei!”

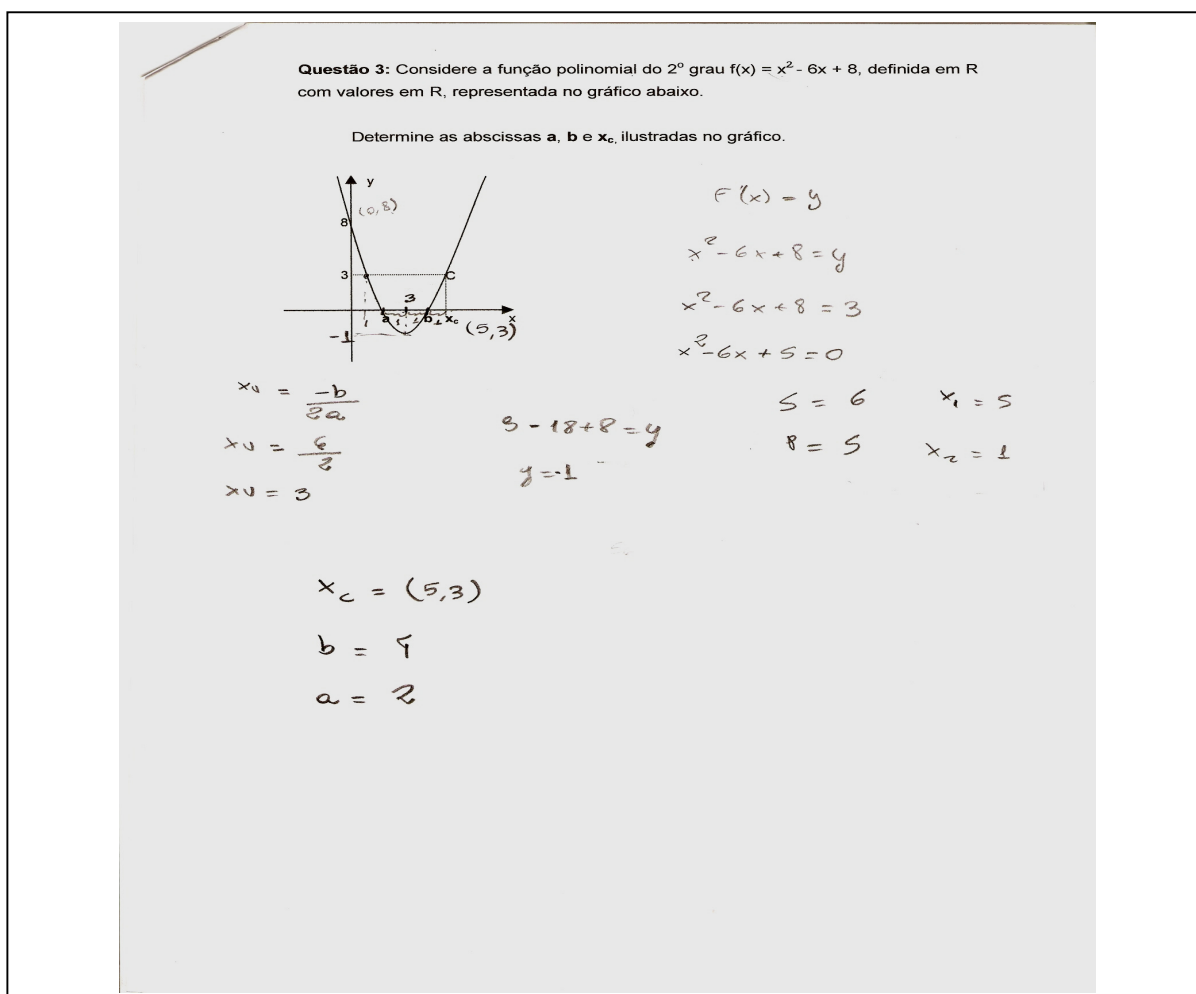
As duplas D3, D4, D6 e o trio T7 não apresentaram dificuldades em resolver essa questão. Os alunos reconheceram a correspondência entre as variáveis x e y (**F1**), identificaram na questão a presença de algo desconhecido que poderia ser determinado considerando as restrições do problema (**I1**), interpretaram as raízes da equação “ $x^2 - 6x + 8 = 0$ ” (**I5**), por eles formulada, como sendo as incógnitas **a** e **b** solicitadas na questão (**I2**), e calcularam essas raízes (**I4**) utilizando o procedimento da soma e do produto. D3 nomeou as raízes por x_1 e x_2 , substituindo-as, no momento de apresentar as respostas finais, por **a** e **b**. D4 e T7 utilizaram x' e x'' . D6 usou as representações x_I e x_{II} e depois substituiu-as por **a** e **b**.

Para determinar x_c , os alunos substituíram $f(x)$ por 3, na função dada pela representação “ $f(x)=x^2-6x+8$ ”, formulando, assim, a equação “ $x^2-6x+8 = 3$ ” (**I5**) e

calcularam x_c utilizando os procedimentos necessários (I4). Com isso, os alunos determinaram o valor da variável independente dado o valor da dependente (F3).

Notamos, dessa forma, que os integrantes das duplas D3, D4, D6 e do trio T7 reconhecerem a correspondência e dependência entre as variáveis presentes na questão (F1), mobilizando, adequadamente, as habilidades necessárias a sua resolução.

A dupla D5 também mobilizou tais habilidades, porém seu protocolo traz dados diferentes dos que encontramos nos outros.



Quadro 14. Protocolo da dupla D5 – Questão 3.

Observamos que os alunos de D5, diferentemente dos demais, começaram a pensar na questão observando no gráfico o ponto (0, 8). No diálogo da dupla, no momento em que seus integrantes resolviam a questão, percebemos que calcularam o valor de x quando y igual a 8, “confirmando” a informação que haviam observado no gráfico. E pensando nessa relação de dependência e correspondência entre as variáveis (F1) escreveram:

$$\begin{aligned} & \text{"f(x) = y} \\ & x^2 - 6x + 8 = y \\ & x^2 - 6x + 8 = 3 \\ & x^2 - 6x + 5 = 0\text{"} \end{aligned}$$

A princípio, os alunos tentaram resolver a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ utilizando o método da "Soma e Produto das raízes", mas como não conseguiam descobrir tais raízes partiram para o cálculo do "delta" da equação. Apesar de terem apagado as contas, identificamos o que fizeram por meio do áudio da gravação realizada no dia da aplicação do questionário. Os alunos não lembravam, ao certo, qual era a fórmula usada para calcular o delta da equação. Durante a conversa que tiveram no momento da resolução da questão, percebemos que utilizaram " $\Delta = -b^2 + 4ac$ ". Além do equívoco apresentado na fórmula, ocorreram, também, erros de cálculo. Um dos integrantes da dupla dizia: " $\Delta = -(-6)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 + 20 = 56$ ". Ao encontrar $\sqrt{56}$, o aluno disse:

D5: "Que horror! Deve ter alguma coisa errada! Vamos tentar de novo por soma e produto".

Na segunda tentativa, os estudantes conseguiram determinar as raízes da equação, encontrando, assim, " $x_1 = 5$ " e " $x_2 = 1$ ".

Seguros das respostas encontradas, analisaram o gráfico e decidiram que x_c deveria ser 5. Porém, percebemos que os alunos confundiram a abscissa do ponto C com suas coordenadas, pois, quando foram apresentar as respostas finais, escreveram: " $x_c = (5, 3)$ ". Durante a entrevista conversamos sobre esse fato e notamos que os alunos compreendiam que x_c era apenas a abscissa do ponto C, e não o ponto. Eles se justificaram dizendo que tal fato ocorreu por falta de atenção.

Em nossas hipóteses, quanto às estratégias de resolução dos alunos para a questão 3, não pensamos que eles pudessem utilizar o x do vértice da parábola para pensar nas raízes da função. A dupla D5 fez isso. Em entrevista, os alunos disseram:

D5: "O x do vértice é o ponto médio entre as raízes da função."

PP: "Mas como vocês sabem que 'a' e 'b' distam '1' do x do vértice? Não poderia, por exemplo, ser '0,5'?"

Houve um momento de silêncio, e, após pensar um pouco, um dos alunos respondeu:

D5: “Ah, é que se antes do ‘a’ é ‘1’ e depois do ‘b’ é ‘5’, e ‘3’ é a média das raízes então ‘a’ só pode ser ‘2’ e ‘b’ ‘4’.”

Notamos que, na ocasião da elaboração das respostas, os alunos não haviam pensado sobre a distância que estabeleceram entre as raízes e o x do vértice. Decidiram que seria ‘1’ sem analisar, previamente, os valores que haviam encontrado para as raízes da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$. Com a pergunta que fizemos, durante a entrevista, os alunos perceberam que saber o x do vértice não era suficiente para determinar as raízes da função.

Concluimos que a facilidade dos cálculos com os números inteiros, aliada à intuição dos alunos, os fez pensar que as raízes da função seriam 2 e 4.

Diante das respostas encontradas na questão 3, observamos que a representação gráfica, dada no enunciado da questão, influenciou as estratégias de resolução adotadas pelos alunos para determinar as incógnitas **a**, **b** e **x_c** . Porém, mesmo com duas representações distintas da função considerada, os alunos de D1 e D2 não demonstraram perceber a relação de dependência e correspondência entre as variáveis (**F1**), pois não relacionaram a abscissa do ponto C à ordenada 3 (**F3**). Pontuamos que os exercícios encontrados no material didático utilizado, no Ensino Médio, por esses alunos exploram, em sua maioria, os pontos de intersecção de uma função com os eixos coordenados. Assim, apesar de essas duplas não demonstrarem que reconheceram a correspondência entre as variáveis, conseguiram encontrar **a** e **b** pela influência dos exercícios já realizados em sua aprendizagem matemática.

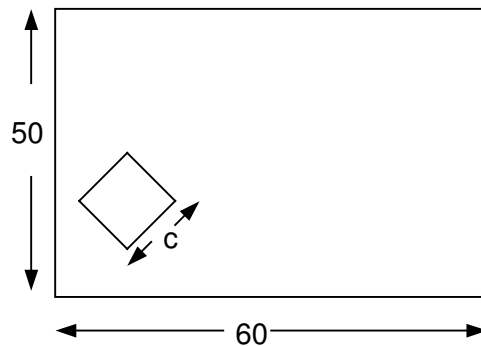
De forma geral, a maioria dos estudantes interpretou **a**, **b** e **x_c** como entes que poderiam assumir valores específicos (**I2**), e determinou, por meio da manipulação necessária, os valores dessas incógnitas (**I4**). Notamos, ainda, nas respostas dos alunos, o emprego dos símbolos x' , x'' , x_1 , x_2 , geralmente utilizados para representar as raízes de uma equação, ou os zeros de uma função do segundo grau. Apesar de utilizarmos no enunciado uma representação não convencional para as raízes da função, a maioria dos estudantes interpretou, corretamente, as variáveis **a** e **b** como incógnitas, associando-as aos zeros da função. Apenas as duplas D2 e D5 não identificaram, imediatamente, que tais letras representavam às raízes da função dada.

Assim, pontuamos que a variável como incógnita não apresenta dificuldades para os alunos, pois esses mobilizaram as habilidades de interpretação, de manipulação e de simbolização necessárias à sua compreensão.

4. 4 QUESTÃO 4

Transcrevemos, abaixo, a questão 4.

Questão 4: A área representada abaixo ilustra as medidas de um terreno retangular destinado à construção de um condomínio, onde será colocado um jardim, de formato quadrado, com c metros de medida para seu lado. Analisando a figura que representa esta situação, responda às questões:



- Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área destinada ao condomínio desconsiderando a área do jardim?
- O que a letra c representa no problema?
- Que valores c pode assumir?
- Quais são os valores de c para os quais a área ocupada pelo jardim é menor do que $16m^2$?

Nosso objetivo com essa questão era explorar a variável c numa situação que envolvesse uma relação funcional e verificar a capacidade de interpretação, simbolização e manipulação dos alunos diante dos dados do problema.

No que se refere ao item a), a dupla D1 respondeu:

$$A_{\square} = b \cdot h$$

$$A_{\square} = 60 \cdot 50$$

$$A_{\square} = 3000\text{m}^2$$

Em entrevista com a dupla, questionamos a resposta apresentada. Observamos que a dupla D1 grifou, no momento em que resolvia essa questão, a palavra “desconsiderando” presente no enunciado. Durante a entrevista, lemos novamente o enunciado e perguntamos:

PP: “A área que vocês calcularam representa o que é solicitado?”

D1: “Não, porque teria que tirar a área do jardim. E a gente ainda grifou isso!”

PP: “Eu percebi. Então como ficaria?”

D1: “Seria ‘3000’ menos ‘c²’.”

Pelo diálogo, notamos que esses alunos não responderam corretamente o item a) na ocasião em que elaboravam suas respostas no questionário, mas, em entrevista, demonstraram que perceberam o erro.

A dupla D2 respondeu no item a) algo semelhante ao que a dupla D1 fez:

$$“B.h = 50. 60 = 3000\text{m}^2”$$

Novamente, observamos uma resposta numérica, como as já apresentadas nas outras questões por essa dupla, demonstrando que, de forma geral, os alunos de D2 não utilizaram variáveis para representar o que era solicitado nos problemas, mesmo que os enunciados fizessem menção à utilização de expressões algébricas. Diante de tal fato, notamos a importância de trabalhos como os de Tinoco et al (2007) em que os autores relatam os resultados de uma pesquisa a respeito do desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica no ensino básico, começando nas séries iniciais. Esses demonstram a necessidade de uma aprendizagem e um ensino mais significativos em Álgebra. Os autores defendem que a noção de variável e a de equivalência deveriam ser construídas desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, ao longo do estudo da aritmética.

Acreditamos que os alunos da dupla D2 não desenvolveram a noção de variável durante o ensino básico, por isso não utilizam expressões com variáveis como resultado de contagens ou de medições, pois para eles tais expressões não são significativas. As experiências de Tinoco (1993; 1996) num projeto denominado Projeto Fundação, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, mostram que atividades que exploram o pensamento proporcional podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois incluem senso de co-variação, comparações múltiplas e inferência. Além disso, segundo a autora,

muitas situações do cotidiano e da escola elementar envolvem proporcionalidade o que possibilita uma ponte adequada e necessária entre experiências e modelos numéricos comuns e as relações mais abstratas tratadas em Álgebra. (Cf. TINOCO et al, 2007, p. 4).

Como previmos em nossa análise preliminar, a dupla D3 e o trio T7 utilizaram, além da variável c , presente no problema, uma outra letra, A , para representar o que era solicitado no item a) e escreveram a sentença “ $A_c = 3000 - c^2$ ”, mobilizando, assim, **F6** (simbolizar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema).

A dupla D4 também escreveu algo semelhante à resposta anterior.

$$\begin{aligned} A_c &= 50.60 = 3000 \\ A_T &= 3000 - c^2 \end{aligned}$$

Os alunos de D3, D4 e T7, além de mobilizarem a habilidade **F6**, reconheceram a dependência e correspondência entre as variáveis presentes no contexto do problema, o que caracteriza, nesse caso, o emprego da habilidade **F1**.

Já D5 respondeu:

$$A_T - A_J = (50.60) - c^2$$

Nessa igualdade, observamos que os alunos dessa dupla não expressam o relacionamento funcional que notamos nas duas respostas anteriores. Eles parecem ter interpretado A_T e A_J como incógnitas que assumem, respectivamente, os valores 50.60 e c^2 e, identificado c como um número genérico (**G2**), mas não demonstraram, nesse item, uma percepção do relacionamento entre a variável c e a área solicitada.

Já a dupla D6 escreveu a seguinte expressão “ $60. 50 - c^2$ ” demonstrando, assim, o emprego da habilidade **G5** (simbolizar afirmações genéricas, regras ou métodos) e a interpretação da variável c como um número genérico (**G2**).

As respostas apresentadas para o item b) foram:

D1: “A letra c representa um dos lados do quadrado.”

D2: “A área do jardim.”

D3: “O lado do quadrado que forma o jardim.”

D4: “Um lado do quadrado do jardim.”

D5: “O lado do terreno destinado à construção do jardim.”

D6: “Representa a medida do lado do jardim.”

T7: “O lado do jardim, c , representa a variável da qual depende o valor de A .”

A partir das respostas encontradas, observamos que a única dupla que interpretou c de forma incorreta foi a dupla D2. Em entrevista, questionamos os alunos sobre como calcular a área de um quadrado e um deles respondeu: “Lado vezes lado.” Solicitamos, então, que calculassem a área do quadrado representado na figura da questão 4 e o mesmo integrante da dupla disse: “ c vezes c , c ao quadrado.” Perguntamos, em seguida:

PP: “Então o que c representa no problema?”

D2: “O lado do quadrado.”

PP: “E por que vocês escreveram que c era a área do jardim?”

D2: “Acho que não prestamos atenção naquele dia.”

Uma outra resposta que nos chamou a atenção foi a do trio T7, que reforça o que já havíamos identificado no item a). Os integrantes do trio reconheceram uma relação funcional presente no problema e interpretaram c como uma variável independente. Questionamos, em entrevista, o que a variável A , citada na resposta, representaria na situação dada, já que no item a) eles haviam utilizado A_c . Os alunos responderam: “ A representa a área do jardim.”

A partir das respostas apresentadas no item b), concluímos que a importância dada aos elementos geométricos fez com que a maioria dos alunos definisse c como o lado do quadrado, não identificando essa variável como a representação de um número, mas sim de um segmento. As únicas respostas que não indicam essa interpretação são as da dupla D6 e do trio T7. Observamos que ao escreverem a palavra “medida”, o que não apareceu nas demais respostas, os integrantes de D6 associaram à variável c a um número e não ao segmento que representa o lado do quadrado. Ao expressar que c é a variável da qual depende a área do jardim, os integrantes de T7 demonstraram, claramente, que interpretaram c como uma variável relacionada e que mobilizaram, já no item b), a habilidade de interpretação **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada).

No item c) - “Que valores c pode assumir?” - encontramos algumas respostas que não havíamos previsto na análise preliminar.

A dupla D1 respondeu:

$$“1 \leq c \leq 60”$$

Em entrevista, questionamos os alunos sobre o intervalo dado como resposta e descobrimos que eles pensaram em c como um número inteiro. Perguntamos, então:

PP: “ c pode assumir um valor não inteiro?”

D1: “Ah, pode ser fração.”

PP: “Então c pode representar um número inteiro e também uma fração?”

D1: “Isso!”

PP: “Mais algum número?”

D1: “Acho que não.”

PP: “Por que maior ou igual a 1? ‘ c ’ não poderia ser ‘0,5’, por exemplo?”

D1: “Poderia, mas seria um jardim muito pequeno, só caberia uma flor.”

PP: “Mas qual é a unidade de medida de c ?”

Os alunos procuraram a informação no enunciado e um deles respondeu:

D1: “Está em metros. Ah, então até daria um jardim com algumas flores. (risos)”

PP: “E por que ‘60’ é o maior valor que c pode assumir?”

D1: “Porque é o maior lado do retângulo.”

PP: “Então a medida de c poderia ser, por exemplo, ‘54’ metros?”

D1: “Ah, não! Porque aí não caberia dentro do retângulo, porque a altura é 50 metros.”

PP: “A posição do quadrado na figura interfere no maior valor que c pode assumir?”

D1: “Acho que não!”

PP: “Vocês haviam pensado sobre isso?”

D1: “Não!”

Notamos pelo diálogo, que o contexto do problema influenciou a resposta de D1, principalmente, no que se refere a uma possível medida para o lado do jardim, visto que os alunos desprezaram os valores de c menores do que 1, pois acharam que o jardim ficaria pequeno demais. Porém, a posição do quadrado não interferiu na análise que a dupla fez dos possíveis valores que c poderia assumir.

Como já havíamos identificado no item b), a dupla D2, continuou pensando na variável c como sendo a representação da área do quadrado (jardim) ao invés do lado dessa figura, pois escreveu no item c):

“Qualquer um, sendo menor do que 60x50”

Dessa forma, os integrantes de D2 atribuíram a c uma medida de área e não de comprimento. Logo, a falta de atenção que os alunos alegaram, quando

questionamos a resposta dada no item b), parece, na verdade, não ter relação com a resposta dada de forma incorreta, pois os estudantes empregaram o mesmo raciocínio nos dois itens.

D3 respondeu:

$$“c \text{ está entre } 0 \text{ e } 50 \Rightarrow 0 < c \leq 50”$$

Em entrevista com essa dupla, perguntamos:

PP: “O que c representa para vocês? c é um número inteiro?”

Seguem abaixo as respostas de seus integrantes:

D3-1: “Sim, só pode ser inteiro porque se você está trabalhando com uma figura geométrica, então tem que ser inteiro!”

D3-2: “Não! Pode ser quebrado.”

O aluno 1 pensou um pouco e logo concordou com o aluno 2.

PP: “‘ c ’ pode ser, por exemplo, ‘ $\sqrt{3}$ ’?”

D3-1: “Pode.”

D3-2: “Na verdade, pode ser qualquer número real não negativo e diferente de zero.”

Notamos que a presença de elementos da Geometria, a princípio, influenciou um dos alunos da dupla o qual não havia aceitado que c pudesse assumir valores não inteiros. Mas com a discussão ocorrida no momento da entrevista, ele se convenceu de que c poderia representar qualquer número real estritamente positivo. Observamos, ainda, que, assim como os alunos de D1, os alunos de D3 não pensaram na posição do quadrado na análise que fizeram para encontrar o intervalo que representaria os possíveis valores de c .

Já a dupla D4 respondeu para o item c) algo que não havíamos previsto em nossa análise preliminar:

$$“0 < c^2 < 3000$$

$$0 < c < 300”.$$

Em entrevista com essa dupla, perguntamos como haviam chegado ao 300. Os alunos explicaram que multiplicaram a desigualdade por 30 para encontrar um número que tivesse como raiz quadrada um resultado inteiro. Assim, fizeram $3000 \cdot 30 = 90000$ e $\sqrt{90000} = 300$. Durante a entrevista, os alunos perceberam que tal estratégia não era correta, pois não haviam multiplicado todos os membros da desigualdade por 30, e sim apenas o 3000. Além disso, observamos que os integrantes dessa dupla não analisaram criticamente o intervalo que encontraram

para a variável c , preocupando-se unicamente em utilizar procedimentos aritméticos que lhes fossem convenientes para encontrar como resultado um número inteiro.

Perguntamos aos integrantes de D4:

PP: “ c é um número inteiro?”

D4: “É, só pode ser inteiro e positivo.”

PP: “Por que?”

D4: “Porque ele está relacionado à área.”

PP: “ c poderia ser, por exemplo, $\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{3}$?”

D4: “Ah, poderia, mas é difícil trabalhar com esses números.”

Percebemos nos cálculos da dupla, e no diálogo, que os alunos preferem os números inteiros pela facilidade que esses trazem no momento de realizar operações. Os estudantes admitem que c pode representar um número não inteiro, mas no momento de citar exemplos ou fazer cálculos fazem opção pelos números naturais. Além disso, percebemos que o contexto do problema, favoreceu essa preferência, pois os alunos justificaram suas escolhas associando a variável c a elementos geométricos como o lado de um quadrado, ou ainda, a área do jardim, demonstrando, assim, que, provavelmente, houve uma certa influência do uso de números naturais no processo de ensino e aprendizagem de Geometria pelo qual eles passaram.

D5 respondeu:

$$\begin{aligned} c^2 &< 3000 \\ c &< \sqrt{3000} \end{aligned}$$

Durante a entrevista com a dupla, observamos que seus integrantes também haviam pensado em c como um número inteiro estritamente positivo menor que $\sqrt{3000}$, apesar disso não ter sido explicitado em sua resposta.

Também a dupla D6 respondeu:

“Tem que ser menor que a raiz quadrada de 3000

$$c < \sqrt{3000}$$

Sendo que, devem ser natural e diferente de 0 (zero).”

Observamos que as respostas acima não foram previstas em nossa análise preliminar. Os alunos dessas duplas não perceberam que ao comparar a área do quadrado (jardim) com a do retângulo estavam encontrando um intervalo

inadequado para a variável c . Tal estratégia seria válida se o terreno destinado à construção do condomínio fosse quadrangular.

Na resposta de D6, identificamos que os alunos interpretaram c como um número natural. Em entrevista, questionamos:

PP: “ c tem que ser um número natural?”

D6: “É, porque como é área...”

PP: “Então não pode ser 2,5; $\sqrt{2}$; $4/3$...?”

D6: “Ah é! Só não pode ser negativo! Então a resposta seria: reais maiores do que zero.”

Novamente, identificamos, na primeira resposta do diálogo, a associação, realizada pelos alunos, dos números inteiros estritamente positivos com a presença de elementos geométricos no problema.

Apresentamos, a seguir, a resposta de T7 para o item c) da questão 4.

c) Que valores c pode assumir?

$0 < c \leq 50$, para os lados do jardim paralelos aos lados do terreno

$0 < c \leq 25\sqrt{2}$, para diagonais do jardim paralelas aos lados do terreno.

O valor de c depende da localização do jardim.

d) Quais são os valores de c para os quais a área ocupada pelo jardim é menor do

Quadro 15. Protocolo do trio T7 – Questão 4 – item c).

Observamos que os integrantes do trio dispensaram um bom tempo durante a resolução desse item por conta da posição do quadrado que representava o jardim. Como havíamos previsto na análise preliminar, os alunos pensaram na diagonal do quadrado em função de c para delimitar o intervalo de variação dessa variável (**F5**).

Diferentemente dos demais alunos que manifestaram em suas falas e respostas a preferência por números inteiros positivos, os integrantes de T7 interpretaram c como um número real estritamente positivo pertencente aos intervalos por eles determinados. Em entrevista, questionamos:

PP: “Independente da posição que o quadrado esteja e da localização dele no retângulo, qual dos dois intervalos seria o mais adequado para representar os possíveis valores de c ?”

Os alunos discutiram e chegaram a conclusão de que o intervalo $0 < c \leq 25\sqrt{2}$ seria o melhor, pois seria o “mais preciso”. Assim, o trio T7 mobilizou a habilidade de interpretação **F4** (reconhecer a variação conjunta das variáveis

envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada) e a habilidade de manipulação **F5** (determinar o intervalo de variação de uma variável).

De forma geral, os alunos mobilizaram a habilidade **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada) para responder o item c) da questão 4. Porém, faltou criticidade com relação aos resultados encontrados. Muitos estudantes não demonstraram preocupação com o contexto do problema, e sim apenas com o processo necessário para chegar a um intervalo para expressar os possíveis valores de c , de preferência, utilizando números inteiros nos cálculos realizados. Além disso, os elementos geométricos presentes no problema influenciaram as respostas dos alunos, de maneira que todos admitiram para c apenas valores positivos.

Concluimos, ainda com relação ao item c), que o trio T7 encontrou o mais preciso intervalo de variação de c , e que seus integrantes interpretaram c como um número real. Os demais alunos apesar de citarem, durante as entrevistas, que a variável c poderia assumir valores não inteiros, não explicitaram isso em suas respostas e observamos que essa preferência ocorreu, em parte, por conta da associação que os estudantes fizeram entre esses números e a presença de elementos geométricos no problema. Tal fato pode ser verificado nas justificativas que os alunos davam quando questionávamos a escolha do domínio de variação de c como sendo o conjunto dos inteiros estritamente positivos.

Nos resultados da pesquisa de Trigueros e Ursini (2001) sobre a concepção de professores do Ensino Médio a respeito do conceito de variável encontramos a seguinte observação: “Sua descrição de intervalos era sempre feita em termos de números inteiros, isto é, os professores têm dificuldades com a idéia de continuidade na reta real (**F5**).” (TRIGUEROS; URSINI, 2001, p.331, tradução nossa.)

É compreensível, portanto, que alunos do Ensino Médio prefiram os números inteiros, já que, em muitos casos, são esses os números preferidos de seus professores, mesmo quando uma área da Matemática, como é o caso da Geometria, favoreça o emprego de números irracionais de forma significativa nos problemas trabalhados em sala de aula.

Quanto as respostas apresentadas para o item d), encontramos no protocolo da dupla D1 os seguintes dados:

d) Quais são os valores de c para os quais a área ocupada pelo jardim é menor do que 16m^2 ?

$$A_{\#} = l^2 \rightarrow c^2$$

$$16 = l^2$$

$$c = \sqrt{16}$$

$$c = 4, \text{ portanto } 0 < c < 4$$

Quadro 16. Protocolo da dupla D1– Questão 4 – item d).

Observamos que apesar de não simbolizarem a desigualdade $c^2 < 16$ (**G5**), os integrantes dessa dupla mobilizaram as habilidades de manipulação **G4** (manipular a variável simbólica) e **I4** (determinar o termo desconhecido que aparece na equação) determinando, assim, o intervalo de variação de c (**F5**).

Diante do intervalo apresentado no item d), perguntamos, em entrevista:

PP: “Quando vocês escreveram como resposta o intervalo ‘ $0 < c < 4$ ’ vocês pensaram em c como um número inteiro pertencente a esse intervalo, como fizeram no item anterior?”

D1: “Sim, mas também valem as frações.”

PP: “Então, para vocês, c pode assumir valores inteiros ou, ainda, valores como ‘0,5’, ‘1/3’, etc?”

D1: “Isso!”

PP: “Em algum momento vocês pensaram em outros valores para c que não fossem inteiros ou frações?”

D1: “Não.”

Observamos pelo diálogo que, novamente, os integrantes de D1 admitiram que a variável c poderia assumir apenas valores inteiros ou fracionários, como já haviam declarado no item c).

A interpretação de c como um número inteiro positivo também foi apresentada pelos alunos das duplas D4, D5 e D6. Nos protocolos dessas duplas pudemos visualizar as seguintes respostas:

Resposta de D4: “ $c < 4$ ”

Resposta de D5: “{ 4, 3, 2, 1 }”

Resposta de D6: “Deve ser menor que 4, sendo que natural e diferente de 0.”

Em entrevista com os integrantes dessas duplas, notamos que todos eles, na ocasião da investigação por meio do questionário, pensaram em c como um número natural pertencente ao intervalo $0 < c < 4$. Porém, após os questionamentos que fizemos no momento em que discutíamos o item c), durante as entrevistas, os fez concluir que suas respostas para o item d) poderiam ser complementadas, ou seja, que c poderia assumir outros valores além dos números inteiros estritamente positivos menores do que 4.

Identificamos na resposta de D4, apresentada anteriormente, a mobilização da habilidade de simbolização **G5** e de manipulação **F5**, enquanto que, nas demais respostas, observamos, apenas, essa última habilidade, manifestada de formas diferentes daquela que previmos na análise preliminar, quando tínhamos como hipótese que os alunos utilizariam intervalos para representar suas respostas.

A dupla D3 escreveu como resposta o intervalo: " $0 < c < 4$ ". Em entrevista, questionamos os alunos sobre os possíveis valores que c poderia assumir e recebemos como resposta que c poderia ser qualquer número real entre zero e quatro. Acreditamos que essa resposta foi influenciada pela discussão que tivemos com os integrantes dessa dupla quando os questionamos sobre a resposta dada no item c), pois, a princípio, um dos alunos da dupla concluiu que c deveria ser inteiro e positivo pois representava o lado do quadrado.

Novamente, ao contrário dos demais, os integrantes do trio T7 interpretaram c como um número real. Em seu protocolo, encontramos a seguinte resposta:

$$\begin{aligned} & \text{"}A_{\text{jardim}} < 16\text{m}^2 \\ & 0 < c < 4.\text{"} \end{aligned}$$

Já a dupla D2 continuou a apresentar respostas puramente numéricas. Nesse item da questão 4, os alunos responderam:

$$\text{"}2 \times 7 = 14 \text{ m}^2.\text{"}$$

Novamente, notamos que os alunos interpretaram c como a área do quadrado e durante a discussão entre eles, no momento em que respondiam o item d), concluíram que precisavam apresentar dois números que multiplicados resultassem num produto menor do que 16 e acreditaram, assim, que 14 representava um possível valor para c . Percebemos, assim, que os alunos não mobilizaram a habilidade **G2**, isto é, não interpretaram c como um número genérico, apresentando apenas um possível valor, como um exemplo, de acordo com o entendimento que tiveram, ou seja, o de que c representava a área do quadrado (jardim).

Diante dos dados encontrados no item d), concluímos que a maioria dos alunos mobilizou a habilidade **F5** (determinar o intervalo de variação de uma variável), porém, com exceção dos integrantes do trio T7, os estudantes interpretarem c como um número inteiro estritamente positivo.

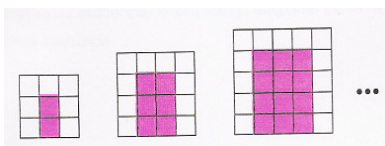
Notamos que o contexto do problema, com a presença de elementos geométricos, influenciou a interpretação dos alunos a respeito dos possíveis valores que c poderia assumir. Tal fato, pode estar relacionado ao processo de ensino e aprendizagem, no âmbito da Geometria, pelo qual esses alunos passaram durante o Ensino Médio. Novamente, observamos que tal área pode favorecer a exploração de números irracionais de uma forma significativa para que os estudantes aceitem melhor a existência desses números.

Ao contrário do que previmos na análise preliminar, poucos alunos registraram em seus protocolos as manipulações necessárias para encontrar o intervalo de variação de c . Provavelmente, pelo fato do item d) solicitar a resolução de uma desigualdade simples ($c^2 < 16$). Porém, mesmo assim, acreditamos que as habilidades de manipulação **G4** e **I4** foram mobilizadas de alguma forma para que os estudantes pudessem determinar o intervalo de variação de c (**F5**).

4.5 QUESTÃO 5

Transcrevemos, a seguir, a questão 5.

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



- Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
OBS: Considere como contorno da figura os quadradinhos que não estão em destaque.
- Desenhe a 5ª figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência.
- Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada?
- Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

Recordamos que nosso objetivo, com a questão 5, era verificar se os alunos reconheceriam um padrão na seqüência apresentada e se utilizariam variáveis para generalizar a contagem dos quadradinhos que compõem o contorno das figuras. Dessa forma, procuramos explorar o aspecto da variável como número genérico.

Como havíamos previsto na análise preliminar, os alunos responderam os itens a) e b) sem apresentar dificuldades, reconhecendo o padrão apresentado na seqüência (**G1**). Todos os estudantes que participaram da investigação responderam corretamente esses dois itens.

Diante do relacionamento existente entre as respostas dos itens c), d) e e), apresentamos, a seguir, a análise dos três de forma conjunta para cada um dos protocolos obtidos.

No item c), encontramos respostas distintas daquelas que havíamos previsto na análise preliminar. A dupla D1 respondeu:

$$"2x - 2 + y = n$$

$$x = \text{altura}$$

$$y = \text{largura}$$

$$n = n^{\circ} \text{ de quadradinhos}"$$

Apesar de utilizarem variáveis para escrever uma expressão que representasse a quantidade de quadradinhos de uma figura qualquer da seqüência dada, os alunos não apresentaram uma sentença que possibilitasse esse cálculo a partir da posição da figura na seqüência, pois seria necessário saber a altura e o comprimento ("largura") da figura para encontrar o número de quadradinhos de seu contorno. Observamos que a altura e o que os alunos denominaram como largura seriam medidas referentes ao quadrado. Conseguimos perceber isso, devido a resposta dada por eles no item d), pois utilizaram a fórmula apresentada em c) e substituíram x e y por 14, com a intenção de exemplificar o número de quadradinhos da figura com medidas 14x14.

Em entrevista, questionamos:

PP: "Utilizando a sentença que vocês elaboraram, quantos quadradinhos haveria no contorno da vigésima figura da seqüência?"

Os alunos pensaram um pouco e um deles respondeu:

D1: "É só substituir o x e o y por '20'."

PP: "Vamos testar a fórmula que vocês elaboraram para calcular o número de quadradinhos da primeira figura. O que devemos fazer?"

D1: “É só substituir por ‘1’ o x e o y.”

Fizemos os cálculos com os alunos e esses notaram que tal fórmula não forneceria o número de quadradinhos do contorno da primeira figura.

Percebemos que os integrantes de D1 não deduziram, de forma correta, uma regra para generalizar o padrão apresentado, não relacionando a posição de uma figura qualquer da seqüência dada com a quantidade de quadradinhos de seu contorno. Tal fato demonstra que eles não mobilizaram as habilidades **G3** (deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas) e **G5** (simbolizar sentenças genéricas, regras ou métodos).

A resposta da dupla, para o item d), foi:

$$2x - 2 + y = n$$

$$2 \cdot 14 - 2 + 14 = n$$

$$28 - 2 + 14 = n$$

$$26 + 14 = n$$

$$n = 40$$

40 quadradinhos formam o contorno da nova figura.”

Questionamentos, em entrevista:

PP: “Qual seria a figura que contém 40 quadradinhos em seu contorno?”

D1: “A que tem medidas ‘14’ por ‘14’.”

PP: “Certo, mas qual seria a posição dela na seqüência? É a sexta? A sétima? A oitava? Qual seria?”

Depois de algum tempo, um dos alunos disse:

D1: “Teria que ir calculando até chegar a ‘40’.”

PP: “Por que vocês escolheram ‘14’ para x e y? Não poderia ser ‘7’, ‘10’ ou qualquer outro valor já que a questão solicita a quantidade de quadradinhos de uma figura qualquer?”

D1: “Acho que poderia, é que a gente só quis dar um exemplo.”

A falta da generalização necessária à resolução da questão foi confirmada na resposta dos alunos, no item e):

“A expressão representada no item c) foi necessária para responder (calcular) o item d).”

Observamos, assim, pelas respostas e pelos diálogos, que esses estudantes não utilizaram as variáveis como números genéricos (**G2**) e apesar de reconhecerem um padrão na seqüência dada, não conseguiram generalizá-lo.

A resposta da dupla D2 para o item c) foi:

“24 quadradinhos”

Observamos, pela entrevista, que a intenção dos alunos era apresentar no item c) o número de quadradinhos do contorno da figura seguinte àquela citada no item b), porém, como cometeram erros no momento de realizar o cálculo, responderam 24 ao invés de 22. Utilizando o mesmo raciocínio, apresentaram, no item d), a resposta:

“Maior que 24”

No item e), escreveram a seguinte conclusão:

“Sim, pois na seqüência dada vai sempre aumentando o número de quadradinhos; portanto a próxima tem que ser maior que 24.”

Diante das respostas encontradas, notamos que apesar de terem reconhecido um padrão na seqüência (**G1**), os alunos não conseguiram generalizá-lo e não utilizaram variáveis para expressar uma regra que descrevesse tal padrão. Tal fato demonstra, novamente, a dificuldade dessa dupla em expressar respostas em linguagem algébrica e a falta de compreensão do conceito de variável.

Já a dupla D3, como podemos observar em seu protocolo, relacionou a quantidade de quadradinhos do contorno das figuras apresentadas na seqüência com os termos de uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo igual a 7.

c) Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada.

P.A. (7, 10, 13, 16, 19, ...) \rightarrow número de \square do contorno
 $r = 3$ $n = n^{\circ}$ de \square no lado

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$\boxed{a_{n-2} = a_1 + (n-3) \cdot r}$$

d) Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada? Na 7^ª figura

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot r$$

$$a_7 = 7 + 6 \cdot 3 = 7 + 18$$

$$\underline{a_7 = 25}$$

e) Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

O número da figura é a quantidade de quadradinhos do lado da figura menos 2.

Quadro 17. Protocolo da dupla D3 – Questão 5 – itens c), d) e e).

Observamos, novamente, respostas distintas nos itens c) e d) apesar de solicitarem a mesma coisa. Como previmos na análise preliminar, acreditamos que a palavra “quantos” no início da pergunta do item d) fez com que os alunos associassem sua resposta a um único resultado numérico. Notamos que, no item c), a dupla D3 utilizou a variável n para representar o número de quadradinhos no lado de cada figura na seqüência, enquanto, no item d), os alunos admitem que n representa a posição de cada figura na seqüência.

Em entrevista, questionamos:

PP: “Utilizando a fórmula ‘ $a_{n-2} = a_1 + (n-3).r$ ’, como podemos encontrar a quantidade de quadradinhos que compõem o contorno, por exemplo, da vigésima figura dessa seqüência?”

A dupla ficou em silêncio e após algum tempo de reflexão um dos alunos respondeu:

D3-1: “Usando essa fórmula você precisa saber quantos quadradinhos forma o lado da vigésima figura, mas com a fórmula ‘ $a_n = a_1 + (n-1).r$ ’ você pode calcular direto a quantidade de quadradinhos do contorno, é só substituir n por ‘20’.”

PP: “Vocês acham que a resposta do item c) se aplica a questão do item d)?”

D3-2: “Pensando bem agora, acho que poderia, porque falar ‘quantidade de quadradinhos’ e ‘quantos quadradinhos’ é a mesma coisa. Quando respondemos essa questão a gente pensou, no item c), na quantidade de quadradinhos que formavam o lado de cada figura e, no item d), no número da figura na seqüência.”

PP: “O número da figura é a posição da figura na seqüência?”

D3-2: “Isso. Por exemplo, a quinta figura é a que tem 7 quadradinhos no lado, não é a sétima que tem sete, assim dá para usar qualquer uma das fórmulas, porque a posição é a quantidade de quadrados no lado menos ‘2’”.

PP: “Por que vocês deram como resposta, no item d), a quantidade de quadradinhos do contorno da sétima figura? Não poderia ser da oitava? Da nona? Ou de qualquer outra?”

D3-1: “Poderia, mas para mostrar melhor a gente deu um exemplo ao invés de repetir a resposta do item c), porque senão ficaria muito pobre.”

Percebemos pelo diálogo que além de encontrar uma relação entre a posição da figura na seqüência e a quantidade de quadradinhos que compõem o contorno de uma figura qualquer, os alunos também pensaram na relação existente entre a

quantidade de quadrados no lado de cada figura e sua posição na seqüência. Essa última relação pode ser identificada, claramente, na resposta do item e).

Notamos que, após nossos questionamentos durante a entrevista, os integrantes da dupla perceberam que poderiam repetir no item d) a resposta dada em c), mas na ocasião da resolução acharam melhor dar um exemplo numérico para demonstrar a validade da fórmula considerada. Tal fato foi previsto na análise preliminar. Acreditamos que a palavra “quantos”, apresentada no início do item d), influenciou os alunos, os quais associaram a pergunta a uma resposta numérica, demonstrando, assim, certa insegurança em apresentar a sentença do item c) como uma possível resposta para a questão.

Apesar da resposta numérica, dada em d), acreditamos que os alunos mobilizaram todas as habilidades necessárias à resolução da questão, pois reconheceram o padrão (**G1**) na seqüência dada, deduziram uma regra (**G3**), utilizaram a variável n como um número genérico (**G2**) e simbolizaram a generalização do padrão apresentando a sentença ' $a_{n-2} = a_1 + (n-3).r$ ' (**G5**).

Mesmo não explicitando que n deveria ser maior ou igual a 3 na sentença dada, percebemos que ao relacionarem a quantidade de quadrados no lado de cada figura (n) com a posição da figura na seqüência, os integrantes de D3 fixaram esse domínio para n , pois em seus diálogos a primeira figura ocupava a posição 1, a segunda a posição 2, e assim por diante. Logo, se representarmos a posição por p , temos, de acordo com a relação estabelecida pelos alunos, que $p = n - 2$; e sendo p um número natural maior ou igual a 1 fica determinado, assim, que $n \geq 3$.

A seguir, apresentamos o protocolo da dupla D4, no que se refere aos itens c), d) e e).

c) Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada.

$T =$ total quadradinhos - $T = A \square$
 $C =$ contorno
 $P =$ quadradinhos pintados $\square = T$

$9 = T$	$16 = T$	$25 = T$	36
$7 = C$	$10 = C$	$13 = C$	16
$2 = P$	$6 = P$	$12 = P$	20

$T - P = C$
 $3L - 2 = C$

d) Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada?

$3L - 2 = C$
 $3 \cdot 10 - 2 = C$
 $30 - 2 = C$
 $C = 28$

e) Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

$3L - 2 = T - P$

Sim, pois para encontrarmos o valor do contorno na relação (d) usamos a expressão da relação (c).

Quadro 18. Protocolo da dupla D4 – Questão 5 – itens c), d) e e).

Observamos que essa dupla utilizou três variáveis para escrever uma expressão que representasse a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada, porém na relação “ $T - P = C$ ” a variável C não está associada a posição da figura na seqüência, mas sim a quantidade total de quadradinhos (T) que formam a figura e a quantidade daqueles que estão destacados (P). Com isso, apesar de reconhecerem um padrão na seqüência (G1) os alunos não conseguiram generalizá-lo, limitando-se apenas ao relacionamento dos valores correspondentes a “ T ” e “ P ” para calcular o número de quadradinhos do contorno.

Notamos que além da relação “ $T - P = C$ ”, os integrantes de D4 também escreveram “ $3L - 2 = C$ ” relacionando, assim, a variável L (medida, em quadradinhos, do lado de cada figura, como foi identificado na entrevista) com a variável C . Em entrevista, questionamos:

PP: “Qual dessas sentenças representa a quantidade de quadradinhos de uma figura qualquer dada na seqüência?”

D4: “As duas podem ser usadas para calcular a quantidade de quadradinhos. Mas uma usa o número de quadradinhos que formam a figura toda e a outra o número de quadradinhos no lado da figura.”

PP: “Por que L é igual a ‘10’ no item d)?”

D4: “Como era para calcular o número de quadradinhos de uma figura qualquer a gente escolheu a que tem lado ‘10’ como um exemplo, mas poderia ser outro valor.”

PP: “Vocês acham que a resposta dada por vocês no item c) poderia ser aplicada ao item d)?”

D4: “Na verdade, o item d) é uma aplicação do item c).”

PP: “O que seria uma aplicação?”

D4: “É como um exemplo.”

Notamos pelo diálogo, e também pela resposta dada pela dupla no item e), que esses alunos também acreditaram que era necessário apresentar uma resposta numérica em d), citando, para tanto, um exemplo. Percebemos, assim, que apesar de dizerem que L poderia assumir outro valor além de “10”, os estudantes não interpretaram a sentença $3L - 2 = C$ como uma possível resposta para o item d), mostrando, dessa forma, que não chegaram a uma generalização do padrão reconhecido e não conseguiram simbolizá-lo (**G5**) adequadamente. Tal fato demonstra, novamente, uma falta de compreensão das variáveis como números genéricos e a dificuldade dos alunos em generalizar padrões.

A dupla D5 apresentou o seguinte protocolo:

c) Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada.

$$A_T - A_P = X$$

d) Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada?

$$X + 3 = C$$

X + n° de quadradinhos do contorno da figura anterior

e) Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

Sim, ambos representam uma fórmula para encontrar o número de quadradinhos do contorno da figura.

Quadro 19. Protocolo da dupla D5 – Questão 5 – itens c), d) e e).

Em entrevista, questionamos:

PP: “Utilizando a fórmula que vocês elaboraram, como eu poderia calcular, por exemplo, a quantidade de quadradinhos da vigésima figura?”

Após o questionamento, a dupla ficou algum tempo em silêncio e, então, decidimos perguntar, novamente:

PP: “Vocês disseram que A_T representa a área total de cada figura e que A_P a área correspondente aos quadradinhos pintados, então utilizando essa sentença como eu poderia calcular a quantidade de quadradinhos do contorno da vigésima figura?”

Depois do novo questionamento os integrantes de D5 se manifestaram:

D5-1: “Você teria que calcular ‘20’ ao quadrado e depois....”

D5-2: “Não dá! Porque é preciso saber quantos quadradinhos estariam pintados, e isso a gente não sabe, só sabe o lado da figura toda.”

PP: “Mas a vigésima figura é aquela que tem vinte quadradinhos no seu lado?”

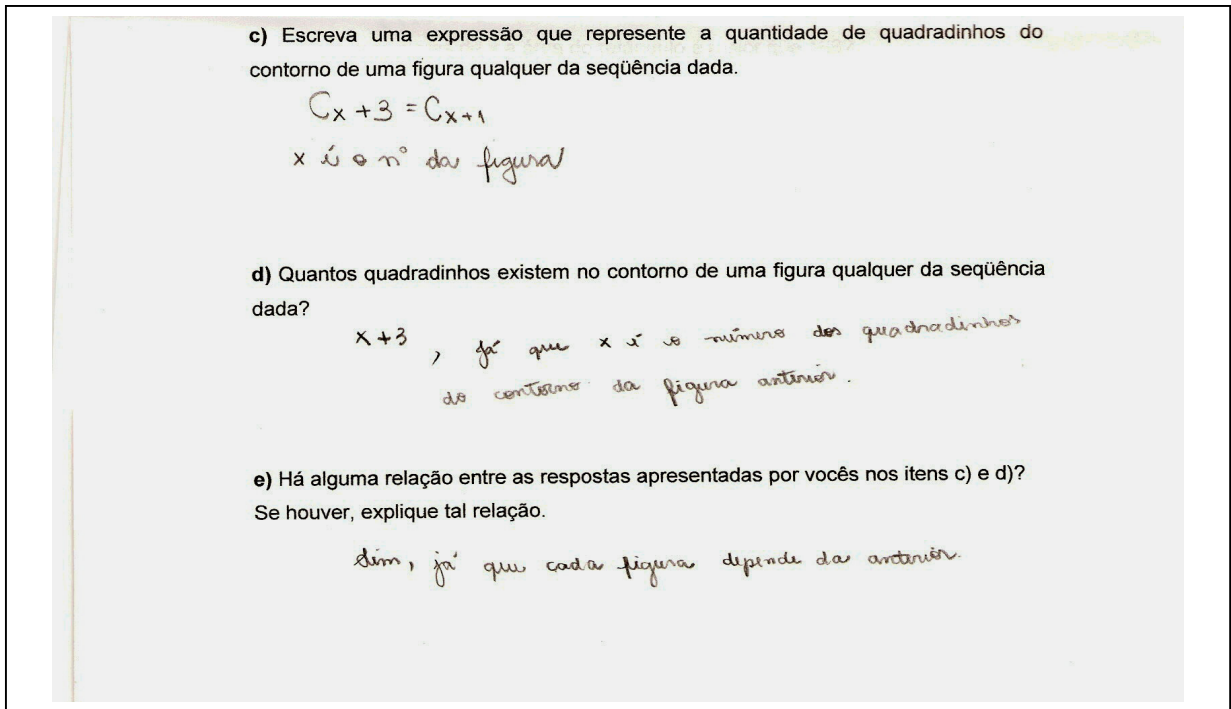
D5-1: “Não, porque a primeira já tem três quadradinhos no seu lado.”

D5-2: “Não dá, essa fórmula não funciona, está errada!”

Analisando a resposta dada em d), notamos que, novamente, os alunos não apresentam uma generalização para representar o padrão presente na seqüência. Em entrevista, eles notaram que suas fórmulas não eram eficientes, mas admitiram como resposta para o item d) uma sentença genérica, o que os estudantes, das duplas anteriormente citadas, não fizeram. Disseram, ainda, que os itens c) e d) solicitavam a mesma coisa, e que poderiam trocar as respostas dadas em cada um deles, pois a intenção era a mesma.

Observamos, assim, que apesar da dificuldade na generalização, os alunos reconheceram, na seqüência, um padrão (**G1**), utilizaram variáveis como números genéricos (**G2**) e, afirmações gerais (**G5**) para expressar suas respostas.

A seguir, apresentamos o protocolo de D6.



Quadro 20. Protocolo da dupla D6 – Questão 5 – itens c), d) e e).

Em entrevista, solicitamos que os alunos explicassem o significado da expressão " $C_x + 3 = C_{x+1}$ ".

PP: "O que representa o C nessa sentença?"

D6: "É o contorno da figura."

PP: "Então C_1 é o contorno da figura 1, C_2 o da figura 2, e assim por diante?"

D6: "Sim."

PP: "Usando essa fórmula como poderíamos calcular a quantidade de quadradinhos da figura '10'?"

D6: "Você precisaria descobrir o contorno da figura nove."

PP: "Haveria outro jeito de fazer esse cálculo?"

D6: "A gente também pensou em outra forma de calcular, usando ' $x+3$ '."

PP: "Mas esse 'x' da expressão que vocês apresentaram em d) não tem o mesmo significado do 'x' utilizado em c), certo?"

D6: "Sim, no item c) representa o número da figura e no d) o número de quadradinhos do contorno da figura anterior."

PP: "Vocês disseram que existe relação entre as respostas dos itens c) e d), tentem explicar, então, utilizando as expressões que vocês formularam, como elas se relacionam."

D6: “É que aqui a gente fez errado, na verdade, deveria ter usado um y para mostrar uma outra coisa. O y seria o ‘ $x + 3$ ’ e aqui a gente chamou de ‘ C_x ’, que seria o número de quadradinhos do contorno.”

No diálogo o “aqui” utilizado pela dupla se refere a resposta dada no item c).

Observamos que os alunos pensaram numa lei de recorrência para calcular a quantidade de quadradinhos de uma figura qualquer e tentaram relacionar algebricamente, utilizando uma outra variável que nomearam no momento da entrevista por y , a sentença dada no item c) com a expressão do item d). Porém, os alunos perceberam quando insistimos, novamente, no cálculo do número de quadradinhos do contorno da décima figura, que a sentença formulada não era eficiente, pois seria preciso conhecer o número de quadradinhos da nona, da oitava, e assim por diante, até a primeira.

Os estudantes não conseguiram encontrar uma relação entre a posição da figura na seqüência e a quantidade de quadradinhos do seu contorno, pois sua atenção voltou-se ao número de quadradinhos do contorno de cada figura, percebendo, assim, que dada a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer somando-se três unidades encontraria-se o número de quadradinhos do contorno da próxima figura.

Assim como a dupla D5, os integrantes de D6 tiveram dificuldades na generalização. Reconheceram um padrão na seqüência (**G1**), utilizaram variáveis como números genéricos (**G2**) e expressaram suas respostas, por meio de afirmações genéricas (**G5**), porém não encontraram uma relação entre a posição de cada figura na seqüência e a quantidade de quadradinhos de seu contorno.

Acreditamos que, em parte, essa dificuldade está relacionada ao processo de ensino e aprendizagem vivenciado por esses alunos no Ensino Médio. Observamos que, analisando o material didático utilizado por eles nas aulas de álgebra, e mesmo nas de geometria, não encontramos questões envolvendo generalização de padrões. Assim, é natural a dificuldade demonstrada pelos estudantes. Provavelmente, eles teriam resolvido, com êxito, a questão 5 se, em suas aulas, trabalhassem com problemas e questões que explorassem a generalização de padrões, pois, apesar das respostas inadequadas, demonstraram ter a noção de variável como número genérico o que, sem dúvida, é necessário para compreender os processos de generalização.

O trio T7, assim como a dupla D3, relacionou o número de quadradinhos do contorno das figuras dadas na seqüência com os termos de uma progressão aritmética de razão 3 e primeiro termo igual a 7. Para o item c), responderam:

$$“A_n = 7 + (n-1).3”$$

Observamos que, durante a resolução dessa questão, os alunos tentaram generalizar o padrão utilizando as áreas dos quadrados e dos retângulos destacados nas figuras, porém não conseguiram encontrar uma relação para expressar a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer. Percebemos, pelos diálogos que os componentes do T7 decidiram utilizar a seqüência numérica “(7, 10, 13...)” para a partir dela expressar uma sentença que simbolizasse o padrão reconhecido. Notamos, durante a entrevista, que os estudantes não ficaram satisfeitos com a resposta formulada, pois queriam descobrir uma forma diferente de simbolizar o padrão, sem utilizar o termo geral da progressão aritmética. Tal insatisfação pode ser percebida na tentativa de apresentar, no item d), uma resposta diferente daquela dada no item c), apesar de os alunos terem consciência de que ambas as questões solicitavam o mesmo. No item d), responderam:

“ $A_L = 7 + (L-1).3$ Para uma figura L qualquer, sendo A_L o n^o de quadrados do contorno.”

Questionamos:

PP: “Por que aqui vocês utilizaram L, não poderia ser exatamente a resposta dada no item anterior? Qual é a relação entre essas duas respostas?”

T7: “A relação é de igualdade. Na verdade, poderia ser qualquer letra, a gente só quis mudar um pouco a resposta, mas é mesma coisa.”

No item e), responderam:

“Sim, obtém-se o valor em d) utilizando a equação formulada em c).”

Pelo diálogo acima, e pelas respostas dadas, notamos que os alunos interpretaram os itens c) e d) da mesma forma demonstrando, assim, que além de reconhecerem o padrão presente na seqüência (**G1**), utilizaram as variáveis “n” e “L” como números genéricos (**G2**), deduziram uma regra (**G3**), generalizando, assim, o padrão observado e o simbolizaram através da sentença “ $A_n = 7 + (n-1).3$ ” (**G5**).

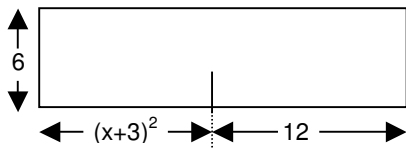
De forma geral, a dupla D3 e o trio T7 foram os únicos que mobilizaram as habilidades necessárias à resolução da questão 5. Os demais alunos apresentaram dificuldades de compreensão quanto a variável como número genérico e, apesar de reconhecerem, não conseguiram generalizar o padrão presente na seqüência.

Acreditamos que essa dificuldade esteja relacionada, em parte, com a vivência desses alunos nas aulas de Matemática do Ensino Médio, já que o material didático utilizado por eles não apresenta problemas ou questões envolvendo a exploração da observação e generalização de padrões, não havendo, assim, estímulos à compreensão da álgebra como generalizadora da aritmética e ao uso da variável como número genérico.

4. 6 QUESTÃO 6

Transcrevemos, abaixo, a questão 6.

Questão 6: Observe o retângulo abaixo com as medidas indicadas para os seus lados e responda às questões:



- Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área desse retângulo?
- Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?
- Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?
- Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?
- Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?
- E se x diminuir, o que acontece com a área do retângulo?
- De acordo com o que vocês responderam nos itens anteriores, o que vocês pensam sobre o papel do x nesta situação?

Nessa questão, o objetivo era verificar a interpretação, simbolização e manipulação dos alunos com relação à variável x , e sua habilidade em mobilizar e integrar os três usos da variável apresentados no modelo 3UV.

No item a), as duplas D4, D5 e T7, mobilizaram a habilidade **F6** (simbolizar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema) e responderam:

$$“A = [(x+3)^2 + 12].6”$$

As duplas D3 e D1, além de **F6**, mobilizaram a habilidade de manipulação **G4**. Aplicando a propriedade distributiva e realizando os cálculos possíveis, os alunos escreveram:

$$A_{\square} = 6 \cdot [(x+3)^2 + 12]$$

$$A_{\square} = 6 \cdot [x^2 + 6x + 9 + 12]$$

$$A_{\square} = 6 \cdot [x^2 + 6x + 21]$$

$$A_{\square} = 6x^2 + 36x + 126$$

A dupla D6, escreveu:

$$"[(x+3)^2 + 12] \cdot 6"$$

Notamos, assim, que esses alunos mobilizaram a habilidade **G5**, ou seja, simbolizaram a área do retângulo por meio de uma expressão genérica.

Já a dupla D2 respondeu:

$$"B \cdot h \quad (x+3)^2 \cdot 12 \cdot 6 ="$$

Observamos que, durante a resolução desse item, um dos integrantes da dupla, após ter lido o enunciado, disse:

D2-1: "A área do retângulo é base vezes altura, então é '(x+3)²' mais 12 vezes 6."

Enquanto um aluno dizia a resposta, o outro escrevia; porém, eles só perceberam o erro cometido no momento em que estavam sendo entrevistados.

Quanto ao sinal de igual apresentado na resposta, um dos alunos disse:

D1-1: "Achei que deveria fazer algum cálculo, mas depois vimos que era só para representar a área."

Percebemos que as falas dos estudantes, na ocasião em que respondiam a questão 6, demonstravam falta de paciência e um certo cansaço em responder o questionário. Acreditamos, assim, que o desempenho dessa dupla na última questão foi influenciado pela falta de disposição de seus integrantes em respondê-la.

Assim, com exceção da dupla D2, os alunos mobilizaram a habilidade de simbolização (**G5** ou **F6**) necessária para responder o item a), como previmos na análise preliminar.

Dividimos a análise dos demais itens da questão 6 em dois blocos. Um deles formado pelos itens b), c) e d), devido ao relacionamento existente entre suas

respostas, e o outro referente aos itens e), f) e g) por envolverem, essencialmente, as habilidades de interpretação **F1** e **F4**.

Começaremos analisando as respostas dadas, nos três primeiros itens citados, pela dupla D1, cujo protocolo encontra-se a seguir:

b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$$A_{\square} = 6x^2 + 36x + 126$$

$$288 = 6x^2 + 36x + 126$$

$$6x^2 + 36x + 126 - 288 = 0$$

$$6x^2 + 36x - 162 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-162) = 1296 + 3888 = 5184$$

$$\sqrt{\Delta} = 72$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-36 - 72}{12} = -9$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-36 + 72}{12} = 3$$

$$-9 \leq x \leq 3$$

c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?

$$A_{\square} = 6x^2 + 36x + 126$$

$$168 = 6x^2 + 36x + 126$$

$$6x^2 + 36x + 126 - 168 = 0$$

$$6x^2 + 36x - 42 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-42) = 1296 + 1008 = 2304$$

$$\sqrt{\Delta} = 48$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-36 - 48}{12} = -7$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-36 + 48}{12} = 1$$

$$-7 \leq x \leq 1$$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

$$-9 \leq x \leq 3$$

Quadro 21. Protocolo da dupla D1 – Questão 6 – itens b), c) e d).

Observamos que os alunos mobilizaram a habilidade de simbolização **I5** para formular as equações “ $288 = 6x^2 + 36x + 126$ ” e “ $168 = 6x^2 + 36x + 126$ ” e a habilidade de manipulação **I4**, determinando, assim, as raízes dessas equações. Porém, não encontraram o intervalo correto para que a área do retângulo variasse entre 168 e 288.

A partir da entrevista com os integrantes dessa dupla, notamos que eles não pensaram no intervalo de variação de x para que a área do retângulo fosse menor que 288 e maior que 168, simplesmente escreveram os intervalos “ $-9 \leq x \leq 3$ ” e “ $-7 \leq x \leq 1$ ” considerando as raízes encontradas nas equações.

Assim, notamos que os alunos não mobilizaram as habilidades **F4** (reconhecer a variação conjunta das variáveis) e **F5** (determinar o intervalo de variação de uma variável, dado o intervalo de variação da outra), demonstrando, a partir da resposta dada no item d), que não identificaram a correspondência (**F1**) entre a variável x e a área do retângulo.

Em entrevista, percebemos que a dupla demonstrou mais atenção aos procedimentos algébricos e aritméticos necessários para resolver as equações do que à correspondência e dependência entre as variáveis sugeridas no problema.

As respostas, a seguir, são da dupla D2 para os itens b), c) e d), respectivamente:

“< 3”

“> 1”

“> 1 e < 3”

Novamente, podemos observar certa dificuldade desses alunos com a noção de variável. Sem utilizar a variável x em suas respostas, apresentaram o que seriam, para eles, intervalos possíveis para x , de acordo com as variações da área do retângulo dadas nesses itens.

Para determinar tais “intervalos”, os alunos foram atribuindo valores para x e fazendo os cálculos necessários para que a área do retângulo fosse, primeiramente, menor que 288, depois maior que 168, e, por fim, fizeram a intersecção das respostas encontradas nos itens b) e c) para responder o item d). Observamos que os valores atribuídos a x foram todos inteiros e positivos.

Apesar da falta de simbolização e manipulação, relacionadas à variável x e a área do retângulo, necessárias a resolução desses itens, os alunos demonstraram uma percepção do relacionamento e da correspondência entre essas variáveis, o que nos permitiu concluir que mobilizaram, de alguma forma, a habilidade **F1**. Porém, não reconheceram a variação conjunta (**F4**) de x e da área do retângulo, relacionando alguns de seus valores de forma pontual. Assim, não identificaram os intervalos de x para que $168 < A(x) < 288$ (**F5**).

A seguir, apresentamos, o protocolo de D3.

Handwritten student work for a math problem involving quadratic inequalities and number lines. The work is organized into three parts: b), c), and d).

b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$6x^2 + 36x + 126 < 288$
 $6x^2 + 36x + 126 - 288 < 0$
 $6x^2 + 36x - 162 < 0$
 $6x^2 + 36x - 162 = 0$

$S = \frac{36}{6} = 6$
 $P = \frac{-162}{6} = -27$

$x_1 = 9$
 $x_2 = -3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?

$6x^2 + 36x + 126 > 168$
 $6x^2 + 36x + 126 - 168 > 0$
 $6x^2 + 36x - 42 > 0$
 $6x^2 + 36x - 42 = 0$

$S = \frac{36}{6} = 6$
 $P = \frac{-42}{6} = -7$

$x_1 = 7$
 $x_2 = -1$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

$x < -3$
 $x > 7$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ e } x > 7\}$

The work includes two number lines. The first number line shows points at -3 and 7, with the region between them shaded. The second number line shows points at -3 and 7, with the region between them shaded. There are also some additional markings and calculations, such as $+28$ and $+6$.

Quadro 22. Protocolo da dupla D3 – Questão 6 – itens b), c) e d).

Os alunos mobilizaram as habilidades de simbolização (**G5** e **I5**) e manipulação (**G4** e **I4**) necessárias à resolução dos itens em questão, porém cometeram erros nos cálculos das somas das raízes das equações formuladas. Tal fato influenciou na determinação dos possíveis intervalos de variação de x para que a área do retângulo variasse nos intervalos solicitados em b) e c).

Apesar dos erros cometidos, notamos que os alunos reconhecerem a correspondência entre as variáveis sugeridas no problema (**F1**), e demonstraram, em suas falas durante a entrevista, e no esboço da parábola apresentada no item b), que procuraram analisar a variação conjunta (**F4**) de x e da área do retângulo, porém os erros cometidos nos cálculos influenciaram na determinação dos possíveis intervalos de variação de x .

Após apontarmos os erros cometidos pela dupla, questionamentos, em entrevista:

PP: “Considerando as raízes que vocês encontraram no item b), por que vocês consideraram ‘ $x < -3$ ’ como resposta para que a área do retângulo fosse menor que 288?”

D3: “Na verdade, seria no meio, entre ‘-3’ e ‘9’, mas como não estava dando certo, e nós não conseguimos perceber onde estava o erro, nós fomos jogando valores para x menores do que ‘-3’ e percebemos que para esses a área seria menor que 288.”

Observamos que, considerando o intervalo correto, (“ $-9 < x < 3$ ”), os alunos encontraram, de fato, alguns possíveis valores para x , já que há intersecção entre esse intervalo e aquele considerado pela dupla.

Questionamos, ainda:

PP: “E aqui, no item c), qual deveria ser o intervalo a ser considerado? Vocês pensaram nos sinais da função como fizeram no item b)?”

D3: “Sim, nós não marcamos, mas a gente pensou da mesma forma, e percebemos que tinha algo errado de novo! O intervalo correto deveria ser onde é positivo o sinal da função, ou seja, para fora.”

Pontuamos que o “para fora” utilizado pela dupla referia-se aos intervalos “ $x < -7$ ” e “ $x > 1$ ”, já considerando as raízes corretas.

Um dos integrantes de D3, declarou durante a entrevista, que no item d) tiveram uma confirmação de que algo estava errado nas respostas dadas nos itens anteriores, porque não havia intersecção entre os intervalos determinados em b) e

c). Disse, ainda, que o cansaço fez com que desistissem de voltar nesses itens para, novamente, tentar descobrir onde estava o erro.

Concluimos, assim, que se os integrantes de D3 tivessem determinado, de forma correta, as raízes das equações formuladas teriam encontrado os possíveis intervalos de x para que a área do retângulo variasse entre 168 e 288, mobilizando, dessa forma, **F5**.

Apresentamos, a seguir, o protocolo da dupla D4.

b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$$\Delta = 36 - 4 \cdot (-36) \quad [(x+3)^2 + 12] \cdot 6 = 288 \quad -9,5 < x < 3,5$$

$$\Delta = 36 + 144 \quad x = \frac{-6 \pm 13}{2} \quad x^2 + 6x + 9 + 12 = 48$$

$$\Delta = 180 \quad x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$x' = \frac{-6 + 13}{2} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad x'' = \frac{-6 - 13}{2} = \frac{-19}{2} = -9,5$$

c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?

$$\Delta = 36 + 28 \quad [(x+3)^2 + 12] \cdot 6 = 168$$

$$\Delta = 64 \quad x^2 + 6x + 9 + 12 = 28$$

$$x = \frac{-6 \pm 8}{2} \quad x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x' = \frac{-6 + 8}{2} = 1 \quad x'' = \frac{-6 - 8}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

Diagrama de eixo numérico:

0

-9,5 -10 1 2 3,5

$-7 < x < 3,5$

e) Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?

Quadro 23. Protocolo da dupla D4 – Questão 6 – itens b), c) e d).

Observamos que os alunos formularam as equações “[$(x+3)^2 + 12$].6 = 288” e “[$(x+3)^2 + 12$].6 = 168”, mobilizando, assim, **I5**, mas erraram nos cálculos quando manipulavam (**I4**) a primeira sentença, encontrando como raízes “3, 5” e “-9,5”. Contudo, acreditamos que os alunos mobilizaram as habilidades **F4** e **F5**, pois relacionaram a variação da área do retângulo, no intervalo solicitado na questão, com a variação de x .

Nossa crença está embasada nos dados observados no protocolo dessa dupla e nos depoimentos que obtivemos na entrevista com os alunos. Questionamos como haviam chegado aos intervalos “ $-9,5 < x < 3,5$ ” e “ $x > 1$ ” e os estudantes disseram que após determinarem as raízes das equações atribuíram alguns valores para x , “próximos” daqueles obtidos para as raízes, e fizeram os cálculos para verificar quais deles satisfaziam as condições dadas para a variação da área do retângulo. Porém, os alunos não perceberam que, também, para $x < -7$ a área do

retângulo assumiria valores menores que 168. Notamos, ainda, que, se a dupla tivesse determinado, nos itens b) e c), os devidos intervalos de x teria concluído o item d) corretamente, pois a intersecção entre os intervalos encontrados não demonstrou ser um problema para os alunos.

A seguir, expomos o protocolo de D5.

The image shows handwritten student work for three parts of a problem (b, c, and d). Part b asks for values of x where the area is less than 288. The student writes the inequality $(x+3)^2 + 12 < 288$, simplifies it to $x^2 + 6x - 27 < 0$, and finds roots $x_1 = -9$ and $x_2 = 3$. Part c asks for values where the area is greater than 168. The student writes $6x^2 + 36x + 126 - 168 < 0$, simplifies to $x^2 + 6x - 7 < 0$, and finds roots $x_1 = -7$ and $x_2 = 1$. Part d asks for values where the area is between 168 and 288. The student uses a number line to find the intersection of the intervals from b and c, resulting in $x < -9$. The work includes several errors in inequality signs and interval notation.

b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$$6. [(x+3)^2 + 12] < 288 \quad x^2 + 6x - 27 < 0$$

$$6. [x^2 + 6x + 9 + 12] < 288 \quad S = -6 \quad x_1 = -9$$

$$6x^2 + 36x + 126 - 288 < 0 \quad P = -27 \quad x_2 = 3$$

$$V = \{3 > x < -9\}$$

c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?

$$6x^2 + 36x + 126 - 168 < 0$$

$$x^2 + 6x - 7 < 0 \quad x_1 = -7$$

$$S = -6 \quad P = -7 \quad x_2 = 1$$

$$V = \{1 > x < -7\}$$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

Number line diagram showing intervals: $x < -9$ (I), $3 > x < -9$ (II), $1 > x < -7$ (III). The intersection is $x < -9$.

$$V = \{x < -9\}$$

Quadro 24. Protocolo da dupla D5 – Questão 6 – itens b), c) e d)

Quanto as respostas dessa dupla, observamos que os alunos apresentaram dificuldades quanto à representação de intervalos, utilizando de forma incorreta os sinais $<$ e $>$. Notamos a mobilização das habilidades de simbolização; **G5** (simbolizar afirmações genéricas, regras ou métodos); e de manipulação; **G4** (manipular - simplificar, desenvolver - a variável simbólica) e **I4** (determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas); porém, em entrevista com os alunos, percebemos que não relacionaram corretamente a variação da área do retângulo com a variação de x , pois disseram que o intervalo " $3 > x < -9$ " representava que x poderia assumir valores menores que -9 e maiores que 3 , e que " $1 > x < -7$ " significava que a variável admitiria valores menores que -7 e maiores que 1 .

Com relação à intersecção desses intervalos considerados pelos alunos, eles explicaram que substituíram valores para x maiores do que 3 , e notaram que a área do retângulo ficaria maior do que 288 , logo desprezaram esse intervalo no momento

de fazer a intersecção. Assim, admitindo, de forma equivocada, que x poderia assumir apenas valores menores do que -9 , para que a área fosse menor que 288, os alunos determinaram a intersecção desse intervalo com aquele considerado para que a área fosse maior que 168, obtendo, assim, " $x \leq -9$ ". Além disso, no momento da entrevista, observaram que não deveriam ter colocado o sinal " \leq ", mas sim apenas " $x < -9$ ".

Portanto, apesar de demonstrarem que notaram a dependência entre as variáveis sugeridas no problema, os estudantes não mobilizaram as habilidades **F4** e **F5**, ou seja, não identificaram a variação conjunta dessas variáveis.

Segue o protocolo da dupla D6.

The image shows handwritten mathematical work for three parts of a problem:

b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$$[(x+3)^2 + 12] \cdot 6 < 288$$

$$[(x+3)^2 + 12] < \frac{288}{6}$$

$$[(x+3)^2 + 12] < 48$$

$$[(x+3)^2] < 48 - 12$$

$$(x+3)^2 < 36$$

$$x+3 < 6$$

$$x < 3$$
Como o número +

c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?

$$[(x+3)^2 + 12] \cdot 6 > 168$$

$$(x+3)^2 > 16$$

$$x > 1$$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

$$3 > x > 1$$

Quadro 25. Protocolo da dupla D6 – Questão 6 – itens b), c) e d).

Analisando as respostas da dupla, observamos que a habilidade de simbolização **G5** foi mobilizada no momento em que os alunos escreveram as desigualdades " $[(x+3)^2 + 12] \cdot 6 < 288$ " e " $[(x+3)^2 + 12] \cdot 6 > 168$ ", porém cometeram erros na passagem da inequação " $(x+3)^2 < 36$ " para " $x+3 < 6$ " e de " $(x+3)^2 > 16$ " para " $x > 1$ ", admitindo apenas as raízes quadradas positivas de 36 e de 16 como limites para os intervalos de x a serem determinados.

Além disso, notamos, assim como no protocolo da dupla D5, problemas na representação de intervalos. Os integrantes de D6, bem como os da dupla anterior, escreveram os extremos do intervalo, dado como resposta em d), em ordem contrária à da reta real: " $3 > x > 1$ ". Em entrevista, explicaram que tal intervalo


representava que a variável x poderia assumir valores maiores do que 1 e menores do que 3.

Acreditamos que a preocupação dos alunos em empregar os procedimentos aritméticos e algébricos necessários para resolver as inequações distanciou-os da percepção da relação de correspondência e dependência entre as variáveis sugeridas no problema. Dessa forma, demonstraram uma valorização dos processos de manipulação (**G4**) em detrimento da análise e interpretação necessárias para responder as questões. Os estudantes deixaram, portanto, de mobilizar as habilidades **F4** e **F5**, não identificando a variação conjunta de x e da área do retângulo.

Os únicos a resolverem, corretamente, os itens b), c) e d) foram os integrantes do trio T7. Segue, abaixo, o protocolo com suas respostas.

a) Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área desse retângulo?

$A = [(x+3)^2 + 12] \cdot 6$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < 3\}$

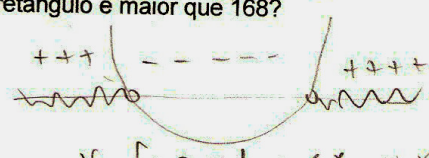
b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?

$288 > [(x+3)^2 + 12] \cdot 6$
 $(x^2 + 6x + 9 + 12) \cdot 6 = 288$
 $(x^2 + 6x + 21) \cdot 6 = 288$

$6x^2 + 36x + 126 = 288$
 $6x^2 + 36x - 162 = 0 \quad (\div 6)$
 $x^2 + 6x - 27 = 0$
 $S = -6 \quad x' = -9$
 $P = -27 \quad x'' = 3$

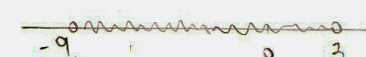
c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?


$6x^2 + 36x + 126 > 168$
 $6x^2 + 36x - 42 > 0$
 $x^2 + 6x - 7 > 0$
 $S = -6 \quad x' = -7$
 $S = -7 \quad x'' = 1$




$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \text{ ou } x > 1\}$

d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?

Ⓘ  $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 < x < -7 \text{ ou } 1 < x < 3\}$

Ⓢ 

Ⓢ ∩ Ⓢ 

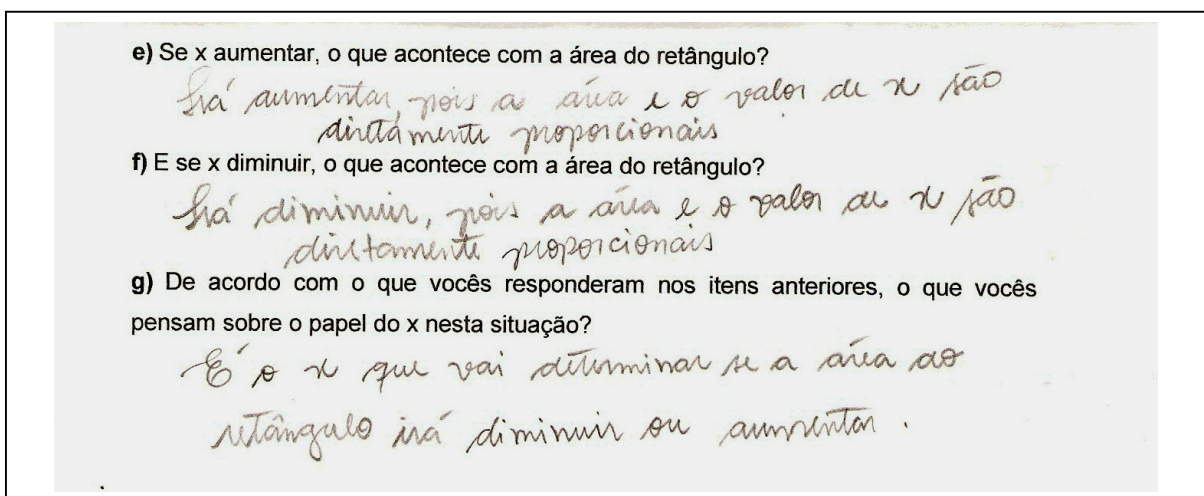
Quadro 26. Protocolo do trio T7 – Questão 6 – itens a), b), c) e d).

Analisando as respostas desses alunos, podemos observar que eles mobilizaram as habilidades de simbolização **G5** e **I5**, respectivamente, ao formularem as inequações e equações necessárias ao desenvolvimento das

questões. Determinaram as raízes das equações, mobilizando, assim, as habilidades de manipulação **G4** (manipular - simplificar, desenvolver - a variável simbólica) e **I4** (determinar o termo desconhecido que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas requeridas). Reconheceram a correspondência entre a variável x e a área do retângulo, identificando a variação conjunta dessas variáveis (**F4**) e estabeleceram os intervalos de x para que a área do retângulo estivesse compreendida entre 168 e 288, mobilizando, dessa forma, a habilidade de manipulação **F5**.

De forma geral, os alunos apresentaram dificuldades para reconhecer a variação conjunta (**F4**) das variáveis sugeridas nos itens b), c) e d) da questão e determinar o intervalo de variação de uma variável dado o da outra (**F5**). Tal fato, como já citamos no capítulo II, demonstra a dificuldade dos estudantes na resolução e interpretação da solução de uma inequação do segundo grau. Além disso, assim como nos resultados da pesquisa de Blanco e Garrote (2007), identificamos que existem problemas na compreensão dos alunos sobre intervalos reais. Tais observações podem servir como alerta para que as habilidades **F4** e **F5** sejam mais exploradas nas aulas de matemática em que o conceito de variável esteja presente, o que inclui, sem dúvida, o ensino e aprendizagem das inequações.

Com os itens e), f) e g) tínhamos o objetivo de verificar a interpretação dos alunos quanto a variação conjunta de x e da área do retângulo. Seguem os dados coletados no protocolo de D1:

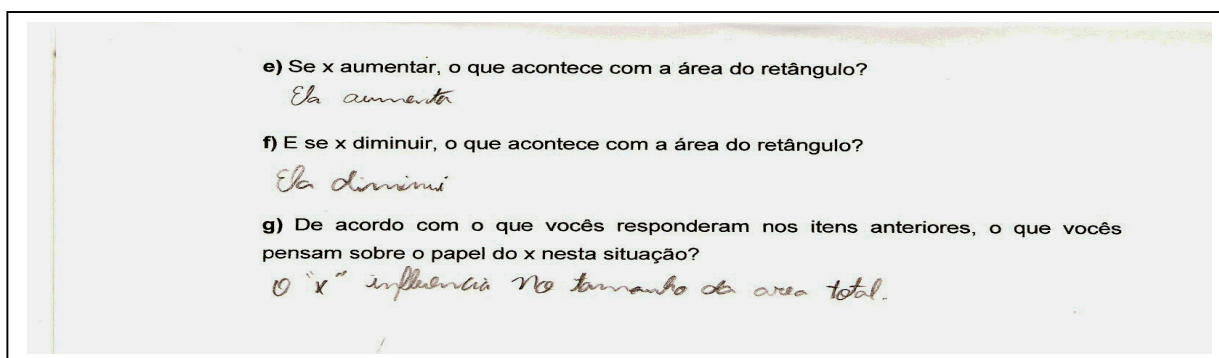


Quadro 27. Protocolo da dupla D1 – Questão 6 – itens e), f) e g).

Como já havíamos pontuado, essa dupla não mobilizou as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, no momento de resolver os itens b), c) e d), o que fez com

que concluísse, inadequadamente, que o intervalo de variação de x (**F5**), para que a área do retângulo variasse entre 168 e 288, deveria ser “ $-9 \leq x \leq 3$ ”. Diante dessa falta de percepção da correspondência e variação conjunta das variáveis envolvidas no problema, os alunos responderam os itens e), f) e g) sem analisar, devidamente, a expressão $(x+3)^2$ e sua influência na composição da área do retângulo, o que pode ser evidenciado em suas respostas quando admitem que “a área e o valor de x são diretamente proporcionais”.

Percebemos, a partir dos dados coletados no protocolo de D2, uma conclusão semelhante a dos alunos de D1.



Quadro 28. Protocolo da dupla D2 – Questão 6 – itens e), f) e g).

Apesar de manifestarem, de alguma forma, nas respostas dadas nos itens b), c) e d) a mobilização da habilidade **F1**, os integrantes dessa dupla não mobilizaram **F4**, habilidade necessária, juntamente com **F1**, para que interpretassem de forma correta a variação conjunta das variáveis sugeridas no problema. Assim como a dupla D1, os integrantes de D2 parece não terem dado a devida atenção para o termo $(x+3)^2$, deixando, dessa forma, de observar que o menor valor possível para a área do retângulo seria dado quando x fosse igual a -3 , e que para valores menores, e maiores que -3 , a área aumentaria.

Já a dupla D3, como observamos em seu protocolo, demonstrou a percepção da variação conjunta de x e da área do retângulo (**F4**).

e) Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?
A área aumenta também.

f) E se x diminuir, o que acontece com a área do retângulo?
Enquanto x estiver diminuindo e for maior que -3 a área diminui.
Quando x for menor que -3 a área aumentará.

g) De acordo com o que vocês responderam nos itens anteriores, o que vocês pensam sobre o papel do x nesta situação?
A variação da área é determinada pela variação de x .

Quadro 29. Protocolo da dupla D3 – Questão 6 – itens e), f) e g).

Certos de que havia algo errado nas respostas dos itens b), c) e d), como demonstraram em entrevista, os alunos optaram por analisar a expressão $(x+3)^2$ para identificar sua influência na composição da área do retângulo. Questionamos:

PP: “Por que o ‘-3’ foi utilizado como referência na análise que vocês fizeram sobre a variação de x e da área do retângulo?”

D3: “Porque para x igual a ‘-3’ aqui vai dar zero, então aí a área vai ser ‘6’ vezes ‘12’. Agora se x for diminuindo, por exemplo, ‘-4’, ‘-5’, como aqui está ao quadrado o número vai ficar maior, então a área aumenta. Porque quando for ‘-5’ vai dar ‘-2’, que ao quadrado dá ‘4’. Se for ‘-6’ vai dar ‘-3’ que ao quadrado dá ‘9’, então vai aumentando.”

Mesmo tendo citado, no momento de realizar os cálculos, apenas números inteiros, os integrantes de D3 admitiram x como sendo uma variável real, o que pôde ser notado em seu protocolo e em suas respostas aos nossos questionamentos durante a entrevista.

Embora tivesse cometido erros nos cálculos, nos itens b) e c), essa dupla reconheceu a correspondência entre as variáveis envolvidas no problema (**F1**) e a sua variação conjunta (**F4**) manifestando, assim, as habilidades de interpretação necessárias à resolução dos itens e), f) e g).

Segue, abaixo, o protocolo de D4:

e) Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?

Se x aumentar a área também aumentará.

* P/ $x=0$ $A=(9+12) \cdot 6 = 21 \cdot 6 = 126$ * P/ $x=1$ $A=(16+12) \cdot 6 = 28 \cdot 6 = 168$

f) E se x diminuir, o que acontece com a área do retângulo?

Se x diminuir a área também diminuirá.

g) De acordo com o que vocês responderam nos itens anteriores, o que vocês pensam sobre o papel do x nesta situação?

O valor de x determina o tamanho da base do retângulo e consequentemente o valor da área.

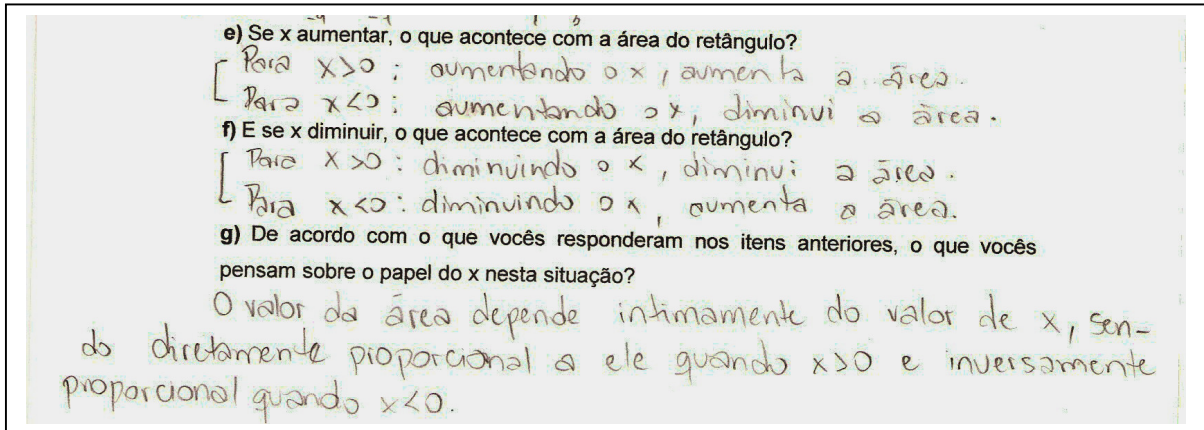
Quadro 30. Protocolo da dupla D4 – Questão 6 – itens e), f) e g).

Observamos, a partir dos dados apresentados acima, que os alunos dessa dupla, assim como os de D1 e D2, não notaram que a área do retângulo assumiria seu menor valor quando x fosse igual a -3 . Notamos que os estudantes não analisaram a influência da variação de x sobre a variação da área do retângulo a partir da expressão $(x+3)^2$, mas sim, utilizaram a sentença “ $A = [(x+3)^2 + 12] \cdot 6$ ” formulada por eles, no item a). Dessa forma, não houve, nos itens e), f) e g), a mobilização das habilidades de interpretação **F1** e **F4** pelos componentes de D4.

Nos protocolos de D5 e D6, também, encontramos as mesmas conclusões apresentadas pelas duplas já citadas, excetuando-se aquelas dadas por D3. Portanto, decidimos destacar, apenas, a resposta dos integrantes de D6, para o item g), em que encontramos: “É uma grandeza responsável pela variação da área e é diretamente proporcional à área.”

Pontuamos que a dupla D1 também explicitou em suas respostas que a variável x e a área do retângulo eram grandezas diretamente proporcionais, o que demonstra, além da falta de percepção desses alunos da variação conjunta das variáveis dadas no problema (**F4**), que não houve uma análise da variação de x e sua influência na variação do termo $(x+3)^2$.

O trio T7 apresentou uma análise cuidadosa em suas respostas para os itens e), f) e g), como se pode verificar em seu protocolo exposto abaixo.



Quadro 31. Protocolo do trio T7 – Questão 6 – itens e), f) e g).

Notamos que os alunos interpretaram, de forma incorreta, a variação conjunta de x e da área do retângulo, pois não observaram que o menor valor da área seria obtido para $x = -3$, e não para $x = 0$. No entanto, observamos que sua interpretação foi mais cuidadosa do que aquela apresentada pelas outras duplas que não concluíram corretamente esses últimos itens da questão 6. Em entrevista, questionamos as respostas dadas pelo trio:

PP: “No item e), como vocês chegaram a essa conclusão?”

T7: “Para x maior do que zero, por exemplo, ‘1’, a área vai dar um valor. Quando eu colocar 2 já vai dar um valor maior. Então, quando x aumenta, a área também aumenta. Agora, para x menor do que zero, por exemplo, ‘-5’ vai dar um valor, quando você colocar ‘-7’ vai dar maior, porque está ao quadrado. Então, quando x diminui, aumenta a área”.

Notamos pelos valores atribuídos à variável x , que tais estudantes, no momento da análise da variação conjunta de x e da área do retângulo, não identificaram que o menor valor possível para a área do retângulo seria obtido quando x fosse igual a -3 . Porém, acreditamos que os alunos mobilizaram as habilidades de interpretação **F1** e **F4**, pois reconheceram que à medida que x aumenta, a área aumenta, e quando x diminui, a área também aumenta, só não precisaram os intervalos corretos de x para que ocorresse essa variação conjunta.

No geral, analisando as respostas dos estudantes, nos itens e), f) e g) da questão 6, identificamos que a maioria notou a dependência entre as variáveis

sugeridas no problema, porém não identificou a correspondência e a variação conjunta de x e da área do retângulo, deixando, assim, de mobilizar as habilidades de interpretação **F1** e **F4** necessárias à resolução desses itens. Os alunos que demonstraram uma percepção dessa variação foram os integrantes da dupla D3 e os componentes de T7.

Salientamos que duas duplas e o trio T7 explicitaram que, pelo fato de as medidas de x e da área do retângulo estarem relacionadas, tais medidas representavam grandezas direta ou inversamente proporcionais, o que pode ser resultado de “regras” utilizadas no ensino de grandezas proporcionais tais como: “quando o aumento, ou a diminuição, de uma grandeza acarreta no aumento, ou diminuição, da outra, as grandezas são diretamente proporcionais. Quando o aumento (diminuição) de uma grandeza acarreta na diminuição (aumento) da outra, as grandezas são inversamente proporcionais.” Essa simplificação na linguagem natural não explicita a exigência da proporcionalidade.

Pelos resultados obtidos, notamos que nos itens do questionário em que era necessário simbolizar equações, expressões algébricas ou, ainda, uma relação funcional os alunos, no geral, não demonstraram dificuldades, mobilizando, assim, as habilidades de simbolização **I5** (simbolizar o termo desconhecido identificado numa situação específica e usá-lo para representar uma equação), **G5** (simbolizar afirmações genéricas, regras ou métodos) e **F6** (simbolizar um relacionamento funcional baseado na análise dos dados de um problema). Dentre essas, acreditamos que a habilidade **G5** é pouco explorada nas questões e problemas trabalhos em sala de aula, o que pode levar os estudantes a não aceitarem, como afirmações matemáticas válidas, expressões genéricas, a exemplo “ $t+3$ ”, sentindo a necessidade de transformá-la numa equação acrescentando o sinal de igualdade em todas as expressões desse gênero.

Quanto as questões que envolveram a manipulação de equações, desigualdades e expressões em busca da determinação de raízes, ou de intervalos de variação de uma dada variável, notamos que naquelas em que a variável assumia o papel de incógnita os estudantes não apresentaram dificuldades, porém em situações em que a variável assumia o status de número genérico, ou estava presente numa relação funcional, os alunos demonstraram problemas. Podemos verificar tal constatação, com base nos dados coletados nos itens b), c) e d) da questão 6. Das habilidades de manipulação **I4** (determinar o termo desconhecido

que aparece na equação ou nos problemas executando as operações algébricas e/ou aritméticas), **G4** (manipular a variável simbólica), **F2** (determinar os valores da variável dependente dado o valor da independente), **F3** (determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente) e **F5** (determinar o intervalo de variação de uma variável dado o intervalo de variação da outra) que deveriam ser mobilizadas pelos alunos ao responderem o questionário, pontuamos que aquelas relacionadas à variável em relação funcional demonstraram ser as mais problemáticas. Os estudantes têm dificuldade, principalmente, para determinar o intervalo de variação de uma variável dado o intervalo de variação da outra (**F5**).

Além disso, notamos que o domínio de variação admitido e aceito pelos alunos, muitas vezes, é o conjunto dos números inteiros. Apesar de encontrarmos nos dados coletados, principalmente nas entrevistas, que as variáveis apresentadas, por exemplo na questão 2, poderiam ter como domínio de variação o conjunto dos números complexos, notamos que tais números não foram citados nos protocolos dos alunos. O exemplo mais ousado que encontramos como um possível valor para uma das variáveis citadas nessa questão foi " $\sqrt{\pi}$ ", dado pelos integrantes de T7.

Tal fato demonstra que, em sala de aula, a presença dos números inteiros é marcante, o que, sem dúvida, influencia a interpretação dos alunos a respeito dos possíveis domínios de variação das variáveis.

Com relação as habilidades de interpretação **I1** (reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as restrições do problema), **I2** (interpretar o símbolo que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos), **G1** (reconhecer padrões, perceber regras e métodos em seqüências e em famílias de problemas), **G2** (interpretar um símbolo como uma entidade genérica ou indeterminada que pode assumir qualquer valor), **G3** (deduzir regras e métodos gerais em seqüências e famílias de problemas), **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada) e **F4** (reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação), observamos que, dentre essas, **G3** e **F4** foram as menos mobilizadas pelos alunos. Eles demonstraram dificuldades em deduzir regras para simbolizar a generalização de um padrão, quando a variável assumia o status de número genérico, e no reconhecimento da variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação. Além disso, de tais habilidades, identificamos que as únicas que foram mobilizadas

pelos estudantes sem dificuldades foram **I1** e **I2**, o que demonstra que esses identificam com facilidade a variável como incógnita. Tal fato pode ser observado com base nos dados encontrados na questão 3, em que era necessário identificar a presença de algo desconhecido na situação, formular equações e determinar suas raízes. Lembramos que os alunos que encontraram dificuldades nessa questão foram aqueles que não reconheceram a correspondência entre as variáveis presentes na função dada (**F1**), demonstrando, assim, que não mobilizaram a habilidade de interpretação necessária à compreensão das variáveis em relação funcional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo 3UV como ferramenta direcionadora na elaboração de nosso instrumento de investigação, e de análise dos dados coletados a respeito da compreensão dos alunos sobre o conceito de variável, possibilitou o alcance do objetivo de nossa pesquisa.

A partir dos dados coletados com a aplicação do questionário, e com as entrevistas realizadas, pudemos, tendo como base de análise o modelo 3UV, identificar que os usos da variável como número genérico e em relação funcional não são tão bem compreendidos pelos alunos quanto ao uso como incógnita. Tal constatação encontra-se, também, nos resultados da pesquisa de Queiroz (2008) realizada com professores do Ensino Médio sobre a compreensão desses docentes a respeito do conceito de variável. Essa semelhança nos resultados confirma uma de nossas conjecturas de que algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos, no que se refere a sua compreensão sobre esse conceito, estão relacionadas às práticas pedagógicas, o que poderia ser investigado com mais profundidade por futuros pesquisadores.

Além disso, identificamos as habilidades, relativas aos três usos da variável apresentados no modelo 3UV, que deveriam ser melhor exploradas no processo de ensino e aprendizagem para que o conceito de variável pudesse ser compreendido.

Percebemos que, muitas vezes, os alunos interpretam as variáveis como elementos representativos do conjunto dos números inteiros demonstrando uma certa resistência para aceitar números que não tenham essa característica. Suas falas e os dados encontrados em seus protocolos revelam que seus números “preferidos” são os inteiros positivos, apesar de alguns alunos citarem que o domínio das variáveis, apresentadas na questão 2, poderia ser o conjunto dos números reais, ou, ainda, o dos complexos. Mesmo nesses casos, notamos uma grande insegurança dos educandos em citarem e aceitarem esses números. Observamos, ainda, que alguns estudantes, como, por exemplo, os integrantes de D5, rejeitam as frações.

Notamos, também, que a maioria dos alunos demonstrou a necessidade de encontrar um resultado numérico para as operações realizadas com variáveis em

situações em que essas representariam números genéricos, interpretando-as, muitas vezes, como incógnitas. Tal fato pode ser notado nas respostas que encontramos nos itens a) e c) da questão 2 e, também, nos estudos de Trigueros e Ursini (1998, 2001).

A relação de dependência e correspondência entre as variáveis de uma função, dada sua representação algébrica e gráfica, não foi identificada por alguns estudantes, como foi o caso dos integrantes das duplas D1 e D2, o que pode demonstrar que o relacionamento entre variáveis não é devidamente explicitado no estudo de funções.

Com base nos dados encontrados na questão 6, identificamos que, apesar de a maioria dos alunos perceber a dependência entre as variáveis sugeridas nessa questão, muitos não reconheceram a correspondência entre elas e não observaram devidamente sua variação conjunta, o que demonstra a falta de mobilização das habilidades de interpretação **F1** (reconhecer a correspondência entre as variáveis relacionadas independentemente da representação utilizada) e **F4** (reconhecer a variação conjunta das variáveis envolvidas em uma relação). Além dessas habilidades, referentes à compreensão das variáveis em relação funcional, uma outra pouco mobilizada foi a habilidade de manipulação **F5**.

A maioria dos estudantes que participou de nossa investigação demonstrou dificuldades para encontrar, dada uma relação funcional, o intervalo de variação de uma variável quando é conhecido o intervalo de variação da outra (**F5**).

As observações acima, referentes ao emprego de variáveis em relação funcional, podem servir como alerta para que as habilidades anteriormente citadas sejam mais exploradas nas aulas de matemática em que o conceito de variável esteja presente, o que inclui, sem dúvida, o ensino e aprendizagem das funções e inequações.

Observamos que os alunos conseguem simbolizar desigualdades e até manipulá-las, mas têm dificuldades para interpretá-las. A maioria não percebe a relação funcional que está implícita na resolução de uma inequação do segundo grau, e interpretam a variável presente na desigualdade como uma incógnita capaz de assumir um número finito de valores, quando na situação dada deveria representar os elementos de um intervalo real. Tal resultado também foi apontado por Blanco e Garrote (2007) em sua pesquisa desenvolvida com alunos do primeiro ano de educação pré-universitária, na Espanha. Os autores observaram que os

alunos têm problemas para compreender um intervalo real e o conceito de variável, principalmente, nas situações em que essa deveria ser interpretada como um número genérico.

Com relação ao uso da variável como número genérico, a compreensão dos alunos investigados apresentou lacunas. Acreditamos que, no processo de ensino e aprendizagem desses estudantes, as habilidades necessárias a essa compreensão não foram tão bem exploradas quanto àquelas relativas ao uso da variável como incógnita, o qual não aparentou ser um problema para os educandos. Notamos que os sujeitos investigados tiveram dificuldades para deduzir uma regra (**G3**) e generalizar o padrão sugerido na questão 5. Além disso, a interpretação da variável como um número genérico (**G2**) cedeu espaço à interpretação da variável como incógnita, quando, em certos casos, como foi os dos itens a) e c) da questão 2, deveriam tais variáveis ser interpretadas como números genéricos.

Porém, tais dificuldades parecem estar relacionadas às práticas de ensino dos professores e ao material didático utilizado durante as aulas de Matemática. Nossa crença está embasada, em parte, na análise que fizéssemos do material utilizado, durante o Ensino Médio, pelos alunos pesquisados. Notamos que nele não há questões ou problemas propostos que envolvam a observação e a generalização de padrões, processos esses importantes para a compreensão do conceito de variável. Logo, é natural que os estudantes tenham certa deficiência no entendimento da variável como número genérico, já que algumas das habilidades necessárias à sua compreensão não foram exploradas em sua aprendizagem.

Contudo, esperamos, ainda, alertar os professores sobre a importância de trabalhar com o conjunto dos números reais de forma mais significativa, apresentando, quando possível, suas características e problemas envolvendo a aplicação de números não tão “bem comportados” como os inteiros.

Para finalizar, pontuamos que as considerações aqui apresentadas foram elaboradas com base nos dados encontrados em nossa investigação com alunos que estavam concluindo o Ensino Médio, no entanto, acreditamos que muitas delas podem ser aplicadas ao ensino e a aprendizagem do conceito de variável nas séries finais do Ensino Fundamental, e mesmo no superior, visto que tal conceito tem seu espaço garantido nessas fases da Educação, pois a linguagem algébrica começa a fazer parte do cotidiano escolar, em geral, na sétima série do Fundamental, e no

ensino superior esse conceito é de fundamental importância, não só para a Álgebra, mas também para o Cálculo e para a Análise.

Essas considerações têm como objetivo despertar reflexões sobre a atuação dos professores em sala de aula ao explorar situações em que a noção de variável esteja presente, além de motivar o trabalho com problemas em que os diferentes usos da variável possam ser relacionados. Quais atividades, questões ou problemas poderiam favorecer a exploração dos três usos da variável (incógnita, número genérico, variáveis em relação funcional) para estimular a compreensão desse conceito? Como elaborar uma seqüência didática que envolva as habilidades descritas no modelo 3UV ?

Tais questões poderiam incentivar o desenvolvimento de futuras pesquisas que tenham por objetivo o ensino do conceito de variável. Deixamos, assim, nossa sugestão para aqueles que se interessarem por estudos relacionados a essa temática.

REFERÊNCIAS

BLANCO, L. J.; GARROTE, M. Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, Turkey, v. 3, n. 3, p. 221-229, ag. 2007. Disponível em: <http://www.ejmste.com/v3n3/EJMSTE_v3n3_Blanco_Garrote.pdf>. Acesso em: jul. 2008.

BRASIL, Ministério da Educação – **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144p.

CARAÇA, B. J. – **Lições de álgebra e análise**. Lisboa: Sá da Costa, 1940. 2v.

_____. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 2000.

CHRISTO, D S. **Introdução da noção de variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas**: uma abordagem dinâmica. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KÜCHEMANN, D. Algebra. In: HART, K. M. (Ed.). **Children's understanding of Mathematics**: 11 – 16. London: Jonh Murray, 1981. p. 102-119.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução: Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Revisão técnica e adaptação da obra: Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artes Médicas Sul Ltda.; Belo Horizonte: UFMG, 1999. 340 p.

LOZANO, D.; TRIGUEROS, M.; URSINI, S. La conceptualización de la variable en la enseñanza media. **Educación Matemática**, México, v. 12, n. 2, p. 27-48, ago. 2000.

MALISANI, E., The notion of variable in semiotics contexts different. In: International Conference on "The Humanistic Renaissance in Mathematics Education", University of Palermo, 2002, Italia. **Proceedings...** Itália, 2002. p.245–249. Disponível em: <<http://math.unipa.it/~grim/SiMalisani.PDF>>. Acesso em: 09 ag. 2007.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. 2003. 146 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

QUEIROZ, P. C. G. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica**. 2008. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

QUINTERO, R.; REYES, A.; TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. **Enseñanza de las ciencias: investigación y experiencias didácticas**, México, v. 14 n. 3, p. 351-363, 1996.

REYES, A.; TRIGUEROS, M.; URSINI, S. College students' conceptions of variable. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20., 1996, Spain. **Proceedings...** Spain, 1996. v. 4, p. 315-322.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 22. ed. rev. e ampl. de acordo com a ABNT. São Paulo: Cortez, 2002.

TINOCO, L. A. A. et al. Educação Algébrica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, IX., 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais...** Belo Horizonte, MG: UNI-BH, 2007. p. 1-16.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Understanding of different uses of variable: a study with starting college students. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL

GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21. 1997, Lahti. **Proceedings...** Finland, 1997. v. 4, p. 254-261.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. In: HITT, F. (Ed.). **Investigaciones en Matemática Educativa II**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998. p. 445-463.

_____. Does the understanding of variable evolve through schooling? In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23., 1999, Haifa. **Proceedings...** Israel, 1999. v. 4, p. 273-280.

_____. A model for the uses of variable in elementary algebra. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. **Proceedings...** Utrecht: Utrecht University, 2001. v. 4, p. 327-334.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22.

APÊNDICE

Questionário

Por favor, responda atentamente as questões abaixo. Sua participação nesta pesquisa é de fundamental importância. Desde já agradecemos sua colaboração em nosso trabalho.

Dupla: _____

Questão 1: Escreva uma expressão algébrica para:

a) representar um número que multiplicado por 12 seja igual a 144:

b) representar um número dividido por 3 somado a 7:

c) representar um número que é igual a 15 mais um outro número:

Questão 2: Para cada uma das seguintes expressões, determine quantos valores as letras apresentadas podem assumir. Dê exemplos desses possíveis valores.

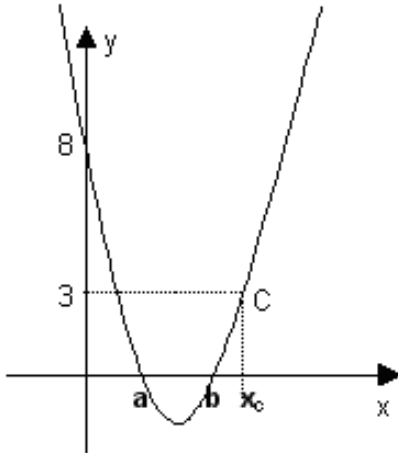
a) $y = y$

b) $7y^2 = 2x - 5$

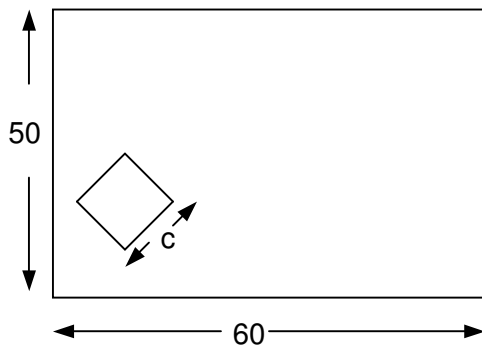
c) $t+3$

Questão 3: Considere a função polinomial do 2º grau $f(x) = x^2 - 6x + 8$, definida em \mathbb{R} com valores em \mathbb{R} , representada no gráfico abaixo.

Determine as abscissas **a**, **b** e x_c , ilustradas na figura abaixo.

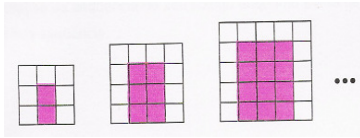


Questão 4: A área representada abaixo ilustra as medidas de um terreno retangular destinado à construção de um condomínio, onde será colocado um jardim, de formato quadrado, com **c** metros de medida para seu lado. Analisando a figura que representa esta situação, responda às questões:



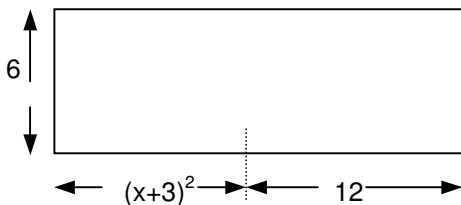
- Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área destinada ao condomínio desconsiderando a área do jardim?
- O que a letra **c** representa no problema?
- Que valores **c** pode assumir?
- Quais são os valores de **c** para os quais a área ocupada pelo jardim é menor do que 16m^2 ?

Questão 5: Observe como se forma a seqüência de figuras abaixo:



- a) Desenhe a próxima figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- OBS: Considere como contorno da figura os quadradinhos que não estão em destaque.
- b) Desenhe a 5ª figura. Quantos quadradinhos formam o contorno desta figura?
- c) Escreva uma expressão que represente a quantidade de quadradinhos do contorno de uma figura qualquer da seqüência dada.
- d) Quantos quadradinhos existem no contorno de uma figura qualquer da seqüência dada?
- e) Há alguma relação entre as respostas apresentadas por vocês nos itens c) e d)? Se houver, explique tal relação.

Questão 6: Observe o retângulo abaixo com as medidas indicadas para os seus lados e responda às questões:



- a) Como poderia ser representada, por meio de uma expressão algébrica, a área desse retângulo?
- b) Para quais valores de x a área do retângulo é menor que 288?
- c) Para quais valores de x a área do retângulo é maior que 168?
- d) Para quais valores de x a área do retângulo varia entre 168 e 288?
- e) Se x aumentar, o que acontece com a área do retângulo?
- f) E se x diminuir, o que acontece com a área do retângulo?
- g) De acordo com o que vocês responderam nos itens anteriores, o que vocês pensam sobre o papel do x nesta situação?

ANEXO

As questões de Trigueros e Ursini (1998) que influenciaram a elaboração de nosso instrumento de investigação:

Cuestionario

NOMBRE _____ MATRICULA _____

En este ejercicio, solamente escribe una fórmula. **NO CALCULES** el número.

1. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido multiplicado por 13 es igual a 127.
2. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número desconocido con 2 es igual a 6.
3. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido es igual a 6 más otro número desconocido.
4. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7.

Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra?

5. $x + 2 = 2 + x$

6. $3 + a + a = a + 10$

7. $x = x$

8. $4 + s$

9. $x + 5 = x + x$

10. $3 + a + a + a + 10$

11. $7x^2 = 2x - 5$

12. $\frac{x}{x^2 - 4} = 3$

13. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

14. $4 + x^2 = x(x + 1)$

Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que piensas que puede tomar la literal:

15. $13x + 27 - 2x = 30 + 5x$

16. $(x + 3)^2 = 36$

17. $4 + x = 2$

18. $\frac{10}{1+x^2} = 2$

Reduce las siguientes expresiones a una equivalente:

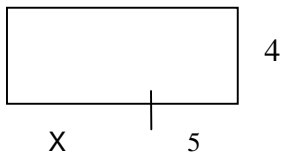
19. $(x^2 + 1)(x^2 - 2) =$

20. $a + 5a - 3a =$

21. $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8 =$

El perímetro de una figura se calcula sumando la longitud de sus lados. Escribe la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura.

22.

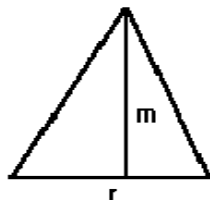


Escribe una fórmula para calcular el área de las siguientes figuras:

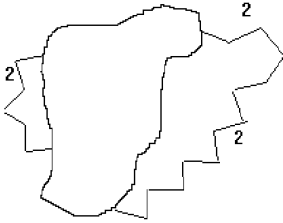
23.



24.



25. En la siguiente figura, el polígono no es completamente visible. Debido a que no sabemos cuántos lados tiene el polígono en total diremos que tiene N lados. Cada lado mide 2 centímetros de longitud.



Observa las siguientes figuras:

		Número de puntos
Figura #1	*	1
Figura #2	* * * *	4
Figura #3	* * * * * * * * *	9
Figura #4		

26. ¿Cuántos puntos hay en la figura #4?

27. Dibuja la figura #5 y da el número total de puntos.

28. Dibuja la figura #6 y da el número total de puntos.

29. Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura # m . ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura # m ?

Si para hacer las figuras del ejercicio anterior vas agregando puntos.

30. ¿Cuántos puntos agregas para pasar de la figura #1 a la #2?

31. ¿Cuántos puntos agregas para pasar de la figura #2 a la #3?

32. ¿Cuántos puntos agregas para pasar de la figura # m a la siguiente?

33. Escribe una fórmula que muestre cómo vas agregando puntos hasta llegar a la figura # m .

Observa las siguientes igualdades:

34. *Completa:*

$$1+2+3 = \frac{(3 \cdot 4)}{2}$$

$$1+2+3+4 = \frac{(4 \cdot 5)}{2}$$

....

$$1+2+3+\dots+n =$$

Si $x + 3 = y$

35. ¿Qué valores puede tomar x ?

36. ¿Qué valores puede tomar y ?

37. **Si $y=7$** , ¿qué les pasa a los valores de y cuando los valores de x aumentan?

Te encuentras en una papelería en donde se hacen fotocopias. Para evitarse estar haciendo multiplicaciones el empleado elabora una tabla.

38. *Complétala.*

número de copias	precio
5	6.25
10	12.50
15	
	25.00
25	31.25
35	
	62.50
100	

39. *Escribe la regla general si n denota el número de copias*

Observa la siguiente tabla y contesta las preguntas.

tiempo	velocidad
0	0 m/s
10	30 m/s
15	
20	60 m/s
35	
50	
60	

40. *Completa la tabla*

41. *Si aumenta el tiempo ¿qué le pasa a la velocidad, aumenta o disminuye?*

42. En una hoja aparte, sobre un sistema de coordenadas marca los puntos de la tabla y únelos trazando aproximadamente una curva.

43. Escribe la regla general que asocia a los números de la lista de la izquierda con los números de la lista de la derecha.

Considera la siguiente expresión $y=3+x$.

44. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿Qué valores puede tomar x ?

45. Si x toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de y ?

De las siguientes dos expresiones $n+2$ y $2xn$

46. ¿Cuál es más grande?

47. Justifica tu respuesta.

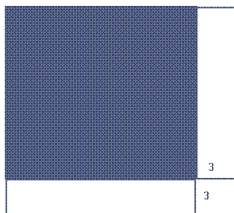
El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide con una báscula. En el puesto de Don Pachito, por cada kilogramo de peso la charola de la báscula se desplaza 4 cm.

48. Encuentra una relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola.

49. Si la charola se desplaza 10.5 cm al pesar una bolsa de manzanas ¿Cuántos kilos pesa la bolsa?

Plantea los siguientes problemas y escribe para cada uno una fórmula que permita resolverlos:

50. El área total de la siguiente figura es 27. Calcula el lado del cuadrado sombreado.



51. Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41. ¿Cuáles son las edades de Juan y Santiago?

52. Rentar un automóvil cuesta N\$25.00 por día, más N\$12 por kilómetro. ¿Cuántos kilómetros, en un día, puede manejar Diego si solamente tiene N\$40.00?

Observa los siguientes datos de un experimento y contesta las preguntas.

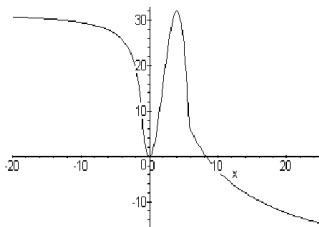
x	y
0	0
10	100
-15	225
25	625
20	400
-10	100
15	225
-20	400

53. Determina que pasa con el valor de y cuando el valor de x va creciendo.
54. ¿Para qué valor de x , alcanza y su valor máximo?
55. ¿Para qué valor de x z , alcanza y su valor mínimo?
56. Escribe la regla general que relaciona a la variable x con la variable y .
57. Si queremos que el valor de y esté entre 256 y 10000 ¿entre qué 0 valores tiene que estar x ?
58. Si x toma valores entre -2 y 26 ¿entre qué valores estará y ?

Dada la expresión $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$

59. ¿Qué valor tendrá y para $x=16$?
60. Para que el valor de y esté entre 1 y 5 ¿entre qué valores debe estar x ?
61. Supón que x toma valores entre -5 y 5 ¿Para qué valor de x alcanza y su valor máximo?

Dada la gráfica siguiente:



62. ¿Entre qué valores de x , los valores de y crecen?
63. ¿Entre qué valores de x , los valores de y decrecen?
64. ¿Para qué valor de x , se obtiene el valor máximo de y ?
65. ¿Entre qué valor de x se obtiene el valor mínimo de y ?