PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

LUIS CARLOS DE CARVALHO

ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DA GEOMETRIA ESPACIAL MÉTRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

LUIS CARLOS DE CARVALHO

ANÁLISE DA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DA GEOMETRIA ESPACIAL MÉTRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.***

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _______________________________________ **Local e Data:** ______________

Dedico este trabalho a minha mãe Silvéria e a meu pai Manoel, que mesmo não estando fisicamente presentes, serão meus eternos educadores e exemplos de perseverança.

A minha esposa Cataryna e a meus filhos André Luis e Victor Hugo, por todo carinho, ajuda e motivação ao longo de todo curso e, sobretudo, neste trabalho pela compreensão nos momentos em que estive ausente.

A meus irmãos (Raimundo, Antônio, José, Francisco, Maria Silvéria,, Almeida, Maria, Sandra, Manoel Filho, Sônia, Joaquim, Almir e Ana Maria), pelo exemplo de perseverança, fé e honestidade.

A minha sogra Lourdes, pela torcida e motivação durante todo o curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças para lutar por este objetivo, mesmo enfrentando muitas adversidades.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pela orientação, paciência, autonomia e, acima de tudo, por contribuir para minha formação de pesquisador.

Às Professoras Doutoras Ana Lúcia Manrique e Maria Elisa Esteves Lopes Galvão que, gentilmente, aceitaram participar da banca examinadora e pelas valiosas contribuições oferecidas.

Aos Professores do programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da PUC-SP, pela contribuição para minha formação. Em especial, à Professora Doutora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, pelas valiosas contribuições.

A meus colegas de mestrado, pelo convívio e amizade.

A meu amigo Roberto Canossa, pelo companheirismo nas horas de estudo e convivência durante todo o curso.

Aos funcionários da biblioteca da PUC-SP – Matemática, que tiveram a paciência em auxiliar na tarefa de levantamento dos livros didáticos analisados na pesquisa.

À Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, pelo fornecimento de bolsa de estudos que permitiu a realização desta pesquisa.

Muito Obrigado!

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo investigar qual a organização que os livros didáticos de Matemática destinados à 2ª série do Ensino Médio fazem referente ao tema Geometria Espacial Métrica, e se essa organização favorece a construção do pensamento geométrico. Para tanto, o tema foi pesquisado na literatura disponível, em documentos oficiais, em dissertações e teses defendidas no Brasil e em artigos de congressos nacionais e internacionais. Três dos oito livros de Matemática enviados para a 2ª série do Ensino Médio pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio, 2006, do Ministério da Educação e Cultura, às escolas da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo – SP foram analisados, segundo os resultados das pesquisas de: Duval (1995); Robert (1998) e Parsysz (2000). A análise dos livros didáticos teve como finalidade verificar se as atividades por eles propostas proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo atividades com uso de material concreto, construções com instrumentos, como régua e compasso ou softwares que facilitam a visualização e desenvolvem o pensamento geométrico espacial. Concluiu-se que os livros didáticos analisados atendem parcialmente à construção do pensamento geométrico espacial, porque os resultados da pesquisa indicaram a pouca exploração por parte dos autores de atividades que desenvolvem a visualização, observou-se que a representação no plano das figuras tridimensionais não é estimulada. Constatou-se um equilíbrio com relação ao número de exercícios propostos que exigem os níveis técnicos e mobilizáveis e uma discrepância com relação ao nível disponível e à falta de atividades que possam ser desenvolvidas por software educacional, contribuindo desta maneira para a difusão de uma visão equivocada do professor sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica.

Palavras-Chave: Geometria Espacial Métrica; Livro Didático; Material Concreto e Visualização.

ABSTRACT

This work had as objective to investigate which the organization that the didactic books of Mathematics destined to 2ª series of Average Education make, referring to the subject Metric Space Geometry, and if this organization favors the construction of the geometric thought. For in such a way, the subject was searched in available literature, official documents, dissertations and theses defended in Brazil and articles of national and international congresses. They had been analyzed three of eight books of Mathematics sent for 2ª series of Average Education for the National Program of the Book for Average Education, 2006 of the Ministry of the Education and Culture, to the schools of the Direction of Education of São Bernardo do Campo - SP, according to resulted of the research of: Duval (1995), Robert (1998) and Parsysz (2000). The analysis of didactic books had as purpose to verify if the activities for them proposals provide and favor the construction of the knowledge on the part of the pupils, considering activities with use of material concrete, constructions with instruments as ruler and compass or softwares that they facilitate the visualization and they develop the space geometric thought. One concluded that the analyzed didactic books take care of partially to the construction of the geometric thought, because the results of the research indicated to little exploration on the part of the authors of activities that develop the visualization, the representation in the plan of the three-dimensional figures are not stimulated. A balance with regard to the number of considered exercises that demand the levels technician and mobilized and a discrepancy with regard to the available level and to the lack of activities was evidenced that can be developed by educational software, contributing in this way for the diffusion of a vision maken a mistake of the teacher on the education of Metric Space Geometry.

Keys-Words: Metric Space Geometry; Didactic Book; Concrete Material and Visualization.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é investigar se os livros didáticos de Matemática de 2º série do Ensino Médio, enviados pelo PNLEM[1], desenvolvem o conteúdo de Geometria Espacial Métrica sob a perspectiva dos resultados das pesquisas em Educação Matemática.

Em Geometria Espacial, Van Hiele destaca que o aprendizado sobre um conceito está aliado sobretudo à visualização e à percepção das figuras. Esta foi uma das principais dificuldades que enfrentamos no ensino e aprendizagem da Geometria Espacial levantadas nos estudos sobre temas envolvendo Geometria, que englobaram: Dissertações de mestrado no Brasil, Tese de doutoramento de outro país, publicações de vários artigos sobre pesquisas na área.

> (...) As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria (...). (PCNEM[2], 1999, p.257).

Desta forma, nosso trabalho desenvolve o tema do ensino e aprendizagem da Geometria Espacial Métrica, buscando conhecer a relação do professor com nosso tema, o livro didático e os guias oficiais da educação no Brasil.

Para tal, analisamos o tratamento dado ao tema em livros didáticos referendados pelos guias oficiais, elaborados por iniciativa do Ministério da Educação e Cultura (MEC)[3].

Nosso trabalho foi organizado do seguinte modo:

No Capítulo I, apresentamos os estudos preliminares: o estudo da História da Geometria, a definição de poliedros, prismas e pirâmides e seus respectivos cálculos de área de suas superfícies e volume e a descrição de alguns estudos que possuem interligação com esta pesquisa. E fornecemos um panorama geral

---

[1] Programa Nacional do Livro Didático Para o Ensino Médio.

[2] Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.

[3] Ministério da Educação.

de nosso questionário, no qual explicitamos nossas escolhas em relação às questões selecionadas. Apresentamos a análise a priori e os resultados dos questionários nas formas quantitativa e qualitativa.

No capítulo II, situamos o leitor a respeito da problemática que motivou nossa pesquisa, explicitando nossa questão de pesquisa e a fundamentação teórica.

No capítulo III, destacamos os critérios de escolha dos livros didáticos de Matemática do 2° ano do Ensino Médio utilizados par a análise, estabelecemos as categorias de análise dos livros didáticos fundamentadas na didática da Matemática e apresentamos o resultado da análise dos livros escolhidos.

Finalizamos respondendo à questão de pesquisa, apresentando os resultados obtidos com a análise dos livros didáticos e dos questionários e registramos nossas considerações e recomendações.

No anexo I, apresentamos um estudo dos textos oficiais como: A LDB[4], PCNEM, OCEM[5] e o PNLEM/2006, no que tange ao ensino de Geometria no Ensino Médio e, em particular, ao ensino da Geometria Espacial, objeto matemático desta pesquisa. Todos os textos citados são orientações oficiais que regulamentam e orientam a Educação Nacional e são de responsabilidade do Ministério da Educação.

O anexo II traz o instrumento de pesquisa (o questionário) utilizado com os professores pesquisados.

---

[4] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

[5] Orientações Curriculares Para o Ensino Médio

CAPÍTULO I ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os estudos preliminares, cujos principais temas são: o estudo da História da Geometria, a definição de poliedros, prismas e pirâmides e os respectivos cálculos de área de suas superfícies e volume que serão objeto de nossa pesquisa. Descreveremos alguns estudos que possuem interligação com esta pesquisa e forneceremos um panorama geral de nosso instrumento de pesquisa.

1.1 ESTUDO HISTÓRICO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Neste trabalho, a importância da História dos Sólidos Geométricos e seu surgimento na sociedade têm por objetivo fornecer suporte histórico e elementos para que possamos compreender melhor as discussões existentes na história em torno do estudo da Geometria Espacial Métrica.

> Ninguém contestará que o professor de Matemática deve ter conhecimento de sua disciplina. Mas a transmissão desse conhecimento através do ensino depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou, quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões de sua presença nos currículos escolares. Destacar esses fatos é um dos principais objetivos da História da Matemática. (D'Ambrósio, p.8, apud Cano, 2007)

Faremos um breve estudo histórico dos sólidos platônicos, regulares, arquimedianos e eulerianos, baseando-se no artigo do Nelo Allan do Dep. Matemática-IGCE-Rio Claro, apresentado no II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, Águas de São Pedro; 1997 e no livro de Carl Boyer.

Conforme o artigo de Allan (1997), as primeiras construções geométricas surgiram com problemas simples como a medida e divisão de terra e a construção da roda. Nesse estágio, a Geometria era um conjunto de receitas para cálculos de perímetros e áreas. O homem aprendeu cedo que soluções retilíneas eram mais econômicas, aprendeu a trabalhar com figuras regulares e fazer divisões que eram fáceis de construir. As primeiras construções, as mais primitivas, já eram modelos de cones e cilindros, como por exemplo, as cabanas de índios e poços artesanais. Alguns sólidos regulares como pirâmides e prismas, talvez por serem mais econômicos, foram sendo mais e mais usados.

Por volta de 2500 a.C , monumentos imensos, como pirâmides já tinham sido erguidas. Já se conhecia como construir ângulos retos e como retificar a circunferência, i.e., já se tinha um bom cálculo aproximado do número π. O desejo de se sentir bem em seus ambientes levou o homem a desenvolver a estética por meio da Arquitetura e Decoração. A Geometria encontra-se presente na arquitetura egípcia, assíria, babilônica, grega e romana, como também na decoração por meio do reconhecimento e repetição dos módulos e suas simetrias, muito usados na cultura egípcia, grego-romana e árabe.

Os poliedros regulares fascinaram os antigos como símbolo de perfeição da natureza. Os gregos, mais precisamente, os Pitagóricos já sabiam da existência de três dos cinco poliedros regulares: o cubo, o tetraedro e o dodecaedro. Cubos e tetraedros já eram conhecidos pelos egípcios e babilônios. Por volta do ano 1000 a.C, os etruscos construíram um dado em forma de dodecaedro. Estes poliedros foram muito estudados pela Escola de Platão que construiu uma teoria filosófica baseada neles, comparando-os com os cinco elementos da natureza. Um membro desta escola, Teeteto fez um estudo completo dos poliedros regulares, demonstrou que só existem cinco poliedros regulares, exibiu um processo de construção desses cinco poliedros com a demonstração que esses modelos são regulares.

A descrição do trabalho de Teeteto e de seu desenvolvimento posterior foi um dos objetivos do tratado “Os Elementos” de Euclides. Esta teoria está nos livros XI e XIII desse tratado. O argumento da demonstração de que são no máximo cinco poliedros regulares, segue a seguinte linha de raciocínio: Um poliedro regular é de tipo {p,q} se em cada um de seus vértices concorrerem q p-ágonos. Ao se Fazer uma contagem dos ângulos que incidem em cada vértice, obteremos a desigualdade $(p-2)(q-2)\leq 4$, que possui somente cinco pares de soluções inteiras: {3,3},{4,3}{3,4},{5,3} e {3,5} que correspondem, respectivamente, ao **tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro**, com quatro, seis, oito, 12 e 20 faces, respectivamente.

A solução de Teeteto é menos sofisticada: para que a soma dos ângulos seja menor que 360º, só poderemos ter no máximo cinco triângulos ou três quadrados, ou ainda, três pentágonos. O argumento requer que o poliedro seja convexo, o que não foi pressuposto por Euclides. A tradução do comentarista Sir Thomas Heath acrescenta duas outras construções: uma graças a Pappus de Alexandria e outra, a H. M. Taylor. O tetraedro, o cubo e o octaedro são de simples construção. Já o icosaedro e o dodecaedro são não triviais. A construção de H. M. Taylor para o icosaedro consiste em inscrevê-lo em um cubo; e para o dodecaedro, a de Euclides consiste em circunscrevê-lo em um cubo.

Dois outros livros foram adicionados à coleção dos treze livros de Euclides: o Livro XIV tem como principal resultado o teorema de Apolônio: uma mesma circunferência é circunscrita à face do icosaedro e à face do dodecaedro inscrito em uma mesma esfera. Este livro é devido a Hypsicles. O Livro XV discute as relações entre os elementos de diversos poliedros um inscrito no outro; que dividido em três partes cada qual com um estilo diferente. Pelos comentários do autor, supõe-se que ele tenha sido escrito por um discípulo de Isidorus (512 d.C). O trabalho de Teeteto foi desenvolvido por volta de 380 a.C. Um pouco mais tarde, 320 a.C, Aristeu escreveu dois livros “Lugares Sólidos”, “Comparação entre as cinco figuras”, considerados excelentes e, provavelmente, os livros e Euclides sejam uma curta recapitulação desses últimos.

Os poliedros semi-regulares foram introduzidos e classificados por Arquimedes; seu trabalho encontra-se desenvolvido nas “Collections”, Livro V de Pappus. O original de Arquimedes foi perdido. Pappus usa o mesmo raciocínio de Teeteto. Arquimedes reconhece mosaicos como pertencentes também a esta teoria. Na Renascença, Kepler reviu o trabalho dos gregos reconhecendo a função do antiprismas na construção do dodecaedro e do icosaedro.

De acordo com Boyer (1987), fazer afirmações sobre a origem matemática da Geometria é arriscado, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

O historiador grego Heródoto assegurava que a Geometria originara-se no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terra após cada inundação anual no vale do rio Nilo.

Para Aristóteles, a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da Geometria.

Heródoto e Aristóteles tinham teorias opostas quanto às origens da matemática geométrica; um acreditava que a origem fosse a necessidade prática, outro que estivesse no lazer sacerdotal e ritual.

O fato dos geômetras egípcios serem, às vezes, chamados "esticadores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio a qualquer das duas teorias, pois as cordas eram indubitavelmente usadas, tanto para traçar as bases dos templos como para realinhar demarcações apagadas de terra.

Na Índia, os mais antigos resultados geométricos encontrados formam o que chamaram de Sulvasutras ou "regras da corda". Trata-se de relações simples que aparentemente se aplicavam à construção de templos e altares.

Em conseqüência da precisão admirável da construção das pirâmides, os conhecimentos dos "esticadores de corda" egípcios eram admirados. A maior parte das informações sobre a Matemática egípcia vem do papiro Ahmes ou de Rhind, o mais extenso documento matemático do antigo Egito. Há alguns problemas geométricos, entre eles, destacamos o problema 56 que tem especial interesse por conter rudimentos de trigonometria e uma teoria de triângulos semelhantes. Na construção de pirâmides, era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação que levou os egípcios a introduzirem um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo.

Na tecnologia moderna, é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais, que é recíproca da usada no Egito. A palavra egípcia seqt significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O seqt correspondia, assim, exceto quanto à unidade de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era o "palmo", medindo um sétimo do cúbito. Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos; o segundo, em cúbitos.

No problema 56, pede-se o seqt de uma pirâmide com 250 cúbitos de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos. O escriba começa dividindo 360 por 2, depois divide o resultado por 250, obtendo ½ + 1/5 + 1/50. Multiplicando o resultado por 7, deu o resultado de 5 1/25 em mãos por cúbitos. Em outros problemas sobre pirâmides no Papiro Ahmes, o seqt dá 5 ¼, o que está mais de acordo com o da grande Pirâmide de Quéops, com lado de base 440 cúbitos e altura 280, o seqt sendo 5 ½ mãos por cúbito.

Outro importante papiro chamado Golonishev ou de Moscou, comprado do Egito em 1893, foi escrito por um escriba desconhecido, aproximadamente em 1890 a.C. No problema 14 desse papiro, há uma figura que parece um trapézio, mas os cálculos associados a ela mostram que é o **tronco de uma pirâmide** que se que representar. Acima e abaixo da figura estão sinais para dois e quatro respectivamente e, no interior, os símbolos hieráticos para seis e 56. As instruções ao lado tornam claro, que o problema pergunta qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superior e inferior medem duas e quatro unidades, respectivamente?

Platão nasceu em Atenas, em 427 a.C, era um menino de nome Arístocles e, mais tarde, foi conhecido como Platão. Por volta de 387 a.C, fundou em Atenas sua famosa academia onde ensinou até morrer em 347 a.C. Assim, Platão pode ter conhecido os cinco sólidos regulares, associados aos quatro elementos da natureza em um esquema cósmico, por meio de Arquitas, um amigo a quem visitou na Sicília em 388 a.C.

Fonte: Boyer (1987, p. 63)

Figura 1

Talvez a veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro tenha sido o que levou Platão a considerá-lo o quinto e último sólido regular, como um símbolo do universo. Platão apresentou suas idéias sobre os sólidos regulares em um diálogo intitulado Timaeus, presumivelmente, o nome de um pitágorico que serve como principal interlocutor. Não se sabe se Timaeus de Locri realmente existiu ou se Platão o criou como um personagem por meio do qual enunciou as idéias pitagóricas que ainda eram influentes no que hoje é o sul da Itália.

Freqüentemente, os poliedros regulares eram chamados “corpos cósmicos“ ou “sólidos platônicos“ em razão do modo pelo qual Platão no Timaeus aplicou-os para a explicação de fenômenos científicos. Embora esse diálogo tenha sido escrito, provavelmente, quando Platão estava perto dos 70 anos, seja a mais antiga evidência definida da associação dos quatro elementos com os sólidos regulares e muito dessa fantasia deve-se aos pitagóricos.

Proclus atribui a construção das figuras cósmicas a Pitágoras; mas o escoliata Scridas relatou que o amigo de Platão, Teeteto nascido em 414 a.C aproximadamente e filho de um dos mais ricos patrícios da Ática foi o primeiro a escrever sobre eles. Um escólio (de data incerta) ao Livro XIII de Os elementos de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi por meio de Teeteto que o octaedro e o icosaedro tornaram-se conhecidos. Parece provável que, em qualquer caso, Teeteto tenha feito um dos estudos mais extensos dos cinco sólidos poliedros regulares. Talvez seja também o responsável pelos cálculos que se encontram em Os elementos, das razões das arestas dos sólidos regulares para o raio da esfera circunscrita.

Euclides de Alexandria viveu, aproximadamente, no III século a.C, conhecido assim por que foi chamado para ensinar Matemática em Alexandria. Autor de Os elementos, sabe-se pouco sobre sua vida. Com exceção de A esfera de autólico, os livros de Euclides que sobreviveram são os mais antigos tratados gregos existentes; no entanto, do que escreveu mais da metade se perdeu, mas cinco obras sobreviveram até hoje: Os Elementos, Os Dados, Divisão de figuras, Os Fenômenos e Óptica.

Nenhuma descoberta nova é atribuída a Euclides, mas ele era conhecido pela sua habilidade ao expor. Esta é a chave do sucesso de sua maior obra, Os Elementos, um livro-texto e de modo nenhum o primeiro.

Os Elementos estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam, em especial, sobre **geometria no espaço.**

Freqüentemente se pensa de modo errado que Os Elementos de Euclides só tratam de Geometria. Os Livros II e V são quase exclusivamente algébricos, três Livros VII, VIII e IX são dedicados à teoria dos números (números naturais).

Os três últimos livros versam sobretudo sobre Geometria Espacial. O Livro XI contém 39 proposições sobre Geometria em três dimensões. As definições dadas por Euclides são fáceis de criticar, pois define como sólido “aquilo que tem comprimento, largura e espessura” e então nos diz que “uma extremidade de um sólido é uma superfície”.

No Livro XII, são dezoito proposições todas sobre a medida de figuras, usando o método de exaustão. São feitas as medidas volumétricas de pirâmides, cones, cilindros e esferas.

O Livro XIII é inteiramente dedicado às propriedades dos cinco sólidos regulares: **tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro,** fato que levou alguns historiadores a dizer que os elementos foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas. Seu objetivo era “compreender” cada um dos sólidos em uma esfera, isto é, achar a razão de uma aresta do sólido ao raio da esfera circunscrita.

As proposições 13 a 17 exprimem a razão da aresta para o diâmetro, para cada um dos sólidos regulares, sucessivamente: $\frac{e}{d}$ é $\sqrt{\frac{2}{3}}$ para o tetraedro, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ para o octaedro, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ para o cubo ou hexaedro, $\sqrt{\left\langle 5-\sqrt{5}\,\right\rangle /10}$ para o icosaedro, e $\left\langle \sqrt{5}\text{ -}1\right\rangle /\ 2\sqrt{3}$ para o dodecaedro. Na proposição 18, a última de Os elementos, prova facilmente que não pode haver outro poliedro regular além desses.

Na antiguidade era comum que se atribuísse a um autor obras que não eram dele; assim algumas versões de Os Elementos de Euclides contêm um XIV e XV volumes. O Livro XIV continua a comparação de Euclides dos sólidos regulares inscritos numa esfera, livro que pode ter sido escrito na segunda metade do segundo século a.C, por Hipsicles. O Livro XV, pensa-se ter sido escrito por Isidoro de Mileto, que viveu por volta de 532 d.C, em Constantinopla. Este livro também trata dos sólidos regulares, mostrando como inscrever alguns deles em outros, contando o número de arestas e ângulos sólidos nos sólidos, achando as medidas dos ângulos diedros de faces que se encontram em uma aresta. É interessante notar que, apesar dessas enumerações, os antigos não perceberam a chamada fórmula poliedral enunciada por Euler no século XVIII.

A primeira versão impressa de Os Elementos que apareceu em Veneza em 1482, foi um dos primeiros livros de Matemática impressos.

Arquimedes viveu entre (287 - 212 a.C) e nem todas as suas obras chegaram até nós, mas lhe é atribuída a descoberta dos13 possíveis sólidos ditos semi-regulares. Ao passo que um poliedro regular tem faces que são polígonos regulares do mesmo tipo, um sólido semi-regular ou arquimediano é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, mas não todos do mesmo tipo.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) viveu em Milão e Roma antes de tornar-se professor em Bolonha em 1629. Escreveu sobre muitos aspectos da Matemática pura e aplicada: geometria, trigonometria, astronomia e óptica e foi o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos, em seu Directorium Universale Uranometricum de 1632. Mas é mais lembrado por um dos livros mais influentes do início do período moderno, a Geometria Indivisibilibus Continuorum, publicada em 1635. O estilo geral e a formosa razoabilidade do método dos indivisíveis são bem ilustrados pela proposição ainda conhecida em muitos livros de Geometria no espaço, como **o teorema de Cavalieri**, desenvolvido por volta de 1626: “Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e as distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa razão”.

Em razão de nossa prática pedagógica, concordamos com as OCEM/2006 que sugere:

> O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas. (OCEM, 2006, p.76)

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu na Suíça, viveu e trabalhou durante muitos anos na Rússia, em S. Petersburgo e depois em Berlim, na Academia das

Ciências, durante 25 anos, e de novo na Rússia onde morreu com 76 anos. Euler tem trabalhos importantes em muitas áreas da Matemática, como a geometria, a análise e a teoria dos números. Aos 31 anos de idade, ficou cego de um olho, mas continuou a trabalhar até ao fim da vida, tendo sido o mais produtivo matemático de sua época.

A fórmula de Euler: $V + F - A = 2$

A controvérsia sobre a fórmula de Euler as sucessivas demonstrações e as refutações de sua validade constituem por si só uma "história da Geometria" fascinante. Na carta a Christian Goldbach, em 1750, Euler refere-se à sua descoberta de que em um poliedro $V + F - A = 2$, sendo V, F e A, respectivamente, o número de vértices, faces e arestas do poliedro. No inicio, Euler fez extensas verificações de sua conjectura para diversos tipos de sólidos — prismas, pirâmides, etc. — e não apresentou nenhuma demonstração, dizendo apenas que "devo admitir em primeiro lugar que ainda não consegui uma demonstração rigorosa deste teorema... como, em todo o caso, a sua verdade foi estabelecida em tantos casos, não pode haver dúvidas que é verdadeiro para qualquer sólido". Portanto, a proposição parece satisfatoriamente demonstrada.

Devemos explorar esse fato da descoberta de Euler e sua dificuldade em demonstrá-la em sala de aula para os alunos, como recurso facilitador de sua compreensão, como sugerem as OCEM.

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. (...) A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. (OCEM, 2006, p. 86)

Os poliedros para os quais é válida a fórmula de Euler, são chamados poliedros eulerianos.

Mais tarde, Euler apresenta uma demonstração; no entanto, tal como Descartes e anteriormente a Euclides, não diz a que tipo de poliedros está a se referir e não consegue apresentar uma demonstração aceitável.

> A importância da História da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos. (PCNEM, 1999, p. 269)

Fatos históricos como as primeiras construções geométricas (divisão de terra, cabanas de índios, pirâmides) e a geometria presente na arquitetura de civilizações (egípcia, babilônica, grega e romana) são importantes no processo ensino-aprendizagem para dar significados a conceitos geométricos, da mesma maneira que a dificuldade histórica da demonstração da fórmula de Euler e o estudo do teorema de Cavalieri, usado como ponto de partida para trabalhar volumes de sólidos geométricos, contribuem para que possamos compreender e solucionar algumas dificuldades que são apresentadas por parte dos alunos na construção deste conhecimento matemático. Estas constatações serão relevantes para o desenvolvimento de nosso trabalho.

1.2 OBJETOS MATEMÁTICOS

Com o objetivo de nos situarmos em relação aos conceitos de poliedros, realizamos um estudo que se concentra nos poliedros convexos, poliedros de Platão, regulares e eulerianos, por serem os objetos matemáticos de nosso trabalho.

Poliedro convexo

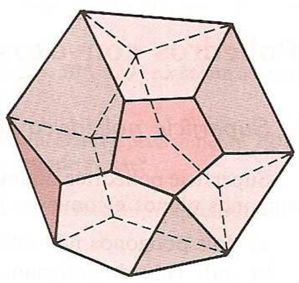
Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

- dois polígonos não estão em um mesmo plano;
- cada lado do polígono é comum a dois e somente dois polígonos;e
- o plano de cada polígono deixa os demais polígonos em um mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A intersecção desses semi-espaços é chamada poliedro convexo.

Um poliedro convexo possui: faces, que são regiões poligonais; arestas, que são os lados dos polígonos e vértices que são os vértices dos polígonos.

A reunião das faces é a superfície do poliedro.

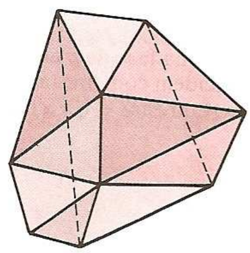


Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 124)

Figura 2

Relação de Euler

Para todo poliedro convexo ou para sua superfície, vale a relação V – A + F = 2 em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.



$$V - A + F = 9 - 18 + 11 = 2$$

Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 126)

Figura 3

Poliedros Eulerianos

Os poliedros para os quais é válida a relação de Euler, são chamados poliedros eulerianos.

Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo.

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se e somente se satisfaz as três seguintes condições:

- todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas;

- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas; e
- vale a relação de Euler.

Existem cinco e só cinco classes de poliedros de Platão, que são: Tetraedro, Hexaedro, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro.

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

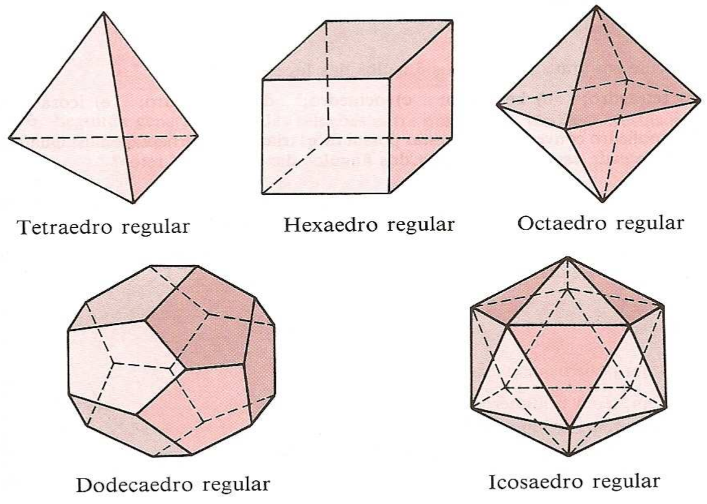
- suas faces são polígonos regulares e congruentes; e
- seus ângulos poliédricos são congruentes.

Existem cinco e só cinco tipos de poliedros regulares.

Ao usar as condições para um poliedro ser regular, temos:

- suas faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;
- seus ângulos poliédricos são congruentes, então, todos têm o mesmo número de arestas.

Por essas conclusões, temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e, portanto, existem somente cinco tipos de poliedros regulares: Tetraedro regular, Hexaedro regular, Octaedro regular, Dodecaedro regular e Icosaedro regular.



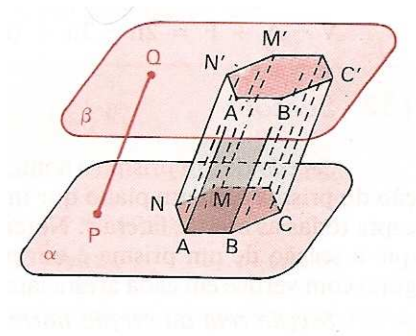
Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 133)

Figura 4

Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

Prisma

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABCD....MN situado em um plano α e um segmento de reta PQ, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se superfície prismática (ou prisma convexo) à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados em um mesmo semi-espaço dos determinados por α.

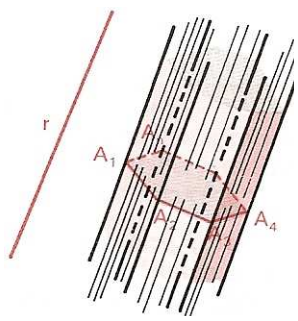


Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 139)

Figura 5

Podemos também definir o prisma como segue:

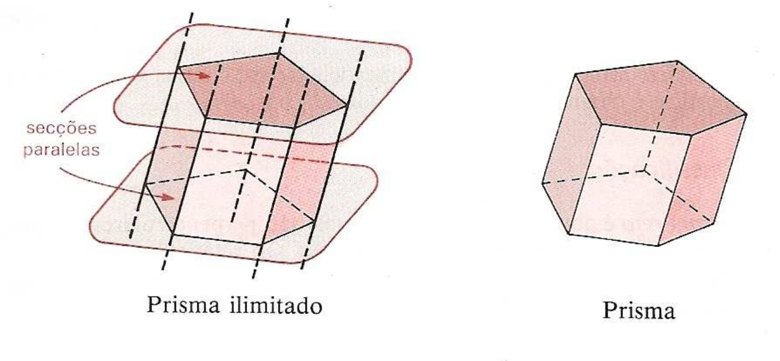
Antes definiremos prisma convexo ilimitado, considerando uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo) $A_1\ A_2\ ...\ A_n$ de n lados e uma reta r não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama-se prisma convexo ilimitado a reunião das retas paralelas a r e que passam pelos pontos da região poligonal dada.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 137)

Figura 6

Prisma convexo limitado ou prisma convexo definido ou prisma convexo é a reunião da parte do prisma convexo ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções paralelas e distintas, com essas secções.

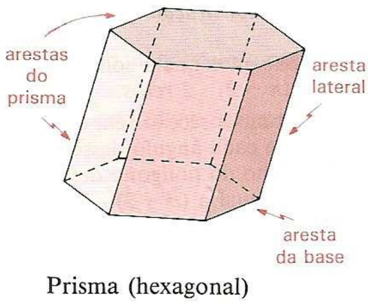


Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 126)

Figura 7

Elementos do prisma

O prisma possui: duas bases congruentes (as secções citadas acima), n faces laterais (paralelogramos), (n + 2) faces, n arestas laterais, 3n arestas, 3n diedros, 2n vértices e 2n triedos.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 140)

Figura 8

A altura de um prisma é a distância h entre os planos das bases.

Superfícies do prisma

Superfície lateral é a reunião das faces laterais, cuja área é chamada área lateral e é indicada por A_l.

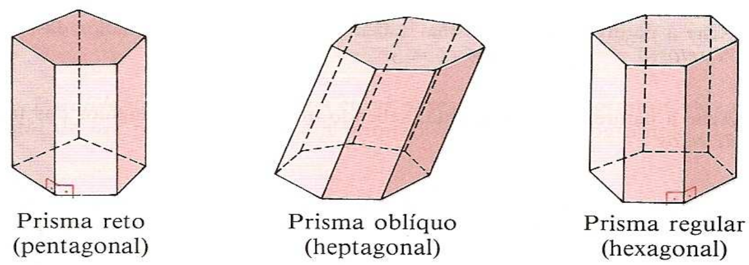
Superfície total é a reunião da superfície lateral com as bases, cuja área é chamada área total e indicada por A_t.

Classificação dos prismas

Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Num prisma reto, as faces laterais são retângulos.

Prisma oblíquo é aquele cujas arestas são oblíquas aos planos das bases.

Prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 141)

Figura 9

Natureza de um prisma

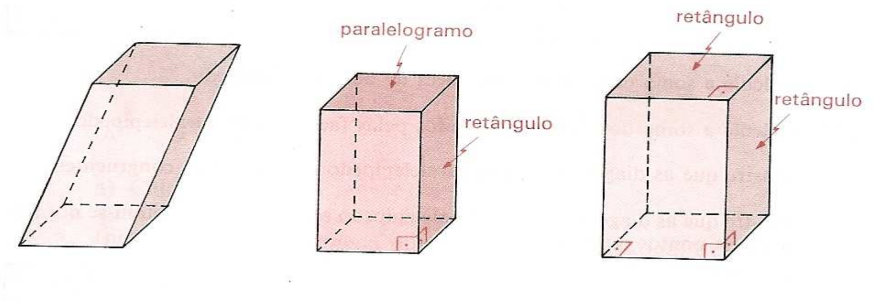
Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Paralelepípedos, cubo e romboedros

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.

Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas faces são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).

Paralelepípedo reto-retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 143)

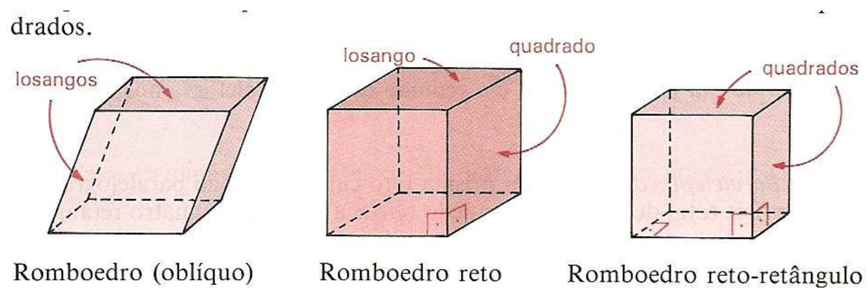
Figura 10

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.

Romboedro é um paralelepípedo que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro é a reunião de seis losangos.

Romboedro reto é um paralelepípedo reto que possui as doze arestas congruentes entre si. A superfície total de um romboedro reto é a reunião de quatro quadrados (faces laterais) com dois losangos (bases).

Romboedro reto-retângulo ou cubo é um romboedro reto cujas bases são quadrados. A superfície de um romboedro reto é a reunião de seis quadrados.

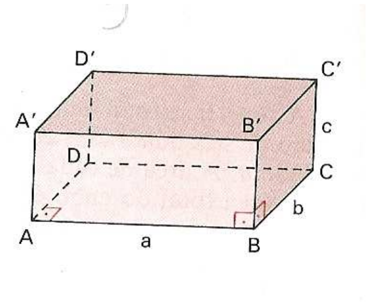


Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 144)

Figura 11

Área do paralelepípedo retângulo e do cubo

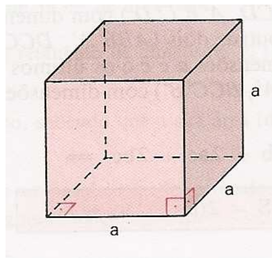
A área total (S) do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles (ABCD, A'B'C'D') com dimensões a e b, outros dois (ABB'A', DCC'D') com dimensões a e c e os últimos dois (ADD'A', BCC'B') com dimensões b e c. Logo, $S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 146)

Figura 12

A área total (S) de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado a. A área de cada um é a^2. Então, a área total do cubo é: $S = 6a^2$.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 145)

Figura 13

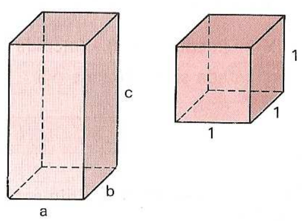
Volume do paralelepípedo retângulo e do cubo

Seja P(a , b, c) o paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c.

Vamos medir esse paralelepípedo com o cubo unitário, isto é, com o paralelepípedo P(1, 1, 1). Para isso, estabeleceremos a razão $\frac{P(a,b.c)}{P(1,1,1)}$, com o objetivo de encontrarmos o volume procurado.

P(a, b, c) P(1, 1, 1)

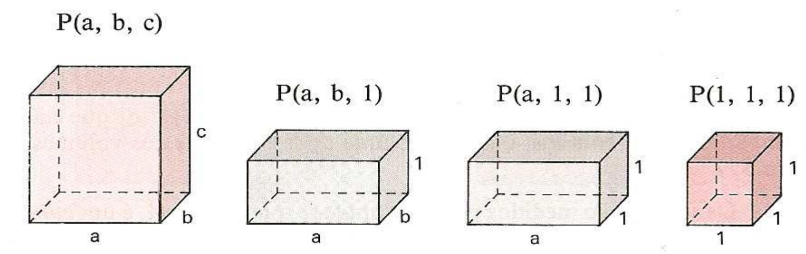
$V = \frac{P(a,b.c)}{P(1,1,1)}$



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 153)

Figura 14

Consideremos, então, os paralelepípedos P(a, b, c), P(a, b, 1), P(a, 1, 1) e P(1, 1, 1) em que 1 é a unidade de comprimento.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 154)

Figura 15

Temos:

$\dfrac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} = \dfrac{c}{1}$ (1) bases (a , b) congruentes

$\dfrac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} = \dfrac{b}{1}$ (2) bases (a, 1) congruentes

$\dfrac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \dfrac{a}{1}$ (3) bases (1, 1) congruentes

Multiplicando-se membro a membro (1), (2) e (3):

$$\frac{P(a,b,c)}{P(a,b,1)} \cdot \frac{P(a,b,1)}{P(a,1,1)} \cdot \frac{P(a,1,1)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow \frac{P(a,b.c)}{P(1,1,1)} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ V = $\dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{b}{1} \cdot \dfrac{c}{1}$ $\Rightarrow$ V = a . b . c em que a, b e c são as medidas das dimensões do paralelepípedo retângulo na unidade escolhida.

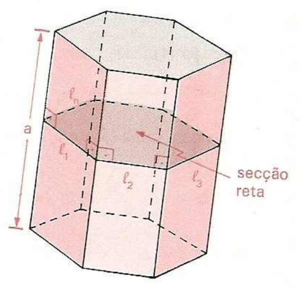
Volume do cubo: no cubo de aresta a, temos b = *a* e c = *a*.

V = a . b . c $\Rightarrow$ V = a . a . a $\Rightarrow$ V = a^3.

Área lateral e área total do prisma

A área lateral (A_l) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais.

Seja um prisma de aresta lateral medindo *a* e $l_1, l_2, \ldots, l_n$ as medidas dos lados de uma secção reta (é uma secção cujo plano é perpendicular às arestas). Cada face lateral é um paralelogramo de base *a* e altura igual a um lado da secção reta.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 162)

Figura 16

Assim,

$A_l = l_1 + l_2 + ... + l_n = (l_1 + l_2 + ... + l_n) . a \Rightarrow A_l = 2p . a$

onde 2p é a medida do perímetro da secção reta *a* é a medida da aresta lateral.

A área total (A_t) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais (A_l) com as áreas das bases (duas bases).

Assim,

$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2p . a + 2B$

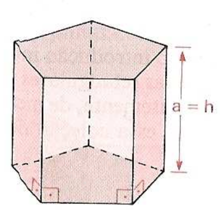
em que B é a área de uma base.

No prisma reto, a aresta lateral é igual à altura (a = h) e a base é uma secção reta.

Então:

$A_l = 2p . a \Rightarrow A_l = 2ph$

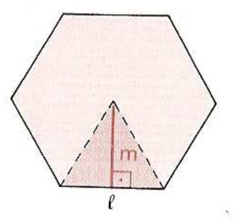
$A_t = A_l + 2B \Rightarrow A_t = 2p . h + 2B$



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 163)

Figura 17

No prisma regular, a aresta lateral é igual à altura (a = h) e a base, que é uma secção reta, é um polígono regular.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 1163)

Figura 18

Cálculo da área de base B

A área da base (B) é a soma de *n* triângulos de base l (medida do lado) e altura *m* (medida do apótema). Então:

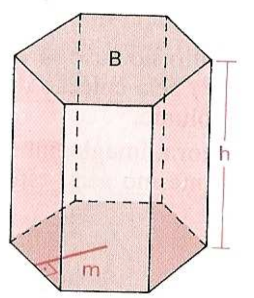
B = n . $\frac{l \cdot m}{2}$ $\Rightarrow$ B = $\frac{(n \cdot l)m}{2}$

mas,

nl = 2p = medida do perímetro

Daí,

B = $\frac{2p \cdot m}{2}$ $\Rightarrow$ B = p . m



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 163)

Figura 19

Cálculo da área total A_t

$A_l = 2p . a \quad \Rightarrow \quad A_l = 2p . h$

$A_t = A_l + 2B \;\Rightarrow\; A_t = 2p . h + 2p . m \;\Rightarrow\; A_t = 2p(h + m)$

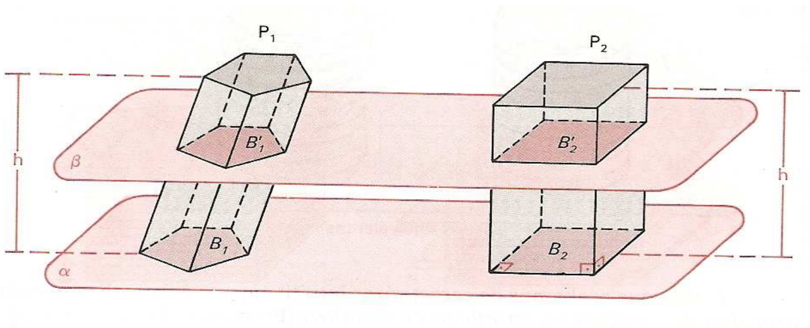
Princípio de Cavalieri

Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), que são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

Em geral, a aplicação do princípio de Cavalieri implica a colocação dos sólidos com base em um mesmo plano, paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais.

Volume do prisma

Consideremos um prisma P_1 de altura h e área da base $B_1 = B$ e um paralelepípedo retângulo de altura h e área de base $B_2 = B$ (o prisma e o paralelepípedo têm alturas congruentes e bases equivalentes).



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 166)

Figura 20

Sem perda de generalidade, suponhamos que os dois sólidos têm as bases em um mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α.

Qualquer plano β paralelo a α, que secciona P_1, também, secciona P_2, e as secções (B'_1 e B'_2, respectivamente) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

$(B'_1 = B_1,\ B'_2 = B_2,\ B_1 = B_2 = B) \Rightarrow B'_1 = B'_2$

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais.

$Vp_1 = Vp_2$

Como $Vp_2 = B_2\ h$, ou seja, $Vp_2 = B \cdot h$, vem $Vp_1 = B \cdot h$; ou, resumidamente: $V = B \cdot h$

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

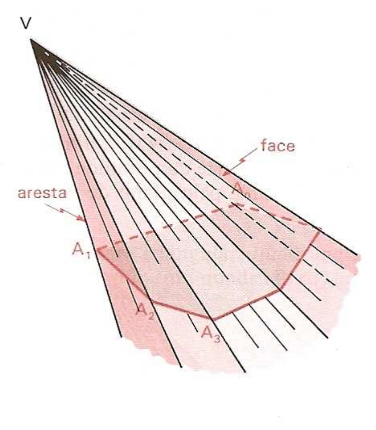
Pirâmide

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) ABC . . . MN situado em um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se superfície piramidal (ou pirâmide convexa) à reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono.

V é o vértice e o polígono ABC . . . MN, a base da pirâmide.

Podemos também definir a pirâmide como segue:

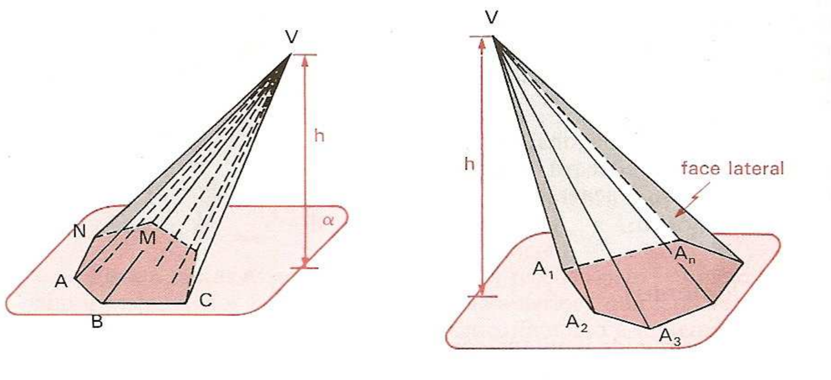
Antes definiremos pirâmide ilimitada convexa, considerando uma região poligonal plano-convexa (polígono plano-convexo) $A_1\ A_2\ ...\ A_n$ de n lados e um ponto V fora de seu plano. Chama-se pirâmide ilimitada convexa, à reunião das semi-retas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 185)

Figura 21

Pirâmide convexa limitada ou pirâmide convexa definida ou pirâmide convexa é a parte da pirâmide ilimitada convexa que contém o vértice quando se divide essa pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com essa secção.



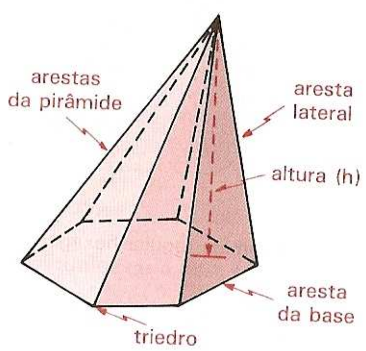
Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 186)

Figura 22

Elementos de uma pirâmide

1 base (polígono convexo), n faces laterais (triângulos), n + 1 faces, n arestas laterais, 2n arestas, 2n diedros, n + 1 vértices , n + 1 ângulos poliédricos e n triedros.

A altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 187)

Figura 23

Superfícies de uma pirâmide

Superfície lateral é a reunião das faces laterais da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área lateral e é indicada por A_l.

Superfície total é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total e é indicada por A_t.

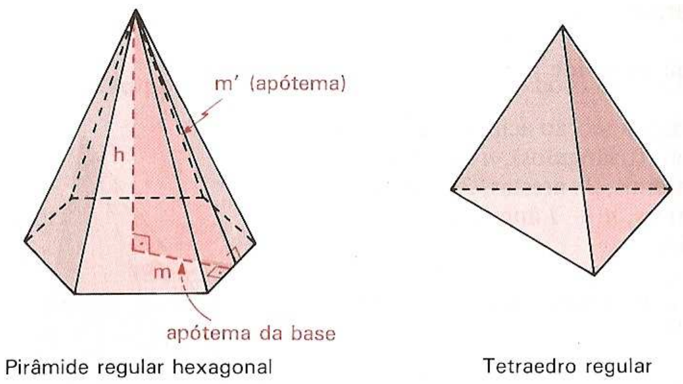
Natureza de uma pirâmide

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme a base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Pirâmide regular

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Em uma pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se apótema de uma pirâmide regular à altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 188)

Figura 24

Tetraedro

Tetraedro é uma pirâmide triangular.

Tetraedro regular é um tetraedro que tem as seis arestas congruentes entre si.

Área lateral e área total da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais.

A_l = soma das áreas dos triângulos que são faces laterais.

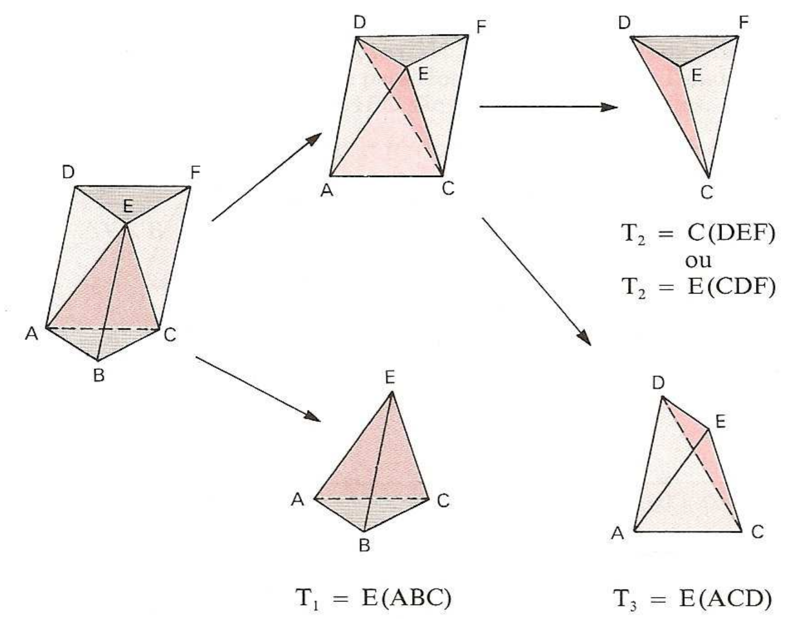
A área total de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais com a área da base.

$A_t = A_l + B$ em que B = área da base.

Volume da pirâmide

Todo prisma triangular é a soma de três pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (de volumes iguais).

Seja o prisma triangular ABCDEF.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 192)

Figura 25

Cortando esse prisma pelo plano (A, C, E), obteremos o tetraedro T_1 = E(ABC) e a pirâmide quadrangular E(ACD).

Cortando a pirâmide E(ACFD) pelo plano (C, D, E), obteremos o tetraedro T_2 = C(DEF) ou T_2 = E(CDF) e T_3 = E(ACD).

Temos, então :

Prisma ABCDEF = $T_1 + T_2 + T_3 \Rightarrow$ Vprisma = $V_{T1} + V_{T2} + V_{T3}$.

As pirâmides T_1 = E(ABC) e T_2 = C(DEF) têm o mesmo volume, pois possuem as bases (ABC e DEF) congruentes e a mesma altura (a do prisma). Então, $V_{T1} = V_{T2}$. (1)

As pirâmides $T_2 = E(CDF)$ e $T_3 = E(ACD)$ têm o mesmo volume, pois têm as bases (CDF e ACD) congruentes (note que CD é diagonal do paralelogramo ACFD) e mesma altura (distância de E ao plano ACFD). Então, $V_{T2} = V_{T3}$. (2)

De (1) e (2) vem: $V_{T1} = V_{T2} = V_{T3}$.

Volume do tetraedro

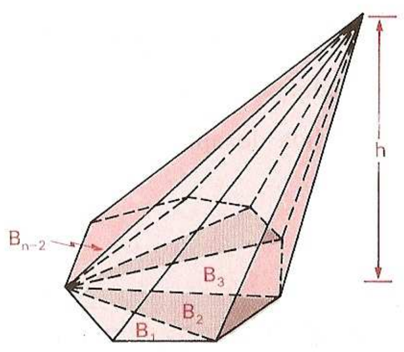
Seja B a área da base e h a medida da altura do prisma do item anterior. Notemos que B é a área da base, e h é a medida da altura do tetraedro T_1.

Em vista do teorema anterior e fazendo $V_{T1} = V_{T2} = V_{T3} = V_T$:

$$V_{T1} + V_{T2} + V_{T3} = V\text{prisma} \Rightarrow 3V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3} B \cdot h$$

Volume de uma pirâmide qualquer

Seja B a área da base e h a medida da altura de uma pirâmide qualquer. Esta pirâmide é soma de (n – 2) tetraedros.



Fonte: (Dolce; Pompeo 2005, p. 193)

Figura 26

$$V = V_{T1} + V_{T2} + \ldots + V_{Tn-2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} B_1 \cdot h + \frac{1}{3} B_2 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} B_{n-2} \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} (B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2})\, h \Rightarrow V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

O estudo de elementos teóricos, o cálculo de áreas e o volume de poliedros (prisma e pirâmide) serão fundamentais na elaboração do questionário que será aplicado aos professores pesquisados e na análise dos livros didáticos, que é objetivo de nosso trabalho.

1.3 REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

A importância do Ensino de Geometria vem sendo assunto de diversas pesquisas.

Apesar de sua reconhecida importância, podemos dizer que seu ensino vem sendo colocado em segundo plano e, muitas vezes, até desprezado. Tal constatação fundamentou-se em pesquisas que abordam a problemática do Ensino da Geometria. Para tanto, apresentamos o estudo de alguns artigos, dissertações e teses com o objetivo de mostrar os resultados obtidos em relação ao tema. Procuramos descrevê-los em ordem cronológica.

Segundo Pavanello (1993), o gradual de abandono do Ensino da Geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas, em especial, após a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º Graus, a Lei nº 5.692/71.

A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas, possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservavam o final do ano letivo para abordagem em sala de aula, talvez na tentativa, ainda que inconsciente de utilizar a falta de tempo, como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão.

No início da década de 1960, o Brasil, como a maioria dos países sofre a influência do movimento da Matemática Moderna cuja idéia central era adaptar o ensino da Matemática às novas concepções surgidas com a evolução desse ramo do conhecimento. Nos livros didáticos de Matemática lançados nesse período, estavam presentes a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

Quanto à Geometria, de acordo com Pavanello.

> Opta-se, num primeiro momento, por acentuar nesses livros as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procura-se trabalhá-la segundo uma abordagem intuitiva que se concretiza, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais pode-se resolver alguns problemas. Não existe qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaborados. (Pavanello, 1993, p.13)

A coerência do movimento da Matemática Moderna exigia pela proposição de programas um trabalho com a Geometria sob o enfoque das transformações. Como a maioria dos professores de Matemática não dominava o assunto, acabava por fazer com que muitos deixassem de ensinar Geometria sob qualquer enfoque.

A Lei nº 5.672/71 permitia que cada professor montasse seu programa, de acordo com as necessidades da clientela. Por isso, a maioria dos alunos do Ensino Fundamental deixava, assim, de aprender Geometria cujo estudo passa a ser feito quando não é eliminado, apenas no Ensino Médio, com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior ao lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído nos dois graus do ensino pela Educação Artística.

A ampliação da rede pública de ensino Fundamental e Médio, acentuada a partir de 1968, impõe a necessidade de preparação de um maior contingente de profissionais para suprir o mercado. A maioria dos cursos superiores particulares criados nesse período volta-se, então, à formação de professores ao magistério de ensino Fundamental e Médio.

Os novos cursos criados a partir daí, dão margem a críticas como: estabelecem critérios pouco rigorosos de ingresso e, sobretudo, são organizados, em sua maioria, como “licenciaturas curtas” em determinadas áreas de estudo, seguidas de especialização em uma das disciplinas dessa área. Assim, a organização não garante, em geral, o domínio dos conteúdos, nem mesmo os da disciplina sobre a qual incide a especialização.

> A maioria dos professores de matemática que atua na rede pública provém destas instituições. (Pavanello, 1993, p.14)

Em seu artigo Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos... , Kaleff afirma que:

> Durante séculos, a Geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, até mesmo para adolescentes que quase sempre recorriam à memorização (decorando) para enfrentar as dificuldades lógicas apresentadas pelo método dedutivo. Ainda assim, a Geometria formava a base das Ciências Exatas, da Engenharia, da Arquitetura e do desenvolvimento tecnológico. A partir da metade do nosso século, porém o chamado movimento da "Matemática Moderna" levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica da Geometria Euclidiana, reduzindo-a a um exemplo de aplicação da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra Vetorial. Desta forma, a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com conseqüências que se fazem sentir até hoje (...). (Kaleff, 1994, p.20)

De acordo com Kaleff (1994), é necessário que voltemos a tomar o Ensino da Geometria em nossas mãos, mas para isto é necessário que nos esforcemos para evitar que a afirmação por ela feita, em 1994, não persista em nossas escolas, dando à Geometria Euclidiana o espaço que lhe é devido nas aulas de Matemática, porém adequando-se seu ensino à realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias.

A partir dos anos de 1970, em todo o mundo iniciou-se um movimento a favor do resgate do Ensino da Geometria, visando a ampliar sua participação na formação integral do educando. Dentre os objetivos a serem alcançados, foram priorizados, de acordo com Kaleff, os seguintes:

> I - Induzir no aluno o entendimento de aspectos espaciais do mundo físico e desenvolver sua intuição espacial e seu raciocínio espacial;
>
> II - Desenvolver no aluno a capacidade de ler e de interpretar argumentos matemáticos, utilizando a Geometria como o meio para representar conceitos e as relações matemáticas;

> III - Proporcionar ao aluno meio de estabelecer o conhecimento necessário para auxiliá-lo no estudo de outros ramos da matemática e de outras disciplinas, visando uma interdisciplinaridade dinâmica e efetiva;
>
> IV - Desenvolver no aluno habilidades que favoreçam a construção do seu pensamento lógico, preparando-o para os estudos mais avançados em outros níveis de escolaridade. (Kaleff, 1994, p.20-21)

Em relação aos objetivos citados, a autora faz algumas considerações sobre o raciocínio espacial (entendendo-se por raciocínio espacial o conjunto de processos cognitivos por meio dos quais as representações mentais de objetos, relações e transformações espaciais são construídas e manipuladas), por achar ser a mais negligenciada em nosso meio escolar, fazendo referências a atividades didáticas que usam de materiais concretos.

Muitas vezes, realizamos com nossos alunos atividades que são encaradas como simples divertimentos, tais como: quebra-cabeças, jogos de montar, pinturas, colagens, etc., aparentemente mais indicadas às aulas de Artes do que as de Matemática. Entretanto, tais atividades não só são importantes para o desenvolvimento da intuição espacial e de habilidades para visualizar, desenhar, interpretar e construir, mas têm relação com a formação do pensamento geométrico dedutivo. Na grande maioria de nossas escolas de Ensino Fundamental, não é habitual serem realizadas atividades nas aulas de Matemática que favoreçam a visualização e a percepção do espaço em nossa volta.

Para que uma criança possa interpretar um desenho de um sólido espacial ou representar um sólido espacial por meio de um desenho, ela necessitará de um nível adequado de abstração que deve ser desenvolvido por meio das atividades diversas de construção, inclusive as que utilizam materiais concretos, como argila, papel cartão, cartolina, dobraduras de papel e outros.

Castilho citado por Kaleff afirma com muita propriedade em um de seus artigos que:

> Seria ingenuidade de nossa parte esperar que as crianças interpretassem com facilidade as representações habituais das figuras de três dimensões, onde a idéia de perspectiva é passada através de linhas pontilhadas que visam denotar a profundidade. (Kaleff,1994, p. 21)

Kaleff (1994) sugere que, além de levarmos para nossas escolas mais atividades que envolvam manipulação de materiais concretos, devemos nos preocupar com a elaboração de materiais didáticos que estimulem não só a percepção visual, mas também outras sensações e ainda a intuição, induzindo, no aluno, a manifestação da criatividade individual e o fortalecimento de sua autonomia e personalidade.

Em seu artigo “Por que não ensinar Geometria?” Lorenzato (1995) cita que, no Brasil, a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles, Pavanello (1993), confirmam essa lamentável realidade educacional. E por que essa omissão? São inúmeras as causas, porém duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula:

A primeira, é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas. Confirma essa afirmação a pesquisa “Os por quês matemáticos dos alunos e as respostas dos professores” (Lorenzato, 1993) realizada com 255 professores de 1ª /4ª séries com cerca de dez anos de experiência de magistério: submetidos a oito questões (propostas por alunos) referentes à Geometria plana euclidiana (conceitos de ângulos, paralelismo, perpendicularismo, círculo, perímetro, área e volume), foram obtidas 2.040 respostas erradas, isto é, o máximo possível de erros.Mas só 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos. Considerando que o professor que não conhece Geometria também não percebe o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la, ou então, não a ensinar.

A segunda causa da omissão geométrica, deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer em razão da má formação de nossos professores, quer em razão da estafante jornada de trabalho a que estão submetidos.

Como a Geometria aparece nos livros didáticos? Segundo Lorenzato (1995), infelizmente em muitos deles, a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligada de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica. Noutros, a

Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Como se isso não bastasse, a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a possibilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Desta forma, os livros didáticos contribuem para que ela seja realmente preterida na sala de aula.

Lorenzato afirma em seu artigo, Por Que Não Ensinar Geometria? , que:

> O movimento da Matemática Moderna também tem sua parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria: antes de sua chegada ao Brasil, nosso ensino geométrico era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações, e nossos alunos o detestavam. A proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perduram até hoje. (Lorenzato, 1995, p.04)

Presentemente, está estabelecido um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria não sabe como ensiná-la.

Lorenzato (1995) Por que aprender Geometria? Responde de maneira sucinta e direta, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas.

Estes trabalhos foram realizados há mais de uma década e acreditamos que pouca coisa mudou em relação ao ensino de Geometria, em especial, ao da Geometria Espacial Métrica. Esta afirmação deve-se aos resultados obtidos nas pesquisas realizadas por um grupo de pesquisadores da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, entre os anos de 2000 e 2001, coordenado por Saddo Ag Almouloud, com o objetivo de investigar questões relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Geometria nas séries finais do Ensino Fundamental.

Almouloud et al (2004) apontam alguns fatores que poderão ser considerados, como a origem das dificuldades que os professores encontram no processo de ensino-aprendizagem de saberes e conhecimentos geométricos. O primeiro em relação à formação dos professores:

- Possuem uma formação muito precária em Geometria;
- Os cursos de formação inicial não integram suficientemente uma reflexão profunda a respeito do Ensino de Geometria;
- As modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido ainda, o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria. (Almouloud et al., 2004, p.98-99)

O segundo em relação às situações de ensino que estão nos livros didáticos e que são propostos pela maioria dos professores, caracterizam-se pelos seguintes fatos:

- Não coordenação de registros de representação semiótica;
- Não percepção do importante papel da figura na visualização e nas fases de exploração;
- Os problemas propostos privilegiam resoluções algébricas, com poucos exigindo raciocínio dedutivo e demonstração;
- O sistema educativo define a política geral de educação, com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os saberes e o saber-fazer. Cada escola define os conteúdos que julgam importantes para a formação dos alunos e, desta maneira, faz com que a Geometria seja frequentemente deixada de lado.
- A passagem da Geometria Empírica para a Geometria Dedutiva é quase inexistente;
- Poucos trabalhos enfocam a leitura e a interpretação de textos matemáticos. (Almouloud et al., 2004, p.98-99)

Assim, para Almouloud a maioria dos professores do Ensino Fundamental e Médio não está preparada para trabalhar as recomendações e as orientações didáticas e pedagógicas dos PCN.

Em seu artigo “A Geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?”, Almouloud et al. destacam que um dos problemas enfrentados pelo sistema de Ensino Brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos do Ensino Básico, em Matemática e, mais especificamente, nos problemas que envolvem a Geometria.

> A Geometria é um ramo importante tanto como objeto de estudo, bem como instrumento para outras áreas. No entanto, os professores do

> Ensino Básico apontam a Geometria com uma das disciplinas cujo no processo de ensino-aprendizagem é problemático. O diagnóstico dessa situação é um dos temas de discussão nos meios acadêmicos. (Almouloud et al.,2004, p. 01)

De acordo com Almouloud, um dos fatores que têm um papel importante no baixo desempenho dos alunos em Geometria, é que a grande parte dos professores que hoje está em atividade, teve uma formação de base muito precária em Geometria.

Em seu artigo “A Geometria no Ensino Fundamental: concepções de professores e de alunos”, Manrique (2003) relata que os dados obtidos após analisar as concepções dos 24 professores participantes de sua pesquisa, revelaram a necessidade de uma formação em Geometria para esses professores.

Em seu artigo “Ensino Médio etapa final da Educação Básica ou preparatório para o Ensino Superior?”, Costa (2008) cita que o Brasil, frente à França, Espanha e Portugal é o único dos quatro países de língua latina; onde não há um currículo obrigatório, uma vez que se optou no País por definir competências e habilidades, supondo que deva haver equilíbrio entre temas da Álgebra, da Geometria, das Funções e Gráficos, da Estatística e Probabilidade.

Embora, os conteúdos de Limite, Continuidade, Taxa de variação, Conceito de Derivadas e suas aplicações, Geometria Analítica com vetores no plano produto escalar, dentre outros, já não estejam sendo enfatizados no Brasil há certo tempo; muitos outros estão sendo negligenciados, tais como: Números Complexos, **Geometria de Posição e Métrica Espacial**, Análise Combinatória e Equações Algébricas. Na França, Espanha e Portugal estes conteúdos fazem parte do currículo obrigatório. (Costa,2008)

Barrantes e Blanco (2006) publicaram o artigo “Caracterização das concepções dos professores em formação sobre o ensino-aprendizagem da Geometria”, no qual investigaram as recordações e expectativas dos estudantes para professores do Ensino Fundamental sobre a formação em Geometria que tiveram. O trabalho foi realizado na Espanha nos anos de 1996-1997 e 1999-2000. Os autores apontam o Movimento da Matemática Moderna como responsável pela deficiência que os alunos apresentaram quanto á Geometria, disciplina que, segundo eles, passou a ocupar um segundo plano.

Nas pesquisas apresentadas anteriormente, percebemos características comuns quando se trata da formação em Geometria, tanto em estudos realizados no Brasil como fora, o quadro da formação em Geometria não difere do nosso.

Sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática, distorcida.

O papel da Geometria, também, é exposto nos documentos oficiais como PCNEM, OCEM e PNLEM, que deixam evidente sua importância para desenvolver capacidades cognitivas fundamentais, como veremos no anexo I, deste trabalho.

1.4 ESTUDO DO QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Elaboramos um questionário que foi aplicado a 21 professores de Matemática do Ensino Médio de 17 escolas públicas das redes estadual e privada de ensino do ABC paulista e da Capital paulista, cujos dados obtidos foram submetidos a um tratamento quantitativo e qualitativo. A escolha dos professores e escolas não obedeceu a uma amostragem probabilística, uma vez que a participação foi de forma voluntária, mas verificamos que mesmo sendo voluntária alguns professores recebiam o questionário, levavam para suas casas e não os devolviam. Em alguns casos, tivemos de insistir para que devolvessem, mesmo assim alguns não o fizeram, provavelmente, pela insegurança do domínio da Geometria Espacial Métrica.

Neste momento, pretendemos fornecer um panorama geral a respeito de nosso questionário, no qual explicitaremos nossas escolhas em relação às suas questões. Apresentaremos a análise a priori e os resultados dos questionários nas formas quantitativa e qualitativa. Após as análises, finalizaremos com nossas considerações sobre os resultados obtidos.

Entendemos que o questionário elaborado e aplicado aos professores possa nos fornecer subsídios para analisarmos os livros didáticos, sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica, evidenciando, de fato, o que eles pensam e como agem em relação ao ensino deste objeto matemático.

O questionário utilizado foi organizado em três partes: a primeira, com seis questões, que chamamos de parte A, que teve o objetivo de coletar informações pessoais e profissionais de cada professor para construir o perfil dos docentes pesquisados.

A segunda, chamamos de parte B, compôs-se de dezesseis itens, teve como objetivo informar se os professores pesquisados trabalhavam Geometria Espacial Métrica e identificar os recursos pedagógicos utilizados no ensino da Geometria Espacial Métrica. Nesta segunda etapa, algumas situações foram propostas aos professores e seu objetivo era coletar informações para verificar o grau de conhecimento que eles demonstravam em relação aos PCNEM, PNLEM e OCEM, no bloco que trata da Geometria Métrica Espacial.

A terceira ou parte C compôs-se de quatro situações, cujo objetivo era identificar as concepções dos professores em relação ao ensino da Geometria Espacial Métrica.

Na seqüência, apresentaremos os objetivos visados para cada item ou bloco de itens que compõe este instrumento-diagnóstico.

A análise do estudo foi organizada em tabelas de distribuição de freqüência, proporcionando, desta forma, uma leitura mais rápida e organizada dos dados.

1.4.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

A parte A do questionário constituiu-se de questões a respeito do: gênero, faixa etária, tempo de magistério, carga horária de aulas, instituição que trabalha e de sua formação acadêmica.

Estas questões tiveram como objetivo coletar informações pessoais e profissionais de cada docente, bem como fornecer dados sobre sua formação acadêmica e profissional, permitindo a construção do perfil dos docentes pesquisados.

Em seguida, apresentamos os resultados coletados da parte A de nosso questionário, que determinam o perfil dos professores:

Tabela 1: Idade dos 21 professores pesquisados

Idade em anos completos[6]	**Freqüência Absoluta**
26 - 29	3
32 - 35	5
37 - 40	4
41 - 44	5
45 à 51	4
Total	21

Quanto ao gênero dos professores participantes deste estudo, tivemos a seguinte distribuição:

Tabela 2: Gênero dos 21 professores pesquisados.

Gênero	**Freqüência Absoluta**
Masculino	11
Feminino	10
Total	21

Distribuição dos professores quanto ao tempo de trabalho no magistério:

[6] Os intervalos foram obtidos por meio do software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coercitiva).

Tabela 3: Tempo de magistério dos 21 professores pesquisados

Tempo de magistério em anos completos[7]	**Freqüência Absoluta**
2 - 5	4
6 - 7	2
9 - 12	8
13 - 16	6
26 - 26	1
Total	21

Em relação ao local de trabalho, se os professores pesquisados trabalhavam em escolas públicas ou particulares, conforme os resultados obtidos:

Tabela 4: Rede de ensino dos 21 professores pesquisados.

Onde leciona	**Freqüência Absoluta**
Rede Pública	17
Rede Privada	-
Rede Pública/Privada	4
Total	21

Quanto à formação dos professores pesquisados, todos possuíam Licenciatura em Matemática.

Quando os professores pesquisados foram questionados, se em sua formação acadêmica tiveram oportunidade de estudar Geometria de forma a lhes oferecer subsídios para trabalharem com seus alunos, vejamos os resultados obtidos:

[7] Os intervalos foram obtidos por meio do software CHIC

Tabela 5: Estudou na graduação Geometria de forma satisfatória

Estudaram Geometria de forma satisfatória	**Freqüência Absoluta**
Sim	15
Não	6
Total	21

Pela análise dos dados organizados nas tabelas anteriores, foi possível concluirmos o perfil dos professores pesquisados: dos 21 do estudo, 18 tinham idade entre 32 e 51 anos; 11 eram do sexo masculino e lecionavam predominantemente na rede pública; 14 possuíam um tempo de magistério de 9 a 16 anos, todos com formação em licenciatura plena em Matemática e 15 declararam que tiveram uma formação com relação à Geometria suficiente para trabalhar com seus alunos.

A parte B do questionário compôs-se das questões de 7 a 22, que nos ofereceram informações sobre a abordagem da Geometria Espacial Métrica com o uso de materiais pedagógicos e o conhecimento dos professores pesquisados em relação às orientações e propostas institucionais que regulamentam o ensino brasileiro.

Nosso objetivo foi coletar dados para verificarmos a turma que o professor leciona, se o professor aborda ou não o bloco de Geometria Espacial Métrica e qual abordagem é utilizada, como é usado o livro didático em sala de aula. Procuramos analisar duas características distintas dos professores: uma relacionada ao fato de se atualizar quanto às orientações e propostas institucionais de ensino, e outra, relacionada às contradições que também estaremos sujeitos a encontrar, pois muitos professores afirmam que lêem os PCNEM, PNLEM e OCEM, mas suas respostas poderão ser contraditórias.

Estas questões também forneceram dados que nos permitiram verificar como os professores trabalhavam e quais os recursos didáticos (como régua e compasso, esboços, uso de material concreto e uso de laboratório de informática) eram usados para trabalharem o bloco de Geometria Espacial Métrica. De acordo com os resultados de pesquisas realizadas sobre este tema, apresentados em capítulos anteriores, constatamos que, para superar algumas dificuldades demonstradas no ensino deste objeto matemático, devemos proporcionar aos alunos atividades em que possam utilizar material concreto e construírem no plano representação de objetos tridimensionais, para que desenvolvam de acordo com Medalha (1997) seu raciocínio visual.

Apresentaremos agora os resultados obtidos na parte B, de nosso questionário:

Foi perguntado aos professores pesquisados, se gostavam de ensinar Geometria, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 6: Gosta de ensinar Geometria?

Gosta de ensinar geometria	**Freqüência Absoluta**
Sim	20
Não	1
Total	21

Perguntamos aos professores pesquisados, se lecionam ou já lecionaram na 2ª série do Ensino Médio, foram obtidas as seguintes respostas:

Tabela 7: Leciona ou já lecionou na 2ª série do Ensino Médio?

Leciona ou já lecionou na 2ª série do Ensino Médio/	**Freqüência Absoluta**
Sim	19
Não	2
Total	21

Quanto à abordagem utilizada para trabalhar Geometria Espacial Métrica, vejamos os resultados apresentados nesta pesquisa:

Tabela 8: Abordagem utilizada para trabalhar Geometria Espacial Métrica

Abordagem de sua preferência	**Freqüência Absoluta**
Geometria Experimental	5
Geometria Demonstrativa	14
Outras	2
Total	21

Em relação aos motivos que teriam para não abordarem a Geometria Espacial Métrica na 2ª série do E.M, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 9: Motivos para não abordarem a Geometria Espacial Métrica

Motivos para não abordarem Geometria Espacial Métrica	**Freqüência Absoluta**
Os livros didáticos não abordam esse conteúdo	1
Não domino esse assunto	1
Esse conteúdo é complexo para a 2ª série do E.M	1
Os alunos não entendem	1
Outros	2
Total	6

Vejamos os resultados da pesquisa, quando os professores foram indagados se usavam efetivamente o livro didático em sala de aula.

Tabela 10: Usa efetivamente o livro didático?

Usa efetivamente o livro didático em sala de aula?	**Freqüência Absoluta**
Sim	12
Não	9
Total	21

Os dados da Tabela 11 apresentam os resultados obtidos pelos 21 professores pesquisados, se tomam ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos, antes de escolherem para usar ou consultar.

Tabela 11: Toma ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos?

Toma ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos?	**Freqüência Absoluta**
Sim, sempre	5
Sim, ocasionalmente	14
Não, não consulto embora conheça.	1
Não, não conheço as orientações contidas no guia do PNLD ou do PNLEM	1
Total	21

Em relação à metodologia de trabalho em aula com o livro didático, tivemos os seguintes resultados:

Tabela 12: Formas de utilização do livro didático em sala de aula.

De que forma os professores utilizam o livro didático em suas aulas?	**Freqüência Absoluta**		
	Sempre	**Raramente**	**Nunca**
Para acompanhamento das aulas	9	8	4
Para pesquisa	7	10	4
Para exercícios	15	4	2
Para trabalho em grupo	6	9	6

Os professores pesquisados foram questionados se liam o Manual do Professor do Livro Didático que utilizam, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 13: Ler o Manual do Professor do Livro Didático que utiliza

Ler o Manual do Professor do livro que utiliza	**Freqüência Absoluta**
Sempre	4
Com certa freqüência	8
Raramente	9
Nunca	0
Total	21

Quando os professores pesquisados foram questionados, a respeito do grau de conhecimento do conteúdo de Geometria Espacial Métrica, em relação aos PCNEM, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 14: Grau de conhecimento dos 21 professores sobre o conteúdo dos PCNEM em relação ao bloco Geometria Espacial Métrica

Grau de conhecimento dos PCNEM em relação ao Bloco de Geometria Espacial Métrica	**Freqüência Absoluta**
Conheço profundamente	1
O essencial para aplicação cotidiana	12
Superficialmente	6
Apenas por meio de artigos publicados e comentários	2
Nenhum conhecimento	0
Total	21

Em relação à pergunta, se os professores tiveram a oportunidade de ler as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, conseguimos os seguintes resultados:

Tabela 15: Os professores já leram as OCEM?

Você já leu as OCEM?	**Freqüência Absoluta**
Sim	17
Não	4
Total	21

Quando os professores pesquisados foram questionados se pensam que o livro didático que utilizam, está de acordo com os PCNEM quanto ao bloco de Geometria Espacial Métrica, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 16: O livro didático que você usa, está de acordo com PCNEM?

Você pensa que o livro didático, utilizado por você está de acordo com PCNEM?	**Freqüência Absoluta**
Sim	15
Não	2
Não sei	4
Total	21

Em relação à metodologia usada pelos professores pesquisados, no ensino de Geometria Espacial Métrica foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 17: Metodologia usada para trabalhar Geometria Espacial Métrica

De que forma os professores trabalham Geometria Espacial Métrica?	**Freqüência Absoluta**		
	Sim	**Não**	**Às vezes**
Exige que o aluno faça construções com régua e compasso	4	4	13
Trabalha com esboços	8	3	10

Quando foi perguntado aos professores pesquisados, se a figura era indispensável na resolução de um problema de Geometria, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 18: A figura é indispensável na resolução de um problema de Geometria

A figura é indispensável na resolução de um problema de Geometria	**Freqüência Absoluta**
Sim	11
Não	4
Às vezes	6
Total	21

Os dados da Tabela 19 apresentam as respostas dos professores pesquisados, quanto à freqüência do uso em sala de aula de recurso pedagógico:

Tabela19: Freqüência do uso de recursos pedagógicos

Freqüência do uso dos recursos pedagógicos	**Freqüência Absoluta**			
	Algumas vezes por semana	**Algumas vezes por mês**	**Algumas vezes por ano**	**Nunca**
Atividades do livro didático	6	9	5	1
Material concreto	1	16	3	1
Laboratório de informática	-	2	4	15

Ao analisar os dados apresentados na parte B, constatamos que vinte dos professores pesquisados declararam gostar de ensinar Geometria e 19 já lecionaram na 2ª série do Ensino Médio; com relação ao ensino da Geometria Espacial Métrica, seis disseram que não trabalhavam esse tópico por diversos motivos, conforme os dados apresentados na Tabela 9.

Quanto ao uso efetivamente do livro didático em sala de aula, dos vinte e um professores pesquisados, 12 declararam usá-lo, mas na maioria das vezes na resolução de exercícios. Só quatro professores disseram ler sempre o manual do professor do livro didático e 17 declararam ler as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM). A maioria dos professores toma ciência da análise e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos, conforme os dados da Tabela 13.

Quanto à abordagem utilizada no ensino da Geometria Espacial Métrica, 14 professores declararam que recorrem à Geometria demonstrativa, nunca usam o laboratório de informática e usam pouco material concreto.

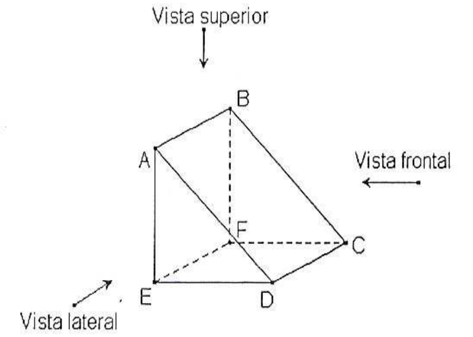
Verificamos que 11 professores achavam que a figura é indispensável na resolução de um problema de Geometria, mas só 4 trabalhavam com construção, usando régua e compasso e oito com esboços.

Na parte C do questionário, propusemos quatro problemas que exploravam a resolução do professor em nível compatível com a resolução de seu aluno. Em cada situação-problema, o docente era submetido a identificar conceitos geométricos necessários à resolução dos problemas e indicar as providências necessárias para que alguns erros apresentados pelos alunos não ocorressem novamente. Nossa análise a priori foi organizada tendo em vista contemplar os conhecimentos prévios e as possíveis soluções de cada questão.

Nestas questões, pretendíamos verificar situações, como: construções e planificações das superfícies de poliedros, as dificuldades de visualização de objetos tridimensionais em superfícies planas. Estas questões foram apresentadas nas pesquisas e artigos que usamos como estudos preliminares, como sendo uma das dificuldades apresentadas de se trabalhar com o bloco de Geometria Espacial Métrica.

23) Qual estratégia, segundo sua opinião, os alunos usariam para fazer um esboço à mão livre das vistas: lateral, frontal e superior dos sólidos abaixo e depois, fazerem a planificação destes sólidos.

I) II)



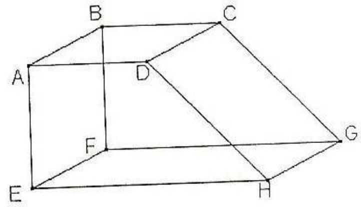


Figura 27

Conhecimentos Prévios: para que o professor respondesse a esta questão, era necessário que soubesse a definição e classificação de poliedros e quais eram os polígonos representados pelas vistas (superiores, frontais e laterais) de um poliedro.

Possíveis soluções:

- Usando os sólidos concretos, para que possam manusear.
- Construiriam os poliedros com cartolina, facilitando a visualização das faces; e
- Recorrendo somente à imagem mental, que tem do sólido representado no plano, representariam suas vistas (polígonos), usando régua e fariam sua planificação.

24) Quais conceitos você acredita serem necessários para que o aluno possa calcular a área da superfície e o volume de cada um dos sólidos do item 23?

Conhecimentos necessários para responder esta questão: considerando que as dimensões fossem informadas, saber calcular áreas de polígonos (triângulos, retângulos e trapézios) e calcular o volume de prismas.

25) Perguntado aos alunos quais pontos (A, B ou C) estão mais próximos da reta r, veja as respostas de alguns deles. Qual você acredita ser a mais coerente?

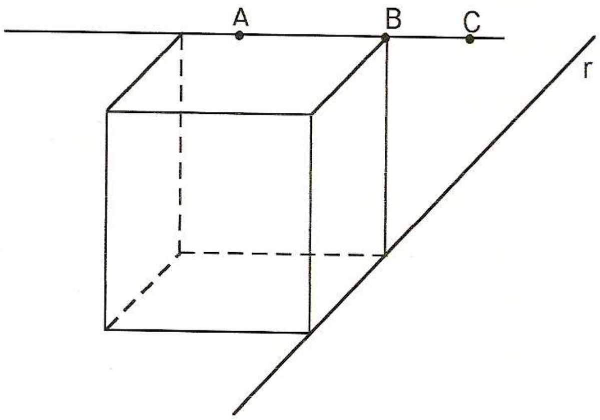


Figura 28

I) O ponto C está mais próximo da reta r;

II) O ponto B está mais próximo da reta r;

III) O ponto A está mais próximo da reta r; e

IV) Os três estão a uma mesma distância da reta r.

Qual providência você tomaria para aqueles que, em sua opinião não acertaram, para que não voltassem a cometer o mesmo erro?

Conhecimentos necessários para responder a esta questão: conhecer o posicionamento de retas no espaço (paralelas, perpendiculares e reversas), saber o conceito de distância entre ponto e reta.

Com relação às providências para evitar que cometessem o mesmo erro, esperávamos que os professores propusessem a representação concreta da situação para que os alunos pudessem visualizar melhor a situação proposta.

26) Algumas planificações foram apresentadas aos alunos. Quando eles foram questionados qual ou quais poderiam representar a planificação de um tetraedro, veja como alguns responderam. Que estratégia você acredita que eles usaram?

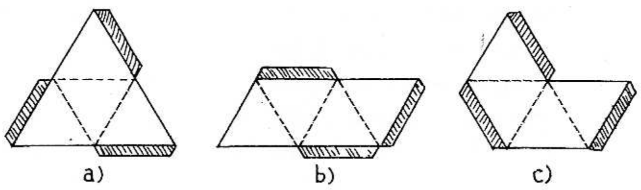


Figura 29

I) O aluno X respondeu, letra a;

II) O aluno Y respondeu, letra b;

III) O aluno W respondeu, letras a e b;e

IV) O aluno Z respondeu, letra c.

Qual providência você tomaria para aqueles que, em sua opinião não acertaram, para que não voltassem a cometer o mesmo erro?

Conhecimentos Prévios: para responder a esta questão, era necessário que o professor soubesse a definição e classificação de pirâmides, para que pudesse compreender o que era um tetraedro.

A respeito das providências, esperávamos que o professor propusesse aos alunos a construção com cartolina das três situações, para que verificassem quais realmente representavam as planificações de um tetraedro.

Na seqüência, apresentamos os resultados obtidos com a parte C de nosso instrumento de pesquisa.

As Questões 23 e 24 de nosso questionário eram de modalidades subjetivas. Desta forma, obtivemos diferentes respostas para cada item, houve também casos em que os professores não responderam. Agrupamos as respostas tomando como referência as respostas que esperávamos que os professores apresentassem para essas atividades, que nos permitiriam uma melhor organização, que nos iria auxiliar na análise qualitativa dos dados obtidos.

Abaixo reproduzimos as respostas apresentadas nos protocolos, fornecidas pelos 21 professores pesquisados às questões 23 e 24:

Respostas do questionário de pesquisa Questão 23

Questão 23: Que estratégia, segundo a sua opinião, os alunos usariam para realizar um esboço à mão livre das vistas: lateral, frontal e superior dos sólidos abaixo, e depois, construírem a planificação desses sólidos.

I) II)

Figura 30

1- Tentativa e erro;

2- Em branco;

3- Utilizando o próprio desenho apresentado, por discussões em grupos; ou construiriam a superfície representativa desse sólido (s/escala) e fariam à planificação;

4- Em branco;

5- Desenhos de polígonos presentes na figura;

6- Em branco;

7- Em branco;

8- Em branco;

9- Eu acredito que eles inicialmente tentariam “cortar” as figuras para planificá-las;

10- Na Figura I, acredito que os alunos fariam a partir de dois triângulos e na Figura II a partir de dois trapézios e, em seguida, ligando seus vértices.

As planificações seriam construídas a partir do retângulo da base para enfim serem desenhados os lados adjacentes a eles;

11- O esboço por observação, a planificação com régua e algumas medidas;

12- Acredito que eles mediriam os lados das figuras e depois tentariam reproduzi-las;

13- Visualização da figura no todo, em seguida, desenhando cada parte individual representada por figuras planas;

14- Começar desenhando as figuras planas e a partir daí projetar os sólidos;

15- Acredito que eles iriam visualizar cada face individualmente e fazer o desenho das figuras planas que compõem o todo;

16- Observação e tentativa, um modelo sempre ajuda;

17- Eles montariam a estrutura com papel cartão ou algo semelhante. Talvez usando embalagens de produtos recicláveis;

18- Tentariam desenhar cada figura que já conhecem para compor a figura total;

Tentariam decompor cada figura;

19- Eles deveriam observar quais vértices que compõem a face que pretendem desenhar;

20- Em geral, não trabalho planificações com os alunos. Não posso responder a essa questão; e

21- Devo dizer que existe muita dificuldade no início das aulas de Geometria Espacial, em razão das deformações que o sólido (objeto espacial: 3D) sofre quando os representamos na lousa ou caderno (2D).

Tenho de explicar sobre tais fatos e as propriedades de paralelismo, perpendicularismo e projeção geométrica, de modo diversificado para que os alunos consigam esboçar bem os desenhos.

A respeito da estratégia dos alunos, eles se valem do que aprenderam sobre os tópicos que já citei no que diz respeito ao esboço e no caso da planificação, eu primeiro abordo de maneira “concreta” (atividades de construção de sólidos com canudos ou varetas). Creio que a estratégia do aluno seja imaginar o sólido sendo “descascado”, como uma laranja respeitando-se as propriedades poligonais dos casos I e II, ou seja, ele tem em mente as deformações que ocorrem quando um objeto 3D é representado no plano.

Tabela 20: Respostas dos 21 professores, referentes à Questão 23

Qual estratégia, os alunos usariam para resolverem a questão 23?	**Freqüência Absoluta**
Em branco	6
Completamente incorreta	0
Parcialmente correta	6
Completamente correta	9
Total	21

Respostas do questionário de pesquisa Questão 24

Questão 24: que conceitos você acredita que sejam necessários para que o aluno calcule a área da superfície e o volume de cada um dos sólidos do item 23?

1- Área de figuras e volume de sólidos ;

2- Em branco;

3- Áreas de figuras geométricas planas, noções de capacidade de figuras geométricas ou recipientes, cálculo de volumes de sólidos geométricos e recipientes, conceitos básicos operatórios: multiplicação, adição, conversões de unidades;

   Estou considerando que as dimensões foram informadas e que, na prática, a pessoa que nunca teve contato com figuras geométricas, mas trabalha com isso (pedreiro, por exemplo), também, poderá realizar seus cálculos;

4- Em branco;

5- Cálculo de áreas de polígonos para área e para cálculo do volume saber cálculo de volume de primas;

6- Base e altura, capacidade;

7- Base e altura, volume e capacidade;

8- Base e altura, capacidade;

9- Ele deve saber o que é aresta, altura, que tipo de figura é, ter bem definido as noções de Geometria Métrica Plana;

10- Cálculo de área de figuras planas (quadrado, triângulo, trapézio);

Decomposição de figuras (isso facilitaria o cálculo dos volumes);

Cálculo de volumes de figuras tridimensionais;

11- Área de cada figura plana;

Volume: o que é compreensão do conceito;

12- Em branco;

13- Conceitos de área e de volume de figuras planas;

Conceitos de vértices, segmentos de retas e plano;

Conceitos de unidades de medidas;

14-Áreas das figuras planas, teorema de Pitágoras;

15- Conceitos de áreas e de volumes de figuras planas;

Conceitos de vértices, segmentos de retas e plano;

Conceitos de unidades de medidas;

16- Noções básicas de cálculos, operações e diferenciar área de volume mais concretamente. Também noções métricas e de manuseio com régua, esquadros, mas ainda sem isso trabalhamos tudo de uma só vez;

17- Área do trapézio, área do retângulo, área do triângulo, linhas paralelas, linhas perpendiculares e semelhança de figuras geométricas;

18- Área de superfícies planas (triângulos, quadrado, retângulo e trapézio);

Decomposição de figuras, volume (paralelepípedo);

19- Para calcular a superfície dos sólidos, ele precisa saber área de triângulo e de quadrilátero; para calcular o volume, ele deve calcular como paralelepípedo e descontar o volume da parte que falta (metade do paralelepípedo) na Figura I e na Figura II ele pode decompor em 1 paralelepípedo + 1 prisma triangular igual ao I;

20- Conhecimento sobre área de figuras planas, relações métricas em triângulos e volume do paralelepípedo (prisma); e

21- Partindo-se do princípio que os alunos possuem uma boa habilidade para “planificar” sólidos, basta saber apenas o cálculo de áreas de polígonos elementares e a propriedade de que os sólidos são translações de um triângulo retângulo e de um trapézio (sólidos regulares), sendo necessário apenas multiplicar a área da base pela altura em cada item.

Tabela 21: Conceitos necessários para calcular área da superfície e volume dos sólidos da Questão 24

Conceitos necessários para calcular área da superfície e volume dos sólidos da Questão 24	**Freqüência Absoluta**
Em branco	3
Completamente incorreta	-
Parcialmente correta	9
Completamente correta	9
Total	21

A seguir, apresentamos o resultado dos 21 professores pesquisados, em relação à questão 25 de nosso questionário.

Tabela 22: Resposta dos 21 professores pesquisados, em relação à questão 25.

Qual ponto A, B ou C, está mais próximo da reta r?	**Freqüência Absoluta**
O ponto C	5
O ponto B	8
O ponto A	-
Os três estão a uma mesma distância da reta r	4
Em branco	4
Total	21

Os dados da tabela 23 fornecem o resultado da Questão 26 de nosso instrumento de pesquisa, apresentado pelos professores pesquisados:

Tabela 23: Fornece o resultado da Questão 26 de nosso questionário.

Quais figuras representam planificações de um tetraedro?	**Freqüência Absoluta**
A letra **a**	7
A letra **b**	-
As letras **a** e **b**	7
A letra **c**	-
Em branco	7
Total	21

Quando analisamos os dados coletados da parte C do questionário, verificamos um baixo índice de respostas corretas em relação às Questões 23 e 24, que envolviam conceitos necessários ao cálculo de volume e área de superfície de prisma.

Em relação à Questão 25, esta já tinha sido aplicada por Cavalca (1997) que concluiu, como sendo uma das dificuldades apresentadas pelos alunos, pois os alunos tratam figuras do espaço como se fossem figuras planas, porque houve várias respostas que assinalavam, dentre os pontos A, B e C, este último era o mais próximo da reta r.

De acordo com Cavalca (1997), o desenho em perspectiva está no plano e seu sentido no espaço. A representação gráfica tem duas dimensões e o objeto é tridimensional. A dificuldade está em relacionar os dois.

Constatamos a mesma dificuldade entre os professores pesquisados, pois só oito disseram ser o ponto B mais próximo da reta r.

Verificamos a dificuldade dos professores para identificar um sólido, por meio de sua planificação na Questão 26 do questionário.

O baixo índice de acerto apresentado nas Questões da parte C leva-nos a concordar com Lorenzato (1995) que, em seu artigo, Por que não ensinar Geometria?, aponta como sendo uma das causas que atuam diretamente na sala de aula, é o fato de muitos professores não deterem o conhecimento geométrico necessário para realização de suas práticas pedagógicas. Confirmamos nesse caso, com nossa pesquisa o que disse Lorenzato “o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não a ensinar”. Pois, de acordo com esta pesquisa, 20 professores pesquisados disseram gostar de ensinar Geometria, e seis declararam não abordar esse tema.

O próximo passo deste trabalho consiste na apresentação de nossa questão de pesquisa e a fundamentação teórica que norteou o presente trabalho.

CAPÍTULO II – PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse momento, nossa intenção é a apresentação da questão de pesquisa que motivou este trabalho e do quadro teórico usado para embasar a pesquisa.

2.1 PROBLEMÁTICA E QUESTÃO DE PESQUISA

Ao lecionar oito anos em escolas públicas da região do ABC paulista, nesse período trabalhando em cinco escolas diferentes, constatamos que os professores de Matemática do Ensino Médio não costumavam trabalhar Geometria, exceto no 3º ano quando ensinada apenas Geometria Analítica.

Ficamos desejosos para desvendar os possíveis motivos que levam alguns professores do 2º ano do Ensino Médio não trabalharem Geometria Espacial Métrica, em especial, o cálculo de volume e a área de superfícies de sólidos geométricos, como prismas e pirâmides, já que em tempos de contextualização do objeto de estudo, vejo neste uma ótima oportunidade para esta abordagem.

Nesta pesquisa, procuramos responder à questão:

- Os livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio desenvolvem os conteúdos referentes à Geometria Espacial Métrica ou Geometria Tridimensional Métrica dos Poliedros, em especial, prismas e pirâmides, sob a perspectiva dos resultados das pesquisas em Educação Matemática de Duval (1995); Robert (1998); Rommevaux (1999); Parsysz (2000) e Ponte et al.(2005) sobre o tema e estão de acordo com os PCNEM, OCEM e PNLEM, por serem estes os textos oficiais que regulamentam e orientam a Educação Nacional de responsabilidade do Ministério da Educação?

De acordo com nossas pesquisas bibliográficas: Lajolo (apud Friolani 2007, p.47); OCEM, (2006, p.86) e Lorenzato (1995, p. 4), constatamos que o livro didático é o principal recurso pedagógico usado pelos professores, quando não o único. Nosso objetivo foi verificar se as atividades por eles propostas proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo atividades com uso de material concreto, construções com instrumentos como régua e compasso ou softwares que facilitam a visualização e desenvolvem o pensamento geométrico espacial, apontados nas pesquisas como essenciais ao estudo da Geometria Espacial Métrica. E analisarmos se o manual do professor propõe atividades diferenciadas, como as exigidas pelo PNLEM/06.

Para responder à questão da pesquisa, analisamos livros didáticos conforme as orientações das OCEM/06.

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que "o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa". É importante, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais. (OCEM,2006, p.86)

Para selecionarmos os livros que seriam analisados usamos os critérios estabelecidos no Capítulo III, página 87: Análise dos Livros Didáticos.

Sob a luz das teorias de Duval (1995); Parsysz (2000) e Robert (1998), definimos três categorias para análise dos livros didáticos, conforme descritas no Capítulo III.

Realizamos uma pesquisa bibliográfica em sites, biblioteca da PUC/SP e em livros e revistas de trabalhos realizados a respeito do ensino-aprendizagem da Geometria e de textos oficiais que regulamentam o ensino no Brasil, conforme descrição feita no anexo I, deste trabalho.

2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Recorreremos às teorias de Raymundo Duval (1995); de Aline Robert (1998) e de Bernard Parsysz (2000) para fundamentar nossa pesquisa.

Em seu livro Sémiosis et Pensée Humaine (1995), Duval fornece um referencial estruturado da análise do funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Os diferentes tipos de representações semióticas mobilizáveis no funcionamento matemático são designados por ele de "registros de representação" e classificados em quatro tipos, conforme os dados do Quadro 1:

Quadro 1– Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

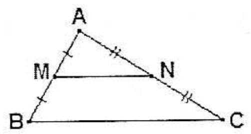
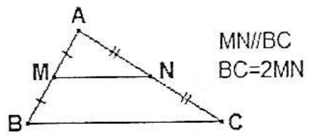
	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: argumentação baseada em observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configuração em dimensão 0,1,2 ou 3). apreensão operatória e não só perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são sobretudo algoritmos.	**Sistemas de escritas**: numéricas (binária, decimal, fracionária...); simbólicas (línguas formais); algébricas. Cálculo	**Gráficos cartesianos** mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval(1995)

Um registro pode dar origem a outros registros. Por exemplo, o registro numérico pode originar o registro numérico decimal e ou registro numérico fracionário.

Veja um exemplo de representação de um teorema de Geometria em três registros:

Quadro 2 – Exemplo de representação de um teorema de geometria em três registros.

Língua natural	Ligando os pontos médios dos lados de um triângulo, obtém-se um segmento paralelo ao terceiro lado e cuja medida é a metade da medida do terceiro lado
Registro simbólico	A$\notin \overline{BC}$, M $\in \overline{AB}$, MA = MB, N $\in \overline{AC}$, NA = NC $\Rightarrow \overline{MN} // \overline{BC}$ e 2.MN=BC
Registro figural	
Registro misto (figural + simbólico)	

Fonte: Bongiovanni (2006,p.18-19)

Duval (1995) sustenta para que um conhecimento ou um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz o apreenda não só com um registro, mas, pelo menos, dois registros de representação e que saiba coordenar esses registros.

Existem dois tipos de transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

De acordo com Duval, quando se descreve a resolução matemática de um problema e quando se analisa a produção dos alunos, não se toma o cuidado de distingui-los.

O tratamento de uma representação é a transformação da representação em outra equivalente, mas, permanecendo no mesmo registro.

Para Duval, quase sempre é só este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação.

De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.

A conversão de uma representação é a transformação da representação em outra equivalente, mas não permanecendo no mesmo registro.

Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.

A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam, conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Quando as conversões são feitas nos dois sentidos, há maior possibilidade de mobilizar os conhecimentos dos alunos visando a aquisição de um conceito.

Em geral no ensino, as atividades matemáticas só consideram os tratamentos. Duval sustenta que, em uma fase de aprendizagem, a conversão desempenha um papel essencial na apreensão do conceito e que as conversões são as mudanças de registro mais eficazes para aquisição de um conceito.

Segundo Duval, se quisermos analisar as dificuldades de aprendizagem em Matemática, será preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos.

De grande importância para o estudo da Geometria, objeto matemático de nossa pesquisa, é a Representação de figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações em dimensão 0, 1, 2, ou 3), que chamaremos de **Registro Figural** (registro figural da perspectiva Cavaleira, registro figural da Geometria Descritiva, registro figural da perspectiva Cônica,...). O principal motivo é que, na resolução de um problema, a representação figural mostra mais facilmente a idéia da solução que em outros registros. Os desenhos permitem um acesso mais direto, mais rico e menos custoso que um texto. Mas um desenho é visto por um aluno diferentemente de como é percebido por um professor.

Duval destaca quatro maneiras de apreender uma figura: a **apreensão perceptiva** é a que permite identificar ou reconhecer imediatamente um objeto matemático ou a forma de um objeto no plano e no espaço A **apreensão discursiva** é a que corresponde a uma explicitação das propriedades matemáticas da figura, além das indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses, a **apreensão seqüencial** é uma apreensão solicitada na construção de uma figura geométrica com a ajuda de um instrumento (régua, compasso, software) e a **apreensão operatória** é aquela que corresponde a transformar a figura dada em outras figuras para obter novos elementos que poderão nos levar à idéia da solução de um problema ou de uma prova.

Segundo Duval (1995), a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.

Em nossa análise dos livros didáticos, observaremos como são apresentadas as atividades de Geometria Métrica Tridimensional, quanto aos tipos de registros propostos e solicitados aos alunos, se é exigida uma conversão de registro para que seja solucionado, como é tratado e proposto o Registro Figural.

Em “Articulação entre percepção e dedução num meio geométrico para professores da escola elementar” Parsysz (2000) apresenta um modelo para um quadro teórico do ensino da Geometria onde destaca quatro etapas no desenvolvimento do pensamento geométrico:

I) A Geometria concreta (nível G0): nesse nível, parte-se da realidade, do concreto e os objetos são materializados.

II) A Geometria espaço-gráfica (nível G1): que é a Geometria das representações figurais e gráficas. Nesse nível, os objetos são bidimensionais, como por exemplo, desenhos produzidos em uma folha com o uso de instrumentos de medida, como régua, compasso, esquadro e transferidor ou em uma tela de um computador. A justificativa de propriedade é feita pelo “olhar”.

III) A Geometria proto-axiomática (nível G2): nesse nível, os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas baseadas em premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo. Os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na Geometria axiomática, mas não há necessidade de explicar um sistema de axiomas. É possível que o sabido se apóie ainda no percebido.

IV) A Geometria axiomática (nível G3): nesse nível, os axiomas são explicitados completamente.

Nos níveis G0 e G1, os objetos são concretos e as validações são perceptivas e, nos níveis G2 e G3, os objetos são teóricos e as validações são dedutivas. A distinção entre os quatro níveis situa-se nas rupturas de contrato. Nos níveis G0 e G1, as justificativas são feitas pelo percebido; no nível G2, por propriedades evidentes e no nível G3 por um sistema de axiomas.

Os dados do quadro sintetizam a classificação dos níveis de Parsysz:

Quadro 3: Classificação de Geometrias.

<table>
<tr><td colspan="5">Classificação de Geometrias</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Geometrias não axiomáticas</td><td colspan="2">Geometrias axiomáticas</td></tr>
<tr><td>Tipo de Geometria</td><td>Geometria concreta (G0)</td><td>Geometria espaço-gráfica (G1)</td><td>Geometria proto-axiomática (G2)</td><td>Geometria axiomática (G3)</td></tr>
<tr><td>Objetos</td><td colspan="2">Físicos</td><td colspan="2">Teóricos</td></tr>
<tr><td>Validações</td><td colspan="2">Perceptivas</td><td colspan="2">Dedutivas</td></tr>
</table>

Fonte: Parsysz (2000, p.64 apud Carlovich 2005)

Parsysz (2000, apud Carlovich, 2005) considera que a articulação entre G0, G1 e G2 é o ponto central da problemática do ensino obrigatório da Geometria e que a gestão do salto conceitual entre G1 e G2 é um elemento essencial, e os conceitos em jogo de G1 e G2 e sua articulação devem ser fixados, bem como o status da figura.

Em G1, os conceitos são representações físicas dos objetos concretos, enquanto em G2 os conceitos em jogo são entidades abstratas, asseguradas por definições, axiomas e propriedades que podem ser representados por objetos físicos sem, entretanto, limitar-se a eles.

Os níveis de Parsysz podem ser caracterizados pelas atividades desenvolvidas pelos alunos. Por exemplo, no problema para determinar a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo, se o aluno confeccionar um triângulo de papel e a seguir recortar com uma tesoura os três ângulos, formando com eles um semicírculo, ele estará no nível G0 que corresponde a uma geometria concreta. Se ele desenhar um triângulo e a seguir medir os três ângulos com um transferidor (ou construir um triângulo com a ajuda de um software) e medir os ângulos e observar a soma de suas medidas, comparando-as com a soma de seus colegas, ele estará no nível G1, ou seja, na Geometria espaço-gráfica.

Se ele traçar uma paralela a um dos lados e utilizar o fato (que não é justificado) que retas paralelas determinam ângulos alternos internos congruentes para provar que a soma das medidas dos ângulos é igual a 180º, ele estará no nível G2 que é o da Geometria proto-axiomática; e se ele fizer uma demonstração apoiada em um sistema axiomático de referência, ele estará no nível G3 que é o da Geometria axiomática.

Para Parsysz (1989, apud Silva, 2006), a representação de uma figura tridimensional em um ambiente plano transforma o objeto espacial em uma figura plana e para tanto é necessário utilizar os devidos códigos de leitura e descrição dessas representações, tais como: linhas pontilhadas para indicar a profundidade, facilitando a visualização de arestas ocultas, a utilização de cores para identificar faces não visíveis, etc.

Em nosso trabalho, observamos nos livros didáticos de Matemática do 2º ano do Ensino Médio, no capítulo de Geometria Espacial Métrica, em particular, o trabalho proposto para o estudo dos poliedros, objeto matemático de nossa pesquisa, como os níveis de Parsysz G0, G1 e G2 são articulados nas definições das fórmulas e teoremas para encontrar área e volume deste objeto.

O artigo “Ferramentas de Análise dos Conteúdos Matemáticos a Ensinar” é dividido em três partes por Robert (1998). No entanto, prender-nos-emos à segunda parte desse artigo na qual autora estuda as “Quatro Dimensões de Análise dos Conteúdos a Ensinar”.

As três primeiras dimensões são características estritamente ligadas às noções e a seus domínios de aplicações, como são introduzidas nos programas, são características relacionadas diretamente à Matemática e à maneira com que as noções ocorrem nos currículos. Em contrapartida, a última interessa pelas formas como são colocados em funcionamento nos problemas, relacionados ao modo como são trabalhados pelos estudantes nos exercícios ou problemas.

A esta última dimensão, a autora chama de “Níveis de Apostas em Funcionamento dos Conhecimentos pelos Alunos” e classifica o funcionamento dos conhecimentos pelos alunos em três níveis: **técnico**, **mobilizável** e **disponível**. Em nossa pesquisa, esta forma de classificar o funcionamento dos conhecimentos será utilizada na presente pesquisa para analisar as atividades, exercícios e problemas propostos pelos livros didáticos para alunos da 2ª série do Ensino Médio no tópico de Geometria Espacial Métrica ou (Geometria Tridimensional), e observaremos se são propostas nas atividades que os alunos são desafiados a colocarem em prática os diferentes tipos de níveis conhecimentos.

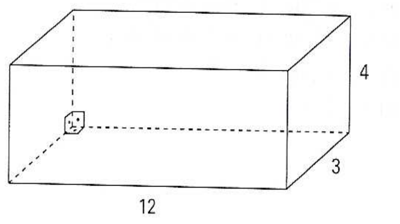
De acordo com Robert (1998), o aluno põe em funcionamento um conhecimento de nível técnico quando resolve uma questão simples que corresponde a uma aplicação imediata de um teorema, de uma propriedade, de uma definição ou uma fórmula. Em geral, há indicações dos métodos a utilizar.

No nível de funcionamento mobilizável, os conhecimentos que serão utilizados, são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de alguma repetição, antes de serem colocados em funcionamento.

O nível de funcionamento disponível corresponde a resolver uma questão proposta sem nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor. É preciso achar as informações nos conhecimentos anteriores, o que favorece a resolução da questão.

Apresentaremos exemplos de atividades, no quadro de Geometria Espacial Métrica, em que cada um dos níveis é apresentado.

A atividade que apresenta um nível de funcionamento técnico: a figura abaixo representa um paralelepípedo reto retângulo com dimensões 3 cm, 4 cm e 12 cm.



Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 31: paralelepípedo reto retângulo

Calcule:

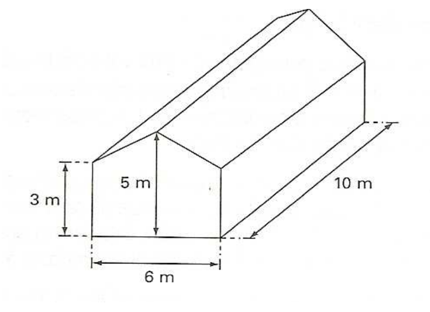
a) a medida de uma das diagonais do paralelepípedo;

b) a área total de sua superfície; e

c) o seu volume.

Uma simples aplicação das fórmulas (considerando a, b, c as medidas das dimensões), da diagonal d = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, área total A_t = 2(a.b + a.c + b. c) e do volume V = a. b. c , resolve esta atividade.

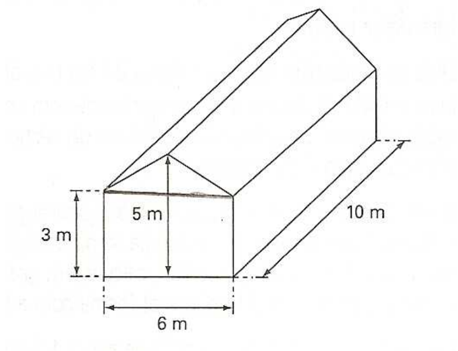
Atividade que apresenta um nível de funcionamento mobilizável: encontre o volume de ar contido em um galpão com a forma e as dimensões dadas pela figura.



Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 32: prisma de base pentagonal

Para resolver esta atividade, precisamos realizar uma pequena adaptação na figura, para determinar a área da base e depois aplicar a fórmula do volume V= ab . h (área da base do prisma vezes a sua altura).

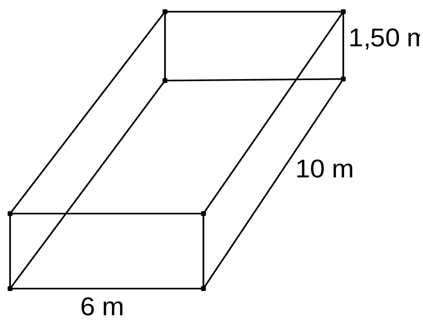


Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 33: prisma de base pentagonal

Atividade que apresenta um nível de funcionamento disponível: quantos ladrilhos quadrados de 12 cm de lado são necessários para cobrir as paredes laterais e o fundo de uma piscina que tem 10 m de comprimento, 6 m de largura e 1,50 m de profundidade?

Nesse caso, a atividade aparentemente não está ligada ao estudo dos prismas, mas uma análise mostra que devemos buscar informações nos conhecimentos anteriores (área do quadrado, área do retângulo e fazer uma relação com as áreas laterais e da base do prisma, e realizar a conversão de unidades de medidas cm^2 e m^2) aquele que favoreça a resolução do problema, e fazer uma representação ilustrativa como segue da situação, favorecendo a sua resolução.



Fonte: arquivo do pesquisador

Figura 34: prisma

Aline Robert sugere que nenhum desses três níveis seja negligenciado no ensino da Matemática.

As teorias que nós escolhemos para fundamentar a presente pesquisa, vêm ao encontro do enfoque dispensado pelos órgãos oficiais por meio dos PCNEM, OCEM e PNLEM para o estudo da Geometria Espacial Métrica.

As observações de Duval (1995) a respeito da importância para a aprendizagem dos diferentes Tipos de Registros de Representação, relacionam-se às idéias do PNLEM/2006.

> Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos símbolos: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos. (PNLEM, 2006, p. 75)

As idéias defendidas por Parsysz (2000) relacionam-se às idéias do PNLEM/2006.

> O livro didático deve estabelecer pontes para o emprego de outros recursos didáticos que possam contribuir para a aprendizagem do aluno, por exemplo, propor atividades que requeiram o uso de materiais concretos, de instrumentos de medição ou de construção de figuras, de jogos matemáticos, entre outros. (PNLEM, 2006, p. 77)

Correspondendo segundo Parsysz (2000) à geometria concreta (nível G0), a sugestão do PNLEM/2006 de propor atividades que requeiram o uso de materiais concretos e a geometria espaço-gráfica (nível G1) quando sugere o uso de instrumentos de medição ou de construção de figuras.

Robert (1998) classifica o funcionamento dos conhecimentos pelos alunos em três níveis e sugere que nenhum deles seja negligenciado no ensino da Matemática que vem ao encontro das OCEM/2006.

> (...) Quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de “regras” desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de “fixação” ou a aplicação direta de fórmulas. “OCEM, 2006, p. 70)

Estas idéias correspondem aos níveis de funcionamentos mobilizáveis e aos disponíveis.

No próximo capítulo, serão usadas as teorias descritas para analisar os livros didáticos de Matemática para alunos da 2ª série do Ensino Médio no tópico de Geometria Espacial Métrica e apresentaremos também os resultados obtidos com a análise.

CAPÍTULO III - ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Este capítulo teve por objetivo apresentar os critérios estabelecidos para a escolha dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio a serem analisados, estabelecer as categorias de análise dos livros didáticos fundamentadas nos estudos de Duval (1995); Robert (1998) e Parsysz (2000), em resultados de pesquisa sobre o tema e apresentar as análises dos livros selecionados.

3.1 CRITÉRIOS PARA ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Quando nos referimos ao ensino da Matemática no Brasil, não podemos deixar de considerar a influência sofrida, após a adoção dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – 1998) e pela implantação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para todo o Ensino Fundamental, em 1995, para o Ensino Médio, pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), em 2006.

Por que analisamos os livros didáticos? Lajolo (apud Friolani 2007, p. 47) acredita que, no Brasil, pela sua precária situação educacional, o livro didático "acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina...".

Em seu artigo, Lorenzato (1995) destacou como causas a exagerada importância que o livro didático desempenha:

> Quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos. (Lorenzato, 1995, p.4)

As OCEM/06, também, mostram a importância que está sendo dispensada aos livros didáticos.

> Na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que "o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa

> a capa". É importante, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais. (OCEM,2006, p.86)

Diante da importância que o livro didático vem assumindo, resolvemos analisar três livros didáticos de Matemática da 2ª série do Ensino Médio.

Quais aspectos analisaremos nos livros didáticos? Durante este trabalho, deparamo-nos com algumas pesquisas e artigos, abordando temas que mostram afinidade com esta investigação. Descreveremos alguns de forma sucinta, destacando as partes mais relevantes, para que nos auxiliem nesta pesquisa.

Para Kaleff (1994), o Raciocínio Espacial[8] é o mais negligenciado em nosso meio escolar, faz referências a atividades didáticas que utilizam materiais concretos.

O modelo de Van Hiele (A Teoria de Van Hiele) para o pensamento em Geometria foi criado por Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geoldof, tendo por base as dificuldades apresentadas por seus alunos do curso secundário na Holanda. O modelo sugere que os alunos progridem, segundo uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos enquanto aprendem Geometria.

O progresso de um nível para o seguinte se dá pela vivência de atividades adequadas e passa por cinco fases de aprendizagem. Portanto, o progresso de níveis depende mais da aprendizagem adequada do que da idade ou maturação.

Para Van Hiele, cada nível é caracterizado pelas relações entre os objetos de estudo e linguagem própria. Conseqüentemente, não pode haver compreensão quando o curso é dado em um nível mais elevado do que o atingido pelo aluno.

A teoria de Van Hiele sugere cinco níveis hierárquicos, no sentido de que o aluno só atinge determinado nível de raciocínio, após passar por todos os níveis inferiores.

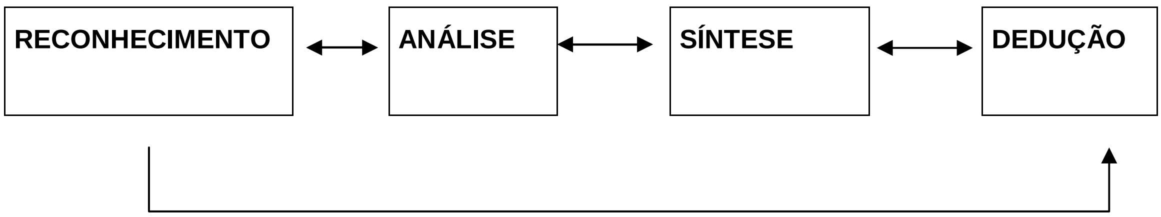
---

[8] Entende-se por raciocínio espacial o conjunto de processos cognitivos por meio dos quais as representações mentais de objetos, relações e transformações espaciais são construídas e manipuladas.

A nosso ver, esta pode ser uma explicação para as dificuldades apresentadas pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio, quando são submetidos ao estudo da Geometria Espacial Métrica (Nível 3: Dedução), sem a necessária vivência prévia de experiências nos níveis anteriores.

Medalha relata em sua pesquisa que:

> Durante o curso de 2º grau, principalmente na 2ª série, o estudo de Geometria Espacial mostra-se um bicho-papão para o aluno. Há em seu raciocínio matemático um salto de alguns níveis, pois o aluno que vem acostumado a copiar a resolução de problemas, muitas vezes algébricas, sem experimentar visualizar a situação proposta, sente-se completamente perdido em meio a tanta fórmula, tantos caminhos novos a experimentar. Que caminho escolher para resolver um problema se não tem a análise desenvolvida, não conseguindo portanto, chegar a uma conclusão. Dessa forma, exige-se que ele passe do reconhecimento da forma para a dedução de propriedades partindo de informações dadas, pulando desse modo, duas etapas importantes na construção do conhecimento, conforme mostra o esquema a seguir. **(**Medalha, 1997, p.37)



Fonte: Medalha (1997, p. 37)

Figura 35

Os níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria são apresentados nos dados do Quadro 4.

Quadro 4: Níveis de Van Hiele. Geometria segundo a Teoria de van Hiele

Nível de van Hiele	Características
Básico: Reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.
Nível 1: Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.
Nível 2: Síntese	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.
Nível 3: Dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.
Nível 4: Rigor	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.

Fonte: Van Hiele (1997, p.5)

Medalha (1997) destaca em sua pesquisa que, em estudos mais modernos, os três últimos níveis (Síntese, Dedução e Rigor) são condensados em apenas um nível, a Síntese. Tendo em vista o fato das pesquisas de Van Hiele (1997) terem sido desenvolvidas visando à compreensão de conceitos geométricos de uma forma geral (plana ou espacial), Medalha (1997) apresenta uma adaptação dos níveis de compreensão de Van Hiele (1997) para o ensino da Geometria Espacial, conforme o quadro abaixo:

Quadro 5: Classificação dos níveis de compreensão geométrica

Visualização	Manuseio de sólidos geométricos; percepção dos sólidos geométricos por meio de sua aparência física; reconhecimento das figuras pela sua forma; como um todo, e não pelas propriedades.
Análise	Descrição das propriedades dos sólidos; análise das propriedades das figuras.
Síntese	Estabelecimento de relações entre as propriedades e de uma ordem lógica entre figuras e relações, fazendo com que acompanhem uma dedução simples. Não há a compreensão de uma prova completa. Dedução de propriedades e realização de demonstrações; compreensão do significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva. Desenvolvimento do trabalho em diferentes sistemas axiomáticos; capacidade de deduções abstratas; possibilidade de compreensão da Geometria não-euclidiana.

Fonte: Medalha (1997)

Segundo Van Hiele (1997, apud Medalha, 1997) em Geometria Espacial o aprendizado sobre um conceito está aliado sobretudo à visualização e à percepção das figuras.

Em seu trabalho, Medalha (1997) apresentou uma proposta para o estudo da Geometria Espacial com alunos da 2ª série do 2º grau, assim, a pesquisadora fez um levantamento com os professores para identificar as principais dificuldades encontradas no trabalho de Geometria Espacial. Como poderia ajudar os alunos no estudo da Geometria Espacial? Que habilidades básicas deveriam ser essencialmente trabalhadas com os alunos a fim de desenvolver seu pensamento espacial? Quais os agentes facilitadores para tal e de que maneira o desenvolvimento da visualização e da percepção influi na construção da imagem mental?

A investigadora usou as teorias de Van Hiele; Alan Hoffer; Jean Piaget, da representação e da visualização e verificou que alguns professores não se mostraram muito à vontade para escrever e/ou falar sobre o ensino da Geometria, pois em muitos casos trazem em sua vida estudantil experiências traumáticas, que, muitas vezes, acarretaram obstáculos que talvez ainda não tenham sido superados.

A autora propõe que um caminho para o ensino da Geometria Espacial seja pela construção, manuseio, observação e discussão de fatos que chamam a atenção dos alunos.

De acordo com Medalha (1997), o pensamento espacial é desenvolvido se forem dadas aos alunos condições propícias para tal. Estas condições prevêem um trabalho em que algumas habilidades básicas sejam desenvolvidas e/ou reforçadas. São elas: Visualização, Lingüística, Gráfica e Lógica.

Assim, destaca que um fator importante no estudo da Geometria Espacial é o raciocínio visual; o seu não desenvolvimento e a não formação da imagem mental comprometem em muito a visualização Geométrico-Espacial do aluno.

Imagem Mental	⇔	**Raciocínio Visual**	⇔	**Visualização Geométrica Espacial**

Fonte Medalha(1997, p. 17)

Figura 36

Assim, quando o trinômio não é desenvolvido, o aluno tem idéia de que estudar Geometria Espacial se reduz apenas a decorar fórmulas, substituir os dados inseridos no problema e calcular.

A pesquisadora concluiu que a melhoria da visualização e do nível das representações dos problemas propostos acarreta um melhor desempenho dos alunos nas aulas de Matemática, em especial, a de Geometria.

Segundo Van Hiele (apud Medalha 1997), o desenvolvimento intelectual do aluno é feito de forma seqüencial e não pode haver a queima de nenhuma etapa, pois esta quebra acarretaria uma estagnação no caminhar.

O objetivo da pesquisa de Cavalca (1997) era verificar a possibilidade de desenvolver, em alunos do terceiro grau, as capacidades de **visualizar e interpretar** objetos do espaço e suas representações gráficas matemáticas.

Após aplicar um teste diagnóstico a alunos do segundo ano do curso de Ciências com habilitação em Matemática, da Faculdade Salesiana de Lorena, durante as aulas de Geometria Analítica, observou que estes apresentavam dificuldades que estavam ligadas às duas capacidades citadas.

O pesquisador montou uma seqüência didática, indicando como pontos principais a classificação das habilidades espaciais básicas, as concepções de relação com os objetos do espaço, a contaminação de um significado matemático pela representação gráfica ou situação a ele relacionada.

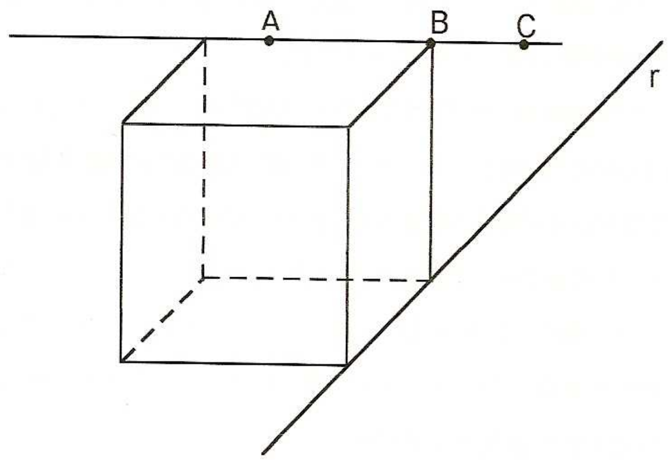
A seqüência didática compôs-se de seis sessões, na qual a representação gráfica foi utilizada não apenas como instrumento, mas também como sendo ela própria objeto de estudo. Assim, examinou alguns tipos de perspectiva, sobretudo, a Cavaleira, usualmente a mais empregada na representação matemática do espaço. O uso de material concreto igualmente constituiu uma das bases em que se apoiou o conjunto das atividades propostas.

Dentre os artefatos usados, destacou o paralelepípedo retângulo "esquelético", por ser justamente uma estrutura semelhante a desse objeto que modela o espaço na perspectiva Cavaleira. Outro aspecto importante da seqüência foi a alternância entre as formas de expressão lingüística e figurativa que ela propiciou aos alunos.

Após a realização da seqüência didática, o pesquisador aplicou um teste avaliatório.

Ao analisar o teste diagnóstico, a seqüência didática e o teste avaliatório, o pesquisador concluiu que os alunos efetivamente conseguiram desenvolver suas habilidades espaciais básicas, estabelecendo, assim, um relacionamento mais adequado entre espaço e representação gráfica plana.

De acordo com Cavalca (1997), uma das dificuldades apresentadas pelos alunos é que eles tratam figuras do espaço como se fossem figuras planas. O caso a seguir ilustra isso: vários alunos responderam que, dentre os pontos A, B e C, este último era o mais próximo da reta r, na seguinte figura:



Fonte: Cavalca (1997, p. 04)

Figura 37

Como citam Bessot e Le Goff, em relação à história da perspectiva.

> (...) um longo processo de racionalização da visão que tem sua fonte na Antiguidade grego-romana, que se emancipa da Ótica fisiológica na Renascença, passando então pela geometrização para permitir a representação plana de objetos tridimensionais, e que fecunda por findar a própria Geometria, chegando em particular à Geometria dita projetiva. (Bessot; Le Goff apud Cavalca, 1997, p. 14)

Às vezes, fala-se que os alunos não “enxergam” no espaço, porém como dizem Pham e Dillinger .

> Talvez alguns digam que têm dificuldades para “ver no espaço”. Certamente se trata de uma maneira de falar, pois de que outro modo vêem? O que querem dizer é que têm dificuldade para reconstruir mentalmente uma figura que é sugerida por um desenho em perspectiva. (Pham; Dillinger apud Cavalca, 1997 p. 20)

De acordo com Cavalca (1997), o desenho em perspectiva está no plano e seu sentido no espaço. A representação gráfica tem duas dimensões e o objeto é tridimensional. A dificuldade está em relacioná-los.

Em sua pesquisa, Bosquetti (2002) aponta que, ao analisar as avaliações do Saresp já realizadas, foi possível perceber que a Geometria esteve presente com uma porcentagem significativa de questões em todas elas.

O aumento porcentual das questões de Geometria nas últimas avaliações enfatiza a importância dada a seu ensino.

A seguir, o quadro com dados relativos a esse fato revela quais os conteúdos contemplados nas questões relativas à Geometria da 1ª e 3ª série do Ensino Médio, que são os sintetizados:

Quadro 6 – Conteúdos contemplados nas questões de Geometria

	CONTEÚDO	1998	2000
Geometria Plana	Semelhança	3	2
	Teorema de Tales	1	
	Teorema de Pitágoras	2	
	Polígonos	3	
Geometria Espacial	Relações geométricas em poliedros e corpos redondos.		6
	Relações métricas em poliedros e corpos redondos		4
Total		9	12

Fonte: Bosquetti (2002, p. 11)

Almouloud (2003) diz que, na prática, vem sendo dada à Geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o ensino de medidas. A Geometria é um ramo importante da Matemática, tanto como objeto de estudo, como instrumento para outras áreas. Várias pesquisas apontam a Geometria como um dos problemas do ensino-aprendizagem.

Ponte et al.(2005) citam que a Geometria é, particularmente, propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. É possível conceber tarefas adequadas a distintos níveis de desenvolvimento e que requerem um número reduzido de pré-requisitos.

A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática.

De um modo geral, tem sido contestada a visão do movimento da Matemática Moderna que destacava o papel da Geometria para ilustrar o caráter dedutivo e axiomático da Matemática e desvalorizava os aspectos ligados à observação, à experimentação e à construção.

As tendências curriculares atuais convergem ao considerar que essa área da Matemática é fundamental para compreender o espaço onde nos movemos e para perceber aspectos essenciais da atividade matemática. Destacam a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em Geometria.

Ponte et al. (2005) enfatizam a importância do uso de materiais manipuláveis diversos, como pontos de partida que entusiasmam os alunos a fazer explorações, apoiando a obtenção de dados e a formulação de conjecturas.

O trabalho em torno de tarefas de investigação geométricas permite ao professor perseguir uma recomendação curricular, hoje largamente aceita de que devem ser dados tempo e oportunidade ao aluno para organizar suas experiências espaciais.

De acordo com Ponte et al.(2005) uma investigação Matemática envolve quatro momentos principais, conforme ilustrado no Quadro 7.

Quadro 7 – Momentos da realização de uma investigação.

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Pontes et al (2005, p.21)

Para tentar compreender as dificuldades encontradas pelos estudantes de (15 – 16 anos), na aprendizagem da Geometria Tridimensional, a pesquisadora Rommevaux (1999) apresentou um trabalho do ponto de vista cognitivo das interações entre as representações utilizadas para solucionar um problema de Geometria Tridimensional, destacando a importância da identificação de planos avaliados, segundo as complexidades matemática e heurística.

Os alunos podem aprender a ver tridimensionalmente? A autora recorre à História da Matemática para encontrar inspiração criativa aos conceitos de Geometria Tridimensional, centrando sua pesquisa nos tipos de representações utilizadas.

A pesquisadora concluiu que a Geometria Tridimensional, em geral, precisa de dois registros de representação semiótica: o registro figural e a linguagem natural, indispensáveis à identificação das representações e tratamentos geométricos. Apontou, ainda, a importância da construção e manipulação de modelos concretos de sólidos geométricos.

Após a realização destes estudos podemos constatar que os aspectos epistemológicos são trazidos para o debate de conceitos como: visualização, representação, imagens mentais e uso de materiais manipuláveis, que nortearam nosso trabalho.

Esses conceitos possibilitam explicar a importância de uma Geometria Espacial mais experimental, proporcionando reflexões e sugerindo ações que podem ser desencadeadas em sala de aula, contribuindo para a construção do conhecimento por parte dos alunos.

Como os resultados dessas pesquisas convergem para que o ensino da Geometria Espacial seja desenvolvido pela construção, manuseio, observação, o estudo da Geometria Espacial não se reduz apenas a decorar fórmulas e a dificuldade citada por Cavalca (1997) de que os alunos tratam figuras do espaço como se fossem figuras planas, poderia ser superada.

Os aspectos relacionados às dificuldades encontradas no estudo da Geometria Espacial aliadas às propostas para solucioná-las serão de fundamental importância para nossa pesquisa.

De acordo com Bosquetti (2002), a Geometria esteve presente com uma porcentagem significativa em avaliações oficiais como Saresp, mostrando-nos que vem sendo cobrado de nossos alunos seu estudo por órgãos oficiais, portanto, isto vem demonstrar que nossa pesquisa é relevante.

Segundo o PNLEM/2006, o livro didático deve estabelecer pontes para o emprego de outros recursos que possam contribuir para a aprendizagem do aluno, por exemplo, propor atividades que requeiram o uso de materiais concretos, de instrumentos de medição ou de construção de figuras, de jogos matemáticos, entre outros.

Neste estudo, sugerimos a análise dos livros didáticos que tem como finalidade verificar se as atividades por eles propostas proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo atividades com uso de material concreto, construções com instrumentos, como régua e compasso ou softwares que facilitam a visualização e desenvolvem o pensamento geométrico espacial, apontado nas pesquisas, como essenciais no estudo da Geometria Espacial Métrica.

Para a escolha dos livros didáticos analisados, o principal critério era que deveriam fazer parte da lista dos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM) e, também, pelo fato de serem as três obras mais utilizadas nas escolas públicas da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo – SP (Diretoria onde a escola que trabalho há quatro anos, faz parte); possui 61 escolas e receberam oito coleções diferentes de livros de Matemática do PNLEM/2006 para o Ensino Médio.

Para levantarmos esses dados, conseguimos na oficina pedagógica da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo – SP, o site www.fnde.gov.br (acesso 15.02.08) em que consta a quantidade de livros enviados para cada série e qual a coleção que cada escola recebeu. As coleções e quantidades de livros enviadas pelo PNLEM/2006 às 2ª séries do Ensino Médio das escolas da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo – SP foram:

- Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier. Coleção Matemática Aula por Aula – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2004; (4.546 volumes da 2ª série enviados às escolas)

- Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004; (2.084 volumes da 2ª série enviadas às escolas)

- Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004; (1.565 volumes da 2ª série enviados às escolas)

- Dante, Luiz Roberto. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2004 (1.187 volumes da 2ª série enviados às escolas)

- Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn; Perigo, Roberto; Almeida, Nilze de. Matemática Ciência e Aplicações – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004 (943 volumes da 2ª série enviados as escolas)

- Augusto, Oscar; Guelli Neto. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2004 (502 volumes da 2ª série enviados às escolas)

- Zampirolo, Maria J. C. Vasconcelos; Scordamaglio, Maria Terezinha; Cândido, Suzana Laino. Projeto Escola e Cidadania para Todos – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Editora do Brasil, 2004; (436 volumes da 2ª série enviados às escolas)

- Paiva, Manoel Rodrigues. Matemática Ensino Médio - 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004; (185 volumes da 2ª série enviados às escolas)

Para analisarmos os três livros mais enviados à 2ª série do Ensino Médio pelo PNLEM/2006 às escolas, escolhemos as coleções:

Livro 1: Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier. Coleção Matemática Aula por Aula – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2004; (4546 volumes da 2ª série enviados as escolas)

- **Livro 2**: Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004; (2.084 volumes da 2ª série enviadas às escolas)

- **Livro 3**: Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004; (1.565 volumes da 2ª série enviados às escolas)

3.2 CATEGORIZAÇÃO DE ANÁLISE

Na realização da análise dos livros didáticos escolhidos, fizemos uma pesquisa bibliográfica sobre o ensino-aprendizagem da Geometria Tridimensional para o Ensino Médio a fim de estabelecer as categorias de análise. As teorias pesquisadas para estabelecer essas categorias foram importantes para este trabalho, pois discutem os fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem e as condições que favorecem a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aluno em sala de aula. As nossas categorias foram:

Categoria 1 : Como são articulados os diferentes níveis de Parsysz, Geometrias não axiomáticas: Geometria Concreta (Nível G0) e Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), e Geometria Axiomática: Geometria Proto-Axiomática (Nível G2), nas definições das fórmulas e teoremas que permitem encontrar áreas e volumes na Geometria Espacial Métrica?

Recorremos ao estudo da classificação das Geometrias proposto por Parsysz (2000), pois estávamos interessados em verificar nos livros didáticos de Matemática do 2º ano do Ensino Médio como era feita a articulação das definições das fórmulas e teoremas que permitem encontrar áreas e volumes no bloco da Geometria Espacial Métrica nos níveis de Parsysz.

Na Geometria Concreta (Nível G0), parte-se da realidade do concreto e os objetos são materializados, na Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), que é a Geometria das representações figurais e gráficas; nesse nível, os objetos são bidimensionais, como por exemplo, desenhos produzidos em uma folha com o uso de instrumentos de medida, como régua, compasso, esquadro e transferidor ou em uma tela de um computador e a justificativa de propriedades é feita pelo “olhar”, na Geometria Proto-Axiomática (Nível G2) os conceitos são objetos teóricos e as demonstrações dos teoremas são feitas baseadas nas premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo; os objetos e o caminho da validação são “localmente” os mesmos que na Geometria Axiomática, mas não há necessidade de explicar um sistema de axiomas. É possível que o sabido se apóie ainda no percebido.

Categoria 2: Como são exigidos nos exercícios de Geometria Espacial Métrica os diferentes níveis de conhecimentos: Técnico, Mobilizável e Disponível ?

Ao utilizar a teoria de Aline Robert (1998), quando afirma que nenhum desses três níveis deve ser negligenciado no ensino da Matemática, interessou-nos verificar como são exigidos dos alunos nas atividades, exercícios e problemas propostos nos livros didáticos de Matemática da 2ª série do Ensino Médio, no bloco da Geometria Espacial Métrica, que ponham em prática os diferentes tipos de níveis de conhecimento.

Definição de cada nível: Técnico, Mobilizável e Disponível, segundo Aline Robert (1998):

Nível técnico quando resolve uma questão simples que corresponde a uma aplicação imediata de um teorema, de uma propriedade, de uma definição ou de uma fórmula. Em geral, há indicações dos métodos a utilizar.

No nível de funcionamento mobilizável, os conhecimentos que serão utilizados, são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de repetição antes de serem colocados em funcionamento.

O nível de funcionamento disponível corresponde a resolver uma questão proposta sem nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor. É preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução da questão.

Categoria 3: Nos livros analisados como é articulado o Registro Figural nas fórmulas e atividades propostas no bloco da Geometria Espacial Métrica, e o que isso favorece na aprendizagem do aluno?

Utilizando o estudo dos diferentes Tipos de Registros de Representação Semiótica propostos por Duval (1995), e a importância do Registro Figural no estudo da Geometria, interessa-nos verificar como os livros didáticos de Matemática da 2ª série do Ensino Médio recorrem ao Registro Figural para aceder o conhecimento matemático no bloco da Geometria Espacial Métrica.

De grande importância para o estudo da Geometria, segundo Duval (1995), é o Registro Figural, o principal motivo é que na resolução de um problema, a representação figural mostra mais facilmente a idéia de solução que em outros registros. Os desenhos permitem um acesso mais direto, mais rico e menos custoso que um texto. Duval destaca quatro maneiras de apreender uma figura: a **apreensão perceptiva**, a **apreensão discursiva**, a **apreensão operatória** e a **apreensão seqüencial**. Estas apreensões serão usadas para analisarmos de que forma é exigida dos alunos a compreensão do estudo de teoremas, fórmulas e atividades, quando usado o Registro Figural.

Conforme sustenta Duval (1995), para que um conhecimento ou um saber matemático seja colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz o apreenda não só com um registro, mas com, pelo menos, dois registros de representações e que saiba coordenar esses registros.

3.3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

De posse dos livros didáticos, o trabalho de análise desenvolveu-se conforme os seguintes passos: selecionamos, em cada livro, atividades relacionadas ao tema Geometria Espacial Métrica, que mais tivessem elementos para nosso trabalho. Ali identificamos as categorias que estabelecemos e organizamos, detalhadamente, os dados apresentados nas análises em uma tabela, de modo a identificar as categorias presentes em cada livro analisado, com os devidos conhecimentos mobilizados em cada categoria.

3.3.1 ANÁLISE DAS CATEGORIAS:

Categoria 1 : Como são articulados os diferentes níveis de Parsysz, Geometrias não axiomáticas: Geometria Concreta (Nível G0) e Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), e Geometria Axiomática: Geometria Proto-Axiomática (Nível G2), nas definições das fórmulas e teoremas que permitem encontrar áreas e volumes na Geometria Espacial Métrica?

Análise do livro 1:

Matemática Aula por Aula – 2ª Série do Ensino Médio

Autores: Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier

Editora FTD

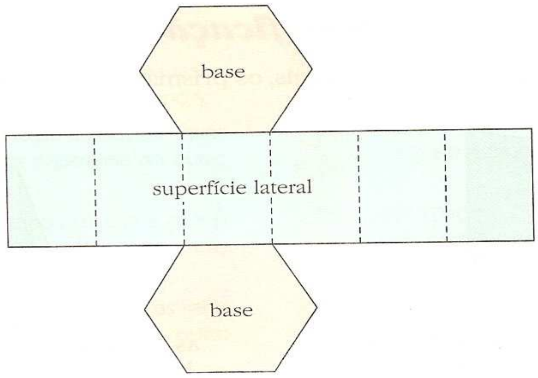
2004

Os autores definem poliedros recorrendo a uma metodologia que abdica os níveis de Parsysz, não recorrendo sobretudo à Geometria Concreta (Nível G0), que permite a utilização de material concreto, facilitando a visualização e a compreensão por parte do aluno, contrariando, desta forma, as orientações do PNLEM/06 que são diversificar a linguagem para representar conteúdos.

> Poliedros são sólidos limitados por 4 ou mais faces planas e poligonais.
> ((Barreto Filho; Benigno; Silva, Cláudio Xavier, 2004,2ª série, p. 312)

A seguir, apresentamos a representação usada neste livro para definir a área da superfície de primas e seu volume.

$$\boxed{A_T = 2 \cdot A_b + A_L}, \text{ onde: } \begin{cases} A_b\text{: área da superfície da base} \\ A_L\text{: área da superfície lateral} \end{cases}$$

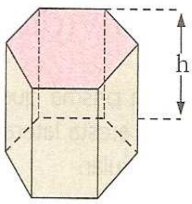


Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 270)

Figura 38

O volume é apresentado no livro da seguinte maneira:

> “O volume do prisma é calculado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (h), ou ainda: V= A_b . h “((Barreto Filho; Silva, 2004,2ª série, p. 271)



Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 271)

Figura 39

Os autores recorrem à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), para definirem a área da superfície dos prismas e seu volume.

Para generalizar a fórmula do volume do prisma, o autor faz referência ao Princípio de Cavalieri sem fazer ou solicitar aos alunos nenhuma demonstração.

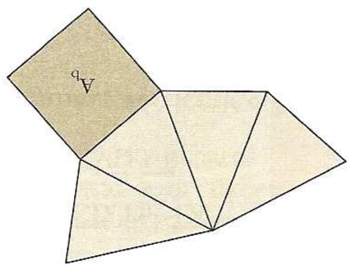
> Considere dois sólidos com bases num plano α . Se qualquer plano β , paralelo a α e secante aos sólidos, determinar nos mesmos superfícies S_1 e S_2 com áreas iguais, podemos afirmar, pelo Princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm o mesmo volume. (Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier, 2004,2ª série, p. 271)

As propriedades das diagonais do paralelepípedo retângulo e do cubo são definidas articulando a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) e a Geometria Proto-Axiomática (Nível G2).

No estudo das pirâmides, verificamos o uso da Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) para definir, nomear seus elementos, classificar, determinar a área de sua superfície e seu volume.

Os autores definem a área da superfície total da pirâmide regular, como:

> A área da superfície total da pirâmide é calculada pela soma da área da superfície da base com a área da superfície lateral (Barreto Filho; Silva, 2004,2ª série, p. 280)



$$A_T = A_b + A_L$$

Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 271)

Figura 40

Analisando a abordagem feita pelos autores em relação às pirâmides, é apresentada uma definição particular.

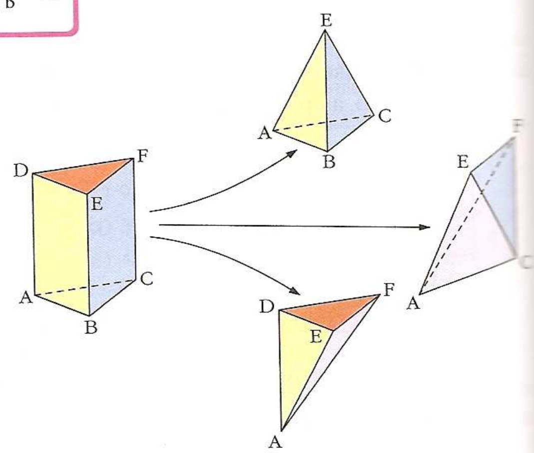
> Optamos pela definição de uma pirâmide particular e pela posterior ampliação para outras pirâmides particulares induzindo o aluno a generalizar o conceito. (Barreto Filho; Silva, 2004,2ª série, p. 279).

Apresentamos a abordagem usada nesta coleção para definir a fórmula para calcular o volume da pirâmide.

O volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

Para compreender melhor essa fórmula, observe que um prisma triangular pode se decompor em três pirâmides triangulares de mesmo volume. Portanto, o volume de cada uma dessas pirâmides é igual à terça parte do volume do prisma triangular. (Pode-se fazer uma experiência cortando um pedaço de sabão.)



Logo:

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma triangular}}$$

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base} \times \text{altura})$$

Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 280)

Figura 41

Para a compreensão da definição do volume da pirâmide, os autores recorreram à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1).

O estudo do tronco da pirâmide é realizado na Geometria Proto-Axiomática (Nível G2). Os autores exploram somente seu volume e utilizam uma metodologia extremamente algébrica na demonstração da fórmula para calcular seu volume, recorrendo a premissas que sejam aceitas pelos alunos de modo intuitivo.

Os poliedros de Platão e regulares são definidos com o uso da Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), sem a realização de nenhuma demonstração da existência de cinco classes de poliedros de Platão ou de cinco tipos de poliedros regulares.

O Teorema de Euler é apresentado utilizando uma abordagem direta à fórmula, não proporcionando ao aluno uma participação para descobrir a relação existente entre os elementos dos poliedros.

Consideremos um poliedro convexo com os seguintes elementos:

F: número de faces

A: número de arestas

> V: número de vértices
>
> Adotamos como válida a seguinte relação:
>
> V – A + F = 2“
>
> (Barreto Filho,; Silva, 2004,2ª série, p. 312)

As OCEM dizem que:

> Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação (...). (Ocem/2006, p. 76).

Neste livro, foi proposta uma única atividade que usa a Geometria Concreta (Nível G0), importante para visualização dos sólidos geométricos. No final do bloco de Geometria Espacial chamada de “Desenvolva a criatividade”, são apresentados os cinco poliedros regulares e suas planificações. É solicitado que, em grupos, construam os poliedros regulares utilizando cartolina.

Análise do livro 2:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

Autoras: Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez.

Editora: Saraiva

2004

Neste livro, a metodologia de ensino-aprendizagem é conduzida por meio das questões resolvidas e atividades que permitem a participação dos alunos.

Para definir, nomear elementos e classificar prismas e pirâmides, as autoras recorrem à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), que é a Geometria das representações figurais, as justificativas de propriedades são feitas pelo “olhar”.

Na intenção de provarem a existência de só cinco classes de poliedros de Platão e a existência de só cinco tipos de poliedros regulares, as autoras realizaram uma demonstração dedutiva algébrica. Apresentamos o início desta demonstração:

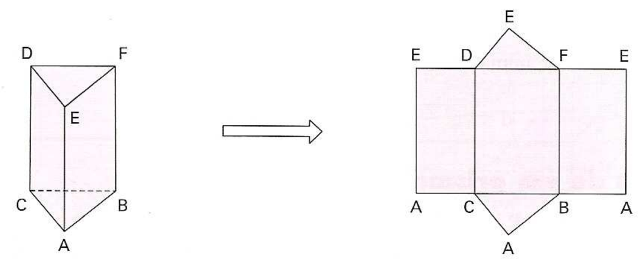
Vamos considerar um poliedro de Platão, em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas, **F** é o número de faces, **n** é o número de lados de cada face e **p** é o número de arestas em cada vértice desse poliedro.

Queremos provar que existem apenas cinco possibilidades para os valores de **V**, **A**, **F**, **n** e **p**. Para isso, vamos observar que cada face tem n arestas e cada aresta está em duas faces. Daí':

A= $\frac{F.n}{2} \Rightarrow nF$ **= 2A (...)** . (Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez, 2004, 2ª série, p.260)

E o teorema é demonstrado, recorrendo à Geometria Proto-Axiomática (Nível G2).

A expressão que representa a área da superfície dos prismas e das pirâmides é apresentada, exigindo do aluno apenas a observação, sendo articulada a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1). Não recorrendo a nenhuma atividade empírica de exploração do sólido que permita uma interação com o objeto matemático, facilitando a compreensão desta expressão. A seguir, destacamos a representação realizada para a área da superfície dos prismas.

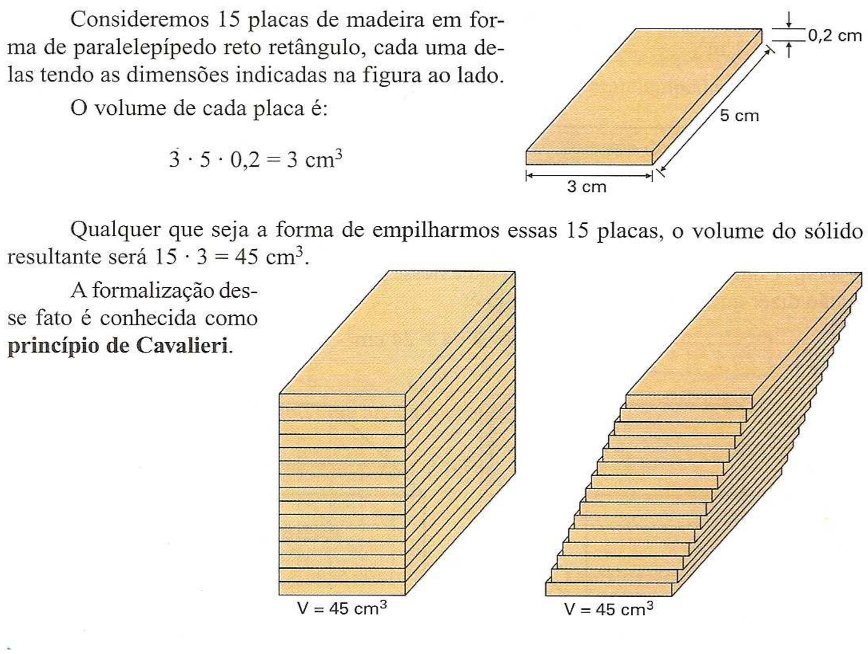


Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 297)

Figura 42

Indicando por A_b a área de cada base, A_l a área lateral, e A_t a área total temos: $A_t = A_l + 2A_b$.

Para definirem a expressão que permite calcular o volume dos prismas, as autoras recorrem ao Princípio de Cavalieri, demonstrando-o com representações de fácil compreensão, recorrendo ao uso de sólidos para comparar seus volumes, e usam um exemplo muito feliz para justificar a validade da expressão, conforme destacado a seguir:


Consideremos 15 placas de madeira em forma de paralelepípedo reto retângulo, cada uma delas tendo as dimensões indicadas na figura ao lado.

O volume de cada placa é:

$3 \cdot 5 \cdot 0{,}2 = 3\ cm^3$

Qualquer que seja a forma de empilharmos essas 15 placas, o volume do sólido resultante será $15 \cdot 3 = 45\ cm^3$.

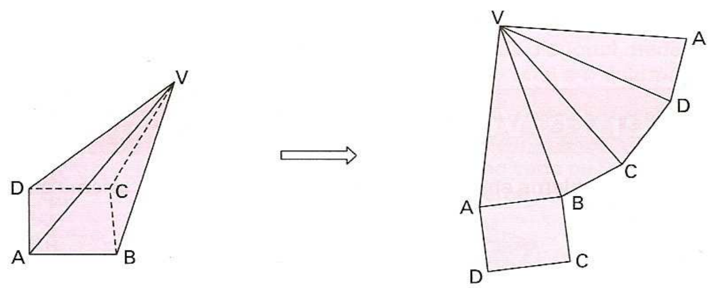
A formalização desse fato é conhecida como **princípio de Cavalieri**.

Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 297)

Figura 43

Nesta demonstração do volume dos prismas, podemos constatar o uso da Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1),

No estudo das pirâmides, as autoras recorrem à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) para determinarem a área da superfície total e, no caso do volume, usam a Geometria Proto-Axiomática (Nível G2) e a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), como veremos a seguir.



Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 312)

Figura 44

Indicando por A_b, A_l e A_t, respectivamente, a área da base, da superfície lateral e da superfície total de uma pirâmide, temos: $A_t = A_b + A_l$.

As autoras iniciam a demonstração do teorema do volume citando:

“Vamos relacionar os volumes de prismas e pirâmides de bases triangulares para encontrar uma fórmula para o cálculo do volume das pirâmides” ((Smole; Diniz, 2004, 2ª série, p.314)

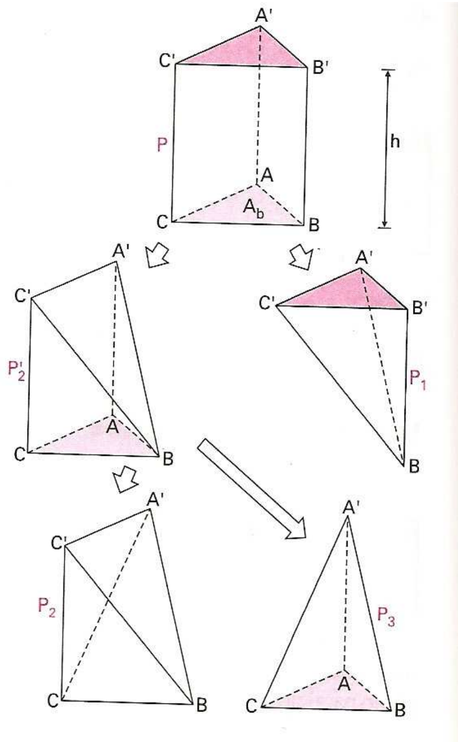
Consideremos um prisma triangular **P** de bases ABC e A'B'C'.

Seccionando-o pelo plano BA'C' resultam as pirâmides P_1 de vértices A', B', C', B e P_2' de vértices A, A', C', C, B.

Seccionando P_2' pelo plano A'BC resultam as pirâmides P_2 de vértices A', B, C, C' e P_3 de vértices A', A, B, C.

Portanto, o prisma **P** foi decomposto em três pirâmides triangulares, P_1, P_2 e P_3, e podemos escrever:

$$V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = V_P$$



- P_1 é equivalente a P_3, pois têm bases com áreas iguais ($\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$) e mesma altura (distância entre as bases de **P**).
  Logo, $V_{P_1} = V_{P_3}$ ①.
- P_2 é equivalente a P_3, pois têm bases com áreas iguais $\left(A_{\triangle A'CC'} = A_{\triangle AA'C} = \frac{1}{2} \cdot A_{A'ACC'}\right)$ e mesma altura (distância de **B** à face oposta).
  Logo, $V_{P_2} = V_{P_3}$ ②.

De ① e ②, temos: $V_{P_1} = V_{P_3} = V_{P_2}$.

Como $V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} = V_P$, resulta que o volume **V** de cada pirâmide triangular é dado por $V = \frac{V_P}{3}$.

Mas $V_P = A_b h$; então:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot A_b h}$$

Concluímos, então, o seguinte teorema:

O volume de uma pirâmide triangular é $\frac{1}{3}$ do produto da área de sua base pela medida da sua altura.

Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 314-315)

Figura 45:

Na demonstração das propriedades das diagonais do paralelepípedo retângulo e do cubo, são articuladas a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) e a Geometria Proto-Axiomática (Nível G2).

Para definir o tronco de pirâmide, nesta coleção é usada a representação gráfica de uma pirâmide sendo seccionada, recorrendo, então, para esta definição à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1). Para demonstrar a expressão que representa seu volume, é usada uma demonstração dedutiva algébrica, sendo esta realizada na Geometria Proto-Axiomática (Nível G2).

Na definição do teorema da Relação de Euler, as autoras recorrem à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), explorando a representação gráfica bidimensional.

Neste livro, verificamos o uso da Geometria Concreta (Nível G0) e uma quantidade razoável de exercícios de planificação de prismas e pirâmides que exigem do aluno o uso da Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1), necessitando da articulação de seus conhecimentos em relação à utilização de instrumentos adequados, como régua, compasso e escalas e um grande número de exercícios e problemas nos quais a Geometria Proto-Axiomática é usada (Nível G2).

Análise do livro 3:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

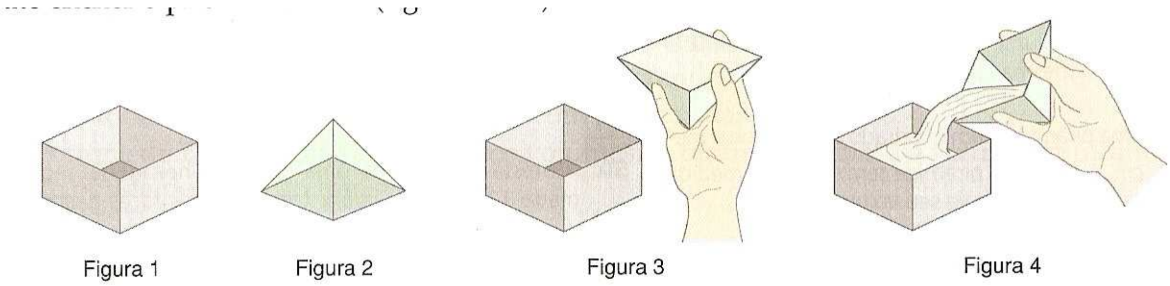
Autores: Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval.

Editora : Moderna

2004

A metodologia de ensino-aprendizagem pauta-se pela apresentação dos conteúdos já sistematizados, envolvendo questões resolvidas, nos quais não favorece uma participação mais ativa dos alunos, exceto no caso do cálculo do volume de uma pirâmide que é determinado por meio de uma experiência que usa a Geometria Concreta (Nível G0), que o professor pode adaptar para possibilitar a participação dos alunos.

> Usando uma folha de cartolina, construímos um prisma reto, sem uma das tampas, e uma pirâmide de mesma base e mesma altura do prisma sem o fundo.
>
> Enchemos a pirâmide de areia e despejamos dentro do prisma, repetindo essa operação até encher o prisma de areia.
>
> Verificamos que o prisma ficou totalmente cheio na terceira vez. Isso significa que o volume de uma pirâmide é igual à terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. Essa relação é válida para quaisquer prismas e pirâmides de mesma base e mesma altura. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.177)



Fonte: Bianchini ; Paccola (2004, p. 177)

Figura 46

Nesse livro, observamos que os autores para definirem poliedros, nomear seus elementos e definir poliedros convexos e não-convexos usaram a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1).

A Relação de Euler é apresentada, usando a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1). Os autores trazem um pouco da história desse teorema e citam que:

> O Teorema de Euler tem sido ensinado, há décadas, em cursos de Geometria nas escolas secundárias. Ele tem as características usuais que tornam um teorema atraente e popular: generalidade de validez, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível. Além disso, é fácil ilustrá-lo com belos desenhos de poliedros, nos quais se constata visualmente que $V - A + F = 2$. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.164)

O fato do Teorema de Euler ser ensinado há décadas nas escolas, podemos confirmar com nossa experiência e prática educacional, constatando a presença deste objeto de estudo em nossos planos de ensino e de colegas professores das escolas que trabalhei.

Na definição de prisma, os autores usam a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1). Mas para determinar a área da superfície não recorrem a nenhum dos níveis de Parsysz, como veremos a seguir:

> Área da base (A_b): é a área de um dos polígonos das bases.
>
> Área lateral (A_l): é a soma das áreas das faces laterais.
>
> Área total (A_t): é a soma da área lateral com o dobro da área de uma das bases.
>
> $A_t = A_l + 2. A_b$". (Bianchini; Paccola , 2004, 2ª série, p.167)

Isto vem dificultar a construção do conhecimento deste conceito matemático, por parte do aluno.

Quanto ao volume dos prismas, recorrem à Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1).

Na definição da propriedade da diagonal de um paralelepípedo retângulo, as Geometrias Espaço-Gráfica (Nível G1) e Proto-Axiomática (Nível G2) foram usadas.

Para definir, nomear elementos e classificar as pirâmides nesse livro foram usadas as representações gráficas das pirâmides nas quais suas propriedades eram constatadas pela observação. A Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) foi necessária para esta etapa. Para determinar a área da superfície das pirâmides, foram usadas a Geometria Proto-Axiomática (Nível G2) e a Geometrias Espaço-Gráfica (Nível G1).

Ao observar a abordagem realizada pelo livro em relação ao tronco da pirâmide, verificamos que a Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1) foi usada para sua definição. Para calcular seu volume, foi apresentada uma fórmula sem nenhuma justificativa.

> Pode-se calcular o volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas pela formula:
>
> $V = \frac{1}{3} h \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)$" (Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval,2004, 2ª série, p.179)

Nesse livro, verificamos que a Geometria Concreta (Nível G0) foi pouco usada somente em uma situação para demonstrar o volume da pirâmide constatamos o pouco uso da Geometria Espaço-Gráfica (Nível G1). Observamos um único caso em que foi apresentada a planificação, na definição de poliedros regulares. Observamos que não foram propostas nem exigidas situações-problema da planificação de sólidos geométricos.

Categoria 2: Como são exigidos nos exercícios de Geometria Espacial Métrica os diferentes níveis de conhecimentos: Técnico, Mobilizável e Disponível ?

Análise do livro 1:

Matemática Aula por Aula – 2ª Série do Ensino Médio

Autores: Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier

Editora FTD

2004

Os autores recorrem a uma metodologia de ensino-aprendizagem conduzida por meio de conteúdos sistematizados, envolvendo questões resolvidas e propostas, dificultando a interação com o aluno.

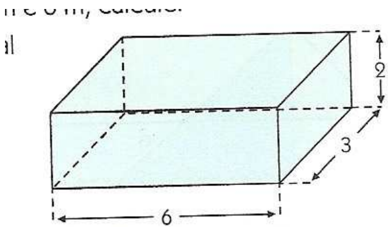
Três atividades propostas neste livro foram selecionadas: as duas primeiras representando o tipo-padrão de atividades presentes, para verificarmos quais os níveis de conhecimentos exigidos.

Situação 1: **Dado um paralelepípedo retângulo de dimensões 2 m , 3 m e 6 m, determine:**

a) A diagonal

b) Área total

c) Volume

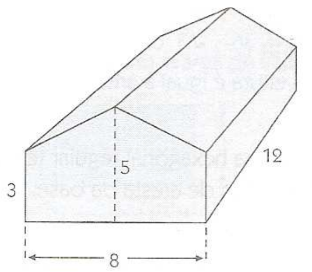


Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 276)

Figura 47

Para solucionar este problema, é necessário somente o conhecimento das fórmulas que permitam calcular a diagonal de um paralelepípedo, a área da superfície de um paralelepípedo e seu volume, sendo exigido do aluno um conhecimento técnico, porque corresponde a uma aplicação direta das fórmulas.

Situação 2: **(Vunesp) O volume de ar contido em um galpão com a forma e dimensões dadas pela figura abaixo é:**



Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 274)

Figura 48

a) 288

b) 384

c) 480

d) 360

e) 768

Para solucionar esta atividade, exige-se que o aluno estabeleça relações entre os conhecimentos desenvolvidos sobre Geometria Métrica Plana e a Espacial. Nesta situação, precisa-se de um conhecimento mobilizável, pois os conhecimentos necessitam de uma adaptação, antes de serem colocados em funcionamento.

Nesse livro, observamos um equilíbrio quanto ao número de exercícios que exigem dos alunos um nível de funcionamento técnico e o nível de funcionamento mobilizável, mas constatamos somente uma única situação que exige do aluno um nível de funcionamento disponível que apresentamos a seguir.

Situação 3: **(FAAP-SP) Noticiou o Suplemento Agrícola do jornal O Estado de S. Paulo, em 6/9/95, que a Secretaria de Agricultura e Abastecimento determinou que os produtores de tomates enviem a mercadoria ao Ceagesp, usando caixas padronizadas do tipo k, cujas dimensões internas são 495 mm de comprimento, 355 mm de altura e 220 mm de largura. Cada medida tem uma tolerância, para mais ou para menos, de 3 mm. A diferença entre o volume máximo e o mínimo de cada caixa (em milímetros cúbicos) é:**

a) 1.097.832

b) 1.078.572

c) 2.176.404

d) 2.160.000

e) 2.700.000

Para solucionar este problema, verificamos que o aluno deve estabelecer relações entre o conhecimento desenvolvido sobre Geometria Espacial Métrica e situações do dia-a-dia. Exigindo um conhecimento disponível, porque é preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução do problema.

Aline Robert (1998) sugere que nenhum dos três níveis de conhecimentos (técnico, mobilizável e disponível) seja negligenciado no ensino da Matemática.

Análise do livro 2:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

Autoras: Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez.

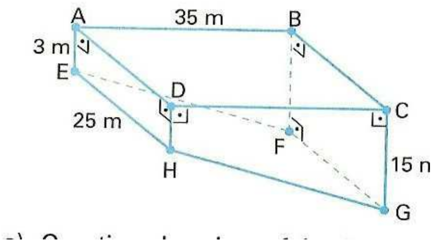
Editora: Saraiva

2004

Neste livro, a metodologia de ensino-aprendizagem é conduzida por meio de questões resolvidas e problemas que permitem a participação dos alunos.

A seguir, apresentamos três atividades propostas no livro para o ensino-aprendizagem da Geometria Espacial Métrica, que exigem cada um dos conhecimentos citados.

Situação 1: **A figura 49 representa uma piscina:**



Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 310)

Figura 49

a) **Que tipo de prisma foi utilizado na construção dessa piscina?**

b) **Qual é a área da superfície da piscina? E do fundo?**

c) **Qual é o volume da piscina?**

Para solucionar esta questão, é exigido do aluno um conhecimento mobilizável, porque os conhecimentos (área de retângulo, do trapézio e volume de um prisma) que serão utilizados, são bem identificados, mas como a base do prisma é um trapézio e falta a medida de um lado, para encontrá-la é necessário fazer uma adaptação, recorrendo à decomposição do trapézio em um retângulo e um triângulo retângulo, e recorrendo ao teorema de Pitágoras para encontrar a medida que falta.

Situação 2: **Um arquiteto pretende construir uma sala retangular com capacidade para 60 pessoas. A altura da sala tem de ser 3,60 m. Para cada pessoa, é necessário um volume de 3 m^3. Quais devem ser as dimensões do chão da sala, sabendo que uma das dimensões tem de ser o dobro da outra?**

Para solucionar este problema, é exigido do aluno um conhecimento disponível, porque é preciso achar nos conhecimentos anteriores (área de retângulo, volume de um paralelepípedo e equação do 2º grau) o que favorece a resolução do problema.

Situação 3: **Num poliedro convexo, o número de vértices é 8 e o de arestas é 12. Calcule o número de faces.**

Nesta situação, podemos perceber que, para obter sua solução, é exigido do aluno um conhecimento técnico, pois basta a aplicação imediata do Teorema de Euler.

No livro em estudo, conforme podemos visualizar na Tabela 24, observamos que existe um equilíbrio na quantidade de exercícios que exigem um nível de funcionamento técnico e mobilizável, para trabalhar a área da superfície de prismas e pirâmides, de volume de prismas, pirâmides e tronco de pirâmides, e para explorar a Relação de Euler. Mas, verificamos a baixa presença de exercícios que exigem um nível de funcionamento disponível.

Análise do livro 3:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

Autores: Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval.

Editora : Moderna

2004

A metodologia de ensino-aprendizagem pauta-se pela apresentação dos conteúdos já sistematizados, envolvendo questões resolvidas, nas quais não observamos uma participação mais ativa dos alunos.

A seguir, selecionamos três atividades propostas neste livro que exigem cada um dos níveis de conhecimentos de Robert.

Situação 1: **Uma pirâmide de cartolina tem 25 cm de altura. Sua base é um hexágono regular construído num circulo de 6 cm de raio. Calcule quantos centímetros cúbicos de areia cabem nessa pirâmide.**

Para solucionar esta situação-problema, observamos que é exigido do aluno um conhecimento mobilizável, porque os conhecimentos que serão utilizados são bem identificados, mas necessitam de alguma adaptação ou de alguma repetição, antes de serem colocados em funcionamento.

Situação 2: **A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede 8 cm e sua altura mede, 7,5 cm. Calcule:**

a) A área lateral

b) A área total

Para solucionar esta atividade, é exigido do aluno um conhecimento técnico, porque corresponde a uma aplicação direta da fórmula.

Situação 3: **Quantos ladrilhos quadrados de 12cm de lado são necessários para cobrir as paredes laterais e o fundo de uma piscina que tem 10m de comprimento, 6m de largura e 1,50m de profundidade?**

Para solucionar este problema, é exigido do aluno um conhecimento disponível, porque é preciso achar nos conhecimentos anteriores o que favorece a resolução do problema.

Apresentamos nos dados da Tabela 24, o resultado da análise das atividades propostas sobre o estudo da Geometria Espacial Métrica nos três livros analisados e a distribuição dos níveis de conhecimentos encontrados.

Tabela 24: Níveis de conhecimentos

LIVROS	**Número de Atividades Propostas**	**Nível Técnico**	**Nível Mobilizável**	**Nível Disponível**
Livro 1	**67**	**32**	**34**	**1**
Livro 2	**98**	**52**	**44**	**2**
Livro 3	**68**	**30**	**34**	**3**

Nesta categoria, foi possível verificar que todos os livros apresentaram um equilíbrio no número de atividades propostas que exigiam dos alunos a mobilização de seus conhecimentos com relação aos Níveis Técnico e Mobilizável. Nos três livros, constatamos um porcentual abaixo de 5% das atividades propostas, exigindo dos alunos o conhecimento do Nível Disponível.

Não contrariando as orientações de Robert (1998), pois nenhum dos três níveis está sendo negligenciado no ensino da Matemática, mas esta discrepância precisa ser melhorada quanto ao número de atividades que exigem os níveis técnico, mobilizável e disponível.

Categoria 3: Nos livros analisados, o Registro Figural é articulado nas fórmulas e atividades propostas no bloco da Geometria Espacial Métrica, e o que isso favorece na aprendizagem do aluno?

Análise do livro 1:

Matemática Aula por Aula – 2ª Série do Ensino Médio

Autores: Barreto Filho, Benigno; Silva, Cláudio Xavier

Editora FTD

2004

Ao analisar a abordagem feita pelos autores, para definição das fórmulas e teoremas que permitem encontrar:

- Área da superfície total do prisma reto;
- Volume do prisma reto;
- Diagonal do paralelepípedo retângulo;
- Área da superfície total da pirâmide regular;
- Volume da pirâmide;
- Volume do tronco de pirâmide; e

- Teorema de Euler.

As fórmulas foram estudadas ou apresentadas (sem nenhuma justificativa, dificultando a construção do conhecimento por parte do aluno). Neste livro, constatamos que em cinco das sete fórmulas analisadas foram usados os três registros de representação semiótica, a linguagem natural, o registro figural e o algébrico. Nos outros dois, foram utilizados a linguagem natural e o registro algébrico.

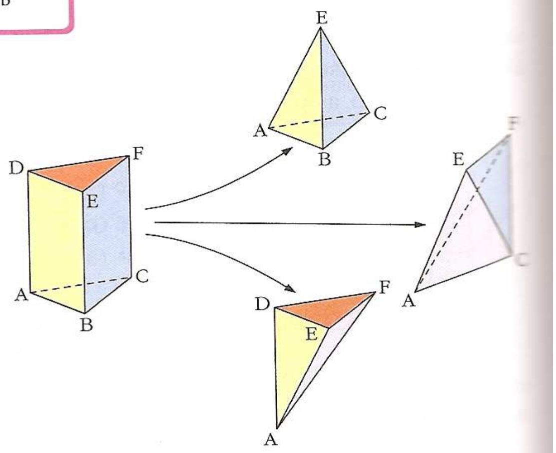
Observamos que o número de três registros articulados para definirem as fórmulas citadas é siginificativo. Como exemplo, destacamos o caso do volume da pirâmide.

Apresentamos a abordagem usada neste livro, para definir a fórmula para calcular o volume da pirâmide.

O volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

Para compreender melhor essa fórmula, observe que um prisma triangular pode se decompor em três pirâmides triangulares de mesmo volume. Portanto, o volume de cada uma dessas pirâmides é igual à terça parte do volume do prisma triangular. (Pode-se fazer uma experiência cortando um pedaço de sabão.)



Logo:

$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma triangular}}$$

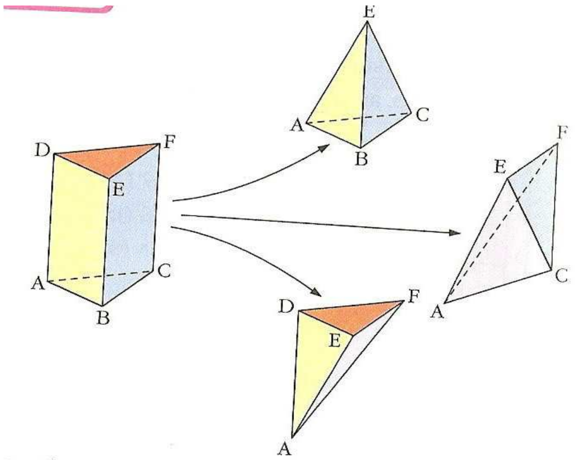
$$V_{\text{pirâmide triangular}} = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base} \times \text{altura})$$

Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 280)

Figura 50

Para compreensão da definição do volume da pirâmide, os autores recorreram à língua natural (Representação Discursiva), ao Registro Figural (apreensão operatória) e usaram, também, o Sistema de Escrita Algébrica. Vejamos como cada um destes registros apareceu:

- Língua natural: o volume da pirâmide corresponde a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura;
- Registro Figural (apreensão operatória);



- Sistema de escrita algébrico: V= $\frac{1}{3}$ A_b . b

Esta abordagem é muito semelhante à apresentada no estudo do objeto, no Capítulo I, página 43 deste trabalho, sendo realizada uma decomposição do prisma em três pirâmides, recorreu-se ao Registro Figural para definir o volume da pirâmide.

A seguir, selecionamos uma atividade que representa o tipo padrão apresentado neste livro.

Situação: **(UFV-MG) Se no paralelepípedo retângulo a=1, b=2 e c=3, o comprimento do segmento AC é:**

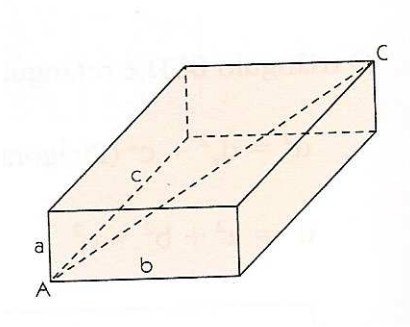
a) 13

b) 11

c) 15

d) $\sqrt{14}$

e) 10



Fonte: Barreto Filho; Silva (2004, p. 276)

Figura 51

Nesta atividade, o aluno deve articular a apreensão perceptiva e o uso direto de uma fórmula.

Em nenhum dos exercícios, seja os exemplos resolvidos ou os propostos deste livro exigiam que os alunos explicitassem propriedades matemáticas de uma figura geométrica (apreensão discursiva) ou solicitassem sua construção com a ajuda de um instrumento como régua, compasso ou software (apreensão seqüencial).

São apresentadas as definições dos Poliedros, Poliedros de Platão e dos Poliedros Regulares, sendo usada a língua natural (Representação Discursiva) e o Registro Figural (Representação não-discursiva) no qual é suficiente a apreensão perceptiva para sua identificação, o que dificulta a construção conceitual desses objetos de estudo por parte do aluno, pois não é proposta, por exemplo, tarefa que exija a apreensão seqüencial, permitindo ao aluno a construção dos sólidos.

Análise do livro 2:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

Autoras: Smole, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez.

Editora: Saraiva

2004

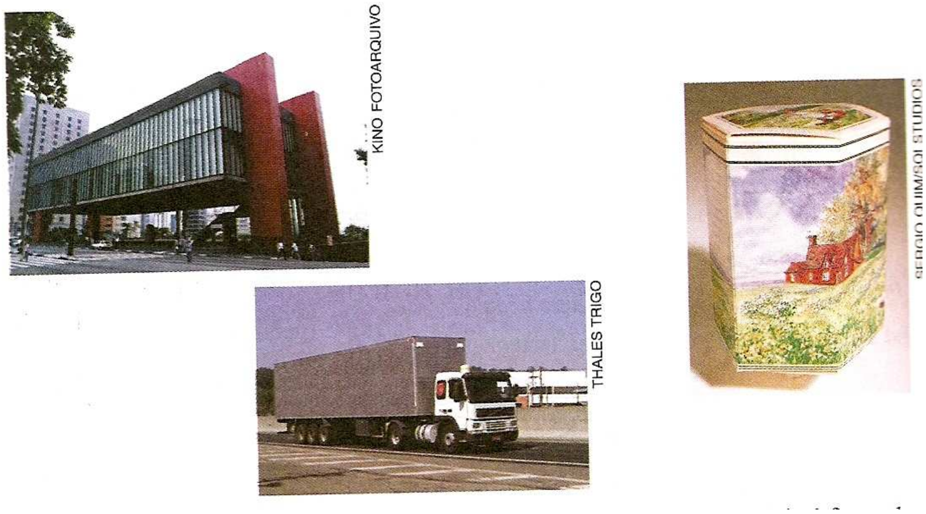
Neste livro, as autoras dividiram o estudo dos sólidos em dois capítulos intitulados Sólidos Geométricos: Poliedros e o outro de Geometria Métrica Espacial. No primeiro capítulo, definem o que é um poliedro. Para isto, apresentam um conjunto de sólidos geométricos, nos quais alguns possuem todas as superfícies planas (poliedros) que os delimitam, e outros que têm algumas das superfícies não planas (corpos redondos) que os delimitam, usando a língua natural (Representação Discursiva) e o Registro Figural (Representação não-discursiva) nos quais para sua representação somente a apreensão perceptiva é exigida.

> Os poliedros são formas espaciais sólidas delimitadas por superfícies planas poligonais.
>
> Uma superfície poligonal corresponde a um polígono reunido com a parte do plano em seu interior. (Smole; Diniz, , 2004, 2ª série, p.239)

As autoras caracterizam os elementos dos poliedros faces, arestas e vértices, recorrendo à língua natural (Representação Discursiva) e ao Registro Figural (Representação não-discursiva) nos quais para sua identificação só a apreensão perceptiva é exigida.

Analisando a abordagem feita pelas autoras em relação aos prismas, são apresentados objetos em forma de prisma que ajudam os alunos a relacionarem com seu cotidiano, facilitando sua definição, como mostra a figura a seguir.

Objetos em forma de prisma são facilmente encontrados em nosso cotidiano. Veja:



Fonte: Smole ;Diniz (2004, p. 241)

Figura 52

Allan (1997) cita em seu artigo a respeito da História da Matemática que

> A geometria se encontra presente na Arquitetura Egípcia, Assíria-Babilônica, Grega e Romana (...). (Allan, 1997, p. 1)

Assim, a geometria também está presente em nossa sociedade, podendo ser relacionada com as indicações pedagógicas atuais do uso da História da Matemática, como recurso didático.

Neste livro, são propostos exercícios e problemas para explorar os elementos de um poliedro. Para isto, é solicitada a construção de 18 sólidos diferentes, usando os moldes que a coleção traz em seu apêndice para que sejam explorados pelos alunos, facilitando assim sua visualização.

O enfoque dado para explorar os elementos dos poliedros está de acordo com o verificado na conclusão feita por Rommevaux (1999), em relação ao estudo da Geometria Tridimensional que destaca a importância da construção e manipulação de modelos concretos de sólidos geométricos.

No final dos exercícios, o livro possui uma parte que as autoras chamam de “Invente Você” na qual os alunos são desafiados a criar situações-problema, a partir de uma representação feita no Registro Figural (Representação não-discursiva). Sendo exigido dos alunos que elaborem a pergunta usando a língua natural (Representação Discursiva).

No capítulo dos “Sólidos Geométricos: Poliedros”, são trabalhadas a planificação de prismas e pirâmides. As autoras apresentam, como exemplo, planificações de prismas e pirâmides e planificações que não são de prismas ou de pirâmides, é sugerido que:

> Para obter maior precisão na construção de planificações, um dos recursos que podemos utilizar é traçar os polígonos que compõem as planificações com o auxilio de régua e compasso.
>
> As construções com régua e compasso são fundamentais para o desenho geométrico (...) (Smole ; Diniz, 2004, 2ª série, p.249)

Podendo ser verificado nesta situação a presença da apreensão seqüencial (possível nas tarefas de construção ou de descrição com o objetivo de reproduzir uma figura).

A Relação de Euler é apresentada, usando a língua natural (Representação Discursiva) e o Registro Figural (Representação não-discursiva), sendo apresentada uma tabela com os nomes dos poliedros convexos e os respectivos números de vértices, arestas e faces, permitindo ao professor fazer uma adaptação (solicitando aos alunos que tragam objetos com as formas dos poliedros para que sejam manipulados) e possibilitando ao aluno verificar a relação V – A + F = 2.

As definições dos Poliedros de Platão e dos Poliedros Regulares são apresentadas, sendo usados a língua natural (Representação Discursiva) e o Registro Figural (Representação não-discursiva). Para sua identificação, só é exigida a apreensão perceptiva. É apresentada uma prova, empregando o Sistema de Escrita Algébrico (Representação Discursiva) da existência de somente cinco tipos de poliedros de Platão e a planificação dos cinco tipos de poliedros regulares.

No apêndice de jogos ao final do livro, encontra-se um jogo denominado “Capturando Poliedros”.

> Trata-se de um jogo elaborado para retomar e aprofundar os principais conceitos e propriedades dos poliedros estudados nesse volume. Tem também o intuito de levar o aluno a aprimorar a utilização da linguagem geométrica relacionada com as propriedades estudadas. (Smole,; Diniz, 2004, 2ª série, manual do professor, p. 33)

Esta proposta de atividade vem ao encontro às idéias de Duval (1996), de que a existência de problemas relacionados com o cotidiano e atividades lúdicas desperta o interesse dos alunos.

No capítulo da Geometria Métrica Espacial, as autoras iniciam recordando a Geometria Métrica nos Polígonos, conforme sugerem as OCEM.

Para definir a área da superfície dos prismas, as autoras retomam a noção de superfície do prisma e recorrem ao uso de diferentes registros de representação: a língua natural, o Registro Figural e o Sistema de Escrita Algébrico (Representação Discursiva), apontados pelo PNLEM/06, como fatores importantes para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos.

Na definição do volume dos prismas, as autoras recorrem ao Princípio de Cavalieri, contando um pouco da história de Francesco Cavalieri (1598 – 1647), conforme sugere o PNLEM/06:

> Um livro didático deve fazer referências aos processos históricos de produção do conhecimento matemático e utilizar esses processos como instrumento para auxiliar a aprendizagem da Matemática. (PNLEM/2006, p. 74)

Realizam uma demonstração desse Princípio, favorecendo ao aluno perceber os processos que levam ao estabelecimento da fórmula do volume dos prismas.

A seguir, apresentamos uma atividade proposta no livro que exige uma apreensão seqüencial não encontrada nos outros livros analisados.

Situação: **Utilizando régua e compasso, desenhe uma planificação de um prisma reto de base quadrada cuja altura meça o dobro da aresta da base**.

A atividade exige dos alunos uma apreensão seqüencial, na qual é solicitada a construção da figura geométrica com o uso de régua e compasso. A resolução desse problema terá de ser passo a passo, é importante que elementos como arestas, base e face lateral estejam bem definidas, assim como os polígonos que compõem as faces de um prisma reto.

Com relação ao tronco de pirâmide, as autoras exploram o volume e é feita uma demonstração da fórmula usando a língua natural, o Registro Figural (apreensão perceptiva) e o Sistema de Escrita Algébrico (Representação Discursiva).

No livro, verificamos a presença das quatro maneiras de apreender uma figura: a **apreensão perceptiva** exigida quando era apresentada a representação figural do sólido e perguntava-se de que tipo era. A **apreensão discursiva** em que era apresentado o sólido e solicitava-se a nomeação dos elementos pertencentes a ele. A **apreensão operatória** quando era exigida para solução de um problema que se realizasse alguma modificação que permitisse sua solução e a **apreensão seqüencial** nos casos que solicitavam a planificação do sólido.

Neste livro, o manual do professor traz subsídios que favorecem o planejamento das aulas, pois além das orientações quanto aos aspectos dos objetivos matemáticos dos conteúdos possui orientações didáticas em relação aos jogos, sugestões de softwares (Cabri Géomètre, Sketchpad...) e projetos como o das embalagens que têm, como objetivo mostrar, a partir da análise de embalagens, as aplicações do estudo dos sólidos geométricos.

Atende às orientações do PNLEM/06, que diz que o livro do professor não deve ser apenas uma cópia do livro do aluno com os exercícios resolvidos. Para cumprir suas funções, deve apresentar entre outras, como são descritas no anexo I,

> Sugerir atividades complementares, como projetos, pesquisas, jogos, etc. (PNLEM/06, p. 12).

Vejamos o que dizem as autoras com relação aos capítulos de Sólidos Geométricos: Poliedros e de Geometria Métrica Espacial.

> Essas unidades foram organizadas de modo a permitir que o aluno não apenas conheça as figuras geométricas, para calcular suas áreas e seus volumes, mas também para que desenvolvam habilidades visuais, verbais, lógicas, de desenho, de percepção e de representação dessas figuras. Procuramos também desenvolver uma proposta que privilegie tanto o aspecto métrico das figuras quanto seu aspecto geométrico.
>
> Essa opção nos fez incluir tópicos que tradicionalmente são desconsiderados nas unidades destinadas à Geometria, tais como a planificação de sólidos geométricos, um tipo de atividade que permite o desenvolvimento de capacidades visuais e de desenho. (Smole; Diniz, 2004, 2ª série, manual do professor, p. 32)

Análise do livro 3:

Matemática Ensino Médio – 2ª Série do Ensino Médio.

Autores: Bianchini, Edwaldo; Paccola, Herval.

Editora : Moderna

2004

Neste livro, os autores iniciam o estudo dos poliedros com uma boa síntese de sua história. Esta afirmação deve-s ao estudo histórico realizado no Capítulo I, e traz a ilustração do Quadro de Jacopo de Barbari, intitulado Retrato de Luca Pacioli com um discípulo, pintado em 1495.

Fonte: Bianchini e Paccola (2004, p. 161)

Figura 53

> Nele, temos dois poliedros convexos... essa é a imagem mais antiga desse tipo de poliedro. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.161)

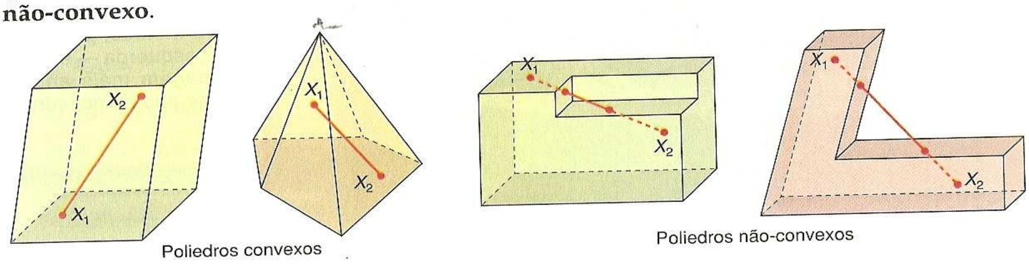
Os autores apresentam a definição de poliedros, usando um conjunto de poliedros convexos, para sua identificação só a apreensão perceptiva é exigida.

> Poliedros são sólidos limitados por polígonos planos tais que cada um dos lados desses polígonos pertença a dois e somente dois deles. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.162)

Os elementos arestas, vértices e faces são apresentados usando o Registro Figural, para sua identificação só a apreensão perceptiva é exigida.

As definições de poliedros convexo e não-convexo são apresentadas recorrendo aos registros, como mostra a figura.

Um **poliedro é convexo** quando o segmento de reta que ligar dois pontos distintos quaisquer desse poliedro estiver contido no poliedro. Caso contrário, é chamado de **poliedro não-convexo**.



Fonte: Bianchini ; Paccola (2004, p.162)

Figura 54

Podemos verificar que os autores recorrem à Língua Natural e ao Registro Figural, para sua compreensão somente a apreensão perceptiva é exigida.

O Teorema de Euler (Relação de Euler) é apresentado com uma boa referência à sua história baseada no livro de Lima, Elon Lages (1991) Meu Professor de Matemática e outras histórias, usando o Registro Figural, que necessita da apreensão perceptiva para identificação dos elementos inerentes ao Teorema.

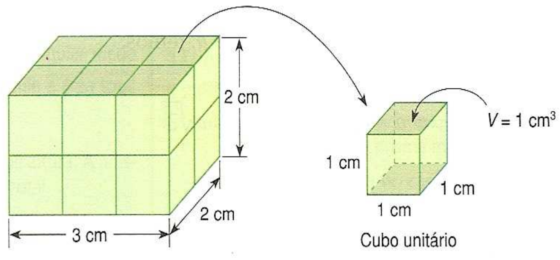
Verificamos que a definição de poliedros regulares é apresentada, usando o Registro Figural e para sua identificação é exigida somente a apreensão perceptiva. Os cinco tipos e suas respectivas planificações são apresentados. Nenhuma prova da existência de somente cinco poliedros regulares é apresentada nem é feita referência à existência dos poliedros de Platão.

Analisando a abordagem feita pelos autores em relação aos prismas, é apresentada sem nenhuma justificativa a fórmula para se encontrar a área da superfície, recorrendo à Língua Natural e ao Sistema de Escrita Algébrico, o que não proporciona a construção do conhecimento por parte do aluno.

Os autores usam a Língua Natural e o Registro Figural para definirem o volume de um prisma, como:

> O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Essa quantidade é determinada comparando-se esse sólido com um outro tomado como unidade. Dessa comparação resulta um número que será a medida do volume. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.170)

Para exemplificar, vamos tomar um paralelepípedo retângulo com 3 cm de comprimento, 2 cm de largura e 2 cm de altura.



Fonte: Bianchini ; Paccola (2004, p. 170)

Figura 55

Em relação ao estudo das pirâmides, os autores definem a área total de sua superfície recorrendo somente à Língua Natural, como segue:

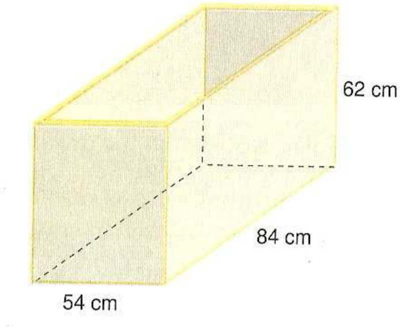
> Área da base (Ab): é a área do polígono da base.
>
> Área lateral (Al): é a soma das áreas das faces laterais.
>
> Área total (At): é a soma da área lateral com a área da base. (Bianchini; Paccola, 2004, 2ª série, p.174)

Quanto ao teorema do volume da pirâmide, este é apresentado na Língua Natural com o recurso do Registro Figural sendo realizada uma apreensão operatória (sendo centrada nas possíveis modificações de uma figura de partida e as reorganizações perceptivas que essas modificações sugerem), possibilitando uma melhor compreensão por parte do aluno.

Com relação ao tronco de pirâmide, os autores exploram somente o volume, não sendo feita uma demonstração da fórmula que é apresentada, usando o Sistema de Escrita Algébrico.

A seguir, apresentamos uma atividade proposta nesse livro para o cálculo do volume de um prisma.

Situação: **Uma caixa-d'água (sem tampa) com a forma de um paralelepípedo retângulo foi construída com placas de concreto de 2 cm de espessura (inclusive o fundo). Veja na figura as medidas externas dessa caixa.**



Fonte: Bianchini ; Paccola (2004, p. 182)

Figura 56

Sabendo-se que cada litro de água corresponde a 1 dm^3, quantos litros de água cabem nessa caixa, quando cheia?

Nesta atividade, para resolver este problema, é exigida a apreensão perceptiva por apresentar o registro figural. ‘É necessário descontar a medida da espessura em cada uma das dimensões, realizar a conversão das unidades de medidas de cm para dm e aplicar a fórmula do volume do paralelepípedo.

No final do capítulo, é apresentada uma quantidade razoável de exercícios complementares nos quais alguns são contextualizados e relacionados com objetos do cotidiano.

Nesse livro, não verificamos nos exercícios propostos a exigência para sua resolução da apreensão discursiva ou da seqüencial.

A seguir, apresentamos uma síntese dos dados para uma leitura mais rápida das categorias analisadas encontradas nos livros estudados.

Tabela 25: Síntese das Categorias

CATEGORIAS	CONHECIMENTOS DISPONIBILIZADOS	**Livro 1**	**Livro 2**	**Livro 3**
Categoria 1	Nível G0		**X**	
	Nível G1	**X**	**X**	**X**
	Nível G2	**X**	**X**	**X**
Categoria 2	Nível Técnico	**X**	**X**	**X**
	Nível Mobilizável	**X**	**X**	**X**
	Nível Disponível	**X**	**X**	**X**
Categoria 3	Apreensão Perceptiva	**X**	**X**	**X**
	Apreensão Discursiva			
	Apreensão Operatória	**X**	**X**	
	Apreensão Seqüencial		**X**	

Em relação à Categoria 3, verificamos que os três livros não propõem atividades que exijam do aluno apreender o Registro Figural de maneira discursiva. Observamos, também, um número maior de atividades propostas usando somente a língua natural e uma quantidade pequena de atividades propostas com Registro Figural e a língua natural, em relação ao total das atividades propostas no bloco da Geometria Espacial Métrica nos livros 1 e 3. No livro 2, percebemos índice maior de atividades propostas, recorrendo ao uso do Registro Figural.

Na Categoria 1, constatamos que os livros 1 e 3 não apresentaram atividades para que os alunos pudessem colocar em prática seus conhecimentos recorrendo ao Nível G0, que usa objetos concretos. De acordo com os resultados da pesquisa de Rommevaux (1999), que aponta a importância da construção e manipulação de modelos concretos e contrariando as orientações do PNLEM/2006, que sugere que os livros didáticos devem propor atividades que requeiram o uso de materiais concretos, tais objetos são fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial.

3.3.2 Considerações sobre a análise dos livros

Todos os livros continham um capítulo específico sobre o tema Geometria Espacial Métrica.

Conforme visto no Estudo Histórico e no Objeto Matemático presentes no Capítulo I deste trabalho, os poliedros para os quais é válida a fórmula de Euler são chamados poliedros eulerianos, fato este que não é citado por nenhum dos livros analisados.

Nos livros 1 e 2, o estudo da Geometria Espacial Métrica é realizado com uma abordagem na qual as autoras retomam o estudo da Geometria Métrica nos Polígonos, conforme as orientações das OCEM/06.

> No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. (OCEM/2006, p. 76)

A retomada do estudo para determinar a medida da área de alguns polígonos no trabalho com as áreas das superfícies e volumes dos sólidos (prismas e pirâmides), faz-se muito importante conforme constatado por nós, quando da análise da Situação 1 na página 117, em que destacamos os conhecimentos necessários para resolução do problema, que envolvia a necessidade do conhecimento destes objetos matemáticos.

O mesmo não aconteceu com o livro 3 no qual o estudo dos Poliedros é iniciado, sem fazer uma retomada dos procedimentos necessários para determinar a medida da área de polígonos, deixando de fazer uma ligação desses conhecimentos possivelmente já adquiridos pelo aluno, contrariando, portanto, as orientações das OCEM/06 e do PNLEM/06.

Um fato merecedor de destaque na análise dos três livros didáticos foi a ausência de atividades que propusessem a utilização de softwares educacionais, o que vai de encontro às idéias de Isotani ; Brandão (2006):

> O uso da Geometria Dinâmica[9] no ensino da Geometria traz boas possibilidades de mudanças em uma área que vem sendo negligenciada no ensino. (Isotani ; Brandão, 2006, p. 121)

Desta forma, por meio dos livros didáticos, verificamos as tendências do ensino da Geometria Espacial Métrica que, aliadas aos Estudos Preliminares e aos resultados dos questionários, esperamos que nos ofereçam os elementos de que precisamos para responder nossa questão, apresentada no Capítulo II sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica.

[9] "Geometria da régua e compasso implementada no computador"

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo analisar livros didáticos da 2ª série do Ensino Médio sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica, verificou se as atividades por eles propostas, proporcionam e favorecem a construção do conhecimento por parte dos alunos, propondo atividades com uso de material concreto, construções com instrumentos, como régua e compasso ou softwares que facilitam a visualização e desenvolvem o pensamento geométrico espacial, apontados nas pesquisas como essenciais no estudo da Geometria Espacial Métrica. A fundamentação teórica baseou-se nas pesquisas em Educação Matemática de Duval (1995); Robert (1998); Rommevaux (1999); Parsysz (2000) e Ponte et al.(2005) visando a responder à seguinte questão de nossa pesquisa:

Os livros didáticos do 2º ano de Ensino Médio desenvolvem os conteúdos referentes à Geometria Espacial Métrica dos prismas e pirâmides, sob uma perspectiva dos resultados das pesquisas em Educação Matemática de Duval (1995); Robert (1998); Rommevaux (1999; Parsysz (2000) e Ponte et al. (2005)?

Na tentativa de responder a esta questão, buscamos identificar as concepções dos professores e suas práticas pedagógicas por meio de um instrumento diagnóstico. Neste instrumento, além das informações pessoais e profissionais, cada professor foi convidado a analisar e resolver situações-problema que envolviam o ensino da Geometria Espacial Métrica, evidenciando, o que eles pensam e como agem em relação ao ensino deste objeto matemático.

Os professores pesquisados declararam que o ensino da Geometria é importante, mas nem sempre esse discurso é compatível com sua prática, uma vez que muitos apresentam dificuldades para operacionalizar essas idéias. Sendo comprovadas quando analisamos a parte C do instrumento-diagnóstico, pois verificamos que a maioria dos professores pesquisados não domina os conceitos de Geometria Espacial Métrica.

Um dos motivos para este baixo desempenho, segundo Almouloud (2004), é o fato de que a grande parte dos professores que hoje está em atividade teve uma formação de base muito precária em Geometria, e diz ainda que, estes não estão preparados para trabalharem as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Dos vinte e um professores pesquisados, dezenove lecionam ou já o fizeram na 2ª série do Ensino Médio, 12 declararam usar o livro didático em sala de aula, mas constatamos que o fazem sobretudo para resolver os exercícios que propõe.

Quanto ao uso de recursos pedagógicos no ensino da Geometria, quinze professores pesquisados declararam que nunca utilizam o laboratório de informática.

Para responder à questão de nossa pesquisa, selecionamos três livros didáticos aprovados pelo PNLEM (2006). De posse de cada livro, estabelecemos três categorias de análise e apresentamos os resultados no Capítulo III deste trabalho, em tabelas para facilitar a leitura dos resultados.

Os três livros analisados possuem capítulos específicos que tratam da Geometria Espacial Métrica, abordando os seguinte conteúdos: área da superfície total do prisma, diagonal do paralelepípedo retângulo e do cubo, área da superfície total da pirâmide regular, volume do prisma e da pirâmide, volume do tronco de pirâmide e teorema de Euler.

No entanto, os Livros 1 e 3, trazem os capítulos de Geometria Espacial Métrica no final do volume, aumentando, segundo Lorenzato (1995), a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo. Desta forma, estes livros didáticos continuam contribuindo para que esse objeto matemático seja preterido em sala de aula.

A visualização e a representação no plano das figuras tridimensionais não são estimuladas, o que contribui para a difusão de uma visão equivocada do professor sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica.

Os três níveis de Robert (1998) não são negligenciados nos três livros didáticos analisados, percebemos um equilíbrio com relação ao número de exercícios propostos que exigem os níveis técnico e mobilizável e uma discrepância com relação ao nível disponível.

Um dos fatores considerados por Almouloud et al (2004) como origem das dificuldades que os professores encontram no processo de ensino-aprendizagem de saberes e conhecimentos geométricos, é em relação às situações de ensino como aparecem nos livros didáticos, pois não coordenam registros de representação semiótica; pela não percepção do importante papel da figura na visualização e nas fases de exploração. Os problemas propostos privilegiam resoluções algébricas, com poucos exigindo raciocínio dedutivo e demonstração.

Os professores pesquisados utilizam o livro didático, sobretudo, para resolverem os exercícios propostos nele.

Para desenvolverem este conceito, observamos que os professores poderiam preparar suas aulas, focando um trabalho de planificação dos sólidos geométricos, pouco explorados nos livros didáticos, usando material concreto, possibilitando, assim, o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial de seus alunos.

Entretanto, o docente acaba reforçando uma concepção errônea no ensino da Geometria Espacial Métrica, provavelmente, pelo uso do livro didático que explora atividades, exigindo em sua grande maioria um conhecimento técnico e limitado à aplicação de fórmulas para sua solução.

Os resultados da análise indicaram que os livros didáticos atendem parcialmente às recomendações das pesquisas em Educação Matemática quanto ao favorecimento do desenvolvimento do pensamento geométrico espacial.

Desta forma, tendo em vista os resultados apontados neste trabalho, é de se esperar que nossos alunos sintam dificuldades na aprendizagem da Geometria Espacial Métrica.

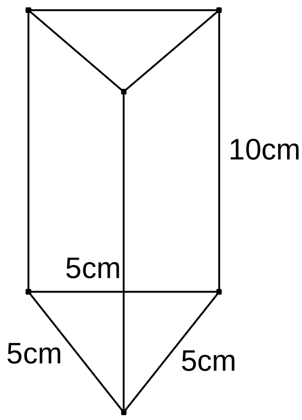
De modo geral, acreditamos ter respondido à questão que norteou nossa pesquisa. Esperamos que este trabalho possa contribuir para outros estudos sobre o ensino da Geometria Espacial Métrica. E, ainda, que outros trabalhos possam somar novos elementos à pesquisa aqui realizada, como por exemplo, um trabalho de conscientização de professores para integrar o uso de materiais concretos, softwares dinâmicos à sua prática pedagógica no que se refere ao ensino da Geometria Espacial Métrica.

Como resultado desta pesquisa que poderá ser utilizada por professores da rede pública e/ou privada de ensino, apresentamos uma seqüência de etapas que não poderão deixar de ser contempladas no ensino-aprendizado da Geometria Espacial Métrica, em especial, dos prismas:

- A retomada do ensino da Geometria Métrica nos Polígonos (área das principais figuras planas: quadriláteros e triângulos);
- Propor a construção de quadrados, retângulos e triângulos com o uso de compasso, régua e transferidor;
- Usar material concreto na construção dos sólidos geométricos (ou recorrer ao uso de embalagens e outros objetos no formato de sólidos);
- Uso da História da Matemática, como o Princípio de Cavalieri na definição do volume de um prisma;

Deixaremos uma atividade que poderá ser usada no ensino deste objeto matemático.

Sugestão de atividade: utilizando régua e compasso, desenhe em uma cartolina a planificação, do seguinte prisma.



a) A seguir, de posse de sua planificação, calcule a quantidade total em cm^2 de cartolina utilizada na construção.

b) Monte o prisma e determine seu volume.

REFERÊNCIAS

ALLAN, Nelo. Uma curta história de POLIEDROS. Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. Águas de São Pedro, 1997 (p. 301-311).

ARAÚJO, Claudia Teixeira. Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele. Projeto Fundão – IM/UFRJ, 1997.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_________, A Geometria na Escola Básica: que espaços e formas tem hoje?. Disponível em: www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-saddo.doc, acesso em 30/06/08.

ALMOULOUD,Saddo Ag; MANRIQUE, A. L. A Geometria no Ensino Fundamental: concepções de professores e de alunos In: 24a Encontro ANPED: Associação Nacional de Pesquisa em Educação, 2001, Caxumbu. 24a ANPED: Associação Nacional de Pesquisa em Educação, Caxambu, Minas Gerais, outubro de 2001.. Rio de Janeiro: ANPED, 2001**.**

_________*, et al***.** A Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Rev. Bras. Educ.*, Sept./Dec. 2004, no.27, p.94-108. ISSN 1413-2478.

BARRANTES, B. e BLANCO, L. B. Caracterização das concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da geometria. Tradução: Carlos Alberto B.A. de Figueiredo. Zetetiké, n.25, v.14, p.65-91, 2006.

BARRETO FILHO, Benigno; Silva, Cláudio Xavier. Coleção Matemática Aula por Aula – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2004.

BIANCHINI, Edwaldo; Paccola, Herval. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Tópicos de Geometria (Notas de aula) – São Paulo: 2006.

BOSQUETTI, Maria Carolina Bonna. SARESP/2000 e a questão da visualização em Geometria Espacial. 2002. (Dissertação Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)– 5672/71, Ministério da Educação. Brasília, 1971 p.44.

__________, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB)– 9394/96, Ministério da Educação. Brasília, 1996.

__________, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM), Matemática. Brasília, 1999.

__________, Catálogo do Programa Nacional do Livro Para o Ensino Médio: PNLEM/2005 Matemática, Brasília: Mec, Semtec, Fnde, 2004.

__________, Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, Secretaria de Educação Básica, Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (OCEM), Vol. 2. Brasília, 2006.

__________, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), disponível em: www. FNDE.gov.br, acesso em: 15/02/08.

CANO, Marcos A. Munhoz. Ciência, Magia e Filosofia no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática. (Dissertação de Mestrado) PUC-SP, 2007.

CARLOVICH, Marisa. A Geometria Dedutiva em Livros Didáticos das Escolas Públicas do Estado de São Paulo para o 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental. (Dissertação de Mestrado) PUC-SP, 2005.

CAVALCA, Antonio de P. V. Espaço e Representação Gráfica: Visualização e Interpretação. (Dissertação de Mestrado) PUC-SP, 1997.

COSTA, José C. O. Ensino Médio etapa final da Educação Básica ou preparatório para o Ensino Superior?, disponível em : www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos_trabalho/GDT08-Jose.doc, acesso em: 30/06/08.

CHEVALLARD, Yves; BOSCIT,M.; GASCON,J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução Dayse Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática elementar, Vol. 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica. São Paulo: Atual, 2005.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. (1995) In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA: Revista do Programa de Estudos Pós – Graduados em Educação Matemática/ PUC-SP – v. 4 - n. 2 – São Paulo: EDUC, 2002 - semestral (p. 75–143).

EVES, Howard. História da Geometria; Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual (58-60).

FRIOLANI, Luis César. O Pensamento Estocástico nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental. (Dissertação de Mestrado) PUC-SP, 2007.

ISOTANI, Seij; Brandão, Leônidas de O; Anais do XXVI Congresso da SBC. Campo Grande/MS, 2006 (p. 121)

LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 1991.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? In: A Educação Matemática em Revista – SBEM. Ano 03, n. 4 - 1º Semestre 1995 (p. 3-13).

KALEFF, Ana Maria. Tomando o ensino da GEOMETRIA em nossas mãos... In: A Educação Matemática em Revista – SBEM. Ano I, n. 2 - 1º Semestre 1994 (p. 19-25).

MANRIQUE, Ana Lúcia. Processo de Formação de Professores em Geometria: Mudanças em concepções e práticas. (Tese de doutorado) PUC-SP, 2003.

MANRIQUE, A. L., SILVA, M. J. F. da, ALMOULOUD, S. A. Conceitos geométricos e formação de professores do ensino fundamental (2002). Disponível em: www.ANPED.ogr.br/reuniões/analuciamanriquet19.zip, acesso em 30/06/08.

MEDALHA, Vera Lucia Lopes. "A Visualização no Estudo da Geometria Espacial". (Dissertação de Mestrado) Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 1997.

VAN HIELE, D. G. Teoria de van Hiele In: NASSER, Lílian; Sant`Anna, Neide F. Parracho. Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele. Projeto Fundão – IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 1997.

NÓBREGA, J. Cássio C. A prendendo matemática com o Cabri-Geometre II. Brasília: Editora do Autor, 2003.

PARSYSZ, Bernard. "Articulação entre percepção e dedução num meio geométrico para professores da escola elementar." Colóquio Copirelem – Tours – 2000.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. In: Revista Zetetidé. Ano I – n. 1 – 1993. (p.3-17).

PONTE, J.P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

ROBERT, Aline. “Ferramentas de análise dos conteúdos matemáticos a ensinar.” In: Revista Recherches em didactique des Mathematiques, vol18, n.2, (p. 139-190) 1998.

ROMMEVAUX, Marie-Paule. Le discernement des plans dans une situation tridimensionelle (Discerning the plans in a three-dimensional situation). In: Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós – Graduados em Educação Matemática/PUC-SP – v. 1 – n.1 – São Paulo: EDUC, 1999 – semestral (p.13-65).

SILVA, Mauricio Barbosa. A Geometria Espacial no Ensino Médio a Partir da Atividade Webquest: Análise de uma experiência. (Dissertação de Mestrado) PUC-SP, 2006.

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio – 1ª a 3ª séries do Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2004.

ANEXO I

DOCUMENTOS OFICIAIS

Este anexo tem o propósito de fazer um estudo para verificar como os textos oficiais: como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB-9394/96), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM/1999), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM/2006) e o Guia de Livros Didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLEM/2006) tratam o ensino de Geometria no Ensino Médio e, em particular, o ensino da Geometria Espacial, objeto matemático de nossa pesquisa. Todos os textos citados são orientações oficiais que regulamentam e orientam a Educação Nacional e são de responsabilidade do Ministério da Educação.

1.1 LDB

A Lei nº 9.394/96 estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em seu capítulo II, artigo 26, que diz:

Os currículos do Ensino Fundamental e Médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.

No inciso 1º - Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da Língua Portuguesa e da Matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente, do Brasil.

No artigo 27, estabelece que: os conteúdos curriculares da Educação Básica (formada pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) observarão, ainda, as seguintes diretrizes:

I – A difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática;

II – Consideração das condições de escolaridade dos alunos em cada estabelecimento;

III – Orientação para o trabalho;

IV – Promoção do desporto educacional e apoio às praticas desportivas não-formais.

1.2 PCNEM

Os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio citam que a reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em áreas, uma vez que entende os conhecimentos cada vez mais imbricados aos conhecedores, seja no campo técnico-científico, seja no âmbito do cotidiano da vida social. A organização em três áreas – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias.

Os PCNEM levam em conta que a Matemática é uma linguagem que busca dar conta dos aspectos do real e que é instrumento formal, expressão e comunicação para diversas ciências. Cabe compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas.

A aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias de acordo com os PCNEM indicam a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.

A respeito dos conhecimentos de Matemática, os PCNEM indicam que é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores e de trabalhar cooperativamente.

A Matemática no Ensino Médio, segundo os PCNEM, tem um valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

De acordo com PCNEM, é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a torna uma linguagem de comunicação de idéias e permitem modelar a realidade e interpretá-la. Assim, é a Geometria na leitura e interpretação do espaço.

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio, junta-se a idéia de que no Ensino Fundamental os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los, ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto à abstração, o raciocínio em todas as suas vertentes, a resolução de problemas de qualquer tipo, a investigação, a análise e compreensão de fatos matemáticos e a interpretação da própria realidade.

Conforme os PCNEM, as finalidades do ensino de Matemática no Nível Médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas de Matemática, de outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; e

- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Para o desenvolvimento das capacidades, que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados.

O currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizadas. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser abandonados por parte dos organizadores de currículos e professores.

Os elementos essenciais de um núcleo comum devem compor uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos com base em critérios que visem ao desenvolvimento das atitudes e habilidades descritas.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cercam.

Estas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo por meio dos olhos das outras ciências.

As Competências e Habilidades a serem desenvolvidas em Matemática são as seguintes:

Quadro 8: Competências e habilidades

Representação e Comunicação	Ler e interpretar textos de Matemática; Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc.) ; Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas, etc.) e vice-versa; Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna como na linguagem matemática, usando a terminologia correta; Produzir textos matemáticos adequados; Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação; Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e Compreensão	Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.); Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; Formular hipóteses e prever resultados; Selecionar estratégias de resolução de problemas; Interpretar e criticar resultados em uma situação concreta; Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; e

	Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.
Contextualização Sociocultural	Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento; Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade; e Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Fonte: PCNEM (2004, p. 270)

1.3 OCEM

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM/2006) na área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, constituem um material que apresenta e discute questões relacionadas ao currículo escolar e a cada disciplina em particular.

Conforme as OCEM, o currículo é a expressão dinâmica do conceito que a escola e o sistema de ensino têm sobre o desenvolvimento dos seus alunos e que se propõe a realizar com e para eles. Portanto, qualquer orientação que se apresente não pode chegar à equipe docente como prescrição quanto ao trabalho a ser feito.

De acordo com as OCEM, o Projeto Pedagógico e o Currículo da Escola devem ser objetos de ampla discussão para que suas propostas se aproximem sempre mais do currículo real que se efetiva no interior da escola e de cada sala de aula.

Visando a contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, as OCEM tratam de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Em relação às questões de conteúdo, as OCEM partem do princípio de que toda situação de ensino-aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o "pensar matematicamente". Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um "fazer matemático" por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação do conhecimento.

Os conteúdos básicos foram organizados em quatro blocos: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.

As sugestões das OCEM quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de "regras" desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de "fixação" ou a aplicação direta de fórmulas.

Destacaremos o estudo da Geometria (objeto matemático de nossa pesquisa) que deve possibilitar aos alunos, de acordo com as OCEM, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo no qual os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a Geometria que leva à trigonometria e a Geometria para o cálculo de comprimentos, área e volumes.

O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado no Ensino Médio, conforme as OCEM.

Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se sua simples apresentação. O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas.

No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides.

Metodologicamente, as OCEM destacam que a História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades presentes na construção do conhecimento matemático.

Outra questão importante que as OCEM fazem referência, é a respeito da discussão do papel do livro didático nas salas de aula de Matemática, particularmente, em função da atual conjuntura, em que diferentes programas de avaliação e distribuição de livros didáticos têm se efetivado. O texto didático traz para a sala de aula mais um personagem, seu autor, que passa a estabelecer um diálogo com o professor e seus alunos, refletindo seus pontos de vista sobre o que é importante ser estudado e a forma mais eficaz de trabalhar os conceitos matemáticos.

De acordo com as OCEM, na ausência de orientações curriculares mais consolidadas, sistematizadas e acessíveis a todos os professores, o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da Matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa”. É importante, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas, como um recurso a mais.

1.4 PNLEM

Para cumprir adequadamente a função didático-pedagógica, segundo o PNLEM/2006, o livro didático precisa atender, inicialmente, a uma tripla exigência:

- correção das informações, conceitos e procedimentos que integram o componente curricular;

- adequação de sua proposta didático-pedagógica em relação à situação de ensino-aprendizagem e aos objetivos visados;
- sintonia com a legislação e os demais instrumentos oficiais que regulamentam e orientam a educação nacional.

De acordo com o PNLEM/2006 para avaliação de livros didáticos, foram definidos critérios comuns e específicos.

Critérios comuns eliminatórios listados pelo PNLEM/2006.

I) Correção dos conceitos e das informações básicas; e

II) Respeito aos princípios de construção da cidadania.

Em relação ao critério I) as obras não poderão:

a) formular erroneamente os conceitos que veiculem;

b) fornecer informações básicas erradas ou desatualizadas; e

c) mobilizar de forma inadequada esses conceitos e informações, levando o aluno a construir de forma incorreta conceitos e procedimentos.

Em relação ao critério II) as obras não poderão :

a) privilegiar um determinado grupo, camada social ou região do país;

b) veicular preconceitos de origem, cor, condição econômico-social, etnia, gênero, orientação sexual, linguagem ou qualquer outra forma de discriminação;

c) divulgar matéria contrária à legislação vigente para a criança e o adolescente, no que diz respeito a fumo, a bebidas alcoólicas, a medicamentos, a drogas e a armamentos, entre outros;

d) fazer publicidade de artigos, de serviços ou de organizações comerciais, salva guarda, entretanto, a exploração estritamente didático-pedagógica do discurso publicitário; e

e) fazer doutrinação religiosa.

Com relação à coerência e adequação metodológicas, algumas exigências são impostas ao livro didático pelo PNLEM/2006:

- que explicite suas escolhas teórico-metodológicas;

- que articule, quando for o caso, as diferentes opções a que recorra, evidenciando a compatibilidade entre elas;

- que apresente coerência entre as opções declaradas e a proposta efetivamente formulada;

- que as opções efetuadas contribuam, no seu conjunto, para a consecução dos objetivos, quer da educação em geral, quer da disciplina e do nível de ensino em questão;e

- que a proposta pedagógica propicie, tanto a construção de conhecimentos relevantes quanto o desenvolvimento de diferentes capacidades cognitivas, como compreensão e memorização, análise e síntese, observação, generalização e formulação de hipóteses, previsão e planejamento, entre outras.

O livro do professor não deve ser apenas uma cópia do livro do aluno com os exercícios resolvidos. Para cumprir suas funções, deve:

* descrever a estrutura geral da obra, explicitando a articulação pretendida entre suas unidades e os objetivos específicos de cada uma delas;

- orientar com formulações claras e precisas os manejos pretendidos ou desejáveis do material em sala de aula;

- sugerir atividades complementares, como projetos, pesquisas, jogos, etc;

- fornecer respostas ou padrões de respostas para parte das atividades propostas aos alunos;

- discutir o processo de avaliação da aprendizagem e mesmo sugerir instrumentos, técnicas e atividades;e

- informar e orientar o professor a respeito de conhecimentos atualizados ou especializados, indispensáveis à adequada compreensão de aspectos específicos de uma determinada atividade ou mesmo da proposta pedagógica do livro.

De acordo com os critérios específicos de Matemática, são apresentados alguns aspectos metodológicos seleção, distribuição, articulação dos conteúdos, com objetivo de exemplificá-los ou de apontar desvios mais comuns. Selecionamos entre estes exemplos, aqueles que fazem referência ao estudo da Geometria.

No Ensino Médio, a Geometria pode representar um campo privilegiado de articulações entre conceitos e procedimentos matemáticos relevantes, como podemos observar no próximo parágrafo.

Possivelmente por sua história, a Geometria tem sido vista, em muitas das atuais propostas de ensino, como o único campo em que são pertinentes as demonstrações do método lógico-dedutivo. Este não é um ponto de vista correto, pois o método dedutivo é fundamental nos demais campo da Matemática. A Geometria tem a particularidade de ser um campo em que é possível exercitar, de forma plena, as inter-relações entre o método lógico-dedutivo e o raciocínio intuitivo, com base nos desenhos ou nos exemplos materiais dos objetos abstratos da Geometria.

Diferentes linguagens podem ser usadas para representar os conteúdos-símbolo: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Conforme o PNLEM/2006 uma desarticulação indesejável de um livro didático manifesta-se, muitas vezes, quando um assunto novo é introduzido e não é feita nenhuma ligação dele com conhecimentos possivelmente já adquiridos pelo aluno, dentro ou fora da escola, ou mesmo tratados anteriormente no próprio texto.

O PNLEM/2006 discute também os aspectos relacionados aos dois eixos norteadores das práticas pedagógicas, que são a interdisciplinaridade e a contextualização, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Destacando que a história oferece um âmbito de contextualização importante do conhecimento matemático, e deve ser usada como instrumento para auxiliar a aprendizagem da matemática, então é citado alguns temas são citados nos quais a articulação com a História da Matemática pode ser feita, como os cálculos astronômicos realizados em diversas fases históricas e suas relações com a Geometria, o Princípio de Cavalieri e as questões de cálculo de volume.

O PNLEM/2006 cita algumas estratégias para formar um aluno com as competências cognitivas complexas, como a resolução de problemas e a de propor atividades em que o aluno deva registrar, por escrito, ou relatar oralmente suas estratégias de resolução. No ensino da Matemática, há forte tradição de serem produzidos, nesses casos, textos que contêm quase exclusivamente linguagem puramente numérica ou simbólica, com escassez absoluta da linguagem natural.

O livro didático deve estabelecer pontes para emprego de outros recursos didáticos que possam contribuir para a aprendizagem do aluno, por exemplo, propor atividades que requeiram o uso de materiais concretos, de instrumentos de medição ou de construção de figuras e de jogos matemáticos, entre outros.

Os textos oficiais citados serviram como referência para analisarmos os livros didáticos do Ensino Médio de Matemática (as três coleções mais usadas pelas escolas públicas estaduais da Diretoria de Ensino de São Bernardo do Campo - SP) e para formularmos o questionário proposto aos professores.

ANEXO II

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

Tema de Pesquisa: Como o professor vê o ensino da Geometria Tridimensional.

Objetivo Geral: Verificar a relação professor e livro didático no 2º ano do E.M, quanto ao trabalho com Geometria Métrica Espacial.

Objetivos Específicos:

- Identificar o perfil dos professores.
- Identificar a relação entre professor, os PCN, quanto à Geometria Métrica Espacial.
- Identificar a opinião do professor sobre a adequação do livro didático aos PCNs, quanto à Geometria Métrica Espacial.
- Identificar como o professor trabalha na sala de aula a Geometria Métrica Espacial

Questionário

Caro Professor,

Este questionário tem por objetivo fornecer subsídios para a compreensão do processo ensino-aprendizagem no que tange à Geometria Métrica Espacial, mais especificamente, estudar a relação professor e livro didático.

Estamos preocupados com a qualidade do ensino, por isso, acreditamos que suas respostas poderão nos ajudar a pensar em melhorias para o processo de ensino-aprendizagem desse bloco de conhecimentos.

Agradecemos sua colaboração ao responder este questionário. As opções de respostas que seguem foram desenvolvidas para que possamos melhor conhecer as práticas pedagógicas dos professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio de escolas públicas e particulares. **Não há respostas certas ou erradas.**

Informamos que os dados coletados por este questionário serão analisados de forma conjunta e utilizados em estudos estatísticos de tendência educacional. Com isso, garantimos tanto o anonimato como o sigilo dos respondentes.

1) Idade (em anos completos): ________________________

2) Gênero: M (   )   F (   )

3) Tempo de magistério (em anos completos): ________________

4) Carga horária semanal em 2007 (em horas/aula):

a) Rede Pública:___________________

b) Rede Privada: ___________________

5) Graduação:

a) Licenciatura em Matemática (   )

b) Outros (   )

6) Na sua formação acadêmica (graduação ou outros), você teve oportunidade de estudar Geometria de forma a lhe dar subsídios para trabalhar com os alunos?

Sim (   )   Não (   )

Comente sua resposta:____

7) Você gosta de ensinar Geometria?

Sim (   )   Não (   )

Comente sua resposta:____

8) Você leciona ou já lecionou na 2ª série (ano) do E.M.

Sim (   )   Não (   )

9) Se sim, trabalhou Geometria Métrica Espacial? Qual a abordagem de sua preferência?

Geometria experimental (   )   Demonstrativa (   )   Outras (   )

10) Caso não aborde esse conteúdo na 2ª série do E.M, justifique:

a) (   ) Os livros didáticos não abordam esse conteúdo.

b) (   ) Não domino esse assunto.

c) (   ) Esse conteúdo é complexo para a 2ª série do E.M.

d) (   ) Os alunos não entendem.

e) (   ) Outros. Qual (is) ?

Comente sua resposta:____

11) Usa efetivamente o livro didático em sala de aula?

Sim (   )   Não (   ).

Comente sua resposta:____

12) Antes de escolher um livro para usar ou consultar, toma ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos?

a) Sim, sempre (   )

b) Sim, ocasionalmente (   )

c) Não, não consulto embora conheça (   )

d) Não, não conheço as orientações contidas no guia do PNLD ou do PNLDEM. (   )

13) De que forma você utiliza o livro didático em suas aulas?

a) para acompanhamento das aulas sempre (   ) raramente (   ) nunca (   )

b) para pesquisa sempre (   ) raramente (   ) nunca (   )

c) para exercícios sempre (   ) raramente (   ) nunca (   )

d) para trabalho em grupo sempre (   ) raramente (   ) nunca (   )

14) Você costuma ler o Manual do Professor do livro que você usa ou consulta?

a) Sempre (   )

b) Com certa freqüência (   )

c) Raramente. (   )

d) Nunca. (   )

Comente sua resposta:____

15) Qual seu grau de conhecimento sobre o conteúdo dos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao Bloco Geometria Métrica Espacial ?

a) Conheço profundamente. (   )

b) O essencial para aplicação cotidiana. (   )

c) Superficialmente. (   )

d) Apenas por meio de artigos publicados e comentários. (   )

e) Nenhum conhecimento. (   )

16) Você já teve oportunidade de ler as Orientações Curriculares para o Ensino Médio.

Sim (   ) Não (   )

Comente sua resposta:____

17) Você pensa que o(s) livro(s) didático(s) que você usa está (estão) de acordo com os PCNs quanto ao Bloco Geometria Métrica Espacial?

Sim (   ) Não (   ) Não sei (   )

Comente sua resposta:____

18) Quando você trabalha a Geometria Métrica Espacial em sala de aula .

a) Exige que o aluno faça construções com régua e compasso.

Sim ( ) Não ( ) Às vezes ( )

Comente sua resposta:____

b) Trabalha com esboços, achando ser suficiente para a compreensão dos objetos matemáticos.

Sim ( ) Não ( ) Às vezes ( )

Comente sua resposta:____

19) Você acha que a figura é indispensável na resolução de um problema de Geometria?

Sim ( ) Não ( ) Às vezes ( )

Comente sua resposta:_______________________________________

Indique com que freqüência você utiliza em suas aulas de Geometria Métrica Espacial, os recursos pedagógicos.

20) Atividades do livro didático.

Algumas vezes ( ) por semana Algumas vezes ( ) por mês Algumas vezes ( ) por ano Nunca ( )

21) Uso de material concreto.

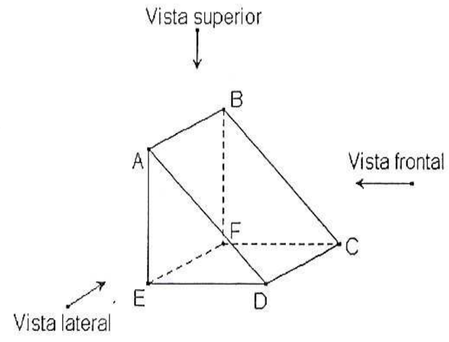
Algumas vezes ( ) por semana Algumas vezes ( ) por mês Algumas vezes ( ) por ano Nunca ( )

22) Laboratório de Informática.

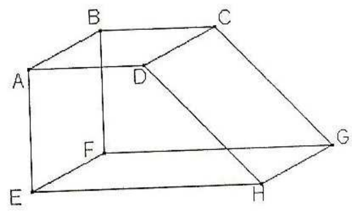
Algumas vezes ( ) por semana Algumas vezes ( ) por mês Algumas vezes ( ) por ano Nunca ( )

23) Qual estratégia, segundo a sua opinião, os alunos usariam para fazerem um esboço à mão livre das vistas: lateral, frontal e superior dos sólidos abaixo, e depois, realizarem a planificação desses sólidos.

I)

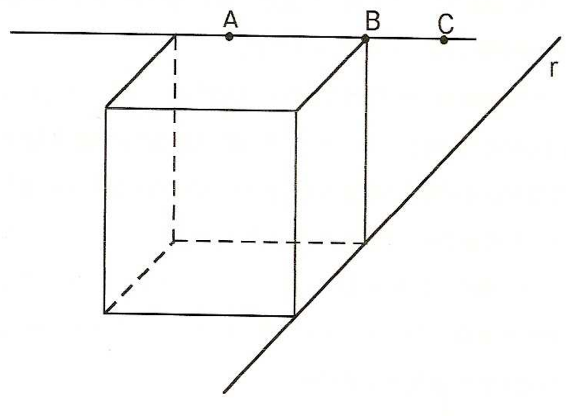


II)



24) Que conceitos você acredita serem necessários para que o aluno possa calcular a área da superfície e o volume de cada um dos sólidos do item 23.

25) Perguntado aos alunos quais pontos (A, B ou C) estão mais próximos da reta r, veja as respostas de alguns deles. Qual você acredita ser a mais coerente ?



I) O ponto C está mais próximo da reta r

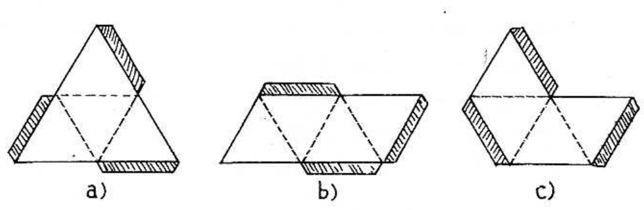
II) O ponto B está mais próximo da reta r

III)O ponto A está mais próximo da reta r

IV)Os três estão a uma mesma distância da reta r

Qual providencia você tomaria para aqueles que, na sua opinião não acertaram, para que não voltassem a cometer o mesmo erro?

26) Foram apresentadas aos alunos algumas planificações. Quando eles foram questionados qual ou quais poderiam representar a planificação de um tetraedro, veja como alguns responderam. Que estratégia você acredita que eles usaram?



I) O aluno X respondeu letra a.

II) O aluno Y respondeu letra b.

III) O aluno W respondeu letras a e b.

IV) O aluno Z respondeu letra c.

Qual providência você tomaria para aqueles que, na sua opinião não acertaram, para que não voltassem a cometer o mesmo erro?