PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Vera Helena Giusti de Souza

O uso de vários registros na resolução de inequações
Uma abordagem funcional gráfica

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Vera Helena Giusti de Souza

O uso de vários registros na resolução de inequações
Uma abordagem funcional gráfica

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** sob a orientação do **Prof. Doutor Saddo Ag Almouloud.**

SÃO PAULO
2007

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Vera Helena Giusti de Souza

O uso de vários registros na resolução de inequações
Uma abordagem funcional gráfica

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Banca Examinadora

____

____

____

____

____

____

SÃO PAULO
2007

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese, por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____

Local e data: ____

Aos meus pais, Duilio e Aparecida (in memoriam); aos meus filhos, Ivor e Nídia; ao meu marido, Podalyro; aos professores do Projeto Saddo de 2005; e a todos os meus ex- alunos.

AGRADECIMENTOS

Muitas são as pessoas que quero agradecer. Todas que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho tivesse um começo, um meio e um fim.

À Prof.a Tania M. M. Campos que, em agosto de 1996, trouxe-me às portas da Educação Matemática e mandou que me entregassem uma chave, na Faculdade de Ciências Físicas e Matemáticas da PUC/SP.

À Prof.a Mineko Yamashita (in memoriam) que, em agosto de 1996, providenciou, por vias administrativas, a cópia dessa chave.

Aos professores da equipe de Cálculo 1 do Curso Ciências da Computação da PUC/SP, da qual fiz parte de agosto de 1996 a dezembro de 2001: Prof.a Ana Lúcia Manrique, Prof.a Barbara Lutaif Bianchini, Prof. Benedito Antonio da Silva e Prof.a Maria Thereza Goulart Dubus, que me escancararam as portas da Educação Matemática.

Especial carinho ao Prof. Benedito Antonio da Silva, que coordenou a equipe naquele período, lidando, semanalmente, com as discussões do grupo e que sempre dizia "Incrível! Cinco cabeças, cinco opiniões diferentes … até mesmo para escolher um local para o almoço de final de ano!". E com quem tive ótimas conversas sobre teorias da Didática Francesa.

Ao Prof. Saddo Ag Almouloud, com quem cursei, como aluna ouvinte, a minha primeira disciplina da área de Educação Matemática, em 1998 e que me acolheu em seu grupo de pesquisa, do qual faço parte até hoje.

À colega Prof.a Ana Maria Velloso Nobre, pelo incentivo e pelo companheirismo, quando cursamos duas disciplinas na área de Psicologia da Educação na PUC/SP, ainda como ouvintes, em 1999 e 2000. E pelas observações escritas, na fase de aplicação da seqüência de atividades, em 2005.

À colega Prof.a Rosana Nogueira de Lima, pelas muitas discussões sobre questões e teorias da Educação Matemática, quando organizamos projetos de Iniciação Científica em 2002 e 2003, quando fizemos as disciplinas (como alunas inscritas no Doutorado em Educação Matemática da PUC/SP) entre 2003 e 2005 e, principalmente, no trabalho didático do dia a dia.

Aos meus alunos de graduação (e foram muitos!), que passaram por mim entre março de 1971 e junho de 1996 no IMEUSP e entre agosto de 1996 e dezembro de 2005 na PUC/SP, que sempre me ensinaram muito e me fizeram refletir sobre questões didáticas.

Aos alunos e aos professores de Matemática que foram sujeitos desta pesquisa (e que, portanto, a tornaram viável!), por seu interesse e por seu empenho.

Aos meus filhos, Ivor e Nídia, com muito, muito carinho, por terem aceitado responder perguntas como “O que é uma função para você?”, “O que é um gráfico para você?”, “Como você entende este texto?” e por terem discutido comigo muitas questões de Matemática, envolvendo a resolução de algumas equações e de algumas inequações.

Ao meu marido, Podalyro Amaral de Souza, que pacientemente gastou parte de suas férias digitando, em planilhas do EXCEL, as respostas dos protocolos analisados. E ainda leu o texto final, para ajudar na fluência e no entendimento.

I keep six honest serving-men
(They taught all I knew);
Their names are What and Why and When
And How and Where and Who.
I send them over land and sea,
I send them east and west;
But after they have worked for me,
I give them all a rest.

I let them rest from nine till five,
For I am busy then,
As well as breakfast, lunch, and tea,
For they are hungry men:
But different folk have different views;
I know a person small-
She keeps ten million serving-men,
Who get no rest at all!
She sends' em abroad on her own affairs,
From the second she opens her eyes-
One million Hows, two million Wheres,
And seven million Whys!

(Rudyard Kipling, Just so stories, Elephant's child, 1902.)

RESUMO

Insatisfeitos com os resultados apresentados na resolução algébrica de inequações com uma incógnita real, pela maioria de nossos alunos do Ensino Superior, decidimos investigar se poderíamos contribuir para o ensino e a aprendizagem da *resolução algébrica* de inequações com uma incógnita real, por meio de uma *abordagem funcional gráfica*. Em conversa com alguns professores de Matemática, percebemos que não conheciam tal abordagem. Escolhemos, então, discuti-la com dois grupos, um de professores de Matemática da rede pública estadual e um de alunos de primeiro ano de licenciatura em Matemática, por meio de uma seqüência de atividades, concebidas à luz da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. Utilizamos três sistemas de representação e orientamos nossa pesquisa para responder, essencialmente, a seguinte questão “Uma abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de registros, no caso da resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução?”. Optamos por uma pesquisa qualitativa, que foi desenvolvida em três etapas, todas inspiradas pela Engenharia Didática, quais sejam *análises preliminares*; *concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de atividades*; *análise de protocolos*. Para a *análise de protocolos*, apoiamo-nos nos argumentos de Efraim Fischbein (1993) de que, para haver aprendizagem, em Matemática, é preciso dominar e inter-relacionar *aspectos formais*, *algorítmicos* e *intuitivos* do assunto em estudo. Nossa análise mostrou a ausência de *aspectos formais lógicos* em todos os protocolos dos dois grupos pesquisados e a presença quase coerciva, às vezes mascarada, de *aspectos intuitivos numéricos*. Em razão disto, embora a maioria destes sujeitos tenha conseguido fazer as conversões necessárias para resolver graficamente as inequações propostas, nenhum deles fez as conexões matemáticas entre a resolução funcional gráfica e a algébrica. Também não transferiram os novos conhecimentos para a resolução algébrica.

Palavras-chave: função, gráfico, representação, inequação.

ABSTRACT

Unsatisfied with the algebraic resolutions to one unknown inequations presented by most of our sophomore students we decided to research ways of contributing to the teaching of inequations algebraic resolutions by means of a graphic functional approach. While interviewing some Mathematics teachers we realized they did not know such approach. We decided to discuss it in two groups, one composed by public school Mathematics teachers and other by sophomore Mathematics students, by means of activities, which were developed on the basis of Semiotic Representation Registers Theory. Using three different representation systems we aimed our research to answer one basic question: “Concerning one unknown equations and/or inequations can a approach based on registers conversions and treatments start a global discussion about their resolution?” We have developed a quality research in three steps, all of them inspired on Didactic Engineering: preliminary analysis; conceiving, designing, a priori analysing, applying and observing a didactic sequence; and validating. In order to validate the results we used Efraim Fischbein’s arguments that Mathematics learning is only achieved when one knows how, and are able to interact concepts’ formal, algorithmic and intuitive aspects. Our analysis showed a complete absence of formal aspects in all the subjects and an almost coercive presence, sometimes hidden, of intuitive numerical aspects. Therefore, even though most subjects have managed to do registers conversions to graphically solve the proposed inequations, none of them were able to relate graphic and algebraic resolutions. They also did not transfer new knowledege to their algebraic resolutions.

Key-words: function, graph, representation, inequation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

I. INTRODUÇÃO

I.1. POR QUE ESTA PESQUISA?

O objetivo deste trabalho é estudar problemas ligados ao ensino e à aprendizagem de inequações com uma incógnita real.

Igualdades e desigualdades algébricas são usadas em vários tópicos da Matemática que têm aplicações no cotidiano, como trigonometria, programação linear, otimização, estudo de gráficos, nas áreas de Engenharia, Física, Economia e Matemática, entre outras. No entanto, em nosso contato direto, por muitos anos consecutivos, com primeiros anos de cursos de Engenharia Elétrica, Matemática, Ciência da Computação e Física, em geral por meio da disciplina Cálculo 1, pudemos perceber que os alunos têm dificuldades para entender o significado de frases do tipo “resolva em R a equação (ou inequação) dada”, quando expressam dúvidas ou justificativas tais como “O que a senhora quer?”, “Tem que resolver?”,

“Multiplico em cruz!”, “Passo para o outro lado!”, “Extraio a raiz”, deixando entrever alguma coisa do tipo “*regras sem significado*”. Nossa interpretação era de que o aluno “não sabe ler” o que está escrito e decorou alguns procedimentos, como por exemplo, “Quando passa para o outro lado, o número troca de sinal” ou “Tem que multiplicar em cruz”. Estas “regras” parecem induzir alguns erros, como por exemplo os descritos na tabela.

TABELA 1. RESOLUÇÕES DE INEQUAÇÕES COM INTERPRETAÇÃO

	Resolução	Interpretação
1	$x^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq \pm 5$	Vale para a equação
2	$x = \sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$	$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
3	$x^2 = 4$ e $x = \sqrt{4}$ são a mesma coisa	Leitura da equação
4	$\frac{5}{x} < \frac{5}{2} \Rightarrow 10 < 5x$	Multiplicação em cruz

Para verificar se nossas interpretações eram corretas, achamos que valia a pena investigar.

Para tanto, orientamos, junto com a Prof.a Rosana Nogueira de Lima, em 2003, dois alunos-bolsistas do 2º ano de um Curso de Engenharia Elétrica num projeto de Iniciação Científica com o título “Diagnóstico de erros cometidos por alunos na resolução de equações/inequações”. Para atingir o objetivo proposto, os bolsistas, sob nossa orientação, formularam, aplicaram e analisaram um questionário, que foi aplicado a 110 alunos de 1º ano dos Cursos Engenharia Elétrica e Matemática – Licenciatura.

No caso da resolução da inequação $x^2 \leq 25$, 52% dos alunos questionados utilizou procedimentos próprios para equações, obtendo assim três tipos de respostas: $x \leq \pm 5$; $x \leq 5$; ou ainda $x \leq 5$ ou $x \leq -5$ e somente 7,3% deu a resposta correta, nem todas com uma resolução explícita, que permitisse perceber se o aluno sabe o algoritmo ou usa algum tipo de raciocínio individual para resolver o problema proposto.

Dos protocolos dos alunos, pudemos perceber que eles usam procedimentos próprios da resolução de equações, como por exemplo extrair a raiz dos dois lados sem observar os sinais ou ainda escrever $x^2 \leq 25$ e daí $x^2 = 25$ para “achar as raízes”, resultando na inequação $x \leq \pm 5$. Em particular, observamos que nenhum dos alunos utilizou algum método gráfico para resolver a inequação.

Dentre os alunos que apresentaram alguma justificativa escrita para a resolução da inequação $x^2 \leq 25$, escolhemos quatro para serem entrevistados, a fim de elaborarem oralmente sobre as respostas dadas e também sobre a interpretação deles do problema proposto. A análise destas respostas foi feita à luz do modelo cognitivo sugerido por Efraim Fishbein (1993) de que a atividade matemática de um sujeito envolve três aspectos: o formal, o intuitivo e o algorítmico e que um estudante precisa conhecê-los e inter-relacioná-los para ter sucesso numa tarefa matemática.

Das entrevistas, pudemos concluir que estes quatro estudantes usam principalmente os aspectos intuitivos, quando lidam com a resolução de uma inequação com uma incógnita real e, por conta disto, transferem as regras de resolução de equações para a de inequações. A título de ilustração, foram escolhidos pequenos trechos de cada uma das entrevistas.

> Aluno 1: 'É, tem que tomar cuidado quando você multiplica fração inteira por um, você tem que tomar mais cuidado acho que com inequação do que com a equação, mas fora isso, é a mesma coisa, agora não é nada assim que...'.
>
> Aluno 2: ' . . . Não, é que eu tenho que pensar nos números que tem, pra assim, de um jeito mais fácil pra fazer a equação. Eu acho que x é igual é... eu não lembro se inverte esse sinal. Sabe x é menor que 4,99. Satisfaz porque 5 ao quadrado vai dar 25 aí eu... como 4,99 ao quadrado é menor que 25 aí eu... não sei... eu penso assim, sei lá, eu não sei'.
>
> Aluno 3: 'Ta, eu achei os pontos em que ele satisfaz a equação sendo igual, igualando ele a 25, só que não pode ser igual a 25, para ser menor que 25 ele tem que ficar entre esses dois valores'.
>
> Aluno 4: 'Ta eu tirava raiz de 25 e fazia mais ou menos raiz de 25. Colocava mais ou menos. ... Não, porque não pode ser menor que mais ou menos 5, ele tem que ser menor do que um valor, ele tem que ser menor que cinco. ... Se eu tiver mais ou menos cinco, ou seja, eu tenho que ter um valor de x inferior a mais cinco e menos cinco, se fosse uma igualdade tudo bem, porque seria um ou outro, como é menor, não tem como ele ser menor que os dois, para ser menor que os dois ao mesmo tempo' (Informação verbal) [1]

Vale a pena observar que a mesma inequação foi proposta a um grupo de 13 professores de Matemática da rede pública estadual, em 2003, na forma "Considere o seguinte problema: 'resolver $x^2 \leq 25$, no conjunto dos números reais'. Como você resolveria esse problema para seus alunos?" e apenas três deles deram a resposta correta, embora não tenham apresentado a correspondente resolução algébrica.

O quadro parecia bastante sério, principalmente porque documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (ver anexo A), tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio, recomendam a resolução de equações e de desigualdades (dando a entender uma ampliação ainda das inequações, se pensarmos nas desigualdades da Geometria ou da própria Álgebra dentro do tema Álgebra), com indicações para que o professor trabalhe não somente as técnicas, mas principalmente amplie a visão dos alunos com uma abordagem que envolva as funções e as representações gráficas.

Da mesma forma, em outros países, tem havido uma preocupação com o ensino e a aprendizagem deste assunto. Documentos do NCTM de 1989, 2000 e 2004 especificam que os estudantes devem aprender a representar situações que envolvam equações e desigualdades, entender o significado de formas equivalentes de expressões e ainda resolvê-las fluentemente.

---

[1] Entrevistas concedidas ao autor em novembro de 2003.

Nossa preocupação com o tema motivou-nos a pensar em pesquisar se uma abordagem que não fosse estritamente algébrica poderia oferecer melhores resultados no ensino e na aprendizagem da resolução de inequações com uma incógnita, como por exemplo uma combinação envolvendo gráficos, expressões algébricas e a língua natural. Em conversa com alunos de primeiro ano da formação inicial, percebemos que, para a maioria deles, o registro gráfico não é uma ferramenta disponível, no sentido de que muitos nem a conhecem. Com um grupo de professores, o discurso é de que o registro gráfico assusta (para alguns "apavora") e não é trabalhado em sala de aula nem no livro didático que utilizam. Estas constatações coincidiram com o que pensamos, de que o trabalho com os gráficos, aliado ao algébrico, pode ser uma abordagem alternativa viável, principalmente no caso das inequações com uma incógnita real.

Na literatura que fomos consultar, encontramos vários artigos que descrevem pesquisas envolvendo as inequações: algumas mais teóricas, preocupadas com os aspectos cognitivos da aprendizagem em Álgebra e enfocando as inequações; outras, do tipo diagnóstico, usando os aspectos algorítmicos, intuitivos e formais sugeridos pela teoria de Fischbein (1993) ou utilizando os registros gráficos e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2000). Nas do tipo diagnóstico, o estudo se restringe às inequações envolvendo funções afins e quadráticas.

Assim, escolhemos uma abordagem que vamos chamar de "*funcional gráfica genérica*". *Funcional* porque interpreta uma inequação do tipo $a<b$, com incógnita x, como "tenho uma função f que satisfaz $f(x)=y_1=a$ e uma função g que satisfaz $g(x)=y_2=b$ e quero achar os valores de x que satisfazem $f(x)<g(x)$" (isto quer dizer que temos aqui uma dicotomia, porque estamos falando da variável x das funções que nomeamos f e g e, ao mesmo tempo, da incógnita x da inequação). *Gráfica* porque envolve os gráficos de funções reais. *Genérica* porque abrange as funções contínuas, cujo domínio é uma reunião finita de intervalos abertos, sem ter que se restringir às funções afins e/ou quadráticas.

Para avaliar a viabilidade dessa abordagem, decidimos elaborar uma seqüência didática que pudesse ser aplicada a uma população de futuros professores de Matemática (formação inicial) e a um grupo de professores atuantes na rede pública estadual (formação continuada), porque acreditamos que são eles que irão promover mudanças na sala de aula da Educação Básica, nosso objetivo ideal. Os alunos do primeiro ano foram escolhidos porque estão saindo do Ensino Médio, têm grandes e importantes deficiências no assunto e trazem uma contribuição didática que podemos chamar de “ingênua”, pois não estão contaminados pela prática em sala de aula e é um assunto no qual estão diretamente interessados, por razões de aprendizagem imediata e individual. Os professores escolhidos, em número pequeno, são os que já participam de um grupo de pesquisa do qual fazemos parte e que, além disso, manifestaram interesse na discussão de uma nova abordagem para as inequações.

A partir de nossa escolha pela abordagem funcional gráfica genérica, por meio de uma seqüência didática, encontramos um ambiente teórico que nos pareceu ideal, formado pela conjunção da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2000), da visualização definida por Duval (1999) e dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos que estão sempre presentes numa atividade matemática, conforme Fischbein (1993). A teoria de Duval justifica a necessidade do trabalho, incentivado e promovido pelo professor, com pelo menos dois sistemas de representação diferentes, que era algo que buscávamos. A visualização, como definida por Duval, vai ser imprescindível num trabalho com os gráficos e as inequações, numa abordagem funcional gráfica. Os aspectos propostos por Fischbein, que devemos observar na atividade matemática de um sujeito, servem como parâmetro para avaliar se houve aprendizagem pois, segundo este pesquisador (e nós concordamos), esta só ocorre se o sujeito é capaz de inter-relacionar e interagir os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto em estudo.

As teorias citadas também servem para orientar o professor na análise de livros didáticos e nas escolhas didáticas de sua prática, pois ele pode, de uma forma catalisadora, promover a interação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos do assunto estudado, por meio de uma abordagem que favoreça e incentive a utilização de pelo menos dois sistemas de representação, com as respectivas regras de tratamento e conversão.

Para efetivar a pesquisa proposta, sobre a resolução de inequações, por meio de uma seqüência didática, com dois grupos, um na formação inicial e outro na continuada, formulamos duas hipóteses, a partir das quais elaboramos tres questões de pesquisa, para as quais procuramos respostas.

Estas hipóteses, específicas para o assunto resolução de inequações com uma incógnita, também foram baseadas na nossa experiência em sala de aula, embora só no Ensino Superior, porém com alunos de primeiro ano, que podemos considerar praticamente como da Educação Básica.

H1. A abordagem funcional gráfica genérica da resolução de inequações pode desencadear a discussão teórico-formal sobre o assunto, uma vez que a visualização rápida e variada fornecida pelos gráficos facilita a observação de aspectos que a resolução algébrica sozinha não o faz. Por exemplo, para comparar frases algébricas equivalentes ou não, como ($\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$ e $2 < x$) ou ($x^2 \leq 25$ e $x \leq 5$).

H1. A abordagem funcional gráfica genérica da resolução de inequações, junto com a algébrica, pode contribuir, a longo prazo, para o entendimento global da resolução de equações e inequações com uma incógnita real.

I.2. QUESTÕES DE PESQUISA

A partir das hipóteses acima, baseadas nas leituras feitas, na experiência individual em sala de aula e na troca de informações com alguns professores de Matemática da rede pública estadual, formulamos nossas três questões de pesquisa.

Q1. Uma seqüência didática envolvendo o tratamento e a conversão de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real?

Q2. O tratamento e a conversão de registros (gráfico, algébrico e da língua natural) pode proporcionar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso trabalhar sempre com inequações equivalentes?

Q3. A abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de registros, no caso da resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução?

II. REVISÃO DE LITERATURA

No capítulo anterior, enunciamos as hipóteses e as questões de nossa pesquisa. Lá, também, justificamo-las, com base em algumas leituras que fizemos, tanto sobre o assunto propriamente dito como sobre algumas teorias ligadas à didática da Matemática e motivados pela nossa experiência junto a alunos do Ensino Superior e a alguns professores de Matemática da rede pública estadual. Colocada a nossa problemática, fomos à procura de pesquisas já realizadas, ou em andamento, que pudessem iluminar e justificar teoricamente a nossa e encontramos alguns artigos que interferiram em nossas escolhas posteriores. Embora consideremos que a revisão de literatura faz parte de nossas análises preliminares (ver capítulo IV.1, página 58), decidimos colocá-la neste capítulo, por uma questão de cronologia. Foram estas leituras que nos fizeram procurar aprofundamento na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2000), no problema da visualização (Duval, 1999) e no quadro teórico proposto por Efraim Fischbein (1993) sobre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes em toda atividade matemática. Assim, pretendemos descrever em que medida cada um dos artigos lidos nos influenciou.

II.1. OS ARTIGOS

A leitura de **Linchevski e Sfard (1991)** veio ao encontro de nosso então sentimento de que os alunos resolvem uma inequação de forma automática, sem pensar no porquê das regras que estão aplicando. As autoras estudam a dualidade concepção operacional (ou processo) ↔ concepção estrutural (ou objeto abstrato) de estudantes no caso de equações e inequações. Aplicaram um questionário diagnóstico, seguido de algumas entrevistas. As questões propostas envolvem a atribuição de significado a expressões algébricas bem como à equivalência destas. Foram aplicadas a estudantes de Jerusalém na faixa etária de 15 a 17 anos e analisadas com base na dualidade operacional ↔ estrutural, cujas idéias, segundo elas, foram desenvolvidas a partir das de Skemp (1976) sobre o entendimento *instrumental*, em contraposição ao entendimento *relacional*. O entendimento instrumental refere-se a “ter regras sem razões” para o tipo de compreensão em Matemática que aparece somente pela proficiência de executar procedimentos matemáticos, como os algoritmos. O entendimento relacional diz respeito à habilidade de relacionar, com significado, as “regras” com os conceitos já adquiridos. As autoras classificam como *concepções pseudo-estruturais* as que o aluno desenvolve quando usa esquemas e símbolos como substitutos para os objetos abstratos. Das análises das respostas ao questionário e das entrevistas, as autoras concluem que as concepções pseudo-estruturais podem estar mais presentes nos estudantes do que imaginamos e que, em razão disso, o domínio da linguagem formal é mais do tipo instrumental do que relacional. A partir daí, sugerem uma abordagem operacional (baseada em processos) da Álgebra, no lugar da praticada abordagem estrutural (centrada nos objetos).

Concordamos em parte com as autoras porque acreditamos que, no Ensino Médio, é preciso trabalhar também as definições e as notações, porque os alunos precisam entender o significado dos símbolos para acompanhar os passos de um algoritmo, por exemplo.

Indagamo-nos, então, se essas *concepções pseudo-estruturais*, no caso das inequações, estavam ligadas às frases do tipo “passar para o outro lado invertendo o sinal”, “multiplicar em cruz”, “extrair a raiz dos dois lados”, praticadas pela maioria dos nossos alunos.

Para encontrar uma forma de responder nossas indagações, lemos quatro artigos, Tsamir; Almog e Tirosh (1998), Tsamir e Bazzini (2001), Tsamir e Bazzini (2002), Bazzini e Tsamir (2003), que descrevem pesquisas do tipo diagnóstico que foram analisadas à luz dos aspectos cognitivos de Fischbein (1993). Estas leituras inspiraram dois simples questionários, que aplicamos a alunos de primeiro ano do Ensino Superior, o primeiro envolvendo a inequação $x^2 \leq 25$ (no segundo semestre de 2003) e o segundo, $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$ (no segundo semestre de 2004).

No primeiro, a análise dos protocolos, à luz dos aspectos formais, intuitivos e algorítmicos de Fischbein (1993), mostrou que, como suspeitávamos, os alunos têm *concepções pseudo-estruturais* (aspectos intuitivos) e aplicam regras (aspectos algorítmicos) que não compreendem formalmente (aspectos formais): no primeiro caso, 52% dos alunos “extraiu a raiz dos dois lados”, baseados na equação $x^2=25$ e depois colocou o sinal $\leq$ “de volta” (ver página 3, com alguns trechos de entrevistas que fizemos).

Para o segundo questionário, fizemos apenas uma análise quantitativa, que revelou que mais de 90% dos alunos “multiplicou em cruz” para chegar a $x>2$ ou $x<2$.

Tsamir; Almog e Tirosh (1998) descrevem a primeira fase de um projeto relacionado a investigar as formas de pensamento de estudantes da escola secundária de Israel sobre inequações, aplicando um questionário diagnóstico, seguido de entrevistas com alunos que apresentaram maior quantidade de soluções erradas. As questões incluem a resolução de dez inequações, pedindo justificativas, três meses após um estudo no qual foi discutido o traçado dos gráficos das funções relacionadas às respectivas expressões algébricas. Usando as idéias desenvolvidas por Fischbein (1993) de que as crenças intuitivas competem, com sucesso, com o conhecimento formal já adquirido, os pesquisadores analisaram as resoluções das dez inequações propostas, destacando as estratégias e as dificuldades dos estudantes. Desta análise, os autores conjecturam que o uso de esboços gráficos para resolver inequações racionais e quadráticas acarreta soluções corretas. Destacam, ainda, que os estudantes fizeram analogias impróprias entre os processos de resolução de equações e de inequações. Concluem que as crenças intuitivas competem, com sucesso, com o conhecimento formal adquirido e, por esta razão, é crucial discutir, em sala de aula, as semelhanças e as diferenças entre equações e inequações e também alertar os alunos para o papel da intuição no pensamento individual.

Tsamir e Bazzini (2001) descrevem os resultados que obtiveram em dois dos 15 testes de uma pesquisa com estudantes de Israel e da Itália. Os resultados mostram que as dificuldades são praticamente as mesmas nos dois países: os alunos não consideram que $x = 3$ pode ser solução de uma inequação, embora respondam que $x = 0$ é a solução de $5x^4 \leq 0$.

Tsamir e Bazzini (2003) expõem os resultados obtidos em 3 testes, de um total de 15, aplicados na Itália e em Israel, seguidos de entrevistas.

> “Tarefa1: examine a seguinte conjectura: para todo a em R, $a\,x < 5$ implica $x < 5/a$.

> Tarefa2: examine a seguinte afirmação: para todo a ≠ 0 em R, a x < 5 implica x < 5/a.
>
> Tarefa3: Resolva a desigualdade: (a-5) x > 2a – 1, x variável e "a" um parâmetro." (BAZZINI; TSAMIR, 2002, tradução nossa).

Os resultados foram praticamente os mesmos nos dois grupos investigados, nos dois países: com relação às tarefas 1 e 2, os alunos decidem se a frase é verdadeira olhando somente para *a*=0. Como na tarefa 2 é imposto que *a* seja diferente de 0, a maioria dos alunos aceitou a afirmação como verdadeira e a justificou com base nas equações.

> 'Em equações e inequações, dividir por zero é problemático. Mas se nós lidarmos com este problema, operando com números idênticos e por meio da mesma operação em ambos os lados não somente é permitido, é na verdade a forma de resolver as tarefas dadas.' (Entrevista de um aluno.) (BAZZINI; TSAMIR, 2002, tradução nossa).

A tarefa 3 só foi resolvida por cerca de 50% dos estudantes e, dentre estes, um número substancial fez analogia com as equações.

> Anna: Eu dividi ambos os lados por a – 5.
>
> Entrevistador: Pode-se dividir ambos os lados por a – 5?
>
> Anna: Sim. Eu fiz a mesma coisa dos dois lados. Se você faz a mesma coisa dos dois lados de uma equação [pausa], eu quero dizer uma desigualdade [pausa], na verdade ambos, você obtém uma equação ou uma desigualdade que tem as mesmas soluções da original.
>
> Entrevistador: Sempre?
>
> Anna: Não só é permitido, é necessário fazer isso para resolver o problema. (BAZZINI; TSAMIR, 2002, tradução nossa).

Bazzini e Tsamir (2003) relatam uma pesquisa que fizeram sobre as formas de pensamento de estudantes do ensino médio italiano e israelense ao resolverem inequações algébricas, por meio de um questionário diagnóstico com 15 questões envolvendo a resolução de inequações algébricas com um parâmetro, seguido de entrevistas individuais explanatórias. As pesquisadoras tentavam responder duas perguntas: "Que idéias intuitivas e que modelos algorítmicos podem ser identificados nestes estudantes?", "Estas idéias e estes modelos estão ligados à identificação da denotação das expressões dadas?". Para observar o desempenho dos estudantes, foi usada a teoria de Fischbein sobre as noções de conhecimento intuitivo, formal e algorítmico numa atividade matemática e para analisar os resultados, o modelo teórico sobre a distinção entre sentido e denotação de expressões algébricas de Arzarello, Bazzini e Chiappini (1993, 2000, apud BAZZINI; TSAMIR, 2003, p. 1). No artigo, as autoras apresentam os resultados obtidos com três das 15 questões: "(1) Examine a seguinte conjectura: para todo a em R, ax<5 implica x<5/a. (2) Examine a seguinte afirmação: para todo a ≠ 0 em R, ax<5 implica x<5/a. (3) Resolva a desigualdade: (a-5)x >2a–1, x variável e 'a' um parâmetro" (BAZZINI; TSAMIR, 2003, tradução nossa).

A análise das respostas obtidas, segundo as autoras, indica que as equações servem como protótipo para os modelos algorítmicos de resolução de inequações e que estes podem ser resumidos em dois tipos: "(1) fazer a mesma operação, com os mesmos números, dos dois lados e (2) excluir a possibilidade do zero no denominador e daí fazer a mesma operação, com os mesmos números, dos dois lados" (BAZZINI; TSAMIR, 2003, tradução nossa).

As pesquisadoras concluem que a confusão entre equação e desigualdade revela dificuldade para identificar uma denotação e que as expressões algébricas dadas ativam apenas um senso procedimental, desconectado da denotação subjacente. Ainda sugerem que o professor discuta questões daquele tipo com os alunos, a fim de conscientizá-los das próprias idéias intuitivas e dos conseqüentes modelos algorítmicos, refletindo ao mesmo tempo sobre o significado de "resolver uma desigualdade". As autoras acreditam que, assim, o papel da denotação deverá surgir como conseqüência.

Como já explicamos anteriormente, estes quatro artigos inspiraram-nos a organizar e aplicar o questionário citado à página 2. Para a análise dos protocolos, fomos ler Fischbein (1993), para tentar entender os aspectos intuitivos, algorítmicos e formais que ele defende existirem na atividade matemática de um sujeito. Identificamo-nos com este quadro teórico, tanto que ele faz parte do nosso e, por esta razão, está melhor descrito no parágrafo III.3, página 47.

Fischbein (1993) apresenta argumentos, exemplos históricos e exemplos de aplicação para defender uma teoria pela qual, ao analisar o comportamento matemático de um estudante, temos que levar em conta três componentes básicas: *a formal, a algorítmica e a intuitiva*.

A *componente formal* diz respeito a axiomas, definições, teoremas e provas; *a algorítmica*, às técnicas de resolução e estratégias do tipo padrão; *a intuitiva*, ao grau de subjetividade, de aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução.

Segundo o autor, às vezes essas três componentes convergem, mas usualmente, no processo de aprendizagem ou no entendimento e resolução de um problema, interações conflitantes podem aparecer. Por exemplo, um esquema de solução é aplicado inadequadamente, em detrimento de restrições formais; um esquema de resolução é aplicado erroneamente, apesar de um entendimento intuitivo e potencialmente correto; mas usualmente é a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual anterior, limitada porém fortemente enraizada, que anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e assim distorce ou mesmo bloqueia a reação matemática correta.

O pesquisador conclui a argumentação afirmando que as interações e os conflitos entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas de uma atividade matemática são muito complexos e usualmente não facilmente identificados e entendidos. Análises teóricas, observações atentas e pesquisa experimental devem colaborar para revelar as múltiplas fontes de atitudes erradas numa atividade matemática e isto implica que a íntima colaboração entre experiências psicológicas e didáticas representa uma condição básica para o progresso da Educação Matemática.

Por causa desta leitura, decidimos, ao final de 2003 e depois de fazer a análise dos protocolos do primeiro questionário, entrevistar quatro alunos, que haviam explicado as passagens de suas resoluções (conforme era pedido na questão), tentando identificar, nas falas e justificativas destes alunos, a existência ou não de aspectos algorítmicos, formais e intuitivos.

Percebemos, durante as entrevistas, que esses alunos tinham concepções pseudo-estruturais (no sentido de Linchevski e Sfard (1998)) e pareciam apresentar mais os aspectos intuitivos do que os algorítmicos e nada dos formais, na resolução de inequações. Os quatro entrevistados afirmaram ter estudado apenas a resolução algébrica de inequações e que nunca haviam sido estimulados a utilizar um gráfico para resolver o problema.

Perguntamo-nos, então, se uma abordagem não estritamente algébrica, para a resolução de inequações, poderia ajudar, se ainda viesse acompanhada de leitura e interpretação de texto na língua natural. Neste sentido, a leitura de Duval (1993) foi marcante para que fizéssemos a escolha pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993, 2000) como quadro teórico para a elaboração de uma estratégia de ensino.

Duval (1993) dá alguns dos resultados pelos quais é possível detectar algumas dificuldades que os alunos da Escola Básica têm, quando lidam com os gráficos cartesianos de retas: a confusão entre a inclinação e a altura, os erros constantes ao relacionar a inclinação número algébrico com a direção do registro gráfico e, mais importante ainda, a incapacidade de fazer a passagem do registro gráfico de uma reta para o algébrico.

Ele demonstra que esta dificuldade está no desconhecimento das regras de correspondência semiótica entre os dois registros, o gráfico e o algébrico, principalmente no caso da conversão gráfico → algébrico, pois esta não pode ser feita ponto a ponto.

Para a demonstração, apresenta os três tratamentos possíveis para as representações gráficas, com suas variáveis visuais e unidades simbólicas significativas. Concordamos com ele, principalmente porque o sujeito precisa superar aspectos intuitivos ligados à vontade de dar valores para determinar alguns pontos particulares e isto exige um trabalho, em sala de aula, promovido pelo professor, que estimule os alunos a sempre tentarem o genérico, sem abandonar o intuitivo.

Com isto, Duval dá a entender que não é preciso procurar a razão das dificuldades nos conceitos matemáticos, no que discordamos. Ao selecionar um ou mais sistemas de representação, o sujeito tem que fazer escolhas, pois cada registro pode ressaltar propriedades diferentes do objeto. Para trabalhar com os diferentes registros e ser capaz de fazer tratamentos e primordialmente conversões, no nosso entender, o sujeito precisa ter bem claros os aspectos formais básicos do conceito, tais como, por exemplo, definição, notações e propriedades básicas. No caso em estudo, é preciso trabalhar os aspectos formais de função e de gráficos em geral.

Para Duval, os três tratamentos são: *o tratamento pontual*, *o tratamento de extensão* e *o tratamento de interpretação*.

O tratamento pontual, pelo qual as representações gráficas são usualmente introduzidas, serve para traçar o gráfico de uma função do primeiro ou do segundo graus, ou para ler as coordenadas de algum ponto interessante.

Da nossa formação matemática, sabemos que, para a quase totalidade das funções, o tratamento pontual não dá nenhuma informação sobre o esboço gráfico, a menos que tenhamos, a priori, algum resultado teórico que nos permita saber como ele é (ferramentas da Geometria Analítica, do Cálculo Diferencial e Integral ou um trabalho fino de avaliação de expressões algébricas, por exemplo). No entanto, ao analisarmos alguns livros didáticos de Matemática para a Educação Básica, observamos que estes só apresentam o tratamento pontual de retas e parábolas, deixando entrever que este é suficiente para o traçado dos demais gráficos.

O tratamento de extensão do traçado efetuado, pelo qual é possível realizar interpolações e/ou extrapolações e que é usado para localizar pontos que não são evidenciados pelas escalas do papel utilizado. Da mesma forma que *o tratamento pontual*, o enfoque fica sobre valores particulares e não considera as variáveis visuais globais da representação, como por exemplo, crescimento/decrescimento da linha do gráfico, tendências nos extremos, imagem.

Neste caso, talvez o dano para uma aprendizagem posterior seja pior, pois sabemos que não é possível, apenas aritmeticamente, avaliar pontos sobre uma cúbica ou uma senóide, por exemplo. Precisamos entender a expressão algébrica pela qual a função é definida.

O tratamento de interpretação global das propriedades figurais, pelo qual é possível observar as modificações no traçado gráfico, quando fazemos alguma modificação na expressão algébrica. Por exemplo, a influência dos parâmetros "inclinação" e "intersecção com o eixo vertical" no traçado do gráfico de uma função do primeiro grau ou ainda dos três parâmetros presentes numa função do segundo grau. Para este tipo de tratamento, é necessária uma análise semiótica dos registros gráfico e algébrico, a fim de conseguir uma análise da congruência entre uma variável do registro gráfico e uma unidade significativa do registro algébrico, coisa que *o tratamento pontual* e *o tratamento de extensão* do traçado efetuado não fazem nem tornam possível.

Para realizar uma análise de congruência, precisamos elencar as unidades significativas de cada registro de representação e ainda verificar quais as transformações requeridas para a conversão.

Como unidades significativas de uma expressão algébrica, Duval coloca os símbolos: de relação (>, <, = ...), de operação ou de signo (+, -, *, : ...), de variável (x, y ...), de expoente, de coeficiente e de constante.

As *variáveis visuais* destacadas por ele são classificadas em *gerais* e em *particulares*. As *gerais* são o tipo de gráfico (linha ou região) e a forma do gráfico (linha reta, linha curva, linha aberta, linha fechada). As *particulares*, no caso de uma reta, são o sentido da inclinação (sinal do coeficiente angular), o ângulo com o semi-eixo horizontal positivo (valor do coeficiente angular), a intersecção com o eixo vertical (o coeficiente linear). No caso da parábola na forma desenvolvida, as variáveis visuais particulares são a concavidade (sinal do coeficiente do termo de grau 2), as raízes (intersecções com o eixo horizontal), a intersecção com o eixo vertical (valor do coeficiente do termo de grau zero) e a curvatura (valor do coeficiente do termo de grau 2). Para a parábola na forma canônica, as variáveis visuais particulares são a posição do vértice (coordenadas do vértice), a concavidade (sinal do coeficiente do termo de grau 2) e a curvatura (valor do coeficiente do termo de grau 2). As variáveis visuais tomam valores e a cada um destes corresponde uma unidade significativa no registro algébrico.

No caso das funções de primeiro grau, analisando as variáveis, os valores destas e as unidades significativas, Duval observa que:

H1. a conversão do registro gráfico para o algébrico é não congruente, pois a inclinação da reta recobre duas unidades significativas, o sinal do coeficiente e o valor comparado com o 1;

H2. a conversão do registro algébrico para o gráfico pode ser feita pelo tratamento ponto a ponto, uma vez que só precisamos de dois pontos para traçar uma reta. A conversão contrária, do registro gráfico para o algébrico, necessita uma visão global e abrangente, não mais centrada em alguns pontos particulares.

H3. levando em conta as variáveis visuais, existem 18 representações gráficas visualmente diferentes de uma reta no plano cartesiano e podemos relacionar a representação gráfica com a algébrica, bem como extrair propriedades geométricas, tais como retas paralelas ou perpendiculares.

Uma análise semelhante também é possível, para o caso de outras curvas. Vale a pena observar que as variáveis visuais particulares, no caso geral, são aquelas que permitem que o sujeito, a partir do registro gráfico, consiga escolher uma forma genérica de expressão algébrica que acabe por fornecer a procurada.

Duval cita alguns livros didáticos franceses, nos quais aparece a expressão geral y=ax + b e só é feita a exploração da influência dos parâmetros a e b na variação do gráfico, do tipo: a>0 (a<0) implica que a reta é crescente (decrescente); b>o (b<0) implica que a reta corta o eixo vertical acima (abaixo) da origem. Isto significa que a relação das variáveis visuais com as unidades significativas correspondentes são ignoradas como por exemplo o entendimento de expressões do tipo y=-x+b (o coeficiente -1 fica "escondido"), y=x+b (o coeficiente 1 fica "escondido"), y=ax+0 (o coeficiente b na aparece), $y = \frac{mx}{n} + b$ (onde a aparece como um número fracionário).

Quando analisamos alguns dos livros didáticos de Matemática para a Educação Básica brasileira, observamos que a expressão geral y=ax+b também aparece e a citada influência dos parâmetros a e b é <u>explorada</u> apenas por meio de algumas tabelas de valores, para dois ou três exemplos, antes de se tornarem verdades matemáticas.

Duval apresenta os resultados obtidos por ele na aplicação do seguinte teste "x corresponde à abscissa e y à ordenada de um ponto M do plano cartesiano. Indicar a qual expressão algébrica (E1, E2, ... ou E10) corresponde cada uma das retas D1, D2, ... D5".

E1: $y \geq x$ E2: $y \geq -x$ E3: $y = x$ E4: $y = -x$ E5: $y = 0$

E6: $y = x + 2$ E7: $y = x - 2$ E8: $y = 2x$ E9: $y \geq x + 2$ E10: $x = 2$

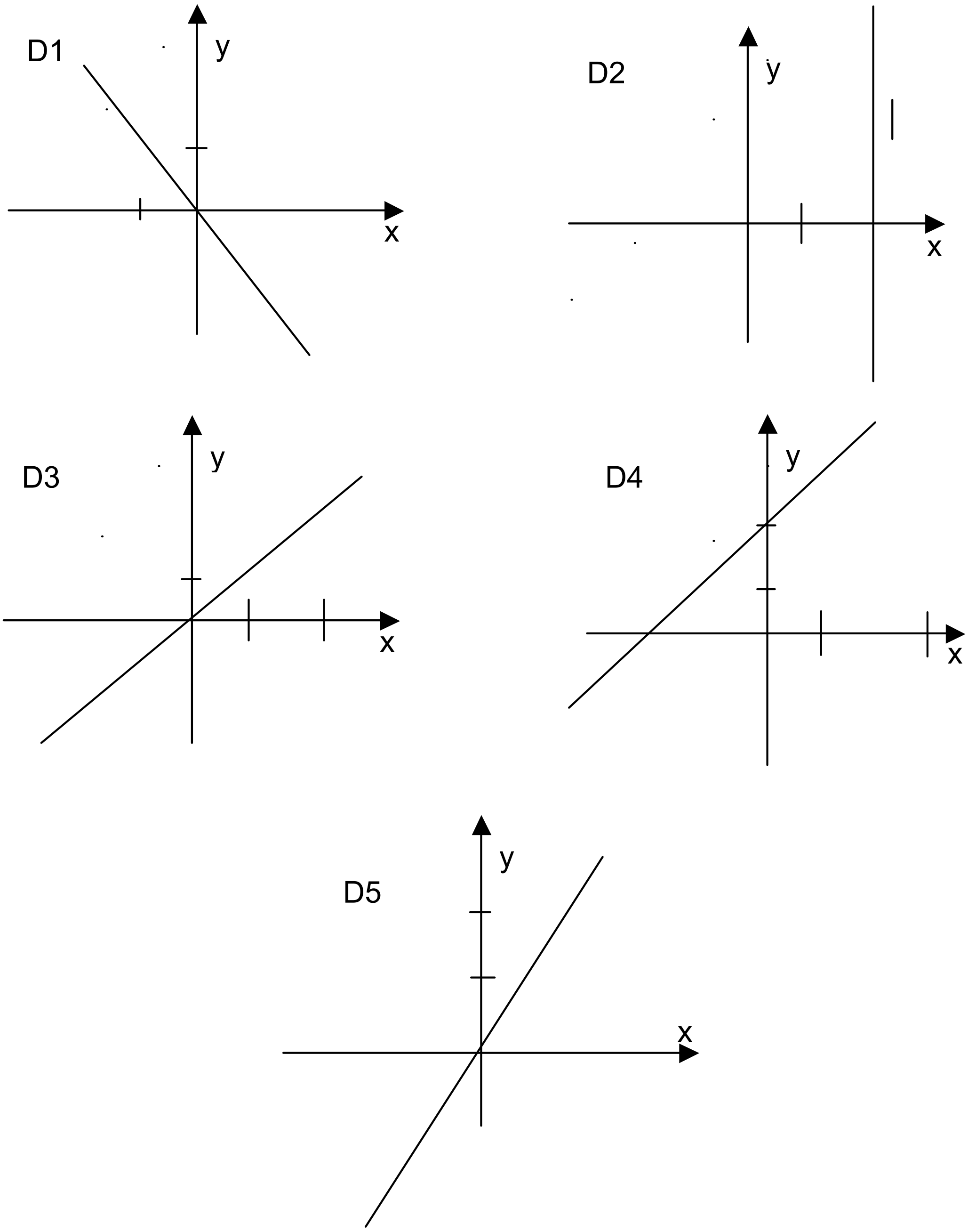
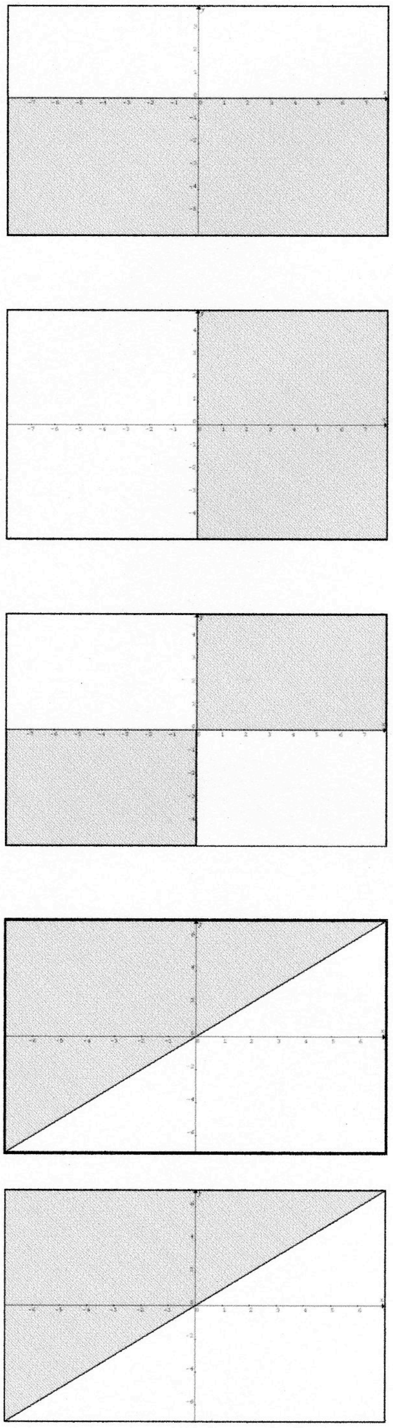
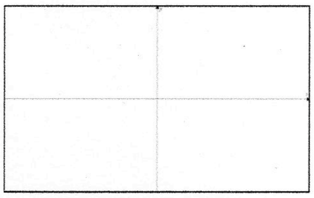


FIGURA 1. UM TESTE DE DUVAL (1988) USANDO CONVERSÃO

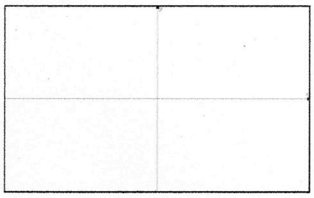
Uma outra tarefa proposta por Duval envolve três tipos de registro, o da língua natural, o algébrico e o gráfico. Para os gráficos da esquerda, o sujeito tem que escolher a expressão algébrica que representa a região hachurada dentre $y=x$, $y>x$, $y<x$, $y=-x$, $xy \geq 0$, $x>0$, $y<0$, enquanto que para os gráficos da direita, o sujeito tem que fazer a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico.



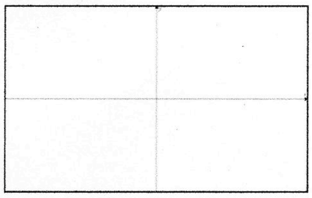
Hachurar o conjunto de pontos que têm abscissa positiva.



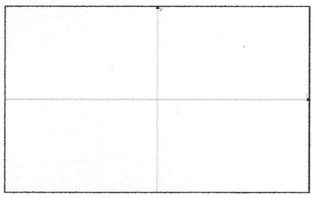
Hachurar o conjunto de pontos que têm ordenada negativa.



Hachurar o conjunto de pontos que têm ordenada e abscissa com o mesmo sinal.



Hachurar o conjunto de pontos que têm a ordenada maior do que a abscissa.



Hachurar o conjunto de pontos que têm a ordenada maior do que a abscissa.

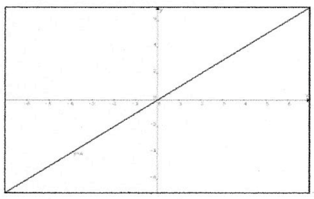


FIGURA 2. UM TESTE DE DUVAL (1988) USANDO TRÊS REGISTROS

Para comparar os índices de erro nas duas tarefas (da direita e da esquerda), Duval faz algumas observações sobre as conversões necessárias.

H1. Há congruência semântica nos casos (1) e (2): os três registros trabalhados dão o mesmo tipo de informação e são congruentes. Os índices de erro são da mesma ordem de grandeza.

H2. Há congruência semântica entre os registros na língua natural e o gráfico. No entanto, não o há entre o registro gráfico e o algébrico ou entre o da língua natural e o algébrico. O sujeito tem que fazer a equivalência "quadrantes que têm o mesmo sinal" ⇔ "produto das coordenadas é positivo". O índice de erro, na tarefa da esquerda, é o dobro do índice na direita.

H3. Não há congruência semântica no caso (4): os registros algébrico e da língua natural não possuem os mesmos elementos identificadores do registro gráfico. O índice de acerto é muito baixo. Com a ajuda dada em (5), os índices de acerto dobram.

Duval afirma ainda que a construção de gráficos ponto a ponto é tratada de forma intuitiva; a construção de retas a partir da expressão algébrica $y = ax + b$ não considera a articulação entre as variáveis visuais do gráfico e as unidades significativas do registro algébrico; e muitas vezes os dois registros são trabalhados separadamente.

Na análise que fizemos de alguns livros didáticos da Educação Básica (ver capítulo IV.1.5, página 75), pudemos confirmar que, em geral, a construção dos gráficos, no capítulo sobre funções, é feita ponto a ponto e de uma forma intuitiva. Com isto, passamos a considerar que este, talvez, seja um dos motivos pelos quais os alunos e os professores, com os quais tivemos contato, apresentam tantas dificuldades com a leitura e a interpretação dos gráficos, mostrando dificuldade para articular os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos ligados ao assunto.

Duval conclui com a observação de que a leitura e a interpretação de gráficos cartesianos depende do estudo destes por meio de uma abordagem de interpretação global e não ponto a ponto, porque só a interpretação global permite que seja percebida a articulação entre as variáveis visuais e as propriedades conceituais associadas a estas.

Com a leitura de Duval (1993), sentimos necessidade de procurar mais informações sobre a abordagem de interpretação global que Duval defende e como seria possível implementá-la. Deparamo-nos com o que ele chama de *visualização*, o que de alguma forma veio corroborar nossas avaliações sobre as dificuldades dos sujeitos com os gráficos em geral.

Duval (1999) coloca ***representação*** e ***visualização*** como essenciais para o entendimento da Matemática. ***Representação*** é o que usamos para evocar e denotar objetos ou codificar informação, por exemplo, enquanto a ***visualização*** enfatiza as imagens e as intuições empíricas de objetos físicos e de ações (intuição aqui no sentido de Piaget[2]).

As representações cognitivas podem ser intencionais (sejam elas mentais ou externas) ou causais automáticas. As intencionais precisam de um sistema semiótico. As causais automáticas, das imagens visuais de um sonho ou de uma memória, ou ainda de um aparato físico, como um espelho ou uma máquina fotográfica. De qualquer forma, precisamos considerar o sistema pelo qual a representação foi produzida para analisá-la e fazer uso dela.

A partir das considerações de Duval, com as quais concordamos, colocamos como pressuposto de nossa pesquisa que são necessários vários sistemas semióticos de representação, ligados à dualidade linguagem/imagem, para desenvolver o pensamento matemático e que esses sistemas semióticos precisam ser organizados e integrados à arquitetura cognitiva do sujeito, para que ele aprenda Matemática.

Na verdade, acreditamos que a maioria de nós passa pelo registro da língua natural, mesmo que não explicitamente, quando precisa fazer uma conversão de registros. Assim, para um sujeito utilizar uma ferramenta como os gráficos de função, ele precisa ser capaz de converter o registro gráfico no da língua natural e, para realizar essas conversões, ele precisa da ***visualização***. É ela que vai permitir, no caso das inequações pelo menos, que o sujeito escolha as funções reais que vai usar, quais são os trechos do gráfico que interessam e, finalmente, quais são as soluções.

---

[2] É uma representação construída por meio de percepções interiorizadas e fixas e não chega ainda ao nível da operação. Ou, é um pensamento imaginado... incide sobre as configurações de conjunto e não mais sobre simples coleções sincréticas simbolizadas por exemplares tipos. (Disponível em http://www.psicopedagogia.com.br. Acesso em 11 jul. 2007).

Como a visualização passou a fazer parte de nosso quadro teórico, deixamos de colocar, neste capítulo, algumas observações que consideramos pertinentes e passamos a fazê-las no parágrafo III.2, página 45 do capítulo sobre o quadro teórico.

Ainda em busca de idéias para o trabalho com uma abordagem de interpretação global, no caso das inequações, procuramos alguma pesquisa de análise de currículo e encontramos o trabalho de Assude (2002).

Assude (2002) analisa o currículo da Educação Básica da França, no caso particular das inequações, por meio de uma abordagem ecológica (ARTAUD, 1997, apud ASSUDE, 2002, p. 209), buscando respostas às questões "Quais são os objetos e as formas de estudo que existem num certo momento?", "Quais objetos estão ausentes?", "Por quê?", "Estes objetos existiram em outros momentos?", "Que desaparecimentos e que aparecimentos aconteceram?", "Quais são possíveis num certo momento?". A análise é feita em dois níveis: no primeiro, são inventariados os diferentes contextos nos quais o objeto inequação aparece; no segundo, são classificados os tipos de tarefas e os procedimentos que aparecem nas propostas curriculares ao longo do tempo.

No primeiro nível de análise, a autora pôde observar que o ensino das inequações na Educação Básica francesa é marcado por três contextos curriculares: *equacional*; *estrutural e funcional*; *empírico e de modelização*. No *equacional*, as inequações são olhadas como equações e as técnicas de resolução são algébricas; portanto, os gráficos não aparecem. No *estrutural e funcional*, as equações e as inequações são elementos essenciais para a análise das aproximações, aparecem como ligação entre as estruturas numéricas e as funções e as técnicas de resolução incluem as gráficas; no entanto, alguns livros definem o que se entende por resolver uma inequação de maneira formal e algébrica, aparentemente supondo que a conversão entre o registro algébrico e o gráfico é imediata para a maioria dos estudantes. No *empírico e de modelização*, as inequações são uma ferramenta para a modelização de situações da vida quotidiana, num único tipo de tarefa, com uma única técnica algébrica, para um único tipo de inequação; neste caso, fica subentendido que as propriedades algébricas de uma inequação nascem espontaneamente do trabalho numérico com um ou dois exemplos particulares.

Comparando com o que percebemos na nossa análise de livros didáticos brasileiros de Matemática, podemos dizer que também aparecem três contextos: o *equacional*, principalmente no Ensino Fundamental, na 6ª série (atual 7º ano); o *estrutural e funcional*, no Ensino Médio, apenas aparentemente, sob a forma de "sinal da função", mas as resoluções são baseadas nas propriedades algébricas e as gráficas não aparecem; o *empírico e de modelização*, muito raramente, ainda não conseguiu espaço significativo, mas quando aparece também enfoca apenas modelos do tipo linear ou quadrático.

No segundo nível de análise, com relação aos tipos de tarefas que aparecem nos livros didáticos franceses analisados por Assude, podemos perceber que, nas que envolvem uma resolução gráfica, esta é apresentada como uma sucessão de regras, como no exemplo abaixo.

> "... para resolver a inequação ax+by+c<0, traça-se num sistema de coordenadas ortogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), a reta d de equação ax+by+c=0, e escolhe-se, em um dos semi-planos determinados por d, um ponto M; se as coordenadas de M verificam a inequação, o conjunto de soluções é este semi-plano; se não, é o outro semi-plano." (ASSUDE, 2002, p. 224, tradução nossa.)[3]

Ou só enfocam as inequações de primeiro e/ou segundo graus do tipo polinomial, ignorando completamente o potencial trazido pelas funções e pelos gráficos, que permitiriam uma abordagem mais geral. Esta, aparentemente, vem camuflada sob a forma "Estudar o sinal da expressão algébrica" ou "Estudar o sinal da função", porém com base num esquema algébrico, conhecido por nós como "varal", que não valoriza, não trabalha e, acreditamos, até prejudica as informações que podem ser tiradas do gráfico, se estes aparecessem à luz de uma visualização global.

No caso dos livros didáticos brasileiros que analisamos, este tipo de resolução gráfica não aparece nem como uma sucessão de regras.

Assude conclui que, no caso das inequações, os movimentos curriculares trouxeram um empobrecimento didático, particularmente do ponto de vista algébrico. Embora no Brasil a abordagem possa ser considerada estritamente algébrica, concordamos com ela, pois o que vemos, tanto nos livros didáticos

---

[3] "... pour résoudre l'inéquation *ax+by+c<0*, on trace dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$),, la droite *d* d'équation *ax+by+c=0*, et on choisit, dans l'un des demi-plans de bord *d*, un point *M*; si les coordennées de *M* vérifient l'inéquation, l'ensemble des solutions est ce demi-plan; si non, c'est l'autre demi-plan." (ASSUDE, 2002, p. 224).

analisados, como na fala e na atitude dos professores com os quais tivemos contato, é um ensino muito baseado nos aspectos intuitivos e algorítmicos das inequações, em detrimento dos aspectos formais que, no nosso entender, poderiam ajudar a desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, mesmo se fossem utilizados os registros gráficos.

No caso da nossa seqüência didática (capítulo I, página 113), procuramos dar aos professores que participaram, tanto os que estão em exercício como os que estão em formação, uma abordagem que permitisse trabalhar com funções em geral, com a ajuda dos gráficos, a maioria deles obtidos com a ajuda de um software gráfico que fosse acessível e amigável, sem pretensão de criar uma perspectiva de uso em um ambiente informático em qualquer nível de ensino.

Em 2004, durante a 28ª International Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), cujo tema foi Inclusão e Diversidade, o fórum de pesquisa **RF02: Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching**[4] foi coordenado pelos pesquisadores Luciana Bazinni e Pessia Tsamir. Foram convidados a participar cinco grupos de pesquisadores e dois debatedores. Os grupos expuseram as dificuldades dos estudantes na resolução de equações e inequações, bem como as razões que cada um desses grupos sugere para essas dificuldades: (1) *Paolo Boero e Luciana Bazinni*; (2) *Carolyn Kieran*; (3) *Catherine Sackur*; (4) *Tommy Dreyfus e Maureen Hoch*; (5) *Pessia Tsamir, Dina Tirosh e Sarit Tiano*. Os debatedores responderam aos cinco grupos, sob perspectivas diferentes, para estabelecerem conclusões: (1) *David Tall*; (2) *Luis Radford*.

Cada um dos grupos citados contribuiu, de alguma forma, com a nossa pesquisa, principalmente porque sugerem caminhos tanto para pesquisas em geral como para abordagens de ensino para a Educação Básica. Vamos destacar os pontos que mais nos interessaram.

Boero e Bazzini (2004) colocam como hipótese de trabalho que é necessário o uso de ferramentas ligadas aos aspectos cognitivos, didáticos e epistemológicos para interpretar as dificuldades dos alunos, bem como para planejar e analisar os experimentos de ensino. A partir desta hipótese, justificam o uso de uma

[4] RF02 (fórum de pesquisa 02): Equações e desigualdades algébricas: argumentos para pesquisa e ensino. (Tradução nossa). Acessível em www.emis.de/proceedings/PME28/RF/RF002.pdf

abordagem funcional para as inequações e mostram que esta abordagem pode revelar e permitir um desenvolvimento do potencial dos estudantes, que vai além do assunto inequações. Colocam duas questões para discussão.

> "I) 'Quais teorias e quais ferramentas realmente oferecem as melhores oportunidades para interpretar os comportamentos dos estudantes quando lidam com desigualdades?'
>
> II) 'O estudo do ensino e da aprendizagem das desigualdades pode ser reduzido ao estudo e à aprendizagem das funções?'[5]. (BOERO; BAZINNI, 2004, p. 1-142, tradução nossa.)

Como os autores, acreditamos que a abordagem funcional, com o uso do registro gráfico, pode desencadear a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos presentes na resolução de inequações em qualquer nível de aprendizagem.

De certa forma tentando responder sim à 2ª questão, desenvolvemos nossa seqüência apoiando-nos fortemente no entendimento prévio de função e de gráfico de função, baseando-nos no tratamento de cada um deles e na conversão entre os registros gráfico, algébrico e da língua natural.

Kieran (2004) defende o modelo desenvolvido por ela para o trabalho com a Álgebra por meio de três categorias de atividades: a *generalizadora*, a *transformadora* e a *em nível meta-global*. As atividades do tipo *generalizadora* são as que usam padrões geométricos ou numéricos, por exemplo, para chegar a uma lei algébrica; há uma passagem de uma situação para uma representação algébrica. As do tipo *transformadora*, baseiam-se nas regras algébricas para preservar equivalência; há uma transformação de forma, mas a essência do problema é a mesma. As atividades *em nível meta-global* usam a Álgebra como ferramenta, embora ela possa não aparecer explicitamente; são as do tipo resolução de problemas, modelagem, demonstração, argumentação. As representações algébricas previamente geradas são examinadas, a fim de oferecerem respostas a questões do tipo conjectura.

No caso das desigualdades, Kieran acredita que o significado para os símbolos provém do trabalho com atividades no nível meta-global, com problemas contextualizados, que se encaminhem para o genérico. Analisando os resultados decorrentes da aplicação de uma seqüência didática para introduzir desigualdades

---

[5] "I) what theories and what tools do offer the best opportunities to interpret students' behaviors when they deal with inequalities?
II) can the study of teaching ateaching and learning functions?" (BOERO; BAZINNI, 2004, p. 1-142)

numa 8ª série, a autora conclui que os alunos fazem uma estreita relação entre desigualdades e igualdades e que nenhum deles usou a representação gráfica cartesiana como ferramenta. O desafio didático que a autora lança é o de ajudar os alunos a perceberem as armadilhas da conexão igualdade/desigualdade no trabalho de transformação com os símbolos e coloca três questões: (1ª) “Alguns aspectos da atividade contextualizada podem auxiliar os alunos a entenderem as regras de transformação usadas na resolução de uma desigualdade?”; (2ª) “Qual a natureza do suporte instrucional capaz de gerar representações mentais que capacitem os estudantes a perceberem as diferenças críticas no tratamento das igualdades e das desigualdades?”; (3ª) “De que formas e em que faixa etária as técnicas de manipulação simbólica podem ser trabalhadas para permitir que os estudantes desenvolvam a teoria algébrica envolvida nas desigualdades e na resolução destas?”.

Concordamos com Kieran no que diz respeito a não separar o estudo de equações do de inequações, mas sim, de encontrar formas de ajudar os alunos a perceberem os perigos da conexão igualdade/desigualdade. Esta concordância, do nosso ponto de vista, foi reforçada pela nossa experiência em sala de aula (aspectos intuitivos, vindos dos alunos), pelo nosso contato com professores de Matemática (aspectos algorítmicos, pela prática em sala de aula), pela nossa análise de alguns livros didáticos (aspectos formais são esquecidos) e pela nossa leitura de Bagni (2005) (aspectos históricos que justificam a correlação entre igualdades e desigualdades). Estas razões reforçaram nossa hipótese de que o uso do registro gráfico pode ajudar muito, pois com ele é possível **visualizar** a diferença entre “resolver a equação ...“, o que pode ser visto por meio da coincidência dos gráficos e “resolver a inequação...”, o que é visualizado pelo fato de um gráfico estar *abaixo* ou *acima* do outro. Seja a solução um número finito de valores ou não. Com relação às atividades do tipo *generalizadora*, no caso do estudo de funções, consideramos um caminho extremamente perigoso o uso da representação em tabela, seja para leitura linha a linha, seja para leitura coluna a coluna (BOERO; BAZZINI, 2004, p. I-141), porque pode reforçar, no nosso entender, apenas os aspectos intuitivos, não dando nenhuma idéia dos aspectos formais ou dos algorítmicos envolvidos no estudo de funções.

Sackur (2004) afirma que fez algumas observações em sua sala de aula, com alunos de 15 e 16 anos, com relação ao uso de gráficos para a resolução de inequações e chegou à conclusão que nem sempre essa abordagem ajuda. Para resolver uma desigualdade usando uma abordagem funcional e ainda com o registro gráfico, o aluno precisa desenvolver um trabalho que pode ser expresso pelo diagrama

desigualdade $\xrightarrow{1}$ criação de duas funções $\xrightarrow{2}$ esboço dos gráficos pelo reconhecimento da coordenada y $\xrightarrow{3}$ comparação das coordenadas y $\xrightarrow{4}$ volta aos valores da coordenada x.

Usando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de R. Duval, ela aponta algumas das dificuldades que podem surgir nos tratamentos (passagem 3) e nas conversões (passagens 2 e 4). Além disto, como as funções aparecem como ferramenta, questiona algumas diferenças entre a denotação em Álgebra e em Cálculo, citando pesquisa de Maurel & Sackur, em desenvolvimento.

Segundo esta teoria, uma função em Cálculo denota, na verdade, uma classe: quando escrevemos $\int f(x)dx$, estamos nos referindo ao conjunto de funções que têm a mesma derivada, f(x). Esta diferença na denotação, segundo a autora, pode ser a responsável pela dificuldade dos alunos na passagem 4, que é quando vários gráficos podem dar a mesma resposta em x. Embora concordemos que existe essa diferença na denotação, porque no Cálculo estamos interessados em adjetivos que valem para conjuntos de funções (as funções <u>deriváveis</u>, as funções <u>integráveis</u>, as funções <u>crescentes</u> etc.), não acreditamos que este seja o caso no estudo das inequações, porque o que precisa ser entendido é o objeto função, sem adjetivos, como uma transformação da “variável independente” na “variável dependente”, cujo gráfico tem uma definição *formal*, que não pode ser substituída pelos aspectos intuitivos e/ou algorítmicos.

A autora conclui que o uso de gráficos traz novas dificuldades, algumas específicas das funções e que não devemos induzir que os alunos aprendem a mesma Matemática na resolução gráfica e na algébrica. A questão colocada, então, é “O que os alunos aprendem quando resolvem desigualdades graficamente? E algebricamente?”.

Concordamos que a aprendizagem obtida na solução gráfica é diferente da conseguida na solução algébrica e, na tentativa de responder a questão colocada pela pesquisadora, continuamos apostando no uso do registro gráfico, porque a visualização neste caso pode funcionar como ferramenta, até mesmo de memória, no caso de funções que são definidas e contínuas em IR ou em uma união finita de intervalos abertos: as soluções da desigualdade estão compreendidas entre as soluções da igualdade.

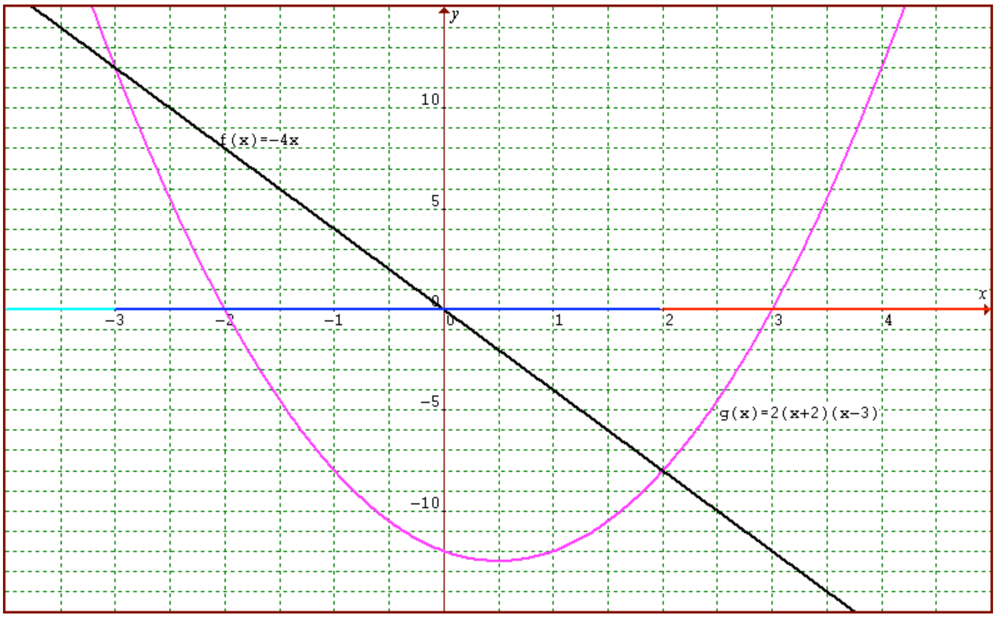


FIGURA 3: SOLUÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO

Na figura 3, temos que: (1) se x<-3 ou x>2, então g(x)>f(x); (2) se –3<x<2, então g(x)<f(x); (3) se x=-3 ou x=2, então g(x)=f(x).

Podemos observar que as soluções da equação f(x)=g(x) são os valores extremos dos intervalos das soluções das inequações g(x)<f(x) ou g(x)>f(x). Estes resultados podem ser analisados à luz do Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em intervalos fechados, cuja interpretação vai garantir que entre dois zeros consecutivos de uma função contínua, esta terá sinal constante.

Dreyfus e Hoch (2004) defendem que, no trabalho com equações, a estrutura é importante em dois aspectos, para o reconhecimento de uma equação e para lidar com sua estrutura interna, porque isto pode aumentar substancialmente o sucesso em Álgebra. Numa pesquisa realizada por eles, perguntaram a alunos do ensino médio de Israel o que pensam que é uma equação e estes deram respostas que mostram que o reconhecimento estrutural não faz parte da percepção deles do objeto equação. Os pesquisadores concluem que os estudantes israelenses pesquisados não têm dificuldade em reconhecer uma equação, pelo menos do ponto de vista procedimental, mas não reconhecem a estrutura interna da equação; portanto, eles raramente a usam e têm dificuldades para resolver a maioria das equações não triviais. Sugerem a apresentação de formas de trabalho com a Álgebra que foquem a atenção dos estudantes nas estruturas.

No nosso caso, que é o das inequações, também defendemos um entendimento da estrutura, o que para nós está estreitamente ligado a uma interpretação que passa pelo registro da língua natural. É por isso que, na nossa seqüência, damos bastante ênfase ao uso da língua natural.

Tsamir, Tirosh e Tiano (2004) discutem os resultados de uma pesquisa iniciada por eles na exploração das declarações e das práticas de um professor de Matemática experiente, com relação à gestão dos erros cometidos pelos alunos em sala de aula, durante o processo de ensino de inequações quadráticas. Foram observadas e filmadas três aulas numa turma de futuros técnicos eletrônicos e selecionados os episódios de erro com a subseqüente gestão feita pelo professor. Posteriormente, foram feitas várias entrevistas reflexivas de 90 minutos, com o professor, nas quais ele era solicitado a: listar os erros cometidos pelos alunos; assistir os episódios de ocorrência dos erros; identificar o erro; especificar possíveis razões; explicar e comentar a gestão feita por ele em sala de aula; dar outras sugestões de gestão. Diante de uma lista de inequações quadráticas, o professor deveria indicar os possíveis erros dos alunos e, finalmente, sendo informado dos erros que normalmente os alunos cometem ao resolver estas mesmas inequações, era perguntado a ele "Como você reagiria, em aula, a estes erros?". A análise do experimento permitiu aos pesquisadores dividirem as reações do professor em dois tipos, um econômico e outro elaborado. O primeiro quando o erro era ligado a algum conteúdo estudado previamente (erro "velho"); o segundo, ao tema em estudo (erro "novo"). Estas observações foram confirmadas pelo professor em uma posterior entrevista reflexiva. A partir destas conclusões, os autores colocam três questões para discussão: (1ª) "Esta conduta do professor é uma característica geral da instrução dele ou é típica do ensino de desigualdades quadráticas?"; (2ª) "A classificação "erro velho"/"erro novo" é típica deste professor ou é também de outros professores, antigos ou novos?"; (3ª) "Quais são os prós e os contras desta abordagem?".

Como já havíamos feito um questionário diagnóstico, entre alunos e entre professores, sabíamos que, diante de uma inequação do tipo $x^2<4$, em ambos os grupos havia uma tendência muito forte, diríamos até coerciva (aspecto intuitivo) a "extrair a raiz dos dois lados" para depois pensar no que acontece. Assim, a maioria dos exemplos escolhidos para a nossa seqüência procura trazer à discussão exatamente aqueles procedimentos que, no nosso entender, provocam mais "erro", principalmente porque não são "erros" quando estamos trabalhando com equações.

Na posição de debatedores, David Tall e Luis Radford fazem, respectivamente, "Reflexões sobre a pesquisa e o ensino de equações e desigualdades" e "Sintaxe e significado".

David Tall (2004) faz uma síntese das posições apresentadas nos cinco artigos precedentes. Dos focos apresentados, toma a abordagem da resolução de problemas para perguntar "Qual é o problema?", "Por que precisamos ajudar os estudantes a entender e operar equações e desigualdades?". Apontando falhas que podem ocorrer em cada uma das propostas, Tall acredita que obstáculos cognitivos aparecem quando as ligações subconscientes do indivíduo a propriedades incidentais de experiências anteriores, os "met-before", não se aplicam no novo contexto. No caso das inequações, os problemas aparecem porque os procedimentos na resolução de equações lineares são "met-before" para esses alunos. Segundo ele, ao manipular os símbolos numa equação, os alunos criam construções pessoais que funcionam em suas resoluções das equações lineares, mas que operam como "met-before" subconscientes no caso das inequações. Para ele, ficaram ausentes do debate teorias de compressão cognitiva de processos para entidades mentais manipuláveis, a construção das quais abriria maiores perspectivas para um desenvolvimento formal a longo prazo. E propõe um trabalho que leve a uma categorização da Álgebra em "álgebra avaliativa", "álgebra manipulativa" e "álgebra axiomática". Considerando que a maioria dos artigos enfoca uma ou no máximo duas dessas categorias, pergunta "Precisamos de um tipo de Álgebra para alguns alunos e outro para outros?" e relembra Richard Skemp que lhe disse uma vez que não há nada tão prático como uma boa teoria.

Sem usar a teoria proposta por Tall, acreditamos que também é possível, com o uso dos registros gráfico, algébrico e da língua natural, trabalharmos a resolução de inequações de uma forma mais geral, que a longo prazo faça os alunos relacionarem os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos presentes neste assunto, criando unidades mentais manipuláveis, que sejam trazidas à tona tanto na resolução de equações como na de inequações.

Luis Radford (2004) identifica o tema sintaxe e significado em todos os artigos do fórum e comenta cada um deles sob este aspecto. As propriedades estruturais são importantes na formação da semântica da Álgebra e o contexto covariacional funcional fornece meios para que os estudantes dêem significado para os signos e os entendam. Referindo-se à abordagem não estrutural proposta pelo uso de vários sistemas de representação, Radford afirma que o tema aparece na passagem do problema verbal para os símbolos, no entendimento dos tratamentos e conversões de registros, na compreensão das estruturas subjacentes às equações. Com relação ao uso do registro gráfico, lembra que a visualização do tipo "o gráfico sobe" ou "o gráfico desce" supõe uma orientação, cuja apreensão depende da experiência matemática espacial-temporal anterior do aluno. No entender de Radford, um passo fundamental para a aprendizagem da Álgebra é o reconhecimento de equações equivalentes e para tanto é preciso desenvolver o pensamento simbólico, que no caso da Álgebra caracteriza-se por um movimento de vai e vem entre a interpretação da expressão simbólica em sua forma diagramática e a geração hipotética e matematicamente estruturada de novas equações-diagrama. Segundo ele, a grande dificuldade no trabalho com equações e desigualdades parece depender: (1) do entendimento de sua natureza *apofântica*[6], porque uma equação ou uma desigualdade indicam um *julgamento predicativo*[7] quando asseguram que "algo" = 0 ou "algo" ≥ 0; (2) da natureza *apodítica*[8] de suas transformações, porque estas devem, necessariamente, preservar a verdade. Por causa disso, sugere que o trabalho com equações e desigualdades não se limite ao registro escrito contendo signos alfanuméricos e que inclua sistemas de

[6] **FUNÇÃO APOFÂNTICA**: dizer alguma coisa dos objetos representados, sob a forma de uma proposição enunciada. (Duval, 1993, p. 91, tradução nossa.)

[7] **PREDICATIVO** (Epist.): que afirma de uma forma absoluta e definitiva. (Nouveau Petit LE ROBERT – Dicionnaire de la langue française. Montreal: 1993. ISBN 2-85036-390-1, tradução nossa.)

[8] **APODÍTICA** (Log.): que tem uma evidência de direito e não somente de fato; então necessária e também assertiva. (Nouveau Petit LE ROBERT – Dicionnaire de la langue française. Montreal: 1993. ISBN 2-85036-390-1, tradução nossa.)

representação semióticos tais como fala, gestos, gráficos, expressão corporal ... para que os *julgamentos predicativos* sejam compostos de gestos, signos escritos, segmentos de discurso e ações corporais mediadas por artefatos. As transformações não serão pré-determinadas como no caso da lógica dedutiva e sempre estarão sujeitas a interpretações. Radford encerra afirmando que na verdade não há oposição entre sintaxe e significado, porque todo signo tem um significado, para continuar sendo um signo e, por outro lado, todo significado é uma entidade abstrata que se manifesta somente pelos signos.

No nosso caso, não incluímos as ações corporais, porque nossa seqüência foi elaborada com o intuito de ser trabalhada com professores, sob um ponto de vista teórico, formal e didático, para abrir a discussão sobre uma abordagem diferente para a resolução de inequações. Entendemos que estes professores terão maturidade e experiência suficientes para transformar esta aprendizagem de uma forma eficiente, para uso em sala de aula, até mesmo com o uso das ações corporais.

O fórum termina colocando questões para a discussão das soluções erradas das inequações: (1) “Quais são as dificuldades de alunos com baixo rendimento versus aqueles com alto rendimento?”; (2) “Meninos versus meninas?”; (3) “Aqueles que estudaram o tópico de formas diferentes (por exemplo, abordagem gráfica versus algébrica)?”; (4) “Como professores diferentes fazem suas escolhas didáticas?”; (5) “Qual é o impacto de abordagens diferentes de ensino sobre estudantes diferentes?” e o compromisso de encorajar pesquisadores a contribuírem com o tema.

Nossa pesquisa não tem por objetivo obter resposta a qualquer dessas questões especificamente, porque não temos a intenção de comparar grupos. No entanto, pode colaborar com as questões (3), (4) e (5), porque pretendemos mostrar, a um grupo de sujeitos, possibilidades para uma abordagem funcional gráfica e algébrica das inequações com uma variável real.

Mariani (2006), para a tese de doutorado, realizou uma pesquisa qualitativa, projetada como estudo de caso, para investigar como a coordenação de registros de representação favorece a exteriorização dos conhecimentos de alunos da disciplina Cálculo 1 em tarefas que envolvem o conceito de função. A pesquisadora elaborou quatro tarefas (inicial, 1, 2 e 3), nas quais são utilizadas as conversões de registros de representação e analisou os protocolos à luz do Contrato Didático, desenvolvido por Guy Brousseau (1986, apud MARIANI, 2006, p. 23-32).

Na tarefa inicial, os alunos precisavam resolver a inequação $x^2 - 36 \leq 108$ algebricamente, expressar o conjunto de soluções utilizando retas (um tipo de registro gráfico, que usualmente aparece nos livros didáticos da Educação Básica), explicar o significado deste conjunto (registro da língua natural) e finalmente testar alguns valores dados (registro da língua natural e algébrico). O objetivo desta tarefa foi investigar os conhecimentos a priori da turma de futuros sujeitos da pesquisa, no que diz respeito à utilização de vários registros.

Com os resultados obtidos nesta primeira atividade, a pesquisadora pode observar que a maioria dos alunos não percebia as relações e as equivalências entre os diferentes registros, principalmente no que dizia respeito ao registro da língua natural e davam respostas diferentes para a mesma inequação.

A partir destas constatações, foram elaboradas as tarefas 1, 2 e 3, que compuseram o trabalho de campo.

A tarefa 1 é composta por duas questões, que foram resolvidas num ambiente informático, com o software DERIVE, o que permitiu a obtenção rápida e fácil dos registros gráficos: na primeira questão, a partir dos gráficos das funções $f_1(x) = -3 + x$ e $f_2(x) = -x + 2$, os alunos precisam localizar alguns pontos específicos do gráfico para comparar os valores das ordenadas respectivas e, a partir destas comparações, resolver -3+x>-x+2, -3+x=-x+2 e -3+x<-x+2. O objetivo desta questão é verificar se, a partir da localização de três pontos (a intersecção das retas, um ponto à direita e o outro à esquerda), os sujeitos conseguem generalizar e dar a resposta global para as inequações e para a equação associada; na segunda questão, os alunos precisam resolver cinco inequações, primeiro por uma abordagem funcional gráfica e depois por uma abordagem algébrica, comparando as respostas e argumentando sobre elas.

Da análise da tarefa 1, a pesquisadora pode observar que: quando havia discrepância entre as respostas algébrica e gráfica, os alunos optavam pela gráfica como sendo a correta; as argumentações privilegiaram os tratamentos pontuais (numéricos); as conversões realizadas fizeram emergir os conhecimentos e as dificuldades dos alunos, dentre as quais a pesquisadora destaca a falta de rigor (no nosso caso, o aspecto formal).

A tarefa 2 é composta de duas partes, que também foram resolvidas em ambiente informático, com o software DERIVE, para obter facilmente os gráficos das funções definidas por $f(x) = |x|$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ (funções de referência), respectivamente. Tanto na parte 1, como na parte 2, os alunos precisam responder questões sobre domínio, imagem, simetria do gráfico, paridade da função, tanto para a função de referência como para duas funções associadas, obtidas pela adição de uma constante, primeiro à função f e depois à variável x. O objetivo desta tarefa é verificar quais conhecimentos são mobilizados pelos alunos, diante de questões envolvendo translações horizontais e verticais dos gráficos, bem como diferenças no domínio, na imagem, na simetria e na paridade.

Da análise da tarefa 2, a pesquisadora conclui que: para estes alunos, a simetria axial é sempre em relação ao eixo vertical; a determinação das imagens relacionadas à função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ foram mais problemáticas e os alunos adotaram estratégias diferentes, ou de cálculo ou de manipulação de símbolos, revelando uma não coordenação dos vários registros; apesar de terem o gráfico à disposição, a maioria dos alunos optou por um tratamento pontual (numérico), tanto nas questões de simetria como nas de translação e nas de paridade; o registro na língua natural mostrou-se uma ferramenta potente para trazer à tona as dificuldades dos alunos, dentre as quais destaca a dificuldade para distinguir o objeto da representação.

A tarefa 3 é constituída de duas partes, que foram desenvolvidas em ambiente informático, com o software Imagiciel, que já possui, no menu, este tipo de tarefa. As funções envolvidas são $f(x) = -\frac{x^2}{8} - x + 3$ e $f(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2\right)^2$ e as questões são as mesmas em ambos os casos: descrição do procedimento efetuado para traçar o gráfico (sem a calculadora); observação do gráfico e comparação deste com o obtido com a calculadora, argumentando sobre as diferenças; domínio e paridade; as demais questões envolvem o cálculo do coeficiente angular de retas que se apóiam em dois pontos do gráfico, um fixo desde o início e o outro variando, com perguntas sobre se este coeficiente angular é ou não uma função que depende das abscissas x dos pontos que variam, quais os valores dessa função quando os valores de x estão cada vez mais próximos da abscissa do ponto fixo, qual o limite desses valores e qual o significado geométrico do resultado obtido com este limite. Os objetivos desta tarefa são observar como os alunos se expressam no registro da língua natural; analisar se esboçam os gráficos pelo tratamento pontual ou pela visualização global; verificar se analisam paridade a partir de alguns pontos apenas (numérico); identificar como calculam o coeficiente angular no caso numérico; analisar se aceitam um coeficiente angular que seja uma função de x, que se aproxima de um número no limite; verificar se fazem as conversões entre o registro algébrico, o gráfico e o da língua natural (retas secantes que tendem para a reta tangente, coeficientes angulares que tendem para o da reta tangente).

Da análise da tarefa 3, a pesquisadora pode constatar que a maioria dos alunos: fez um tratamento global dos gráficos; realizou as conversões, no caso dos coeficientes angulares; explicitou as argumentações de uma forma mais cuidadosa e mais rigorosa.

No geral, a pesquisadora pode observar que, para este grupo de estudantes, houve evolução: na coordenação dos vários registros; na interpretação global dos problemas propostos; na preocupação com o rigor. E conclui que as conversões de registros de representação, partindo do gráfico para o algébrico e para o da língua natural, analisadas à luz das regras do contrato didático, mostraram-se ferramentas valiosas para fazer emergir as idéias e as dúvidas destes alunos.

Descrevemos com mais detalhes esta pesquisa porque nela aparecem os registros de representação, as funções e as inequações, bem como na nossa. Comparando as duas propostas, gostaríamos de destacar: nesta pesquisa, as conversões de registros de representação são utilizadas como ferramenta para destacar os conhecimentos e as dúvidas dos alunos (foco no professor), enquanto que na nossa pretendemos utilizá-las como ferramenta para a aprendizagem (foco no aluno); nesta, as tarefas são três, envolvendo três temas, inequações, funções e retas tangentes, enquanto na nossa, oferecemos uma seqüência, envolvendo só o tema inequações, que os professores de Matemática poderão usar como inspiração para um trabalho em sala de aula; nesta, a resolução algébrica de inequações é suposta conhecida, enquanto que na nossa acreditamos mostrar uma alternativa para a abordagem estritamente algébrica da resolução de inequações; nesta, a tarefa sobre inequações é a primeira e a sobre funções, a segunda, enquanto na nossa pressupomos um trabalho contrário, ou seja, a abordagem funcional gráfica da resolução de inequações pressupõe um trabalho bem fundamentado com as funções e a visualização global de gráficos: a tarefa 2 desta pesquisa foi a primeira que aplicamos, de uma série de três, para discutir funções (ver parágrafo V.1, página 113, onde fazemos uma análise do que significa resolver uma desigualdade com uma incógnita, numa abordagem funcional gráfica); na tarefa 1 desta pesquisa, os alunos calculam as coordenadas de três pontos e, a partir deste cálculo, são indagados sobre uma generalização, enquanto que na nossa gostaríamos que ocorresse o contrário.

Como a própria pesquisadora cita, com relação a um estudo de caso com caráter qualitativo.

> "Segundo Ponte (2006), o objetivo desse tipo de pesquisa não é a generalização dos resultados, mas, sim, produzir conhecimento sobre objetivos muito particulares e os resultados podem ser levados em consideração em estudos realizados em outros contextos com características semelhantes." (PONTE, 2006, apud MARIANI, 2006, p.208).

Os resultados obtidos pela pesquisadora, de que as conversões entre registros de representação, partindo do gráfico em direção ao algébrico e ao da língua natural, fizeram emergir os conhecimentos e as dúvidas dos alunos, servem como incentivo para que continuemos acreditando numa abordagem funcional gráfica da resolução de inequações.

E o que pretendemos investigar é exatamente se a utilização de uma abordagem desse tipo pode contribuir para a resolução de inequações com uma incógnita real, a ponto de permitir que a resolução algébrica dessas inequações não fique só uma sucessão de procedimentos que precisam ser decorados.

Nossa intenção é fazer esta investigação junto a dois grupos de sujeitos, um de professores de Matemática em exercício e o outro de alunos do primeiro ano de uma formação inicial, com um conjunto mais abrangente de funções, com o uso intenso do registro gráfico, bem como do registro da língua natural. Gostaríamos que, a partir da discussão de nossa seqüência, estes professores verificassem a viabilidade de uma tal abordagem em salas de aula da Educação Básica.

III. QUADRO TEÓRICO

No capítulo anterior, apresentamos a revisão de literatura que fizemos a fim de ter contato com as pesquisas que estão sendo feitas, ou que já terminaram, relacionadas ao tema inequações. Procurávamos saber quais os focos e quais as recomendações da comunidade a respeito. Neste capítulo, vamos relatar os principais tópicos das teorias que escolhemos para compor o quadro teórico da nossa pesquisa: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2000), para justificar o uso de três sistemas de representação para o trabalho com as inequações; a visualização, proposta por Duval (1999), para favorecer a utilização do registro gráfico; e o quadro teórico de Efraim Fischbein (1993), sobre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos que existem em qualquer atividade matemática, para analisar se os sujeitos da pesquisa conseguiram fazer a interação e a inter-relação desses aspectos, ao longo e ao término da realização das atividades de nossa seqüência.

Não temos a intenção de descrever completamente as teorias, uma vez que já existem várias publicações sobre elas, apenas destacar os pontos que nos pareceram importantes. Ao final do capítulo, pretendemos justificar nossas escolhas, dentro do quadro teórico apresentado.

III.1. SOBRE AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Com a leitura de Duval (1995, 1999, 2000) e com a convicção de que é preciso buscar outras formas de abordagem para a Matemática tanto da Educação Básica como do Ensino Superior, mais se configura, para o nosso trabalho, a necessidade de usarmos pelo menos dois registros de representação semiótica, como recomenda a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A partir desta opção, redigimos algumas passagens inspiradas nas leituras acima e que, no nosso entender, foram as mais importantes para justificar nossas escolhas.

A Matemática trabalha com objetos abstratos sobre os quais o sujeito forma idéias mentais que precisam ser materializadas, ou por uma necessidade individual, ou coletiva. No primeiro caso, por exemplo, podemos citar uma demonstração que se quer realizar, uma inequação que se quer resolver, um problema que se quer modelar. No segundo, uma demonstração sobre a qual se quer convencer alguém da validade, uma inequação que se quer mostrar como resolver, um problema que se quer discutir. Em todas estas situações, precisamos achar uma forma, que chamaremos universal, de ter acesso material aos objetos matemáticos em jogo. Isto só pode ser feito por meio de representações semióticas[9], isto é, por meio de signos que traduzam o pensamento, de acordo com regras que possam ser entendidas por uma comunidade e que, portanto, precisam estar pré-estabelecidas (por esta razão dissemos universais). Por outro lado, do ponto de vista cognitivo, essas representações semióticas não devem ser confundidas com os objetos representados, que é o que Duval caracteriza como o caráter paradoxal da Matemática. Por exemplo: π representa um número irracional, mas não é o número, é apenas um numeral; o traço que o professor coloca na lousa para representar uma reta, não é a reta, é apenas uma figura que ele usa para representar uma linha reta; outras representações de uma reta são g(x)=px+q, mx+ny=r; quando escrevemos f(x) = sen(x), estamos usando uma representação da função seno, que não é a função, é apenas uma forma de representá-la; três toques curtos, seguidos de três longos e depois três curtos, em código Morse, representa SOS, ou seja, um pedido de socorro; $\frac{3}{4}$, dependendo do contexto, pode representar "3 partes disto para 4 partes daquilo", "a divisão de 3 coisas em 4 partes", "a divisão de 3 por 4", "0.75", "75%", "tomar 3 partes de algo dividido em 4"; a $\int_0^a 4\sqrt{a^2 - x^2}dx$, com $a > 0$, representa a área do disco de raio a, mas não é a área, é apenas uma representação dessa área. Quando essas representações são intencionais e universais, ou seja, prestam-se para o raciocínio, o trabalho e a comunicação em Matemática, elas fazem parte de um ***sistema semiótico de representação***, que está ligado à dualidade linguagem/imagem. A linguagem pode ser vista como a algébrica a partir da escrita e a imagem, como a dos gráficos. O sujeito precisa escolher e utilizar vários sistemas semióticos para poder evoluir no seu pensamento

[9] La **semiótica** se define como la ciencia general de los signos. Un signo (del griego semeîon) es todo lo que se refiere a otra cosa (referente) es la materia prima del pensamiento y por lo tanto de la comunicación. (Wikipedia-La enciclopedia libre: http://es.wikipedia.org/wiki/Semiótica) 16_11_2006

matemático, uma vez que, em Matemática, fazemos uso de símbolos, letras, figuras, gráficos, tabelas e cada um destes entes é composto de signos que se relacionam e se compõem segundo regras próprias. Na grande maioria das vezes, por conta da comunicação, estas regras já foram pré-estabelecidas por uma comunidade.

A escolha de um sistema semiótico deve ser feita de modo que permita a realização de três atividades cognitivas próprias de um sistema de representação: *um ou mais traços* que se identifiquem com alguma coisa do sistema escolhido para representar o que queremos; um conjunto de regras que permitam *compor* estes traços para obter uma representação e *transformá-la* para trazer um aporte de conhecimento; um conjunto de regras que permitam *converter* as representações de um sistema para outro, a fim de destacar outras características do que foi inicialmente representado.

Por exemplo, no caso das inequações com uma incógnita real, se optarmos pelo sistema algébrico de representação: (1) os *traços* vão ser os sinais de operação e de relação (=, >, <), os "números" reais e as letras do alfabeto; (2) as regras que permitem *compor* são as da escrita algébrica, pelas quais ab, $\frac{a}{b}$, a+b e a^b, por exemplo, representam respectivamente a multiplicação de a por b, a divisão de a por b, a adição de a com b e a elevado ao expoente b; as regras que permitem *transformar* as inequações são, sucintamente: (i) *o princípio aditivo das inequações*: $\forall a, b, c \in IR, (a < b \Leftrightarrow a + c < b + c)$ e (ii) *o princípio multiplicativo das inequações*: $\forall a, b \in IR:$ (i) se $c \in IR_+^*$ e $a < b$, então $ac < bc$; (ii) se $c \in IR_-^*$ e $a < b$, então $ac > bc$; (3) as regras que possibilitam *converter* este sistema noutro dependem do outro sistema escolhido; se for o sistema gráfico, por exemplo, cada lado da inequação passa a ser reconhecido como uma função, a incógnita muda seu status para variável; a incógnita/variável é representada sobre uma reta horizontal; cada lado da inequação, agora uma função, é o valor da imagem respectiva (variável dependente), portanto representado sobre o eixo vertical; a inequação representa uma comparação entre as imagens, portanto deve ser olhada na vertical; e, finalmente, as soluções da inequação são os valores da variável independente que geram as imagens que estão sendo comparadas pela "lei" da inequação.

Duval argumenta que, para o pensamento matemático, cada sistema semiótico contribui com formas específicas de representação e tratamento e que, por esta razão, passa a chamá-los de registros de representação; e ainda vai mais longe ao afirmar que, para aprender Matemática, um sujeito precisa saber discriminar e coordenar pelo menos dois sistemas semióticos de representação, de tal modo que esteja apto a realizar dois tipos de transformação de uma representação: o tratamento e a conversão.

O *tratamento* é uma transformação intrínseca, que ocorre dentro do mesmo sistema de representação, como por exemplo (1) parafrasear, (2) reformular, (3) reconfigurar, (4) ampliar, (5) reduzir, (6) transladar, (7) somar a mesma quantia aos ou multiplicar os dois lados de uma inequação. Ele pode ser algoritmizável ou não. Ele é não algoritmizável, quando o tratamento não depende só das propriedades do objeto representado, mas também das possibilidades de uso do registro (como o (1), o (2) e o (3)). É o caso dos *registros multifuncionais*, isto é, usados em todos os campos da cultura, como a língua materna e as figuras geométricas. Em contraposição, existem os *registros monofuncionais*, que são aqueles que foram desenvolvidos para um determinado tipo de tratamento e que, neste caso, são principalmente algoritmos (como o (6) e o (7)). É o caso dos sistemas numéricos, das notações simbólicas ou algébricas, das linguagens formais e dos gráficos cartesianos.

Por causa da ambigüidade cognitiva em alguns tipos de tratamento de registros monofuncionais (por exemplo, no conjunto dos números racionais, passar da notação decimal para a fracionária), Duval defende que, para entender Matemática, precisamos saber coordenar pelo menos dois registros, um deles monofuncional e o outro multifuncional e que é preciso analisar, pesquisar e considerar as formas específicas de trabalho com os registros multifuncionais, para que se possa entender os mecanismos complexos da aprendizagem em Matemática.

Para as inequações, acreditamos que é a língua natural que vai auxiliar o sujeito, tanto no tratamento da linguagem algébrica quanto no do gráfico.

A *conversão* é uma transformação extrínseca, de um sistema de representação para outro, de um registro para outro, como por exemplo construir um gráfico a partir de uma equação ou de uma inequação, fazer um desenho a partir de um enunciado verbal, transformar um enunciado verbal em uma equação, mudar um número da representação decimal para a fracionária. Às vezes, a conversão é óbvia e imediata e podemos dizer que ela é *congruente*: de uma unidade de um registro para uma unidade do outro registro, como por exemplo "$x>0$" e "a abscissa estritamente positiva", ressaltando as mesmas características do que foi representado. Em outros casos, a conversão é *não congruente*, isto é, cada registro explicita propriedades distintas do objeto e fornece possibilidades distintas de tratamento, como por exemplo "$x=0$ e $y=0$" e "$x^2+y^2=0$": no primeiro, os valores de x e y aparecem independentes e explícitos, a leitura dos valores é imediata; no segundo, os valores aparecem implicitamente, como soluções de uma equação não trivial, cuja resolução depende de uma argumentação do tipo condicional. A maioria dos sujeitos não reconhece o mesmo objeto nos dois registros, o que pode causar erro ou mesmo bloqueio mental. O que significa que a *complexidade cognitiva irredutível* da conversão, no sentido de que não pode ser evitada pois ela existe, precisa ser analisada, entendida e enfrentada.

Com as inequações com uma incógnita real, temos alguns exemplos de conversão não congruente: a expressão "$\frac{5}{x} > \frac{5}{2}$", ao ser convertida para o sistema funcional gráfico gera um registro do tipo "as imagens no gráfico da função definida por $h(x) = \frac{5}{x}$ que têm valores maiores do que $\frac{5}{2}$", ou seja, o gráfico da função definida por $h(x) = \frac{5}{x}$ precisa ser globalmente entendido para que possamos escolher <u>os pontos do gráfico que ficam acima da reta definida por</u> $y = \frac{5}{2}$ e depois projetá-los sobre o eixo horizontal, porque são as abscissas destes pontos que darão as soluções da inequação. Na figura que segue, esta projeção, que está em azul no sistema cartesiano, determina o conjunto de pontos, sobre o eixo Ox, com abscissa no intervalo]0, 2[.

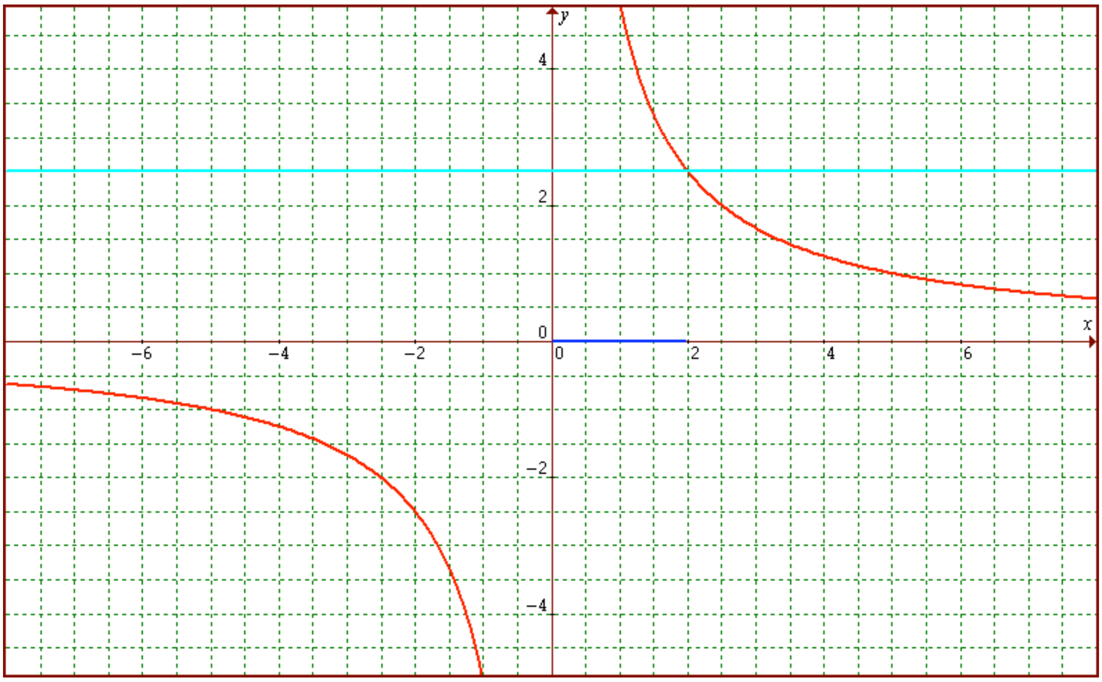


FIGURA 4: SOLUÇÃO GRÁFICA DA INEQUAÇÃO $\frac{5}{x} > \frac{5}{2}$.

As dificuldades decorrentes do trabalho com representações não congruentes são inúmeras e ainda dependem do sentido da conversão, uma vez que podemos ter uma conversão congruente num certo sentido e não congruente no sentido inverso, como já vimos nos exemplos apresentados. Esta é mais uma razão para a causa de fracasso entre os alunos, mesmo que tenha sido efetuado um trabalho com diferentes registros de representação. No entanto, segundo Duval (e concordamos com ele), seria errado pensarmos que as conversões não congruentes podem ser tiradas do cenário, pois a coordenação de diferentes registros de representação é uma condição necessária para a compreensão.

Assim, podemos afirmar que a aprendizagem da Matemática não consiste só da construção de conceitos, mas principalmente da incorporação, na arquitetura cognitiva[10] do sujeito, de uma organização complexa que inclua todos os registros necessários, estruturados e apreendidos como sistemas de representação, com seus respectivos tratamentos e conversões.

---

[10] A *arquitetura cognitiva* de um sujeito epistêmico é formada pela organização de sistemas variados e hetrogêneos que atuam no trabalho automático (inconsciente) desse sujeito e que são responsáveis pelo entendimento consciente (Duval, 2000, p. 1-66).

Com relação à forma como essa incorporação se dá, já em 1995, na introdução de seu livro "Sémiosis et pensée humaine – registres sémiotiques et apprentissages intellectuels", Duval escrevia

> "A coordenação entre representações relevantes de sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua absorção não resulta automaticamente da aprendizagem clássica diretamente centrada sobre os conteúdos de ensino. Um trabalho de aprendizagem específico centrado na diversidade dos sistemas de representação, na utilização de suas possibilidades próprias, nas suas comparações pela correspondência e nas suas "traduções" mútuas de uma para outra parece necessário para favorecer essa aprendizagem. Ora, quando esse tipo de trabalho é proposto, constata-se uma mudança completa nas iniciativas e nas atividades dos alunos para efetuar tratamentos matemáticos, para controlá-los, para a rapidez de execução e também para o interesse na tarefa. Não há simplesmente sucesso mas mudança na qualidade das produções. Este salto qualitativo no desenvolvimento das "competências" e das "habilidades" dos alunos aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos.
>
> Esta coordenação não é necessária só para a Matemática, ela o é para o domínio da língua natural, pelo menos para a parte que se manifesta não através do respeito às regras da gramática mas pela capacidade de escrever textos coerentes, organizados, argumentados, pela capacidade de compreender os textos lidos ou de extrair informação pertinente para uma questão."[11] (Duval, 1995, p. 6, tradução nossa).

É preciso então, para atingir o cerne dos problemas de aprendizagem em Matemática, que o professor se conscientize de que é necessário trabalhar, em sala de aula, não só os tratamentos, mas também e principalmente, as conversões, tanto do tipo congruente como do não congruente. São elas que irão fornecer uma ferramenta poderosa para a análise do que é relevante no conteúdo de uma representação, principalmente se um dos registros for do tipo multifuncional, que não é algoritmizável, como é o caso das figuras geométricas e da língua natural.

No caso das inequações, optamos por três sistemas de representação semiótica: o *algébrico*, porque é monofuncional, o mais usual e, na nossa opinião, o mais eficiente; o *gráfico*, que também é monofuncional, porque é um registro "visual", que traz imagens que o algébrico não evidencia (como por exemplo o

---

[11] "La coordination entre des répresentations relevant de systèmes sémiotiques différents n'a rien de spontané. Sa mise en place ne résulte pas automatiquement des apprentissages classiques trop directement centrés sur des contenus d'enseigment. Un travail d'apprentissage spécifique centré sur la diversité des systèmes de répresentation, sur l'utilisation de leurs possibilités propres, sur leur comparaison par mise en correspondance et sur leurs «traductions» mutuelles l'un dans l'autre semble nécessaire pour la favoriser. Or, lorsqu'un tel type de travail est proposé, on constate une modification complète dans les initiatives et dans les démarches des élèves pour efffectuer des traitements mathématiques, pour les contrôler, pour la rapidité d'éxécution et aussi pour l'intérêt pris à la tâche. Il n'y a pas simplement réussite mais modification de la qualité des productions. Ce saut qualitatif dans le développement des « compétences » et des « performances » apparaît lié à la coordination des systèmes sémiotiques chez les élèves.
Cette coordination ne se rélève pas nécessaire et uniquement pour les mathématiques, elle l'est pour la maîtrise de la langue naturelle, du moins pour cette part de maîtrise qui se manifeste non pas à travers le respect de toutes les règles de la grammaire mais par la capacité d'écrire des textes cohérents, organisés, argumentés, par la capacité de comprendre les textes lus ou d'en extraire l'information pertinente pour une question. » (Duval, 1995.)

comportamento de uma função e, com isto, as possíveis intersecções de dois gráficos, que representam soluções de uma equação) e a conversão do registro gráfico para o algébrico é não congruente, o que ajuda o sujeito a não confundir o objeto com uma representação; o da *língua natural*, porque é multifuncional, importante para qualquer sujeito em qualquer atividade e também porque acreditamos que, ao fazer uma conversão, as idéias perpassam pela língua natural.

III.2. SOBRE A VISUALIZAÇÃO

Conforme parágrafo I, página 37, Duval (1999) destaca a *representação* e a *visualização* como centrais para a aprendizagem da Matemática. No artigo, ele apresenta um diagrama para a classificação cognitiva das representações de um sujeito, mas consideramos o que aparece em Duval (2000, p.1-66) mais completo.

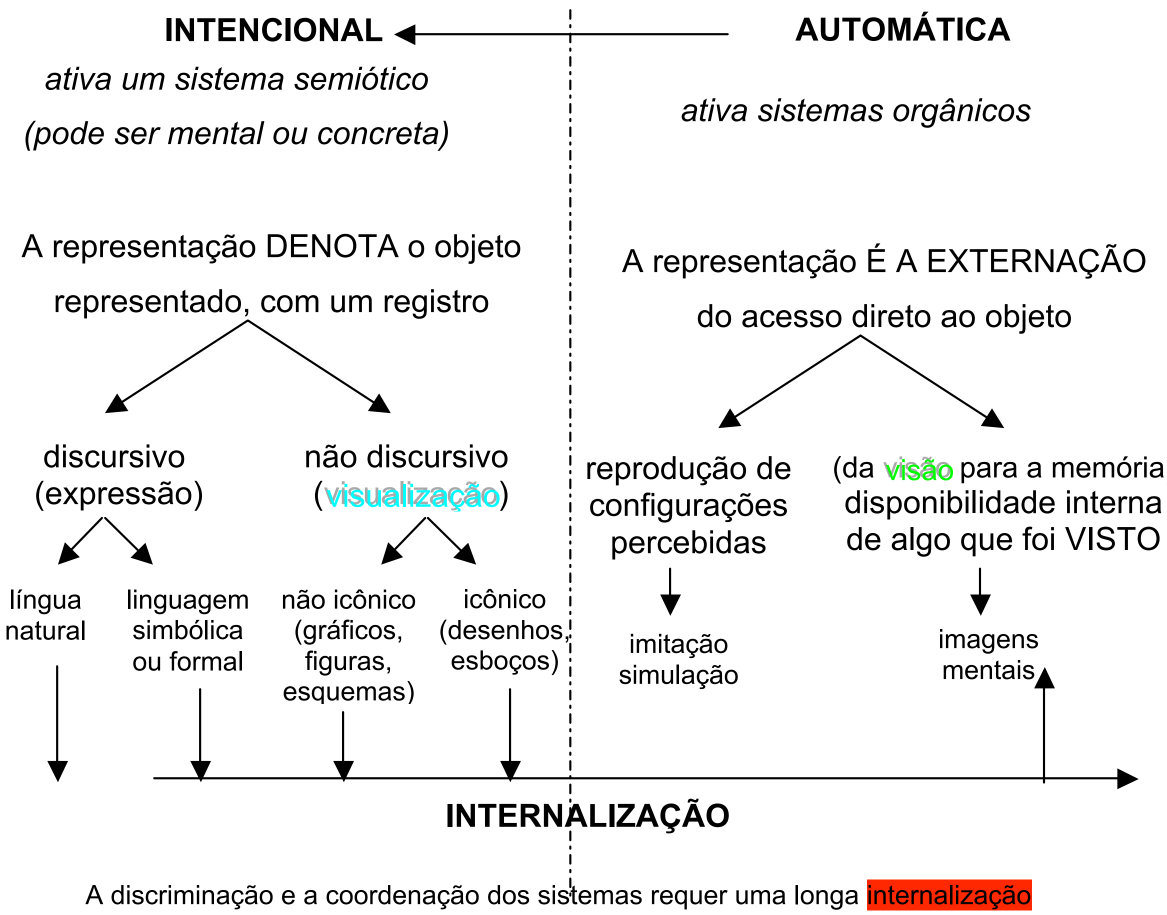


FIGURA 5. CLASSIFICAÇÃO COGNITIVA DAS REPRESENTAÇÕES

A visão, para Duval, diz respeito à percepção visual, que se estende a um repertório de imagens. O indivíduo pode ter acesso direto a um objeto físico, como algo que já foi visto, ou pode ter uma apreensão global de um ou vários objetos simultaneamente. Para a maioria dos estudantes de Matemática ou Física, por exemplo, a visão do símbolo → pode provocar a imagem de um movimento ou de uma força.

Para muitos seres humanos que vivem em alguma civilização, a visão do símbolo pode provocar água na boca porque o indivíduo pensa na “batata frita” ou no “Big Mac”.

Tanto o símbolo de vetor como o de McDonald fazem parte do repertório de imagens desses sujeitos. Para os motoristas, a visão dos semáforos no trânsito pode provocar algum tipo de reação intuitiva, como atenção, aumento de velocidade, freada brusca, desaceleração.

A visualização, para Duval, é completamente diferente, porque é “fabricada”, com base num sistema de representação semiótico. A representação semiótica de um objeto mostra relações entre unidades representacionais deste objeto e não mais como ele o é no mundo tridimensional ou numa projeção bidimensional. As unidades representacionais podem ser: formas uni ou bidimensionais (para compor uma figura geométrica: segmentos, figuras planas), coordenadas (para esboçar um gráfico cartesiano), palavras (para elaborar uma frase na língua natural). Pode-se perceber, então, que só o conhecimento dessas unidades representacionais não dá a um sujeito o entendimento do objeto representado. Ele precisa da visualização, ou seja, ser capaz de enxergar além do que está estaticamente representado.

Por exemplo, diante do desenho de um campo de vetores, um aluno de Matemática ou Física pode ter a visão global de um conjunto de vetores que indicam movimento, mas ele precisa da visualização para desenhar as trajetórias. Ao olhar para o gráfico de uma parábola, não basta que determinemos alguns pares de coordenadas para sermos capazes de deduzir a expressão algébrica correspondente. É preciso observar mais, como por exemplo a posição do vértice, a concavidade, a curvatura, as raízes. Ao decidirmos quais elementos precisamos determinar, estamos praticando uma visualização. Ao fazer um esboço de uma figura geométrica, para resolver um problema proposto na língua natural, o sujeito está praticando uma visualização porque, a partir do texto verbal, ele precisa decidir quais são as unidades representacionais que interessam.

Isto também acontece na resolução de uma inequação que foi proposta algebricamente. Para resolvê-la utilizando uma abordagem funcional, o sujeito precisa fazer escolhas que vêm da prática de visualização. Por exemplo, no caso de $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$, podemos optar por: (1) comparar o gráfico da função definida por $h(x) = \frac{5}{x}$ com o da função definida por $g(x) = \frac{5}{2}$; (2) comparar os valores da função definida por $h(x) = \frac{5}{x}$ com o valor $\frac{5}{2}$; (3) transformar a inequação dada para $\frac{10-10x}{2x} < 0$ e daí estudar o sinal do quociente das expressões algébricas do numerador e do denominador (neste caso, os gráficos podem ficar mascarados pelo estudo do sinal).

Diante de uma figura geométrica, à medida que a decompomos para, por exemplo, demonstrar algum fato, estamos praticando a visualização.

Fica assim, no nosso entender, explicado porque precisamos **aprender** a visualização. Quais são as características que interessam e que não estão necessariamente explícitas? Quais são os tratamentos desejáveis e permitidos para resolvermos o problema? Quais são as conversões necessárias, se desejarmos mudar o registro dado para um outro registro, num outro sistema de representação semiótico? Tudo isto implica numa aprendizagem, pela qual o professor é o responsável, trazendo para a sala de aula práticas que estimulem tanto o uso de vários sistemas de representação como a visualização.

III.3. OS ASPECTOS DE FISCHBEIN

Concordamos com **Fischbein (1993)** quando defende a necessidade de apresentarmos a Matemática, aos nossos alunos, como uma atividade inventada por seres humanos, um processo criativo, que tem momentos de iluminação, de hesitação, de aceitação e de refutação. No nosso entender, podemos dizer que a Matemática precisa ser mostrada, não só como um encadeamento lógico de definições, axiomas, proposições e teoremas, mas principalmente como um processo de tentativas, erros, correções, refinamentos, com espaço para produzir conjecturas, elaborar justificativas, avaliar formalmente e intuitivamente uma afirmação matemática.

Aceitando esta posição como premissa, Fischbein faz uma exposição, apresentando argumentos, exemplos históricos e exemplos de aplicação para expor uma teoria pela qual, ao analisar o comportamento matemático de um estudante, temos que levar em conta três aspectos básicos, que estão presentes em toda atividade matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

III.3.1. SOBRE OS ASPECTOS FORMAIS

Entendemos que o aspecto formal diz respeito a axiomas, definições, teoremas e demonstrações e embora a maioria dos alunos da Educação Básica não vá necessariamente ser matemático, o que quer dizer que vai praticar a Matemática como atividade humana, as componentes formais precisam estar bem entendidas e ativas, para que seja desenvolvido um processo de raciocínio. Elas precisam ser inventadas ou aprendidas, organizadas, confrontadas e ativamente usadas pelo sujeito: entender o significado do rigor (o que não significa decorar demonstrações, mas sim preocupar-se com o rigor); desenvolver o sentimento de coerência e consistência (o que implica numa preocupação com as formas de expressão); caprichar na capacidade de pensar de forma encadeada, na presença ou não de restrições (o que quer dizer que é preciso ter uma idéia do todo). Acreditamos que as componentes formais fazem parte natural das potencialidades de todo ser humano, mas precisam ser lapidadas, por meio de um processo educacional adequado.

Gostaríamos de incluir aqui, de modo especial e com vistas às representações, as notações, porque nos parece que muitos dos problemas dos aprendizes reside na falta de leitura correta das notações científicas, já aceitas pela comunidade. Não acreditamos que elas são essenciais para a aprendizagem inicial dos aspectos formais, pois os alunos poderiam usar, por exemplo, um texto corrido em língua natural; no entanto, parece existir, tanto nos livros didáticos como por parte dos professores, uma cobrança muito grande do uso "correto" e imediato dessas notações, independentemente de uma preocupação com o possível não entendimento delas, por parte dos alunos. Muitos são os exemplos que poderíamos citar, como o de vários alunos que escrevem  e  para decidir que o símbolo < significa "menor" porque 4 é menor do que 7; alunos e professores que aceitam a notação $x < \pm 3$ como resposta de um problema, compelidos pela resolução algebrica errônea; ou ainda alunos que só sabem escrever a equação de uma reta se disserem "Ah, é aquele negócio do ioiomixoxo!" para <u>lembrar</u> da fórmula $y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$.

III.3.2. SOBRE OS ASPECTOS ALGORÍTMICOS

São os que estão ligados às técnicas de resolução e estratégias do tipo padrão.

É ilusório pensar que o conhecimento dos aspectos formais, ligados a qualquer conteúdo matemático, é suficiente para que um sujeito saiba aplicá-los à resolução de um problema. Por outro lado, a recíproca também é verdadeira, pois um sujeito que só conhece os aspectos algorítmicos será, após algum tempo ou até mesmo imediatamente, incapaz de aplicar o algoritmo em uma situação não usual. Precisamos desenvolver tanto as habilidades como o entendimento dos porquês e isto só é possível se aplicarmos intensivamente os algoritmos aprendidos, sempre baseados nos aspectos formais.

Como exemplo, vivenciado por nós, podemos citar o caso de um sujeito que sabe a definição de função, mas não é capaz de resolver, espontaneamente, um problema do tipo "Se $f(u)=u^2+2u$, calcule $f(3u)$" ou identificar uma expressão do tipo $2x^3+5x$ com uma função que a cada x associa $2x^3+5x$. Ou alguém que sabe descrever o princípio da multiplicação de uma inequação, mas não sabe como aplicá-lo no caso da inequação $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$ porque o denominador não é constante no lado esquerdo da inequação.

Quando calcamos o ensino da Matemática só nos procedimentos, corremos o risco de criar indivíduos cujo raciocínio fica travado diante de situações não usuais. E vice-versa, se o trabalho foi todo feito em cima dos aspectos formais, o sujeito pode chegar ao exemplo dado por Kline (1973), em seu livro “Why Jonnhy can´t add: The failure of the new Math”, quando o pai pergunta ao filho quanto é 5+3 e o filho responde que é 3+5, pela propriedade comutativa da adição.[12]

Gostaríamos de citar ainda um exemplo ligado às equações, também vivenciado por nós. Para resolver a $(x - 1)^2 = -1$, vários alunos desenvolvem o binômio e não conseguem ver, de início, que não existe solução em IR. Como o desenvolvimento do binômio foi “decorado” em algum instante bem anterior, muitos erram no desenvolvimento do binômio e chegam a alguma solução. E não voltam à equação original, para ver que esta não pode ser verdadeira.

Dreyfus e Hoch (2004) citam pelo menos três exemplos similares, em que os alunos até sabem o algoritmo, mas não percebem a estrutura da equação (aspecto formal), cuja solução pode ser encontrada só pela leitura da frase original.

Com relação ao entendimento da estrutura de uma inequação, podemos citar ainda Tsamir e Bazzini (2001) que mostram que 46% dos alunos pesquisados não aceitam que x=0 seja solução da inequação $5x^4 \leq 0$, evidenciando uma não inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos. Bastaria uma análise da estrutura da inequação para determinar as soluções.

III.3.3. SOBRE OS ASPECTOS INTUITIVOS

Pode ser caracterizado por uma cognição intuitiva, um entendimento intuitivo ou uma solução intuitiva. Diz respeito à aceitação direta de uma noção, de um teorema ou de uma solução, sem que o sujeito sinta necessidade de qualquer demonstração. No caso das inequações, no nosso entender, quando “multiplicamos em cruz” para deixar a incógnita no numerador, por exemplo, estamos deixando que

[12] “One parent asked his eight-year-old child, ‘How much is 5+3?’ The answer he received was that 5+3=3+5 by the commutative law.” (KLINE, 1973, cap.1). (Acessível em www.marco-learningsystems.com/pages/kline/johnny.html, 23 jul. 2007).

o aspecto intuitivo se sobreponha aos aspectos formais e algorítmicos: é preciso “isolar” a incógnita, para chegar à solução.

Às vezes, as componentes formais, intuitivas e algorítmicas interagem, mas usualmente, no processo de aprendizagem ou no entendimento e na resolução de um problema, interações conflitantes podem aparecer. Por exemplo, um esquema de solução é aplicado inadequadamente, em detrimento de restrições formais; um esquema de resolução é aplicado erroneamente, apesar de um entendimento intuitivo e potencialmente correto (caso do exemplo do nosso aluno, dado ao final deste parágrafo); mas usualmente, segundo Fischbein, é a interpretação intuitiva, baseada numa experiência individual primitiva e limitada porém fortemente enraizada, que anula o controle formal ou os pressupostos da resolução algorítmica e assim distorce ou mesmo bloqueia a reação matemática correta. Como conseqüência, as intuições podem trazer dificuldades para o processo de aprendizagem.

O pesquisador conclui a argumentação, afirmando que as interações e os conflitos entre as componentes formais, algorítmicas e intuitivas de uma atividade matemática são muito complexos e precisam ser identificados e entendidos.

Com nosso questionário diagnóstico de 2005, aplicado aos alunos que foram sujeitos de nossa pesquisa (ver descrição mais detalhada no parágrafo 2.4), pudemos identificar pelo menos três tipos de conflitos entre as componentes intuitivas, formais e algorítmicas: (1) para a inequação $y^2 \leq 25$, mais de 50% dos alunos “extraem a raiz” dos dois lados e chegam a $x < \pm 5$ (procedimento próprio para equações); (2) para a inequação $-3x<6$, alguns alunos “passam o -3 para o outro lado trocando o sinal”, obtendo $x<2$ (aspecto formal ligado à operação de adição); (3) para a inequação $|v| < 3$, a maioria dos alunos “some com o sinal de $| \ |$”, aplicando um algoritmo do tipo $|v|=\pm v$, em conflito com os aspectos formais (no caso, a definição de módulo).

Com a nossa pesquisa, gostaríamos de verificar se o desenvolvimento de nossa seqüência de atividades, usando o registro gráfico como auxiliar, pode ajudar os sujeitos a inter-relacionarem os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos presentes na resolução algébrica de uma inequação com uma incógnita.

III.3.4. ALGUNS EXEMPLOS

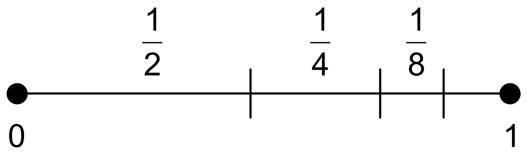
Fischbein (1993) cita alguns exemplos e nós acrescentamos outros. A geometria euclidiana é construída formalmente, mas nasceu de noções comuns e de afirmações intuitivas, como o postulado de unicidade da reta paralela. Já as geometrias não-euclidianas são formais e não intuitivas, o que significa que precisamos fortemente dos aspectos formais da geometria euclidiana para apreender uma geometria não-euclidiana: é fazendo comparações que conseguimos entender o funcionamento numa geometria não-euclidiana, porque algumas *definições* são as mesmas, como a de retas paralelas, a de ângulo e a de retas perpendiculares.

Outro exemplo citado por Fischbein diz respeito à não intuição em relação aos conjuntos infinitos. Vivenciamos uma experiência deste tipo junto a um grande grupo de professores de Matemática: para entender que o conjunto dos números racionais, ou mesmo dos inteiros, tem a mesma potência do conjunto dos números naturais, os aspectos intuitivos só atrapalham e precisamos dos aspectos formais e dos algorítmicos para dar conta desse entendimento.

De nossa experiência didática com alunos do Ensino Superior, pudemos observar que muitos dentre eles têm dificuldade para utilizar, como ferramenta, a relação de ordem nos números inteiros negativos (o formal se opõe ao intuitivo, porque números com *módulo* maior são menores). Aliado a isto, talvez por causa da introdução da multiplicação como “multiplicar é somar parcelas iguais”, feita na escola elementar, o princípio multiplicativo das inequações, enunciado por “(1) se a>0 e b<c, então ab<ac; (2) se a<0 e b<c, então ab>ac”, constitui um problema a mais no estudo das inequações. Em geral, quando um aluno tem dúvida sobre a inversão do sinal de desigualdade, se perguntamos “O que acontece quando multiplicamos –3<-2 por –1?”, este aluno sabe responder que o sinal inverte e temos 3>2. No entanto, esta informação, que podemos classificar como intuitiva, não é transferida para uma inequação do tipo $\frac{u}{-2} < 3$, onde o denominador é uma constante negativa, menos ainda no caso de $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$, na qual o denominador x é a incógnita. Acreditamos que isto ocorre (e estamos nos baseando em questionários plicados a três grupos diferentes, dois de alunos e um de professores, que gostam de Matemática) porque os aspectos intuitivos estão se sobrepondo aos aspectos formais e aos algorítmicos. Vale acrescentar que esta situação fica agravada se estes últimos não foram devidamente trabalhados ou ocorreu algum reforço didático do tipo “a multiplicação sempre aumenta”.

Podemos citar ainda, como exemplo, a introdução dos números complexos. Trata-se de um conjunto formal, não intuitivo, matematicamente coerente, que representa um modelo com aplicações na Engenharia, na Física, na Eletrônica. Se um indivíduo teve um reforço didático muito grande, quando do estudo da resolução de equações do segundo grau, do tipo “se $\nabla<0$, a equação não tem raízes”, este mesmo sujeito poderá enfrentar muitas dificuldades para de repente admitir que “se $\nabla<0$, as raízes são dois números complexos conjugados”. Os aspectos intuitivos, advindos de experiência anterior, podem, de certa forma, ser coercivos e dificultar a interação dos aspectos formais e algorítmicos do modelo atual.

Fischbein ainda cita alguns exemplos da Matemática superior, isto é, da que só é trabalhada no Ensino Superior, como os limites de seqüências ou de séries. Podemos até convencer os alunos, por exemplo, de que 1, ½, 1/3, ¼, ..., 1/n, ... tem 0 como limite, quando n aumenta indefinidamente; mas daí a entender a definição formal de limite vai um grande passo, que os aspectos algorítmicos, sozinhos, podem não ajudar. Exemplo similar é o da série geométrica $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$, mesmo que seja acompanhado de um auxílio geométrico do tipo



que quase certamente trará à cena o aspecto intuitivo, mas não o aspecto formal e nem o algorítmico. Acreditamos mesmo que, se não forem trabalhados outros exemplos desse tipo, como o da série $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots$, os alunos podem não conseguir superar as dificuldades inerentes aos aspectos formais e algorítmicos da idéia de limite de uma seqüência.

Um exemplo, no sentido contrário, ocorre quando o aspecto algorítmico está muito enraizado. Podemos citar o caso de um aluno do primeiro ano do Ensino Superior, que resolveu a inequação $-2x>0$ algebricamente da seguinte forma: $-2x>0$; dividindo por -2 temos $x>0$ (aspecto algorítmico não inter-relacionado ao formal). O aluno dá a resposta $x>0$, mas chama o professor para dizer algo do tipo "Tem alguma coisa errada, porque eu sei que x tem que ser <0 para o produto $-2x$ dar >0", mas acaba deixando, no protocolo, a resposta obtida algebricamente. Neste caso, os aspectos intuitivo e formal foram bloqueados pelo esquema rígido da resolução algorítmica, porque o aluno sabe o significado da frase $-2x>0$, erra no algoritmo e pressente algo errado porque intuitivamente pensa que para $-2x$ ser positivo, o x deveria ser negativo.

Quando os aspectos formais e algorítmicos não estão bem sedimentados e relacionados, podem surgir erros do tipo $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ou $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ou ainda $-2x>0$, então $x>0+2$. Neste último caso, vivenciado por nós, o aluno justifica com algo do tipo "Quando um número passa para o outro lado, ele muda de sinal ...". Estes últimos exemplos mostram, no nosso entender, quão é importante o trabalho do professor com os teoremas e definições (aspecto formal), bem como com os aspectos algorítmicos e os intuitivos.

III.4. SOBRE AS NOSSAS ESCOLHAS

Como já fomos tentando justificar ao longo da descrição do quadro teórico, decidimos escolher três sistemas de representação para guiarem a elaboração da seqüência didática para um trabalho com as inequações com uma incógnita: o *algébrico*, porque é o mais usual e, no nosso entender, o mais eficiente; o *gráfico*, porque teve o uso facilitado pela advinda dos softwares e das calculadoras gráficas, é importante no mundo visual que vivenciamos e propicia o trabalho com conversões, inclusive as não congruentes; o *da língua natural*, porque, no nosso entender, é um catalisador entre os registros variados, perpassando tanto os tratamentos como as conversões de registros semióticos ou mentais.

Para introduzir os sujeitos numa abordagem que poderíamos chamar de *funcional gráfica genérica*, fizemos um trabalho inicial com funções e gráficos, focando-o na importância da visualização destes, isto é, na apreensão de aspectos globais, que são necessários na conversão entre o registro algébrico e o registro gráfico e, daí, na resolução gráfica de inequações.

Com o grupo de professores, trabalhamos em ambiente informático, utilizando o software Cabri-géomètre II Plus. O ambiente não era novidade para o grupo; por esta razão, não acreditamos que tenha exercido influência sobre a aprendizagem. Com relação ao Cabri, também não era a primeira vez que o grupo o utilizava. Nós o escolhemos porque o consideramos um software amigável e, principalmente, porque é dinâmico. Com a movimentação dos pontos, é possível elaborar conjecturas que podem depois ser demonstradas, como por exemplo a simetria de uma parábola. Também acreditamos que esta dinâmica pode ser utilizada para estimular uma atitude menos numérica e mais genérica, isto é, mais na direção da visualização e menos da abordagem ponto a ponto dos gráficos. Além disso, é possível construir macros, o que dá ao instrutor a oportunidade de acrescentar, diminuir ou modificar o menu. No nosso caso, deixamos prontos, à disposição dos usuários, os gráficos das funções que chamamos de referência ($f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = |x|$, $j(x) = x^3$, $k(x) = \frac{1}{x}$, $l(x) = \sqrt{x}$) e facilidades, por meio da edição numérica, para obter as funções associadas do tipo "somar uma constante às", "multiplicar por uma constante as" e "colocar o módulo nas" variáveis, dependente ou independente.

Para avaliar o aproveitamento dos sujeitos da pesquisa, escolhemos seguir as idéias de Fischbein (1993) ao fazer uma verificação da existência ou não, nas respostas nos protocolos, de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, em algumas questões centrais da seqüência. Além disso, tentamos avaliar possíveis interações e inter-relações entre os aspectos, uma vez que acreditamos, como o pesquisador, que a aprendizagem só é efetiva se uma tal interação existir.

IV. A PESQUISA

Como descrevemos no capítulo anterior, elaboramos uma seqüência didática para apresentar, a dois grupos de sujeitos, um de alunos numa formação inicial e o outro de professores numa formação continuada, a resolução funcional gráfica genérica de inequações com uma incógnita. Baseamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na visualização de Duval (1995, 1999, 2000), numa tentativa de promover a interação e a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1993) presentes no assunto citado.

A resolução de inequações com uma incógnita é um assunto para o qual muitos profissionais, de várias áreas, têm que desenvolver habilidades e competências[13], pois vão ter que enfrentar problemas desse tipo no dia-a-dia profissional. Analisando o quadro vislumbrado pelos questionários que aplicamos em 2003, fomos convencidos de que é importante intervir nos processos de ensino e de aprendizagem referentes ao assunto inequações junto a dois grupos, um de alunos e um de professores. Os alunos escolhidos foram os de uma turma da formação inicial em Matemática-Licenciatura, numa tentativa de modificar concepções errôneas adquiridas em algum momento da formação básica e principalmente porque serão futuros professores, razão suficientemente forte para que conheçam bem o assunto, em seus aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (FISCHBEIN, 1993). Os professores de Matemática são da rede pública estadual e já participam, como sujeitos, de um grupo de pesquisa, com oficinas semanais de três horas, onde refletem sobre resultados de pesquisas e discutem abordagens mais modernas e mais eficientes de trabalhar um assunto. No caso da resolução de inequações, esta reflexão envolve a discussão e a conscientização da importância das representações em Matemática, bem como dos tratamentos e conversões de

[13] "De que competências se está falando? Da capacidade de abstração, do desenvolvimento do pensamento sistêmico, ao contrário da compreensão parcial e fragmentada dos fenômenos, da criatividade, da capacidade de pensar múltiplas alternativas para a solução de um problema, ou seja, do desenvolvimento do pensamento divergente, da capacidade de trabalhar em equipe, da disposição para procurar e aceitar críticas, da disposição para o risco, do desenvolvimento do pensamento crítico, do saber comunicar-se, da capacidade de buscar conhecimento." (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, 2000, p. 11, acessado em 24 de julho de 2007 em http://portal.mec.gov.br/seb/index.php?option=content&task=view&id=408&Itemid=394).

registros, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Com os resultados obtidos pela aplicação de uma seqüência didática aos dois grupos citados, esperamos oferecer subsídios que inspirem um trabalho diferenciado, junto a alunos da Educação Básica, gostem eles de Matemática ou não.

Como metodologia de pesquisa, optamos por utilizar alguns passos da Engenharia Didática, inspirados por algumas colocações de Artigue (1995). Segundo a autora, a engenharia didática surgiu, no começo dos anos oitenta, como uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro, porque aceita submeter-se a um controle do tipo científico, ao mesmo tempo que lida com objetos muito mais complexos do que os vindos da ciência e tem que abordar, de forma prática, problemas que a ciência não quer ou não pode enfrentar.

O caminho dessa engenharia, conforme a pesquisadora, foi delineado com duas vias, a de uma produção de estratégias e abordagens para o ensino e a de uma metodologia de investigação. Identificamo-nos com esta segunda, por tê-la interpretado como uma metodologia de pesquisa que não tem um fim em si mesma, isto é, que não se restringe à elaboração de um relatório para divulgar os resultados observados, seja de forma quantitativa, seja de forma qualitativa. Com o desenvolvimento dos passos de nossa engenharia didática, acreditamos ter feito uma intervenção nos grupos pesquisados, os quais, a longo prazo, irão realizar algo semelhante junto a outros grupos, usufruindo assim dos resultados provenientes da seqüência elaborada, testada e avaliada.

Os procedimentos adotados neste trabalho são: análises preliminares; concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de ensino; análise de protocolos.

As análises preliminares abrangem, nesta ordem: uma revisão de literatura; uma análise mais aprofundada de alguns aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2000); uma reflexão sobre as contribuições que cada abordagem, a algébrica e a funcional gráfica, pode trazer ao ensino e à aprendizagem da resolução de inequações; um resumo do perfil dos sujeitos da pesquisa; uma análise de alguns livros didáticos do Ensino

Fundamental; uma análise de alguns livros didáticos do Ensino Médio; e um estudo diagnóstico, realizado junto ao grupo de alunos que participaram de nossa pesquisa.

A concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de ensino foi a fase mais demorada e resultou, de todo o trabalho anterior, numa seqüência didática com cinco atividades.

A análise de protocolos deverá ser feita por meio da análise das respostas dadas a algumas questões escolhidas nas atividades de todos os sujeitos que fizerem a seqüência, à luz da revisão bibliográfica e do quadro teórico.

IV.1. ANÁLISES PRELIMINARES

A revisão de literatura foi apresentada no capítulo II, onde tentamos destacar os resultados de pesquisas que, de alguma forma, influenciaram a nossa e como esta influência se concretizou. Assim, neste parágrafo vamos descrever os demais tópicos que fizeram parte de nossas análises preliminares: sobre a teoria de Duval (agora focada sobre as responsabilidades do professor, em sua sala de aula); abordagem algébrica versus abordagem funcional gráfica (porque acreditamos que a abordagem funcional gráfica pode ajudar a desvendar o formalismo algébrico); perfil dos sujeitos da pesquisa (um grupo de alunos de primeiro ano, que serão futuros professores de Matemática e um de professores atuantes na rede publica); análise de livros didáticos do Ensino Fundamental; análise de livros didáticos do Ensino Médio; teste diagnóstico (realizado apenas com os alunos, para localizarmos o quanto sabiam, ou não, da resolução de inequações).

IV.1.1. SOBRE A TEORIA DE DUVAL

No capítulo III, quadro teórico, relatamos os principais aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2000) que chamaram nossa atenção para um trabalho com a abordagem funcional gráfica genérica da resolução de inequações. Neste parágrafo, vamos discorrer um pouco mais sobre alguns aspectos dessa teoria, para justificar a necessidade que vemos de ser o professor o responsável pelo trabalho, em sala de aula, com vários sistemas de representação semióticos, pelo menos um deles multifuncional, com seus tratamentos e conversões.

Sémiosis é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e *noésis*, a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Duval argumenta, citando Vygotski (1985, apud DUVAL, 1995, p. 4), Piaget (1968, apud DUVAL, 1995, p. 4) e Denis (1989, apud DUVAL, 1995, p. 4), que as representações mentais não podem ser consideradas independentemente das representações semióticas e que é lícito afirmar que não há *noésis* sem *sémiosis*. Ainda mais, que a *sémiosis* possibilita o exercício da *noésis*, uma vez que as representações semióticas são necessárias para algumas funções cognitivas fundamentais.

Essas funções cognitivas são: a comunicação, a transcrição das representações mentais e o tratamento das idéias mentais representadas, que exige a passagem da forma do representante para o conteúdo representado. Isto significa, trocando em miúdos, que não há *noésis* sem *sémiosis*. No caso da aprendizagem em Matemática, pesquisas realizadas mostram que, para a maioria dos alunos, a conversão entre sistemas de representação é uma operação difícil e até mesmo impossível, se não for trabalhada pelo professor. Referindo-se à aprendizagem em Geometria e baseando-se em pesquisas realizadas por ele e vários colegas, Schoenfeld (1986) afirma

> “Para que os alunos vejam como os vários aspectos da geometria se encaixam e para que tenham potencial para usar o conhecimento adquirido, é necessário que haja um contexto de resolução de problemas no qual empirismo e dedução coexistam e reforcem um ao outro ... e no qual os alunos são encorajados a ver (e refletir sobre) as conexões relevantes.”[14] (SCHOENFELD, 1986, p.262, tradução nossa).

Se partirmos da relação conhecimento ↔ representação, as funções cognitivas citadas são atingidas por meio de três atividades cognitivas: constituir um traço ou um conjunto de traços que possam ser identificados como uma representação de alguma coisa; transformar esta representação, por meio de regras próprias, em uma outra representação do mesmo sistema; converter as

[14] For students to see how the various aspects of geometry fit together, and for them to have the potential to use their knowledge, it is likely necessary that there be a problem-solving context in which empiricism and deduction coexist and reinforce each other ... and are encouraged to see (and reflect upon) the relevant connections. (SCHOENFELD, 1986, p.262).

representações produzidas para um outro sistema de representação, de forma a explicitar outras características do conteúdo inicialmente representado.

Nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades cognitivas, como por exemplo o código Morse. A língua natural, as linguagens simbólicas, os gráficos e as figuras geométricas as permitem e Duval os chama de registros de representação semiótica.

> "Estes registros constituem os graus de liberdade dos quais um sujeito pode dispor para esclarecer para si mesmo uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-la a um interlocutor. A questão da relação entre *sémiosis* e *noésis* diz respeito apenas aos sistemas que permitem estas três atividades de representação e não a todos os sistemas semióticos." (DUVAL, 1995, p. 21, tradução nossa.)[15]

Para analisar a aquisição do conhecimento e as dificuldades encontradas nas aprendizagens fundamentais envolvendo a Matemática, aparecem três fenômenos muito ligados: a diversidade de registros de representação semiótica (a língua natural, a linguagem simbólica, os gráficos, as tabelas, as figuras geométricas); a diferenciação entre representante e representado (cada registro vai ressaltar características diferentes do objeto representado); a coordenação entre os diferentes registros (o mero conhecimento das regras de correspondência não é suficiente, principalmente quando não há congruência entre os registros. A língua natural, por ser um sistema de representação multifuncional e ainda "universal" para o conjunto de sujeitos que fala aquela língua, acaba permeando os tratamentos e, principalmente, as conversões).

A partir da análise destes três fenômenos, pode-se ainda afirmar que, para uma representação funcionar para um determinado sujeito, este tem que dispor de pelo menos dois sistemas de representação semiótica diferentes e ser capaz de fazer a conversão de um sistema para o outro. Isto implica ainda que as operações de tratamento (dentro de um sistema semiótico) e de conversão (de um sistema para outro) precisam ser dominadas e coordenadas pelo sujeito que faz uso da representação.

[15] "Ces registres constituent les degrés de liberté dont un sujet peut disposer pour s'objectiver à lui-même une idée encore confuse, un sentiment latent, pour exploiter des informations ou simplement pour pouvoir les communiquer à un interlocuteur. La question du rapport entre *sémiosis* et *noésis* concerne seulement les systèmes qui permettent ces trois activités de répresentation et non pas tous les systèmes sémiotiques." (DUVAL, 1995, p. 21.)

Esta coordenação não tem se mostrado espontânea, isto é, ela não aparece simplesmente de uma aprendizagem conceitual, mas exige uma aprendizagem específica da *sémiosis*. No caso das inequações, acreditamos que a escolha recai sobre o uso do registro gráfico como alternativo ao algébrico, com a língua natural servindo como pano de fundo principalmente para as conversões, que em geral são não congruentes.

A organização das situações de aprendizagem, então, deve favorecer esse domínio e essa coordenação e para tal é necessário que se tenha bem clara uma classificação dos diferentes tipos e funções de uma representação.

Na tabela abaixo estão destacados os tipos e as funções das representações (DUVAL, 1995, p. 27).

TABELA 2. TIPOS E FUNÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES

	INTERNA	**EXTERNA**
CONSCIENTE	**MENTAL** Função de objetivação	**SEMIÓTICA** Função de objetivação Função de expressão Função de tratamento intencional
NÃO CONSCIENTE	**COMPUTACIONAL** Função de tratamento automático ou quasi-instantâneo	

As representações externas são as que são visíveis e observáveis, essencialmente semióticas. As internas, aquelas que pertencem ao sujeito e que não são comunicadas por meio de uma representação externa. A dualidade entre as representações conscientes e as não conscientes reside na intenção ou não do sujeito de representar alguma coisa. Uma representação mental (ou representação interna consciente) tem função de objetivação, ou seja, o sujeito descobre alguma coisa que não suspeitava que fosse verdade até então e a representa mentalmente. Uma representação computacional (ou representação interna não consciente) tem função de tratamento automático ou quasi-instantâneo, isto é, o sujeito não tem consciência do que é representado (por exemplo, a percepção que um aluno da 2º ano tem de uma frase escrita: ele é capaz de ler as palavras pela simples computação das sílabas, B com A dá BA e assim por diante, mas não tem consciência do significado; ou ele pode saber reconhecer os numerais sem ter consciência dos números). Finalmente, uma representação semiótica (ou representação externa consciente) tem três funções importantes: a de objetivação, para reconhecer coisas até então sem significado; a de expressão, essencialmente para a comunicação de algum fato; e a de tratamento intencional, para trabalhar com algo que foi representado semioticamente.

Analisando as diferentes funções, bem como os diferentes tipos de representação, ousamos observar que nenhum deles tem menos importância do que o outro, porque todos estão presentes quando pensamos, trabalhamos e comunicamos em Matemática. As representações semióticas são conscientes e inseparáveis da existência do objeto, o que as torna de uma natureza bem diferente da das representações computacionais. Esta diferença de natureza se expressa pela complementaridade dos dois tipos de tratamento, o quasi-instantâneo e o intencional: os tratamentos quasi-instantâneos são os que produzem as informações e os significados da consciência imediata do sujeito; os intencionais, dependem de um controle consciente e de uma visão prévia do objeto.

Para um progresso qualitativo na aprendizagem, o sujeito precisa adquirir novos tratamentos quasi-instantâneos e esta aquisição depende de uma fase de tratamentos intencionais, efetuados sobre representações semióticas.

Se o professor trabalhar <u>intencionalmente</u> e <u>formalmente</u>, em sala de aula, o registro gráfico das funções, este pode tornar-se um tratamento quasi-instantâneo para os alunos e passar a ser uma representação semiótica, com função de tratamento intencional, por exemplo no caso da resolução de inequações com uma incógnita, numa abordagem funcional.

Como já ressaltamos, as atividades cognitivas fundamentais de representação ligadas à *sémiosis* são três: a **formação** da representação num sistema semiótico particular; o **tratamento**, quando é produzida uma outra representação dentro do mesmo registro; a **conversão**, quando é produzida uma outra representação dentro de um outro registro.

Cada uma destas três atividades tem regras de funcionamento, que dependem dos sistemas semióticos escolhidos e que são independentes das restrições que uma situação particular de comunicação possa impor.

Assim, é importante que a **formação** de representações semióticas respeite as regras próprias ao sistema utilizado, por razões de comunicação e também para tornar possível o uso das formas de tratamento próprias do sistema, uma vez que, em geral, o sistema escolhido já existe na comunidade. O sujeito precisa aceitar e utilizar corretamente essas regras e, no caso dos alunos, o professor é um catalisador dessa aceitação e dessa utilização, por meio de seu trabalho em sala de aula.

Não respeitar as regras já existentes pode ser muito complicado e corre-se o risco de não haver entendimento, porque aqueles que forem ler e interpretar a representação só podem faze-lo se souberem quais são as regras. Por exemplo, muitos sujeitos, ao calcular f(2), no caso em que $f(x)=3x^2+1$, fazem $f(2) = 3.2^2 = 12 + 1 = 13$, o que é uma mentira matemática que pode trazer muitas idéias erradas para os que lêem. Neste caso, não foi respeitada a regra imposta pelo sinal de =, que representa uma igualdade. Por outro lado, às vezes parece que uma certa <u>regra</u> é mais importante do que o objeto representado: muitos sujeitos só aceitam como verdadeira a resolução algébrica de uma inequação do tipo $-2x<0$, mesmo que cheguem à resposta $x<0$, o que contradiz o intuitivo (tratamento quasi-instantâneo) que os faria interpretar a frase e dizer que “$x>0$ para que o produto de -2 por x seja <0”. Neste caso, podemos dizer que os sujeitos confundiram o registro com o objeto representado.

A formação de representações semióticas, então, decorre de uma seleção de caracteres de um certo conteúdo percebido, imaginado ou já representado. Por exemplo, no caso da inequação $-2x<0$, o que é importante é perceber que se trata de uma multiplicação de dois fatores, cujo produto tem sinal negativo.

O tratamento de uma representação semiótica é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema.

O *cálculo* é um tratamento interno de um registro de escrita simbólica. A *paráfrase* é um tratamento de um registro do discurso na língua natural: parafrasear consiste em transcrever, com novas palavras, as idéias centrais de um texto. A *anamorfose* também pode ser considerada como um tratamento das figuras, embora não haja preservação da situação representada: uma anamorfose é uma figura aparentemente disforme que, por reflexão num determinado sistema ótico, como por exemplo um espelho cilíndrico, cônico ou piramidal, produz uma imagem regular do objeto que representa.

Com relação ao tratamento, é preciso distinguir entre *registros monofuncionais* e *registros multifuncionais*. Os *registros monofuncionais* são aqueles que foram desenvolvidos para um tipo de tratamento que é, quase sempre, algoritmizável. É o caso das linguagens de programação, dos sistemas de numeração, dos gráficos cartesianos. Os *registros multifuncionais* são aqueles que são usados em todos os campos de cultura e que, por isso, têm tratamento não algoritmizável. É o caso da língua natural, das figuras geométricas, das argumentações. Além disso, podemos ainda considerar as representações discursivas e as não discursivas. As discursivas são as que podem ser vistas como "textos", isto é, como um encadeamento de palavras, ou símbolos ou notações. A tabela abaixo dá uma idéia desta classificação (DUVAL, 2000, p.1-65).

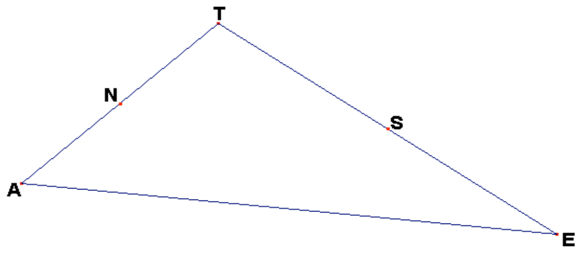
TABELA 3. CLASSIFICAÇÃO DOS REGISTROS, CONFORME O TRATAMENTO

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: o tratamento é não algoritmizável	Língua natural Associações verbais Argumentações Deduções Demonstrações	Figuras geométricas que configuram formas Apreensão operativa e não só perceptiva Construções com régua e compasso
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são primordialmente algoritmos	Sistemas de numeração Notações algébricas ou simbólicas Linguagens formais Cálculos	Gráficos cartesianos Mudança do sistema de coordenadas Interpolação Extrapolação

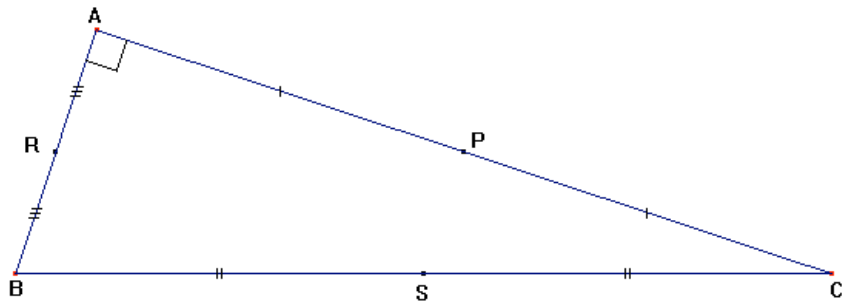
A representação é discursiva quando é um encadeamento lógico de símbolos, palavras ou gestos, por exemplo na linguagem algébrica, nos textos da língua natural, na comunicação dos surdos-mudos, nos sistemas de numeração. No caso das figuras geométricas, não existe esse encadeamento, é uma única figura representando o que se quer representar.

A conversão é uma transformação da representação em um registro para um outro registro, de um mesmo objeto, de uma mesma situação ou de uma mesma informação. Equacionar um problema enunciado na língua natural exige que se faça uma seleção do conteúdo, bem como uma reorganização. Por exemplo, para resolver "Os lados de um triângulo retângulo estão em PG. Determine os lados do triângulo", o sujeito pode chamar os lados de a, aq e aq^2, com $q>0$, para poder aplicar o Teorema de Pitágoras, mas tem que escolher o maior deles para ser a hipotenusa; daí, dependendo se $q>1$ ou se $q<1$, a hipotenusa pode ser aq^2 ou a, respectivamente, dando duas soluções diferentes. Este exemplo mostra porque dizemos que a conversão é uma transformação externa, em relação ao registro de representação inicial.

Para que um indivíduo consiga fazer uma conversão, ele precisa perceber a diferença entre a representação e o que é representado. Será que uma aprendizagem baseada na aquisição de atividades de conversão é igual a uma baseada na de tratamento? Para perceber que não, basta considerar a passagem da escrita algébrica simbólica para o gráfico cartesiano correspondente: a regra que associa um ponto do plano cartesiano a uma dupla de números permite a construção pontual do gráfico de relações dadas por uma tabela de valores ou por uma expressão do tipo $y = x$, mas a passagem inversa exige muito mais do que simplesmente reconhecer os pontos que estão sobre um gráfico. É necessária uma interpretação global, que envolve o reconhecimento de variáveis visuais pertinentes, como por exemplo os coeficientes angular e linear no caso de retas e sua correspondência na escrita algébrica. Isto quer dizer que as regras podem ser diferentes, dependendo do sentido da conversão. Nossa experiência em sala de aula reforça o que diz Duval (1999, p.7), de que a construção de um gráfico ponto a ponto, a partir de uma tabela ou de uma expressão algébrica, não é difícil para a maioria dos alunos. Outro exemplo é o da conversão entre o discurso na língua natural e as figuras em Geometria. Em geral, os dois registros se complementam, como por exemplo se comparamos "Um segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao outro lado e mede a metade deste" com uma conversão para uma figura. O sujeito precisa escolher os lados e os nomes dos vértices e perceber que, feita a demonstração para uma escolha, o resultado vale para qualquer outra dupla de lados.



Ao contrário, se damos uma figura como



podemos apreender e explicitar vários fatos: (1) pelo "Teorema dos pontos médios" podemos dizer que RP=BS=SC=BC/2, PS=AR=RB=AB/2, RS=AP=PC=AC/2, RP||BC, PS||AB, RS||AC, PS⊥AC, RS⊥AB; (2) os segmentos AS, CR e BP são as medianas do triângulo ABC; portanto, se interceptam no baricentro (ou centro de massa) do triângulo ABC; (3) ainda como conseqüência do "Teorema dos pontos médios", teremos RPSB, RPCS, PSRA são paralelogramos, sendo que APSR é um retângulo; (4) os paralelogramos RPSB, RPCS, PSRA têm a mesma área e esta área é 1/2 da área do triângulo ABC; (5) os triângulos ARP, PSC e RBS são todos congruentes (portanto triângulos retângulos), porque são homotéticos ao triângulo ABC com razão 0,5; (6) os triângulos ARP, PSC e RBS têm área igual a ¼ da área do triângulo ABC, porque a razão de homotetia é 0,5; (7) os triângulos ABS, ASC, CAR, CRB, BAP e BPC têm área igual à metade da área do triângulo ABC; (8) os triângulos ASC e ASB são isósceles pois AS=BS=SC.

A formação, o tratamento e a conversão são três atividades bem distintas ligadas à *sémiosis* e esta distinção é essencial para a análise cognitiva de atividades de ensino, bem como das condições de uma aprendizagem conceitual. Em geral, o ensino tem privilegiado a aprendizagem das regras de formação e de tratamento das representações semióticas, no caso dos registros numéricos, do discurso na língua natural e da escrita simbólica, em detrimento das conversões.

Uma das razões que podem ser apontadas é o da economia de tempo e a crença de que as conversões “aparecem” de maneira natural, sem que precisem ser trabalhadas.

No entanto, observando os sujeitos, mesmo aqueles que gostam de Matemática, pode-se perceber que as conversões não são espontâneas e mesmo difíceis de trabalhar, para a maioria deles. Pudemos observar isto tanto nos protocolos dos alunos no teste diagnóstico que aplicamos como nos dos professores, no trabalho anterior com funções.

Em particular, é possível perceber que a maioria dos alunos não está apta a utilizar nem mesmo os registros tão necessários para o raciocínio, o trabalho e a comunicação em Matemática. Na verdade, quando solicitados a resolver uma inequação algébrica, com uma incógnita real, ou não são capazes, ou aplicam regras indiscriminadamente, mostrando uma quase total incompreensão até mesmo da leitura e do tratamento do registro algébrico, que aparentemente foi o único visto na Educação Básica. Estes resultados nos induzem a dizer que o estudo estritamente algébrico das inequações não está dando conta da aprendizagem porque, aparentemente, os alunos só trabalham com os aspectos algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução algébrica de uma inequação e, além disso, não recorrem a nenhuma outra forma de representar o problema.

Parece-nos imprescindível que o professor de Matemática ajude seus alunos a superarem possíveis dificuldades que o registro algébrico acarreta, ou permitindo e estimulando o uso de um texto em língua natural, ou oferecendo outras formas de representar o problema, como por exemplo é o caso dos gráficos, ou ambos. Em qualquer um dos casos, o trabalho do professor é induzir o uso de vários registros, estimular as necessárias transformações, dentro de cada um deles ou de um para outro e sempre de forma a contemplar os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do conteúdo.

Concordamos com Duval (1999) quando ele aponta que o professor é o responsável por induzir o trabalho com diferentes sistemas de representação[16],

[16] No caso da Matemática, a escolha de um sistema semiótico deve ser feita de modo que este permita a realização de três atividades cognitivas próprias de um sistema de representação: um ou mais traços que se identifiquem com alguma coisa do sistema determinado; um conjunto de regras que permitam transformar a representação inicial para trazer um aporte de conhecimento; um

porque só assim estaremos garantindo que alunos diferentes, com experiências anteriores diversas, encontrem uma forma própria de trabalhar com a Matemática e não corram o risco de confundir a representação, ou até mesmo um registro, com o objeto representado.

Com relação à quantidade de sistemas de representação, a teoria indica pelo menos dois e somos partidários de que, em Matemática, podemos pensar em três, sendo um deles o da língua natural, porque acreditamos que a leitura e a interpretação de um texto, sejam eles mentais ou semióticos, é imprescindível nas conversões. Por exemplo, para fazer a passagem do registro gráfico para o algébrico, no caso das funções, o raciocínio passa pela língua natural, porque cada um dos registros em jogo destaca propriedades diferentes que precisam ser apreendidas e explicitadas.

Quando Sackur (2004) coloca o esquema de trabalho que o sujeito precisa realizar para resolver graficamente uma inequação (inequação algébrica → criação de duas funções → identificação do y → elaboração do gráfico → comparação dos valores de y → leitura dos valores de x), percebemos que é preciso entender o que está sendo pedido (leitura e interpretação) para podermos iniciar a busca de uma solução para um problema. Neste caso, a língua materna pode subsidiar o uso dos registros algébrico e gráfico no estudo da resolução de inequações, quer seja na abordagem algébrica, quer seja na gráfica.

A pesquisadora coloca como questão, em relação aos alunos, "o que eles aprendem em Matemática quando resolvem algebricamente ou graficamente?"[17] (SACKUR, 2004, p.151, tradução nossa) e ainda expressa a importância de pensarmos nas semelhanças entre resolver uma equação e resolver uma inequação.

Por causa destas colocações, preocupamo-nos em tentar discorrer um pouco sobre a razão de acreditarmos que uma abordagem gráfica pode ajudar no ensino e na aprendizagem da resolução algébrica de inequações.

---

conjunto de regras que permitam converter as representações produzidas para as representações em um outro sistema, a fim de destacar outras características do que foi inicialmente representado.

[17] "what do they learn in mathematics when they solve algebraically or graphically?" (SACKUR, 2004, p.151).

IV.1.2. ABORDAGEM ALGÉBRICA VERSUS ABORDAGEM FUNCIONAL GRÁFICA

A abordagem algébrica deveria ser feita de forma a inter-relacionar dois aspectos: (1) o formal, por meio do entendimento da estrutura que a expressão algébrica deixa entrever (aspecto formal, ligado à conversão entre o registro algébrico e o da língua natural); e (2) o algorítmico, que permite o tratamento do registro algébrico e que se baseia, essencialmente, em duas propriedades, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo das desigualdades entre números reais. Esta preocupação também foi sugerida por Dreyfus e Hoch (2004, p.155), com relação às equações.

No entanto, de nossa análise de livros didáticos, de nossas conversas com professores em exercício e dos resultados que obtivemos em três questionários do tipo diagnóstico, pudemos perceber o ensino da resolução de inequações, na nossa tradição escolar, tem sido calcado principalmente nos aspectos algorítmicos de uma abordagem algébrica, com resultados pouco animadores, mesmo entre sujeitos que gostam de Matemática.

Mesmo que a abordagem algébrica seja feita inter-relacionando os aspectos formais e os algorítmicos, podemos entrever problemas no ensino e na aprendizagem. Para justificar nossa apreensão, trazemos à discussão duas das perguntas colocadas por Kieran (2004), ambas, no nosso entender, abrindo espaço para uma abordagem não estritamente algébrica (a primeira delas com relação às diferenças entre resolver uma equação e resolver uma inequação).

> "Qual a essência do apoio instrucional que pode gerar, nos estudantes, os tipos de representações mentais que os tornarão aptos a pensar sobre estas diferenças críticas quando engajados em atividades de manipulação simbólica envolvendo desigualdades?" [18](KIERAN, 2004, p.147, tradução nossa).
>
> "Por que meios, se houver algum, e para que faixas etárias dos estudantes, a tecnologia de manipulação simbólica pode ser aproveitada de forma a proporcionar abordagens viáveis para desenvolver nos estudantes o formalismo algébrico relacionado às desigualdades e à manipulação destas?"[19] (KIERAN, 2004, p.147, tradução nossa).

[18] What is the nature of instructional support that can generate in students the kinds of mental representations that will enable them to think about these critical differences when engaging in symbol manipulation activity involving inequalities? (KIERAN, 2004, p.147).
[19] "In which ways, if any, and for which age-ranges of students, can symbol-manipulation technology be harnassed so as to provide viable approaches for developing student´s algebraic theorizing with respect to inequalities and their manipulation?" (KIERAN, 2004, p.147).

Acreditamos que uma abordagem funcional gráfica da resolução de inequações pode ajudar os alunos a perceberem as diferenças entre resolver uma equação e resolver uma inequação e ainda dar elementos para desenvolverem o formalismo algébrico, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Com a discussão proposta por nossa seqüência didática, a professores em formação inicial e continuada, gostaríamos que estes se engajassem em refletir sobre as formas e os meios de trazer a citada abordagem para a sala de aula.

O entendimento da estrutura de uma inequação, como por exemplo $cx+d<k$ (x incógnita; c, d, k constantes), pode ser favorecido pelo gráfico da função definida por $f(x)=cx+d$. O sujeito pode perceber que as soluções constituem um intervalo do tipo $]-\infty, r[$ ou $]r, +\infty[$ e, a partir daí, fazer a conexão entre o valor de r e a solução da equação $cx+d=k$. Parece-nos importante salientar que acreditamos que o professor, desde o início da aprendizagem, pode e deve explorar exemplos em que k é não nulo, para evitar futuras dificuldades.

A estrutura de uma inequação do tipo $x^2<a^2$ (x incógnita, a constante), pode, no nosso entender, ser evidenciada pelo gráfico da função definida por $g(x)=x^2$, por meio do qual o sujeito pode ver o comportamento dos valores de “um número real elevado ao quadrado” e perceber que as soluções precisam ficar “confinadas” a um intervalo ao redor do zero; a partir desta constatação, concluir que as soluções são os números reais do intervalo $]-|a|, |a|[$ e que este intervalo pode ser obtido a partir das soluções da equação $x^2=a^2$, que no gráfico podem ser vistas como as <u>intersecções</u> entre o gráfico da função g e o da reta definida por $y=a^2$.

Com esta constatação, é possível deixar visível que o tratamento algébrico correto não pode ser semelhante ao das equações, ou seja, não basta “extrair a raiz dos dois lados”. A partir daí, o professor pode argumentar sobre a necessidade de sempre ter expressões equivalentes e chegar, por exemplo, a $(x-a)(x+a)<0$, cuja resolução algébrica pode ser feita com base também no entendimento da estrutura (são dois números reais cujo produto tem que ser negativo).

De modo geral, a resolução algébrica de inequações do tipo $px^2+qx+r<k$ (x incógnita; p, q, r, k constantes) pode ser, no nosso entender, visualizada pelo gráfico da função definida por $f(x)= px^2+qx+r$, pois este evidencia a relação entre as

soluções da inequação dada e as da equação $px^2+qx+r=k$, desde que o professor a explore também, desde o início, com valores de k não nulos.

Da mesma forma, com a inequação $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$, o entendimento da estrutura pode ser favorecido pelo gráfico da função definida por $m(x) = \frac{5}{x}$. É possível perceber que x=0 não faz parte do universo das possíveis soluções e que, por causa desta "divisão" do domínio em dois intervalos, a resolução algébrica também pode ficar "dividida" em duas estratégias. De qualquer forma, o sujeito pode perceber que o conjunto de soluções tem dois intervalos e que a resolução da equação $\frac{5}{x} = \frac{5}{2}$ ajuda mas não resolve, como nos casos anteriores, exatamente porque o gráfico tem duas componentes disjuntas.

De modo geral, a estrutura de inequações do tipo $\frac{ax+b}{cx+d} < k$ (x incógnita; a, b, c, d constantes com $c^2+d^2 \neq 0$) pode ser entendida por meio do gráfico da função $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. É possível perceber que o conjunto de soluções tem dois intervalos disjuntos, que a solução da equação $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ ajuda mas não é suficiente e que, portanto, devem ser tomados certos cuidados na resolução algébrica.

Podemos pensar ainda na resolução de inequações do tipo $|x|<k$ (x incógnita; k constante). O gráfico da função definida por $j(x)=|x|$ evidencia a estrutura da inequação, deixando entrever, por exemplo, que: (i) se $k \leq 0$, não há soluções, favorecendo assim o entendimento do que seja o módulo de um número; (ii) se $k>0$, as soluções ficam confinadas a um intervalo, que pode ser determinado a partir da resolução da equação $|x|=k$. Novamente, ressaltamos a importância que vemos do professor explorar, desde o começo, valores de k não nulos.

Poderíamos fazer observações semelhantes para o caso em que o símbolo < fosse substituído pelo símbolo > em qualquer um dos exemplos citados.

Parece claro que toda esta discussão só será possível se o professor a promover em sala de aula, qualquer que seja o meio adotado por ele, como por exemplo papel e lápis, problemas contextualizados, novas tecnologias (calculadora e/ou computador), linguagem formal.

Por esta razão, escolhemos dois grupos para participarem de nossa pesquisa, um de alunos de primeiro ano da formação inicial (futuros professores) e um de professores atuantes da rede pública estadual.

IV.1.3. PERFIL DOS PARTICIPANTES

Como explicitamos no parágrafo anterior, dois grupos participaram de nossa pesquisa, um de estudantes de primeiro ano da formação inicial e um de professores da formação continuada.

Os estudantes tinham contato conosco por serem nossos alunos numa disciplina de Educação Matemática e foram convidados a participar porque serão futuros professores (razão principal), manifestaram interesse, mostraram ter deficiências no conhecimento do assunto (questionário diagnóstico), podiam ser considerados praticamente alunos do Ensino Médio, não estavam ainda envolvidos com salas de aula e com livros didáticos e tinham necessidades imediatas (em várias das disciplinas do curso).

Os professores participavam, há pelo menos dois anos, de um grupo de pesquisa do qual fazíamos parte e que vem discutindo semanalmente, com um grupo de pesquisadores, conteúdos e abordagens para temas variados da Matemática da Educação Básica.

Estas escolhas foram norteadas ainda pela idéia de que o assunto resolução de inequações não vem sendo abordado com sucesso, nem no Ensino Fundamental nem no Ensino Médio e talvez nem no Ensino Superior. Isto tem sido corroborado, em nossa prática, por alunos que gostam de Matemática, que ou não conhecem o assunto ou não têm conhecimento suficiente sobre ele. Além disso, os professores, com os quais temos tido contato, expressam verbalmente que não têm explorado o assunto em sala de aula.

Para ter uma idéia do perfil dos alunos que iriam participar da pesquisa, passamos um questionário escrito, para saber idade, naturalidade e se: vinham de uma formação particular ou pública; haviam utilizado algum livro didático de Matemática; tinham alguma experiência com o uso do computador na escola; tinham feito cursinho para prestar o exame vestibular para ingresso no Ensino Superior.

Dos 30 alunos que participaram da pesquisa, 20 responderam ao questionário e pudemos observar que: (1) a média de idades deu 25, contando com dois alunos de 45 anos; se não contarmos com estes dois, a média é 22,8 anos, que continua alta para esta fase da aprendizagem. Estamos, portanto, trabalhando com um grupo de alunos mais velhos do que o esperado no primeiro ano do Ensino Superior; (2) pelo menos 17 deles cursaram a Educação Básica na cidade de São Paulo; (3) 17 fizeram Ensino Fundamental em escola pública; dois, em escola particular; e um passou da escola pública para a particular na 5ª série; (4) 17 alunos fizeram Ensino Médio em escola pública e 3, em particular. Podemos dizer, então, que o grupo é proveniente da escola pública, mesmo porque os dois alunos que só fizeram escola particular não participaram de toda a pesquisa, pois só responderam as três primeiras atividades, das cinco programadas; (5) 8 alunos não utilizaram livro didático; 6, só de 5ª a 8ª séries; e 6, sempre utilizaram. Como 14 dos 20 alunos não utilizou livro didático no Ensino Médio, onde a abordagem funcional das inequações deveria ocorrer, consideramos que o conhecimento que tinham deste assunto não foi influenciado diretamente pelo uso de um livro didático; (6) nenhum dos 20 alunos tinha experiência didática com o uso do computador. Por esta razão, só aplicamos a seqüência na segunda metade do primeiro semestre, quando o trabalho didático em ambiente informático, com os softwares Cabri-géomètre II e GRAPHMATICA, já estava incorporado, por causa do uso em pelo menos duas disciplinas do primeiro ano, Cálculo 1 e Geometria 1; (7) 17 alunos fizeram cursinho pré-vestibular e 3 não. Particularmente, acreditamos que as abordagens adotadas nos cursinhos do tipo pré-vestibular não são as mais indicadas para uma aprendizagem efetiva, porque são, em geral, calcadas nos procedimentos.

Das observações feitas, pudemos concluir que, para iniciar a aplicação da seqüência, precisávamos ter certeza de que havia sido realizado um trabalho anterior com as notações, as funções e os gráficos, o que de fato ocorreu na disciplina Cálculo 1, nos dois primeiros meses do primeiro semestre letivo.

Com os professores, não aplicamos nenhum questionário escrito para traçar o perfil do grupo, porque isto já havia sido feito anteriormente. Dos 10 participantes, 4 já participavam há pelo menos 5 anos do nosso grupo de pesquisa, 3 eram alunos de graduação, 1 era professor de Química e 2 faziam parte do grupo há 2 anos. Os 6 professores de Matemática lecionam, em média, há seis anos no Ensino Médio, embora dois deles só a disciplina Física e nenhum tinha classes de terceiro ano onde, segundo eles, o assunto inequações iria aparecer. Por conta disto, segundo depoimento verbal, nunca haviam trabalhado a abordagem funcional de inequações, nem na verdade inequações, muito menos usando o registro gráfico. Todos mostraram interesse em discutir o assunto e refletir sobre a viabilidade de uma tal abordagem, alegando que, em seus respectivos cursos de graduação, nunca haviam tido oportunidade para fazê-lo. Uma das coisas que marcou bastante, tanto a pesquisadora como os observadores, foi constatar que, para um deles, o “Estudo do sinal da função”, como aparece nos livros didáticos, não tem conexão com as inequações.

IV.1.4. PRÉ-REQUISITOS

Todos já estavam acostumados com o ambiente informático e com os softwares Cabri-géomètre II e GRAPHMATICA; portanto, estas duas variáveis didáticas não foram consideradas como influentes nos resultados de nossa pesquisa.

Utilizamos o software Graphmatica for Windows, version 1.60, desenvolvido por Keith Hertzer - Copyright (c) 1997 kSoft, Inc. (http://www.pair.com/ksoft/), que tínhamos à disposição no laboratório de informática. Escolhemo-lo para o traçado rápido e eficiente de gráficos, pois se trata de um software amigável, bastando digitar, na linha de comando, as expressões algébricas das funções na forma y=. Além disso, caso fosse necessário, é possível solicitar os gráficos de relações mais gerais como $x^2+y^2=r^2$.

O software Cabri-géomètre II Plus, ao qual tínhamos fácil acesso no Laboratório de Matemática, foi utilizado por duas razões. Primeiro, por causa da dinamicidade, pois movimentando os pontos, por exemplo em cima de uma parábola, os usuários podem observar a simetria, antes de elaborar a demonstração formal deste fato. Segundo, porque permite a construção de macros; com isto, o instrutor pode modificar o menu, aumentando-o, diminuindo-o ou modificando-o. No caso dos pré-requisitos, pudemos deixar à disposição os gráficos de algumas funções de referência que iríamos utilizar (ver a seguir), bem como uma edição numérica, que permitia a movimentação destes gráficos por translações horizontais, translações verticais e simetrias.

Para garantir os pré-requisitos relacionados à notação, às funções e aos gráficos, fizemos, em seis sessões anteriores de 2,5 horas cada uma, um trabalho com funções básicas, chamadas funções de referência e algumas associadas. Como funções de referência, tomamos $f(x) = x,\ g(x) = x^2,\ h(x) = x^3,\ n(x) = \frac{1}{x}$, $p(x) = |x|,\ m(x) = \sin(x)$ e como associadas, as funções obtidas das de referência pelas operações "somar uma constante k", "multiplicar por uma constante k", "colocar o módulo" ora na variável independente, ora na variável dependente. As questões propostas envolviam o domínio, a imagem, o gráfico e a simetria do gráfico, tanto das funções de referência como das funções associadas. Esperávamos, assim, desenvolver com o grupo a visualização global dos gráficos, necessária na abordagem funcional gráfica de inequações com uma incógnita, bem como ampliar os arquivos individuais de funções básicas, que até então pareciam restringir-se à função afim e à função quadrática.

IV.1.5. LIVROS DIDÁTICOS

No parágrafo anterior, fizemos um resumo do perfil dos sujeitos que escolhemos para participarem da discussão da seqüência didática que elaboramos. Esta discussão tem como objetivo mostrar, a esse conjunto de professores e de futuros professores de Matemática, uma abordagem funcional gráfica da resolução de inequações, utilizando fortemente os registros algébrico, gráfico e da língua natural. Esperávamos, com isto, destacar algumas das vantagens de adotá-la com alunos da Educação Básica, como alternativa para a usual e tradicional abordagem algébrica. Como todos os professores do grupo participante declararam que não a conheciam e que os livros didáticos não a contemplavam, fez-se necessária, no nosso entender, uma análise de alguns livros didáticos de Matemática, tanto do Ensino Fundamental como do Ensino Médio. Quisemos verificar quais as abordagens apresentadas e como são exploradas, para avaliar se (e como) usam os tratamentos e as conversões de registros de representação e se, no nosso entender, promovem a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ligados ao assunto inequações.

Para a análise dos livros, escolhemos alguns elementos que estão ligados à nossa pesquisa e que consideramos importantes na introdução de (1) função, de (2) gráfico de função, de (3) inequação e de (4) resolução de inequações: os registros de representação que podem ser utilizados e que aspectos de Fischbein entendemos que cada um desses registros favorece.

(1) PARA AS FUNÇÕES

1. ***Registro na língua natural***: se a função vem descrita em palavras, como por exemplo "... uma função que associa, a cada número real, o seu dobro ...". Este tipo de registro parece favorecer o ***aspecto intuitivo***. É bastante comprovada a dificuldade que os alunos têm para fazer a conversão de um texto em linguagem natural para uma expressão algébrica. No caso das funções, embora a conversão seja congruente, a dificuldade é maior e o professor precisa fazer um trabalho intensivo em sala de aula, para qualquer um dos tipos de registro algébrico. Uma explicação para esta dificuldade parece vir associada ao fato de que o sujeito já precisa dominar os aspectos formal e algorítmico para ser capaz de fazer a passagem

   x (**cada número real**) $\rightarrow$ (**função que associa**) **2x** (**seu dobro**)

   ou

   f(x) = 2x

2. ***Registro algébrico do tipo f(.)=***: se a função vem descrita pela sua lei, seja ela genérica, como por exemplo $f(x)= ax^2+bx+c$, ou particular, como $g(x)=2x+3$. Este tipo de registro favorece o ***aspecto formal.*** O sujeito precisa saber ler e interpretar o que este registro mostra: que a função chama-se f, que a variável independente é x e que a variável dependente é o resultado final da transformação aplicada ao x.

3.***Registro algébrico do tipo y=***: se a função vem descrita pela sua lei, porém de uma forma que explicita a variável dependente, ou seja, o resultado final. Este tipo de registro favorece o ***aspecto algorítmico***. O ***aspecto formal*** está presente, porque o sujeito precisa saber o que significa a igualdade e o que representa cada uma das variáveis, se quiser ir além do simples manuseio numérico do tipo "este x acarreta este y". Um ***aspecto intuitivo*** perigoso do trabalho só com este registro é que o sujeito pode ficar coagido a pensar que sempre é o x que vem primeiro e não é possível calcular "um x que acarreta num y dado". Além disso, já vimos alunos (e professores) não conseguirem superar o fato de que o y não é qualquer, mas sim a expressão, em x, da lei da função. Por exemplo, se $y=x^3$, então os pontos do gráfico têm coordenadas (x, x^3) e não (x, y). No nosso entender, o professor pode criar uma dificuldade muito difícil de superar, tanto do ponto de vista algébrico como do ponto de vista gráfico.

4.***Registro do tipo diagrama***: se é usado algum tipo de diagrama, como o de Venn, para explorar a definição de função. Este tipo de registro só favorece o ***aspecto intuitivo***. Ousamos dizer que o sujeito fica com uma ótima noção intuitiva do que seja uma função, mas vai ter muita dificuldade para lidar tanto com o aspecto formal como com o aspecto algorítmico, porque as variáveis aparecem, em geral, como se fossem discretas e finitas.

5.***Registro algébrico do tipo flecha***: se a função vem descrita na forma $\begin{array}{l} f: A \to B \\ \ldots \mapsto \ldots \end{array}$ ou $* \mapsto *$ ou $* | \xrightarrow{f} *$. Embora seja uma definição formal, ele ***não*** favorece o ***aspecto formal*** de função. Na verdade, nem mesmo o ***aspecto algorítmico***, pois o sujeito já precisa dominar o aspecto formal para entender e usar este tipo de registro. Ele apenas induz, em quem já sabe, quem são as variáveis e qual é a lei da função. No entanto, para trabalhar a idéia de função composta, por exemplo, este registro nos permite um trabalho excelente.

6.***Registro algébrico do tipo produto cartesiano***: se a função vem descrita como um sub-conjunto do produto cartesiano IRxIR, como por exemplo $\{(x, y) \in \mathrm{IRxIR} \,/\, \text{se } (x_1, y_1) = (x_1, y_2), \text{então } y_1 = y_2\}$. Também uma definição formal, que pode ajudar um aluno <u>matematicamente maduro</u> a entender o

aspecto formal, mas que não nos parece uma boa escolha didática para os alunos em geral, pois não favorece nem o ***aspecto intuitivo*** e nem o ***aspecto algorítmico***.

(2) PARA OS GRÁFICOS

1. ***Registro algébrico do tipo sub-conjunto de IRxIR***: se o gráfico vem descrito formalmente por $\{(x, y) \in IRxIR \,/\, y = f(x), x \in dom(f)\}$. É um registro que enfoca o ***aspecto formal***. O professor precisa trabalhá-lo, uma vez que o gráfico não tem nada de intuitivo, mas não é suficiente, porque é de leitura complexa, se analisarmos as interpretações que são necessárias para entendê-lo. Se considerarmos que a leitura pode "terminar" na barra inclinada, talvez seja uma das razões pelas quais grande parte dos alunos não consegue interiorizar que a segunda coordenada não é um y qualquer.

2. ***Registro algébrico do tipo pares de coordenadas***: se o gráfico aparece descrito por $\{(x, f(x)) \,/\, x \in dom(f)\}$. Similar ao anterior, porém pode facilitar a "leitura" da segunda coordenada.

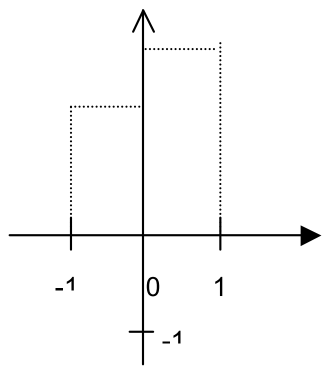
3. ***Registro do tipo numérico***: se o gráfico vem descrito por alguns pares de números "f(-1)=2, f(0)=-1, f(1)=3, ...", seguidos de um texto do tipo "... colocamos no sistema de coordenadas os pontos (-1, 2), (0, -1), (1, 3) e assim por diante". Podemos dizer que só favorece o ***aspecto intuitivo***, porque não dá nenhuma indicação do comportamento global do gráfico e ainda pode dificultar os outros aspectos, se não for bem trabalhado pelo professor nesta e nas aulas seguintes. Diria até que o professor pode fazer um esboço na lousa, mas não <u>escrever</u> ou deixar o aluno ler no livro didático.

4. ***Registro na língua natural***: se o gráfico vem descrito em palavras, como por exemplo "O gráfico de f é o conjunto de pontos (x, y), onde x pertence ao domínio de f e y é o valor de f em x". Este registro é muito parecido com o registro algébrico do tipo sub-conjunto de IRxIR. Pode favorecer o ***aspecto formal***, mas traz mais dificuldades com os outros aspectos, porque exige uma conversão não congruente.

5. ***Registro do tipo tabela***: se o gráfico vem descrito por uma tabela com 3 ou 4 valores, seguido de um texto do tipo "... colocamos no sistema de

coordenadas os pontos (-1, 2), (0, -1), (1, 3) e assim por diante" e de um "gráfico". Por exemplo

x	y
-1	2
0	-1
1	3



Este talvez seja o tipo de registro menos didático, se queremos que o aluno enfrente as dificuldades inerentes ao assunto, porque é o "mais fácil": o aluno faz algumas contas e fica com a impressão de que isto basta. É um registro que pode ser explorado quando não temos o registro algébrico da função e queremos descobri-la, como se tivéssemos dados experimentais obtidos no laboratório de Física, por exemplo. Enfatiza o ***aspecto intuitivo*** e talvez ajude no ***aspecto algorítmico***. Embora seja um dos registros mais explorados tanto pelos professores com os quais tivemos contato como pelos livros didáticos que consultamos, ousamos dizer que é o tipo de registro menos adequado para um trabalho com os aspectos formais de funções matemáticas. Consideramo-lo apropriado para um trabalho com a modelagem matemática, em que não temos a lei da função e queremos determinar uma que seja coerente com os dados. Em função da maturidade científica do grupo com o qual se está trabalhando, pode tornar-se um ótimo instrumento para aprender Matemática, numa abordagem que Assude (2002, p. 232) chama de *empírica e de modelização*.

(3) PARA A DEFINIÇÃO DE INEQUAÇÃO

1. ***Registro na língua natural em IR***: se a definição do que seja resolver uma inequação vem expressa na língua natural, por exemplo "Resolver uma inequação em IR é determinar todos os valores reais da incógnita que satisfazem uma sentença do tipo ... < ...". Quando a abordagem é feita diretamente no conjunto dos números reais, consideramos que favorece o ***aspecto formal***, porque é feita sobre um conjunto geral, mas não dá

nenhuma indicação sobre os demais aspectos. É preciso trabalhar com os alunos as propriedades das inequações para que eles desenvolvam o ***aspecto algorítmico***. O ***aspecto intuitivo*** pode ser desenvolvido se o professor, antes de dar as propriedades, abrir uma discussão em sala de aula sobre o texto da definição.

2. ***Registro na língua natural em outro conjunto A***: se a definição do que seja resolver uma inequação vem expressa na língua natural, por exemplo "Resolver uma inequação em A é determinar todos os valores da incógnita, no conjunto A, que satisfazem uma sentença do tipo ... < ...". Consideramos que este registro favorece o ***aspecto formal***, mas também que os alunos podem ter problemas no futuro, quando for necessário ampliar o conjunto solução para IR. Ao resolvermos em Z por exemplo, que é discreto, podemos estar reforçando idéias que aparecem depois, como a aceitação de uma notação do tipo x>a, porque o conjunto Z é mais "visível". É preciso trabalhar com os alunos as propriedades das inequações para que eles desenvolvam o ***aspecto algorítmico***. Como estas propriedades são válidas em qualquer dos conjuntos trabalhados na Educação Básica, não vemos muito sentido em trabalhar casos particulares no lugar de casos gerais. O ***aspecto intuitivo*** pode ser desenvolvido se o professor, antes de dar as propriedades, abrir uma discussão em sala de aula sobre o texto da definição.

3. ***Registro algébrico***: se a inequação vem "definida" por meio de um exemplo algébrico, mostrando o tratamento que pode ser feito para determinar os valores da incógnita. Neste caso, consideramos que nenhum dos aspectos é trabalhado, nem mesmo o ***aspecto algorítmico***, porque só aparecem os procedimentos, que não vão ser facilmente generalizados, mesmo por aqueles alunos que têm alguma iniciativa em Matemática.

(4) PARA A RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES

1. ***Registro algébrico intuitivo***: se a resolução de inequações é abordada fazendo analogia com as equações, dando os procedimentos, mas não as propriedades formais das inequações. Com este registro, estamos reforçando apenas os ***aspectos algorítmicos***, baseados em ***aspectos intuitivos***. Não há nada de formal neste tipo de abordagem e os alunos podem ficar com uma sensação de insegurança, porque talvez intuitivamente percebam que

uma inequação não é a mesma coisa que uma equação. Além disso, quase sempre o estudo das inequações é compartimentalizado: as de primeira ordem faz-se assim; as de segunda, assim; etc...

2. ***Registro algébrico formal***: se a resolução de inequações é precedida do enunciado das propriedades que podem ser utilizadas para resolver uma inequação. Este registro favorece os ***aspectos formais***, mas pode prejudicar os demais aspectos, porque a multiplicação de uma inequação por uma constante não é trivial e precisa ser bem entendida. Envolve conversões não congruentes.

3.

4. ***Registro algébrico funcional***: se a resolução de inequa ções é feita por uma abordagem funcional, em que cada membro da inequação é interpretada como uma função. A variável é a incógnita e a inequação precisa ser vista como uma comparação de imagens de duas funções. Pressupõe um conhecimento prévio sobre funções e gráficos, para que o sujeito consiga fazer a conversão, não congruente, do registro algébrico para o gráfico. O registro algébrico funcional pode favorecer apenas os ***aspectos algorítmicos***, dependendo de como o professor trabalhou as funções previamente e como irá trabalhar a resolução de inequações. Por outro lado, é uma abordagem mais geral do que a que é feita quando separamos a resolução de inequações em casos: primeira ordem, segunda ordem, trigonométricas, etc.

Feita a listagem dos registros de representação que podem ser utilizados e dos aspectos que consideramos que cada um deles pode favorecer, escolhemos, para analisar: (1) duas coleções de Matemática para o Ensino Fundamental; (2) duas coleções para o Ensino Médio; (3) um volume único para o Ensino Médio; (4) dois volumes por assunto, para o aluno, da mesma coleção e do mesmo autor; (5) um volume por assunto, para o professor de Matemática.

IV.1.5.1. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Escolhemos, para analisar, as coleções "Tudo é Matemática", de Luiz Roberto DANTE (2002a, 2004, 2002b, 2002c) e "Matemática para todos", de Luiz Márcio IMENES e Marcelo LELLIS (2002a, 2002b, 2002c, 2002d) para o Ensino Fundamental, escritas depois da advinda dos Parâmetros Curriculares Nacionais, porque acreditamos que seriam as que poderiam apresentar uma abordagem funcional gráfica para as inequações. Ambas têm sido bem conceituadas pelo PNLD, embora apresentem o conteúdo em ordem diferente. Na primeira, o autor sempre intercala Geometria com Álgebra e Números, o que nem sempre acontece na segunda. Na segunda, o assunto Geometria começa com as Construções Geométricas, já na 5ª série, enquanto na segunda, este assunto só aparece no fim da 7ª série. O assunto função não é abordado explicitamente em "Matemática para todos" (embora apareça intuitivamente na 7ª série), enquanto que em "Tudo é Matemática", o autor o faz no capítulo 7 (o livro tem 10 capítulos) da 8ª série. Como analisamos também a coleção "Matemática Contexto & Aplicações", de Luiz Roberto Dante, para o Ensino Médio, acreditamos que seria uma forma de termos uma idéia da proposta geral do autor para a Matemática da Educação Básica.

Com base nas escolhas que descrevemos, fomos observar, em cada volume das duas coleções, a existência, ou não, do aspecto formal, do aspecto intuitivo, do aspecto algorítmico e das conversões, para cada um dos seguintes três conteúdos: **função**; **gráfico**; **inequações e resolução de inequações**. As tabelas resumem nossas observações, com uma coluna para a existência ou não de cada um dos aspectos (formal, intuitivo e algorítmico) e uma coluna para as conversões existentes no texto de cada volume analisado. Utilizamos abreviaturas nas tabelas que seguem: LN para o registro na língua natural; A, para o algébrico; TAB, para a tabela de valores; e G para o gráfico.

TABELA 4: SOBRE O ASSUNTO FUNÇÃO NO EF

	FUNÇÃO			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D, 5a série	não	não	não	não
D, 6a série	não	não	não	não
D, 7a série	não	sim	não	LN para A
D, 8a série	não	sim	sim	TAB para LN, TAB para A e LN para A
I, 5a série	não	sim	não	TAB
I, 6a série	não	não	não	não
I, 7a série	não	sim	sim	A para LN, LN para A e A para TAB
I, 8a série	não	sim	não	LN para TAB, TAB para A, A para TAB

Podemos observar que: o aspecto formal nunca aparece; o aspecto intuitivo aparece na 7ª e na 8ª séries, mas nem sempre acompanhado do aspecto algorítmico; na coleção D, o registro da língua natural é bastante utilizado e o registro do tipo tabela sempre aparece; na 8ª série, as conversões são da tabela para a língua natural e para a álgebra ou da língua natural para a álgebra; na coleção I, o registro mais utilizado é a tabela e só são exploradas as conversões da álgebra para a língua natural e para a tabela; na coleção I, em todos os exercícios o registro utilizado para a função é o do tipo y= ... e a expressão algébrica é sempre seguida pela construção de uma tabela, com valores da variável independente “convenientemente escolhidos”.

As conversões do registro algébrico para a língua natural não aparecem e acreditamos que seriam importantes nesta fase da aprendizagem, funcionando como uma forma de interpretação de texto.

Ousamos dizer que o assunto função não existe efetivamente em nenhuma das duas coleções para o Ensino Fundamental.

TABELA 5: SOBRE O ASSUNTO GRÁFICO NO EF

	GRÁFICO			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D, 5a série	não	não	não	não
D, 6a série	não	sim	sim	TAB para G e LN para G
D, 7a série	não	sim	não	A para G
D, 8a série	não	não	sim	LN para G e pares ordenados para G
I, 5a série	não	sim	não	gráficos estatísticos: LN para G, G para LN, TAB para G, TAB para LN
I, 6a série	não	sim	sim	gráficos estatísticos: LN para G, G para LN, TAB para G, TAB para LN
I, 7a série	não	não	não	não
I, 8a série	não	sim	sim	Batalha naval e TAB para G

Novamente observamos que os aspectos formais estão ausentes nestas duas coleções e que as tabelas continuam desempenhando um papel muito forte nessa abordagem que diríamos só intuitiva. As conversões quase sempre são num único sentido, sendo o gráfico o último registro, exceto com os gráficos estatísticos, em que podemos ver que os alunos são convidados a fazer interpretações, em língua natural, do que é observados nos gráficos. Como seria esperado dentro deste assunto, as tabelas estão muito presentes e os pontos do gráfico (todos com variável discreta) são unidos por segmentos de reta.

Na 8ª série, onde acreditamos ser possível uma apresentação mais formal dos gráficos, com valores em IR, isto também não acontece. Na coleção D, os "Gráficos de funções" são apresentados por dois exemplos, seguidos do mesmo texto do volume 1 do Ensino Médio do DANTE, com a lista de procedimentos para traçar um gráfico.

> "Para construir o gráfico de uma função dada por y=f(x), com x∈**D**, no plano cartesiano, devemos:
>
> construir uma tabela com valores de **x** escolhidos convenientemente em **D** e com valores correspondentes para y=f(x);
>
> a cada par ordenado (x,y) da tabela associar um ponto do plano cartesiano;

marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função."[20] (DANTE, 2002c, p.161; DANTE, 2002d, p.69).

Na coleção I, 8ª série, o gráfico de uma função é introduzido pela Batalha Naval, o que pode reforçar apenas os ***aspectos intuitivos*** e dar a idéia de que os números são sempre inteiros. Os gráficos traçados só envolvem retas, parábolas ou reunião de segmentos e a função aparece no registro do tipo y= ...

Os gráficos não são definidos formalmente, apenas intuitiva e algoritmicamente e são dados os passos para o traçado de um gráfico: "fórmula $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$ marcar os pontos $\Rightarrow$ unir os pontos" (IMENES; LELLIS, 2002d, p.189), chamando a atenção para o fato de já saber que o gráfico vai ser uma reta ou uma parábola, a partir do tipo de expressão algébrica inicial.

Reforçamos nossa pergunta "...então, para que a tabela, se temos a expressão algébrica e já sabemos que é uma reta ou uma parábola?". Por que não aproveitar os exemplos e trabalhar algum gráfico que não seja reta ou parábola? Na verdade, por que não trabalhar tanto o gráfico como a expressão algébrica para fazer as conversões e justificar a forma do gráfico?

Nossa avaliação é de que não podemos considerar o assunto gráfico de funções abordado no Ensino Fundamental, nestas duas coleções.

TABELA 6: SOBRE O ASSUNTO INEQUAÇÕES NO EF

	DESIGUALDADE E RESOLUÇÃO DE DESIGUALDADES			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D, 5a série	não	sim	não	não
D, 6a série	não	sim	não	não
D, 7a série	não	sim	não	não
D, 8a série	não	sim	sim	não
I, 5a série	não	não	não	não
I, 6a série	não	não	não	não
I, 7a série	não	não	não	não
I, 8a série	não	não	não	não

As inequações não aparecem na coleção I e na coleção D só são tratadas intuitivamente. No livro da 7ª série da coleção D, são resolvidas no conjunto dos números naturais e depois no dos inteiros. No livro da 8ª série da coleção D, o conjunto universo é Z e depois IR e as inequações (todas do primeiro grau) são

[20] Os sublinhados são nossos.

resolvidas conforme uma lista de procedimentos. O Princípio Multiplicativo das Inequações aparece na forma de exemplos e lembretes.

Consideramos que o assunto inequações não faz parte da lista de conteúdos do Ensino Fundamental, para estas duas coleções.

IV.1.5.2. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Como o assunto função é quase tipicamente abordado no Ensino Médio e as duas coleções que analisamos para o Ensino Fundamental não apresentam o assunto, escolhemos para analisar: duas coleções completas, uma com características mais próximas das recomendadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais ("Matemática-Contexto & Aplicações", de Luiz Roberto DANTE, 2002d, 2002e, 1999) e a outra, bastante usada, mais tradicional ("Matemática", de Gelson IEZZI et al., 1981, 1980a, 1980b); um volume único ("Matemática Fundamental", de José Ruy GIOVANNI; José Roberto BONJORNO; José Ruy GIOVANNI Jr., 1994), porque segundo depoimentos verbais dos professores e dos alunos com os quais trabalhamos, tem sido uma prática cada vez mais difundida o uso desta opção; dois livros por assunto, do mesmo autor ("1-Conjuntos numéricos e funções" e "6-Funções e Derivadas", de Antonio dos Santos MACHADO, 1986, 1988), porque em ambos o tema funções é abordado e foram escritos antes da advinda dos Parâmetros Curriculares Nacionais, para dar apoio bibliográfico a alunos autodidatas; e um livro escrito para dar apoio bibliográfico para o professor ("A Matemática do Ensino Médio", volume 1, de Élon Lages LIMA et al., 2004), mais na linha das propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais (ver Anexo A, página 287).

Colocamos nossas observações em três tabelas, uma para o assunto função, outra para gráfico e outra para resolução de inequações. Cada tabela tem cinco colunas: a primeira, para nossa identificação da obra analisada (D1, D2, D3 e G1, G2, G3 para as duas coleções; E1 para o livro para professores; Gúnico para o volume único; M1 e M2 para os dois volumes por assunto); a segunda, para a existência ou não de aspectos formais; a terceira, para os aspectos intuitivos; a quarta, para os aspectos algorítmicos; e a quinta, para as conversões existentes.

Utilizamos abreviaturas nas tabelas: LN para indicar o registro da língua natural, G para o gráfico, A para o algébrico, VENN para o diagrama de Venn, TAB para tabelas de valores, TRIG para o círculo trigonométrico.

TABELA 7: SOBRE O ASSUNTO FUNÇÃO NO EM

	FUNÇÃO			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D1	não	sim	não	TAB para A, TAB para LN VENN para TAB, A para LN LN para A, A para TAB
D2	sim	sim	não	não
D3	sim	não	não	A para TAB. Estatística: LN para TAB, G para LN
Gúnico	não	sim	não	A para TAB, TAB para LN TAB para VENN, LN para A
Z1	sim	sim	não	A para VENN, VENN para LN
Z2	não	não	não	não
Z3	não	sim	sim	A para LN, LN para VENN, A para valores
E1	sim	sim	sim	LN para A, A para LN
M1	sim	sim	não	LN para VENN, VENN para LN, A para LN
M6	sim	não	sim	A para TAB, A para valores, A para LN

Analisando a tabela sobre função, verificamos que apenas no livro escrito para os professores (E1) aparecem, ao mesmo tempo, os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos e também conversões importantes (do registro na língua natural para o algébrico e vice-versa). Nos demais, os aspectos intuitivos são os mais presentes; os aspectos algorítmicos diríamos que praticamente inexistentes, pelo menos para efeitos de aprendizagem; e as conversões não são enfaticamente exploradas num mesmo problema, por exemplo, com a utilização de funções de referência e associadas. Os diagramas de Venn são usados em metade deles, mesmo no que foi escrito por assunto (M1), como apoio bibliográfico para alunos. As tabelas são exploradas em quatro dos livros, mesmo no do 3º ano da coleção D e no volume único (Gúnico), onde poderíamos supor que já houvesse maturidade para trabalhar funções mais gerais (além das polinomiais de 1º e 2º graus) e de uma forma menos intuitiva.

Um aluno que tenha estudado todo o Ensino Médio com a coleção que designamos por D, por exemplo, pode ter dificuldades para trabalhar com os aspectos algorítmicos do assunto função e mesmo com os aspectos formais, porque praticamente não aparecem e dependeriam de um trabalho extra do professor. Mesmo com a parte ligada à Estatística, na qual não conseguimos perceber claramente conexões entre as funções que lá aparecem e as do capítulo sobre funções.

Com relação aos aspectos formais, destacamos ainda que não acreditamos que o melhor trabalho é aquele que é feito com pares ordenados ou com subconjuntos do plano cartesiano, como é o caso na maioria dos livros analisados. Concordamos com a frase

> “Essa definição apresenta o inconveniente de ser formal, estática e não transmitir a idéia intuitiva de função como correspondência, transformação, dependência (uma grandeza função de outra) ou resultado de um movimento. Quem pensaria numa rotação como um conjunto de pares ordenados?” (LIMA et al., 2004, p. 81).

TABELA 8: SOBRE O ASSUNTO GRÁFICOS NO EM

	GRÁFICO			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D1	não	sim	sim	G para LN, TAB para G, TRIG para TAB
D2	não	sim	não	TAB para G
D3	não	sim	não	A para G. Estatística: LN para TAB, TAB para G, G para LN
Gúnico	não	sim	sim	TAB para G, G para LN, A para G
Z1	não	sim	não	TAB para G
Z2	não	não	não	não
Z3	não	sim	sim	valores para G, A para G
E1	sim	sim	sim	A para G, G para A (aparecem funções de referência e associadas)
M1	sim	não	sim	valores para G
M6	não	sim	sim	A para G, TAB para G

No caso dos gráficos, podemos afirmar que os aspectos formais não aparecem, pelo menos nas coleções didáticas analisadas e que foram escritas para o trabalho em sala de aula. Apenas os livros escritos como apoio bibliográfico, tanto para alunos como para professores (E1 e M1) dão a definição do que seja o gráfico de uma função, embora o livro M1 não trabalhe as conversões, tão ou mais importantes, para permear a aprendizagem.

Embora possamos dizer que aspectos intuitivos e algorítmicos aparecem na maioria dos trabalhos com os gráficos, ainda assim isto é feito com base em exemplos, quase sempre com variável discreta e com valores inteiros e o esboço dos gráficos é feito de acordo com um roteiro ou com uma tabela de valores. No caso do livro D1, o roteiro é o mesmo que aparece no livro de 8ª série do mesmo autor (ver no parágrafo IV.1.5.1, página 84). Nos livros Gúnico e Z1, as tabelas sempre têm 5 ou 6 linhas, os valores são sempre inteiros e as funções envolvidas são sempre as afins e as polinomiais do segundo grau.

No livro E1 são esboçados os gráficos de funções de referência, como $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$, $p(x) = e^x$, $q(x) = sen(x)$ e $m(x) = cos(x)$, a partir da análise das expressões algébricas e do círculo trigonométrico. Com a ajuda destes gráficos e das expressões algébricas (conversões), são traçados os gráficos de funções afins, polinomiais, exponenciais e trigonométricas em geral mostrando, no nosso entender, ser possível uma tal abordagem em salas de aula do Ensino Médio.

Podemos dizer que a inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos, no caso dos gráficos, não é contemplada pelos livros didáticos analisados e que as conversões apresentadas não são suficientes para garantir uma aprendizagem efetiva. Mesmo no capítulo sobre Estatística do livro D3, onde o aluno poderia fazer conexões entre os gráficos tratados neste capítulo e no de funções, o autor, no nosso entender, deixa escapar uma ótima oportunidade para estimular as conversões.

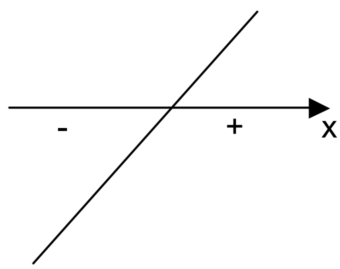
TABELA 9: SOBRE O ASSUNTO INEQUAÇÕES NO EM

	RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES			
	FORMAL	INTUITIVO	ALGORÍTMICO	CONVERSÕES
D1	não	não	sim	A para varal
D2	não	sim	sim	A para TRIG
D3	não	não	não	não
Gúnico	não	sim	sim	G para A, A para varal, A para TRIG
Z1	não	sim	sim	G para A, A para varal, A para TRIG
Z2	não	não	não	não
Z3	não	não	não	não
E1	sim	sim	sim	não
M1	sim	não	sim	A para varal
M6	sim	não	sim	A para varal

A resolução de inequações, numa abordagem funcional gráfica, é o cerne de nossa pesquisa. Assim, foi com certo desapontamento que percebemos que uma tal abordagem não existe, em nenhum dos livros didáticos analisados. Ou o assunto inequações é admitido conhecido do Ensino Fundamental (e nossa análise de livros didáticos não corrobora isto) ou a resolução é apresentada no registro algébrico (pelo varal) ou as inequações aparecem sob o titulo "Sinal da função", junto com as funções, porém não com as conversões necessárias entre os registros gráfico e algébrico.

Na coleção que designamos por D, as inequações são tratadas separadamente: as do 1º grau vêm ao fim do capítulo sobre a função afim; as de segundo grau, ao fim do capítulo sobre função quadrática e assim por diante. São tratadas as inequações: do primeiro grau com uma incógnita; do segundo grau com uma incógnita; modulares; exponenciais e logarítmicas; trigonométricas.

Para as inequações do 1º grau com uma incógnita, é sugerida uma abordagem funcional: "Agora veremos que também é possível resolvê-las por meio do estudo do sinal da função afim" (DANTE, 2002d, p.113). Para isto, é dado um exemplo, 2x-5>0, no qual o 1º membro é chamado de f(x) e é feito um diagrama do tipo



que, no nosso entender, não é a abordagem funcional. No outro exemplo, a resolução algébrica, supostamente já vista no Ensino Fundamental é comparada à funcional. A inequação é tratada para chegar a ... >0 e, assim, comparada com o "sinal da função". Apesar da proposta inicial ser de uma abordagem funcional, os exemplos apresentados no livro parecem conduzir para um esquema do tipo “varal”. Vale a pena observar que um dos professores do grupo, em uma conversa sobre inequações, afirmou que não trabalhava inequação e que, em funções, os professores da escola propunham a seguinte ordem: definição, função de 1º grau, sinal da função, função do 2º grau, sinal da função etc. aparentemente sem ter percebido que o assunto “sinal da função” é um estudo de inequação.

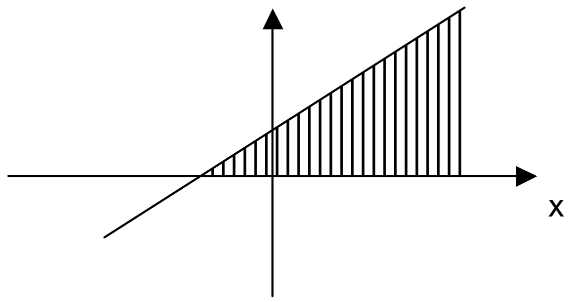
Para as inequações do segundo grau, é feita uma abordagem semelhante, com um parágrafo anterior sobre o “estudo do sinal” da função quadrática. Para estudar o sinal da função, duas coisas aparecem e que, no nosso entender, podem criar dificuldades para a aprendizagem posterior, mais geral, de inequações: as inequações são sempre colocadas na forma ... >0 (ou ... <0) e a forma de trabalho é (1º) resolver a equação associada; (2º) fazer um dispositivo prático para estudar o sinal da função. O 1º passo reforça a identificação de uma inequação com uma equação e, como várias pesquisas já ressaltaram, isto pode criar vícios para a resolução de uma inequação (aspectos intuitivos podem ser coercivos). O 2º passo incentiva a formação de recursos mnemônicos que, se não forem bem entendidos e bem formados, podem gerar erro.

Após as inequações do 2º grau, são tratadas, muito rapidamente, as inequações quociente e as inequações produto, na forma de “varal”.

As inequações exponenciais e logarítmicas são tratadas quase no final do capítulo sobre a função correspondente. Novamente, o esquema de trabalho proposto é: definir a função, fazer uma tabela de valores para esboçar o gráfico e para resolver a inequação gerar um esquema do tipo “varal”, baseado no comportamento da função conforme os valores da base.

As inequações trigonométricas são tratadas de forma similar: os gráficos das funções trigonométricas são feitos a partir de tabelas de valores e as inequações, em geral, são comparadas com o círculo trigonométrico.

No livro Gúnico e na coleção que chamamos de Z, as inequações são tratadas da mesma forma, talvez com um agravante: para chamar a atenção do leitor para f(x)>0, por exemplo, é hachurada a região entre o gráfico e o eixo horizontal, o que já havíamos percebido e observado em alguns dos professores e muitos dos alunos do primeiro ano.



Na coleção Z, são apresentadas as resoluções das inequações f(x)<a ou f(x)>a, onde $f \in \{sen, cos, tg\}$, no círculo trigonométrico, como uma receita. Por exemplo, no caso da função tangente, o texto é o que segue.

> ”Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada a e traçamos a reta que contém tal ponto e o centro do círculo. Hachuramos a região do ciclo cujos pontos ligados ao seu centro determinam retas que interceptam o eixo das tangentes em pontos de ordenada maior (ou menor) que a. A seguir damos a resposta.” (IEZZI et al., 1981, p.272).

Este texto é seguido por alguns exercícios resolvidos e quatro exercícios propostos (estes no intervalo $0 \le x \le 2\pi$).

No caso das funções seno e cosseno, o texto é semelhante.

No livro E1 as inequações não aparecem, embora haja um capítulo sobre as inequaçãos, com aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, numa abordagem algébrica.

Nos livros M1 e M6, as inequações são tratadas algebricamente, utilizando o esquema de varal e estão presentes aspectos formais e algorítmicos.

Nossa avaliação é que a abordagem funcional da resolução de inequações não existe nos livros didáticos analisados. Só aparece o tratamento do registro algébrico, sem fazer as reais conexões com a função que pode ser vista numa expressão algébrica dada.

Com relação à resolução gráfica, diríamos que existe menos ainda, porque o que os livros didáticos apresentam, em geral, são esquemas gráficos que servem como regras mnemônicas para os procedimentos algébricos.

Com relação aos tipos de inequações que estes livros didáticos trazem, podemos dizer que é um estudo compartimentalizado: primeiro só as afins, depois só as do segundo grau e assim por diante. Nossa pesquisa defende uma abordagem funcional gráfica genérica porque, com ela, acreditamos ser possível propiciar uma aprendizagem que não fica condicionada a regras mnemônicas.

O panorama vislumbrado pelos livros didáticos que analisamos, de modo geral (exceção se faça ao livro que designamos por E1, que na verdade foi escrito para o professor) mostra uma abordagem: (1) que podemos chamar de algébrica (tratamento algébrico); (2) baseada nos procedimentos (aspectos algorítmicos); (3) em que o estudo das inequações aparece escondido sob o nome de "sinal da função" nos casos particulares das funções polinomiais de primeiro e segundo graus, sem trabalhar eficientemente a conversão do registro algébrico para o gráfico; (4) em que a conversão do registro gráfico para o algébrico não aparece; (5) que apela fortemente para os aspectos intuitivos; (6) que não traz à tona os aspectos formais.

Em contrapartida, gostaríamos que nossa pesquisa trouxesse aos sujeitos que dela participarem motivos para refletirem sobre a possibilidade de trazer para a sala de aula uma abordagem: (1) funcional gráfica; (2) que não fica só nos procedimentos; (3) funcional gráfica genérica, que permite a utilização de funções polinomiais, racionais, exponenciais e trigonométricas, por meio do uso dos registros gráfico, algébrico e da língua natural; (4) em que a conversão do registro gráfico para o algébrico aparece; (5) que incentiva a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos; (6) que traz à tona os aspectos formais.

IV.1.6. ESTUDO DIAGNÓSTICO

Como já descrevemos na introdução, em 2002 aplicamos um questionário a um total de 110 alunos, como parte de um projeto de Iniciação Científica orientado por nós e pelo Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, para verificar quantos desses alunos apresentavam um erro que nos parecia freqüente na resolução da inequação $x^2 < 25$, o de que "a gente extrai a raiz dos dois lados" para obter como resposta

$x<5$ ou $x<\pm 5$. E obtivemos como resultado que 52% dos alunos pesquisados cometiam erros similares a estes.

Fazendo uma leitura cuidadosa dos protocolos desses alunos, pudemos conjecturar que a maioria deles não domina os aspectos formais envolvidos na resolução de uma inequação. Ainda mais, que ao se deparar com a inequação $x^2<25$, o aluno, pressionado a dar uma resposta, se remete intuitivamente à resolução da equação $x^2=25$, que ele supostamente sabe resolver. No entanto, como não domina os aspectos formais, ele simplesmente "transfere" os esquemas criados das equações para a inequação de uma forma que podemos chamar de "ingênua".

Em 2005, trabalhando com uma turma de 1º ano de Matemática – Licenciatura e também como parte de um projeto de Iniciação Científica, decidimos elaborar e aplicar algumas questões para um diagnóstico mais sofisticado dos erros dos alunos, incluindo tratamento e conversão de registros. Grande parte da nossa motivação para esse teste diagnóstico veio da necessidade que sentimos de ter uma visão mais apurada do conhecimento prévio dos alunos para os quais, em princípio, iríamos elaborar a seqüência didática sobre a resolução de inequações, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Os alunos sabem o que é uma inequação? Sabem o que é resolver uma inequação? Já tiveram contato com algum tipo de inequação e sua respectiva resolução? A resolução é "intuitiva", isto é, aplicam as regras de resolução de equação? Ou só conhecem os algoritmos? Têm problemas com a parte formal, de maneira que cometem erros sistemáticos, como por exemplo "multiplicar em cruz"? Já trabalharam a conversão do registro gráfico para o algébrico e/ou para o da língua natural? E vice-versa?

Todas estas perguntas precisavam de uma resposta para que pudéssemos elaborar a seqüência didática, a partir do conhecimento prévio do aluno e usando os tratamentos e as conversões de registros, tão importantes na atividade Matemática, como bem coloca Duval (1995) em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

> "Esta "utilidade" da variedade de registros de representação é um dado fundamental e trivial que ninguém contesta."[21] (DUVAL, 1995, p. 60, tradução nossa.)

IV.1.6.1. AS QUESTÕES DO DIAGNÓSTICO

Tendo em vista a razão pela qual aplicamos este teste, que chamamos de diagnóstico porque serviria para nos orientar na formulação de uma seqüência didática envolvendo uma abordagem funcional das inequações, com ênfase nos registros gráfico e da língua natural, elaboramos seis questões.

1. O que é uma inequação com uma incógnita em IR para você? Explique.
2. São dadas algumas expressões algébricas que representam relações no plano cartesiano. Indique quais delas representam uma equação (E), quais representam uma inequação (I) e quais representam uma função (F). Nas equações/inequações, indique qual é a incógnita. Nas funções, qual é a variável independente.

(a) $y = 2x + 3$ (b) $-x + 1 = 0$ c) $f(u) = u^3$

(d) $g(t) = at^2 + bt + c$ (e) $v^2 < v$ (f) $\frac{k+5}{k-3} < 0$

(g) $f(a) = \sqrt{3a-8}$ (h) $x^2 + y^2 \leq 9$.

3. Resolva as inequações, explicitando qual é a incógnita. Deixe os passos de sua resolução.

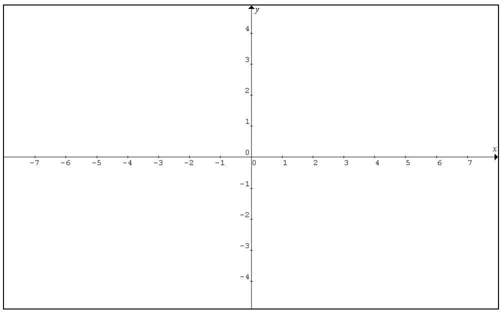
(a) $-3x < 6$ (b) $\frac{t}{-2} > 4$ (c) $|v| < 3$

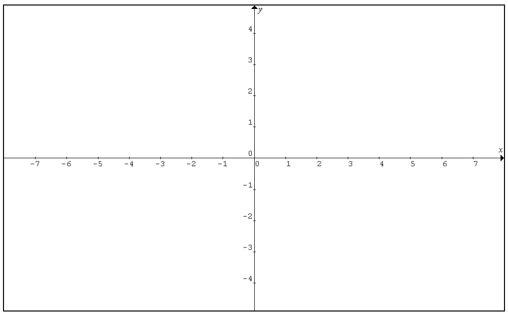
(d) $y^2 \leq 25$ (e) $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$ (f) $10 > 5x$

4. Em planos cartesianos independentes, hachureie o conjunto de pontos que satisfazem a expressão algébrica dada.

(a) $-3 \leq x \leq 3$ e $y = 0$ (b) $y \leq -1$

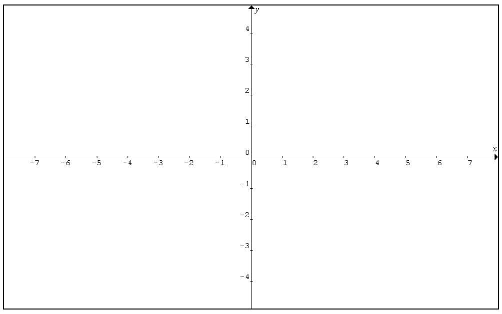
[21] "Cette "utilité" de la variété des registres de répresentation est une donnée fondamentale et triviale que personne ne conteste." (DUVAL, 1995, p. 60.)

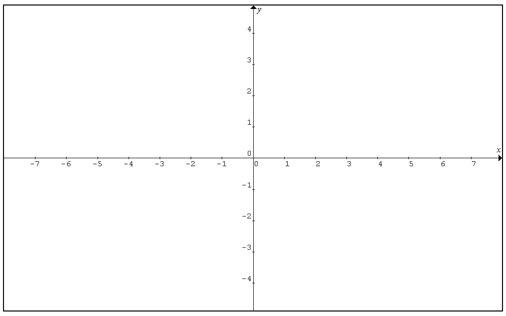




(c) $2 \leq x \leq 5$

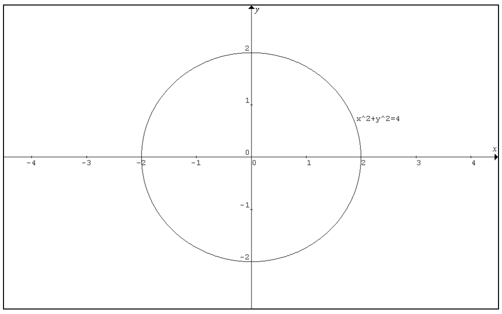
(d) $x = 0$ e $-2 < y < 2$

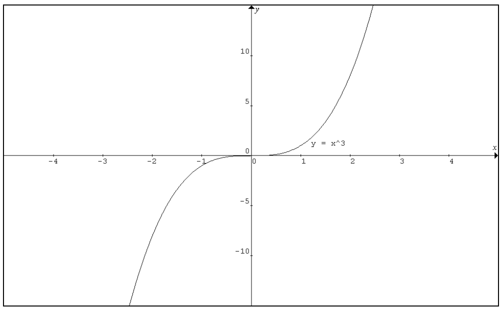




(e) $x^2 + y^2 \geq 4$

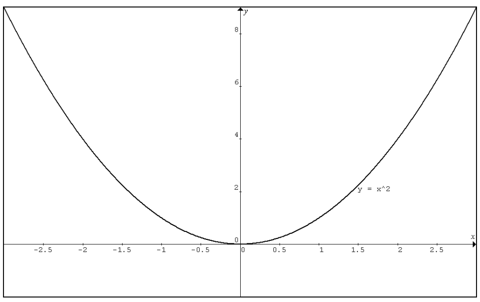
(f) $y > x^3$

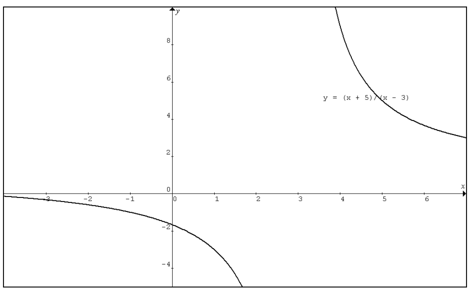




(g) $0 < y < x^2$

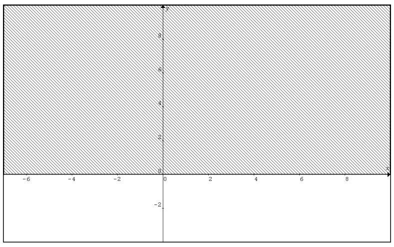
(h) $\dfrac{x+5}{x-3} > 0$



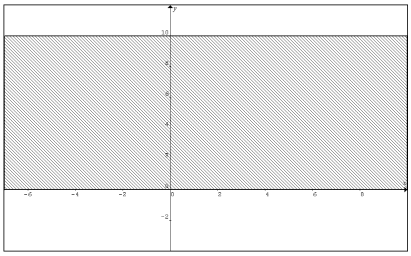


5. Descreva, na língua natural, os pontos que estão nas regiões hachuradas dos planos cartesianos.

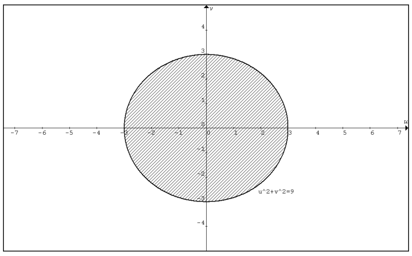
(a)



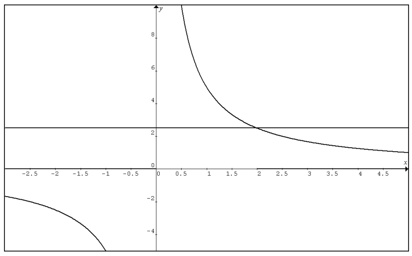
(b)



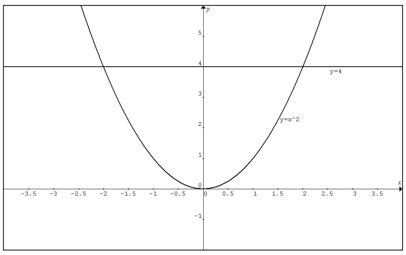
(c)



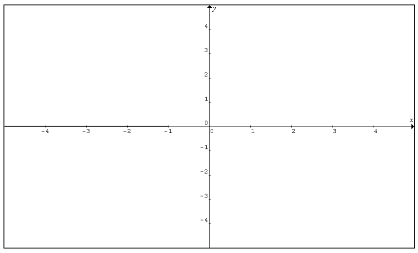
(d)



(e)



(f)



6. Agora descreva os pontos acima usando uma linguagem algébrica.

IV.1.6.2. OBJETIVOS DO DIAGNÓSTICO

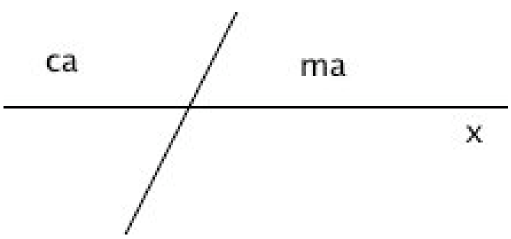
Colocamos, como principal objetivo deste diagnóstico, fazer uma análise quantitativa de algumas questões que consideramos fundamentais para um entendimento, por parte dos alunos, do que seja uma resolução funcional gráfica de inequações com uma incógnita real.

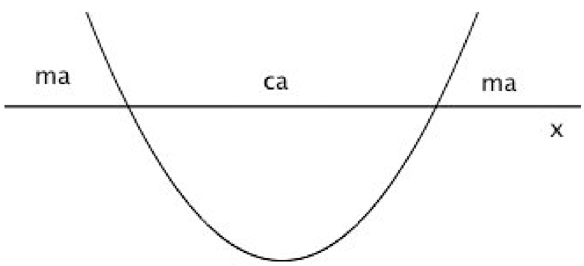
Estes alunos sabem o que significa “resolver uma inequação em IR?”. Sabem diferenciar equação de inequação? Fazem alguma diferença entre variável e incógnita? Como resolvem algumas inequações que têm a incógnita no denominador ou com expoente 2? Aplicam as técnicas de resolução de equação? Sabem utilizar o gráfico para resolver uma inequação? Diante de uma equação com duas incógnitas, conseguem ver também uma função, na forma implícita ou explícita?

Estas são algumas das perguntas que nos fazíamos e para as quais gostaríamos de ter respostas que, com este questionário, seriam apenas quantitativas.

IV.1.6.3. ANÁLISE DIDÁTICA DO DIAGNÓSTICO

Este questionário foi aplicado aos alunos em abril de 2005, o que significa que eles já haviam passado por situações de ensino e de aprendizagem do conceito de função e que podíamos supor que os registros gráfico, algébrico e da língua natural de uma função já haviam sido "tratados" e "convertidos" um no outro. De nossa experiência com o ensino e a aprendizagem do conceito de função, no entanto, podemos dizer que existe aí uma dificuldade resistente, talvez ligada ao próprio desenvolvimento matemático formal do conceito, muitas vezes reforçada pelas formas de trabalho em sala de aula, uma vez que os livros didáticos e os professores que consultamos induzem a visão ponto a ponto de um gráfico, estimulando os alunos a fazerem uma tabela, mesmo quando de posse do registro algébrico e não abrindo espaço para uma discussão do gráfico como um todo (ou visualização no sentido de Duval (1989)) (ver nossa análise de livros didáticos no parágrafo IV.1.5, página 75). Além disso, na Educação Básica, quase sempre os únicos gráficos realmente estudados são os das funções polinomiais de primeiro e de segundo graus, com grande ênfase em esquemas do tipo





o que parece dificultar o trabalho com os gráficos, como é o caso de um estudo funcional de equações e/ou inequações usando a resolução gráfica.

De qualquer modo, tínhamos dúvidas a respeito do conhecimento prévio dos alunos até mesmo sobre a resolução algébrica de uma inequação. Assim, a primeira questão foi colocada na língua natural, esperando uma explicação também na língua natural e no conjunto dos números reais (vale a pena observar que alguns livros didáticos da Educação Básica abordam o assunto inequações só no conjunto Z dos números inteiros criando assim, no nosso entender, uma grande dificuldade para a aprendizagem posterior e mais ampla do assunto). Para a resolução da questão, pedimos aos alunos que fizessem um trabalho individual, dentro da sala de aula, independente do professor, sem preocupação com nota ou com certo/errado, a partir do entendimento que tivessem do texto, uma vez que o objetivo era um levantamento das concepções prévias, visando um retorno na aula seguinte, com tempo didático para a aprendizagem do que seja "resolver uma inequação" do ponto de vista funcional.

A 1ª questão foi colocada com o objetivo de verificar se os alunos têm alguma idéia do que seja uma inequação e também se são capazes de descrever esta idéia na língua natural. Com a 2ª questão, pretendemos averiguar se os alunos sabem diferenciar uma equação, uma inequação e uma função e também se reconhecem uma variável e uma incógnita. A 3ª questão tem por objetivo o levantamento quantitativo de alguns erros que aparentemente a maioria dos alunos comete, como por exemplo a multiplicação da inequação por uma quantia negativa (3(a) e 3(b)) sem inverter o sinal da inequação, a "multiplicação em cruz" sem o cuidado com as quantias que podem ser negativas (3(e)), a extração da raiz dos dois lados sem os devidos cuidados com a $\sqrt{x^2}$ (3(d)) e ainda observar se os alunos mostram conhecimento ou não da função módulo (3(c)) e de algumas técnicas algorítmicas (3(f)).

Para efeitos de um diagnóstico, as questões 1, 2 e 3 já teriam fornecido subsídios para uma análise. No entanto, como queremos trabalhar os tratamentos e as conversões de registro e acreditamos que a maioria dos alunos, se teve algum contato com a resolução de inequações, o foi no registro algébrico, colocamos as questões 4, 5 e 6 para obter uma avaliação do conhecimento prévio dos alunos com relação à conversão do registro algébrico para o gráfico (questão 4), do registro gráfico para o da língua natural (questão 5) e finalmente do registro gráfico para o algébrico (questão 6).

A questão 2 contém oito itens, sendo quatro funções, três inequações e uma equação e, com ela, enfocamos a parte conceitual; a partir dela, procuramos identificar em quais elementos, isto é, em quais símbolos os alunos se baseiam para determinar com o que estão lidando.

Era esperado que os alunos identificassem, em cada item, a variável independente ou incógnita e se era uma função, inequação ou equação. A partir das respostas poderemos ter uma idéia dos elementos que levam os alunos a identificar esses objetos. Partimos primeiro da identificação, para podermos observar se estes elementos interferem na resolução de uma proposição dada, isto é, se o fato de o aluno atribuir a uma variável o nome de incógnita faz com que ele erre com mais freqüência, por exemplo.

Pensamos que a utilização das letras como representação de incógnitas, variáveis ou parâmetros pode constituir um obstáculo didático, dependendo da forma como é feita esta transposição. No entanto, as letras constituem uma ferramenta importante na Matemática, permitindo que sejamos genéricos, não nos restringindo a apenas um número; tomemos como exemplo uma demonstração em álgebra: os valores numéricos são utilizados para mostrar contra-exemplos, ao passo que as letras são utilizadas para garantir a validade de determinada regra para todos os elementos de um conjunto. Levando este fato em consideração, tivemos o cuidado de não utilizar sempre a mesma letra – principalmente a letra *x*, uma prática predominante nas escolas – para que possamos saber se o aluno está “preso” à utilização de uma letra específica ou se já está num grau mais elevado de abstração, ou seja, entende o significado da letra como variável, incógnita ou parâmetro, dependendo do contexto no qual elas são usadas.

Na questão 3 pedimos que os alunos explicitassem todos os passos da resolução, em cada um dos seis itens. Classificamos algumas categorias de erros que poderiam ocorrer nas resoluções: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por um número negativo sem inverter o sinal de desigualdade; erro aritmético; e não soube responder. Na primeira categoria, está caracterizado o erro quando é necessário multiplicar a inequação pela incógnita. O erro surge por falta de análise dos possíveis valores da incógnita, considerando-os sempre positivos. Na segunda categoria, encontram-se os erros relativos à multiplicação da sentença por um número negativo. Quando uma inequação é multiplicada por um escalar negativo, o sinal da mesma deve ser invertido, entretanto isso não aparece na resolução. A terceira, é formada por todos os erros relativos às operações aritméticas. Aqui se encontram os erros de divisão, multiplicação, operação inversa. Na quarta estão os que deixaram em branco ou explicitaram que não sabiam responder.

IV.1.6.4. COMPONENTES GERAIS DO DIAGNÓSTICO

Construímos uma tabela para discriminar as componentes gerais da atividade e em quais itens estas componentes são esperadas na resolução dos alunos. Este tipo de análise a priori foi inspirado pela leitura de Grugeon (1997).

De acordo com os objetivos do questionário e dos itens das questões, as componentes esperadas estão relacionadas com a forma da escrita (texto); os tipos de justificativa (texto); as respostas indicando equações, inequações ou funções (reconhecimento); as respostas indicando a variável ou a incógnita (reconhecimento); as resoluções (tratamento algébrico); as conversões entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural.

TABELA 10: COMPONENTES ESPERADAS NO DIAGNÓSTICO

	1	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h	3a	3b	3c	3d	3e	3f	4a	4b	4c
Texto em língua natural	s																	
Justificativa em língua natural	s																	
Reconhecimento de uma equação com uma incógnita			s													s		
Reconhecimento de uma inequação com uma incógnita						s	s		s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
Reconhecimento de uma função de uma variável		s		s	s			s										
Reconhecimento da incógnita			s			s	s		s	s	s	s	s	s	s			
Reconhecimento da variável		s		s	s			s								s	s	s
Resolução de uma equação																		
Resolução de uma inequação										s	s	s	s	s	s			
Conversão do registro algébrico para o gráfico																s	s	s
Conversão do registro gráfico para o da língua natural																		
Conversão do registro gráfico para o algébrico																		

	4d	4e	4f	4g	4h	5a	5b	5c	5d	5e	5f	6a	6b	6c	6d	6e	6f
Texto em língua natural						s	s	s	s	s	s						
Justificativa em língua natural																	
Reconhecimento de uma equação com uma incógnita	s								s	s	s				s	s	s
Reconhecimento de uma inequação com uma incógnita	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
Reconhecimento de uma função de uma variável									s	s	s				s	s	s
Reconhecimento da incógnita	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
Reconhecimento da variável									s	s	s				s	s	s
Resolução de uma equação																	
Resolução de uma inequação																	
Conversão do registro algébrico para o gráfico	s	s	s	s	s												
Conversão do registro gráfico para o da língua natural						s	s	s	s	s	s						
Conversão do registro gráfico para o algébrico												s	s	s	s	s	s

IV.1.6.5. ANÁLISE A POSTERIORI DO DIAGNÓSTICO

Colocamos, numa tabela EXCEL, as respostas obtidas na questão 1 do questionário diagnóstico. Escolhemos apenas *4 categorias* para analisá-las, porque nosso objetivo era verificar se os alunos têm alguma idéia sobre inequação e se conseguem expressar esta idéia em língua natural. Na *primeira categoria*, *texto correto*, colocamos 1 nas respostas que apresentaram *textos corretos* na língua natural, independentemente da resposta matemática estar certa ou errada e 0 nas demais. Na *segunda categoria*, *resposta correta*, pusemos o valor 1 se o aluno se referiu a uma inequação, mesmo que de um tipo particular, como por exemplo de 1º grau. Na *terceira categoria*, *texto de difícil entendimento*, colocamos 1 se não encontramos nexo no texto apresentado pelo aluno. Na *quarta categoria*, *resposta com erros*, avaliamos com 1 se apresenta erros conceituais, como por exemplo confundir equação com inequação.

Com as quatro categorias escolhidas, pudemos observar que, embora 66,7% dos alunos apresente um texto que pode ser considerado correto, apenas 19% dá uma resposta que consideramos correta (isto é, alunos que têm algum conhecimento do que seja uma inequação) e 61,9%, uma resposta com erros os mais variados.

A *questão 2* contém oito itens, sendo quatro funções, três inequações e uma equação. Utilizamos como critérios de avaliação a identificação dos itens como função, equação ou inequação, o significado da letra atribuído pelo aluno como incógnita ou variável e a identificação correta da letra utilizada no item.

No item b – uma equação – 76,2% dos alunos identificou a equação e 19,0% disse que era uma inequação. Com relação à atribuição do significado da letra, 61,9% dos estudantes respondeu que é incógnita e apenas 4,8% deles, variável. Apesar dos alunos utilizarem equações em diversas situações, já que estas fazem parte do currículo de Matemática desde a 7ª série, apenas 42,9% dos alunos acertou este item, chegando à solução correta x=1.

Estes dados sugerem que, mesmo com toda a Educação Básica (8 séries na época destes alunos, uma vez que são estudantes do primeiro ano de graduação), grande parte deles ainda não domina o aspecto intuitivo ligado às equações, qual seja, o próprio reconhecimento, ligado ao sinal de =.

Grande parte destes estudantes de 1º ano identificou corretamente as funções.

A relação que teve o menor índice de identificação como função foi *y=2x+3*, com apenas 66,7% (imaginávamos que, para estes alunos que acabavam de estudar as funções de uma variável, isto não ocorreria). Um dado interessante é que os alunos que identificaram a letra como uma incógnita foram os mesmos que identificaram este item como uma equação – o que ocorreu também aos que atribuíram à letra o significado de variável, identificando o item como função. Assim, podemos pensar que, para estes alunos, está concretizada a idéia de que em funções as letras são variáveis e que nas equações elas ganham o significado de incógnita.

Para a função $g(t) = at^2 + bt + c$ houve três (14,3%) alunos que pensaram ser uma equação e destes três um identificou a letra t como incógnita – o outro aluno identificou as letras a,b e c como incógnitas. Talvez a forma como as equações de segundo grau são abordadas nos livros didáticos contribua para a incorreta distinção entre função e equação. Apesar de 76,2% ter respondido que esta sentença é uma função, apenas 33,3% acertou a questão.

A função com a maior quantidade de acertos foi a $f(u) = u^2$: 47,6%. Esta também foi a função com o maior índice de reconhecimento como tal: 90,5%. Para a identificação da letra como variável ou incógnita, onze alunos identificaram como variável, nenhum pensou ser incógnita mas dez deixaram em branco. Provavelmente este índice de acertos deve-se ao fato de que este tipo de função é trabalhado em todo o Ensino Médio, tanto na Matemática como na Física.

Pelos dados apresentados, constatamos que as funções com notação do tipo f(.) – genericamente falando – são mais fáceis para o aluno identificar, pouco ou nada induzindo a confusão com equações.

Em todos os itens correspondentes às inequações, os índices de identificação como tal foram superiores a 76,0%, em contrapartida com as equações, que foram as que tiveram os maiores índices de respostas em branco.

A inequação $x^2 + y^2 \leq 9$ teve o menor índice de reconhecimento e o maior índice de respostas em branco – 76,2%. Esta inequação também foi a que apresentou o menor número de acertos: 8 alunos (38,1%). Alguns fatores que puderam contribuir para estes índices são a presença de duas incógnitas, o sinal $\leq$ – talvez induzindo, pela leitura do sinal, uma pequena relação com equação (já que este item teve o maior número de alunos que o identificaram como tal) – e o fato das duas incógnitas terem expoente.

A inequação $v^2<25$ teve os índices mais relevantes de acerto: 90,5% de identificação como inequação, 57,1% na identificação com incógnita e 66,7% na atribuição correta da letra. Onze alunos (52,4%) acertaram este item.

Embora as inequações apresentem resultados mais expressivos que as funções e equações, não é garantido que os alunos saibam resolvê-las. Até aqui pudemos observar que as inequações são facilmente identificadas pelos alunos; os sinais de desigualdade são essenciais nesta identificação, pois constituem o elemento que diferencia radicalmente as inequações das equações ou funções.

Na *questão 3*, foram analisados os processos de resolução dos alunos. Procurou-se identificar as componentes envolvidas na resolução, mesmo naqueles em que as passagens não foram explicitadas. Consideraram-se como acertos aqueles que obtiveram o resultado esperado, ainda que para isso tenham utilizado processos conceitualmente inadequados.

Como já explicitamos na análise didática, classificamos diversas categorias de erros que poderiam ocorrer nas resoluções: assumir que os valores da incógnita são positivos; multiplicar a sentença por número negativo sem inversão do sinal de desigualdade; erro aritmético; e não soube responder.

Na inequação $-3x<6$ apenas 2 alunos não souberam responder, sendo que um deles não respondeu nenhum item. Os erros mais comuns nesse item foram: multiplicar a inequação por (-1) em apenas um membro, mas alterando o sinal da desigualdade; multiplicar a inequação por um fator negativo sem alteração do sinal de desigualdade, com índices respectivos de 19,0% e 42,9%. Para exemplificar, transcrevemos duas resoluções encontradas no questionário.

1) $-3x<6$

$x>\frac{6}{3}$ → a passagem em que é feita a multiplicação por (-1) foi omitida

x>2

Parece que a omissão de uma passagem ocasionou o erro de não multiplicar o número seis por (-1).

2) -3x<6

$x<\frac{6}{-3}$ → Não alterou o sinal da desigualdade

x<-2

Já aqui o erro foi não inverter o sinal da desigualdade quando ela foi multiplicada por (-1). Apenas 38,1% dos alunos acertaram esta questão.

Um item semelhante ao item a (discutido nos parágrafos anteriores) foi o f, cuja inequação é 10>5x. O índice de acertos nesta questão é praticamente o dobro do do item a , alcançando 71,4% dos alunos. Os erros que ocorreram foram devido ao posicionamento da letra x e erros aritméticos. Uma solução errônea que vale a pena ser transcrita aqui é:

10>5x

-x>5-10

-x>-5

Nesta solução, fica evidente que as passagens referentes a operações inversas não estão claras para o aluno.

A única solução cujo erro foi na posição dos membros está transcrito a seguir:

10>5x

$\frac{10}{5}>x$

x>2

Ao trocar a posição dos membros, o aluno esqueceu, ou não levou em consideração, que x precisa ser menor do que dois para que a sentença continue sendo válida. Talvez a prática corrente em trabalhar com as letras somente do lado esquerdo do símbolo de comparação e os processos mecânicos de resolução, sem que se pense nos passos, contribuam para este tipo de erro.

Dos três alunos que não responderam, um parece ter esquecido de respondê-la, pois todos os outros itens estão respondidos.

O item em que os alunos cometeram mais erros foi o de multiplicação por fator negativo sem alterar o sinal da desigualdade, relativo à inequação $\frac{t}{-2}>4$. Nela, 66,7% dos alunos não trocaram o sinal da desigualdade quando realizaram a multiplicação. Todos apresentaram a solução, com a omissão de alguns da segunda linha.

$$\frac{t}{-2} > 4$$

$$t > 4(-2)$$

$$t > -8$$

Devido ao grande número de alunos que cometeram este erro, apenas 19% acertou este item. O fato de considerar a incógnita como positiva levou 52,3% dos alunos a cometerem o erro pertencente a esta categoria.

Na inequação $\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$ a solução abaixo exemplifica esta categoria.

$$\frac{5}{u} < \frac{5}{2}$$

$$\frac{10}{2u} < \frac{5u}{2u}$$

$$5u>10$$

$$\frac{5u}{5} > \frac{10}{5}$$

$$u>2$$

Ao propor esta solução, o aluno não se preocupou em avaliar os possíveis valores de u e parte da solução fica perdida, neste caso $u<0$.

Um problema identificado no item c foi com relação ao tratamento do módulo. Muitos alunos deixaram de respondê-lo por não saberem como operar com o módulo; apenas 9 responderam este item e, destes 9, sete apresentaram solução correta. As soluções incorretas que apareceram foram:

$|v|<3 \rightarrow v<-3$

$|x|<3$

$v<3$

$v>3$

Nestes erros, percebemos que o maior problema está no entendimento de como proceder com o módulo. Sem este, fica difícil a resolução deste item.

No item d apenas 3 alunos apresentaram uma solução correta e 12 (representando 57,1%) cometeram o erro de não considerar a restrição dos números menores que (-5).

As soluções que apareceram com esta característica foram:

$y^2 \leq 25$

$y \leq 25^{1/2}$

$y \leq 5$

ou

$y^2 \leq 25$

$(y^2)^{1/2} \leq 25^{1/2}$

$y \leq \pm 5$

$y \leq 5$ ou $y \leq -5$

Nestas duas soluções, os valores menores que menos cinco são considerados, porém estes não são soluções válidas para esta inequação. A sutil distinção entre as duas soluções é que, na segunda, o aluno ainda se preocupou com os valores menores que 0 – devido à relação que estabeleceu com as regras de potenciação – porém não fez a reflexão de que os valores menores que menos cinco estão inclusos nos valores menores que cinco e, portanto, alguma coisa estranha há em sua solução.

O item 4(a) teve um bom índice de acertos (90%), o que pode ser explicado pelo tipo de questão, quando comparamos com os resultados obtidos nos itens 4(b), 4(c) e 4(d): os alunos parecem não se dar conta da informação dada pela equação y=0 em 4(a) ou x=0 em 4(d), que não têm similar em 4(b) e em 4(c), nas quais respectivamente 48% e 57% dos alunos colocaram os pontos sobre um dos eixos, ignorando a informação implícita sobre a outra coordenada.

Nos demais quatro itens, o índice de acertos é muito pequeno, sendo respectivamente 19%, 5%, 10% e 0%, enquanto as respostas em branco aumentam e as consideradas como outros também. Uma possível explicação para isto é que os pontos procurados estão agora sobre o plano cartesiano, numa localização que depende de um gráfico, de função ou não e não estão mais sobre um dos eixos. Vale a pena lembrar que os alunos resolveram as questões do diagnóstico depois de terem estudado funções e seus gráficos nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Para analisar os textos elaborados pelos alunos para a *questão 5*, escolhemos 5 categorias nos itens 5(a), 5(b), 5(c), 5(d) e 5(f) e 6 no item 5(e), por causa do número de respostas em branco, considerando que o problema envolvia uma parábola: *texto correto*, para o caso de um texto bem escrito, independentemente de estar correto; *resposta correta*, para os textos que descrevem corretamente os pontos hachurados; *texto difícil*, quando é de entendimento precário, ou por faltar coerência ou por não conseguir dar uma resposta à pergunta feita; *resposta algébrica*, para os alunos que insistiram em não descrever na língua natural e usaram a simbologia algébrica; *referência aos eixos*, para classificar respostas em que o aluno cita um ou dois dos eixos coordenados, parecendo acreditar que o par (x, y) representa dois pontos, um sobre o eixo horizontal e outro sobre o vertical, como por exemplo "Todos os pontos que estão: entre zero e dez no eixo das ordenadas"; *referências à parábola*, no caso de 5(e), porque alguns alunos descreveram propriedades da parábola, como por exemplo vértice, raízes e concavidade; *pontos sobre a circunferência*, para classificar respostas a 5(c) que não incluem o interior do círculo. Podemos observar que o índice de textos considerados corretos é bastante alto nos itens 5(a), 5(b), 5(c) e 5(e) e baixo no item 5(d), que pode ser considerado o mais difícil da questão, uma vez que lida com o gráfico de uma função não usual e a intersecção deste gráfico com uma reta paralela ao eixo horizontal. O maior índice de acertos ocorre no item 5(f), porque os pontos em destaque estão sobre o eixo Ox e isto pode, de alguma forma, mascarar a resposta correta (o aluno não precisa se preocupar com a relação entre as coordenadas, porque uma delas é zero e é bastante comum confundirem o valor da coordenada sobre um dos eixos com o ponto respectivo). Nos itens 5(c), 5(d), 5(e) e 5(f) a quantidade de respostas em branco aumenta, acreditamos que porque são situações menos usuais, em que não estamos trabalhando nem regiões nem retas. Como avaliação final, podemos dizer que a maioria destes alunos não consegue descrever, na língua natural, os pontos que estão sobre um gráfico de uma função ou sobre uma região circular.

V. A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

No capítulo anterior, justificamos nossa escolha por algumas das fases de uma engenharia didática como método de pesquisa (ARTIGUE, 1995), quais sejam: (1) análises preliminares; (2) concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de ensino; (3) análise de protocolos. Também explicitamos nossas análises preliminares, que incluem uma revisão de literatura; uma análise mais aprofundada de alguns aspectos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1995, 2000); uma reflexão sobre as contribuições que cada abordagem, a algébrica e a funcional gráfica, pode trazer ao ensino e à aprendizagem da resolução de inequações; um resumo do perfil dos sujeitos da pesquisa; uma análise de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental; uma análise de alguns livros didáticos do Ensino Médio; e um estudo diagnóstico, realizado junto ao grupo de alunos que participaram de nossa pesquisa, antes da aplicação da seqüência didática.

Neste capítulo, descrevemos a fase (2) de nosso método de pesquisa, concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de ensino sobre o assunto resolução de inequações com uma incógnita, numa abordagem que estamos chamando de funcional gráfica genérica.

V.1. CONCEPÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Fazemos, neste parágrafo, uma análise didática da situação “Resolver a inequação ...”, na qual é dada uma inequação do tipo “alguma coisa dependendo de x”<”outra coisa dependendo de x”, considerando uma *abordagem funcional gráfica*, com o uso de *três registros de representação*, à luz da *teoria cognitiva* de Fischbein (1993). Esta análise faz-se necessária, neste contexto, porque ao concebermos a seqüência didática, tínhamos em mente verificar, nas respostas dadas pelos indivíduos dos dois grupos que participaram da pesquisa, se aparecem os *aspectos formais, algorítmicos e intuitivos* de Fischbein (1993), à medida que os sujeitos utilizam os tratamentos e as conversões de registros, para responder as questões propostas. Ainda mais, gostaríamos de conseguir, ao final da aplicação da seqüência, que um número significativo de pesquisados tenha inter-relacionado aqueles aspectos, como defende aquele pesquisador. Como pesquisadores, acreditamos que o uso do registro gráfico, aliado ao algébrico e ao da língua natural, possa favorecer essa desejada inter-relação.

Para que o sujeito seja capaz de resolver uma inequação “alguma coisa dependendo de x”<”outra coisa dependendo de x”, na *abordagem funcional gráfica*, concordamos com Sackur (2004) de que o sujeito precisa realizar um esquema de trabalho que envolve pelo menos cinco etapas

inequação $\xrightarrow{1}$ criação de duas funções $\xrightarrow{2}$ identificação do y $\xrightarrow{3}$ elaboração dos gráficos $\xrightarrow{4}$ comparação dos valores de y $\xrightarrow{5}$ leitura dos valores de x

e de que estas etapas não são espontâneas nem naturais. Precisam, portanto, ser trabalhadas pelo professor em sala de aula. Analisando cada uma delas, à luz dos registros de representação de Duval (2000) e dos aspectos de Fischbein (1993) vemos que exigem um conhecimento bem fundamentado de números reais, de função e de gráfico de função: diante de uma inequação, o sujeito precisa lê-la e interpretá-la, o que exige certa desenvoltura na língua natural e no registro algébrico, envolvendo aspectos intuitivos, algorítmicos e formais; na etapa 1, para criar as duas funções (aspecto algorítmico), é preciso ter familiaridade com estas (aspecto intuitivo), a ponto de abstrair o sinal de desigualdade (aspectos formal e algorítmico) para focar em cada um dos membros separadamente e enxergá-los como funções (aspecto formal), o que pressupõe novamente um certo domínio da língua natural e do registro algébrico; na etapa 2, a identificação do y exige o entendimento de função (aspectos algorítmico e formal), pois na verdade queremos identificar o primeiro membro com a variável dependente y_1 de uma função e o segundo, com a variável dependente y_2 de uma outra, para enfim comparar y_1 com y_2 por meio do sinal de desigualdade (aspectos algorítmico e formal), usando fortemente a língua natural e o registro algébrico para ler e interpretar uma expressão do tipo $y_1=f(x)<y_2=g(x)$; na etapa 3, a elaboração dos gráficos pode ser a etapa menos complicada, pois podemos utilizar ou uma calculadora gráfica ou um software gráfico (que nos dão os gráficos a partir do registro algébrico) ou ainda fornecer os gráficos prontos, mas para que o processo não fique meramente

algorítmico, é preciso que o sujeito tenha a idéia (aspecto intuitivo) de usar o registro gráfico para ajudar na resolução algébrica (aspectos algorítmico e formal); a etapa 4 parece-nos a mais difícil pois, na leitura e na interpretação de um gráfico, os aspectos intuitivos podem bloquear os aspectos algorítmicos e formais: o gráfico é definido matematicamente (aspecto formal) por meio de duas retas ortogonais que vão fazer o papel das variáveis (dependente e independente), numa certa ordem e com uma interpretação que podemos chamar simultaneamente de geométrica e aritmética porque um ponto sobre o eixo horizontal tem uma abscissa que corresponde ao valor da variável independente (o x da inequação) e um ponto sobre o eixo vertical tem uma ordenada que representa o valor da variável dependente (o y_1 e o y_2 da inequação). Duval (2000) classifica a conversão do registro algébrico de uma função para o registro gráfico de não congruente, porque cada componente do primeiro não é convertida necessariamente numa única componente do segundo e concordamos com ele de que conversões deste tipo não são naturais e, portanto, precisam ser trabalhadas pelo professor, em sala de aula. Na etapa 4, o sujeito precisa ainda comparar os valores de y_1 e y_2 (aspecto algorítmico) para decidir quais pontos do gráfico devem ser considerados para resolver a inequação; na etapa 5, é necessário conhecer os números reais (supostamente estudados no Ensino Fundamental e o professor pode aproveitar o momento para reforçar algumas noções que julgar importantes), as funções e os gráficos, para fazer a projeção vertical dos pontos escolhidos na etapa 4 e obter como resposta os valores de x, sobre o eixo horizontal, que são a solução do problema inicial.

Para superar a etapa 1, em ambos os grupos de sujeitos, consideramos atividades realizadas anteriormente, sobre funções e gráficos.

Com o grupo de alunos, este trabalho foi desenvolvido nos quatro meses que antecederam a aplicação da seqüência, como parte integrante da disciplina Cálculo 1.

Com o grupo de professores, de uma forma similar à que havia sido feita com o grupo de alunos, realizamos três atividades (SOUZA; CAMPOS, 2007; LIMA; SOUZA, 2007), cujos principais objetivos são: trabalhar o tratamento do registro gráfico e as conversões entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural; estimular a visualização global dos gráficos (DUVAL, 1999), não como um conjunto de pontos com coordenadas numéricas, mas como uma trajetória sobre a qual podemos ver a relação entre as variáveis dependente e independente. A construção destas três atividades fundamentou-se na existência de um conjunto de funções básicas (chamadas funções de referência), a partir das quais podemos criar outras funções, chamadas associadas e, em cada atividade, o professor podia usar o software Cabri-géomètre II para obter os gráficos das funções de referência ou das associadas, que já estavam à disposição no menu (ver mais detalhes no parágrafo IV.1.4, página 74).

Consideramos como funções de referência: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = |x|$, $j(x) = x^3$, $k(x) = \frac{1}{x}$, $l(x) = \sqrt{x}$, porque são funções cujos gráficos podem ser facilmente obtidos pela análise da expressão algébrica e, com isto, podem ser visualizados globalmente, tanto no papel e lápis como numa calculadora ou num computador. E como "funções associadas" as que podem ser obtidas destas pelas operações "somar uma constante", "multiplicar por uma constante", "colocar o módulo" ora na variável independente, ora na dependente.

Os professores, então, precisavam responder as questões propostas, que envolvem o domínio, a imagem, a simetria do gráfico e a expressão algébrica, tanto das funções de referência, como das associadas.

Com o uso concomitante da expressão algébrica, da língua natural e do gráfico, não pretendíamos que os sujeitos "aprendessem" a fazer as conversões, como Duval (1995, 2000) propõe, mas acreditávamos que seria possível conseguir que estes sujeitos, mais maduros matematicamente do que os alunos da Educação Básica, fossem estimulados a fazer as conexões e as inter-relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ligados ao conceito de função. Ainda mais, que conseguissem ampliar grandemente o arquivo pessoal de funções e de gráficos, no que Duval (1999) chama de imagens mentais,

> "A representação é a conseqüência de um acesso direto ao objeto [...] (da visão para a memória) [...] disponibilidade interna daquilo que foi visto (*imagens mentais*)"[22] (DUVAL, 2000, p.1-66, tradução nossa).

na direção do que estamos chamando de abordagem genérica.

---

[22] "The representation IS THE OUTCOME of a direct access to object [...] (from **vision** to memory) [...] internal availability of **what has been SEEN** [...] (*mental images*)." (DUVAL, 2000, p.1-66).

Com este trabalho, acreditamos ser possível superar as dificuldades da etapa 1 da abordagem funcional gráfica da resolução de inequações, porque pode ficar entendido tanto o significado de uma expressão algébrica do tipo f(x)= ... =y quanto o significado global do gráfico de uma função.

A etapa 2 envolve o tratamento do registro algébrico e a conversão do registro algébrico para o da língua natural. Aceitamos e defendemos a tese proposta pela Teoria das Representações Semióticas (DUVAL, 1995, 2000), pela qual o professor é o responsável por implementar o trabalho com diferentes sistemas de representação, respectivos tratamentos e conversões, pelo menos uma destas não congruente, para que o sujeito não confunda a representação com o objeto representado. Além disso, acreditamos, como Fischbein (1993), que o aluno precisa inter-relacionar os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos num certo conhecimento matemático para adquiri-lo e julgamos necessário que o professor promova, em suas atividades, a oportunidade para que isso ocorra.

Acreditamos que a etapa 3, como já dissemos no parágrafo IV.1.4, página 74 era a menos problemática, porque nossos sujeitos já estavam acostumados a utilizar tanto o Cabri-géomètre II, como o GRAPHMATICA, em ambiente informático. Tínhamos, a nosso favor, o fato de que o trabalho com o computador ainda desperta o interesse da maioria dos indivíduos, só não daqueles que tiveram uma formação básica em Matemática baseada apenas nos algoritmos e nos procedimentos e, por razões que não nos interessa discutir aqui, sempre tiveram "êxito" e acreditam que não precisam nada mais além disso.

Utilizamos o software Graphmatica for Windows, version 1.60, desenvolvido por Keith Hertzer - Copyright (c) 1997 kSoft, Inc. (http://www.pair.com/ksoft/), que tínhamos à disposição no laboratório de informática. Escolhemo-lo para o traçado rápido e eficiente de gráficos, pois se trata de um software amigável, bastando digitar, na linha de comando, as expressões algébricas das funções na forma y=. Só o usamos para agilizar a obtenção de gráficos em algumas questões da seqüência que, na verdade, poderiam ser feitas apenas com papel e lápis, se tivéssemos incorporado os gráficos a estas questões.

O software Cabri-géomètre II Plus, ao qual tínhamos fácil acesso no Laboratório de Matemática, foi utilizado por duas razões. Primeiro, por causa da dinamicidade, pois movimentando os pontos, por exemplo em cima de um gráfico, os usuários podiam elaborar conjecturas sobre o comportamento das coordenadas, antes de pensar na formalização do problema. Segundo, porque permite a construção de macros; com isto, o instrutor pode modificar o menu, aumentando-o, diminuindo-o ou modificando-o. No caso de nossa seqüência, pudemos deixar à disposição os gráficos de algumas funções que iríamos utilizar, bem como uma edição numérica, que permitia a movimentação destes gráficos por translações horizontais ou translações verticais.

Diríamos que as etapas 4 e 5 são o foco da nossa pesquisa. Como despertar nos sujeitos a necessidade de entender realmente a abordagem funcional gráfica? O que ela pode trazer de novo e de interessante? Por que é importante apreender o que está por trás da resolução de uma inequação? Como o registro gráfico pode ajudar? Por que é (ou não é) importante aprender "tudo" sobre a função afim, antes de qualquer outra função? Por que não tentar uma abordagem mais genérica das funções, uma vez que os gráficos podem ser obtidos facilmente com a ajuda de qualquer software gráfico e daí é possível levá-los para a sala de aula? Por que insistir numa abordagem ponto a ponto das funções, com as tabelas ou com o cálculo de alguns valores, que tem-se mostrado ruim e até mesmo danosa para a aprendizagem posterior da Matemática, como deixam entrever pesquisas e experiências já realizadas (DUVAL, 1993; KIERAN, 1993; DA SILVA et al., 2002a, 2002b, 2002c)?

Assim, pusemos como hipótese para a elaboração de nossa seqüência didática, uma abordagem funcional gráfica, fazendo uso de três tipos de registros, o da língua natural, o algébrico e o gráfico.

À luz dessas considerações, fomos analisar alguns livros didáticos de Matemática que tratam os assuntos função, gráfico e inequação, para verificar se é feita uma abordagem funcional, se são utilizados os registros da língua natural, o algébrico e o gráfico e se, quando o são, promovem a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos nestes conhecimentos (ver detalhes desta análise no parágrafo IV.1.5, página 75).

A partir da análise desses livros didáticos, pudemos perceber que, na maioria deles, os aspectos formais ligados ao assunto função não aparecem e os aspectos algébricos também não são devidamente explorados, pois as funções são tratadas separadamente por tipo (afim e quadrática com muita ênfase, trigonométrica, exponencial e logarítmica), quase sempre a partir de sua expressão algébrica e sem nenhuma proposta de discussão sobre o significado desta. Por exemplo, no início do tópico “Estudo do sinal da função afim”, é apresentado um problema, seguido da frase “Observe que o resultado final é dado por ...” e a resolução completa aparece. O parágrafo seguinte é “Em situações como esta, dizemos que foi feito o estudo do sinal da função, ...” e o tópico termina aí. Os tópicos seguintes são “Raiz ou zero da função afim” (definição e aspecto algorítmico), “Interpretação geométrica” (aspecto algorítmico, do tipo faça assim) e “Estudo do sinal pela análise do gráfico” (aspecto algorítmico, com um exemplo).

Com relação ao assunto gráfico de função, em geral, o aspecto formal não aparece, ficando só com os aspectos algorítmicos e intuitivos. Vemos aí muitos problemas, uma vez que o aspecto formal, no caso dos gráficos, é importante pois trata-se de uma representação sofisticada e a conversão entre os registros gráfico e algébrico é não congruente. Quando a conversão é não congruente, o professor precisa trabalhá-la com cuidado, deixando bem claro o que significa cada componente em cada registro, para que o sujeito perceba como se realiza essa conversão.

V.2. ELABORAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A principio, elaboramos cinco atividades, para serem aplicadas a dois públicos: uma turma de primeiro ano de Matemática-Licenciatura (alunos estes que passaram pelo teste diagnóstico, cujo resumo da análise apresentamos no parágrafo IV.1.6.3, página 99) e uma turma de professores de Matemática da rede pública estadual de ensino (que participam de um projeto de pesquisa, dentro do qual têm oficinas semanais de 3 horas para discutir conteúdos e abordagens para o ensino e a aprendizagem da Matemática da Educação Básica).

Com a atividade 1 da nossa seqüência queríamos tentar incutir nos nossos sujeitos (professores e futuros professores) a importância de entender que qualquer ponto do sistema cartesiano tem duas coordenadas, a primeira representando a coordenada horizontal e a segunda, a vertical. E que uma frase do tipo “$x<a$” tem

uma interpretação não trivial do tipo “estamos pensando nos pontos do plano que têm primeira coordenada menor do que *a* e segunda coordenada qualquer”.

Na atividade 2 só utilizamos funções afins, porque são as que são mais trabalhadas nos livros didáticos. O principal objetivo que colocamos na elaboração desta atividade foi estimular os sujeitos a descreverem, a partir do registro gráfico e usando tanto a língua natural como o registro algébrico, propriedades dos pontos sobre esses gráficos, ora focando na intersecção de duas retas, ora pedindo para compararem pontos sobre retas diferentes.

Na atividade 3 utilizamos funções variadas, tais como polinomiais do segundo grau, uma cúbica e uma racional. Colocamos como principal objetivo que os sujeitos descrevessem, a partir do registro gráfico e usando a língua natural e o registro algébrico, pontos sobre os gráficos dados que obedecessem alguma condição, ora sobre a abscissa, ora sobre a ordenada. A partir dessas descrições, pedíamos que os sujeitos relacionassem esses pontos com alguma inequação.

Na atividade 4 também utilizamos funções variadas. O principal objetivo foi que os sujeitos fizessem conexões entre os resultados obtidos com as duas resoluções, a algébrica e a gráfica, pedindo a eles que explicassem as semelhanças e as diferenças observadas.

Na atividade 5, o principal objetivo que colocamos foi o de que os sujeitos estabelecessem relações entre as resoluções algébrica e gráfica, no caso específico de inequações do tipo $x^2 \leq a$, com a um número real positivo não nulo.

V.3. ANÁLISE DIDÁTICA DAS ATIVIDADES DA SEQÜÊNCIA

Nos dois parágrafos anteriores, expusemos as idéias que orientaram a concepção e a elaboração de nossa seqüência didática.

Neste parágrafo, apresentamos a análise a priori que fizemos de cada uma das cinco atividades originais e da atividade 3 (cont.), que foi um desdobramento da atividade 3, só para o grupo de alunos, porque estes não conseguiram terminá-la no tempo de aula originalmente previsto. A análise que apresentamos aqui é resultado de algumas conversas muito produtivas e muito esclarecedoras que tivemos com o

Professor Michel Henri[23], durante sua passagem pela PUC/SP, nos meses de maio e junho de 2006.

Para cada uma das atividades, apresentamos as **questões dadas aos sujeitos**, os **objetivos da atividade**, as **ações esperadas em cada item**, a **análise didática** e as **componentes gerais esperadas**.

As **ações esperadas em cada item** são as que cada sujeito precisa realizar para dar uma resposta à pergunta feita e, em geral, cada item exige uma única ação. Esta, por sua vez, irá provocar uma resposta que, analisada, evidenciará, ou não, o que estamos chamando de componentes gerais esperadas (ver a seguir).

Na **análise didática**, colocamos nossas escolhas do ponto de vista didático, tais como os aspectos formais que nos motivaram como um todo, as ferramentas que decidimos utilizar, a dinâmica da aplicação, as características formais que podem ser exploradas em cada questão e a dinâmica da continuação.

As **componentes gerais esperadas** são discriminadas numa tabela, para cada um dos itens de cada atividade e o foram baseadas nos quadros teóricos que nos inspiraram e na leitura de Grugeon (1997).

São as etapas que consideramos importantes no raciocínio do sujeito, quando este precisa agir para dar resposta a algum questionamento proposto e que, portanto, estão subjacentes aos enunciados. Para dar respostas às perguntas feitas, os sujeitos vão ter que desenvolver algumas etapas do raciocínio, que passam pelo que estamos chamando de componentes gerais esperadas.

No caso da nossa seqüência, pelas escolhas que fizemos, tanto do assunto como dos quadros teóricos, essas etapas vão estar relacionadas ao uso de vários registros, bem como aos tratamentos e às conversões entre esses registros, sempre visando a interação e a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto resolução de inequações com uma incógnita..

Assim, por exemplo, no item 2 da atividade 1, “Crie um ponto P sobre a reta vermelha e peça suas coordenadas. Movimente o ponto P. O que você observa nas coordenadas do ponto P?”, destacamos como ação esperada “Observar que a primeira coordenada de um ponto sobre uma reta vertical permanece constante e

[23] IREM, Besançon (France) Université de Franche-Comté.

igual à “abscissa” da reta” e como componentes gerais esperadas (1) “Observação dinâmica (visualização) da variação das duas coordenadas dos pontos sobre uma reta vertical fixa”, (2) “Conversão do registro gráfico para o da língua natural”, (3) “Conversão do registro algébrico para o da língua natural”, (4) “Associação da “abscissa” de uma reta vertical com as abscissas dos pontos sobre ela”, (5) “Observação dinâmica (visualização) da relação entre a “abscissa” de uma reta vertical e as abscissas dos pontos sobre ela”.

Ao focar a atenção na pergunta feita sobre as coordenadas do ponto P, o sujeito age e “*observa* que a primeira coordenada de um ponto sobre uma reta vertical permanece constante e igual à “abscissa” da reta” porque, ao movimentar o ponto e ao mesmo tempo olhar as coordenadas, percebe que a primeira delas não varia. Para dar a resposta no protocolo, o sujeito precisa desenvolver um raciocínio em etapas que passam pelo que estamos chamando de componentes gerais esperadas. Ao movimentar o ponto, conforme é pedido no item, o sujeito (1) observa a variação das duas coordenadas, o que, no nosso entender, vai ajudar na visualização (DUVAL, 1999) de gráficos; (2) faz a conversão do registro gráfico para o da língua natural, porque o ponto percorre o gráfico e a resposta é pedida na língua natural; (3) ao mesmo tempo, vê o registro algébrico (coordenadas dos pontos) e precisa converter para a língua natural; (4) além de observar que a abscissa dos pontos que se movimentam tem sempre o mesmo valor, ainda precisa ver que este valor é o da abscissa do ponto onde a reta corta o eixo horizontal (poderíamos dizer, citando Duval (1993), que o sujeito discriminou uma componente visual que poderá ajudá-lo a fazer a conversão da reta vertical para o registro algébrico x=cte.); (5) fazendo variar a reta vertical, o sujeito percebe (novamente a visualização) uma outra componente visual, que também poderá ajudá-lo a associar uma reta vertical com os registros algébricos do tipo x=cte.

V.3.1. ATIVIDADE 1

V.3.1.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

1. Dentro do software Cabri II, abra o arquivo Reta1.fig

2. Crie um ponto P sobre a reta vermelha e peça suas coordenadas. Movimente o ponto P. O que você observa nas coordenadas do ponto P?
3. Descreva, em palavras, as coordenadas do ponto P quando ele "caminha" sobre a reta vermelha.
4. Usando a ferramenta Edição Numérica, varie o valor de N1. O que acontece com a reta vermelha? Descreva isto em palavras.
5. Escolha um valor para N1. Você escolheu o valor N1 =   . Movimente o ponto P. O que você observa nas coordenadas do ponto P?
6. Qual a relação entre o valor de N1 e as coordenadas dos pontos sobre a reta vermelha correspondente?
7. Crie um ponto Q sobre a reta rosa e peça suas coordenadas. Movimente o ponto Q. O que você observa nas coordenadas do ponto Q?
8. Descreva, em palavras, as coordenadas do ponto Q quando ele "caminha" sobre a reta rosa.
9. Usando a ferramenta Edição Numérica, varie o valor de N2. O que acontece com a reta vermelha? O que acontece com a reta rosa? Descreva isto em palavras.
10. Escolha um valor para N2. Você escolheu o valor N2 =   . Movimente o ponto Q. O que você observa nas coordenadas do ponto Q?
11. Qual a relação entre o valor de N2 e as coordenadas dos pontos sobre a reta rosa correspondente?
12. Esconda a reta vermelha, usando a ferramenta Esconder/Mostrar. Fixe um valor para N2 e a reta rosa correspondente. Crie um ponto X, livre, que não esteja sobre a reta e peça as coordenadas do ponto X.
13. Movimente o ponto X, mantendo-o "acima" da reta rosa. A primeira coordenada do ponto X pode ter qualquer valor? Justifique porque você acha isto.
14. A segunda coordenada do ponto X pode ter qualquer valor? Justifique porque você acha isto.

15. Como você escreveria, com símbolos matemáticos, o que acontece com as coordenadas de X quando ele fica “acima” da reta rosa escolhida.
16. Agora, movimente o ponto X, mantendo-o “abaixo” da reta rosa. O que você pode observar nas coordenadas de X? Justifique com suas palavras.

V.3.1.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 1

1. Localizar pontos no plano cartesiano, destacando a necessidade de indicar <u>duas</u> coordenadas, seja na linguagem algébrica, seja na natural.
2. Ler e interpretar gráficos e regiões.

V.3.1.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Abrir um arquivo pronto dentro do software, no qual é possível movimentar uma reta paralela ao eixo horizontal por meio da edição numérica correspondente ao valor de sua “ordenada” e uma vertical por sua “abscissa”.
2. Observar que a primeira coordenada de um ponto sobre uma reta vertical permanece constante e igual à “abscissa” da reta.
3. Escrever alguma frase relativa à localização dos pontos P. Esta frase pode ser na linguagem algébrica simbólica ou na natural.
4. Associar, de alguma forma, o valor numérico da “abscissa” da reta com sua posição no plano cartesiano.
5. Visualizar que quando a reta vertical muda de “abscissa”, a primeira coordenada dos pontos P também muda e permanece igual à “abscissa” da reta.
6. Escrever alguma frase, em linguagem algébrica simbólica ou natural, que relacione a “abscissa” da reta e o valor da primeira coordenada dos pontos sobre ela.
7. Observar que a segunda coordenada de um ponto sobre uma reta horizontal permanece constante e igual à “ordenada” da reta.

8. Escrever alguma frase relativa à localização dos pontos Q. Esta frase pode ser na linguagem algébrica simbólica ou na língua natural.
9. Associar, de alguma forma, o valor numérico da “ordenada” da reta com sua posição no plano cartesiano.
10. Visualizar que quando a reta horizontal muda de “ordenada”, a segunda coordenada dos pontos Q também muda e permanece igual à “ordenada” da reta.
11. Escrever alguma frase, em linguagem algébrica simbólica ou natural, que relacione a “ordenada” da reta e o valor da segunda coordenada dos pontos sobre ela.
12. Fixar uma reta horizontal, que corresponde a uma função constante e observar os pontos que não estão sobre ela.
13. Observar o comportamento da primeira coordenada dos pontos que estão “acima” de uma reta horizontal e escrever algum texto sobre o que pode ser observado.
14. Observar o comportamento da segunda coordenada dos pontos que estão “acima” de uma reta horizontal e escrever algum texto sobre o que pode ser observado.
15. Dar algum registro algébrico do que é observado quando os pontos ficam “acima” de uma reta horizontal.
16. Observar o comportamento das coordenadas de um ponto que está abaixo de uma reta horizontal e dar algum registro disto, quer na língua natural, quer na linguagem algébrica.

V.3.1.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 1

A localização de pontos no plano cartesiano precisa ser bem entendida para que um sujeito aprenda a ler os gráficos de funções como um subconjunto desse plano. Esta leitura, no entanto, precisa ser dinâmica, isto é, de forma global, de tal modo que permita ao sujeito visualizar, no sentido de Duval (1999), o que ocorre no todo e não somente em alguns pontos escolhidos pela associação de um par de coordenadas ao ponto correspondente. Como uma forma de desenvolver essa visualização entre alunos de primeiro ano da formação inicial em Matemática, elaboramos esta atividade, explorando a conversão entre o registro gráfico, o da língua natural e o algébrico, para ser desenvolvida individualmente, sem intervenção, durante 100 minutos, no laboratório de informática e utilizando o software Cabri-géomètre II. Ver as razões para estas escolhas no parágrafo IV.1.4, página 74).

Antes de aplicarmos esta primeira atividade, os alunos tiveram contato com o software e já havíamos discutido, em sala de aula, a necessidade de entendermos em que universo estamos trabalhando, em termos de número de coordenadas para localizar um ponto e em termos do registro algébrico que se nos apresenta para identificar um ponto. Além disso, pusemos em discussão a importância de usar bem os registros de que dispomos para expressar nossas idéias por escrito, seja para uso próprio, seja para comunicar a outros essas idéias, o que certamente passa pelo uso cuidadoso e criterioso dos registros do tipo simbólico e, sempre que necessário, pelo registro sempre válido da língua natural.

Ao desenvolvermos a primeira atividade da seqüência, optamos por utilizar uma abordagem "dinâmica" para localizar as duas coordenadas de um ponto, a primeira representando uma variável que "corre" no eixo horizontal e a segunda, uma variável que "corre" no eixo vertical. O sujeito lança o olhar sobre o plano cartesiano e precisa aprender a focar sobre os pontos do gráfico escolhido, que pode ser unidimensional num ambiente bi-dimensional. Para este olhar focado, o indivíduo precisa permutar (no sentido matemático da palavra, isto é, em qualquer ordem) três movimentos: um sobre o eixo horizontal (avaliação da primeira coordenada variável), um sobre o eixo vertical (avaliação da segunda coordenada variável) e um sobre o gráfico, combinando os dois primeiros.

Para explorar esses movimentos, nesta primeira atividade, decidimos trabalhar a localização de pontos no plano cartesiano a partir de retas horizontais e verticais, estendendo-a às regiões determinadas por uma reta horizontal e ainda com ênfase no registro da língua natural, muito mais abrangente, pois o indivíduo é convidado a descrever as duas coordenadas dos pontos do plano, enquanto que com o registro algébrico, em geral, omitimos uma das coordenadas: no caso da equação de uma reta vertical x=k, admite-se implicitamente a existência da coordenada y; para uma reta horizontal y=m, pressupõe-se a coordenada x; para uma função, podemos dizer que temos ainda mais problemas, pois a notação f(x) esconde completamente quem é quem e a notação y= ... só dá indicações explícitas sobre a coordenada y, ficando a coordenada x completamente mascarada.

O movimento vertical citado, que ocorre na direção do eixo vertical, é explorado nas questões 2, 3, 4, 5 e 6, que trazem à discussão a visualização do comportamento dos pontos do plano que pertencem a uma reta vertical. Quando a reta está "parada", o dinamismo do software pode ajudar o sujeito a perceber que a primeira coordenada dos pontos dessa reta será sempre a mesma e igual ao valor da coordenada horizontal do ponto no qual a reta corta o eixo das abscissas (que chamamos de "abscissa" da reta). Explorando o dinamismo do Cabri, isto é, movimentando bastante os pontos sobre as retas e também as retas, pode-se perceber que, quando a reta "desliza" ao longo do eixo horizontal, o valor da primeira coordenada dos pontos que estão sobre essa reta acompanha o valor da "abscissa" da reta. A conversão entre o registro gráfico e dinâmico e o registro na língua natural parece-nos essencial para que o indivíduo chegue à compreensão do registro algébrico x= k, no qual a variável y é omitida, mas está muito presente, pois significa que não há condição sobre y, portanto y pode assumir qualquer valor real.

O movimento horizontal, que ocorre na direção do eixo horizontal, é trabalhado nas questões 7, 8, 9, 10 e 11, que exploram o comportamento dos pontos sobre uma reta horizontal. Utilizando o dinamismo do software Cabri-géomètre II, isto é, movimentando o ponto sobre as retas e depois movimentando as retas, o sujeito poderá perceber que a segunda coordenada permanece constante quando fixamos uma reta e que o valor desta coordenada é o mesmo da coordenada vertical do ponto no qual a reta corta o eixo das ordenadas. A conversão entre o registro gráfico e o registro na língua natural, neste caso, parece-nos essencial para o entendimento do registro algébrico y=m, no qual a variável x é omitida, mas está matematicamente presente, pois significa que não há condição sobre x e que, portanto, x pode assumir qualquer valor real.

A conjunção do movimento horizontal com o movimento vertical é explorada nas questões 12, 13, 14, 15 e 16, no caso de retas horizontais e para pontos que ficam "acima" ou "abaixo" dessas retas. A escolha pelas retas horizontais foi feita para direcionarmos a discussão para a localização de pontos sobre gráficos de funções e a opção pelas regiões se deveu ao fato de acreditarmos que, para uma visualização global de um gráfico de função e, portanto, para a permutação dos três movimentos do olhar citados por nós, focando este olhar sobre uma curva no plano cartesiano, o indivíduo precisa passar os olhos pelo ambiente bi-dimensional antes de fixar o olhar no unidimensional.

Ao movimentar livremente o ponto “acima” da reta horizontal, o aluno poderá observar as coordenadas que acompanham o ponto e concluir que a primeira coordenada pode assumir qualquer valor real, enquanto a segunda fica limitada inferiormente pela “ordenada” da reta escolhida. Ao utilizar um registro algébrico para expressar o que acontece, o sujeito precisará, de alguma forma, indicar que x é qualquer e y é maior do que a “ordenada” escolhida. Analogamente, ao explorar o comportamento dos pontos que ficam “abaixo” da reta horizontal fixada.

A opção pelo trabalho individual, sem intervenção externa, se deve ao fato de acreditarmos que cada indivíduo precisa desenvolver sua capacidade de expressar as idéias no registro da língua natural para depois utilizar bem o registro algébrico, com seus signos e significados próprios e pré-estabelecidos. Além disso, o aluno tem a liberdade de interpretar o texto que se apresenta, dando sugestões para a melhoria deste.

O uso do software Cabri-géomètre II nos pareceu adequado para a exploração dinâmica que pretendíamos, além de trazer em seu bojo o gosto pela novidade do trabalho com o computador.

Após a realização da atividade e na aula seguinte, o pesquisador deverá fazer uma institucionalização, trazendo à discussão os resultados observados nos protocolos dos alunos, chamando a atenção para a necessidade de uma leitura e de um uso cuidadosos dos registros que nos são apresentados, como uma forma eficaz de evitar idéias mal colocadas, bem como falsas interpretações. A necessidade do uso de vários registros, com seus respectivos tratamentos e conversões, também precisa ser focada e pode-se aproveitar o contexto para discutir com os alunos como e com o que cada um dos registros contribui para o entendimento de um problema. Só assim, no nosso entender, o sujeito vai conseguir inter-relacionar os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto.

O pesquisador deve discutir também com seus alunos a leitura e a interpretação do registro algébrico $y>N_2$, bem como do registro $y<N_2$ quando estamos nos referindo a pontos do plano cartesiano, porque a coordenada x fica "escondida", mas está muito presente porque ela pode assumir qualquer valor real, destacando ainda que os pontos que estão acima da reta $y=N_2$ são todos os pontos que satisfazem $y>N_2$, o que significa que os demais pontos do plano cartesiano têm $y\leq N_2$ e ocorre situação análoga para $y<N_2$. Da mesma forma, o registro $x=N_1$ representa todos os pontos da reta vertical que intercepta o eixo horizontal no valor dado por N_1, o que significa que todos os demais pontos do plano cartesiano têm $x\neq N_1$. E que vale resultado similar para a reta horizontal $y=N_2$.

Como não se pede a exploração de regiões entre duas retas horizontais (escolha nossa, devido ao tempo de aplicação), pode-se, na institucionalização fazer o questionamento "E se tivéssemos duas retas horizontais, como descrever os pontos que ficam entre as duas?".

V.3.1.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Na atividade 1, as componentes mais esperadas são as conversões entre os registros numérico, algébrico, gráfico e da língua natural, porque o sujeito precisa analisar o comportamento de duas coordenadas, sendo que uma delas, em geral, vai permanecer constante (as retas que aqui aparecem são paralelas aos eixos coordenados).

Gostaríamos que os sujeitos compreendessem porque basta escrever x=cte. ou y=cte. para designar todos os pontos do plano que estão sobre uma reta respectivamente vertical e horizontal. Para isto, no nosso entender, é preciso ter domínio dos aspectos formais, intuitivos e algorítmicos, bem como inter-relacioná-los, por meio do uso dos registros algébrico, gráfico e da língua natural.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 11: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIVIDADE 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Observação dinâmica (visualização) da variação das duas coordenadas dos pontos sobre uma reta vertical fixa		s	s		s	s										
Conversão do registro gráfico para o algébrico			s				s	s	s	s	s		s	s	s	s
Conversão do registro gráfico para o da língua natural		s		s		s	s	s	s	s	s		s	s		s
Conversão do registro algébrico para o da língua natural		s		s		s	s	s	s	s	s		s	s		s
Observação dinâmica (visualização) da movimentação da reta horizontal				s					s							
Conversão do registro numérico para o gráfico				s					s	s	s					
Associação de um número à abscissa de um ponto sobre o eixo horizontal				s	s					s						
Associação da “abscissa” de uma reta vertical com as abscissas dos pontos sobre ela		s	s		s	s										
Observação dinâmica (visualização) da variação das duas coordenadas dos pontos sobre uma reta horizontal fixa							s	s		s	s		s	s	s	s
Associação da “ordenada” de uma reta horizontal com as ordenadas dos pontos sobre ela							s	s		s	s		s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da movimentação da reta vertical																
Conversão do registro numérico para o algébrico				s	s	s			s	s	s		s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) das coordenadas de um ponto livre													s	s	s	s
Associação da “ordenada” de uma reta horizontal com as ordenadas dos pontos sobre ela							s	s		s	s		s	s	s	s

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Observação dinâmica (visualização) da relação entre a “abscissa” de uma reta vertical e as abscissas dos pontos sobre ela		s	s	s	s	s	s	s		s			s			
Observação dinâmica (visualização) da relação entre a “ordenada” de uma reta horizontal e as ordenadas dos pontos sobre ela							s	s		s	s		s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da movimentação da reta vertical																
Conversão do registro numérico para o algébrico				s	s	s			s	s	s		s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da primeira coordenada de um ponto situado acima de uma reta horizontal												s	s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da segunda coordenada de um ponto situado acima de uma reta horizontal													s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da primeira coordenada de um ponto situado abaixo de uma reta horizontal													s	s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da segunda coordenada de um ponto situado abaixo de uma reta horizontal													s	s	s	s
Justificativa escrita de um fato observado, a partir da visualização do movimento													s	s		s
Conversão do registro na língua natural para o algébrico													s		s	s

V.3.2. ATIVIDADE 2

V.3.2.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

Apresentamos a seguir as questões que foram dadas aos alunos, com o texto inicial, que colocamos entre aspas, da forma como foi originalmente elaborado. Na época da aplicação, ainda tínhamos em mente utilizar outros quadros teóricos. Além disso, queríamos aproveitar a oportunidade para apresentar aos alunos algumas das palavras que permeiam o mundo da Educação Matemática.

“Esta é a segunda atividade elaborada com a intenção de trabalhar a aprendizagem da resolução de equações/inequações algébricas, usando pelo menos três das representações possíveis para uma equação/inequação: a representação algébrica, a representação pela língua natural e a representação gráfica. Por sua forma, pretende ser uma atividade individual a-didática, isto é, uma atividade individual em que o professor só interfere no trabalho do aluno (sujeito, segundo Vergnaud) para esclarecer dúvidas de enunciado ou dúvidas que de alguma forma interromperam drasticamente o trabalho individual. É muito importante que você tente fazer o melhor possível, seguindo com atenção todos os itens propostos, na seqüência em que eles aparecem. Não tente “pular” itens, porque todos foram elaborados com alguma intenção de aprendizagem. Escreva sempre suas idéias, conjecturas e justificativas. Não tenha preocupação com uma nota, porque ela não necessariamente vai ocorrer na forma de um número. Tente resolver sozinho e sem perguntar, para que eu possa avaliar o seu grau de compreensão das coisas propostas. Lembre-se que a aprendizagem só ocorre com dedicação, insistência e confiança em si mesmo.

Quanto ao conteúdo desta atividade, a idéia é iniciar o trabalho da localização de pontos no plano cartesiano, em sua relação com os pontos de uma ou mais retas.”

1. Abra o software GRAPHMATICA. Este é um software que permite esboçar gráficos de expressões do tipo $y = f(x)$ ou ainda de relações do tipo $x^2 + y^2 = 4$.
2. Digite $y = 3x$ na linha de comando.

(a) O gráfico desta função (verdade?) é uma reta. Descreva-a com suas palavras.

(b) Qual é o coeficiente angular desta reta? Por que?

(c) Descreva, com palavras, as coordenadas de um ponto genérico desta reta.

(d) Agora, descreva os pontos da reta usando uma representação algébrica.

3. Repita os itens da questão 2 para a reta y = 3x + 1.
4. Como você compara os pontos da reta y = 3x com os pontos da reta y = 3x + 1? Explique isto.
5. Repita os itens da questão 2 para a reta y = -2x + 1.
6. As retas y = 3x e y = -2x + 1 se interceptam? Por que? Em que ponto?
7. Como você compara os pontos da reta y = 3x com os pontos da reta y = -2x + 1? Explique isto.
8. Delete a reta y = 3x e digite a reta y = 3x + 1.
9. Determine as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas. Vamos chamá-lo de A. Assim, temos A(,   ).
10. Observe os dois gráficos. Se tomarmos qualquer valor de x > 0, como se comparam os pontos das duas retas? Descreva isto, primeiro em palavras e depois algebricamente.
11. Observe os dois gráficos. Se tomarmos qualquer valor de x < 0, como se comparam os pontos das duas retas? Descreva isto, primeiro em palavras e depois algebricamente.
12. Qual a relação entre estes dois gráficos e a equação 3x + 1 = -2x + 1? Enuncie suas certezas e suas dúvidas.
13. Qual a relação entre estes dois gráficos e a inequação 3x + 1 > -2x + 1? Enuncie suas certezas e suas dúvidas.
14. Qual a relação entre estes dois gráficos e a inequação 3x + 1 < -2x + 1? Enuncie suas certezas e suas dúvidas.

V.3.2.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 2

1. Localizar pontos sobre um gráfico de função afim de uma variável no plano cartesiano, destacando a necessidade de perceber <u>duas</u> coordenadas, seja na linguagem algébrica, seja na natural. A primeira coordenada (ou abscissa) é a variável independente e a segunda, a dependente.

2. Ler e interpretar gráficos.

V.3.2.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Abrir um software gráfico, no caso o GRAPHMATICA, no qual as funções entram no formato y = f(x).
2. (a) Esboçar o gráfico da reta y = 3x, dada pela expressão algébrica. Reconhecer o gráfico como o de uma função e descrever o comportamento. (b) Reconhecer o coeficiente angular na expressão algébrica. Justificar o reconhecimento. (c) Descrever um ponto genérico do gráfico, por meio de suas coordenadas, na língua natural. (d) Descrever um ponto genérico do gráfico, por meio de suas coordenadas, na linguagem algébrica.
3. Repetir os itens da questão 2 para a função y = 3x + 1.
4. Comparar o comportamento das duas funções e reconhecer que o gráfico da função y = 3x + 1 é um transladado de uma unidade para cima do gráfico da função y = 3x. Explicar esta comparação.
5. Repetir os itens da questão 2 para a função y = -2x + 1. Perceber que agora o coeficiente angular é negativo.
6. Reconhecer a intersecção das duas retas como o ponto onde os gráficos se cruzam. Explicar porque se cruzam e onde.
7. Comparar os pontos dos gráficos de y = 3x e y = -2x + 1, explicando o raciocínio.
8. Trocar o gráfico de y = 3x pelo de y = 3x + 1. A intersecção agora ocorre sobre o eixo Oy.

9. Determinar as coordenadas do ponto de intersecção.
10. Comparar o comportamento dos dois gráficos para $x > 0$ (na verdade, verificar que os pontos de $y = 3x + 1$, para cada $x > 0$, ficam acima dos correspondentes pontos de $y = -2x + 1$). Descrever esta comparação na língua natural e depois na algébrica.
11. Comparar o comportamento dos dois gráficos para $x < 0$ (na verdade, verificar que os pontos de $y = 3x + 1$, para cada $x < 0$, ficam abaixo dos correspondentes pontos de $y = -2x + 1$). Descrever esta comparação na língua natural e depois na algébrica.
12. Associar, com o gráfico, a igualdade das equações $y = 3x + 1$ e $y = -2x + 1$ com o ponto de intersecção dos dois gráficos. Explicar o raciocínio.
13. Associar, com o gráfico, a inequação $3x + 1 > -2x + 1$ à região do gráfico para $x > 0$. Explicar o raciocínio.
14. Associar, com o gráfico, a inequação $3x + 1 < -2x + 1$ à região do gráfico para $x < 0$. Explicar o raciocínio.

V.3.2.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 2

No trabalho com as funções afins (do tipo $f(x)=mx+n=y$), não importa em que registro, o da língua natural, o gráfico ou o algébrico, é necessário que o aluno aprenda a perceber o papel que cada um dos parâmetros, m (chamado coeficiente angular, inclinação ou declividade) ou n (conhecido como coeficiente linear), desempenha no registro algébrico da função afim. No caso do trabalho com o registro gráfico, por exemplo, duas retas com inclinações diferentes, não importa a posição no plano cartesiano, sempre vão ter uma única intersecção e, portanto, vão dividir o plano em quatro regiões. Uma forma de descrever os pontos que ficam, por exemplo, numa das regiões delimitadas à direita da intersecção, é por meio de uma inequação do tipo $ax+b<y<mx+n$, pela qual estamos identificando, na verdade, uma coisa muito mais complexa, porque fica subentendido que precisamos determinar os valores de x para os quais $ax+b<mx+n$ e depois combinar esses valores de x com os de y que satisfazem $ax+b<y<mx+n$. Ao lançar o olhar sobre o gráfico, o sujeito

precisa identificar as duas retas (bi-dimensional para unidimensional), a intersecção delas (bi-dimensional para zero-dimensional), a região que corresponde à inequação dada (bi-dimensional para bi-dimensional), a projeção desses pontos sobre o eixo horizontal (bi-dimensional para unidimensional, mas não só, por causa da projeção) e, finalmente, os valores de x que respondem à questão dada. Acreditamos que um trabalho intenso de tratamento e de conversão entre registros pode fazer o aluno comum ser capaz de realizar essa tarefa, ajudando-o a inter-relacionar os aspectos formais, algoritmicos e intuitivos.

Ao elaborarmos a atividade 2, para ser realizada individualmente, durante 100 minutos, no laboratório de informática com o software GRAPHMATICA, tínhamos em mente um trabalho com os registros algébrico, gráfico e da língua natural, dando bastante ênfase a este último, porque o registro algébrico, mais comum entre os alunos, é muito conciso e pressupõe uma leitura interpretada de seu significado: quando escrevemos y=2x+1, por exemplo, queremos que o aluno entenda que 2x+1 é o valor da segunda coordenada dos pontos que interessam e que os valores de x ficam subentendidos como sendo aqueles que tornam a expressão possível. Vale a pena observar que, para a maioria dos alunos que participaram da nossa seqüência, mesmo depois de um estudo sobre funções na disciplina Cálculo 1, ainda não estava muito claro o significado de “domínio” de uma função como sendo “os valores para os quais é possível calcular 2x+1”.

As questões 2, 3 e 4 enfocam retas com o mesmo coeficiente angular positivo e que, portanto, não se encontram; mesmo assim, podemos comparar os pontos com algo do tipo “os pontos da reta tal ficam todos acima dos pontos da reta tal”. Para uma frase deste tipo, o sujeito tem que, mesmo sem o perceber, lançar o olhar sobre o gráfico, identificar a mesma inclinação e perceber que todos os pontos de uma das retas ficam acima (ou abaixo) dos da outra, se considerarmos a coordenada vertical.

As questões 5, 6 e 7 foram elaboradas para trazer à discussão uma reta com inclinação negativa e depois compará-la com uma de inclinação positiva, no que se refere à intersecção das duas e depois na comparação. No exemplo escolhido, a intersecção ocorre num ponto que fica no primeiro quadrante, porém não de fácil reconhecimento pelo próprio gráfico, porque gostaríamos que os alunos tivessem a idéia de recorrer ao registro algébrico para determinar o valor exato das coordenadas desse ponto.

Nas questões 9, 10 e 11 temos duas retas com inclinações opostas (uma negativa e outra positiva), porém com intersecção sobre o eixo vertical, para facilitar a determinação gráfica das coordenadas da intersecção. A insistência no pedido para uma comparação, primeiro para $x>0$ e depois para $x<0$, na língua natural e depois na algébrica, dos pontos de duas retas vinha de acreditarmos que, para comparar esses pontos, o estudante seria obrigado a pensar na coordenada x e dizer algo do tipo “para cada valor de $x > 0$, os pontos que estão sobre a reta tal ficam acima dos pontos que estão sobre a reta tal” e analogamente para $x<0$. Ao passar para o registro algébrico (do tipo (x, y) ou $x>0$ e y alguma coisa), o aluno teria que se referir à coordenada y para comparar os pontos e dizer algo do tipo “pontos que satisfazem $x>0$ e $y=3x+1$ ficam acima (ou abaixo) dos pontos que satisfazem $x>0$ e $y=-2x+1$”. Com isto, esperávamos que alguns alunos começassem a ficar preocupados em encontrar uma forma mais concisa, portanto mais algébrica simbólica, para escrever a frase no registro algébrico.

As questões 12, 13 e 14 foram colocadas para encerrar a atividade com questionamentos que fizessem o aluno refletir sobre a conversão entre o registro algébrico da inequação e o registro gráfico das funções envolvidas nas inequações. Esperávamos que alguns alunos percebessem que uma possível leitura para $3x+1=-2x+1$ é “o ponto de intersecção das duas retas tem que ter as mesmas coordenadas; o valor de y sobre a reta $y=3x+1$ que é igual ao valor de y sobre a reta $y=-2x+1$ vai dar um valor para x que será o valor da primeira coordenada da intersecção”. A partir do entendimento e da determinação das coordenadas do ponto de intersecção, acreditamos que seria mais fácil determinar as soluções das inequações correspondentes.

Como um sub-produto deste estudo, poderíamos esperar que os alunos percebessem que, para duas retas com inclinações opostas, à direita da intersecção a reta com inclinação positiva fica acima da reta com inclinação negativa e à esquerda ocorre o contrário; portanto, para resolver uma inequação do tipo $ax+b<mx+n$, basta resolvermos a equação correspondente e estudarmos as inclinações.

Vale a pena ressaltar ainda que, utilizando um teorema sobre “a continuidade das funções afins”, seria muito tranqüilo estudar o valor destas duas funções em cada um dos intervalos determinados pelo valor x do ponto de intersecção para deduzir qual dos intervalos oferece a resposta procurada.

A opção pelo trabalho individual, sem intervenção externa, foi feita por acreditarmos que cada indivíduo traz um conhecimento a priori que precisa ser lapidado, para a compreensão do tratamento e da conversão de registros, principalmente quando um dos registros é o algébrico simbólico. A insistência no uso do registro na língua natural vem do fato de acreditarmos que, em Matemática, a maioria dos fracassos, na resolução de problemas e/ou na modelação, vem do fato de não sabermos interpretar o texto que se coloca diante de nós. Na tendência mais moderna das teorias de ensino e de aprendizagem, na qual se acredita que o indivíduo aprende quando colocado diante de situações-problema, o uso dos registros algébricos corretos para cada situação é precedido pelo entendimento do texto em língua natural.

Usamos o software GRAPHMATICA porque ele agiliza a confecção dos gráficos e tem uma interface amigável. Para esta atividade, os alunos não precisariam ter uma experiência anterior com o software, porque só se fazia necessária a digitação das expressões algébricas na forma y=... na linha de comando, para obter os gráficos desejados (ver parágrafo IV.1.4 página 74 para mais detalhes para esta escolha).

Após a atividade e na aula seguinte, o professor deve fazer uma institucionalização, depois de ter lido os protocolos dos alunos, trazendo para discussão as respostas que podem contribuir para o entendimento dos registros e para a necessidade de expressar com cuidado as idéias que queremos que outros leiam e entendam. Com isto, acreditamos que o professor estará contribuindo para que cada indivíduo inter-relacione os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto.

No caso desta atividade, ainda é possivel ressaltar, graficamente, a intersecção de duas retas, contribuindo para a distinção entre “resolver a equação ...” e “resolver a inequação”, como sugerem Kieran (2004) e Radford (2004). Com isto, podemos dizer ainda que a aprendizagem obtida com a utilização dos gráficos pode contribuir para a algébrica, de certa forma tentando responder questões colocadas por Sackur (2004). A visualização dos gráficos, de forma geral, precisa retornar à discussão, para que os alunos compreendam a resolução gráfica e possam entender como convertê-la para o registro algébrico. A comparação de pontos pode e deve ser explorada, do ponto de vista da necessidade de tomarmos algum ponto de referência, como por exemplo o valor de x, quando queremos comparar esses pontos. Frases como “para x=5, por exemplo, o ponto correspondente na reta tal fica abaixo (ou acima) do correspondente ponto na reta tal” podem contribuir para que o aluno “escorregue” seu olhar para os valores de x que estão no eixo horizontal quando olha algum ponto sobre um gráfico no plano cartesiano.

V.3.2.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Na atividade 2, as componentes mais esperadas são as conversões, principalmente entre os registros da língua natural e os demais (algébrico e gráfico), porque estamos, num certo sentido, “forçando a linguagem” para estimular os sujeitos a pensarem num significado para “comparação de pontos”, como é o caso nos itens 7, 10 e 11 ou para a relação entre uma inequação do tipo $ax+b<cx+d$ e os gráficos das funções definidas por $f(x)=ax+b$ e $g(x)=cx+d$, como é o caso nos itens 13 e 14.

Gostaríamos que os sujeitos visualizassem os gráficos (DUVAL, 1993) e vissem que a abscissa do ponto de intersecção de duas retas (solução de uma equação) divide o eixo horizontal em duas semi-retas, cada uma delas solução de uma inequação. Se isto acontecer, esses sujeitos terão feito inter-relações entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, por meio do uso de vários registros.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 12: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIVIDADE 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Conversão do registro gráfico para o algébrico		s	s	s	s	s	s		s	s	s	s	s	s
Conversão do registro na língua natural para o algébrico				s		s	s		s	s	s	s	s	s
Conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural		s	s	s	s		s							
Conversão do registro algébrico para o gráfico		s	s	s	s	s	s			s	s	s	s	s
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as abscissas									s	s	s			
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas		s	s	s	s		s		s			s	s	s
Uso estrito do software	s							s						
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico									s			s	s	s
Conjectura a partir da observação		s	s	s	s	s	s			s	s	s	s	s
Justificativa escrita de um fato observado		s	s	s	s	s	s			s	s	s	s	s

V.3.3. ATIVIDADE 3

V.3.3.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

Apresentamos as questões dadas aos alunos na atividade 3 original. O texto a seguir, entre aspas, faz parte da atividade. Queríamos aproveitar o ensejo para colocar, para os sujeitos, nossa preocupação com os aspectos formais que sempre envolvem os objetos matemáticos.

“Em Matemática, temos algumas **definições**, a partir das quais construímos axiomas (“leis”), proposições (podem ser resultados auxiliares, que necessitam ser demonstrados) e teoremas (resultados que precisam ser demonstrados e que são considerados importantes e imprescindíveis para o desenvolvimento do assunto que está sendo estudado). Além disso, existem algumas formas consideradas universais (sistemas de representação) para representar os objetos matemáticos. Em razão disso, precisamos ler e entender uma definição, bem como aprender as regras e notações que permitem representar um determinado objeto.

Quando o objeto a ser estudado é **função**, em geral podemos utilizar três importantes e complementares sistemas de representação: a língua natural (ou língua materna), a linguagem algébrica (“lei” da função expressa em termos de suas variáveis, dependente e independente) e a linguagem gráfica (gráfico). Segundo o pesquisador francês Raymond Duval, o sujeito só apreende um determinado objeto matemático quando é capaz de entender cada uma de suas representações, trabalhar com cada uma delas (tratamento) e ainda inter-relacioná-las (conversão).

Nesta seqüência didática, estamos interessados em utilizar funções de uma variável real (variável independente) com valores reais (variável dependente) para discutir a resolução algébrica de equações/inequações de uma incógnita. Lembramos que a incógnita representa todos os valores possíveis que satisfazem a equação/inequação e estes valores precisam ser determinados.

Para esta discussão, vamos retomar a notação usada para representar uma função de uma variável real.

$$\begin{cases} g: A \to B \\ x \mapsto g(x) = y \end{cases}$$

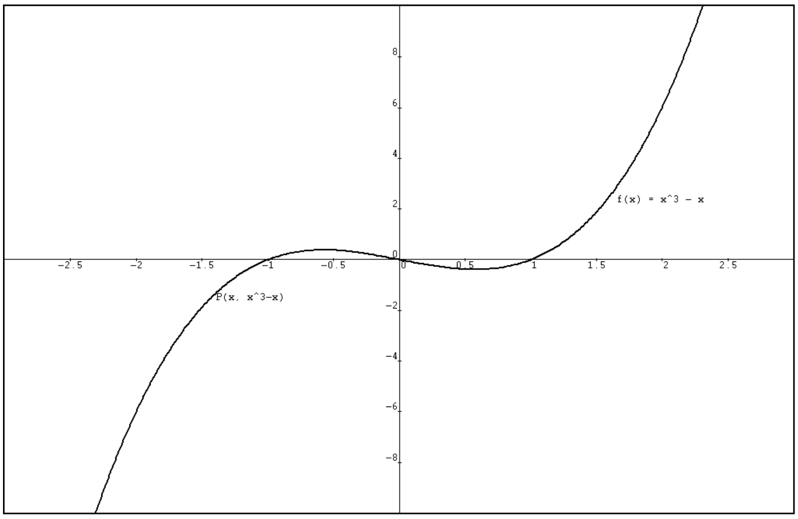
Com ela, queremos dizer que: g é uma função de A em B; x é a variável independente; x assume todos os valores do conjunto A; y é a variável independente; y é um valor do conjunto B.

Quanto ao gráfico da função g, podemos defini-lo como

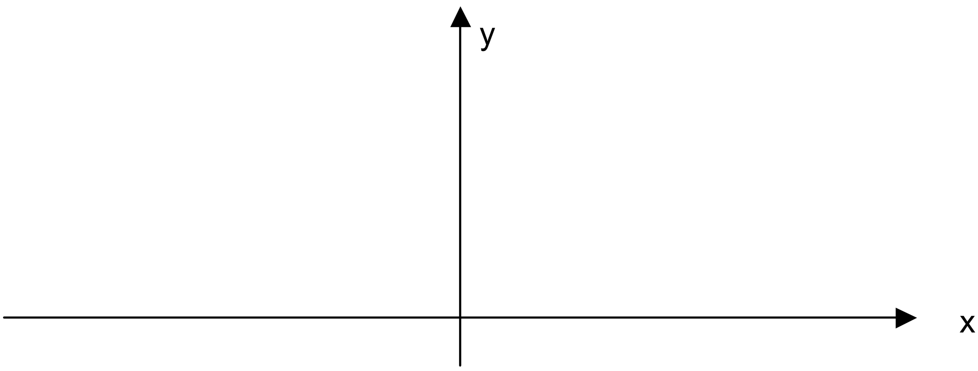
"Os pontos do plano cartesiano que têm abscissa x e ordenada g(x), onde x percorre o conjunto A", se usarmos a língua natural.

"$\{(x, g(x))$, onde x percorre o conjunto $A\}$ ou $\{(x, y) / x \in A \text{ e } y = g(x)\}$, se usarmos a linguagem algébrica.

Ou ainda podemos usar um software gráfico para esboçar o gráfico, como no exemplo dado, feito no software GRAPHMAT. Interprete!!"



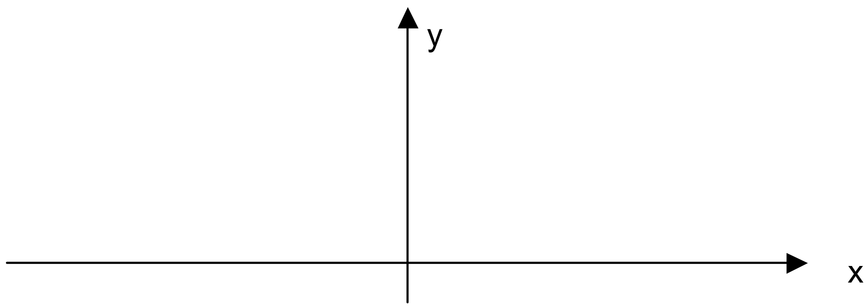
1. No sistema de coordenadas dado, esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$.



2. Descreva as coordenadas dos pontos deste gráfico, na língua natural.

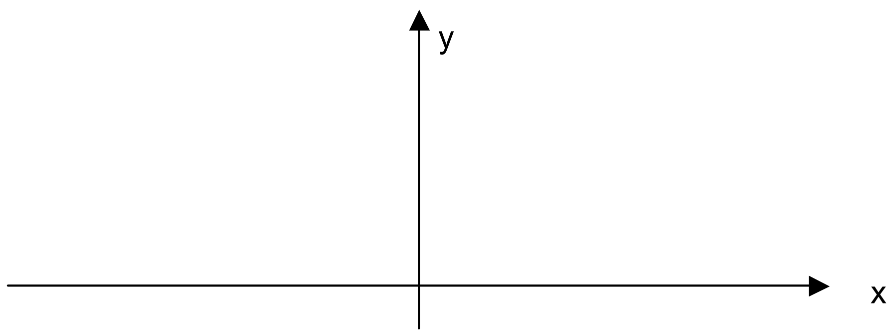
3. Idem com a linguagem algébrica.

4. Esboce o gráfico definido por $\left\{\left(x,3x^2\right),\text{ onde } x \in [-1,3]\right\}$.



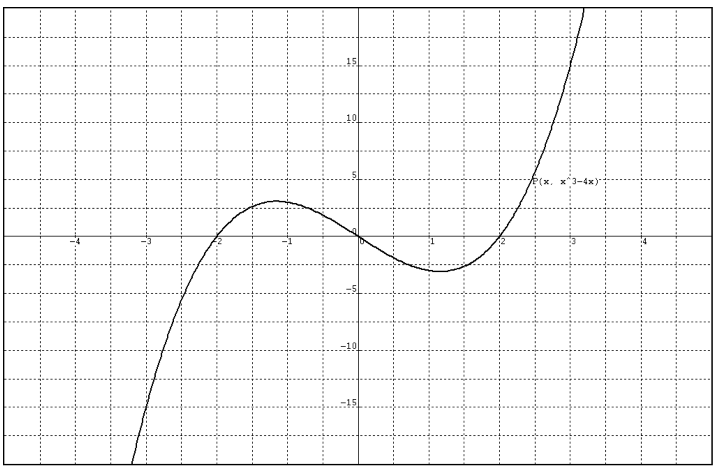
5. É o gráfico de uma função? Use a linguagem algébrica para expressá-la.

6. Esboce o gráfico definido por $\{(x, 2x - 1), \text{onde } x \in IR\}$

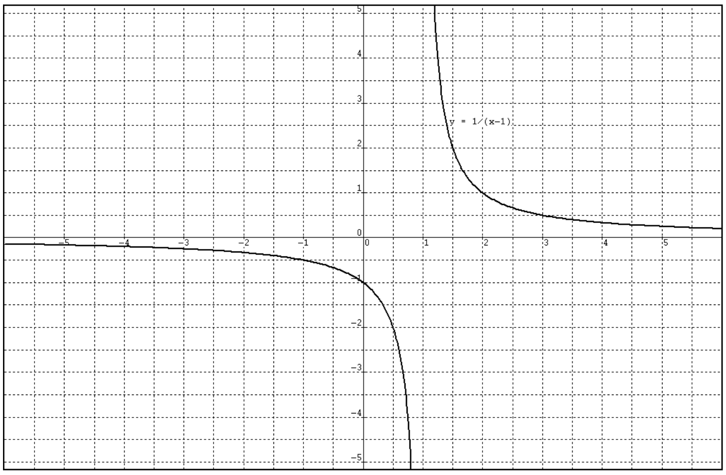


7. É o gráfico de qual função? Use a linguagem algébrica para expressá-la.

8. No gráfico, está o esboço de uma função? Qual? Por que?



9. No sistema de coordenadas, está representado o gráfico da função $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$, onde x é um número real diferente de 1 (por que?).



10. Descreva, na língua natural e depois na linguagem algébrica, as coordenadas dos pontos do gráfico.
11. Localize, sobre o gráfico, os pontos que têm abscissa positiva.
12. Localize, sobre o gráfico, os pontos que têm ordenada positiva.
13. Localize, sobre o gráfico, os pontos que têm ordenada igual a 2. Descreva estes pontos algebricamente.
14. Localize, sobre o gráfico, os pontos que têm ordenada menor do que 2. Descreva estes pontos algebricamente.
15. Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item 14. Descreva estes valores.
16. Qual a relação entre a resposta dada no item 15 e a resposta da inequação $y = \dfrac{1}{x-1} < 2$? Explique.
17. Localize, sobre o gráfico, os pontos que têm ordenada menor do que 0. Descreva estes pontos algebricamente.
18. Localize, sobre o eixo horizontal, as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item 17. Descreva estes valores.

19. Qual a relação entre a resposta dada no item 18 e a resposta da inequação $y = \dfrac{1}{x-1} < 0$? Explique.

20. Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a equação $y = \dfrac{1}{x - 1} = 1$. Explique seu raciocínio.

21. Idem para a equação $y = \dfrac{1}{x - 1} = -1$.

22. Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a inequação $y = \dfrac{1}{x - 1} < 1$. Explique seu raciocínio.

V.3.3.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 3

1. Localizar pontos sobre um gráfico de função de uma variável no plano cartesiano, destacando a necessidade de indicar duas coordenadas, seja na linguagem algébrica, seja na natural. A primeira coordenada (ou abscissa) é a variável independente e a segunda, a dependente.
2. Ler e interpretar gráficos e regiões.

V.3.3.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Esboçar o gráfico de uma parábola, dada pela expressão algébrica usual.
2. Descrever os pontos do gráfico na língua natural.
3. Descrever os pontos do gráfico na linguagem algébrica.
4. Esboçar um gráfico de parábola, descrito por pares ordenados.
5. Reconhecer um gráfico de função. Escrever a expressão algébrica correspondente.
6. Esboçar um gráfico de reta, descrito por pares ordenados.

7. Reconhecer um gráfico de função. Escrever a expressão algébrica correspondente.
8. Reconhecer um gráfico de função, a partir de um gráfico dado. A função envolvida é uma cúbica.
9. Dada a expressão algébrica e o gráfico, identificar um valor fora do domínio.
10. Descrever os pontos do gráfico, na língua natural e na algébrica.
11. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição sobre as abscissas.
12. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição sobre as ordenadas.
13. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de igualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
14. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de desigualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
15. Localizar, sobre o eixo horizontal, os valores das abscissas dos pontos do gráfico descritos no item 15. Descrever estes valores.
16. Conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.
17. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de desigualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
18. Localizar, sobre o eixo horizontal, os valores das abscissas dos pontos descritos no item 17.
19. Conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.
20. Resolver graficamente uma equação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.
21. Resolver graficamente uma equação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.
22. Resolver graficamente uma inequação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.

V.3.3.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 3

No quadro exclusivamente algébrico apresentado pela maioria dos livros didáticos de Matemática, para resolver uma inequação com uma variável real, precisamos olhar esta inequação como uma expressão envolvendo uma incógnita e da qual, por uma série de tratamentos algébricos, vai ser possível "isolar" a incógnita para chegar à resposta desejada. Este trabalho baseia-se em dois princípios algébricos, que podem ser chamados "Princípio aditivo das desigualdades" (se $a<b$, então $a+c<b+c$, $\forall c \in IR$) e "Princípio multiplicativo das desigualdades" ((i) se $a<b$ e $c>0$, então $ac<bc$; (ii) se $a<b$ e $c<0$, então $ac>bc$). O primeiro parece ser mais "intuitivo", isto é, menos gerador de dificuldades, uma vez que é o mesmo para as equações, sempre tão presentes no estudo da Álgebra. No entanto, se pensarmos numa abordagem do tipo fundamentalista analógica (uma gangorra em equilíbrio no caso das equações, porém não em equilíbrio no caso das inequações, por exemplo), podemos observar que, no caso das equações, parece claro que, se somarmos quantias iguais a coisas iguais, estas continuam iguais (a gangorra continua em equilíbrio) e, portanto, substituímos uma equação por uma equivalente, mas isto não é tão evidente no caso das inequações (a gangorra não em equilíbrio pode continuar não em equilíbrio, mesmo se somarmos quantias diferentes aos dois lados), porque é preciso compreender que só se somarmos quantias iguais aos dois lados de uma inequação é que estamos substituindo uma inequação por uma outra equivalente (o "desequilíbrio" precisa continuar o mesmo, isto é, a diferença entre os dois lados deve permanecer a mesma). O "Princípio multiplicativo das desigualdades" traz uma dificuldade ainda maior, pois embora "intuitivamente" verdadeiro no caso das equações, não tem nada de intuitivo no caso das inequações e sua definição algébrica tem duas frases do tipo "se ... então", que são complementares e que, portanto, não são de leitura fácil para os alunos da Educação Básica; na verdade, para a maioria destes, isto parece acarretar numa aprendizagem "decorada", que só é efetiva por um curto período de tempo, em geral enquanto está sendo avaliada.

Assim, se visamos uma aprendizagem que promova a inter-relação e a interação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto, o estudo estritamente algébrico das inequações, pelo menos da forma como tem sido feito, parece deixar a desejar. Como mudar? O que mudar? Quando mudar? Se analisarmos o trabalho matemático envolvido na resolução de uma inequação, a partir de um registro algébrico e com a abordagem funcional, podemos observar que vários obstáculos se apresentam, pois o sujeito precisa: reconhecer as funções envolvidas na inequação; esboçar os gráficos correspondentes; localizar os pontos do gráfico que interessam; projetar estes pontos sobre o eixo horizontal, a fim de obter os valores das abscissas que vão compor, finalmente, a solução da inequação dada. Do ponto de vista cognitivo, é preciso que o sujeito saiba fazer a conversão do sistema algébrico para o algébrico funcional, deste para o gráfico e finalmente do sistema gráfico para o algébrico. Será que as vantagens que esta abordagem traz podem justificar o enfrentamento das dificuldades que parecem inerentes a ela? Acreditamos que sim, por algumas razões que podemos apresentar: as funções podem constituir uma ferramenta muito útil quando queremos uma aprendizagem baseada em situações-problema, pois se prestam a um grande número de modelações em Matemática, Física, Economia, Biologia, Engenharia etc.; o registro gráfico é um passo natural, quando estamos trabalhando com funções; a leitura e a interpretação de gráficos é útil para áreas de Ciências Exatas, Biológicas e Humanas; atualmente, com a advinda das novas tecnologias (calculadoras, computadores, softwares gráficos...), trazer gráficos diferentes para a sala de aula tornou-se uma tarefa fácil para o professor, mesmo que ele não disponha de computadores na escola; as funções polinomiais de 1º e de 2º graus já não são as únicas viáveis de serem tratadas na Educação Básica e, na verdade, quando só abordamos estes dois tipos de funções, podemos criamos uma grande dificuldade para a aprendizagem posterior, bem como para a aceitação de outros modelos; a mudança de registro, qualquer que seja ela, é salutar para a abordagem de problemas em Matemática; o trabalho envolvendo o tratamento e a conversão de registros é necessário e precisa ser promovido pelo professor, para uma aprendizagem significativa em Matemática, para a maioria dos estudantes.

Estas são algumas das razões pelas quais optamos por uma abordagem funcional das inequações e elaboramos esta atividade com a intenção de explorar os aspectos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita, quando optamos por essa abordagem: reconhecimento das funções envolvidas, traçado dos gráficos, localização dos pontos do gráfico que vão gerar as soluções da inequação, projeção no eixo horizontal destes pontos, sempre chamando a atenção do aluno para cada um deles e tentando fazê-lo conjecturar sobre a ligação do gráfico com uma equação e/ou uma inequação.

A atividade foi desenvolvida individualmente, num período de 100 minutos, em sala de aula, sem a interferência do professor, porque pareceu-nos importante que, num primeiro contato, cada aluno pudesse colocar no papel as idéias próprias como também as dúvidas e as conjecturas.

No início da atividade, colocamos as definições de função e de gráfico de função, lembrando aos sujeitos que precisam entender bem as definições, se querem trabalhar com os objetos da Matemática.

Na questão 1, pede-se o esboço do gráfico da parábola $f(x)= x^2 + 1$, numa tentativa de forçar aos alunos a visualização global e não ponto a ponto, pois é apenas uma translação vertical de uma unidade positiva da parábola de referência $g(x)=x^2$, supostamente conhecida do trabalho anterior com as funções.

As questões 2 e 3 trazem à discussão a conversão do registro gráfico para o da língua natural e para o algébrico, a fim de reforçar a necessidade de se identificar os pontos do plano por meio de suas duas coordenadas, cada uma delas desempenhando um papel diferente e importante na leitura e interpretação do gráfico.

As questões 4, 5, 6, 7 e 8 enfocam o registro algébrico na forma de par ordenado e sua conversão para o registro gráfico, porque é importante o entendimento de que os pontos sobre o gráfico, que é unidimensional, podem ser descritos algebricamente por pares ordenados da forma (m, n), portanto bi-dimensionais, onde o m é um valor da variável independente, que vai no eixo horizontal e o n é o valor que a função atribui a m, qual seja n=f(m), que vai no eixo vertical, obrigando o sujeito a escorregar o olhar dos eixos para o gráfico e vice-versa. Na questão 4, optamos por um domínio restrito, no caso um intervalo, para chamar a atenção dos alunos para a importância da leitura e da interpretação de um registro. Na questão 5, o aluno precisa decidir se o gráfico é o de uma função, trazendo portanto à discussão a visualização global, porque é preciso correr o olhar ao longo do eixo horizontal para verificar se cada valor possível da abscissa só tem um correspondente no gráfico. As questões 6 e 7 são semelhantes às questões 4 e 5, com a única diferença de que a variável independente agora percorre todos os valores reais e o olhar precisa ir além do mostrado no papel, às vezes necessitando recorrer à expressão algébrica para decidir se é o gráfico de uma função. Na questão 8, optamos por uma notação diferente: é dado um gráfico e sobre ele um ponto genérico P(x, x^3-4x) e os alunos precisam decidir se é uma função e qual é ela, justificando o raciocínio, se foi feito baseado no registro gráfico ou no registro algébrico. Esta questão tenta trazer ao conhecimento dos alunos uma forma de interpretação que, a nosso ver, favorece a visualização global de um gráfico, porque o olhar precisa percorrer o gráfico para avaliar a informação dada, ao mesmo tempo em que a expressão algébrica da função aparece na segunda coordenada.

As questões 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 foram elaboradas a partir da expressão algébrica e do gráfico da função $h(x) = \frac{1}{x-1}$. Na primeira, os alunos precisam reconhecer o domínio e explicar porque $x \neq 1$, podendo basear-se tanto no gráfico como na expressão algébrica. Na questão 10, o pedido é para descrever os pontos do gráfico na língua natural e na linguagem algébrica, reforçando a necessidade de descrever as duas coordenadas, sendo a primeira diferente de 1 e a segunda a expressão algébrica da função. Nas questões 11 a 14 é dada uma condição, na língua natural, sobre uma das coordenadas (unidimensional), para que os alunos localizem os pontos do gráfico (unidimensional) que satisfazem essa condição. Na questão 11, a abscissa tem que ser positiva, forçando assim o olhar de uma parte do eixo horizontal, que tem um "buraco" no valor 1, para o gráfico, num movimento vertical. Na questão 12, é a ordenada que tem que ser positiva, o olhar percorrendo uma parte do eixo vertical, num movimento horizontal para chegar ao gráfico. Na questão 13, é dado o valor 2 para a ordenada e pede-se a identificação dos pontos do gráfico que têm essa ordenada, o que em princípio deveria ser mais fácil, porque é uma questão numérica e basta escorregar o olhar no sentido horizontal na altura 2 para chegar aos pontos desejados do gráfico; a questão foi colocada nestes termos para encaminhar a questão 14, na qual são pedidos os pontos com ordenada menor do que 2, que podem ser vistos a partir da resposta dada à questão anterior, por causa da continuidade da função; é como se a reta y=2 fosse traçada para ajudar a localizar os pontos do gráfico que estão "abaixo" dela. Com a descrição algébrica destes pontos, espera-se que os alunos escrevam algo do tipo $x \in$... e $y<2$ e comecem a perceber a conexão das coordenadas com a resolução de uma inequação. Na questão 15, o aluno tem que escorregar o olhar dos pontos do gráfico para o eixo horizontal, num movimento vertical, para poder obter os valores de x ou pode ainda se valer da descrição algébrica que fez dos pontos no item 14. Na questão 16, pede-se ao aluno que faça uma relação entre os valores determinados na questão 15, sobre o eixo horizontal, com a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 2$. Esperávamos que eles, ao descreverem algebricamente os pontos na questão 14, tivessem feito a ligação entre a ordenada y dos pontos do gráfico, a expressão algébrica da função e a condição “menor do que 2”.

Nas questões 17, 18 e 19, a discussão gira em torno dos pontos que têm ordenada menor do que 0, primeiro pedindo para localizá-los no gráfico (conversão do registro na língua natural para o gráfico e depois para o algébrico), depois projetando-os sobre o eixo horizontal para obter as primeiras coordenadas desses pontos (conversão do registro gráfico para o algébrico ou um tratamento algébrico) e finalmente pedindo uma relação entre os pontos do gráfico com ordenada menor do que zero e a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 0$. Novamente esperávamos que a conversão de registros solicitada permitisse aos alunos fazerem esta relação.

Nas questões 20 e 21, decidimos explorar a resolução de duas equações, pedindo aos alunos que o fizessem a partir do gráfico, porque gostaríamos que eles percebessem que, a partir da resolução da equação, podemos chegar à resolução de uma inequação. Por esta razão, na questão 22 voltamos a pedir a resolução de uma inequação, cuja equação correspondente havia sido pensada na questão 20.

Insistimos no trabalho individual e sem interferência porque acreditamos que, nesta abordagem, é importante que cada aluno desenvolva suas próprias habilidades de leitura e interpretação de textos e de gráficos e porque o tratamento e a conversão de registros, que é uma constante neste trabalho, têm uma característica individual. Cada sujeito pensa diferente e adquire essa experiência em tempos didáticos diversos, dependendo de sua experiência anterior.

Após a atividade e na aula seguinte, após a leitura dos protocolos dos alunos, o professor deve fazer uma institucionalização, na qual fique claro o papel de cada coordenada dos pontos sobre o gráfico, estejam elas sujeitas a uma condição ou não, bem como o papel que cada uma delas desempenha na abordagem gráfica funcional da resolução de inequações. É papel fundamental do professor estimular, provocar e promover o tratamento e a conversão de registros, principalmente o da língua natural, que deve ser intensamente trabalhado, porque acreditamos que ele vá permitir que o sujeito deixe de ter medo da Matemática e passe a ter sucesso nas suas atividades matemáticas, inter-relacionando os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos.

Dependendo dos protocolos dos alunos, pode ser viável uma institucionalização na qual seja aberta a discussão sobre o uso da ferramenta continuidade para resolver uma inequação a partir da resolução da equação associada.

V.3.3.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Na atividade 3, a necessidade de realizar tratamentos e conversões entre os registros algébrico, gráfico e da língua natural torna-se inevitável, porque deles depende o entendimento do que seja uma abordagem funcional gráfica de inequações com uma incógnita (ver nossa análise no parágrafo V.2, página 119). Para que isto ocorra, o sujeito ainda tem que ter bem claras as definições, tanto de função como de gráfico de função, o que certamente exige o domínio dos aspectos formais envolvidos. Não acreditamos que um ensino baseado apenas nos aspectos intuitivos e algorítmicos possa contribuir para a aprendizagem, porque como deixa entrever Fischbein (1994), a intuição pode ser coerciva e o sujeito deixa-se conduzir por ela e os procedimentos, quando não são bem fundamentados nos aspectos formais, podem estar embaralhados na mente do sujeito e este não sabe como proceder, às vezes até forçado que é por essa mesma intuição.

Gostaríamos que os sujeitos conseguissem fazer as inter-relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, por meio do uso fundamentado dos registros algébrico, gráfico e da língua natural. Com isto, acreditamos que seria possível compreender que a resolução gráfica é equivalente à algébrica e que, portanto, as soluções de inequações como $x^2 \leq 25$ e $\frac{5}{x} < \frac{5}{2}$ não podem ser, respectivamente, $x \leq \pm 5$ e $x>2$, como usualmente ocorre: em qualquer um dos dois casos, nos nossos questionários (ver parágrafo IV.1.6.3, página 99), o índice de alunos que dão essas respostas é maior do que 50%.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 13: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIVIDADE 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Conversão do registro gráfico para o algébrico		s	s		s		s		s	s					s			s	s	s	s	
Conversão do registro na língua natural para o algébrico												s	s	s	s	s	s	s				
Conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural		s								s					s							s
Conversão do registro numérico para o gráfico																						
Conversão do registro algébrico para o gráfico	s			s	s	s	s								s		s	s	s	s	s	s
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as abscissas																						
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas										s	s	s	s	s					s	s	s	
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico														s	s		s		s	s	s	
Conversão do registro gráfico/algébrico para o algébrico								s		s												
Conjectura a partir da observação					s		s	s							s			s	s	s	s	s

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas										s	s	s	s	s					s	s	s	
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico														s	s		s		s	s	s	
Conversão do registro gráfico/algébrico para o algébrico								s		s												
Conjectura a partir da observação					s		s	s							s			s	s	s	s	s
Justificativa escrita de um fato observado					s		s	s							s			s	s	s	s	s
Conversão do registro na língua natural para o gráfico											s	s	s	s	s		s	s				
Conversão do registro gráfico para o da língua natural									s	s			s									s

V.3.4. ATIVIDADE 4

V.3.4.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

Apresentamos as questões dadas aos alunos. O texto a seguir, entre aspas, faz parte da atividade. Novamente, nossa intenção foi a de criar espaço para discutir a importância dos aspectos formais, quando estudamos Matemática.

"Recordando algumas definições e notações: "Resolver uma equação ou uma inequação" com uma incógnita real significa determinar **todos os números reais** possíveis para esta incógnita.

Assim, "resolver a equação" $2x = 3$ significa determinar **<u>todos</u>** os números reais que multiplicados por 2 resultam em 3; "resolver a inequação" $\frac{x}{3} < -1$ significa determinar **<u>todos</u>** os números reais que divididos por 3 resultam num número menor do que –1.

Para "resolver uma equação" ou "resolver uma inequação", então, precisamos utilizar algumas técnicas algébricas que permitam modificar a expressão dada inicialmente, substituindo-a por uma expressão equivalente, isto é, uma expressão que não "perca" nenhuma das soluções da original, mas que permita concluir quem são os valores reais possíveis da incógnita."

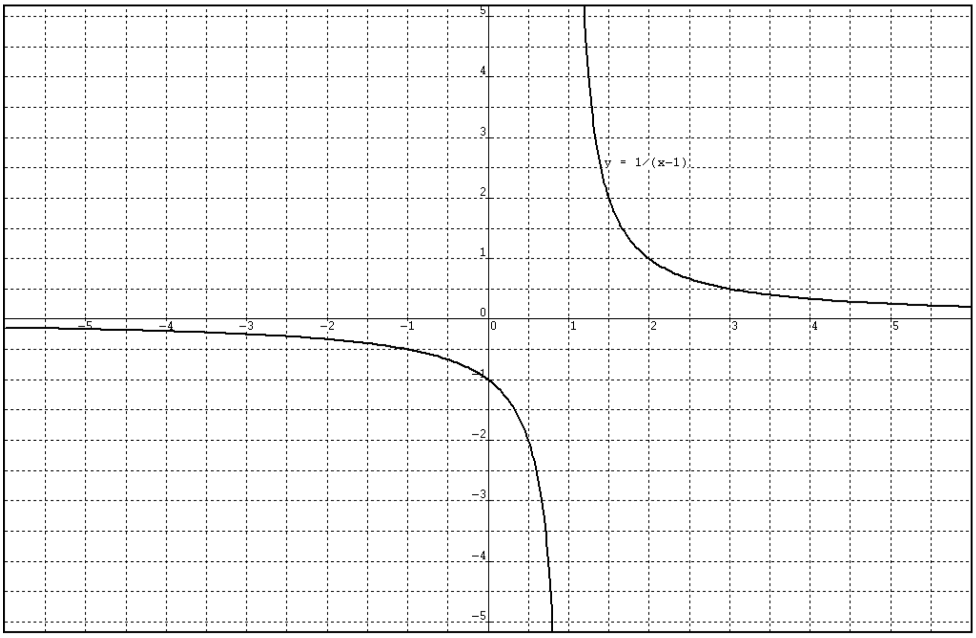
1. Para resolver a inequação $\frac{1}{x-1} < 1$, um aluno deu a seguinte resolução algébrica: "Multiplicando a inequação por x – 1, chego à inequação $1 < x - 1$; a partir desta, posso concluir que $x > 2$; portanto, a resposta à inequação inicialmente dada é $x > 2$".

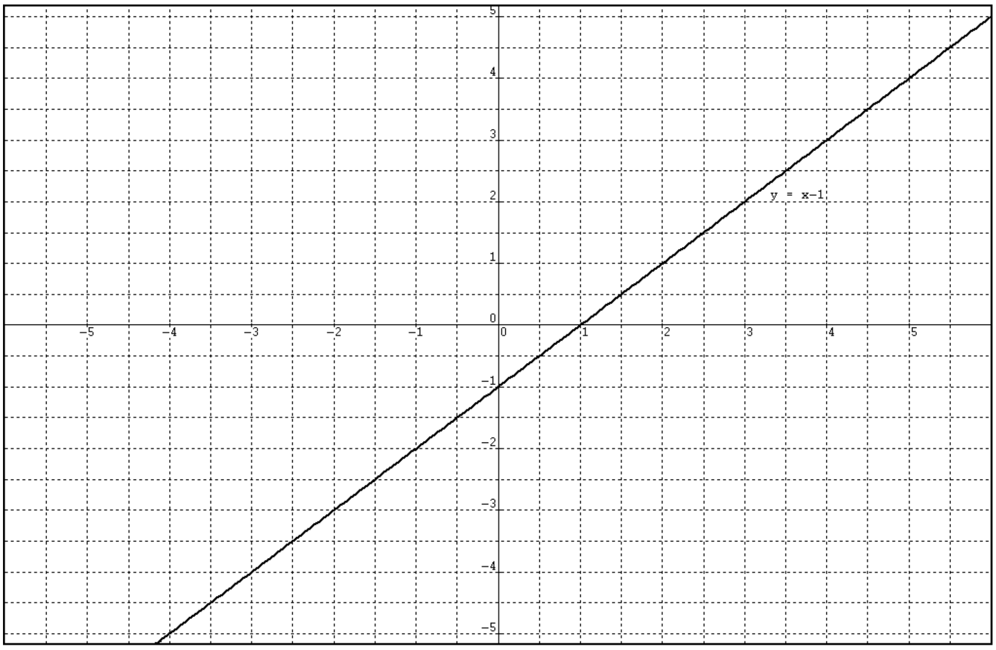
   Observe que, pela resolução do aluno, a inequação $1 < x - 1$ deveria ser equivalente à original e a inequação $x > 2$ seria equivalente a $1 < x - 1$.

   Analise o texto e veja se você concorda com este aluno.

   Compare sua resposta de hoje com a sua resposta dada ao final da atividade anterior. Suas respostas coincidem? Explique.

2. Vamos olhar os gráficos sugeridos pelas inequações $\frac{1}{x-1} < 1$ e $1 < x - 1$.



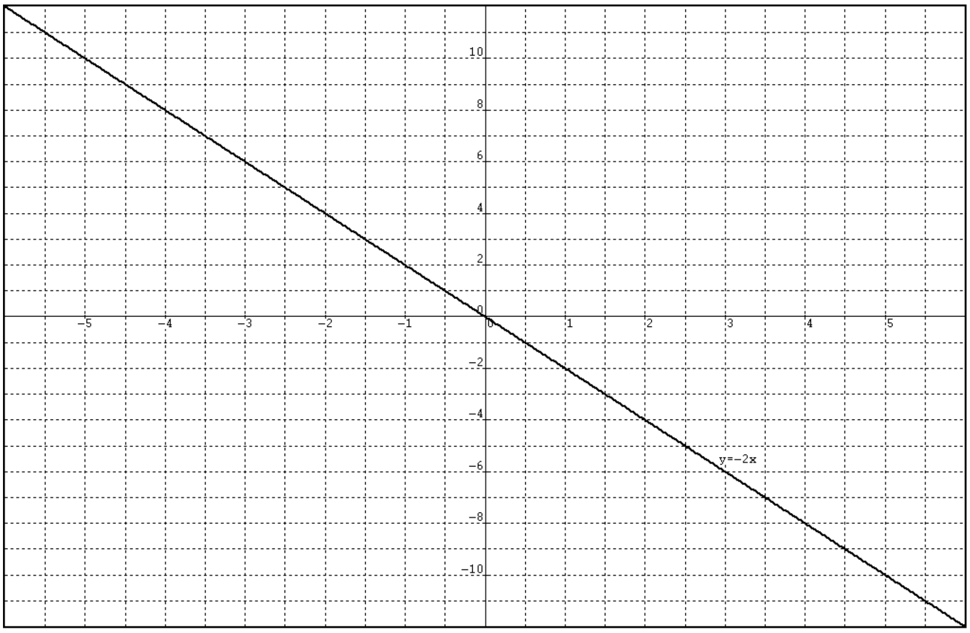


3. As expressões $\frac{1}{x-1} < 1$ e $1 < x - 1$ são equivalentes? Por que?

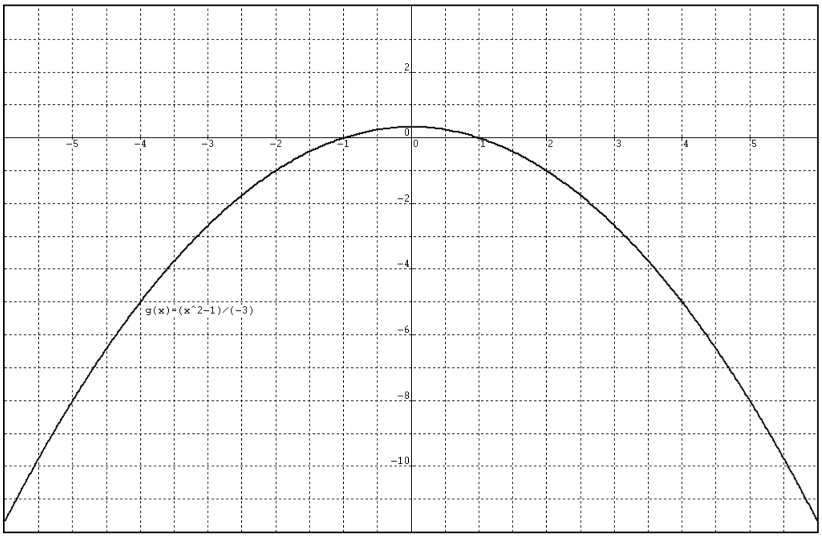
4. Qual foi a técnica algébrica utilizada pelo aluno que acarretou o erro? Por que?

5. Resolva a inequação $-2x > 0$ algebricamente

6. Pelo gráfico da função $f(x) = -2x$, determine a solução da equação $-2x > 0$. Suas respostas são coerentes? Por que?

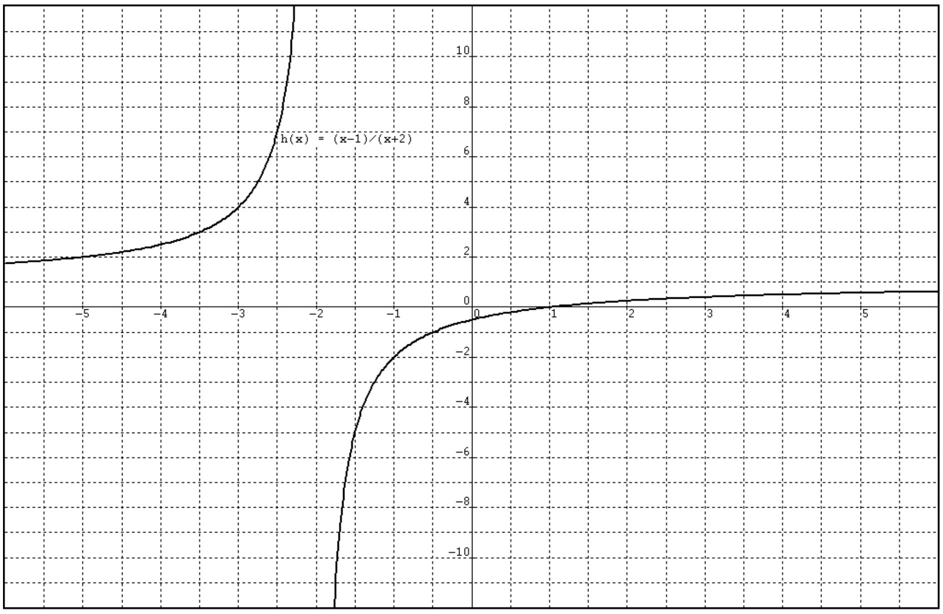


7. Pelo gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{-3}$, resolva a equação $\dfrac{x^2 - 1}{-3} = 0$. Justifique sua resposta.



8. Agora, resolva a inequação $\dfrac{x^2 - 1}{-3} < 0$.

9. Agora, resolva a inequação $\dfrac{x - 1}{x + 2} > 0$ também pelo gráfico.



10. Podemos multiplicar a inequação por x + 2? Explique como e porquê.

V.3.4.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 4

1. Resolver uma equação ou uma inequação de uma variável, usando os gráficos como ferramenta.
2. Reconhecer expressões equivalentes, por meio do uso de gráficos.

V.3.4.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Corrigir uma resolução de inequação, feita por um aluno fictício, que usou a técnica da “multiplicação em cruz”. Comparar a resposta do “aluno” com a própria, feita na atividade anterior.
2. Observar os gráficos das duas inequações, uma delas obtida da outra pela técnica da multiplicação por um fator que pode ser negativo.
3. Observar, pelos gráficos, a não equivalência das duas inequações. Justificar o raciocínio.
4. Conjecturar sobre a causa do erro na multiplicação da inequação.

5. Resolver a inequação –2x > 0 algebricamente.
6. Resolver graficamente a inequação –2x > 0. Comparar erros e acertos. Justificar.
7. Resolver graficamente a equação $\frac{x^2 - 1}{-3} = 0$, dados o gráfico e a expressão algébrica.
8. Resolver graficamente a inequação $\frac{x^2 - 1}{-3} < 0$, dados o gráfico e a expressão algébrica.
9. Resolver graficamente a inequação $\frac{x - 1}{x + 2} > 0$, dados o gráfico e a expressão algébrica.
10. Conjecturar sobre uma “multiplicação em cruz”. Justificar.

V.3.4.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 4

Para resolver uma equação ou uma inequação, em geral, precisamos substituí-la por uma outra equivalente, que nos forneça todas as soluções da original. Para obter essa equivalência, as transformações algébricas que efetivamos precisam ser corretas e é por esta razão que, para conseguir sucesso na resolução de uma equação ou inequação, o sujeito precisa aprender a “ler” o que está expresso na frase algébrica e também conhecer quais são as principais regras algébricas que gerenciam os procedimentos permitidos. Podemos dizer que existem pelo menos dois princípios que são muito importantes para a resolução algébrica de uma inequação em IR (aspectos formais): (1) o Princípio Aditivo das Desigualdades: se $a < b$ e $c \in IR$, então $a + c < b + c$ e (2) o Princípio Multiplicativo das Desigualdades: se $a < b$ e $c \in IR^{++}$, então ac<bc e se $a < b$ e $c \in IR_{-}^{*}$, então ac>bc, que são conhecidos entre a maioria dos alunos como “passar para o outro lado trocando o sinal” e “multiplicar em cruz”, respectivamente. O entendimento dos aspectos algorítmicos deste último princípio parece apresentar algumas dificuldades, uma vez que não se aplica às equações e tem duas frases condicionais. Além disso, não é tratado devidamente nos livros didáticos, em geral, onde o assunto inequações é abordado de forma superficial, como um complemento ao estudo das equações ou como uma lista de procedimentos algébricos que devem ser seguidos para obter a solução. Se utilizarmos uma abordagem baseada em aparatos físicos e olharmos uma inequação como uma gangorra em desequilíbrio, podemos dizer que, para obter uma inequação equivalente, não basta manter o desequilíbrio, também precisamos manter constante a diferença entre os dois lados da gangorra e esta não parece ser nem uma idéia comum nem intuitiva e que, portanto, tem que ser trabalhada de várias formas para o aluno compreendê-la.

Para elaborar esta atividade 4, partimos de um fato que consideramos básico, qual seja, o sujeito precisa saber que "resolver uma equação ou uma inequação em IR" significa determinar todos os valores reais que satisfazem a frase dada e que não basta que ele "vislumbre" algumas das respostas. Daí vem a necessidade que vimos de escrever alguma coisa, no início da atividade, sobre o significado da resolução e da necessidade de substituir uma frase algébrica por uma outra equivalente.

Na questão 1, apresentamos uma resolução feita por um aluno fictício, que utilizou a multiplicação em cruz para resolver a inequação $\frac{1}{x-1} < 1$, que havia sido a última questão da atividade 3. Esperávamos que os sujeitos se lembrassem da situação anterior e fossem capazes de perceber o erro e o porquê deste, justificando cada uma das passagens referentes à equivalência das frases obtidas pelo aluno fictício.

Na questão 2 são apresentados os gráficos das funções definidas por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = x-1$ para que os sujeitos determinem as soluções das inequações $f(x)<1$ e $g(x)>1$ pelo gráfico e percebam que as frases $f(x)<1$ e $g(x)>1$ não são equivalentes, porque não dão o mesmo conjunto de respostas.

Nas questões 3 e 4, os sujeitos são convidados a justificar a não equivalência das frases algébricas e qual o erro algébrico que acarretou esta não equivalência. Esperávamos que os sujeitos, com a ajuda do registro gráfico, refletissem sobre a técnica "multiplicar em cruz".

Nas questões 5 e 6, a discussão gira em torno da inequação –2x>0. O obstáculo algébrico aqui é o coeficiente –2, que aparece multiplicando a incógnita x; por esta razão, esperávamos que os sujeitos respondessem que a solução é x>0, ou porque multiplicaram em cruz sem levar em conta o sinal negativo do coeficiente ou porque "passaram o –2 para o outro lado" e ele "ficou +2". Com a ajuda do registro gráfico, acreditamos que alguns possam perceber que a resposta não pode ser x>0. Imaginamos ainda que, por se tratar de uma frase simples, alguns ainda pudessem se utilizar da língua natural para chegar à solução algébrica correta (tipo "-2 vezes x só dá positivo se o x for negativo"), deixando que aspectos intuitivos auxiliem a resolução do problema.

Com as questões 7 e 8, a discussão gira em torno da solução gráfica da equação $g(x) = \frac{x^2 - 1}{-3} = 0$ e subseqüentemente da inequação g(x)<0, podendo aí ser associada a solução da equação à da inequação, por se tratar de um gráfico de uma função contínua. No caso de alunos de Cálculo do primeiro ano do Ensino Superior, podemos explorar os teoremas sobre as funções contínuas para chegar à solução e eventualmente a uma discussão sobre as técnicas algébricas.

Nas questões 9 e 10, a proposta é a resolução gráfica da inequação $\frac{x-1}{x+2} > 0$, para posterior discussão da validade da multiplicação da inequação pelo fator x+2, solicitando sempre uma justificativa do sujeito, para forçar a discussão dos fundamentos sobre os quais se baseiam os dois princípios, o da "adição de uma parcela" e o da "multiplicação por um fator" qualquer a uma inequação.

Optamos pela resolução individual, porque é um assunto que consideramos básico para aqueles que pretendem lecionar Matemática e, portanto, cada um deve refletir sobre os próprios erros e dificuldades e fazer uma análise completa, inclusive didática, do tema inequações e da resolução gráfica tanto de uma equação como de uma inequação. É muito importante o retorno na aula seguinte e antes da resolução da próxima atividade, porque se trata de um encadeamento de idéias, o que implica numa institucionalização "local", com ênfase na importância do significado de inequações equivalentes e porque isto implica no entendimento do texto proposto. O Princípio Multiplicativo apresenta duas condições "se c>0, então..." e "se c<0, então...", o que normalmente é uma dificuldade para os alunos, pois é preciso "separar" as duas situações e trabalhar em cada uma delas para depois "unir" as soluções. Já vimos caso em que um aluno, ao resolver uma situação deste tipo, com x>2 por exemplo, não consegue entender porque a solução x=0 não pode fazer parte da resposta, uma vez que ela aparece no desenvolvimento da frase algébrica (equação ou inequação).

V.3.4.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Na atividade 4, as componentes mais esperadas são, como na atividade 3, os tratamentos e as conversões entre os registros gráfico, algébrico e da lingua natural. Começamos a atividade com uma resolução algébrica, porque gostaríamos que os sujeitos não só percebessem que ela não está correta, como também que a resolução gráfica pode dar indicativos do erro, como é sugerido nos itens 1 a 6. Em quase todos os itens pedimos algum tipo de justificativa ou de conjectura, porque acreditamos que, ao responder questões desse tipo, o sujeito tem que organizar as idéias e, com isso, é estimulado a inter-relacionar os aspectos formais com os demais. Este é o caso, por exemplo, nos itens 6 e 10.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 14: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIVIDADE 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tratamento do registro algébrico	s		s		s			s		s
Conversão do registro gráfico para o algébrico			s			s	s	s	s	
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas						s	s	s	s	
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico						s	s	s	s	
Justificativa escrita de um fato observado				s		s	s			s
Conjectura a partir da observação				s		s				s
Conversão do registro algébrico para o gráfico		s	s	s		s	s	s	s	

V.3.5. ATIVIDADE 5

V.3.5.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

Apresentamos as questões dadas aos sujeitos, na forma em que foram originalmente elaboradas. O texto a seguir, entre aspas, faz parte da atividade.

"As técnicas algébricas que podemos realizar sobre uma equação ou uma inequação com uma incógnita real precisam ser bem entendidas, porque delas depende a resolução correta do problema proposto. Como já discutimos anteriormente, essas técnicas têm por finalidade substituir uma equação/inequação por uma outra que lhe seja equivalente, isto é, que preserva as soluções da original."

1. Para resolver a inequação $x^2 \le 9$, um aluno deu a seguinte resolução algébrica:

   "Extraindo a raiz quadrada dos dois lados, chego à inequação $x \le \pm 3$; portanto, a resposta à inequação inicialmente dada é $x \le \pm 3$".

   Observe que, pela resolução do aluno, a inequação $x \le \pm 3$ deveria ser equivalente à original.

   Analise o texto e veja se você concorda com este aluno. Discuta suas dúvidas.

2. Vamos olhar o gráfico sugerido pela inequação $x^2 \le 9$ no Cabri. Abra o arquivo x^2.fig.
3. Peça as coordenadas dos pontos X, P e Q. O ponto X é um ponto genérico do gráfico de $f(x) = x^2$? Por que?
4. E os pontos P e Q, quem são?
5. Movimente o ponto X de modo que ele fique "mais alto" do que os pontos P e Q. Neste caso, como são as coordenadas do ponto X? Descreva-as na língua natural e na linguagem algébrica.
6. Movimente o ponto X de modo que ele fique "mais baixo" do que os pontos P e Q. Neste caso, como são as coordenadas do ponto X? Descreva-as na língua natural e na linguagem algébrica.

7. Olhando o gráfico, determine as soluções da inequação $x^2 \leq 9$.
8. Suas soluções coincidem com as do seu aluno? Justifique.
9. Vamos olhar mais de perto a frase "Extraindo a raiz quadrada dos dois lados ...".
10. Para tanto, utilize o software GRAPHMATICA para pedir o gráfico da função $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$. Você o reconhece? Que gráfico é esse?
11. Esboce o gráfico da função $g(x) = |x|$. Como você o compara ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$?
12. Qual foi o erro do seu aluno? Justifique.

V.3.5.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 5

1. Utilizar o registro gráfico para perceber que "extrair a raiz" dos dois lados de uma inequação pode conduzir a erro.
2. Identificar $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2}$ com $|\mathbf{x}|$ por meio da comparação entre os dois gráficos.

V.3.5.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Analisar o uso da "extração da raiz" numa resolução pronta da inequação $\mathbf{x}^2 \leq \mathbf{9}$. Conjecturar sobre a causa do erro.
2. Observar o gráfico sugerido pela inequação num arquivo pronto do software Cabri-géomètre II, onde aparecem os gráficos de $f(x) = x^2$ e de $g(x) = 9$.
3. Justificar que o ponto X é um ponto genérico do gráfico de f.
4. Conjecturar sobre os pontos de intersecção dos dois gráficos.
5. Observar o ponto genérico quando ele tem a ordenada maior do que 9. Conjecturar e descrever este comportamento na língua natural e na algébrica.

6. Observar o ponto genérico quando ele tem a ordenada menor do que 9. Conjecturar e descrever este comportamento na língua natural e na algébrica.
7. Resolver graficamente a inequação $\mathbf{x^2 \leq 9}$, dado o gráfico.
8. Comparar a solução encontrada em 7 com a do aluno fictício (questão 1).
9. Alertar-se para a técnica de "extrair a raiz quadrada dos dois lados".
10. Construir, no software GRAPHMATICA, o gráfico da função $\mathbf{h(x) = \sqrt[2]{x^2}}$. Conjecturar sobre o gráfico.
11. Construir, no software GRAPHMATICA, o gráfico da função $\mathbf{j(x) = |x|}$. Comparar este gráfico com o da função h do item anterior.
12. Conjecturar sobre o erro cometido pelo aluno fictício.

V.3.5.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 5

Para resolver uma equação e/ou uma inequação, em geral, o sujeito precisa substituí-la por uma equivalente, isto é, que dê o mesmo conjunto de soluções. Para tanto, ele precisa ter muito claro o significado da frase algébrica inicial. Ora, da nossa experiência com os alunos (e também com os professores) a igualdade $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2} = |\mathbf{x}|$ está muito longe de ser entendida ou até mesmo discutida. Um dos livros didáticos que passaram por nossas mãos, dentre os utilizados pelos professores no Ensino Fundamental, ao tratar do módulo de um número, coloca frases do tipo "quando o número dentro das barras é positivo, basta tirar as barras" e "quando o número dentro das barras é negativo, basta tirar as barras, colocando o sinal de menos na frente do número". Também não me parece suficientemente discutido e analisado o significado da função módulo, porque ela aparece, em geral, com sua definição algébrica, que é constituída de duas sentenças do tipo "se ... então" e muito raramente aparece a definição geométrica, envolvendo distância que, no nosso entender, poderia ajudar na inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na função módulo ou até mesmo no módulo de um número.

A partir dessas considerações, decidimos, nesta atividade, usar o registro gráfico e o dinamismo do software Cabri-géomètre II como uma forma de abrir a discussão da equivalência entre $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2}$ e $|\mathbf{x}|$. Quem sabe a visualização dos dois gráficos poderia ajudar os alunos a perceberem essa igualdade?

A questão 1 foi colocada como uma forma de ligar as atividades anteriores a esta, reforçando a discussão sobre a necessidade de trabalharmos o entendimento das frase algébricas.

Com a questão 2, os sujeitos têm acesso ao gráfico da função $f(x)=x^2$ junto com o da função $g(x)=3$. Sobre a parábola existem três pontos marcados: X (ponto livre sobre o gráfico, portanto genérico), P de coordenadas (3,9) e Q de coordenadas (-3,9) (portanto, P e Q são as intersecções da reta com a parábola).

Nas questões 3 e 4, os sujeitos são convidados a conjecturar sobre a relação entre os pontos P, Q e X com os gráficos presentes no sistema de coordenadas. É importante que o professor estimule seus alunos para a leitura dos gráficos como um todo e não só ponto a ponto, ajudando-os a superar uma dificuldade que está quase sempre presente na leitura e na compreensão de pontos genéricos.

As questões 5 e 6 foram colocadas para aproveitar o dinamismo do software Cabri-géomètre II para a leitura e a interpretação das coordenadas dos pontos X do gráfico da parábola, em comparação com os pontos P e Q de intersecção com a reta: se $X(x,x^2)$ está "acima" de P(3,9) ou de Q(-3,9), então podemos escrever no registro algébrico algo do tipo $x^2>9$, porque a segunda coordenada de X é maior do que a segunda coordenada dos pontos sobre a reta y=9. À medida que o ponto X permanece "abaixo" dos pontos P e Q, então acontece o contrário e podemos escrever com o registro algébrico que $x^2<9$. Esta leitura e a conseqüente interpretação sobre as coordenadas não é trivial e deve ser sempre estimulada pelo professor para que os alunos possam superar as dificuldades inerentes ao registro gráfico.

Com a questão 7, queremos que os alunos resolvam a inequação dada usando o registro gráfico como apoio para o registro algébrico e percebam que a solução da inequação é "os valores de x que estão entre –3 e 3" e que, portanto, o registro algébrico correspondente é $-3 \leq x \leq 3$ (gostaríamos de observar que alguns alunos e alguns professores têm dificuldade com a leitura desta frase algébrica, talvez porque tenhamos o hábito de lê-la a partir do x e nunca interpretá-la como "-3 está à esquerda de x, que por sua vez está à esquerda de 3").

A questão 8 pede uma análise da solução errada do aluno fictício, tentando compará-la com a solução obtida graficamente. Por que será que há discrepância entre as duas? O que está errado no raciocínio do aluno fictício, que é o da maioria dos alunos que realizaram o teste diagnóstico?

A questão 9 traz à discussão uma frase típica (que nos parece uma "regra" dentre as muitas que são aprendidas e não compreendidas) "Extraindo a raiz quadrada dos dois lados ...", tentando focar a atenção dos alunos para os passos da resolução errada apresentada, a fim de entender o erro.

Para ajudar nesta discussão, nas questões 10 e 11 pedimos aos sujeitos que obtenham os gráficos das duas funções para que percebam que são iguais, $\mathbf{j(x) = |x|}$ e $\mathbf{h(x) = \sqrt[2]{x^2}}$, agora usando o software GRAPHMATICA, que é mais amigável e mais rápido se o objetivo é só a obtenção dos gráficos. De posse dos dois gráficos, os sujeitos poderão perceber que são iguais e que, portanto, $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2}$ = $|\mathbf{x}|$ e não é verdade que $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2}$ =x simplesmente. Com esta questão, abre-se uma discussão posterior, em sala de aula, sobre o significado não trivial de $\sqrt[2]{\mathbf{x}^2}$.

Finalmente, encerrando a seqüência, colocamos a questão 12, que pede aos sujeitos que analisem a solução errada do aluno fictício e esperamos que, com a ajuda do registro gráfico que esteve fortemente presente nesta atividade, eles possam perceber onde está o erro e porque ele apareceu.

Elaboramos esta atividade para que ela seja resolvida individualmente, sem interferência do professor, no ambiente informático e ainda sem a preocupação com certos e errados, porque achamos importante que cada aluno da formação inicial, como um futuro professor de Matemática e cada professor aprenda: a trabalhar com o registro gráfico; a desenvolver suas próprias idéias, escrevendo-as quer seja no registro algébrico, quer seja no da língua natural; a aceitar que nem sempre é só certo ou errado. Acreditamos fortemente que o registro gráfico, embora traga dificuldades inerentes a ele, precisa ser trabalhado na Educação Básica desde muito cedo, para que permita, à maioria dos alunos e não só àqueles que gostam de Matemática, que superem essas dificuldades.

É importante que o professor, na aula seguinte e depois de ler os protocolos dos alunos, faça uma institucionalização da atividade e da seqüência como um todo, trazendo à discussão pontos importantes, tais como: o significado de frases equivalentes na resolução de equações e/ou inequações; a necessidade do trabalho com a leitura e a interpretação das frases algébricas; a contribuição que o registro gráfico pode trazer para a aprendizagem; a importância do trabalho com o tratamento e a conversão de registros; a leitura e a interpretação globais das coordenadas dos pontos sobre um gráfico; a desmistificação do registro numérico estrito como solucionador de problemas globais; a importância do entendimento correto e formal dos registros, como por exemplo a falta de significado do registro algébrico $x \leq \pm 3$ em Matemática.

V.3.5.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Na atividade 5, o uso dos registros gráfico, algébrico e da língua natural, com os respectivos tratamentos e conversões é estimulado, na expectativa de reforçar os aspectos formais da resolução funcional gráfica, no caso particular da inequação $x^2 \leq 9$. Esperávamos que os sujeitos percebessem que a resolução gráfica é equivalente à algébrica e que, portanto, para resolver essa inequação o melhor procedimento não é simplesmente extrair a raiz quadrada dos dois lados, a menos que saibamos lidar com o aspecto formal envolvido na definição de $\sqrt{x^2}$, que é entender que $\sqrt{x^2} = |x|$. E uma das formas de "ver" isto é pela conversão entre os registros gráfico e algébrico das funções definidas por $h(x) = \sqrt{x^2}$ e $p(x) = |x|$.

Como é a última atividade da nossa seqüência, gostaríamos que os sujeitos tivessem feito inter-relações entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos da resolução funcional gráfica genérica de inequações com uma incógnita real e que relacionassem esta última com a resolução algébrica. A partir disso, refletissem sobre a possibilidade de desenvolver um trabalho diferenciado nas salas de aula da Educação Básica.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 15: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIVIDADE 5

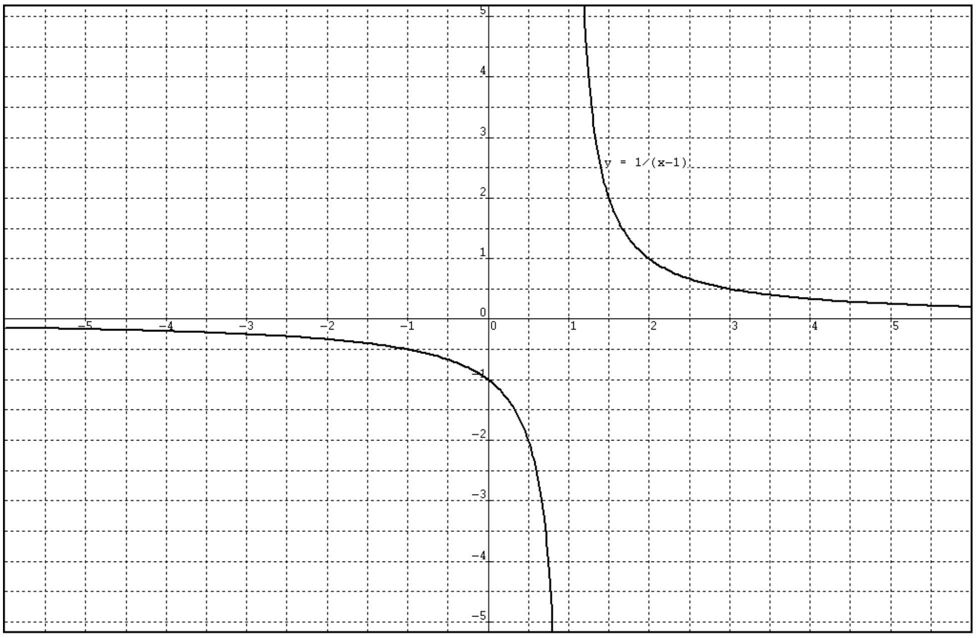
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Observação dinâmica (visualização) das duas coordenadas de um ponto genérico sobre um gráfico			s									
Conversão do registro gráfico para o algébrico		s	s	s	s	s	s			s	s	
Conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural					s	s						
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico					s	s	s					
Justificativa escrita de um fato observado			s	s	s	s	s	s		s	s	s
Observação dinâmica (visualização) da variação das duas coordenadas de pontos sobre um gráfico					s	s	s			s	s	
Conjectura a partir da observação			s	s	s	s		s		s	s	s
Conversão do registro algébrico para o gráfico	s			s	s	s	s			s	s	
Tratamento algébrico	s											
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico							s					
Conversão do registro gráfico para o da língua natural					s	s						
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas			s	s			s					

V.3.6. ATIVIDADE 3 (CONT.)

V.3.6.1. QUESTÕES DADAS AOS SUJEITOS

Apresentamos aqui as questões dadas aos alunos na atividade 3 (cont.). Como já explicamos anteriormente (ver início do parágrafo V.3, página 120) o grupo de alunos não conseguiu terminar a atividade 3 no tempo de aula previsto e assim, para a aula seguinte, reformulamos a atividade 3 que foi chamada de atividade 3 (cont.). As questões 9 a 22 da atividade 3 foram re-enumeradas para fazerem parte das 20 questões da atividade 3 (cont.). Foram entremeadas 6 novas questões, que são, na atividade 3 (cont.), as de números 13, 14, 16, 17, 19 e 20. Nestas questões, solicitamos as resoluções algébricas das equações e das inequações das quais antes só pedíamos a resolução gráfica e ainda uma comparação, com explicação, entre os resultados obtidos. Queríamos ter, por escrito, como (e se) os alunos estavam percebendo que ambas as resoluções têm que dar a mesma resposta.

1. No sistema de coordenadas, está representado o gráfico da função $h(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, onde x é um número real diferente de 1 (por que?).



2. Descreva, na linguagem natural e depois na linguagem algébrica, as coordenadas dos pontos do gráfico.

3. Localize os pontos do gráfico que têm abscissa positiva.
4. Localize os pontos do gráfico que têm ordenada positiva.
5. Localize os pontos do gráfico que têm ordenada igual a 2. Descreva estes pontos algebricamente.
6. Localize os pontos do gráfico que têm ordenada menor do que 2. Descreva estes pontos algebricamente.
7. Localize as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item 6. Descreva estes valores.
8. Qual a relação entre a resposta dada no item 7 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 2$? Explique.
9. Localize os pontos do gráfico que têm ordenada menor do que 0. Descreva estes pontos algebricamente.
10. Localize as abscissas dos pontos que fazem parte da resposta do item 9. Descreva estes valores.
11. Qual a relação entre a resposta dada no item 10 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 0$? Explique.
12. Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a equação $y = \frac{1}{x-1} = 1$. Explique seu raciocínio.
13. Resolva algebricamente a equação $y = \frac{1}{x-1} = 1$.
14. Compare as respostas dos itens 12. e 13. São iguais?
15. Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a equação $y = \frac{1}{x-1} = -1$. Explique seu raciocínio.
16. Resolva algebricamente a equação $y = \frac{1}{x-1} = -1$.
17. Compare as respostas dos itens 15. e 16. São iguais?

18. Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 1$.

    Explique seu raciocínio.

19. Resolva algebricamente a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 1$.

20. Compare as respostas dos itens 18. e 19. São iguais? Por que?

V.3.6.2. OBJETIVOS DA ATIVIDADE 3 (CONT.)

São os mesmos da atividade 3.

1. Localizar pontos sobre um gráfico de função de uma variável no plano cartesiano, destacando a necessidade de indicar <u>duas</u> coordenadas, seja na linguagem algébrica, seja na natural. A primeira coordenada (ou abscissa) é a variável independente e a segunda, a dependente.
2. Ler e interpretar gráficos e regiões.

V.3.6.3. AÇÕES ESPERADAS EM CADA ITEM

1. Dada a expressão algébrica e o gráfico, identificar um valor fora do domínio.
2. Descrever os pontos do gráfico, na língua natural e na algébrica.
3. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição sobre as abscissas.
4. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição sobre as ordenadas.
5. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de igualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
6. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de desigualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
7. Localizar, sobre o eixo horizontal, os valores das abscissas dos pontos do gráfico descritos no item 15. Descrever estes valores.

8. Conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.
9. Localizar, sobre o gráfico, pontos com uma condição de desigualdade sobre as ordenadas. Descrever estes pontos algebricamente.
10. Localizar, sobre o eixo horizontal, os valores das abscissas dos pontos descritos no item 17.
11. Conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.
12. Resolver graficamente uma equação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.
13. Resolver algebricamente a equação dada no item 12.
14. Comparar as respostas obtidas nos itens 12 e 13.
15. Resolver graficamente uma equação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.
16. Resolver algebricamente a equação dada no item 15.
17. Comparar as respostas obtidas nos itens 15 e 16.
18. Resolver graficamente uma inequação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.
19. Resolver algebricamente a inequação dada no item 18.
20. Comparar as respostas obtidas nos itens 18 e 19. Explicar porque são ou não são iguais.

V.3.6.4. ANÁLISE DIDÁTICA DA ATIVIDADE 3 (CONT.)

Nesta atividade não colocamos um texto inicial, porque seria o mesmo da atividade 3.

Todas as questões foram elaboradas a partir da expressão algébrica e do gráfico da função $h(x) = \frac{1}{x-1}$ que escolhemos por ser uma função contínua, do tipo racional, cujo domínio é formado por dois intervalos abertos.

As questões 1 a 12, 15 e 18 são as questões 9 a 20, 21 e 22 da atividade 3, respectivamente. Assim, não vamos repetir aqui a análise que já fizemos delas na atividade 3 (ver parágrafo V.3.3.4, página 146). As questões 13, 14, 16, 17, 19 e 20 são as que não estavam na atividade 3 e vamos explicar as razões didáticas que nos levaram a incluí-las.

Percebemos, ao olhar os protocolos dos alunos, que na atividade 3 só pedíamos as resoluções gráficas de algumas equações e inequações. Como este público, embora precariamente, já teve contato com as resoluções algébricas, decidimos pedi-las para estas mesmas equações e inequações, como uma forma de trazer à discussão os aspectos formais envolvidos nas conversões entre os registros gráfico e algébrico e para ter um relato escrito de como (e se) estes alunos estavam percebendo que as duas formas de resolução são equivalentes e, portanto, precisam dar a mesma resposta.

Na questão 13 pedimos a resolução algébrica da equação da questão 12, na qual solicitamos a resolução gráfica. Na questão 14, os sujeitos precisam comparar as duas respostas obtidas e responder se são ou não são iguais. Esperávamos que os alunos começassem a fazer ligações mais estreitas entre as duas abordagens. Analogamente, nas questões 16 e 17 pedimos a resolução algébrica da equação dada na questão 15 e a comparação entre as duas respostas.

Na questão 19, solicitamos a resolução algébrica da inequação dada na questão 18, na qual o pedido é pela resolução gráfica. Na questão 20, última da atividade, pedimos que os alunos façam a comparação das respostas obtidas nas duas questões anteriores, perguntando porque são ou não são iguais. Com esta questão gostaríamos que estes sujeitos começassem a perceber as conversões e, talvez, as vantagens de um trabalho conjunto das duas abordagens, tanto a algébrica como a funcional gráfica.

Insistimos no trabalho individual e sem interferência porque acreditamos que é importante que cada aluno desenvolva suas próprias habilidades de leitura e interpretação de textos e de gráficos e porque achamos que as representações, embora devam ser universais, têm uma característica individual. Cada sujeito pensa diferente e adquire essa experiência em tempos didáticos diversos, dependendo de sua vivência anterior.

Após a atividade e na aula seguinte, após a leitura dos protocolos dos alunos, o professor deve fazer uma institucionalização, na qual fique claro o papel de cada coordenada dos pontos sobre o gráfico, estejam elas sujeitas a uma condição ou não, bem como o papel que cada uma delas desempenha na abordagem gráfica funcional da resolução de inequações. É papel fundamental do professor estimular, provocar e promover o tratamento e a conversão de registros, principalmente o da língua natural, que deve ser intensamente trabalhado, porque acreditamos que ele vá permitir que o sujeito deixe de ter medo da Matemática e passe a ter sucesso nas suas atividades matemáticas, inter-relacionando os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos do assunto em estudo.

Dependendo dos protocolos dos alunos, pode ser viável uma institucionalização na qual seja aberta a discussão sobre o uso da ferramenta continuidade para resolver uma inequação a partir da resolução da equação associada.

V.3.6.5. COMPONENTES GERAIS ESPERADAS

Como já explicamos no parágrafo , esta atividade é um desdobramento da atividade 3, só para o grupo de alunos, porque estes não conseguiram terminá-la no tempo previsto e consideramos que idéias muito importantes que queríamos discutir, com a seqüência toda, estão na atividade 3. Assim, as componentes mais esperadas são as mesmas da atividade 3, com o acréscimo do tratamento algébrico puro, conforme solicitado nos itens 13, 16 e 19. Com isto, gostaríamos de reforçar os aspectos formais que garantem que as resoluções algébrica e gráfica são equivalentes e que, portanto, se as respostas não são iguais, precisamos procurar quais são os aspectos que estão falhando, os formais, os algorítmicos ou os intuitivos, para corrigir as idéias erradas que se instalaram na nossa mente.

Para uma explicação mais detalhada do que entendemos por componentes gerais esperadas, ver o início do parágrafo V.3, página 121.

TABELA 16: COMPONENTES GERAIS ESPERADAS NA ATIV. 3 (CONT.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Conversão do registro gráfico para o algébrico		s	s		s		s		s	s					s			s	s	s	s	
Conversão do registro na língua natural para o algébrico												s	s	s	s	s	s	s				
Conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural		s								s					s							s
Conversão do registro numérico para o gráfico																						
Conversão do registro algébrico para o gráfico	s			s	s	s	s								s		s	s	s	s	s	s
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as abscissas																						
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas										s	s	s	s	s					s	s	s	
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico														s	s		s		s	s	s	
Conversão do registro gráfico/algébrico para o algébrico								s		s												
Conjectura a partir da observação					s		s	s							s			s	s	s	s	s

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas										s	s	s	s	s					s	s	s	
Localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico														s	s		s		s	s	s	
Conversão do registro gráfico/algébrico para o algébrico								s		s												
Conjectura a partir da observação					s		s	s							s			s	s	s	s	s
Justificativa escrita de um fato observado					s		s	s							s			s	s	s	s	s
Conversão do registro na língua natural para o gráfico											s	s	s	s	s		s	s				
Conversão do registro gráfico para o da língua natural									s	s			s									s

V.4. APLICAÇÃO E OBSERVAÇÃO DA SEQÜÊNCIA

Nos parágrafos anteriores, expusemos as idéias que nos levaram à concepção e à elaboração da seqüência didática sobre a resolução funcional gráfica de inequações com uma incógnita real que, a princípio, resultou em cinco atividades. Como o grupo de alunos não conseguiu terminar a atividade 3 no tempo de duas horas-aula previsto, reformulamos os últimos itens da atividade 3, gerando assim a atividade 3 (cont.), que só foi aplicada ao grupo de alunos.

Também apresentamos a análise didática que fizemos de cada uma das atividades elaboradas.

Neste parágrafo, pretendemos descrever as condições que cercaram a aplicação da seqüência, bem como a respectiva observação.

Como já explicitamos no parágrafo IV.1.4, página 74, antes da aplicação da seqüência, lembrando que estávamos pesquisando junto a um grupo de alunos do primeiro ano da formação inicial e a um grupo de professores, fizemos um trabalho com as notações, as funções e os gráficos. Com as funções e os gráficos, pelo trabalho com as “funções de referência” e as “funções associadas”. Com as notações, pela discussão das mais variadas formas de apresentar os conjuntos, os intervalos e as funções: pela língua natural; pelos esquemas gráficos com trechos hachurados da reta real; pelos intervalos abertos, fechados, semi-abertos, com os infinitos ou não; pelos conjuntos da forma $\{u \in A \mid s < u < t\}$; pelos conjuntos da forma $\{(a, g(a) \mid a \in dom(g)\}$; pelas formas simplificadas do tipo c<x<d. Este trabalho, com os alunos, ocorreu nos três meses que antecederam a aplicação da seqüência, dentro da disciplina Cálculo 1 e os alunos tinham liberdade de escolher a notação com que se identificavam mais. Com os professores, desenvolvemos três atividades, em seis oficinas de 2,5 horas cada uma, com a ajuda do Cabri-géomètre II, para acelerar a obtenção dos gráficos das funções, que já estavam à disposição no menu de ferramentas.

Do grupo de nove (9) professores, nem todos fizeram as cinco atividades elaboradas, mas conseguimos desenvolver toda a seqüência com pelo menos dois deles, no tempo usual e com outros cinco com alguma defasagem. Cada atividade foi desenvolvida, em geral, em duas oficinas semanais consecutivas de 2,5 horas, iniciadas e terminadas com uma institucionalização. O trabalho individual dos professores, no papel e lápis, foi acompanhado por três observadores. Para o trabalho com o computador, os professores formaram 3 duplas e 3 ficaram sozinhos. Dois observadores acompanharam duas duplas e um, um dos professores que ficou sozinho. As observações foram guardadas para tirar eventuais dúvidas que os textos dos protocolos pudessem trazer.

No caso dos professores, por tratar-se de um grupo pequeno e de professores, que haviam manifestado explicitamente interesse na discussão, decidimos considerar, para análise, todas as respostas dadas às questões escolhidas como significativas (ver capítulo I, página 184).

Com o grupo de alunos, não pudemos desenvolver a quinta atividade, por razões de horário e de falta de tempo nas aulas normais. Por outro lado, a atividade 3 teve que ser desdobrada, por razões didáticas: a maioria dos alunos presentes não conseguiu terminá-la dentro do prazo previsto de duas horas-aula. Aproveitamos o ensejo para re-elaborar os últimos itens, de forma a incluir algumas resoluções algébricas, tanto de inequações, como das equações associadas a essas. Com isso, os alunos acabaram trabalhando cinco atividades: 1, 2, 3, 3(cont.) e 4. Como a atividade 5 é uma espécie de generalização final sobre o conjunto de funções escolhidas, incluindo a função módulo, acreditamos que a não realização desta atividade não modifica de forma substancial os resultados que podemos extrair da análise das respostas dos alunos às demais questões escolhidas.

Cada atividade foi desenvolvida individualmente, durante duas horas-aula, acompanhadas por nós, porém sem nenhuma intervenção. Já havíamos conversado com o grupo sobre a proposta como um todo e este manifestou-se favorável para desenvolvê-la. Utilizamos dez semanas consecutivas, porque intercalamos a realização de uma atividade com uma institucionalização, como havíamos previsto em nossa análise didática.

O trabalho dos alunos só foi acompanhado por nós, sem a presença de observadores, filmadoras ou gravadores. Nossa única documentação são os protocolos dos alunos.

Ao todo, 30 alunos circularam pela seqüência toda, mas apenas 16 fizeram todas as cinco atividades trabalhadas pela classe. Por esta razão, para analisar a evolução do grupo decidimos considerar apenas os protocolos com as respostas destes 16 alunos.

VI. ANÁLISE DOS DADOS

No capítulo anterior, descrevemos as idéias que nos guiaram para *a concepção, a elaboração, a análise didática, a aplicação e a observação* de nossa seqüência de ensino, passos estes que constituem a segunda etapa de nosso método de pesquisa (ver início do capítulo I, página 184), que foi inspirado por Artigue (1995).

Neste capítulo, apresentamos a terceira e última etapa desse método, que se constituiu na análise das respostas obtidas nos protocolos dos sujeitos que participaram efetivamente da seqüência. Esta análise deverá ser feita considerando nossos pressupostos teóricos e nossos objetivos, escolhendo aquelas itens que, em cada atividade, consideramos relevantes para sugerir um panorama dos resultados obtidos com os dois grupos participantes.

Como um dos grupos é constituído por alunos de primeiro ano de uma formação inicial em Matemática e o outro, por professores com pelo menos 5 anos de experiência em sala de aula, julgamos importante intercalar a análise dos protocolos, nas questões que foram comuns. Com isto, pretendemos comparar os resultados obtidos em três etapas: na primeira, questão a questão; na segunda, por atividade; e na terceira, em geral.

Com o grupo de alunos, como já explicamos (ver início do parágrafo V.3, página 120), aplicamos cinco atividades, as de números 1, 2, 3, 3 (cont.) e 4, sendo que a 3 (cont.) foi um desdobramento da atividade 3. Tivemos um máximo de 30 alunos circulando por todo o trabalho, porém decidimos analisar os protocolos de 16 deles, que são os que: ou fizeram as cinco atividades; ou só deixaram de fazer a atividade 1; ou só fizeram uma das atividades 3 ou 3 (cont.); e quatro que só deixaram de fazer a atividade 2 (ver no parágrafo IV.1.3, página 72 o perfil deste grupo e no Apêndice B, página 276, a tabela com a presença destes alunos às atividades).

Com o grupo de professores, utilizamos as cinco atividades originalmente elaboradas, as de números 1, 2, 3, 4 e 5. Tivemos 10 professores presentes em algumas atividades, mas consideramos 7 deles, que são os que convivem semanalmente conosco, há pelo menos um ano e que estão atuando em sala de aula (ver no parágrafo IV.1.3, página 72 o perfil deste grupo e no Apêndice C, página 277, a tabela com a presença destes professores às atividades).

VI.1. ANÁLISE DOS PROTOCOLOS

Em cada atividade, escolhemos os itens que, no nosso entender, vão dar um panorama do que estava acontecendo, ao longo da aplicação da seqüência, em cada grupo. Com isto, foram escolhidos 19 itens para os professores e 22 para os alunos, por causa da diferença ocorrida com as atividades 3 (cont.) e 5.

Optamos por fazer a apresentação dos resultados sempre intercalando os dois grupos, mesmo no caso em que a atividade não foi aplicada a um deles, como é o caso das atividades 3(cont.) e 5. A primeira só o foi ao grupo de alunos e a segunda, ao de professores.

VI.1.1. ATIVIDADE 1

Na atividade 1, o trabalho foi concentrado na localização de pontos sobre o plano cartesiano e na necessidade de sempre dar as duas coordenadas do ponto, principalmente no início da aprendizagem. Destacamos aqui que muitos dos pesquisados, ***alunos*** e ***professores***, mostraram dificuldade em associar um ponto sobre os eixos coordenados com as duas coordenadas desse ponto. Estes sujeitos, quando perguntados, demonstraram acreditar que os eixos eram algo à parte e não duas retas integrantes do todo, escolhidas para compor o sistema de referência. Entre os ***alunos***, muitos deles demoraram a “aceitar” que a origem também tem duas coordenadas e que estas coordenadas são (0, 0).

Com a institucionalização feita na aula seguinte à aplicação da atividade, a maioria dos alunos passou a utilizar duas coordenadas para representar os pontos do plano cartesiano. Como nosso interesse maior está nas inequações, não escolhemos nenhum dos itens desta atividade para apresentar nesta análise.

VI.1.2. ATIVIDADE 2

Na atividade 2, o trabalho foi essencialmente em cima de duas retas, uma com coeficiente angular positivo e a outra, negativo. Lembramos que, nos livros didáticos e nos programas de Matemática, é dada uma ênfase enorme ao estudo teórico das funções afins, de uma forma que poderíamos chamar de "esgotante", pois são destacados separadamente: a expressão algébrica, o coeficiente angular, o coeficiente linear e o gráfico. Por esta razão, decidimos iniciar a abordagem funcional gráfica de inequações com uma incógnita com os gráficos de retas.

Os itens escolhidos foram os dois últimos, que são as questões 13 e 14 (reproduzidas no que segue), porque acreditamos que é possível, com a análise das respostas dadas a elas, ter uma idéia de quanto do intuitivo, do algorítmico e do formal restou ao final da atividade, só trabalhando com os registros gráficos e algébricos de retas, que estão, pelo menos teoricamente, mais próximos tanto dos ***professores*** como dos ***alunos***.

Entre os ***professores***, estiveram presentes: três duplas, um professor sozinho e um professor que estava com um ex-aluno e pedimos que cada um escrevesse, individualmente, suas idéias e suas conclusões. Analisamos os protocolos dos 7 professores escolhidos.

Entre os ***alunos***, compareceram 21, que fizeram a atividade individualmente. Não acreditamos que a utilização do software GRAPHMATICA tenha influenciado os resultados, porque os ***alunos*** já o conheciam e só o utilizamos para obter os gráficos de forma mais rápida. Nesta fase da aprendizagem, os ***alunos*** parecem ter um apelo muito forte para dar uma abordagem numérica e o esboço de um gráfico é demorado, porque parece exigir uma escala perfeita, mesmo que seja só para escolher dois pontos. O trabalho em ambiente informático também não era novidade, porque já o vinham fazendo, nas aulas de Geometria e Cálculo.

Questão 13: Qual a relação entre estes dois gráficos e a inequação $3x + 1 > -2x + 1$? Enuncie suas certezas e suas dúvidas.

Questão 14: Qual a relação entre estes dois gráficos e a inequação $3x + 1 < -2x + 1$? Enuncie suas certezas e suas dúvidas.

Os gráficos das duas retas estão disponíveis num mesmo sistema cartesiano e as duas questões são da mesma natureza, com as mesmas componentes esperadas. Por esta razão, embora tenhamos analisado os protocolos separadamente, vamos aqui reunir as observações que fizemos.

As ***ações esperadas*** eram: associar, com o gráfico, cada inequação a uma região do gráfico e explicar o raciocínio.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversões entre os três registros, gráfico, algébrico e da língua natural; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

Com isto em mente, a partir da análise das respostas individuais, podemos fazer um apanhado das principais características que observamos, como resultado da aplicação da atividade 2.

10 ***alunos*** e 1 ***professor*** deixaram as duas questões em branco, representando, respectivamente, 62.5% e 14.3%. Consideramos ambas porcentagens altas, porque não havia pressão de nenhuma espécie sobre nota ou sobre certo ou errado e a questão envolvia uma interpretação individual.

Entre os ***alunos***, 4 não compareceram. Com isto, só tivemos 3 protocolos para analisar.

Em dois deles, os alunos apenas fazem referência ao coeficiente angular e ao ponto de intersecção, que coincide com o ponto no qual as retas cortam o eixo vertical. Um deles escreve

> "Certeza: as retas tem coef. angular e passam pelo ponto G(0,1)"

e o outro

> "Relação as retas tem um ponto comum no ponto (0,1) e possuem o mesmo coeficiente angular".

Parece que, para estes dois alunos, ficou bastante marcado que, quando falamos de retas, o importante é reconhecer o coeficiente angular e o linear.

O terceiro aluno resolve primeiro algebricamente e daí faz as conexões com o gráfico, explicando que

> "Estamos delimitando uma região no gráfico válida apenas para os pontos onde x>0. Ou seja apenas os pontos à direita do ponto de intersecção"

(analogamente para x<0). Isto parece significar que este aluno, embora tenha olhado o gráfico, não soube fazer as conversões de modo a entender que a resposta da inequação são valores de abscissas e não pontos ou regiões. Além disso, parece confundir o gráfico da função com o plano cartesiano, quando afirma que "Estamos delimitando uma região no gráfico..." (sublinhado nosso).

Entre os professores, destacamos que todos parecem ter olhado o gráfico, mas não relacionaram a inequação com os gráficos. Um deles escreve

> "Entre os gráficos, para todos os pontos da reta y=3x+1 p/ x>0, y>1 e para a reta y=-2x+1 p/ x>0, y<1"

(sublinhados nossos), parecendo indicar a região entre os gráficos e ainda comparando y>1 com y<1 para dar a solução da inequação. Outro,

> "3x+1 é maior que -2x+1 quando x>0, isto também é percebido através do gráfico das funções. Algebricamente 5x>0 e daí x>0",

mostrando que os aspectos algorítmicos algébricos se sobrepõem à nova aprendizagem.

É importante observar que nenhum dos pesquisados respondeu as perguntas feitas. Ou pela forma como foram colocadas ou porque não têm o hábito de justificar os procedimentos, nem de fazer conjecturas. Todos tentaram, de alguma forma, dar as soluções das inequações, quando isto nem era solicitado, o que mostra que o aspecto algorítmico algébrico está muito arraigado.

Por tudo isto, acreditamos que a maioria não soube fazer as conversões entre os registros gráfico, algébrico e da língua natural e nenhum dos pesquisados, nem ***alunos*** nem ***professores***, mostrou ter apreendido os aspectos formais envolvidos na abordagem funcional gráfica, não sendo possível, portanto, inter-relacionar os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos.

VI.1.3. ATIVIDADE 3

Na atividade 3, está uma parte importante do trabalho que queremos discutir. Por esta razão, nos primeiros itens da atividade, insistimos nas conversões que precisam ser feitas na resolução gráfica de inequações, pedindo que explicitem registros algébricos e na língua natural de pontos sobre o gráfico, sujeitos a uma condição, ora sobre a abscissa, ora sobre a ordenada. E ainda sobre as projeções, sobre o eixo horizontal, desses pontos.

Os itens escolhidos para análise foram os de números 16, 19 e 22 (último item da atividade). Nos dois primeiros, é pedida a relação entre abscissas e soluções de inequações, com explicação. No terceiro, a resolução gráfica de uma inequação, também com explicação. Acreditamos que, com as respostas dadas a esses itens, podemos formar uma idéia de como as três primeiras atividades atingiram os sujeitos dos dois grupos pesquisados.

Todos os ***professores*** estavam presentes e só um dos ***alunos*** não (porém, este respondeu a atividade 3 (cont.)). Os ***alunos*** trabalharam individualmente. Os ***professores*** formaram duas duplas e três ficaram sozinhos, porém todos responderam em protocolos separados.

Questão 16: Qual a relação entre a resposta dada no item 15 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 2$ **? Explique**.

Questão 19: Qual a relação entre a resposta dada no item 18 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 0$ **? Explique**.

Embora as inequações sejam diferentes, uma comparando com o valor 2 e a outra com o zero, o encaminhamento destas duas questões foi o mesmo, com as mesmas componentes esperadas: localizar e descrever algebricamente os pontos sobre o gráfico que têm ordenada menor do que 2 (ou menor do que 0); localizar e descrever as abscissas destes pontos; responder qual a relação entre as respostas. Analisamos todos os protocolos, mas reunimos aqui as observações que fizemos.

A ***ação esperada*** era: conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversões entre os três registros, gráfico, algébrico e da língua natural; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

Com isto em mente, podemos resumir o que pudemos observar com as questões 16 e 19.

7 ***alunos*** deixaram em branco a questão 16; e 10, a 19, representando 43.8% e 62.5%, respectivamente. 2 ***professores*** deixaram em branco a questão 19, perfazendo 28.6%. Consideramos porcentagens altas, considerando as características tanto de cada grupo como das condições de aplicação da atividade, sem pressão de avaliação para nota ou de certo ou errado. Por esta razão, no caso dos alunos, para a aula seguinte, desdobramos esta atividade a partir da questão 9 e acrescentamos a resolução algébrica de algumas equações e inequações, com o intuito de chamar a atenção para as intersecções dos gráficos e para a comparação das soluções, gerando a atividade 3 (cont.).

5 ***alunos*** (31.3%) deixam entrever que entenderam a relação entre a inequação e o gráfico, porém sem ter apreendido todas as conversões. Um deles responde

> "A imagem y p/a inequação dada deve ser <2. Significa dizer que x>3/2 ou x<1"

(sublinhados nossos), dando a entender que fez a ligação entre a imagem da função e o primeiro membro da inequação e que olha no gráfico para dar a solução da inequação, porém não explica melhor os aspectos formais envolvidos nas conversões que realizou. Outro, escreve

> "ESTÃO FALANDO DOS MESMOS PONTOS",

sem mais explicações, aparentemente confundindo pontos com coordenadas.

2 ***professores*** (28.6%) dão a entender que fizeram as relações entre a inequação e o gráfico, mas também sem ter feito as conexões necessárias com as conversões (aspectos formais). Um deles escreve

> "<u>y=(1/(x-1))<0?</u> Qualquer valor de x real menor do que 1 terá como resposta um y<0; ou seja qualquer ponto localizado no gráfico terá coordenadas P(x<1; y<0) ou P(x<1; (1/(x-1))<0"

(sublinhado nosso). O texto evidencia que este professor fez primeiro a conversão para a língua natural, antes de procurar a solução gráfica, mas que não domina os aspectos algorítmicos, porque dá a entender que

> "se x<1, então y<0" e não que "x<1 é equivalente a y<0". O outro, responde
>
> "Quando localizamos no gráfico os pontos que têm ordenada menor que zero, estamos também resolvendo a inequação (1/(x-1))<0. Os pontos encontrados satisfazem a inequação",

sem explicar o porquê. Além disso, confunde pontos com coordenadas, porque afirma que os pontos resolvem a inequação.

3 ***professores*** (42.9%) respondem a questão 16 dando a solução da inequação:

> "y pertence a IR/y<2 x<1 ou x>3/2";
>
> "Para todo x>1,5, 2<y<+∞";
>
> "Para y<2, basta excluir o trecho x pertence a]1,3/2[, pois neste intervalo y>2 e qdo x=1,5 y=2",

aparentemente olhando no gráfico, mas sem explicar a relação entre as duas respostas.

E 1 ***professor*** (14.3%) resolve algebricamente e escreve

> "1<2x-2   1+2<2x   3<2x   x>3/2   x>1,5 serão considerados apenas os valores de x maiores que 1,5, com isso a imagem será apenas positiva no intervalo]0,2[",

deixando de considerar o caso em que o denominador é negativo, tanto no registro algébrico (princípio multiplicativo das desigualdades) como no gráfico (ramo da hipérbole que fica abaixo do eixo horizontal e onde a imagem y é negativa, portanto y<2). Este ***professor*** parece ter muito arraigado o tratamento algébrico, porém sem dominar nem os aspectos algorítmicos nem os formais, fazendo com que os aspectos intuitivos, que neste caso parecem coercivos, atrapalhem o entendimento da nova aprendizagem.

Nestas questões, <u>nenhum</u> dos pesquisados, ***professores*** ou ***alunos***, justificou seus argumentos ou fez conjecturas.

Questão 22: Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a inequação $y = \dfrac{1}{x-1} < 1$**. Explique seu raciocínio.**

A ***ação esperada*** era: resolver graficamente uma inequação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural; conversão do registro algébrico para o gráfico; conversão do registro gráfico para o da língua natural; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

Analisando as respostas obtidas na questão 22, podemos tirar algumas conclusões sobre o andamento da aprendizagem dos dois grupos, principalmente no que se refere à resolução gráfica de uma inequação.

10 ***alunos*** (62.5%) e 2 ***professores*** (28.6%) deixaram esta questão em branco. Como já reiteramos, achamos estas porcentagens muito altas, tendo em vista as condições de aplicação da atividade, sem a pressão de avaliação para nota ou de certo/errado.

1 ***aluno*** olhou efetivamente o gráfico, mas deu a resposta incompleta:

> "{x pertence a IR | 0<x<1} Qualquer valor de x no intervalo entre 0 e 1, se/x diferente de 1 faz com que a inequação fique <1".

A resposta do aluno está correta se a lermos como "se 0<x<1, então y<1", que é verdade; porém, não é a solução da inequação. Talvez o aluno tenha confundido os valores de x com os de y (conversão errada), porque para 0<x<1, na verdade y<0. Os outros 4 ***alunos*** que responderam esta questão, apresentaram a resolução algébrica, sem utilizar o gráfico: todos eles multiplicaram a inequação por x-1 sem analisar o sinal, mostrando não dominar nem os aspectos algorítmicos nem os formais do tratamento algébrico. Aparentemente nenhum deles olhou o gráfico para obter de outro modo a solução e comparar as respostas, evidenciando o quanto pode ser marcante o início da aprendizagem.

Todos os 5 ***professores*** (71.4%) que responderam esta questão, utilizaram o gráfico para responder (conforme era solicitado), mas apenas dois deles acertaram completamente a resposta. Um escreveu

> "y=(1/(x-1))<1 x diferente dos valores IR entre 1 e 2 inclusive o 1 e o 2. Quais os valores de x para que y<1 marquei o gráfico e percebi que para que y seja <1 só não serve os valores no intervalo]1,2[",

mostrando que fez a conversão para a língua natural para responder; mas não explicou o raciocínio. O outro,

> "{x pertence a IR/x pertence]-∞,1[U]2,+∞[}. Os valores de x que satisfazem a inequação pertencem ao intervalo]-∞, 1[U]2,+∞[. Algebricamente só obteríamos que x pertence ao]2,+∞[? E quanto ao x pertencer ao intervalo]-∞,1[?"

(sublinhado nosso), faz o gráfico no protocolo, onde marca os pontos sobre a hipérbole. Ao lado, mostra a resolução algébrica, multiplicando a inequação por x-1 sem analisar o sinal e só obtém como resposta que x>2, daí o questionamento da parte que sublinhamos. Não dominou os aspectos formais para compreender porque o tratamento algébrico não está correto, o que significa que não domina os aspectos formais nem algorítmicos do tratamento algébrico. Dos 3 ***professores*** que não deram a resposta completa, um responde

> "y<1. Para todo x<1, os valores da inequação y=(1/(x-1))<1, sempre serão menores que um, conforme mostra o gráfico",

o que é verdade, porém não é a resposta da inequação, pois falta x>2. Outro coloca que

> "Para todo $x \in IR$ com x>2, 1<y<0. Substituindo x por 2 e usando a equação 1/(x-1)=1 temos: (1/(x-1)).(x-1)=1.(x-1) então 1=x-1 e daí x=2"

(sublinhado nosso). Vemos nesta resposta três coisas a destacar: o professor só viu, no gráfico, x>2 como solução e esta seria, muito provavelmente, a obtida na resolução algébrica (se não considerarmos o sinal do denominador) (aspecto intuitivo); a frase que sublinhamos é do tipo "se ... então", o que mostra que talvez o professor não tenha muito claro que a resposta deveria ser uma equivalência (falta dos aspectos formais); ao substituir x por 2, o professor resolve a equação associada, mas aparentemente não sabe o que fazer com isto (não domina os aspectos formais nem os algorítmicos do tratamento algébrico) e não conclui a resolução.

Nem os ***alunos*** nem os ***professores*** explicaram o raciocínio feito, conforme era solicitado na questão, deixando entrever que não dominam os aspectos formais nem os algorítmicos das conversões feitas.

Olhando os resultados obtidos com as três questões analisadas nesta atividade, podemos dizer que, apesar de aceitarem que é possível uma resolução gráfica, a maioria dos ***alunos*** (4 em 5 ou 80%) optou pela resolução algébrica, mesmo quando solicitada a gráfica. Todos os ***professores*** olharam o gráfico, mas 5 deles (5 em 7 ou 71.4%) não deram a resposta correta. Apenas um dos que acertou evidenciou, no texto do protocolo, preocupação com a aparente incongruência das respostas que obteve, algébrica e graficamente.

Nenhum dos pesquisados, ***alunos*** ou ***professores***, conseguiu fazer as conversões, de forma a perceber que as duas abordagens, a algébrica e a funcional gráfica são equivalentes e devem dar a mesma resposta; portanto, podemos dizer que nenhum deles apreendeu os aspectos formais.

Muitos ***alunos*** não conseguiram chegar às questões 16, 19 e 22. Por esta razão, para a aula seguinte, reescrevemos a atividade a partir da questão 9 e acrescentamos a resolução algébrica de algumas equações e inequações, com o intuito de chamar a atenção para as intersecções dos gráficos e para a comparação das soluções.

VI.1.4. ATIVIDADE 3 (CONT.)

Só os ***alunos*** resolveram esta atividade e ela, na verdade, substituiu a 3, porque a maioria deles não havia completado as 10 primeiras questões das 22 propostas.

Escolhemos, para analisar, os itens 8, 11, 18, 19 e 20. O 8 corresponde ao 16 da atividade 3; o 11, ao 19; o 18, ao 22. Com estes três itens, estamos retomando os que foram analisados na atividade 3. Os itens 19 e 20 foram introduzidos, sendo que no 19 pede-se a resolução algébrica da inequação do item 18 e no 20, a comparação das respostas obtidas por ambas as resoluções, gráfica e algébrica.

14 ***alunos*** estavam presentes (87.5%) e dois ausentes (que estiveram presentes na atividade 3, mas deixaram em branco os itens analisados). Os alunos trabalharam individualmente e todos entregaram os protocolos.

Questão 8: Qual a relação entre a resposta dada no item 7 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 2$ **? Explique.**

Questão 11: Qual a relação entre a resposta dada no item 10 e a resposta da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 0$ **? Explique.**

Os itens 7 e 10 pediam a localização das abscissas dos pontos do gráfico que têm ordenada menor do que 2 e menor do que 0, respectivamente.

Analisamos todos os protocolos, mas reunimos aqui as observações que fizemos, pois ambas as questões tiveram o mesmo encaminhamento e as mesmas ações e componentes esperadas.

A ***ação esperada*** era: conjecturar sobre a ligação entre a inequação e os pontos destacados sobre o gráfico.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversões entre os três registros, gráfico, algébrico e da língua natural; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

2 ***alunos*** (12.5%) deixaram em branco a questão 8 e 3 (18.8%), a 11, porém só um deles em comum, o qual, na verdade, deixou quase todas as respostas em branco.

5 ***alunos*** (31.3%) afirmaram a equivalência das respostas tanto na questão 8 como na 11, ou seja, perceberam que

> "Graficamente e algebricamente as respostas são iguais. {x pertence a IR | x<1 ou x>3/2} é o conj. solução da inequação"

ou

> "As duas respostas representam o mesmo intervalo (]- infinito, 1[)"

ou

> "Toda, pois para que a inequação seja verdadeira x só poderá assumir os valores do item 7. (x<1 e x>1,5)"

ou ainda

> "Para que a inequação seja verídica o x da inequação terá que ter a "resposta" do item 10";

porém nenhum deles explicita que a equivalência das respostas deve-se ao fato de que foi feita a resolução gráfica da inequação, nem apresenta a resolução algébrica. Com isto, podemos afirmar que ainda não dominam os aspectos formais e os algorítmicos da resolução funcional gráfica.

3 ***alunos*** apresentaram uma resolução algébrica na questão 8, multiplicando a inequação por x-1 sem analisar o sinal deste fator e só obtiveram parte da solução. Só um destes alunos faz o mesmo na questão 11 e deixa no protocolo

> "y=(1/(x-1))<0 1<0(x-1) 1<0x-0",

mostrando que não domina os aspectos algorítmicos nem os formais da resolução algébrica; os outros dois deixaram em branco. Valeria a pena investigar com mais cuidado se o fato do segundo membro ser 0 pode trazer mais dificuldades para a aprendizagem.

1 ***aluno*** responde

> "Que sempre que o resultado da inequação for menor que 2 ela terá a imagem menor que zero"

na questão 8 e

> "Para a inequação menor que 0 o valor de x tem que ser menor e diferente de 1"

na 11, mas como não explica o que fez, não temos como comparar porque parece saber resolver a inequação 11, mas se atrapalha com as coordenadas na 8.

2 ***alunos*** parecem ter feito a relação entre as respostas comparadas. Um deles escreve

> "Para cada x que entrar a saída será y=(1/(x-1))<2",

referindo-se aos valores de x obtidos no item anterior, onde x<1 ou x>3/2, na questão 8 e o outro

> "No item 10 está pedindo para descrever as valores de x quando y<0 que é a resposta da inequação ou seja no item 10 está na linguagem natural e a resposta da inequação está na forma algébrica",

na questão 11; mas nenhum deles explica como chegou a estas respostas.

Nenhum dos ***alunos*** responde completamente a questão, porque não explicam a resposta dada, embora 50% deles deixe transparecer que aceita como possível a resolução funcional gráfica de inequações e que entendeu as conversões envolvidas.

Observamos ainda que, até aqui, não dominam os aspectos formais nem os algorítmicos deste tipo de resolução.

Questão 18: Usando as informações dadas pelo gráfico, resolva a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 1$. Explique seu raciocínio.

A ***ação esperada*** era: resolver graficamente uma inequação, dado o gráfico. Explicar o raciocínio.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico/algébrico para o da língua natural; conversão do registro algébrico para o gráfico; conversão do registro gráfico para o da língua natural; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

Analisando as respostas obtidas na questão 18, podemos tirar algumas conclusões sobre o andamento da aprendizagem dos ***alunos***, principalmente no que se refere à resolução gráfica de uma inequação.

3 ***alunos*** deixaram esta questão em branco, sendo que dois deles também o fizeram nas questões seguintes da atividade. São alunos que mostraram ter muitas deficiências na Matemática básica, que não iríamos conseguir dirimir só com a discussão desta seqüência de ensino.

5 ***alunos*** olharam no gráfico para dar a resposta diretamente. Um deles pôs simplesmente “x>2 x<1”. Os outros escreveram na língua natural a questão, como por exemplo

> “Sabendo-se que pede valores para x (abscissa), onde y<1 (ordenada), analisando o gráfico vejo que x>2 ou x<1”

ou

> “A ordenada tem valores menores que 1 quando x for maior que 2 ou quando x for menor que 1. (Posso representar assim? $x \notin]1,2]$)”.

Estes alunos parecem ter entendido as conversões, embora não expliquem, como era pedido, o raciocínio feito. Um deles responde

> “Quando y for <1 x será >2 (salvo o caso de y ser menor que 0)”.

Este aluno parece não dominar aspectos formais ligados à frase y<2, pois mostra hesitação em aceitar que “se y<0, então y<2”.

2 ***alunos*** descrevem os procedimentos algébricos para resolver a inequação, como por exemplo

> “Os valores de x quando y<1. 1o. tirar o mmc do 1o. e 2o. membro 2o. reduzir a termos semelhantes”,

mostrando que não dominam os aspectos formais nem os algorítmicos da resolução algébrica, embora tenham isto muito arraigado (aspectos intuitivos).

Os outros 3 ***alunos*** presentes deram respostas que mostram que têm muitas deficiências na Matemática básica e não estavam conseguindo fazer as conversões necessárias, como por exemplo "y=(1/(3-1))<1 (atribui valores p/x) y=1/2<1 daí y=(1/2)-(1/1)<0 y=(1-2)/2<0 y=(-1)/2<0".

Este aluno parece acreditar que é possível resolver a inequação pela atribuição de valores numéricos; além disso, não domina aspectos formais nem algorítmicos do tratamento numérico.

Nenhum dos alunos explicou o raciocínio, como era pedido na questão, nem mesmo os 5 alunos (31.3%) que, aparentemente, souberam fazer as conversões e dar a resposta só olhando no gráfico. Por causa disto, dizemos que ainda não dominam os aspectos formais do assunto.

Questão 19: Resolva algebricamente a inequação $y = \frac{1}{x-1} < 1$.

Na questão 18, anterior a esta, é pedida a resolução gráfica da mesma inequação, com explicação do raciocínio. Esperávamos que os alunos fizessem as conexões entre as duas resoluções.

A ***ação esperada*** era: resolver algebricamente a inequação dada na questão 18.

A ***componente geral esperada*** era: o tratamento algébrico.

2 ***alunos*** deixaram em branco, como já o haviam feito na questão 18. São alunos que mostram muitas deficiências na Matemática básica.

8 ***alunos*** resolveram multiplicando a inequação por x-1 sem analisar o sinal deste fator. 6 deles encontraram como resposta x>2; 1 errou na resolução de –x<-1-1 e chegou a x<2; e 1 chegou a x>2, mas ao dar a resposta colocou

"... x<1 e x>2".

Talvez este aluno tenha comparado com a solução gráfica, mas como não domina os aspectos formais, não soube como consertar a resolução algébrica. Os demais não compararam com a resposta anterior, nem mesmo os 2 que olharam corretamente no gráfico.

1 ***aluno*** resolveu a inequação por avaliação dos valores:

"Para que 1/(x-1) seja <1, basta x-1>1 x>2 ou x-1<0 x<1 {x pertence a IR | x<1 ou x>2}",

mostrando ter algum domínio numérico.

1 ***aluno*** tentou separar em casos, conforme o sinal do fator x-1, mas mostrou não dominar os aspectos algorítmicos a ponto de saber aplicar o princípio multiplicativo das desigualdades:

> “(1/(x-1))<1 daí (x-1>0 x>1) 1<1.(x-1) daí 1/1<(x-1) daí 1/1+1<x daí (1+1)/1 daí 2<x, ou seja : x>2 x>1 com x-1 diferente de 0 daí x diferente de 1”.

Este aluno comentou conosco que só se preocupou com o sinal do fator por causa da resolução gráfica que estávamos promovendo.

2 ***alunos*** não terminaram a resolução. Um deles escreveu

> “y=((1/(x-1))-1)<0 y=1-1<x-1”,

mostrando dificuldades básicas, tanto na notação (y tem dois estatutos diferentes) como no tratamento algébrico de adição de frações. O outro,

> “(1/(x-1))<1 ((1/(x-1))-1)<0”.

Ambos tiveram a preocupação de passar todas as parcelas para o primeiro membro, para compará-lo com o zero no segundo membro, o que mostra que aspectos intuitivos, ligados a uma aprendizagem anterior, podem mesmo ser coercivos (FISCHBEIN, 1993).

Apesar de terem feito a resolução gráfica na questão anterior, só um deles deixou transparecer a preocupação de comparar as respostas obtidas, sem que isto tenha sido pedido, o que ocorre na questão 20, que é a seguinte, mas estes alunos não tomaram a iniciativa de fazê-lo antecipadamente.

Perguntamo-nos, então, porquê, em muitos casos, os alunos respondem o estritamente solicitado, sem refletir sobre o todo, como poderia ser o caso aqui, uma vez que estavam diante de uma aprendizagem nova, que poderia ser comparada à anterior e ainda num ambiente onde podiam errar.

Pareceu-nos que esta atitude tinha a ver com as relações estabelecidas entre os professores, os alunos e o saber matemático, desde a Educação Básica, uma vez que os professores de nosso grupo de pesquisa também apresentam o mesmo comportamento. Revendo as conclusões de Mariani (2004, p. 200-208) sobre os efeitos do Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2004, p. 23-32) na atitude de um grupo de alunos ingressantes no Ensino Superior, no caso do conceito de função, fomos buscar, no glossário de Brousseau (2003)[24], definições que pudessem nos ajudar a entender as atitudes dos sujeitos de nossa pesquisa. Para este pesquisador, o contrato didático é

> "É o conjunto de obrigações recíprocas e de 'sanções' que cada parceiro da *situação didática*
>
> -impõe ou acredita impor, explícita ou implicitamente, ao outro
>
> -e aquelas que impõe a si mesmo ou que acredita impor
>
> em relação ao conhecimento em causa. O contrato didático é o resultado de uma 'negociação' com modalidades frequentemente implícitas que estabelece as relações entre um aluno ou um grupo de alunos, um meio determinado e um sistema educativo. Pode-se considerar que as obrigações do professor diante da sociedade que lhe delega sua legitimidade didática também são parte determinante do 'contrato didático'.
>
> O contrato didático não é um verdadeiro contrato porque não é explícito nem livremente consentido e porque nem as condições de ruptura, nem as sanções, podem ser dadas a priori pois sua natureza didática, aquela que importa, depende de um conhecimento ainda desconhecido pelos alunos.
>
> Além disso, é frequentemente insustentável. Coloca o professor diante de uma verdadeira injunção paradoxal: tudo que ele faz para obter dos alunos o comportamento que deseja, tende a diminuir a incerteza do aluno e a privar este último das condições necessárias à compreensão e á aprendizagem da noção em jogo: se o professor diz ou dá a entender o que quer que o aluno faça, só obtém deste a execução de uma ordem e não um exercício de conhecimentos e de julgamentos (primeiro paradoxo didático) (Cf. efeito Topaze, efeito Jourdain). Mas o aluno também está diante de uma injunção paradoxal: se aceita que, conforme o contrato, o professor lhe ensine as soluções e as respostas, ele não as estabelece por si só e, portanto, não incorpora o conhecimento (matemático) necessário e não se apropria dele; querer aprender implicará, então, em recusar o contrato didático para assumir o problema de forma autônoma. A aprendizagem não vai mais depender do bom funcionamento do contrato, mas das '*rupturas e de seus ajustes'* . Quando há ruptura (provocada pelo aluno ou pelo professor) os parceiros se comportam como se houvesse entre eles um contrato.
>
> Na verdade, o contrato é uma forma de definição de uma situação didática. É equivalente a ela, mas permite fazer um inventário de contratos, conforme a divisão de responsabilidades entre o professor e o aluno."[25] (BROUSSEAU, 2003, p. 6, tradução nossa.)

---

[24] Acessível em http://math.unipa.it/~grim/brousseau_textes.htm desde 25/02/2003. Acessado por nós em novembro de 2007.

[25] "C'est l'ensemble des obligations réciproques et des « sanctions » que chaque partenaire de la *situation didactique*
- impose ou croit imposer, explicitement ou implicitement, aux autres
- et celles qu'on lui impose ou qu'il croit qu'on lui impose,
à propos de la connaissance en cause. Le contrat didactique est le résultat d'une « négociation » souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif. On peut considérer que les obligations du professeur vis à vis de la société qui lui délègue sa légitimité didactique sont aussi une partie déterminante du "contrat didactique".
Le contrat didactique n'est pas en fait un vrai contrat car il n'est pas explicite, ni librement consenti, et parce que ni les conditions de ruptures, ni les sanctions ne peuvent être données à l'avance puisque leur nature didactique, celle qui importe, dépend d'une connaissance encore inconnue des élèves -.
De plus il est souvent intenable. Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves les comportements qu'il attend, tend à diminuer l'incertitude de l'élève et par là à priver ce dernier des conditions necessaries à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée: si le maître dit ou signifie ce qu'il veut que l'élève fasse, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son

No caso de nossos sujeitos, apesar de termos dado espaço para que se comportassem de forma autônoma, o que Brousseau chama de *ruptura* não ocorreu, mostrando quão fortes e quão arraigadas podem ser as *regras* do contrato didático estabelecido na Educação Básica pela qual passaram estes alunos e estes professores.

Questão 20: Compare as respostas dos itens 18. e 19. São iguais? Por que?

Com esta questão, esperávamos que os alunos começassem a perceber as conexões entre as duas formas de resolução, a algébrica e a funcional gráfica.

As ***ações esperadas*** eram: comparar as respostas obtidas nos itens 18 e 19. Explicar porque são ou não são iguais.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversões entre os três registros, gráfico, algébrico e da língua natural; conversão do registro gráfico/algébrico para o algébrico; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as abscissas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

4 ***alunos*** deixaram em branco e 4 ***alunos*** deram respostas com sim ou não, porém com razões não coerentes, como por exemplo

> "A Resposta das duas questões são diferentes porque na questão 18 usando o gráfico podemos atribuir qualquer valor para x e achamos sua imagem, já na questão 19 temos que encontrar um valor para x".

Esta última frase evidencia que estes 8 alunos não conseguiram fazer conexões entre a aprendizagem anterior e a nova, entre a abordagem algébrica e a funcional gráfica.

---

jugement (premier paradoxe didactique). (Cf. l'effet Topaze, l'effet Jourdain). Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale: s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les solutions et les réponses, il ne les établit pas lui-même et donc, n'engage pas les connaissances (mathématiques) nécessaires et ne peut se les approprier ; Vouloir apprendre, impliquerait alors pour lui de refuser le contrat didactique pour prendre en charge le problème de façon autonome. L'apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses *'ruptures et ses ajustements*'. Lorsqu'il y a rupture (échec de l'élève ou du professeur) les partenaires se comportent comme s'il y avait eu entre eux un contrat.
En fait le contrat est une forme de définition d'une situation didactique. Elle lui est équivalente, mais elle permet le dresser un inventaire des contrats suivant la répartition des responsabilités entre l'enseignant et l'élève." (BROUSSEAU, 2003, p. 6.)

3 ***alunos*** só responderam sim ou não, sendo que: um deles fez corretamente as duas resoluções; um só conseguiu x>2 em ambas; e o outro respondeu “x<2” olhando o gráfico e x>2 na resolução algébrica. Parece que estes alunos não apreenderam os aspectos formais de forma a permitir-lhes explicar as razões das coincidências ou não.

1 ***aluno*** apresentou a resolução algébrica, porém diferente da que tinha feito na questão 19. Retomamos as três respostas deste aluno

> “Sabendo-se que pede valores para x (abscissa), onde y<1 (ordenada), analisando o gráfico vejo que x>2 ou x<1”

na questão 18;

> “(1/(x-1))<1 daí (x-1>0 x>1) 1<1.(x-1) daí 1/1<(x-1) daí (1/1)+1<x daí (1+1)/1 daí 2<x, ou seja : x>2 x>1 com x-1 diferente de 0 daí x diferente de 1”

na questão 19;

> “(1/(x-1))<1 daí (1/(x-1)).x-1<x-1 daí 1>x-1 daí 1+1>x daí 2>x 2>x<1 x<1”

na questão 20. Percebemos que criamos alguns conflitos que, acreditamos, podem gerar a aprendizagem. O aluno sabe o princípio multiplicativo das desigualdades (aspecto formal), mas não sabe aplicá-lo, pois não domina aspectos algorítmicos da resolução algébrica e nem consegue interpretar corretamente uma frase do tipo “se ... então”. Com a comparação com o uso do gráfico, tenta consertar a resolução algébrica, mas aspectos intuitivos, arraigados numa aprendizagem anterior, dificultam.

2 ***alunos*** respondem

> “Quase, por só ter alcançado uma resposta na resolução algébrica”

e

> “Não porque o item 18 admite 2 respostas”.

Ambos multiplicaram a inequação por x-1 sem analisar o sinal do fator na resolução algébrica. Estas respostas mostram uma dificuldade subjacente, que é o fato de acharem que cada intervalo da solução é uma “resposta”. Talvez por esta razão, não tenham conseguido perceber a equivalência das duas resoluções. O procedimento “multiplicar a desigualdade pelo mesmo fator” (que é uma ação real) parece sobrepor-se ao de analisar o sinal do fator (que é uma ação “virtual”, do tipo “se...então”), dificultando o entendimento dos aspectos algorítmicos associados ao princípio multiplicativo das desigualdades. Com estes dois alunos, também acreditamos que criamos conflitos que podem conduzir à aprendizagem.

Nenhum dos ***alunos*** explicou ou justificou o raciocínio, mesmo que a questão pedisse isto, o que, no nosso entender, mostra que não dominaram os aspectos formais do assunto discutido ou, talvez, não estivessem acostumados a escrever justificativas.

Consideramos a questão 20 a mais importante desta atividade, exatamente porque pede a comparação entre as respostas obtidas gráfica e algebricamente. Por esta razão, em particular, fomos analisar as respostas dadas às questões 18 e 19 por aqueles que não responderam a questão 20, que são 4 ***alunos***: (1) 2 deles não responderam nenhuma das três e não podemos concluir nada daí, a não ser que tem dificuldades na Matemática básica; (2) 1 deles deixa uma frase incompleta na questão 18

> "Que para y< que 1 o x também tem que";

multiplica a inequação por x-1 sem estudar o sinal deste fator e chega a x>2; e não responde a questão 20, o que nos induz a pensar que não conseguiu dominar os aspectos algorítmicos envolvidos na resolução gráfica e acredita na resolução algébrica que aprendeu; (3) 1 deles tenta a resolução algébrica

> "(1/(x-1))<1 ((1/(x-1))-1)<0",

mas não a termina e não responde nem a questão 18 e nem a 20. Estes alunos parecem não ter apreendido os aspectos algorítmicos da resolução gráfica e apenas tentaram a resolução algébrica, que já era supostamente familiar.

Resumindo, podemos dizer que: 6 ***alunos*** não mostraram nenhuma diferença na apreensão do assunto discutido ou porque não estavam presentes ou porque têm deficiências básicas tão grandes (como por exemplo pensarem que depois do número 2 vem o número 3, em IR), que não conseguem superar as dificuldades inerentes; 4 ***alunos*** conseguiram apreender os aspectos algorítmicos das conversões envolvidas na resolução gráfica, mas ainda não os inter-relacionaram com os aspectos formais; e os aspectos intuitivos, relacionados ao tratamento algébrico, não os deixaram procurar uma razão formal para justificar as diferenças nas respostas; os outros 6 ***alunos***, embora presentes, não responderam todas as questões, o que nos impossibilitou uma análise mais profunda.

VI.1.5. ATIVIDADE 4

Para os ***alunos***, esta foi a última atividade da seqüência de cinco que programamos inicialmente porque, como já explicamos no início do parágrafo V.3, página 120, a atividade 3 teve que ser desdobrada e não tivemos horários extras nem tempo nas aulas normais para aplicar a quinta atividade. Do ponto de vista da aprendizagem, podemos dizer que não houve grandes perdas para os alunos, porque na quinta atividade concentramos a discussão da resolução funcional gráfica de inequações do tipo $x^2 \leq 9$, que pode ser vista como caso particular do que já havia sido feito nas 4 atividades iniciais.

Foram escolhidos, para analisar, as respostas dadas aos itens 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9 e 10, que representam praticamente todos. Os itens excluídos foram o 2, no qual só pedimos que os sujeitos observem dois gráficos e o 7, no qual solicitamos a resolução gráfica de uma equação.

5 professores estavam presentes, dos 7 do grupo.

Todos os alunos estavam presentes nesta atividade.

Questão 1: Para resolver a inequação (1/(x-1))<1, um aluno deu a seguinte resolução algébrica:

"Multiplicando a inequação por x – 1, chego à inequação 1<x-1; a partir desta, posso concluir que x > 2; portanto, a resposta à inequação inicialmente dada é x > 2".

Observe que, pela resolução do aluno, a inequação 1<x-1 deveria ser equivalente à original e a inequação x > 2 seria equivalente a 1<x-1.

Analise o texto e veja se você concorda com este aluno.

Compare sua resposta de hoje com a sua resposta dada ao final da atividade anterior. Suas respostas coincidem? Explique.

Esperávamos que os sujeitos resgatassem da memória e das institucionalizações intermediárias o que já havia sido discutido até então.

As ***ações esperadas*** eram: corrigir uma resolução de inequação, feita por um aluno fictício, que usou a técnica da “multiplicação em cruz”. Comparar a resposta do “aluno” com a própria, feita na atividade anterior.

A ***componente geral esperada*** era: tratamento do registro algébrico.

4 ***alunos*** e 1 ***professor*** deixaram esta questão em branco.

4 ***alunos*** concordam com a argumentação do aluno fictício: 2 deles apresentam resolução algébrica idêntica, portanto as respostas também coincidem; dos outros 2, um deles escreve algo incoerente e o outro

> “INEQUAÇÕES: a<b, c>0 daí a.c<b.c a<b, c<0 daí a.c>b.c <u>CONCORDO</u>, SE ESTIVER CLARO P/ O ALUNO ESSAS DEFINIÇÕES AO LADO, ONDE ELE TEM DUAS POSSIBILIDADES. <u>NÃO</u>. TALVEZ PORQUE EU NÃO LEMBRAVA O CONCEITO DE INEQUAÇÃO ATÉ A AULA PASSADA APESAR DE AINDA NÃO ESTAR CLARIVICENTE”[26]

(sublinhados nossos), não deixando claro porque concorda e afirmando que as respostas não coincidem, mas apresentou a mesma resolução algébrica, embora na gráfica tenha visto que x>2 ou x<1.

6 ***alunos*** não concordam com a argumentação do aluno fictício: 4 deles citam a propriedade multiplicativa das desigualdades (aspecto formal), de formas variadas, como por exemplo

> “Não concordo, uma vez estou multiplicando uma inequação por um número desconhecido, devo "lembrar" de algumas condições de multiplicação. A resposta apresentada apenas sera valida para a multiplicação de um número positivo e se este no. for negativo, vejamos o que acontece: x-1(1/(x-1))>1(x-1) 1>x-1. Porém este no. é negativo e o sinal da inequação inverte 1<x-1 daí 1+1<x daí 2<x daí x>2”,

> “(1/(x-1))<1 ⇒1<x-1 daí 2>x SE x≠1. Não concordo. Não pode multiplicar a inequação por x-1, porque não é uma igualdade, não podendo ser usada a propriedade de equivalência”,

mas nenhum deles consegue explicitar como é preciso fazer para aplicar o princípio (aspecto algorítmico); 1 deles escreve

> “Não, porque o aluno deveria igualar a zero a inequação e depois multiplicar os dois membros por (x-1). Porque essa inequação tem dois valores que satisfaz x”,

mostrando que os aspectos intuitivos, ligados à aprendizagem inicial, podem ser coercivos e impedir a nova aprendizagem; 1 escreve

> “não concordo. Sim”,

mas apresentou resolução similar na atividade 3 (cont.).

---

[26] O texto está em maiúscula, respeitando o original (observação nossa).

2 ***alunos*** não respondem nem que concordam nem que não e apresentam resoluções algébricas:

> “(1/(x-1))<1 1<1(x-1) 1<x-1 -x<-1-1 -x<-2 daí x>2; 1<x-1 -x<-1-1 -x<-2 x<2”,
>
> “Para mim resolvendo a inequação 1<x-1 teriamos resultado x>-2 porque 1<x-1 ⇒ x>-2”,

ambos mostrando deficiências na Matemática básica.

Nenhum dos ***professores*** presentes (5 em 7, perfazendo 71.4%) responde diretamente as perguntas feitas. 1 deixa em branco e as 4 respostas são:

> **(1)** “Para mim, as duas inequações sempre representavam uma reta. Quando percebi que f(x)=1/(x-1) não era uma reta (não faz muito tempo) eu não pensava em uma situação, por exemplo a dada 1<x-1 para que pudesse ser feita a comparação entre os gráficos”;
>
> **(2)** “Sim. Para a inequação: todo x>2 satisfaz à condição do quociente de 1 dividido por x-1. Mas se fosse uma função, parte do gráfico da função não está sendo trabalhado”;
>
> **(3)** “Para resolver esta inequação, deve-se analisar todos os valores de x que satisfazem à condição (1/(x-1))<1, com x diferente de 1 e multiplicar por (x-1) é um recurso algébrico, usado em equações que leva a uma conclusão incompleta da situação proposta, logo deve-se analisar 1<x-1, quando x>0 ou quando x<0 e não dar o mesmo tratamento que é dado às equações, pois neste caso temos uma desigualdade. na atividade 3, nota-se certa preocupação em torno deste fato, mas não houve habilidade, nem firmeza para justificar este acontecimento”;
>
> **(4)** “Na atividade 22, após ter observado o gráfico chega-se à conclusão que x pertence ao intervalo]- infinito, 1[U]2, + infinito[; resolvendo algebricamente só chegaríamos à conclusão que x>2”.

Na resposta (1), podemos observar que o ***professor*** acha que as inequações do aluno fictício não são equivalentes, porque imagina os gráficos e sabe que ambos não são retas. Esta dificuldade do professor vem de encontro ao que diz Sackur (2004), quando alega que um dos problemas da abordagem funcional gráfica pode estar associado ao fato de vários gráficos darem a mesma solução.

Na resposta (2), o ***professor*** parece confundir a representação com o objeto, pois não consegue enxergar os membros da inequação como funções, cujos valores da imagem estão sendo comparados (DUVAL, 1995, 2000).

Na resposta (3), o ***professor*** demonstra preocupação em distinguir equações de inequações, no que diz respeito ao tratamento algébrico “multiplicar os dois membros pela mesma quantia”, mas não consegue explicitar o princípio multiplicativo das desigualdades (aspecto formal), nem como ele funciona (aspecto algorítmico). Confunde uma representação com o objeto representado quando escreve “[...] deve-se analisar 1<x-1, quando x>0 ou quando x<0 [...]” (DUVAL, 1995, 2000), porque o que deve ser analisado é o denominador e não a incógnita simplesmente.

Na resposta (4), a atividade 22 significa o item 22 da atividade 3, no qual é pedida a resolução gráfica da inequação $y = \frac{1}{x-1} < 1$. O ***professor*** conseguiu fazer as conversões necessárias para resolver graficamente a inequação, mas não domina os aspectos formais da abordagem funcional gráfica nem os algorítmicos da abordagem algébrica para compreender que ambas as resoluções teriam que dar a mesma resposta.

Nem os ***alunos*** nem os ***professores*** dominam os aspectos formais do tratamento algébrico. Nenhum deles soube explicar quais os passos necessários para resolver uma inequação como a apresentada, pelo tratamento no registro algébrico, mesmo os que perceberam que a resolução dada não está completa.

Também nenhum deles procurou explicar ou justificar matematicamente o raciocínio.

Questão 3: As expressões (1/(x-1))<1 e 1<x-1 são equivalentes? Por que?

Observamos que esta pergunta é feita depois de serem dados os gráficos das funções definidas por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ e $g(x) = x - 1$, em sistemas cartesianos distintos, esperando que os sujeitos fizessem as conexões entre os gráficos e as inequações. Esta é uma tentativa de trazer à tona uma das dificuldades que Sackur (2004) afirma existir na abordagem funcional gráfica, que é a de vários gráficos darem a mesma solução.

Nesta direção, seria interessante desenvolver uma seqüência de atividades, sobre o assunto função e utilizando os tratamentos e as conversões dos registros algébrico, gráfico e da língua natural, para promover os sujeitos nos níveis de interiorização, condensação e reificação, níveis estes necessários para que uma concepção matemática passe de processo para objeto, conforme defende Sfard (1991, 1992, apud KIERAN, 1993, p.194). Com a seqüência sobre função que desenvolvemos com este grupo de professores (ver parágrafo IV.1.4, página 74), estes não chegaram ao nível de reificação, como desejávamos (SOUZA; CAMPOS, 2007).

As ***ações esperadas*** eram: observar, pelos gráficos, a não equivalência das duas inequações; justificar o raciocínio.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: tratamento do registro algébrico; conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

1 ***aluno*** e nenhum ***professor*** deixaram esta questão em branco.

4 ***alunos*** responderam que são equivalentes: 2 usaram justificativas não coerentes, como por exemplo

> "sim. O resultado da equação e inequação foram o mesmo",

resposta esta dada depois que o aluno resolveu algebricamente, ao lado do gráfico, as duas inequações, obtendo x>2 como resposta; 1 escreveu

> "Sim. Porque a 2a. expressão é a etapa seguinte a 1a. expressão. A forma de escrever ver parece diferente, mas as duas tem o mesmo y<1 e com certeza vão ter o mesmo x",

onde utiliza, na verdade, a resolução algébrica e não os gráficos e ainda parece confundir a representação "y" com o objeto "segunda coordenada", porque na verdade o "y" não é o mesmo; e 1 escreveu

> "SIM, MAS NÃO TOTALMENTE. NA EQUAÇÃO 01 EXISTEM DUAS SOLUÇÕES, NA EQUAÇÃO 02 EXISTE UMA ÚNICA SOLUÇÃO; GRAFICAMENTE FALANDO EM AMBOS CASOS",

de onde podemos concluir que o ***aluno*** interpreta cada intervalo do conjunto de soluções como uma solução, o que pode ter sido reforçado pelo fato de um dos gráficos ter dois ramos.

11 ***alunos*** (68.8%) responderam que não são equivalentes: 2 deles olharam o gráfico e usaram a justificativa correta, de que os conjuntos-solução são diferentes e daí podemos dizer que conseguiram fazer as conversões, independentemente da forma do gráfico; 1 usou a diferença nas soluções

> "Não por que para a 2a., x só pode assumir valores positivos",

o que não está completamente errado, mas não garante a aprendizagem; 3 basearam a justificativa no fato de x não poder ser 1 em uma das inequações, como por exemplo

> "não a primeira expressão tem o x como uma divisão logo tem que ser diferente de 1, a segunda o x pode ser qualquer valor IR",

o que evidencia aspectos intuitivos ligados ao objeto função, do tipo toda vez que você tem uma função, é preciso verificar qual é o domínio; 2 justificaram com base na forma das inequações

> "Não, por que não é uma igualdade"

e

> "Não são por que $(1/(x-1))<1$ não é a mesma coisa que $1<x-1$",

o que mostra que não dominam conhecimentos básicos de Matemática; 3 colocam respostas que não nos permitem perceber se conseguiram fazer as conversões ou não

> "Elas não são equivalentes, pois perdem a solução original"
>
> "Não, pois como vimos graficamente",
>
> "Não, são equivalentes, porque essa inequação tem dois valores para x".

Todos os 5 ***professores*** presentes responderam que não são equivalentes: 2 olharam o gráfico para afirmar, corretamente, que os conjuntos-solução são diferentes e daí podemos dizer que conseguiram fazer as conversões, independentemente da forma do gráfico; 2 fizeram a justificativa com base na forma dos gráficos, como por exemplo

> "Não são equivalentes. Os gráficos são diferentes",
>
> "As expressões não são equivalentes, os gráficos que as representam não são iguais. $y=(1/(x-1))$, $x \neq 1$ temos uma restrição. $y=x-1$, $x \in IR$"

e podemos notar que este último também expressa preocupação com o domínio; e 1 baseia-se na forma das expressões

> "($x\neq1$) Não. Porque na 1a expressão precisam-se encontrar os números que possam se comportar como denominador de uma fração e que satisfaçam à condição dessa inequação, os quocientes de 1 por números subtraídos de 1 sejam menores que 1. E na 2a expressão precisam-se encontrar números que subtraídos de 1 sejam menores que 1",

o que mostra que não utilizou os gráficos e baseou-se nos aspectos algorítmicos e principalmente nos intuitivos da aprendizagem anterior, estritamente algébrica.

A primeira coisa a destacar é que 4 ***professores*** e 4 ***alunos*** dão a entender que olharam efetivamente os gráficos para dar a resposta e podemos dizer que, percentualmente, os grupos mostraram comportamento diferente: os ***professores*** aceitaram mais rápido a utilização do registro gráfico do que os ***alunos***. No geral, classificamos estas porcentagens como baixas, porque gostaríamos que todos o tivessem feito.

Com relação à equivalência ou não das inequações, temos que os 5 ***professores*** presentes (71.4%) e 11 ***alunos*** do grupo de 16 presentes (68.8%) responderam que não (resposta esperada) e temos que comparar as justificativas. Apenas 2 ***professores*** e 2 ***alunos*** deram uma resposta que pudemos considerar como correta. 2 ***alunos*** e 1 ***professor*** baseiam-se na forma das inequações. 3 ***alunos*** e 1 ***professor*** alegam diferenças no domínio das funções envolvidas.

Estes resultados mostram que a maioria dos sujeitos não domina os aspectos formais envolvidos na abordagem funcional gráfica de inequações e nem consegue fazer as conversões necessárias. Ainda mais, que os aspectos intuitivos trazidos da abordagem anterior estão muito arraigados, talvez dificultando a nova aprendizagem.

Questão 4: Qual foi a técnica algébrica utilizada pelo aluno que acarretou o erro? Por que?

Esperávamos que os sujeitos percebessem que havia sim um erro no raciocínio do aluno fictício, causado pela **multiplicação da desigualdade por um fator que pode ser positivo ou negativo**, porque um dos aspectos formais da resolução algébrica é o **princípio multiplicativo das desigualdades**. Para aplicá-lo corretamente no **algoritmo** da resolução, é preciso dividir o procedimento em duas partes do tipo “se...então”, considerando quando o sinal do fator é positivo e quando o sinal do fator é negativo.

As ***ações esperadas*** eram: conjecturar sobre a causa do erro na multiplicação da inequação; justificar o raciocínio.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: tratamento do registro algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; conjectura a partir da observação; e justificativa escrita de um fato observado.

2 ***alunos*** e nenhum ***professor*** deixaram esta questão em branco.

12 ***alunos*** (75.0%) apontam a multiplicação da inequação como a causa do erro: 5 referem-se a ela como a “multiplicação em cruz”, referendando pesquisas já realizadas (TSAMIR; ALMOG; TIROSH, 1998; TSAMIR; BAZZINI, 2002; BAZZINI;

TSAMIR, 2003) e os resultados de nosso teste diagnóstico (ver parágrafo , o que significa que estes alunos não conseguiram abandonar as concepções anteriores diante da nova aprendizagem. Dentre estas respostas, vale a pena destacar uma,

> "Primeiro que o aluno multiplicou a inequação em cruz e não obedeceu a condição de existência para x",

que mostra que o aluno sabe que existe uma regra que deve ser aplicada, mas não sabe como, pois confunde a representação "x" com o objeto denominador; 2 afirmam que o erro ocorreu porque se trata de uma inequação e não de uma equação e que seria preciso considerar o sinal do fator (aspecto formal), mas não explicam o que isto significa (aspecto algorítmico), como em

> "A tecnica utilizada para a resolução de uma igualdade. Esta tecnica não é valida para uma inequação. seu erro deu-se pela não consideração da razão em que se a<b, c<0 então ac>bc desta maneira ao fazermos o cálculo deve-se pensar nesta condição";

2 afirmam simplesmente que o erro ocorreu porque não se trata de uma equação, por exemplo

> "O aluno resolveu a inequação como se fosse uma equação, não obedecendo algumas regras que diferencia a equação de inequação",

sem explicar mais nada; 1 alega que

"A MULTIPLICAÇÃO QUEBROU A "ESSÊNCIA" DO "y=(1/(x-1))" pois x-1≠(1/(x-1)) assim como 1=1"[27],

mostrando que confunde a representação "y" com o objeto "segunda coordenada" e que não conseguiu ainda apreender a conversão entre os registros algébrico e gráfico; 1 afirma simplesmente que

"Multiplicou a expressão por x-1 p/ simplificar",

sem mais detalhes de explicação e não podemos concluir nada; e 1 escreve

"A multiplicação, sem perceber que o valor poderia ser tanto positivo quanto negativo",

também sem explicar como fazer isto e porque seria preciso considerar os sinais.

1 ***aluno*** afirma que não conseguiu visualizar o erro, mostrando que não fez as conexões entre a resolução funcional gráfica e a algébrica e continua pensando só na algébrica.

---

[27] O texto em maiúsculas foi feito respeitando o original (observação nossa).

1 ***aluno*** apresenta resposta não coerente:

"Em (1/(x-1))<1 ao multiplicar a inequação por x-1 o aluno inverteu o sinal que antes era < e depois passou para >",

aparentemente mostrando dificuldade na leitura de 1<x-1, porque a incógnita está à direita. Esta resposta nos faz confirmar a necessidade do professor trabalhar, em sala de aula, a estrutura das equações e das inequações, como o recomendam Dreyfus e Hoch (2004) e a sintaxe e o significado das frases algébricas (RADFORD, 2004), o que pode ser feito, acreditamos, pelas conversões entre o registro algébrico e o da língua natural.

3 ***professores*** (42.9%) apontaram que o erro foi acarretado por ter sido usada uma técnica própria de equações: 1 deles escreve

> "Foi pensar que tudo se resolve como equação. Outro erro é pensar que se trata de uma equação de 1º grau nos dois casos (como sempre pensei)",

mas não entendemos porque o fato de ser do 1º grau poderia modificar o raciocínio fictício. O que nos parece evidente é que a ênfase excessiva no caso das funções polinomiais de 1º grau e os esquemas do tipo "varal" como procedimento para resolver inequações podem ter gerado as dificuldades deste professor; 1 aponta a multiplicação

> "Usou um procedimento bastante comum na resolução de equações. Já nas inequações quando as multiplicamos por um valor qualquer podemos não corresponder a toda verdade",

mas não explica qual seria essa verdade, se a técnica ou se a solução; 1 coloca

"Multiplicar ambos os membros por um mesmo valor para obter uma inequação equivalente, tal qual é feito em resolução de equações",

também não explicando onde está o problema, se na multiplicação ou na equivalência.

1 ***professor*** escreve

> "O aluno trabalhou apenas com o denominador da expressão",

reforçando a idéia anterior de que as inequações não são equivalentes por causa da forma e não do conjunto-solução. Esta interpretação corrobora a pesquisa já realizada por Linchevski e Sfard (1991) com alunos de 15 a 17 anos, que mostraram dificuldade em reconhecer a equivalência quando a forma das inequações é diferente, mesmo sendo polinomiais.

1 ***professor*** coloca

> "(1/(x-1))<1 (1/(x-1))(x-1)<1.(x-1) 1<1(x-1) Ao multiplicar a inequação por (x-1), teríamos que observar que x≠1, pois com x=1, chegaríamos a 0<0, impossível!".

Este professor parece ter arraigado o aspecto intuitivo associado à abordagem algébrica, pelo qual é preciso determinar a condição de existência da inequação e daí em diante tudo depende disto. E não tem o aspecto formal ligado aos números reais, sobre como interpretar quocientes com o zero no denominador, pois para ele $\frac{1}{0} = 0$. Esta interpretação da divisão por zero manifesta-se em muitos alunos e acredito que seria importante desenvolver pesquisas para estudar os vários significados dados a $\sqrt{0}$; $\frac{k}{0}$, com $k \in IR^*$; $\frac{a}{b} = 0$, com $a \in IR$ e $b \in IR^*$ e formas de abordagem que permitam que os sujeitos inter-relacionem os aspectos formais, algoritmicos e, prinipalmente, intuitivos.

Importante salientar, numa análise geral, que ***nenhum*** dos sujeitos, nem ***alunos*** nem ***professores***, souberam dar as razões formais pelas quais é ou não é possível multiplicar uma desigualdade por um fator qualquer (aspectos formal e algorítmico). Se observarmos as justificativas, podemos ainda concluir que os ***alunos*** chegaram mais próximos do formal, porque 5 deles ainda citam que o problema da multiplicação está no sinal do fator, enquanto que entre os ***professores*** nenhum faz menção a isto.

Apenas 1 ***aluno*** não percebeu que havia erro na resolução do aluno fictício, mostrando, como até aqui na maioria das respostas que deu, que decorou procedimentos (aspecto algorítmico) e não teve oportunidade, na Matemática da Educação Básica, de desenvolver os aspectos formais.

1 ***aluno*** e 2 ***professores*** mostraram dificuldade com os aspectos estruturais da inequação. Se supusermos que os aspectos intuitivos, ligados à resolução de equações, estão por trás destas dificuldades, estes três sujeitos corroboram pesquisa desenvolvida por Dreyfus e Hoch (2004), que concluíram que os alunos pesquisados por eles não reconhecem a estrutura de uma equação e trabalham com os procedimentos apenas.

No geral, podemos afirmar que estes ***professores*** e estes ***alunos*** não dominam os aspectos formais e, em boa parte por esta razão, nem os algorítmicos do tratamento algébrico, porque não souberam explicar quais propriedades fundamentam a multiplicação de uma inequação por um termo do tipo x-1 e nem como aplicar essas propriedades (aspecto algorítmico).

Questão 5: Resolva a inequação –2x > 0 algebricamente.

Escolhemos esta inequação, porque acreditamos que muitos alunos têm dificuldade com o sinal –, principalmente quando ele representa, formalmente, tanto o sinal do coeficiente como o sinal da multiplicação. Poderíamos "ler" esta inequação de duas formas (pelo menos): "o número -2 multiplicado por x é um número positivo" ou "o oposto de 2x é um número positivo". Cada uma destas leituras pode induzir uma forma diferente de resolver a inequação.

A ***ação esperada*** era: resolver a inequação –2x > 0 algebricamente.

A ***componente geral esperada*** era: tratamento do registro algébrico.

1 ***professor*** e 1 ***aluno*** deixaram em branco esta questão. Este ***aluno*** deixou todas as demais questões também em branco e mostrou, ao longo das atividades, ter dificuldades com a Matemática básica que esta seqüência não podia e nem tinha a pretensão de superar.

2 ***alunos*** alegam que não conseguem resolver:

> "Não consigo resolver algebricamente. Mas consigo visualizar no gráfico"
>
> "Não tenho elementos suficientes para resolver esta inequação algebricamente".

Considerando que estes 2 ***alunos*** haviam mostrado, até agora, forte tendência algébrica, as respostas de certa forma nos surpreenderam, pois apontam que realmente é preciso trabalhar, na Educação Básica, o entendimento da estrutura de uma frase algébrica (RADFORD, 2004), no sentido que Duval (1993) defende tão bem, quando se refere à discriminação das unidades simbólicas significativas.

1 ***aluno*** dá uma resposta que podemos considerar equivalente às duas anteriores:

> "Na duvida porque -2 esta multiplicando x. Sendo assim ele passa pro outro lado dividindo então ficaria x>0/(-2) não da para resolver",

só que este ***aluno*** deixa explícito porque não consegue resolver. Novamente nos deparamos com o entendimento estrutural e com o quociente envolvendo o 0, neste caso no numerador.

Os outros 12 ***alunos*** apresentam resolução algébrica: 1 faz a interpretação da frase e responde

> “x<0, pois se usarmos qualquer x>0 a inequação não terá coerência”,

mostrando ter entendido a estrutura da inequação e a partir daí conseguiu resolver sem usar técnicas algébricas, só aritméticas; 1 só responde x<0, dando a entender que também fez a interpretação; 5 resolvem corretamente, utilizando técnicas diversas, como multiplicar a inequação por -1 ou por -1/2 ou dividir por -2 invertendo o sinal de desigualdade; 2 dividem por -2 sem trocar o sinal de desigualdade, recaindo no caso que podemos classificar como “multiplicar em cruz”; 1 escreve

> “-2x>0 2x>0 x>0/2 x<0”

e não sabemos o que o fez mudar o sinal de desigualdade na última passagem; 1 dá uma resposta elaborada

> “-2x>0 p/ c>0 -2x.1>0.1 -2x>0 x<0.   -2x>0, p/ c<0 -2x.-1<0.-1 2x<0 x<0”,

mostrando (novamente, pois já havia ocorrido antes) que sabe que o princípio multiplicativo das desigualdades existe (aspecto formal), mas não sabe como aplicá-lo (aspecto algorítmico); e 1 coloca

> “-2x>0? -2x>0=x>2 ou x<0”,

evidenciando ter dificuldades com a Matemática básica.

Os 4 ***professores*** apresentam resolução algébrica. As respostas são:

> “-2x>0 (-2x)/(-2)>0/(-2) x>0”

e o ***professor*** não domina o aspecto formal que é o principio multiplicativo das desigualdades, embora saiba que tem que dividir por -2 para “isolar o x” (aspecto algorítmico);

> “p/ -2x>0, se (i) x>0 -2x<0 (ii) x<0 -2x>0. Logo, x<0”

> “-2x>0: quando x>0 temos -2x<0; quando x<0 temos -2x>0. Resposta: -2x>0, quando x<0”

e estas duas respostas, de certa forma, mostram que estes 2 ***professores*** não dominam os aspectos algorítmicos, pois não se preocupam com o zero e parecem estar aplicando o princípio multiplicativo das desigualdades numa inequação simples;

“$x>0/(-2)$ $x>0$ (Não é verdade!) $-2x>0$ $2x<0$ $x<0$ Parece que assim funciona!”

e neste caso o ***professor*** mostra uma certa imaturidade matemática, calcada nos aspectos intuitivos, porque usa algum tipo de raciocínio aritmético para rejeitar a resposta $x>0$, mas não discute a técnica que utilizou.

Podemos concluir que, apesar de tratar-se de uma inequação polinomial de 1º grau, com apenas uma parcela, e se considerarmos as resoluções diretas, apenas aplicando um procedimento, apenas 5 ***alunos*** (31.3%) e nenhum ***professor*** deram a resposta correta.

Em geral, podemos dizer que nem os ***professores*** nem os ***alunos*** dominam os aspectos formais ou os algorítmicos do tratamento algébrico e que esperávamos um índice melhor de respostas corretas.

Questão 6: Pelo gráfico da função definida por $f(x)=-2x$, determine a solução da inequação $-2x > 0$. Suas respostas são coerentes? Por que?

Esperávamos que os sujeitos voltassem à questão 5 para verificar se a resposta que deram estava ou não correta e fizessem conexões entre a resolução algébrica e a gráfica.

3 ***alunos*** e nenhum ***professor*** deixaram esta questão em branco.

As ***ações esperadas*** eram: resolver graficamente a inequação $-2x > 0$; comparar erros e acertos; justificar.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

12 ***alunos*** (75.0%) dão a resposta pelo gráfico, mas 3 deles marcam a semi-reta no segundo quadrante, mostrando que realmente é difícil o último passo da resolução gráfica, quando é preciso projetar os pontos sobre o eixo horizontal e olhar só a primeira coordenada. Analisando por categorias de respostas, temos: 1 afirma

> "Não. No gráfico quando $y>0$ os valores de x são negativos".

Este aluno, na questão anterior disse não saber resolver algebricamente, mas que conseguia visualizar o gráfico. Não explicou porquê; 3 afirmam que as respostas são coerentes, porque são iguais. Não justificam e não parece que tenham feito as conexões entre as duas resoluções; 1 só responde "$x<0$. Sim". É o mesmo aluno que tem mostrado algum domínio da aritmética e da interpretação de frases algébricas; 1 só marca os pontos da reta que estão no segundo quadrante. Este aluno tem mostrado que confunde pontos com coordenadas, porque tem tendência a dar a resposta da inequação pelos pontos e não pelas abscissas. Não domina ainda as conversões e parece ter mais dificuldade com o último passo da resolução funcional gráfica, que é a da projeção sobre o eixo horizontal dos pontos do gráfico que interessam; 1 escreve

> "sim por que uma inequação determina um intervalo"

e marca semi-eixo negativo de Ox, o que não responde a pergunta feita, mas corrobora resultados encontrados por Tsamir e Bazzini (2001), pelos quais a maioria dos estudantes pesquisados por eles não aceita que $x=3$ possa ser solução de uma inequação; 1 responde

> "Não são coerentes pois uma representa que todos os valores reais multiplicados por -2 tem como resultado y. E a outra representa que todos os valores multiplicados por -2 tem que ter como resultado qualquer numero maior que zero"

e marca semi reta do segundo quadrante. Este aluno parece ter dificuldade de enxergar o primeiro membro da inequação como uma função, independentemente do sinal da desigualdade. Parece confundir uma representação com o objeto representado, o que Duval (1995, 2000) afirma que ocorre com a maioria dos estudantes; 1 parece confundir o domínio da função com a solução da inequação, porque afirma

> "Não, $x \in IR$, resolvendo graficamente";

2 ***alunos*** dão respostas difíceis de interpretar

> "Pelo gráfico $x>0$ somente quando $y<-4$"

e assinala um retângulo no protocolo, parecendo querer indicar a semi-reta no quarto quadrante;

> "$-2x>0$ $x<0$. Porque a equação $-2x>0$ deve obter valor $\{x \in IR<0\}$"

e marca semi-reta no quarto quadrante. Não temos como saber se concordam ou não e qual é a dificuldade que encontram; 1 escreve

> "f(x)=-2x>0 Sim. Eu preciso de valores negativos para x, para satisfazer a função, onde y>0"

e marca semi-eixo Oy positivo. Parece confundir a função com a inequação e marca os valores de y como solução, o que é esperado na aprendizagem inicial, pois envolve a conversão entre o registro gráfico e o algébrico.

E 1 ***aluno*** dá o valor -3 para x, escreve

> "-2x>0 -2(-3)>0 -6>0"

e indica o semi-eixo Ox negativo como "-2x>0", confirmando, como até agora, que tem muitas e grandes dificuldades vindas da Matemática básica. Na verdade, parece que também baseou-se no gráfico, o que faria com que todos os alunos presentes tivessem olhado no gráfico para responder, mostrando como uma abordagem gráfica pode ser significativa.

Os 5 ***professores*** presentes baseiam-se no gráfico para responder. As respostas são

> (1) "inequação -2x>0 ou equação (-2x)/(-2)=0/(-2) x=0. Observando o gráfico temos: y=0, x=0 para a equação, tem coerência; -2x>0, x>0 para a inequação, não tem coerência. No gráfico, quando x>0, -2x<0. -2x>0 apenas quando x<0",

mostrando o quanto a aprendizagem inicial pode ser marcante, pois o ***professor***: (1) recorre à equação associada, (2) traz a resolução algébrica antes da gráfica; (3) não discute as discrepâncias que aponta, porque algebricamente obteve x>0.

> (2) "Sim. Porque f>0, qdo x<0"

e o professor abusa da notação, confundindo a função com a imagem, o objeto função com uma representação algébrica, o que não consideramos uito salutar, principalmente no início da aprendizagem.

> (3) "p/ y=-2x<0 temos x<0 e p/ y=-2x, para todo x∈IR (satisfaz a equação)"

(sublinhado nosso) e apesar de ter feito as conversões necessárias para obter a resposta, o faz baseado em aspectos algorítmicos, mostrando no trecho sublinhado que não domina os aspectos formais, pois confunde a função f(x)=-2x com a equação y=-2x;

> (4) "Pelo gráfico tem-se todos os valores de x que satisfazem a igualdade y=-2x. Para a inequação -2x>0, deve-se analisar em que parte do gráfico os pares ordenados satisfazem a inequação dada, que ocorre quando x<0",

que é uma resposta com as mesmas características da anterior;

> (5) "-2x é maior que zero quando x<0! Algebricamente -2x>0 x>0/(-2) x>0 Ao contrário??? Nos casos em que o coeficiente de x é negativo não podemos resolver algebricamente?".

Este professor foi o único que se preocupou com a comparação, talvez porque tenha errado na resolução algébrica. Mas mostra grande insegurança nos aspectos formais, porque não sabe interpretar a frase -2x>0 de forma a perceber que existem condições para dividir a inequação por um número negativo.

Nem ***professores*** nem ***alunos*** explicam as possíveis diferenças entre as duas resoluções. Como os ***professores*** tiveram mais dificuldade do que os ***alunos*** na resolução algébrica, esperávamos que tentassem conjecturar sobre as causas dessas diferenças, trazendo à discussão os aspectos formais da resolução algébrica.

Notamos ainda que a resolução algébrica está e é bastante arraigada, fazendo-nos conjecturar que a aprendizagem inicial precisa realmente mudar, ou pela introdução dos gráficos e das conversões ou por uma outra abordagem, como por exemplo a que Kieran (2004) defende, por meio de um trabalho com atividades no nível meta-global, com problemas contextualizados, que se encaminhem para o genérico.

Podemos concluir que, embora tenham mostrado algum desembaraço com os aspectos algorítmicos da resolução funcional gráfica, não dominam os aspectos formais desta abordagem e nem da abordagem algébrica.

Questão 8: Agora, resolva a inequação $\frac{x^2-1}{-3}$<0.

Na questão 7 é dado o gráfico da função definida por $g(x) = \frac{x^2 - 1}{-3}$ e é pedida a resolução da equação $\frac{x^2 - 1}{-3} = 0$, com justificativa. Esperávamos que os sujeitos focassem a atenção no gráfico e que, com isto, começassem a criar o que Duval (1995, 2000) chama de representação interna não consciente, com função de tratamento automático ou quasi-instantâneo, para utilizá-la na resolução da inequação da questão 8. Nesta, propositalmente, deixamos livre escolha para a abordagem.

Optamos por um gráfico de parábola porque, depois das retas, é em geral o mais explorado na Educação Básica e acreditávamos que os ***professores*** teriam menos dificuldade. O coeficiente -3 no denominador foi escolhido para trazer à tona, novamente, o princípio multiplicativo das desigualdades.

A ***ação esperada*** era: resolver graficamente a inequação $\frac{x^2-1}{-3}<0$, dados o gráfico e a expressão algébrica.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: tratamento do registro algébrico; conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico.

1 ***aluno*** e nenhum ***professor*** deixaram esta questão em branco.

2 ***alunos*** optaram só pela resolução gráfica: 1 deles dá a resposta diretamente no protocolo e o outro escreve

> "PELO GRÁFICO: x>1 ou x<-1"[28]

e marca a parábola abaixo de Ox, confundindo, como já o fizera, os pontos do gráfico com a solução da inequação.

2 ***alunos*** fizeram primeiro a resolução algébrica e depois a gráfica: um deles escreve

> "$y<0$ $x^2-1<0$ $x^2<1 \Rightarrow x=\pm 1$ $S\{x\in IR|\ x>1$ ou $x<-1\}$",

identifica o primeiro membro com y no protocolo e faz diagrama de parábola; o outro faz

> "$x^2-1<0(-3)$ $x^2-1<0$ $x^2<1$ $x<\sqrt{(1)}$ $x<1$ ou $x>-1$ $(x=\pm 1)$ Pelo gráfico é possível visualizar com mais facilidade"

e marca x<-1 em Ox, x>1 em Ox e a região entre Ox e a parábola no quarto quadrante. Ambos multiplicaram a inequação por -3 sem inverter o sinal de desigualdade; o primeiro resolveu a equação para dar a resposta e o segundo não utiliza o módulo ao extrair a raiz quadrada dos dois lados da inequação. Acabaram dando a resposta correta, aparentemente porque olharam no gráfico.

[28] Texto em maiúscula em respeito ao original (observação nossa).

11 ***alunos*** fizeram só a resolução algébrica, mas nenhum deles o fez corretamente: 2 deles dão a resposta correta,

“-x^2-1<0 x^2<1 x<-1 x>1 x>1 ou x<-1”

“-3((x^2-1)/(-3))<0.-3 ⇒ x^2-1<0 ⇒ +1+x^2-1<0+1 ⇒ x^2<1 ⇒ $x < \pm\sqrt{1}$ ⇒x>1 ou x<-1”,

dando a entender que, de alguma forma, olharam o gráfico; os demais ou multiplicaram a inequação por -3 sem inverter o sinal de desigualdade ou extraíram a raiz quadrada dos dois lados sem colocar o módulo na incógnita ou fizeram algum erro aritmético ou uma combinação destes procedimentos, como por exemplo

“sendo: ((x^2-1)/(-3))<0 ⇒ -3.((x^2-1)/(-3))<0.-3 +1x^2-1<0+1 x<1 x>-1” ou “((x^2-1)/(-3))<0 -3x^2-1<0 -x^2<-4 x>$\sqrt{4}$ x>2 x<2”,

mostrando que não dominam os aspectos algorítmicos nem os formais da resolução algébrica.

Estes resultados reforçam nossa opinião de que a abordagem dada no início da aprendizagem (na Educação Básica) é marcante e mostram que os gráficos não fazem parte das representações internas não conscientes destes ***alunos***.

1 ***professor*** opta pela só pela resolução algébrica e faz

“-3.((x^2-1)/(-3))<0.-3 daí x^2-1+1<0+1 daí x^2<1 donde x<1 e x<-1”,

onde multiplica a inequação por -3 sem inverter o sinal de desigualdade, extrai a raiz quadrada sem colocar módulo na incógnita e dá uma interpretação para $x < \pm 1$. Estas são dificuldades apontadas pela maioria das pesquisas no assunto (LINCHEVSKI e SFARD, 1991; TSAMIR, ALMOG E TIROSH, 1998; TSAMIR e BAZZINI, 2003). Este ***professor*** não domina os aspectos formais nem os algorítmicos do tratamento algébrico. Interessante observar que manifestou verbalmente, várias vezes, que tem tendência a utilizar gráficos, mas que nunca teve oportunidade nem estímulo para fazê-lo, quando cursou a Educação Básica ou a Licenciatura em Matemática.

2 ***professores*** apresentam só a resolução gráfica.

1 ***professor*** parece ter olhado no gráfico e escreve

“se x<-1 então ((x^2-1)/(-3))<0 se x>+1, então ((x^2-1)/(-3))<0”,

mostrando alguma dificuldade com as frases do tipo “se...então”. Não percebe que, da forma como escreveu, pode não ter toda a solução, pois esta tem que ser equivalente à inequação. Esta resposta nos remete à pesquisa de Dreyfus e Hoch (2004) sobre a necessidade de trabalhar a estrutura de equações, fazendo-nos argumentar que é preciso trabalhar com as estruturas em geral, não só das equações, bem como com a sintaxe e o significado, como recomenda Radford (2004).

E 1 ***professor*** olha no gráfico e também faz uma resolução algébrica

> "[x ∈ IR | x ∈]-∞, -1[U]1,+∞[ ] olhando no gráfico; ∴ x<-1 x>1. x^2-1<0 x<±1 donde x<-1 x<+1 Algebricamente não funcionou!"

e identifica o primeiro membro com y no protocolo. Este ***professor*** também comparou as duas resoluções na questão 6, mas não soube explicar as discrepâncias. De qualquer forma, parece ser o único que percebeu que deve haver conexões matemáticas entre a resolução algébrica e a gráfica.

Comparando os dois grupos, observamos que: os ***alunos*** insistem muito mais na resolução algébrica do que os ***professores***; a porcentagem dos que fazem as duas resoluções é muito próxima e pequena para as nossas expectativas; a *quantidade* de erros no desenvolvimento algébrico dos ***alunos*** é muito maior do que no dos ***professores***; a *qualidade* dos erros pode ser considerada a mesma nos dois grupos, todos envolvendo o princípio multiplicativo das desigualdades.

Percebe-se que, entre os ***alunos***, a resolução algébrica, anteriormente vista, inibe a nova aprendizagem, principalmente porque aparenta ter sido feita com uma grande ênfase nos procedimentos. Nossa avaliação é de que esta ênfase condicionou as discussões posteriores sobre o assunto aos aspectos intuitivos incorporados em cada sujeito.

Questão 9: Agora, resolva a inequação ((x-1)/(x+2))>0 pelo gráfico.

Para esta questão, é dado o gráfico da função definida por $h(x)=\frac{x-1}{x+2}$. Pedimos que a resolução seja pelo gráfico, porque queremos analisar se os sujeitos conseguiram apreender o tratamento e as conversões envolvidos nesta abordagem.

A função escolhida é do tipo racional, porque o domínio não é IR; é constituído por dois intervalos abertos, o que faz com que o gráfico tenha dois ramos disjuntos; e gostaríamos de quebrar a prática corrente de só discutir as funções polinomiais de primeiro e de segundo graus.

A ***ação esperada*** era: resolver graficamente a inequação $\frac{x-1}{x+2} > 0$, dados o gráfico e a expressão algébrica.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico.

5 ***alunos*** e nenhum ***professor*** deixam em branco esta questão. Os ***alunos*** mostraram, ao longo da aplicação da seqüência, grandes dificuldades com a Matemática da Educação Básica.

6 ***alunos*** (em 16) dão a resposta correta diretamente, a partir do gráfico: 1 ***aluno*** escreve x<2 no protocolo, mas marca x<-2 sobre o eixo Ox; 2 ***alunos*** respondem na forma de conjunto e não marcam nada no gráfico; 1 ***aluno*** responde x>1 x<-2 e marca a hipérbole acima de Ox (y>0 na inequação) e o semi-eixo Oy positivo (imagens estritamente positivas), mostrando que ainda tem dificuldade para enxergar a solução só no eixo horizontal, o que quer dizer que ainda não consegue inter-relacionar os aspectos algébrico e gráfico na conversão do registro gráfico para o algébrico; da mesma forma, 1 ***aluno*** que dá a resposta correta e marca a hipérbole acima do eixo Ox (porque y>0 na inequação); e 1 ***aluno*** que coloca

> "y>0 S{x pertence a IR | x<-2,4 ou x>1,5}",

evidenciando problemas na conversão do registro gráfico para o algébrico e vice-versa na hora que projeta as coordenadas sobre o eixo Ox e lê x<-2,4 ou x>1,5 e não analisa a expressão algébrica.

1 ***aluno*** só escreve que "y>0" e marca o semi-eixo Oy positivo (y>0 na inequação), a hipérbole no segundo quadrante (x<-2) e a hipérbole à direita do eixo Oy (x>1), mostrando confundir as coordenadas com os pontos sobre o gráfico.

4 ***alunos*** apresentam respostas de difícil interpretação, como por exemplo

> "Para satisfazer a inequação o x>0, graficamente"

e marca x>1 sobre o eixo Ox. Pode ser que, ao escrever a resposta, tenha se confundido. De toda forma, só parece reconhecer a parte da solução que corresponde ao ramo da hipérbole que fica acima do eixo Ox e para valores de x positivos. Ou “((x-1)/(x+2))>0 x-1>0 x<-1”,

onde o ***aluno*** multiplica por x-1 a inequação sem inverter o sinal de desigualdade, mas o inverte na passagem seguinte. Este parece ser um caso de concepção pseudo-estrutural, no sentido dado por Linchevski e Sfard (1991), em que o sujeito usa um esquema ou um símbolo mas não sabe o significado e, portanto, não sabe distinguir a representação do objeto representado.

4 dos 5 ***professores*** presentes olha diretamente no gráfico. Só 1 deles dá a resposta correta

“Para y=((x-1)/(x+2))>0 temos x<-2 ou x>1”,

mas marca os pontos sobre o gráfico no protocolo, mostrando que ainda não consegue executar todos os passos do tratamento gráfico, embora tenha feito corretamente a conversão do registro gráfico para o algébrico. Nossa avaliação é que ainda falta inter-relacionar os aspectos formais com os demais.

1 ***professor*** escreve

“x diferente de -2”

e marca no gráfico x<-2 sobre o eixo Ox. Mostra preocupação com a condição de existência da inequação, mas deixa de dar parte da solução, que é x>1. Não consegue fazer todos os passos das conversões e não domina os aspectos formais nem os algorítmicos da resolução gráfica.

1 ***professor*** só dá parte da solução

“{x ∈IR | x ∈]-∞, -2[}”.

Nestas duas últimas respostas, aparecem apenas os valores de x que correspondem ao ramo da hipérbole que fica acima do eixo Ox e os 2 ***professores*** parecem ter dificuldade com a parte da solução em que o ramo da hipérbole corta o eixo Ox. Esta parece estar ligada à falta de visualização do gráfico, no sentido de Duval (1999), pois conforme depoimento verbal do grupo, sempre trabalharam “aritmeticamente”, dando valores para obter alguns pontos particulares (tabela) do gráfico e quase sempre com abscissas 0, 1, -1 e 2, de funções particulares (polinomiais de 1^{o} e 2^{o} graus).

1 ***professor*** coloca

“qdo x>1 temos y>0 qdo -2<x<1 temos y<0 qdo x<-2 temos y>0” e marca x=-2 e x=1 no protocolo. Não completa a questão, porque não explicita a solução da inequação nem no protocolo e nem no gráfico. Além disso mostra, como na questão 8, que tem dificuldade com frases do tipo “se ... então”, porque parece não perceber que não significam equivalência e que, portanto, pode não ter toda a solução.

E 1 ***professor*** apresenta primeiro a resolução algébrica para depois comparar com a gráfica

> “((x-1)/(x+2))>0 (y>0) donde x-1>0.(x+2) x-1>0 x>1 então y>0 p/ x>1. No gráfico: y>1[29] p/ x<-2 y>0 p/ x>1. Ao multiplicar a inequação por x+2, teremos apenas uma parte da resposta, ou seja, y>0 p/ x>1.”

Como continua multiplicando a inequação por um fator sem discutir o sinal deste fator, algebricamente só obtém parte da solução. De forma análoga à resposta do ***professor*** anterior, mostra dificuldade para lidar com frases do tipo “se ... então”, pois também não dá a resposta na forma de equivalência.

De modo geral, nesta questão, podemos dizer que os ***alunos*** conseguiram efetuar as conversões entre os registros gráfico e algébrico (aspecto algorítmico) melhor do que os ***professores***, porque 6 ***alunos*** em 16 (37.5%) o fizeram, contra 1 ***professor*** em 7 (14.3%).

Também observamos que nenhum deles mostrou preocupação nem questionamentos maiores com as discrepâncias entre as respostas obtidas algébrica e graficamente, o que, no nosso entender, mostra que não dominam os aspectos formais e ainda acreditam que só os aspectos algorítmicos e os intuitivos são suficientes para a apreensão dos objetos matemáticos.

Se compararmos os resultados individuais, ao longo da seqüência até aqui, podemos destacar que esses 6 ***alunos***, que fizeram as conversões corretamente, são os que têm mostrado que uma abordagem funcional gráfica é possível e viável.

Entre os ***professores***, o interesse é geral, porém local, porque não evidenciaram que a farão em sala de aula da Educação Básica. Ainda mais, como esta é a penúltima questão da penúltima atividade da seqüência e a atividade 5 na verdade só traz uma complementação ao assunto, consideramos que estes ***professores*** não apreenderam, com as atividades aplicadas, os aspectos formais

---

[29] Observação nossa: deve ter se confundido ao escrever no protocolo e colocou y>1 invés de y>0.

nem os algorítmicos da *abordagem funcional gráfica* de inequações com uma incógnita real e que precisaríamos ainda discutir o assunto com mais profundidade.

Questão 10: Podemos multiplicar a inequação por x + 2? Explique como e porquê.

Esperávamos que os sujeitos tivessem percebido que é possível multiplicar a desigualdade sim, desde que sejam obedecidas as regras do principio multiplicativo das desigualdades: quando o fator é um número negativo, inverte-se o sinal da desigualdade. Além disso, que para resolver algebricamente uma inequação (aspecto algorítmico), quando o fator depende da incógnita, abrem-se pelo menos duas ramificações, uma para o sinal negativo e outra para o sinal positivo, ambas do tipo “se ... então”.

E que é preciso deixar bem claro, em sala de aula, que existem aspectos formais que não podem ser tratados intuitivamente.

As ***ações esperadas*** eram: conjecturar sobre uma “multiplicação em cruz”; justificar.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: tratamento do registro algébrico; conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

4 ***alunos*** e 1 ***professor*** deixaram esta questão em branco. 1 dos ***alunos*** deixou quase todas as demais também em branco e nossa avaliação é de que estes 4 ***alunos*** têm muitas e sérias dificuldades com a Matemática básica. Como já dissemos, não pretendíamos, só com as discussões provocadas por esta seqüência, dirimir todas as dúvidas do grupo, apenas mostrar uma forma diferente de trabalhar a Matemática, que consideramos mais próxima das propostas curriculares atuais (ver Anexo A).

Para os ***alunos***, que não fizeram a atividade 5, esta é a última questão da seqüência. Por esta razão, vamos transcrever todas as respostas.

3 ***alunos*** respondem que a multiplicação é possível, desde que se verifique o sinal do fator (aspecto formal), mas não explicam como é que se faz isto (aspecto algorítmico). As respostas foram

> “Sim, desde tomemos cuidado, pois esta multiplicação só será valida quando este no. for positivo.”

> “((x-1)/(x+2))>0 PODEMOS FAZER-LA DE MODO QUE x+2 TEM QUE SER MAIOR QUE ZERO E QUE SE FAÇA DOS DOIS LADOS, TENDO COINCIÊNCIA DE QUE O SINAL SE MANTERÁ. CASO O VALOR DE x+2 SEJA MENOR DO QUE ZERO, PODEMOS EFETUAR A MULTIPLICAÇÃO PELOS DOIS FATORES TENDO A CONSCIÊNCIA DE QUE O SINAL SERÁ O INVERSO, SE É MAIOR FICARÁ MENOR.”[30]

> “Não, por que não sabemos o valor exato da incognita automática/o se ele for negativo devemos modificar uma de suas condições, assim não podemos multiplicar uma incógnita por outra; já que queremos uma valor preciso.”

1 ***aluno*** não responde sim nem não, mas resolve a inequação algebricamente, separando em casos.

> “x+2>0: ((x-1)/(x+2))>0 x-1>0 x-1+1>0+1 x>+1   x+2<0: ((x-1)/(x+2))(x+2)<0(x+2) x-1<0 x<+1.”

Mas tem dificuldade com o “se ... então”, porque não compara a solução obtida com a condição imposta sobre o sinal do fator, o que pode delimitar o conjunto universo.

3 ***alunos*** justificam a não possibilidade pelo fato das respostas serem diferentes.

> “Não. A resposta encontrada será somente x>1, o que não corresponte a todos os valores que satiafazem a inequação.”

> “NÃO POIS SE (x+2)((x-1)/(x+2))>0.(x+2) x-1>0 x-1>0 → 1 INTERVALO ((x-1)/(x+2))>0 → 2 INTERVALOS pois x-1≠(x-1)/(x+2).”[31]

> “⇒((x-1)/(x+2))>0 ⇒ x-1>0.(x+2) ⇒ x>1 não.”

Observamos que: na segunda resposta, o ***aluno*** mostra dificuldade em reconhecer frases equivalentes quando estas não têm a mesma forma, corroborando pesquisa realizada por Dreyfus e Hoch (2004); e na terceira, o ***aluno*** multiplica a inequação para depois decidir que não, evidenciando quanto os aspectos algorítmicos e intuitivos podem governar as decisões matemáticas, se os aspectos formais não foram devidamente evidenciados e discutidos.

1 ***aluno*** multiplica a inequação por x+2 e não consegue fazer o tratamento algébrico. Também não responde nem sim nem não.

> “(x+2).((x-1)/(x+2))>0 ((x^2-x+2x-2)/(x+2))>0 ((x^2+2x-x-2)/(x+2))>0.”

Este ***aluno*** tem mostrado, ao longo da seqüência, muitas dificuldades com a Matemática básica, permitindo que reforcemos nossa idéia de que um ensino, baseado apenas nos aspectos intuitivos e algorítmicos, pode provocar o que Linchevski e Sfard (1991) chamaram de concepções pseudo-estruturais e que, no

[30] Texto em maiúscula respeitando o original (observação nossa).
[31] Texto em maiúscula respeitando o original (observação nossa).

entender destas pesquisadoras e também no nosso, prejudicam aprendizagens futuras. Seria interessante desenvolver pesquisa sobre como uma aprendizagem que já ocorreu pode atuar sobre uma que está ocorrendo, talvez à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática (GRAY e TALL, 2001, apud DE LIMA, 2007, p.69-91).

1 ***aluno*** responde que sim e descreve os passos do tratamento algébrico.

> “Sim, depois podemos utilizar a divisão de polinômios e separar os termos semelhante chegando ao resultado. (x+2).((x-1)/(x+2))>0.(x+2) ((x^2+x-2)/(x+2))>0 x-1>0 x>1.”

O que mostra dificuldades para lidar também com os aspectos formais. Tem uma tendência forte para “resolver” a inequação (aspecto intuitivo) por meio do tratamento algébrico, mas com base apenas nos aspectos algorítmicos.

1 ***aluno*** justifica a multiplicação com palavras, mas não se refere ao sinal do fator.

> “Sim podemos, mas seguindo os padrões, temos que multiplicar a enequação em seus dois "lados" para que ela continue sendo equivalente.”

Este sujeito tem mostrado, ao longo da seqüência, altos e baixos. Parece dominar aspectos algorítmicos em algumas situações, porém em outras não. Neste caso, nossa avaliação é de que o princípio multiplicativo das desigualdades não é fácil de ser entendido (aspecto formal) e nem de ser aplicado (aspecto algorítmico), por ser da forma “se ... então”. Nesta última frase matemática, o sujeito precisa admitir uma hipótese (se) para desenvolver uma tese (então), sem esquecer que o universo de validade pode ter ficado restrito pela suposição. Vemos aí uma linha de pesquisa interessante e, temos certeza, importante para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

E 2 ***alunos*** dão resposta sim, porém com explicações não coerentes com o problema, que não soubemos interpretar.

> “Sim. (((x-1).(x+2))/(x+2))<0.(x+2) INVERTE O SINAL!”[32]
>
> “sim, x+2 é uma equação. E em um gráfico pode ser representada como função. x+2=0 x=-2.”

Esta segunda resposta mostra que o ***aluno*** parece confundir equação com função, expressão algébrica com equação. Se supusermos que esqueceu de escrever y=x+2, o que diz é verdade e o problema fica no fato de querer achar as raízes para depois estudar o sinal de x+2.

---

[32] Maiúsculas conforme texto original (observação nossa).

2 ***professores*** respondem que não e justificam pela resolução algébrica.

> "Resp. Não, pois se a inequação for multiplicada por x+2, resultará x>1 e só será satisfeita parte da verdade. ((x-1)/(x+2))>0 *(x+2) x-1>0 x>1."
>
> "((x-1)/(x+2)).(x+2)>0.(x+2) (x-1)>0 x>+1 NÃO!!![33] Antes de multiplicar: x≠-2 (x∈]-∞,-2[x∈]-2,+∞[x≠-2. Após multiplicar: x>1."

Na primeira resposta, o ***professor*** não analisa o sinal do fator x+2 e não percebe que a justificativa formal é anterior ao tratamento algébrico. Não domina os aspectos formais nem algorítmicos do tratamento algébrico e, aparentemente, não incorporou o registro gráfico como representação interna não consciente, porque não o utiliza para o raciocínio.

Na segunda resposta, como já havia ocorrido na questão 4, o ***professor*** tem muito presente a preocupação com a condição de existência da inequação, da qual todo o resto parece depender.

1 ***professor*** responde

> "Não. Porque dessa maneira só trabalha c/o numerador e apenas um lado do gráfico da função. (x+2).((x-1)/(x+2))=0.(x+2) x=1."

E continua evidenciando, como na questão 3, que não aceita expressões diferentes como equivalentes, principalmente quando uma está na forma fracionária e a outra não, corroborando a necessidade de trabalhar, com os estudantes, as estruturas das expressões (DREYFUS e HOCH, 2004) bem como o significado e a semântica (RADFORD, 2004). Além disso, deixa que aspectos intuitivos dêem as regras de conduta, porque substitui o sinal de desigualdade pelo de igualdade (KIERAN, 2004), mesmo depois de toda a discussão, ao longo de 4 atividades.

E 1 ***professor*** argumenta

> "Após a seqüência de atividades proposta é plenamente justificado que a inequação não deve ter o mesmo tratamento algébrico que é dado as equações, porque deve-se ter o cuidado de se trabalhar a idéia de igualdade diferente da desigualdade. É importante a visualização gráfica e preocupar-se em esclarecer a leitura e interpretação da linguagem simbólica."

O que mostra que apreendeu alguns detalhes, mas ainda não visualizou o todo. Apesar de ter se referido ao registro gráfico, não o utilizou para fazer as comparações.

No geral, podemos dizer que ***nenhum*** dos sujeitos pesquisados conseguiu apreender os aspectos formais da abordagem funcional gráfica e,

---

[33] Maiúsculas conforme texto original (observação nossa).

conseqüentemente, não conseguiram fazer as conexões entre esta e o tratamento algébrico.

Os ***alunos*** mostraram maior facilidade para aceitar os aspectos algorítmicos do tratamento gráfico e das conversões entre os registros gráfico e algébrico, mas não ficou evidente se o registro gráfico passou a ser uma representação interna não consciente e, portanto, um tratamento quasi-instantâneo (DUVAL, 1995, p. 33-34), como gostaríamos que tivesse ocorrido para garantir que pudessem utilizá-lo na resolução de problemas. Também não procuraram formas de analisar o tratamento algébrico que vinham praticando, muito baseado em aspectos intuitivos, o que mostra como o início da aprendizagem pode ser marcante.

Nenhum dos sujeitos, em nenhuma das questões, respondeu propriamente os questionamentos do tipo “por que?”, “justifique” e “explique”. Perguntamo-nos se este comportamento é um hábito adquirido na Educação Básica, porque os professores não pediam que o fizessem e os alunos “progrediam” sem precisar entender como e porquê algumas coisas funcionam.

Todas estas nossas observações nos remetem novamente à definição de contrato didático (BROUSSEAU, 2003) que transcrevemos no parágrafo VI.1.4, página 200 e às observações que lá colocamos. Mais uma vez julgamos que é muito grande, talvez mesmo inibidora, a influência das cláusulas pré-estabelecidas desse contrato, tanto na Educação Básica, por onde passaram todos os nossos sujeitos, como no Ensino Superior, por onde já haviam passado os professores de nossa pesquisa, pois nenhum dos sujeitos conseguiu *romper*, como sugere Brousseau (2003), as cláusulas daquele contrato.

Parece-nos necessário, até mesmo imprescindível, que sejam realizadas pesquisas que nos façam melhor compreendê-las, para eventualmente modificá-las.

VI.1.6. ATIVIDADE 5

Pelo fato de termos desdobrado a atividade 3 em duas, para os alunos, estes não tiveram a oportunidade de realizar a atividade 5. Tanto do ponto de vista de nossa pesquisa como do didático, podemos dizer que não houve perda, porque nesta última atividade as questões giram em torno da resolução gráfica de inequações que envolvem particularmente a função definida por $f(x)=x^2$. Também colocamos os gráficos das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$ para tentar chamar a atenção para o fato de que $\sqrt{x^2} = |x|$ por meio das imagens fornecidas por estes gráficos.

Escolhemos para analisar as questões 1, 7, 8, 10, 11 e 12. As questões 2 a 6 são dedicadas à exploração, com o uso do dinamismo do software Cabri-géomètre II, das coordenadas dos pontos $X(x, x^2)$ sobre o gráfico da função f, quando comparadas às coordenadas dos pontos P(-3, 9) e Q(3, 9), também sobre o gráfico de f. Esperávamos que os sujeitos descrevessem o comportamento das coordenadas dos pontos X, tanto algébrica como graficamente e que isto os ajudasse a resolver $x^2 \leq 9$, algébrica e graficamente.

Questão 1: Para resolver a inequação $x^2 \leq 9$, um aluno deu a seguinte resolução algébrica:

"Extraindo a raiz quadrada dos dois lados, chego à inequação $x \leq \pm 3$; portanto, a resposta à inequação inicialmente dada é $x \leq \pm 3$".

Observe que, pela resolução do aluno, a inequação $x \leq \pm 3$ deveria ser equivalente à original.

Analise o texto e veja se você concorda com este aluno. Discuta suas dúvidas.

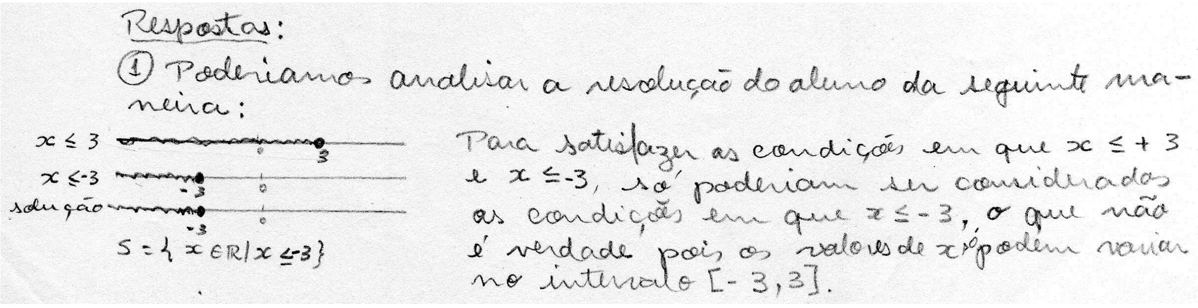
Esperávamos que os ***professores*** refletissem sobre a resolução do ***aluno*** fictício e percebessem que $\mathbf{x} \leq \pm 3$ não tem significado matemático, pelo menos um que seja aceito pela comunidade.

As ***ações esperadas*** eram: analisar o uso da "extração da raiz" numa resolução pronta da inequação $\mathbf{x^2 \leq 9}$; conjecturar sobre a causa do erro.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: tratamento do registro algébrico; conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

4 ***professores*** em 7 (o que significa 57.1%) deixaram esta questão em branco. Posteriormente, em conversa, disseram não ter entendido que era para deixar as observações no protocolo.

1 ***professor*** faz esquema de varal para analisar a resposta fictícia. Apresentamos uma imagem do protocolo.



Respostas:

① Poderíamos analisar a resolução do aluno da seguinte maneira:

$x \leq 3$ — 0 — 3

$x \leq -3$ — -3 — 0

solução — -3 — 0

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3\}$

Para satisfazer as condições em que $x \leq +3$ e $x \leq -3$, só poderiam ser considerados as condições em que $x \leq -3$, o que não é verdade pois os valores de x só podem variar no intervalo $[-3, 3]$.

Como já havia feito na atividade 4, faz a análise a partir da resposta, sem entrar no mérito da resolução. Aceita $\mathbf{x \leq \pm 3}$ como intersecção, como podemos ver pelo protocolo. Não deixa explícito como sabe que x só pode variar no intervalo [-3, 3].

1 ***professor*** só se baseia numa parte da resposta do aluno fictício, sem aparentemente julgar o texto que a acompanha, nem tentar discutir como fazer para resolver a inequação.

> "Não, a resposta do aluno está incorreta pois: para $x \leq -3$, $y \geq 9$. O aluno cometeu o engano de se usar a idéia de equações equivalentes em uma desigualdade."

Não coloca as dúvidas e dá a entender que "extrair a raiz" é um procedimento próprio só de equações.

E 1 ***professor*** questiona

> "$x^2 \leq 9$ equivalente? $x \leq \pm 3$."

Mas não coloca claramente qual é a dúvida, se no "equivalente" ou se na pergunta toda.

No geral, surpreendeu-nos que 2 ***professores*** tenham aceitado o registro $\mathbf{x \leq \pm 3}$ como verdadeiro em Matemática, mesmo depois de termos discutido o assunto, durante alguma das institucionalizações anteriores à aplicação da seqüência.

Nenhum deles respondeu a pergunta feita, no que concerne à análise e discussão das dúvidas. Acreditamos que, toda vez que é preciso explicar, justificar ou discutir, os sujeitos não o fazem, pelo menos não claramente, porque seria preciso trazer à tona aspectos formais.

Aparentemente, nenhum dos professores recorreu ao gráfico de $f(x)=x^2$ para determinar as soluções da inequação dada.

Questão 7: Olhando o gráfico, determine as soluções da inequação $x^2 \leq 9$.

Como já colocamos anteriormente, para responder as questões desta atividade, os sujeitos tiveram acesso a um gráfico da função definida por $f(x)=x^2$ no software Cabri-géomètre II. Neste gráfico, eram dados os pontos P e Q, fixos, com coordenadas (-3, 9) e (3, 9), respectivamente. Com o dinamismo proporcionado pelo software, os sujeitos poderiam movimentar pontos sobre o gráfico ou fora dele, para observar o comportamento das coordenadas.

Esperávamos que os ***professores*** utilizassem esta experiência com o Cabri-géomètre II para responder a questão.

A ***ação esperada*** era: resolver graficamente a inequação $\mathbf{x^2 \leq 9}$, dado o gráfico.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; localização de pontos sobre o gráfico a partir de informação sobre as ordenadas.

Nenhum ***professor*** deixou esta questão em branco.

6 ***professores*** olham diretamente no gráfico para responder, sendo que 2 ***professores*** dão a resposta correta.

> "Quais os valores de x para que y seja menor ou igual a 9? Gráfico: os valores de x devem estar entre -3 e 3."
>
> "'-3<=x<=3."

Os outros 4 ***professores*** apresentam respostas incompletas.

1 deles responde na forma de implicação e não de equivalência.

> "$\{x^2 \leq 9 \rightarrow -3 \leq x \leq 3\}$."

É o mesmo ***professor*** que, na questão 1, colocou a interrogação na palavra equivalente. Parece que não compreendeu o que significam frases equivalentes, mostrando com isto que faz o tratamento algébrico da mesma forma que a maioria dos estudantes da pesquisa de Linchevski e Sfard (1991), ou seja, por meio de concepções pseudo-estruturais.

E mais 1 ***professor*** responde na forma de equivalência.

"para $-3 \leq x \leq 3$ temos $x^2 \leq 9$."

E faz o esboço gráfico de x^2 no protocolo, parecendo que aplicou os procedimentos aprendidos anteriormente e não o que estava sendo discutido.

Outro deles discrimina os pontos do gráfico e não só as soluções.

"$S=\{(x,y) \in IR \mid -3 \leq x \leq 3\}$

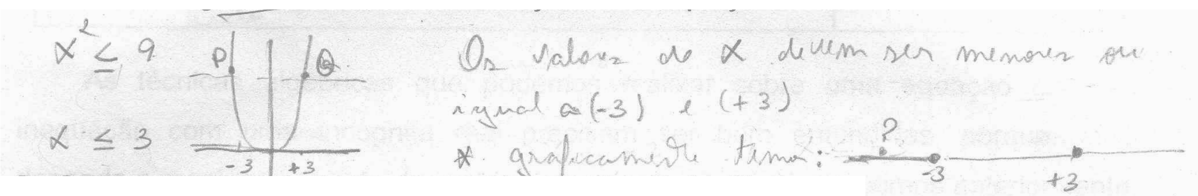
e faz o esboço gráfico de x^2-9 no protocolo, mostrando que não percebeu que não precisava fazer este esboço e que confunde os pontos com a projeção no eixo horizontal. Deixa transparecer o quanto os aspectos intuitivos são coercivos, porque acaba utilizando esquema aprendido anteriormente.

E 1 ***professor*** também parece confundir os pontos do gráfico com as soluções.

"São todos os valores de X que estão abaixo dos pontos P e Q, $-3 \leq x \leq 3$."

Onde X representa um ponto genérico do gráfico da função definida por $f(x)=x^2$ e P e Q são os pontos de coordenadas (-3, 9) e (3, 9), respectivamente. Este ***professor*** usa a imagem gráfica para dar a resposta.

E 1 ***professor*** que não dá a resposta correta. Escaneamos esta resposta para corroborar nossa análise.



Parece que este ***professor*** tenta a resolução algébrica e só obtém parte da solução, mas responde que $x \leq \pm 3$. Afirma que graficamente observou alguma coisa, mas faz o esboço gráfico da reta horizontal apenas, trazendo à lembrança os esquemas "gráficos" que aparecem nos livros didáticos e que, na verdade, parecem-nos apenas figuras mnemônicas.

No geral, podemos dizer que todos os ***professores*** utilizaram algum esboço gráfico para responder, mas apesar de terem à disposição o gráfico da função definida por $f(x)=x^2$, insistem em fazer esboços nos protocolos que lembram um esquema aprendido anteriormente.

Nenhum deles retomou espontaneamente a resolução algébrica feita na questão 1 para comparar as soluções.

Questão 8: Suas soluções coincidem com as do seu aluno? Justifique.

Esperávamos que os ***professores*** comparassem as resoluções para responder a pergunta. Com isto, acreditávamos possível que fizessem as conexões entre a resolução algébrica e a gráfica.

A ***ação esperada*** era: comparar a solução encontrada na questão 7 com a do aluno fictício (questão 1); justificar.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

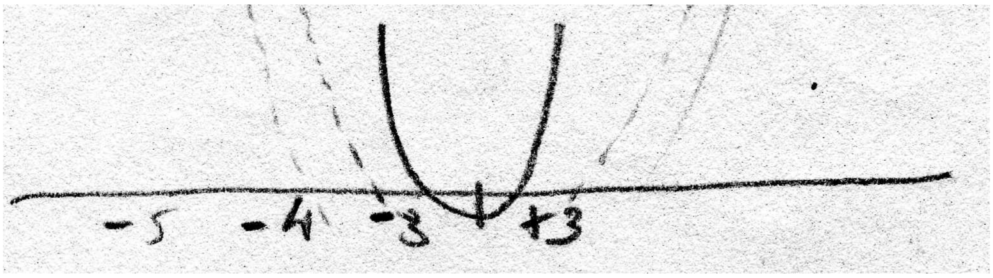
Nenhum ***professor*** deixou esta questão em branco.

Os 7 ***professores*** utilizam o gráfico da função definida por $f(x)=x^2$ para contestar a resposta do aluno, mas nenhum deles justifica isto formalmente. Apenas comparam as respostas. Também aceitam a representação $\mathbf{x} \leq \pm 3$ como válida: para 5 deles como ou, para 1 como e e para 1 como $-3 \leq x \leq 3$. Mesmo depois que falamos sobre isto em uma das institucionalizações anteriores à aplicação da seqüência.

6 ***professores*** escrevem que não e apresentam as comparações de acordo com a interpretação de $\mathbf{x} \leq \pm 3$.

> (1) "Não. Por que na resolução do aluno $\mathbf{x} \leq \pm 3$ {para $x<-3$ não coincidem com o gráfico}"

e faz um esboço gráfico no protocolo, que escaneamos. Mostra que os aspectos intuitivos, vindos de aprendizagem anterior, governam o comportamento atual, pois não utiliza o gráfico dado e faz um esboço que não tem a ver com a função em jogo, apenas com um esquema mnemônico, muito utilizado nos livros didáticos.



> (2) "Não, porque os <u>valores de X</u> foram generalizados pelo aluno, tanto acima como abaixo dos pontos P e Q. Os valores de x devem estar limitados abaixo dos pontos P e Q, isto é, entre P e Q, $-3 \leq x \leq 3$"

(sublinhado nosso), onde X, P e Q são pontos sobre o gráfico da parábola. Continua a linha de raciocínio que iniciou na questão 7, porque utiliza a imagem dinâmica que o software proporcionou para escolher a resposta. Confunde, na escrita, pontos com coordenadas, valor com ponto.

> (3) "Não. Na resposta do aluno $x<\pm 3$, isto é, x é menor que -3 ou x é menor que 3. Observando no gráfico percebe-se que x deve estar entre -3 e 3 p/ satisfazer $f(x)=x^2 \leq 9$"

e aceita a notação $x<\pm 3$ como reunião. Usa o gráfico dado, mas não justifica porque as respostas não coincidem.

> (4) "Não, pois os valores de x que satisfazem as condições de $x \leq \pm 3$, são os que estão variando de -3 a +3, e não apenas àqueles menores ou iguais a -3"

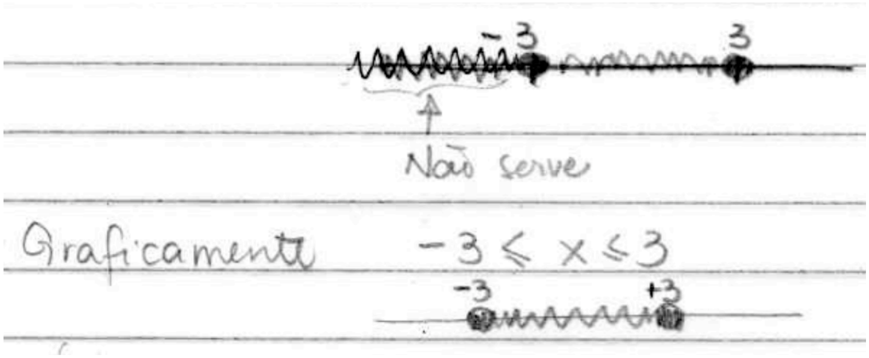
e a notação $x \leq \pm 3$ significa $-3 \leq x \leq +3$. Não deixa claro porque as respostas não coincidem, pois parece que acha que as soluções estão no intervalo $]-\infty, -3]$, quando na questão 7 respondeu $-3 \leq x \leq +3$.

> (5) "Não, porque na leitura gráfica é possível visualizar que para valores de $x \leq -3$, $x^2 \geq 9$"

e $x \leq \pm 3$ significa reunião. Apenas não concorda com a resposta do estudante, mas não justifica, pois só dá as respostas na forma de "se ... então".

> (6) "Resposta do Aluno $x \leq +3$ ou $x \leq -3$. <u>Graficamente</u> $-3 \leq x \leq +3$. Não coincidem com as do aluno. Na resposta do aluno, teríamos que considerar $x \leq -3$, o que não serviria como resposta para a inequação"

(sublinhado nosso) e $x \leq \pm 3$ significa reunião. Faz esquemas no protocolo para indicar que $x \leq -3$ não serve e para indicar a resposta. Não deixa claro se o graficamente é pelo gráfico dado da parábola ou pelo esquema que apresenta.



E 1 ***professor*** afirma que as respostas coincidem no primeiro olhar, mas depois muda de idéia.

> "Sim! O processo algébrico leva a mesma solução, mas é importante observar... "opa"! $x \leq 3$ $x \leq -3$? Reconsiderar: a leitura de $x < \pm 3$ me leva a pensar que $x \leq 3$ ou $x \leq -3$, portanto não é equivalente ao gráfico"

e $x \leq \pm 3$ significa reunião. Não justifica porque são diferentes.

No geral, podemos dizer que nenhum dos ***professores*** justificou formalmente porque as respostas coincidem ou não. Também não dominam os aspectos formais nem os algorítmicos do tratamento algébrico, embora pareçam ter apreendido os aspectos algorítmicos da resolução funcional gráfica. Fizeram as conversões entre os registros gráfico e algébrico, mas todos apresentam dificuldades para lidar com frases lógicas, tanto do tipo "se ... então" (implicação) como do tipo "se e somente se" (equivalência).

Pelos esquemas apresentados nos protocolos, parece que ainda não têm o registro gráfico de funções como uma representação interna não consciente, o que iria proporcionar um tratamento quasi-instantâneo na resolução de problemas (DUVAL, 1995, 2000). Isto pode significar que não vão mudar a forma de abordar a resolução de inequações, em sala de aula.

Nenhum deles parece ter apreendido os aspectos formais do tratamento gráfico nem das conversões entre os registros gráfico e algébrico, porque não percebem que a resolução gráfica e a resolução algébrica devem dar a mesma resposta. Não explicam nem justificam formalmente o raciocínio.

As questões 9, 10, 11 e 12 têm por objetivo trazer à discussão a equivalência entre $|\mathbf{x}|$ e $\sqrt{\mathbf{x}^2}$, utilizando os esboços gráficos das funções $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2}}$ e $\mathbf{g(x)=|x|}$, que podem ser facilmente obtidos com a ajuda do software GRAPHMATICA.

Na questão 9, o enunciado é apenas chamativo: "Vamos olhar mais de perto a frase "Extraindo a raiz quadrada dos dois lados ..."."; que tem sido muito utilizada pelos alunos com os quais já tive contato nas aulas de Cálculo 1. Por esta razão, esta questão não tem respostas a serem analisadas.

Questão 10: Para tanto, utilize o software GRAPHMATICA para pedir o gráfico da função $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$**. Você o reconhece? Que gráfico é esse?**

Esperávamos que os ***professores*** identificassem o gráfico da função f com o da função definida por $g(x)=|x|$ e, a partir desta identificação, descobrissem uma forma de lidar com a inequação $x^2<k^2$, onde $k \in IR$, "extraindo a raiz dos dois lados" da inequação.

As ***ações esperadas*** eram: construir, no software GRAPHMATICA, o gráfico da função $\mathbf{h(x)=\sqrt[2]{x^2}}$; conjecturar sobre o gráfico.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

2 ***professores*** o reconhecem como o da função módulo de x. 1 deles escreve

> "Esse gráfico é de uma função módulo de x. Essa função $f(x)=\sqrt[2]{x^2} \neq f(x)=x^2$ (função polinomial do segundo grau)"

mas parece que o compara com o gráfico da parábola apenas. Podemos notar também que chama de f duas funções diferentes, dando a entender que confunde a representação com o objeto.

Outro coloca

> "$f(x)=\sqrt[2]{x^2}$. O gráfico construido é o gráfico da função f(x)=|x|"

mas não explica porque pensa assim.

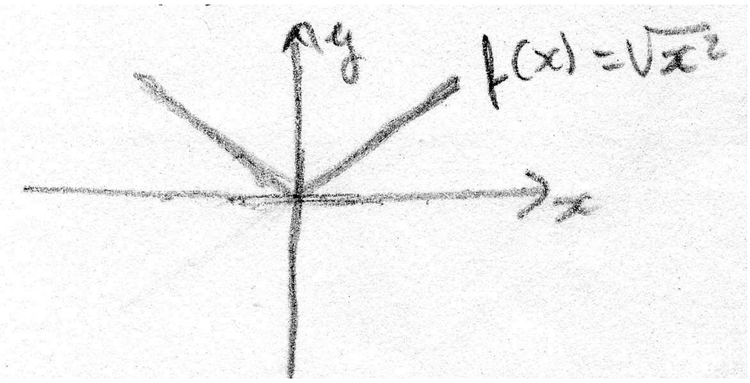
3 ***professores*** o reconhecem como o de uma <u>função modular</u>. Perguntamos a eles o que significa uma função modular e, verbalmente, deram a entender que é a função definida por $g(x)=|x|$. Apesar de termos discutido algumas atividades sobre função e, entre elas, uma em que o módulo é colocado em x ou na função (funções associadas; ver parágrafo IV.1.4, página 74), pareceu-nos que não havíamos conseguido ampliar o banco de funções de cada um deles de modo a incluir funções como por exemplo as definidas por $h(x)=|x|^3-3|x|$ ou $m(x)=|\text{sen}(x)|$. 1 deles escreve simplesmente

> "Sim. Função modular"

e não justifica mais nada. 1 outro responde

> "É o gráfico da função modular, pois para os valores de x≥0 elevados ao quadrado, obtem-se y≥0 e para os valores de x≤0 elevados ao quadrado também se obtém y≥0."

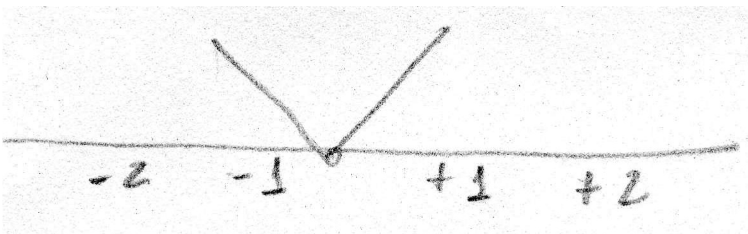
e faz gráfico no protocolo, mas explica que é a função "modular" apenas porque a imagem é sempre positiva. Não domina aspectos formais nem algorítmicos da definição de módulo e nem da função "módulo de x".



1 outro coloca

> "y=sqr(x^2) y=abs(x) gráfico da função modular"

e faz esboço gráfico no protocolo, porém sem indicar porque acha isto.

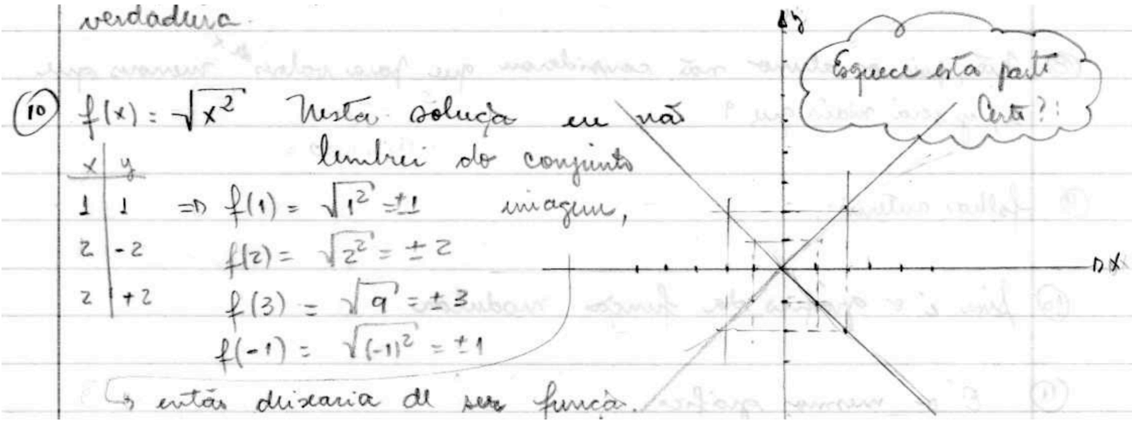


1 ***professor*** não reconhece o gráfico e simplesmente escreve

“Não a reconheço”

sem tentar argumentar ou explicar nada.

E 1 ***professor*** coloca no protocolo



Podemos evidenciar vários problemas: apesar de ter o software à disposição, faz uma tabela com 3 pontos para esboçar o gráfico; ao calcular o valor de f, coloca sempre $f(x) = \sqrt{x^2} = \pm x$; argumenta que isto não é possível por causa da imagem e não por causa da definição; coloca no gráfico valores positivos e negativos para a imagem e depois “esquece” a parte que fica no 3º e no 4º quadrantes. Trabalha com a Matemática só baseada em aspectos intuitivos e algorítmicos, sem trazer à discussão aspectos formais. Não conseguiu perceber que a tabela de valores não diz nada sobre o comportamento da função e do gráfico.

No geral, nenhum deles procura justificar ou explicar porque acha que o gráfico esboçado é o da função módulo de x; e que, portanto, vale $\sqrt[2]{x^2} = |x|$, o que era nosso objetivo, para poder depois discutir e trabalhar a resolução da inequação $x^2 \leq k^2$ (ou $x^2 < k^2$),onde $k \in \mathrm{IR}$.

Questão 11: Esboce o gráfico da função g(x)=|x|. Como você o compara ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$?

Esperávamos que os sujeitos, mesmo os que não tivessem reconhecido o gráfico obtido na questão 10, conseguissem agora refletir sobre o significado da igualdade dos dois gráficos, para concluir que $\sqrt[2]{x^2} = |x|$.

As ***ações esperadas*** eram: construir, no software GRAPHMATICA, o gráfico da função $\mathbf{j(x)} = |\mathbf{x}|$; comparar este gráfico com o da função h da questão 10.

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conversão do registro gráfico para o algébrico; conversão do registro algébrico para o gráfico; localização de pontos sobre o eixo horizontal a partir de informação sobre o gráfico; conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

Nenhum ***professor*** deixou esta questão em branco.

3 ***professores*** afirmam simplesmente que os gráficos são iguais, sem concluir nada sobre as funções.

(1) "Os dois são iguais."

(2) "É o mesmo gráfico."

e faz gráficos separados no protocolo.

(3) "Os gráficos são iguais $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$ tem o mesmo gráfico de g(x)=|x|."

Estes ***professores*** só respondem a pergunta feita e não arriscam nada além, como por exemplo relacionar as duas funções. Isto reflete a falta de hábito de trabalhar aspectos formais, bem como intuitivos e algorítmicos. No caso da comparação das funções, a partir dos gráficos, também mostra a pouca experiência com as conversões, principalmente do registro gráfico para o algébrico.

2 ***professores*** colocam explicitamente que as funções são iguais.

"g(x)=|x| $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$ g(x)=f(x) $|x| = \sqrt[2]{x^2}$. Ex: |-3|=√(-3)^2 3=3 são iguais."

E faz esboço gráfico no protocolo. O fato de ter calculado um valor como exemplo, mostra que ainda trabalha com os aspectos intuitivos e que, na verdade, não sabe fazer as conversões, pois não domina aspectos formais. E não tem a visualização dos gráficos.

O outro professor coloca simplesmente que "g(x)=f(x)" e não podemos concluir nada.

E os outros 2 ***professores*** dão respostas que não permitem que tenhamos certeza se compararam só os gráficos ou se também as funções.

"g(x)=|x| é igual $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$."

E não temos certeza se está comparando as funções ou simplesmente reescrevendo a pergunta de forma afirmativa.

“São "iguais", pois $\sqrt{x^2}$ é a definição algébrica de módulo de x???”

E faz esboço gráfico no protocolo. Parece que ouviu alguém dizer que “$\sqrt{x^2}$ é a definição algébrica de módulo de x”, mas não deixa no protocolo o que foi que aconteceu. Só coloca as interrogações. Talvez nunca tenha tido oportunidade de ver esta definição, porque passou por uma formação bastante baseada nos aspectos intuitivos e algorítmicos da Matemática, sem ter sido estimulada a procurar entender os aspectos formais.

Todos perceberam que os gráficos das funções dadas coincidem, mas nenhum deles justifica formalmente isto. Os que compararam as funções também não explicam ou justificam a igualdade. De qualquer forma, não parecem dominar aspectos formais nem algorítmicos, bem como as conversões entre o registro gráfico e o algébrico.

Questão 12: Qual foi o erro do seu aluno? Justifique.

Com esta questão, queríamos que os sujeitos voltassem à questão 1 e revisassem a resolução lá apresentada, para detectar o erro cometido pelo aluno quando simplesmente “extrai a raiz dos dois lados”. Mesmo no caso de equações, continua válida a igualdade $|x| = \sqrt[2]{x^2}$, o que significa que não se trata simplesmente de aplicar, às inequações, um procedimento válido para equações.

A ***ação esperada*** era: conjecturar sobre o erro cometido pelo aluno fictício (questão 1).

As ***componentes gerais esperadas*** eram: conjectura a partir da observação; justificativa escrita de um fato observado.

1 ***professor*** deixou esta questão em branco. Nossa avaliação, do todo, é que aproveitou muito pouco da discussão e não conseguiu incorporar nenhuma das informações que circularam ao longo da aplicação da seqüência.

Cada um dos outros 6 ***professores*** deu uma razão diferente para o erro do aluno.

(1) "$x^2 \leq 9$ $x \leq \sqrt{9}$ $x \leq \sqrt{3^2}$ $x \leq \sqrt{9}$ $x \leq 3$ O erro é dizer que a raiz quadrada de 9 é -3 também!

Obs.: $1 = \sqrt[6]{(-1)^2} = (-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$?"

mostrando que entendeu que o símbolo $\sqrt{a}$ $(a>0)$ significa "o número real positivo que elevado ao quadrado dá a", mas não que é preciso aplicar este significado também a $\sqrt{x^2}$. Ficou apenas com o aspecto numérico da definição.

(2) "O erro do aluno está no $x \leq \pm 3$."

Não explica o que este erro significa, nem como consertá-lo.

(3) "Foi o aluno extrair a raiz quadrada dos dois lados, a partir daí, perde-se a equivalência das equações. $x^2=9 \not\Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{3}$."

Em primeiro lugar, acreditamos que o ***professor*** queria escrever 9 e não 3 ao final do argumento. Observamos que não percebeu que é preciso tratar $\sqrt{x^2}$ da mesma forma que $\sqrt{9}$, porque deixou que um aspecto numérico se sobrepusesse ao aspecto formal. Com isto, não considerou a possibilidade, completamente válida, de "extrair a raiz quadrada dos dois lados". Novamente aqui, como no caso do princípio multiplicativo das desigualdades, é possível realizar um procedimento sobre a inequação que é o mesmo sobre a equação, basta que façamos as hipóteses necessárias (do tipo "se ... então").

(4) "Utilizar um recurso que funcione bem na resolução de equações, nem sempre satisfaz todas as condições necessárias em uma inequação. É preciso analisar com mais cuidado todas as implicações em determinadas situações."

Não explica nem justifica como corrigir o erro do aluno. Da mesma forma que para o ***professor*** da frase (3), não percebeu que é possível aplicar o mesmo procedimento tanto em equações como em inequações, com alguns cuidados sobre as hipóteses.

(5) "O erro do aluno foi não analisar a resposta encontrada de maneira algébrica e de não ter o hábito de fazer um estudo com o auxílio do gráfico. Lembrando sempre, que o tratamento para inequações deve ser diferente das equações."

e valem as mesmas observações feitas para os ***professores*** das frases (3) e (4).

(6) "$x^2 \leq 9$ $x \leq \pm 3$ (+3 ou -3?) ALGEBRICAMENTE[34]. Se respondesse $x \leq 3$ apenas, seria 'mais correto'!"

e continua aceitando que $\sqrt{a^2} = \pm a$, numericamente, mesmo depois de ter visto os gráficos. Não permitiu que a nova aprendizagem permeasse a antiga. Não

[34] Maiúsculas conforme texto original (observação nossa).

explica como consertar o erro do aluno e ainda faz concessões ao erro do aluno quando afirma que $x \leq 3$ seria "mais correto".

Nenhum deles percebeu que a equivalência entre as funções trabalhadas nas questões 10 e 11 ($\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2}}$ e $g(x) = |\mathbf{x}|$) seria a resposta para uma resolução correta da inequação $\mathbf{x}^2 \leq 9$

Apesar de todos terem, de alguma forma, utilizado os gráficos, o estudo não foi suficiente para provocar a interação e a inter-relação entre os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos presentes no caso da resolução funcional gráfica da inequação dada.

Também nenhum deles deu justificativas e/ou explicações formais para as perguntas feitas.

VII.RETOMADA DAS QUESTÕES DE PESQUISA

No capítulo anterior, apresentamos a análise dos protocolos de 16 ***alunos*** e 7 ***professores***, que foram escolhidos dentro dos dois grupos aos quais aplicamos nossa seqüência didática.

Os ***alunos*** realizaram as atividades 1, 2, 3, 3 (cont.) e 4 e escolhemos aqueles que ou fizeram as cinco atividades; ou só deixaram de fazer a atividade 1; ou só fizeram uma das atividades 3 ou 3 (cont.); e quatro que só deixaram de fazer a atividade 2 (ver no parágrafo IV.1.3, página 72 o perfil deste grupo e no Apêndice B, o levantamento da presença destes alunos às atividades).

Os ***professores*** fizeram as atividades 1, 2, 3, 4 e 5 e escolhemos todos, mesmo os que não fizeram todas as atividades, simplesmente por tratar-se de um grupo de ***professores*** de Matemática em exercício (ver no parágrafo IV.1.3, página 72 o perfil deste grupo e no Apêndice C, o levantamento da presença destes ***professores*** às atividades).

Neste capítulo, vamos retomar nossas três questões de pesquisa para respondê-las a partir da análise que fizemos dos protocolos e à luz de nosso quadro teórico.

Pretendemos também colocar algumas observações de caráter teórico que, esperamos, possam contribuir para uma continuação deste trabalho.

VII.1.PRIMEIRA QUESTÃO

Nossa primeira questão de pesquisa diz respeito à inter-relação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos (FISCHBEIN, 1993), a partir do uso dos registros algébrico, gráfico e da língua natural (DUVAL, 1995, 2000), na resolução funcional gráfica genérica de inequações com uma incógnita real.

A questão colocada foi

Uma seqüência didática envolvendo o tratamento e a conversão de registros pode fornecer aos alunos condições de inter-relacionarem os aspectos

formais, algorítmicos e intuitivos envolvidos na resolução de inequações com uma incógnita real?

Para que um aluno faça a inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos de qualquer assunto em Matemática, é preciso, antes de tudo, que esteja habituado a dar importância a esses aspectos, o que depende muito de como é desenvolvida a Matemática nas salas de aula da Educação Básica. No caso dos sujeitos dos dois grupos pesquisados, tanto alunos como professores, percebemos que a formação anterior não os incentivou a trabalhar os aspectos formais e, ainda mais, deixou passar a impressão de que só os aspectos intuitivos, principalmente os numéricos, são suficientes para a aprendizagem em Matemática.

No caso de nossa pesquisa, então, <u>não</u> conseguimos provocar a inter-relação entre os três aspectos, pelo menos no que se refere à resolução de inequações com uma incógnita real.

Vamos analisar um pouco mais profundamente porquê isto ocorreu, apesar de terem aceitado a abordagem funcional gráfica como possível e viável e de terem percebido que a resolução algébrica que praticam tem problemas.

Não conseguimos fazer surgir os <u>aspectos formais</u>, seja pela abordagem algébrica seja pela funcional gráfica, como podemos perceber pela completa ausência de justificativas formais, em todas as questões analisadas e em todos os protocolos. Isto nos remete, novamente, ao Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2006), pré-estabelecido na Educação Básica e de cuja definição (ver parágrafo , página) extraímos a parte que, no nosso entender, explica o comportamento citado, quando aliado à falta de aspectos formais.

> "Querer aprender implicará então para ele[35] recusar o contrato didático para assumir o problema de forma autônoma. A aprendizagem, então, não vai mais depender do bom funcionamento do contrato, mas de suas *'rupturas e seus ajustes'* ."[36] (BROUSSEAU, 2003, tradução nossa.)

Para provocar uma tal ruptura, o sujeito precisa ter o hábito de praticar todos os aspectos, principalmente os formais, que irão ajudá-lo a superar as dificuldades advindas de uma aprendizagem autônoma, ou seja, que o faça inter-relacionar os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos do assunto em estudo.

---

[35] Aluno (observação nossa).

[36] "Vouloir apprendre, impliquerait alors pour lui de refuser le contrat didactique pour prendre en charge le problème de façon autonome. L'apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses '*ruptures et ses ajustements*'." (BROUSSEAU, 2003.)

Deparamo-nos assim, mais uma vez, com a necessidade de estudarmos o contrato didático pré-estabelecido para que possamos propor eventuais mudanças, que permitam que a Matemática seja apresentada, aos alunos, com todos os aspectos.

O aspecto algorítmico, ligado ao registro gráfico, foi assimilado e executado mais facilmente pelos alunos do que pelos professores. Isto pode ter ocorrido porque alunos de 1º ano do Ensino Superior podem ser considerados praticamente da Educação Básica, onde os procedimentos foram estimulados e incentivados e talvez o medo de errar, embora grande, seja menor.

O aspecto algorítmico, relativo ao tratamento algébrico, não foi modificado, nem entre os professores, nem entre os alunos. Ao final da seqüência, todos ainda estavam agindo intuitivamente sobre as inequações dadas, aplicando procedimentos próprios de equações, mesmo quando o discurso dizia de outra forma.

O aspecto intuitivo lá estava todo o tempo, com um grau maior ou menor de controle, mas como é esperado, pois são os que comandam, quase sempre, nossas primeiras ações.

Com relação à inter-relação entre os aspectos, podemos dizer, então, que estes sujeitos não o conseguiram, nem para a abordagem algébrica nem para a funcional gráfica da resolução de inequações com uma incógnita real.

Analisando mais profundamente a natureza das dificuldades observadas, queremos destacar alguns pontos que nos pareceram muito importantes, com relação aos aspectos formais (ou à ausência deles) e aos aspectos intuitivos (dos quais não podemos fugir): todos os sujeitos de nossa pesquisa, tanto professores como alunos, trazem ***aspectos intuitivos*** que gostaríamos de chamar de ***numéricos*** e não trazem ***aspectos formais*** que vamos denominar ***lógicos***.

O que estamos chamando de ***aspectos intuitivos numéricos*** dizem respeito à necessidade que o indivíduo sente de se referir a alguns valores numéricos específicos para desenvolver o raciocínio ou para verificar se é verdadeiro o que acaba de afirmar ou de prever. Isto pode ocorrer, por exemplo (1) pela determinação das raízes da equação associada à inequação (substituição do sinal de desigualdade pelo de igualdade); (2) pela ênfase no estudo das condições de existência de uma frase algébrica ou do domínio de uma função; (3) pela substituição de alguns valores; ou (4) pela construção compulsória de tabelas de valores (mesmo quando o gráfico está à disposição).

A prática de substituir uma variável ou uma incógnita por alguns valores numéricos, quando iniciamos a resolução de um problema, é perfeitamente ***intuitiva***, entendível e aceitável, assim como quando queremos desenvolver um raciocínio indutivo ou desenvolver uma conjectura. O que consideramos perigoso e mesmo danoso é a aceitação de um resultado teórico com base em alguns casos particulares, como por exemplo, "acreditar" que o gráfico da função definida por $f(x)=x^2$ é simétrico em relação ao eixo vertical só porque $f(1)=1=f(-1)$, $f(2)=4=f(-2)$ e $f(3)=9=f(-3)$, que é o que parece ocorrer quando fazemos uma tabela de valores para esboçar o gráfico.

Partindo da aceitação de que os aspectos intuitivos existem e são coercivos (FISCHBEIN, 1993) nos seres humanos, o professor tem que estar preparado para entender, aceitar e gerenciar a presença desses aspectos, sem impedi-los mas também sem torná-los a última e única palavra.

Acreditamos que isto só será possível se na formação inicial de professores houver uma discussão sobre como gostaríamos que a Matemática fosse apresentada aos alunos. Como ponto de partida para esta discussão, concordamos com e sugerimos o entendimento que dela fazem Courant e Robbins (1996).

> "A Matemática, como uma expressão da mente humana, reflete uma vontade ativa, uma razão contemplativa e uma ânsia pela perfeição estética. Seus elementos básicos são lógica e intuição, análise e construção, generalidade e individualidade. Embora tradições diferentes possam enfatizar aspectos diferentes, é somente a inter-relação dessas forças antagônicas e a luta pelas suas sínteses que constitui a vida, a plena utilização e valor supremo da ciência matemática."[37] (COURANT; ROBBINS, 1996, introdução, tradução nossa).

E como gostaríamos que os estudantes a entendessem.

Com relação aos sujeitos de nossa pesquisa, podemos verificar estes ***aspectos intuitivos numéricos*** várias vezes ao longo da seqüência de atividades,

---

[37] "Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality. Though different traditions may emphasize different aspects, it is only the interplay of these antithetic forces and the struggle for their synthesis that constitute the life, the usefulness and supreme value of mathematical science." (COURANT; ROBBINS, 1978, introdução).

em pelo menos 4 dos 7 ***professores*** e em 4 dos 16 ***alunos***. Reproduzimos a seguir algumas das frases que podem exemplificá-los.

> (1) "Não. Porque dessa maneira só trabalha c/o numerador e apenas um lado do gráfico da função. (x+2).((x-1)/(x+2))=0.(x+2) x=1."
>
> (2) "(1/(x-1))<1 (1/(x-1))(x-1)<1.(x-1) 1<1(x-1) Ao multiplicar a inequação por (x-1), teríamos que observar que x diferente de 1, pois com x=1, chegaríamos a 0<0, impossível!."
>
> (3) "g(x)=|x| $f(x) = \sqrt[2]{x^2}$ g(x)=f(x) $|x| = \sqrt[2]{x^2}$. Ex: $|-3|=\sqrt{(-3)^2}$ 3=3 são iguais."
>
> (4) "$f(x)=\sqrt{x^2}$. Nesta solução eu não lembrei do conjunto imagem, então deixaria de ser função." E faz tabela com x=1,2,2 e y=1,-2,+2. Ao lado, calcula $f(1)=\sqrt{1^2}=\pm 1$ $f(2)=\sqrt{2^2}=\pm 2$ $f(3)=\sqrt{9}=\pm 3$ $f(-1)=\sqrt{(-1)^2}=\pm 1$.
>
> (5) "Não, porque o aluno deveria igualar a zero a inequação e depois multiplicar os dois membros por (x-1). Porque essa inequação tem dois valores que satisfaz x."
>
> (6) "sim. O resultado da equação e inequação foram o mesmo."
>
> (7) "Não, para uma a incognita pode ter o valor de 1 mesmo assim terá um resultado satisfatório, e para a outra não já que a incognita tendo o valor de 1 zeramos a inequação."
>
> (8) "Não. Em (1/(x-1)) o x não pode ser igual a 1, e porque em 1<x-1, o x-1 deve ser maior do que 1 enquanto que na outra (1/(x-1)) deve ser menor do que 1."
>
> (9) "$y<0$ $x^2-1<0$ $x^2<1 \Rightarrow x=\pm 1$ S{x∈IR| x>1 ou x<-1}."

Destacamos como ***aspectos formais lógicos*** os que se relacionam ao entendimento matemático de sentenças lógicas como "se ***p*** então ***q***", "***p*** se e só se ***q***", "***p*** ou ***q***", "***p*** e ***q***", entre outras, que em geral, no dia-a-dia, na língua natural, podem não ter uma conversão congruente, no sentido de Duval (1995, 2000).

Por exemplo, "***p*** ou ***q***", em Matemática, pode significar que "vale a frase ***p***" ou "vale a frase ***q***" ou "valem ***ambas***" e no dia-a-dia não; em geral utilizamos ou quando queremos dizer exclusão.

Um exemplo que já vivenciamos inúmeras vezes: muitos alunos têm dificuldade em decidir se utilizam "***e***" ou "***ou***" ao dar uma resposta em que o conjunto solução tem dois intervalos, porque na língua natural o "***e***" seria suficiente para o entendimento, mas em Matemática queremos que seja o "***ou***", para indicar reunião.

No caso da resolução de equações e inequações, as frases "Resolver ...", "Determinar ..." são usadas para pedir todas as soluções. Isto significa que precisamos, sempre que possível, trabalhar com equações e inequações equivalentes e, quando isto não é possível, ter em mente o que estamos fazendo e o que queremos. Por exemplo, "se $0<a<b$, então $a^2<b^2$", mas não são frases

equivalentes, pois não vale a recíproca "se $a^2<b^2$, então $0<a<b$", o que vale é "$0<|a|<|b| \Leftrightarrow 0<a^2<b^2$". O que não impede que, para resolver algebricamente $\sqrt{x}<2$, façamos: $\sqrt{x}<2 \rightarrow x<4$ e voltemos à inequação inicial $\sqrt{x}<2$ para observar que x não pode ser negativo e concluamos que $0\leq x<4$. O que podemos, mas não devemos fazer é simplesmente responder "$x<4$".

Isto significa que não podemos trabalhar só com os aspectos intuitivos dessa lógica, é preciso entender aspectos formais e algorítmicos também, principalmente se vamos trabalhar com a Matemática na Educação Básica. Neste sentido, voltamos ao que defende Radford (2004)

> "O que quero sugerir é que frases predicadas como P(x)=0 or P(x)≤0, etc. que estão no cerne da resolução de equações ou de desigualdades não deveriam ficar confinadas ao registro escrito, que é formado por uma combinação de signos alfanuméricos. Precisamos de um conceito mais amplo de predicação (e de texto matemático), menos comprometido com a tradição de escrita que Vieta utilizava ao escrever, não muitos anos após a invenção da imprensa. Precisamos também de um conceito melhor de predicação, capaz de integrar em si mesmo a pluralidade de sistemas semióticos que estudantes e professores usam, tais como fala, gestos, gráficos, ações corporais, etc."[38] (RADFORD, 2004, p.1-165, tradução nossa).

E com o que concordamos em parte. No que diz respeito ao entendimento das frases lógicas, não acreditamos que sejam só a fala, os gestos, os gráficos e as ações corporais. É preciso principalmente uma discussão baseada nos aspectos formais e nos aspectos algorítmicos. Com isto não queremos dizer aulas de Lógica, mas uma colocação, com exemplos e contra-exemplos (e talvez usando diagramas de Venn), que tornem a linguagem matemática clara e acessível aos estudantes. E propomos que esta discussão seja desencadeada na formação inicial de professores, para que estes possam decidir como, quando e onde utilizá-la em salas de aula da Educação Básica, para alunos que gostem ou não de Matemática.

Focando esta discussão nos sujeitos de nossa pesquisa, podemos trazer alguns exemplos da falta dos aspectos formais lógicos. Um deles, talvez o mais significativo, seja o relacionado à aplicação do princípio multiplicativo das desigualdades: ***nenhum*** dos pesquisados conseguiu mostrar que entendeu como funciona, na prática, o "se ... então". Alguns o enunciaram, outros só descreveram

[38] "What I want to suggest is that the predicative judgments P(x)=0 or P(x)≤0, etc. that rest at the core of solving an equation or an inequality should not be confined to the written register containing an alphanumeric string of signs. We need an ampler concept of predication (and of mathematical text) less commited to the written tradition in which Vieta was writing not many years after the invention of printing. We also need a better concept of predication capable of integrating into itself the plurality of semiotic systems that students and teachers use, such as speech, gestures, graphs, bodily action, etc." (RADFORD, 2004, p.1-165.)

como aplicá-lo e 4 dos 7 ***professores*** o aplicaram no esquema chamado "varal", que só é válido para inequações em que a expressão algébrica é comparada com o valor 0 (teremos aí mais um exemplo de aspecto intuitivo numérico?).

Reproduzimos algumas das frases que consideramos como exemplos da falta de aspectos formais lógicos.

(1) "$(1/(x-1))<1 \rightarrow 1<x-1 \rightarrow 2>x$ SE $x \neq 1$. Não concordo. Não pode multiplicar a inequação por x-1, porque não é uma igualdade, não podendo ser usada a propriedade de equivalência."

(2) "Não são por que $(1/(x-1))<1$ não é a mesma coisa que $1<x-1$."

(3) "Não porque o item 18 admite 2 respostas." (Observação nossa: 2 respostas porque o conjunto de soluções tem dois intervalos.)

(4) "Para todo $x>1,5$, $2<y<+\infty$."

(5) "$x^2 \leq 9$ $x \leq \pm 3$ (+3 ou -3?) ALGEBRICAMENTE[39]. Se respondesse $x \leq 3$ apenas, seria 'mais correto'!"

(6) "para $-3 \leq x \leq 3$ temos $x^2 \leq 9$."

(7) "$\{x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3\}$."

(8) "É o gráfico da função modular, pois para os valores de $x \geq 0$ elevados ao quadrado, obtem-se $y \geq 0$ e para os valores de $x \leq 0$ elevados ao quadrado também se obtém $y \geq 0$."

E finalizamos a resposta à primeira questão de nossa pesquisa afirmando que ***estes sujeitos não inter-relacionaram os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos não porque a abordagem foi feita com base no tratamento e na conversão de registros, mas porque a maioria deles não domina aspectos formais que chamamos de lógicos e têm, com bastante ênfase, aspectos intuitivos numéricos.***

Gostaríamos de acrescentar ainda que acreditamos na abordagem proposta e que apesar das dificuldades apontadas por nós, que podem ser, no nosso entender, contornáveis com estudos preliminares, valeria a pena investir na sua prática, porque obtivemos alguns retornos de qualidade.

VII.2. SEGUNDA QUESTÃO

Nossa segunda questão de pesquisa está relacionada à utilização de três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, na resolução

---

[39] Maiúsculas conforme o texto original (observação nossa).

funcional gráfica genérica de inequações com uma incógnita real, para promover a necessidade de se trabalhar com inequações equivalentes.

Colocamos a questão na seguinte forma

O tratamento e a conversão de registros (gráfico, algébrico e da língua natural) podem proporcionar aos alunos uma apreensão significativa de que é preciso trabalhar sempre com inequações equivalentes?

Podemos dizer que sim, embora não o tenhamos conseguido com os sujeitos destes dois grupos, apenas obtivemos indícios.

Uma das razões é certamente a que aponta Sackur (2004).

> "Resumidamente, podemos dizer que [...] não há uma correspondência bijetora entre o gráfico e o conjunto de soluções em *x*. Gráficos diferentes podem dar o mesmo conjunto de soluções. [...] Não há um ponto para um *x* mas um infinito número de pontos. A situação parece semelhante à das primitivas. Temos que abandonar informação, o gráfico preciso das funções, para focar somente nas abscissas desses pontos."[40] (SACKUR, 2004, p. 151, tradução nossa.)

porque, para "ver" graficamente se duas inequações são equivalentes, é preciso focar a atenção nas abscissas e não somente nos gráficos, o que quer dizer que estamos diante de uma representação gráfica de uma função (conjunto de pontos) no plano bi-dimensional e precisamos focar numa reta unidimensional. Agrava este quadro se o sujeito não tem bem clara a definição de gráfico e marca a região entre o gráfico e o eixo horizontal como "gráfico da função". Isto ocorreu com 3 ***alunos***, cujos protocolos não foram analisados.

Pudemos perceber que, ao longo das atividades, pelo menos 2 ***professores*** e 4 ***alunos*** descreviam ou marcavam o conjunto de soluções de uma inequação como "o conjunto de pontos", invés de só descrever ou marcar as abscissas.

> "Quando localizamos no gráfico os pontos que têm ordenada menor que zero, estamos também resolvendo a inequação (1/(x-1))<0. Os pontos encontrados satisfazem a inequação."
>
> "y=(1/(x-1))<0? Qualquer valor de x real menor do que 1 terá como resposta um y<0; ou seja qualquer ponto localizado no gráfico terá coordenadas P(x<1; y<0) ou P(x<1; (1/(x-1))<0)."
>
> "É que o 7 e o 8 falam dos mesmos pontos."

---

[40] "Very shortly, we can say that [...] there is not a one to one correspondence between the graph and the set of solutions in *x*. Different graphs can lead to the same set of solutions [...]. There is not one point for one *x* but infinite number of points. The situation looks very similar to the situation of the primitives. One has to abandon information, the precise graph of the functions, to focus only on the abscisses of these points." (SACKUR, 2004, p.151.)

> "São todos os valores de X que estão abaixo dos pontos P e Q, $-3\leq x\leq 3$." (Observação nossa: X, P e Q são pontos sobre o gráfico da parábola.)
>
> "PELO GRÁFICO[41]: $x>1$ ou $x<-1$." (E marca a parábola abaixo do eixo Ox.)

Esta dificuldade parece-nos mais relacionada à falta de prática com os aspectos formais da Matemática em geral, incluindo aí as conversões entre os registros gráfico e algébrico, do que ao fato de termos vários gráficos que dão a mesma resposta, contrariamente ao que afirma Sackur (2004). Se os sujeitos estiverem acostumados ao trabalho com gráficos e funções variados e souberem claramente as definições e o que se espera de frases como "Resolver ...", "Determinar ...", "se ... então", "se e só se" (aspectos formais lógicos), conseguirão superar as dificuldades inerentes ao uso de pelo menos dois sistemas de representação, que certamente darão visões diferentes e complementares do mesmo problema (ver parágrafo IV.1.2, página 69).

Por outro lado, se estamos partindo de um conhecimento prévio que é algébrico, antes é preciso saber que, algebricamente, duas inequações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto de soluções. Apesar de termos colocado um texto, no início da atividade 4, a respeito da equivalência (ver parágrafo V.3.4.1, página 156), podemos dizer que todos têm dificuldade com isto, porque na última atividade de cada grupo todos acabaram apresentando alguma resolução algébrica que só detecta uma parte das soluções, ou por "multiplicar em cruz" ou por "extrair a raiz dos dois lados". E nenhum deles conseguiu perceber que isto ocorria porque não estavam trabalhando com inequações equivalentes.

Graficamente, 4 ***alunos*** (dos 16) e 2 ***professores*** (dos 7) perceberam que duas inequações algébricas não são equivalentes porque os respectivos conjuntos de abscissas eram diferentes. E nenhum ***aluno*** e 2 ***professores*** concluíram a não equivalência pelo fato dos gráficos serem diferentes, sem entrar no mérito do conjunto de soluções.

Algebricamente, sem a utilização do registro gráfico, apenas 1 ***aluno*** e 1 ***professor*** perceberam que as inequações algébricas não são equivalentes porque os conjuntos de soluções são diferentes. E 2 ***alunos*** e 1 ***professor*** explicam a não equivalência pela forma diferente das expressões.

---

[41] Maiúscula conforme o texto original (observação nossa).

Nosso diagnóstico para a falta de melhores respostas à nossa seqüência, no que diz respeito às frases equivalentes, ainda se baseia na *falta* de *aspectos formais lógicos* e no *excesso* de *aspectos intuitivos numéricos* na formação matemática dos sujeitos.

De certa forma, respondendo negativamente às colocações de Sackur (2004), as dificuldades introduzidas, advindas da abordagem funcional gráfica genérica, baseada nos tratamentos e nas conversões associados aos três sistemas de representação utilizados, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, pareceram-nos superáveis, se for feito um trabalho anterior com a importância do trabalho, em Matemática, com os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos.

VII.3. TERCEIRA QUESTÃO

Nossa terceira questão de pesquisa é mais genérica e está relacionada à resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, visando a escolha de abordagens que possam dar, aos alunos da Educação Básica em geral, uma visão mais ampla e mais moderna do assunto.

A questão que nos colocamos foi

A abordagem envolvendo o tratamento e a conversão de registros, no caso da resolução de equações e/ou inequações com uma incógnita real, pode desencadear a discussão global sobre esta resolução?

Para este grupo, podemos dizer que sim.

Pelo discurso escrito, deixaram transparecer que não é possível tratar as inequações como mera extensão das equações e que é preciso dedicar algum tempo à resolução de inequações, no Ensino Médio, onde os ***professores*** afirmam que, em geral, não dedicam tempo nenhum, muito menos com a utilização dos gráficos.

Pelo menos 5 dos 7 ***professores*** e 9 dos 16 ***alunos*** mostraram, ao fim da seqüência, ter aceitado a abordagem funcional gráfica como possível ferramenta para a resolução de inequações, pois a utilizaram na resolução de uma inequação proposta.

Com relação à comparação entre a resolução algébrica e a funcional gráfica, nenhum deles a fez e enumeramos algumas das causas que conseguimos diagnosticar: (1) a completa falta de experiência com o aspecto formal de conceitos e conteúdos matemáticos (característica de todos os sujeitos desta pesquisa); (2) a resolução algébrica arraigada, com defeitos, mas que deve ter dado certo até então (também característica de todos) e que, talvez por isso, não é contestada; (3) o grande impacto que causou o fato da resolução algébrica dar "diferente" da gráfica (1 ***professor*** e 4 ***alunos***).

> "-2x é maior que zero quando x<0! Algebricamente -2x>0 x>0/(-2) x>0 Ao contrário??? Nos casos em que o coeficiente de x é negativo não podemos resolver algebricamente?"
>
> "Não. A resposta encontrada será somente x>1, o que não corresponde a todos os valores que satisfazem a inequação."
>
> "NÃO POIS SE (x+2)((x-1)/(x+2))>0.(x+2) x-1>0 x-1>0 dá 1 INTERVALO ((x-1)/(x+2))>0 dá 2 INTERVALOS[42] pois x-1≠(x-1)/(x+2)."

Vivenciamos também 4 dos 7 ***professores*** expressarem verbalmente a vontade de trabalhar em sala de aula funções e gráficos mais variados, além das tradicionais funções polinomiais de 1º e 2º graus, incluindo funções trigonométricas e exponenciais, com exemplos da Física e da Biologia. Isto ocorrendo, podemos ter aí uma abertura para a discussão mais genérica da resolução de inequações, pois muitos dos esquemas tradicionais, como o "varal", podem deixar de ser aplicáveis.

Entre os exemplos de aplicação que foram citados, estão os problemas de otimização linear, de trajetória de partículas, de geração de bactérias e de radiação.

Com certeza, só este conjunto de cinco atividades não seria suficiente para garantir que os alunos e os professores que participaram desta pesquisa modificassem, pelo menos imediatamente, a abordagem estritamente algébrica, baseada nos procedimentos. Seria preciso uma formação melhor ancorada nos aspectos formais (inclusive os lógicos), nas conversões de registros e que estimulassem, mas não só, os aspectos intuitivos, inclusive os numéricos.

Não pudemos iniciar esta discussão mais ampla, porque não tínhamos o tempo necessário e nem era objetivo nosso, naquele momento.

[42] Maiúsculas conforme o texto original (observação nossa).

VIII. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No capítulo anterior, respondemos nossas questões de pesquisa, as quais nortearam o trabalho que desenvolvemos com os dois grupos de sujeitos, um de alunos de primeiro ano da formação inicial e um de professores em exercício.

Queríamos estimular uma discussão sobre a resolução de inequações com uma incógnita real, com o objetivo de mostrar a possibilidade de desenvolvermos uma abordagem não estritamente algébrica, com a utilização de três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, para promover a inter-relação entre os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos do assunto, na Educação Básica.

Neste capítulo, pretendemos retomar o todo, destacando pontos positivos, pontos negativos, tanto do quadro teórico escolhido como do método de pesquisa e os reflexos que vemos, dos resultados obtidos, na continuação deste trabalho. Colocamos também várias questões, algumas que consideramos respondidas; outras, não respondidas; e questões abertas para pesquisas futuras.

VIII.1. SOBRE A FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Adotamos como hipótese de partida os argumentos de Fischbein (1993) de que, para que haja aprendizagem, é preciso haver interação e inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos existentes num certo conteúdo matemático. Para promover estas interações e inter-relações, no caso da resolução de inequações com uma incógnita real, optamos pela utilização de três sistemas de representação, o algébrico, o gráfico e o da língua natural, com os respectivos tratamentos e conversões, pois imaginamos que, ao “ler” e “interpretar” uma frase algébrica (ficam aqui escondidos os aspectos formais da conversão entre os registros algébrico e da língua natural), um sujeito seria capaz de “ler” e “interpretar” um gráfico, desde que soubesse a definição de gráfico (aspecto formal), associada à visualização global (aspectos formais, intuitivos e algorítmicos). Ainda mais, que a partir do entendimento do que seja uma função, o sujeito “leria” uma inequação como “alguma coisa dependendo de x”<”outra coisa dependendo de x” e daí o sujeito conseguiria fazer a conversão desta frase para o gráfico e vice-versa.

Supusemos, então, que os sujeitos de nossa pesquisa sabiam “ler” e “interpretar” frases algébricas. No entanto, apareceram algumas deficiências, como podemos perceber, a partir de alguns exemplos, que vamos analisar à luz das idéias de Fischbein (1993) e de Duval (1995, 2000).

(1) Todos aceitaram $x \leq \pm 3$ como uma resposta possível e coerente, alguns dando interpretação como ou e outros, como e.

Nossa avaliação é que nenhum dos sujeitos sabe realmente *compor* (ver parágrafo III.1, página 40) os sinais do sistema algébrico e agem sem dominar o que chamamos de aspectos formais lógicos (ver parágrafo VII.1, página 249). Isto quer dizer que o *tratamento* dos registros algébricos era falho; e como acreditamos que existe uma hierarquia natural *compor* → *tratar* → *converter* os sinais de qualquer sistema de representação, todo o processo acabou comprometido.

(2) Pelo menos 3 alunos declararam, nos protocolos, não “entenderem” o significado de $-2x<0$ e serem incapazes de resolvê-la algebricamente.

Estes 3 alunos corroboram explicitamente os achados de Duval (1993, p. 60), quando este destaca a necessidade de trabalhar o sinal (-) como uma unidade simbólica significativa. Acrescentamos ainda que os sujeitos precisam perceber (até mesmo intuitivamente) que este sinal tem, na frase $-2x$, pelo menos duas leituras distintas, o de “’*o oposto de’* 2x” ou “’*o oposto de 2’* vezes x” e que estas leituras são equivalentes, isto é, formas diferentes de representar a mesma coisa e que é possível tratar $-2x$ de um jeito ou de outro, conforme a necessidade do problema. Aqui também detectamos a falta de aspectos formais lógicos.

(3) Antes da discussão de nossa seqüência, 1 professor interpretava uma função definida por $h(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, com $a^2 + b^2 \neq 0$ como afim, porque o denominador o é.

Este professor mostra dificuldades anteriores à utilização de um sistema de representação, não só com a *composição* dos sinais do sistema de representação, mas também com a idéia do que seja uma função afim, do ponto de vista formal, ou seja, uma expressão que designa proporcionalidade direta e não inversa. Citamos aqui uma experiência vivida por nós, junto a este grupo de professores, quando estávamos discutindo quantias diretamente e inversamente proporcionais: todos tiveram dificuldades para aceitar como diretamente proporcionais duas quantias a e b quando $\frac{a}{b} = k < 0$, com k constante e diziam que a e b eram inversamente proporcionais. Este exemplo reflete a falta de aspectos formais e algorítmicos. Aparentemente, o aspecto intuitivo "quando a aumenta, b também aumenta" ficou como idéia de quantias diretamente proporcionais.

(4) Pelo menos 1 professor e 4 alunos consideraram as inequações $\frac{1}{x-1} < 1$ e $1 < x - 1$ não equivalentes porque "as expressões são diferentes", sem interpretar formalmente cada uma delas, ficando apenas na leitura simbólica de cada uma das frases algébricas.

Ao interpretar $\frac{1}{x-1} < 1$ e $1 < x - 1$ como não equivalentes porque as expressões são diferentes, um sujeito deixou de lado o aspecto formal do que seja "resolver uma inequação", que o faria perceber que as inequações não são equivalentes porque os conjuntos de soluções são diferentes. Vemos aqui a falta de aspectos formais e também algorítmicos e não só das regras de tratamento que aparecem na resolução algébrica.

Com a análise destes 4 exemplos, avaliamos que, antes de um trabalho com qualquer sistema de representação típico da Matemática, envolvendo tratamentos e conversões, é preciso estabelecer, com a ajuda da língua natural, *aspectos formais lógicos* ligados ao entendimento da linguagem matemática utilizada em definições e frases do tipo "se *p*, então *q*", "*p* se e só se *q*", "*p* ou *q*", "*p* e *q*", entre outras. Simultaneamente, faz-se necessária uma discussão sobre a devida importância dos *aspectos intuitivos*, principalmente os que chamamos de *numéricos*, para que não continuem sendo os únicos realmente trabalhados em sala de aula.

Se tivéssemos feito isto com os indivíduos dos dois grupos da pesquisa, antes da aplicação de nossa seqüência e até mesmo antes da discussão que fizemos sobre funções (ver parágrafo IV.1.4, página 74), acreditamos que os sujeitos teriam percebido e estabelecido as relações entre a resolução algébrica e a resolução gráfica, não só com respeito ao aspecto algorítmico das conversões, que quase todos conseguiram apreender. A utilização de vários sistemas de representação teria estimulado a interação e a inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos próprios da resolução de inequações com uma incógnita real e vice-versa, porque é preciso entender formalmente os registros para tratá-los e convertê-los e, ao mesmo tempo, é necessário discriminar e utilizar vários sistemas de representação para que os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos do objeto em estudo possam ser inter-relacionados e não se corra o risco de confundir uma representação com o objeto representado.

Como a discriminação e o uso de mais de um sistema de representação não era uma prática matemática usual desses sujeitos, em várias ocasiões, ao longo das atividades, pudemos perceber que confundiam o objeto representado com a representação, corroborando a teoria de Duval (1995, 2000) de que é preciso aprender a usar ... usando vários sistemas de representação.

Tanto os *registros em língua natural*, como os *registros gráficos*, trouxeram conhecimento novo e inesperado para a maioria deles. Destacamos 3 exemplos.

Primeiro exemplo: todos ficavam admirados ao saber que é <u>permitido</u> descrever, em língua natural, um intervalo, um gráfico ou uma função. Vemos <u>novamente</u>, por trás deste comportamento, o Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2006) pré-estabelecido, com uma cláusula que consideramos bastante cruel, de que na aula de Matemática quem não sabe a <u>notação</u>, ou melhor dito neste caso, a representação algébrica, não pode aprender. Ora, a sala de aula é o lugar para <u>aprender a utilizar</u> vários sistemas de representação. Se impedimos os alunos de os utilizarem, estamos nos contradizendo e, ainda mais, desestimulando-os a *romper* as regras do contrato e agir de forma autônoma.

Segundo exemplo: nenhum deles utilizava, em geral, duas coordenadas para designar os pontos do plano cartesiano, apenas quando estavam tratando com coordenadas numéricas de pontos que não estavam sobre os eixos coordenados. Neste caso, ou falavam por exemplo “O ponto 3”, independentemente do ponto estar sobre o eixo horizontal ou vertical, ou colocavam o valor 3 sobre o eixo no sistema cartesiano. Com isto, alguns alunos enxergavam os eixos coordenados como figuras à parte do sistema e não como duas retas também pertencentes a ele e nenhum deles compreendia porque $x=3$ é uma representação de uma reta vertical no plano cartesiano. Avaliamos aí uma dificuldade introduzida pela nossa prática em sala de aula, quando, por razões que não vamos analisar, queremos "ganhar" tempo e utilizamos simplificações.

Terceiro exemplo: nenhum deles identificava o gráfico de uma função f como a curva formada pelos pontos da forma (x, f(x)) (pelo menos 3 alunos e 1 professor olhavam para a região entre o gráfico e o eixo horizontal). Muitas podem ser as razões para esta dificuldade, que persistiu em pelo menos 2 professores e 7 alunos. A falta de hábito de trabalhar com os aspectos formais é uma delas, pois, como já destacamos anteriormente, o gráfico é definido formalmente, sem nenhuma característica que podemos chamar de intuitiva. O Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2006) pré-estabelecido desponta aqui para explicar as falhas no trabalho com os aspectos formais, se admitirmos que o professor utiliza o livro didático e, como é de se esperar, atua a partir de sua própria experiência.

> "O contrato didático é o resultado de uma 'negociação', frequentemente com modalidades implícitas, das relações entre um aluno ou um grupo de alunos, um certo meio e um sistema educativo. Pode-se considerar que as obrigações do professor, diante da sociedade que lhe delega sua legitimidade didática, também são uma parte determinante do 'contrato didático'."[43] (BROUSSEAU, 2003, tradução nossa.)

A par disto, confirmamos que também não haviam inter-relacionado os aspectos intuitivos, formais e algorítmicos presentes na resolução algébrica de inequações com uma incógnita real, como desconfiávamos. Por esta razão, pareciam sempre utilizar o que Linchevski e Sfard (1991) chamaram concepções pseudo-estruturais e que corroboram a idéia de Duval (2000) de que muitos indivíduos confundem a representação com o objeto representado, se não aprenderem a utilizar pelo menos dois sistemas de representação diferentes, com seus tratamentos e conversões.

> "Em qualquer nível, entre muitos estudantes, a inabilidade de converter uma representação de um sistema semiótico em uma representação do mesmo objeto em um outro sistema pode ser observada como se ambas as representações se referissem a dois objetos diferentes. Esta inabilidade está subjacente às dificuldades de transferência de conhecimento e também às dificuldades de transformar afirmações verbais de qualquer problema em dados numéricos ou simbólicos relevantes para obter a resolução matemática."[44] (DUVAL, 2000, p.1-62.)

---

[43] "Le contrat didactique est le résultat d'une 'négociation' souvent implicite des modalités d'établissement des rapports entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif. On peut considérer que les obligations du professeur vis à vis de la société qui lui délègue sa légitimité didactique sont aussi une partie déterminante du 'contrat didactique'." (BROUSSEAU, 2003, acessível desde 25/02/2003 em http://math.unipa.it/~grim/brousseau_textes.htm, acessado por nós em novembro de 2007.)

[44] "At every level, among many students, inability to convert a representation from one semiotic system into a representation of the same object from another system can be observed as if both representations refer to two different objects. This inability underlies the difficulties of transfer of

Estas concepções pseudo-estruturais pareceram bastante resistentes, pois ao final das atividades, ao resolverem algebricamente uma inequação, os sujeitos repetiram os mesmos erros anteriores à nossa discussão. Novamente podemos achar explicação para este comportamento no Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2004, p. 23-32) pré-estabelecido. Dependendo da relação estabelecida entre o professor, o saber e os alunos, na sala de aula, estes percebem que é suficiente dar uma resposta já esperada pelo professor para conseguir a nota que garante sucesso e continuidade, mas que, no nosso entender, pode não representar aprendizagem. Por exemplo, no caso das inequações, o aluno pode **decorar** os **procedimentos** que ele sabe que vão ser cobrados numa avaliação e contenta-se com isto, porque é o suficiente. Ou ainda, quando o professor considera respostas não totalmente corretas como se o fossem, garantindo o sucesso do aluno. Esta atitude, além de não explicitar o que pode e o que deve ser modificado no raciocínio de um sujeito, ainda tem o inconveniente de mistificar a aprendizagem, pois dá a entender que esta foi atingida.

> "Assim pois, quanto mais o professor cede às demandas *(do aluno)* e desvenda o que ele quer (*para o aluno*), quanto mais ele conta precisamente ao aluno *aquilo* que este deve fazer, mais ele se arrisca a perder oportunidades de obter e constatar, objetivamente, a aprendizagem que ele realmente deve visar."[45] (BROUSSEAU, 1986, p. 66, tradução nossa, trechos em cinza são nossos.)

Estas dificuldades, como já relatamos na análise dos protocolos, refletem duas principais características: a falta de hábito de todos estes sujeitos de trabalharem, em Matemática, com os aspectos formais em geral e com os aspectos formais lógicos em particular; e, ao mesmo tempo, o hábito estimulado de utilizarem só os aspectos intuitivos em geral e os aspectos intuitivos numéricos em particular.

Com relação aos aspectos algorítmicos, podemos dizer que também estavam prejudicados, pela razão tão bem descrita por Fischbein (1993)

> "O raciocínio matemático não deve ser reduzido a um sistema de procedimentos de resolução. Os sistemas mais complexos de habilidades mentais permanecem congelados e inativos diante de situações não usuais. O estudante tem que ser capacitado para a justificativa formal dos respectivos procedimentos. Ainda mais, os procedimentos de resolução que não são apoiados por uma justificativa formal, explícita são esquecidos mais cedo ou mais tarde."[46] (FISCHBEIN, 1993, p.232, tradução nossa.)

---

knowledge and also the difficulties to translate verbal statements of any problem into relevant numerical or symbolic data for mathematical solving." (DUVAL, 2000, P.1-62.)

[45] "Ainsi donc, plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève *ce* que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité." (BROUSSEAU, 1986, p. 66.)

[46] "Mathematical reasoning cannot be reduced to a system of solving procedures. The most complex system of mental skills remains frozen and inactive when having to cope with a nonstandard situation.

Estas são, sem dúvida, razões para trabalharmos na direção de mudar a abordagem estritamente algébrica, calcada principalmente nos aspectos algorítmicos e nos intuitivos numéricos, que vem sendo praticada na Educação Básica.

Nossa sugestão é que pesquisemos porque a abordagem que propusemos não funcionou completamente para estes dois grupos. Será que, com um tempo maior e com mais discussões preliminares conseguiremos atingir o objetivo que propusemos inicialmente, de inter-relacionar os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos da resolução algébrica? E desencadear a discussão sobre a resolução de inequações com uma incógnita real?

Para as discussões preliminares, acreditamos que três tópicos precisariam ser analisados: o assunto função, com a visualização dos gráficos incluída; a necessidade de aspectos formais em geral e lógicos em particular, em toda atividade matemática; a dose certa de aspectos intuitivos em geral e numéricos em particular, também em toda a aprendizagem da Matemática.

Sugerimos ainda que procuremos novas abordagens que permitam construir o conhecimento na direção da resolução algébrica de desigualdades que, no nosso entender, é a mais geral e a mais confiável.

VIII.2. SOBRE O MÉTODO DE PESQUISA

Como já descrevemos no início do capítulo I, inspiramos nosso método de pesquisa na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995), principalmente porque gostaríamos que os resultados pudessem ser transpostos para a Educação Básica. No entanto, ao concebermos nossa seqüência didática, para ser aplicada aos dois grupos escolhidos, um de professores e outro de futuros professores de Matemática, percebemos que o assunto não era conhecido destes sujeitos e que, portanto, as atividades tinham que ter um cunho diferente, não diretamente aplicável

The student has to be endowed with the formal justification of the respective procedures. Moreover, solving procedures that are not supported by a formal, explicit justification are forgotten sooner or later." (FISCHBEIN, 1993, p.232.)

em sala de aula da Educação Básica, porque seria trabalhada com indivíduos mais maduros e mais experientes.

Elaboramos toda as atividades de uma só vez e as aplicamos, alternando-as com uma institucionalização. Embora não tenhamos re-elaborado e re-discutido cada atividade com os sujeitos, como talvez seria o ideal numa engenharia, percebemos pelos protocolos que, ao longo da discussão, 7 dos 16 alunos e 4 dos 7 professores conseguiram aceitar a abordagem funcional gráfica (e portanto as funções) como uma ferramenta possível para a resolução de inequações com uma incógnita real. Concluímos também, pela evolução nos textos dos protocolos, que estes 7 alunos e 2 destes professores foram beneficiados pelas institucionalizações intermediárias, o que nos leva a concluir que é uma boa prática e que merece ser testada novamente.

Os outros 9 alunos mostravam dificuldades com a Matemática básica que não conseguimos (e nem pretendíamos) superar e os outros 3 professores, vindos de uma formação muito baseada nos procedimentos algébricos, não se mostraram permeáveis para a mudança, embora tenham declarado que a fariam se tivessem oportunidade para trabalhar o assunto no Ensino Médio.

As oficinas preliminares, sobre o assunto função (ver parágrafo V.1, página 115) e anteriores à aplicação da seqüência, foram proveitosas, principalmente por causa das imagens gráficas: o professor do exemplo (3) do parágrafo anterior, que imaginava que uma função racional, com denominador afim ax+b (com $a^2+b^2 \neq 0$), fosse também afim, descobriu, pelo gráfico, que não era assim.

Estas oficinas, porém, não foram suficientes. Apesar de terem conseguido fazer as conversões necessárias para aplicar a resolução funcional gráfica às inequações apresentadas, nenhum dos sujeitos fez e nem tentou fazer, pelo menos espontaneamente, as conexões que gostaríamos, entre a resolução algébrica e a funcional gráfica. Nossa avaliação, a partir da análise dos protocolos, é de que isto ocorreu pela total inexperiência destes sujeitos de lidar com os aspectos formais da Matemática. Para que isto ocorresse, precisaríamos ter tido uma discussão preliminar muito mais longa, baseada nos aspectos formais lógicos citados no parágrafo VII.1, página 249 e não só baseada no assunto função.

Assim, diríamos que, para aplicar novamente a seqüência didática que elaboramos, precisaríamos fazer, a priori, um diagnóstico dos citados aspectos formais lógicos do grupo escolhido.

Com relação ao método como um todo, sugerimos algumas correções de percurso, que discriminamos a seguir.

Na etapa das análises preliminares, incluiríamos: (1) aspectos históricos das desigualdades, que não aparecem nesta pesquisa porque tivemos dificuldades para encontrar referências ao assunto e acreditamos que seria necessário um contato com centros de documentação e outros pesquisadores, como Bagni (2005); (2) uma discussão preliminar, com o grupo de sujeitos escolhidos (entre professores e alunos da formação inicial) sobre aspectos formais, intuitivos e algorítmicos da Matemática, com aspectos formais lógicos e aspectos intuitivos numéricos em particular; (3) uma análise de livros didáticos do Ensino Superior, para detectar temas contextualizados nos quais a resolução de inequações desempenha um papel importante (como a determinação das condições de existência de uma função, portanto de um modelo).

Na etapa da concepção, elaboração, análise didática, aplicação e observação de uma seqüência de ensino, retomaríamos as mesmas atividades da nossa seqüência, porém investiríamos mais tempo na aplicação e observação, intercalando-as com uma discussão de caráter teórico, didático, de reformulação e de formulação de atividades para a Educação Básica, quiçá com uma aplicação simultânea destas a uma turma de alunos do Ensino Fundamental e a uma do Ensino Médio.

Na etapa da análise de protocolos, analisaríamos eventualmente mais questões dos protocolos e faríamos entrevistas com os sujeitos, para tentar explicitar melhor as escritas. E ainda, se fosse o caso (dependendo da etapa anterior), faríamos uma análise dos dados obtidos com a elaboração, a aplicação e a observação das atividades para a Educação Básica.

Com relação ao uso do ambiente informático e dos softwares Cabri-géomètre II Plus e GRAPHMATICA, continuaríamos, na medida do possível, a utilizá-los, porém isto não seria imprescindível, porque poderíamos ter elaborado as questões com os gráficos já impressos e adaptado a linguagem para este fato. Temos a observar que haveria alguma perda, sim, porque a vivência de um trabalho dinâmico e interativo certamente é enriquecedora e, parece-nos, facilita a discussão com vários sistemas de representação, como o gráfico e o algébrico. Para o gráfico, porque a agilidade dos softwares pode facilitar a discussão sobre a visualização, no sentido de Duval (1999); reforçar a idéia subjacente das variáveis dependente e independente; e ainda eliminar o aspecto intuitivo compulsivo de elaborar tabelas de valores. Para o algébrico, porque é preciso entender a expressão para colocá-la na linha de comando (inclusive as unidades simbólicas significativas (DUVAL, 1999, p. 60)) e a obtenção rápida dos gráficos pode ajudar na discussão das conversões entre os registros gráfico e algébrico.

VIII.3. RESPOSTAS E QUESTÕES PARA PENSAR

Várias perguntas foram se formando, durante a elaboração desta pesquisa. Algumas delas, talvez a maioria, foram sinalizadas ao longo do texto. Tentaremos, neste último parágrafo, colocar todas, reagrupadas de forma mais abrangente e de modo a destacar, à medida do possível, as contribuições que acreditamos ter trazido para o ensino e a aprendizagem de inequações com uma incógnita real.

Antes, porém, queremos tecer algumas considerações sobre a relação que vemos e entendemos entre a nossa pesquisa e as consultadas por nós e apresentadas no capítulo II, página 8, porque certamente guiarão nossas escolhas para as questões futuras.

Em primeiro lugar, ressaltamos que não encontramos, em nenhuma as pesquisas que lemos sobre desigualdades, uma que fosse intervencionista e que reunisse a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995, 2000) e os aspectos de Fischbein (1993) para promover a aprendizagem desse assunto. Bazzini e Tsamir (2003), Tsamir e Bazzini (2002), Tsamir e Bazzini (2001), Tsamir, Almog e Tirosh (1998) apresentam pesquisas diagnósticas feitas com inequações algébricas de primeiro ou segundo graus, à luz dos aspectos de Fischbein. Sackur (2004) realizou uma pesquisa diagnóstica utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o registro gráfico, com funções polinomiais de segundo grau.

Em segundo lugar, também não achamos nenhum artigo em que o objeto de estudo fosse a aprendizagem por meio de uma abordagem *funcional gráfica genérica*, nos moldes a que nos propusemos. *Funcional*, porque cada lado da inequação passa a ser olhado como uma função (como propõem Boero e Bazzini, 2004; Kieran, 2004; Radford, 2004; Sackur, 2004). *Gráfica*, porque é utilizado fortemente o registro gráfico de funções de uma variável real (como propõem Kieran, 2004; Radford, 2004; Boero e Bazzini, 2004; Kieran, 2004). *Genérica*, porque nossa proposta é a de um trabalho com funções mais gerais, entre as quais incluímos as polinomiais, as que envolvem módulo ou raiz e as do tipo racionais (todas as pesquisas encontradas propõem o trabalho envolvendo as funções polinomiais de primeiro ou de segundo graus).

Em terceiro lugar, queremos responder algumas das questões que foram colocadas pelos pesquisadores que participaram do Fórum de Pesquisa 02 do PME, em 2004 e que, de certa forma, também como já dissemos, orientaram a concepção de nossa seqüência didática.

Boero e Bazzini (2004) perguntam se "O estudo do ensino e da aprendizagem das desigualdades pode ser reduzido ao estudo e à aprendizagem das funções?". Dos resultados que obtivemos, podemos dizer que sim, desde que o trabalho com as funções tenha sido feito anteriormente e com uma abordagem como a que propusemos, reunindo vários sistemas de representação, entre eles o gráfico e as visualizações (DUVAL, 1999) deste e de forma a promover a interação dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos.

Kieran (2004) pergunta "Qual a natureza do suporte instrucional capaz de gerar representações mentais que capacitem os estudantes a perceberem as diferenças críticas no tratamento das igualdades e das desigualdades?". A análise dos protocolos evidenciou que o trabalho sobre as equações, da forma como tem sido praticado na Educação Básica, por causa das cláusulas do Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, p. 23-32) vigente, geram dificuldades para o tratamento das desigualdades, as quais não foram superadas pelos nossos sujeitos, apenas com o trabalho que desenvolvemos. Assim, ainda não sabemos dar uma resposta a essa pergunta colocada por Kieran.

Sackur (2004) fez observações, em sala de aula, sobre o uso do registro gráfico e concluiu que essa abordagem nem sempre ajuda. Coloca a pergunta "O que os alunos aprendem quando resolvem desigualdades graficamente? E algebricamente?”. Demos a resposta teórica no parágrafo IV.1.2, página 69. Da análise dos nossos dados, podemos responder que pelo menos 9 alunos (dos 16) e 4 professores (dos 7) perceberam, por meio da resolução gráfica, que tinham problemas com a algébrica, embora não tenham conseguido saneá-los, pela falta de hábito do trabalho com aspectos formais. Com isto, queremos reforçar nossa posição de que o uso do registro gráfico pode trazer dificuldades, sim, mas que serão superáveis e ajudarão no entendimento da resolução algébrica. Precisamos apenas incentivar um trabalho com a Matemática que não seja pautado, quase que exclusivamente, em aspectos intuitivos numéricos e que promova a inter-relação entre os aspectos formais, intuitivos e algorítmicos.

Dreyfus e Hoch (2004) propõem um trabalho que promova o entendimento da estrutura das equações. Utilizamos esta idéia no caso das inequações pelo uso do registro na lingua natural. Nossa análise evidenciou que os sujeitos pesquisados não tinham o hábito de ler e interpretar frases matemáticas, inibidos que eram e estavam pelas cláusulas do contrato didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2006, p. 23-32) vigente. Assim, para que ocorra o entendimento estrutural, é preciso modificar esse contrato.

Com relação às contribuições de nossa pesquisa para o ensino e a aprendizagem da resolução de inequações com uma incógnita real, acreditamos que podemos destacar essencialmente uma, que foi a constatação da falta de aspectos formais e algorítmicos em praticamente todos os sujeitos pesquisados. Isto reflete, no nosso entender, uma formação destituída desses aspectos e que, portanto, precisa ser modificada.

A contribuição de nossa pesquisa para modificar este quadro vem do fato de termos evidenciado, de várias formas, a importância do Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, apud MARIANI, 2004, p. 23-32) vigente no relacionamento do “triângulo” professor, aluno, saber, na Educação Básica. Precisamos, no nosso entender com urgência, desenvolver pesquisas que nos permitam entender melhor as cláusulas desse contrato para, a partir daí, modificá-las. E não só em relação aos processos de ensino e de aprendizagem de inequações, porque os aspectos formais, algorítmicos e intuitivos estão sempre presentes em Matemática.

Neste sentido, encontramos corroboração nas conclusões de Mariani (2006) sobre as generalizações abusivas dos estudantes pesquisados por ela (do primeiro ano do Ensino Superior), com relação ao conceito de função. Os alunos procuraram validações algébricas e numéricas para resultados obtidos graficamente (justificadas por ela com base nas cláusulas do contrato didático pré-estabelecido na Educação Básica) e insistiram na localização de alguns pontos no gráfico, mesmo depois de terem feito interpretações globais (DUVAL, 1999). Como a aprendizagem de função e dos gráficos associados a elas são condições imprescindíveis para o desenvolvimento de uma abordagem funcional gráfica para as inequações, podemos dizer que os resultados obtidos por essa pesquisadora reforçam os nossos. É preciso estimular a utilização, em sala de aula da Educação Básica, de vários sistemas de representação, incluindo o gráfico e o da lingua natural. E pesquisar possíveis mudanças nas cláusulas do contrato didático pré-estabelecido.

Entre as questões que julgamos importantes colocar, a partir dos resultados que obtivemos, estão: “Como o professor de Matemática da Educação Básica tem utilizado o livro didático?”; “A utilização de vários sistemas de representação, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995, 2000), pode ajudar na formação, na interação e na inter-relação dos aspectos formais, algorítmicos e intuitivos de conteúdos de Matemática da Educação Básica?”.

Em particular, “Como trabalhar os aspectos formais lógicos em salas de aula de Matemática da Educação Básica para que façam parte intrínseca da atividade matemática?”; “Como trabalhar os aspectos intuitivos numéricos em salas de aula de Matemática da Educação Básica para que não fiquem coercivos?”.

Com relação a alguns tópicos de Matemática, que surgiram ao longo de nossa pesquisa e que destacamos como problemáticos: (1) o zero, tanto na divisão, como na multiplicação, na igualdade e na radiciação; (2) os números reais, como um conjunto denso, que não é formado só pelos inteiros; (3) as funções, tanto no próprio conceito, como na leitura e na interpretação de gráficos e tabelas (neste assunto, temos alguns resultados, à luz da Teoria da Reificação (SFARD; LINCHEVSKI, 1994), obtidos com o grupo de professores que foram sujeitos desta pesquisa (DE SOUZA; CAMPOS, 2007)).

Assim, acreditamos que seja uma grande fonte de pesquisa para a elaboração de abordagens para a Educação Básica e também para o Ensino Superior, questões como “De que formas trabalhar o zero, na Educação Básica, para que alunos não tenham tantas dificuldades com o entendimento de algumas operações, como $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{a}$, $\sqrt{0}$, $bc = 0$, $\frac{b}{a} = 0$, $0x = 0$, $0x = k$, onde $a,k \in IR^*$; $b,c,x \in IR$?”; “De que formas (e desde que ano) trabalhar os números reais, para que estes números não fiquem apenas nos aspectos intuitivos e também não seja necessário fazer uma construção formal?“; “De que formas (e desde que ano) trabalhar as funções, na Educação Básica, para que se tornem ferramentas efetivas para utilização na resolução de problemas?”; “De que formas (e desde que ano) trabalhar as funções, na Educação Básica, para que alunos não confundam o objeto com uma representação?”; “De que formas (e desde que ano) trabalhar as funções, na Educação Básica, para que as tabelas não sejam coercivas?”; “De que formas (e desde que ano) trabalhar as funções, na Educação Básica, para que os gráficos se tornem representações que contribuem para o entendimento global e genérico do comportamento de uma função?”.

Duval (1993, p. 58), ao estudar dificuldades dos alunos da Educação Básica para a conversão entre os registros algébrico e gráfico de retas, afirma que não é preciso procurar a razão das dificuldades nos conceitos matemáticos, mas sim no desconhecimento das regras de correspondência semiótica entre os dois registros, o gráfico e o algébrico, principalmente no caso da conversão gráfico → algébrico. Esta não deve ser feita ponto a ponto e, por isso, constitui uma das grandes dificuldades de uma abordagem com o uso do registro gráfico. Concordamos com ele no que diz respeito a este último ponto, mas não com o fato da dificuldade não estar no conceito de função. Acreditamos que é preciso trabalhar os aspectos formais do conceito de função e de gráficos em geral, antes dos respectivos tratamentos e conversões, como já destacamos no parágrafo II.1, página 14.

Repetimos perguntas equivalentes para o Ensino Superior, principalmente para os Cursos de Formação de Professores de Matemática, tanto inicial como continuada.

Para o assunto inequações, temos questões que consideramos básicas: (1) “Por que a resolução de inequações com uma incógnita real tem desempenhado um papel tão insignificante na Educação Básica?"; (2) "Por que a abordagem funcional gráfica só aparece como título de algum parágrafo do livro didático de Matemática do Ensino Médio?"; (3) "Por que o "Estudo do sinal da função" não é reconhecido como uma forma equivalente de falar sobre a resolução de inequações com uma incógnita, por alguns professores de Matemática?".

Finalmente, no que diz respeito à continuação de nossa pesquisa, pretendemos desenvolver nossa seqüência com um grupo de alunos da formação inicial, por um método de pesquisa mais próximo de uma engenharia, portanto incluindo as etapas propostas nos dois parágrafos anteriores (VIII.1, página 258 e parágrafo VIII.2, página 264) como correções de percurso e que incluem eventuais correções e re-elaborações das atividades originais. Tudo isto visando a concepção, a elaboração, a aplicação, a observação e a análise de uma seqüência de atividades para a Educação Básica, sobre a resolução de inequações com uma incógnita real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In: ÉCOLE D´ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, IXe, 1997, Houlgate. **Actes de la IXe École d'été de didactique des mathématiques.** Houlgate: ARDM e IUFM de Caen, 1997. P. 101-139.

ARTIGUE, Michèle. Ingeniería didáctica. In: ARTIGUE, Michèle et al. (Ed.). **Ingeniería didáctica en educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.** Colômbia: Universidad de los Andes, 1995. P. 33-59.

ASSUDE, Teresa. Un phénomène d'évolution curriculaire: le cas des inéquations au Collège. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v.22, n.2.3, p. 209-236, 2002.

BAGNI, Giorgio T. Inequalities and equations: history and didactics. In: CERME, 4, 2005, Sant Feliu de Guíxols. **Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Sant Feliu de Guíxols, Espanha: ERME, 2005.

BAZZINI, Luciana; TSAMIR, Pessia. Connections between theory and research findings: the case of inequalities. In: CERME, 3, 2003, Bellaria. **Proceedings of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, grupo temático 6**. Bellaria, Itália: ERME, 2003. 1-3. Acessível em http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/tableofcontents_cerme3.html

BAZZINI, Luciana; TSAMIR, Pessia (Coordenadores). RF02: Algebraic equations and inequalities: issues for research and teaching. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v.I. Bergen: PME, 2004. P. 137-166.

BOERO, Paolo; BAZZINI, Luciana. Inequalities in Mathematics Education: the need for complementary perspectives. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 139-143.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – 5a a 8a séries: 1998.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática – Ensino Médio: 1998.

BROUSSEAU, Guy. Glossário. Disponível em: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_textes.htm desde 25 fev. 2003. Acesso em: 30 nov. 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. Ensino Fundamental. 1a ed., 1a impressão. São Paulo: Editora Ática, 2002a. 296+112 p. (5a série– livro do professor, com manual pedagógico.)

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** Ensino Fundamental. 1a ed., 3a impressão. São Paulo: Editora Ática, 2004. 344 p. (6a série.)

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** Ensino Fundamental. 1ª ed., 1ª impressão. São Paulo: Editora Ática, 2002b. 296+112 p. (7ª série– livro do professor, com manual pedagógico.)

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática.** Ensino Fundamental. 1ª ed., 1ª impressão. São Paulo: Editora Ática, 2002c. 296+112 p. (8ª série– livro do professor, com manual pedagógico.)

DANTE, Luiz Roberto**. Matemática – Contexto & Aplicações**. Ensino Médio. 2ª ed., 5ª impressão. São Paulo: Editora Ática, 2002d. 368 p. (v. 1 – livro do professor.)

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto & Aplicações**. Ensino Médio. 2ª ed., 5ª impressão. São Paulo: Editora Ática, 2002e. 528 p. (v. 2 – livro do professor.)

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática – Contexto & Aplicações**. Ensino Médio. São Paulo: Editora Ática, 1999. 384 p. (v. 3 – livro do professor.)

DA SILVA, Benedito Antonio et al. **Atividades para o Estudo de Funções em Ambiente Computacional**. 1ª. ed. São Paulo: IGLU Editora, 2002a. 122 p.

DA SILVA, Benedito Antonio et al. Uma ruptura do Contrato Didático no estudo de comportamento de funções. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, p. 73-77, abril, 2002b.

DA SILVA, Benedito Antonio et al. Analizing Functions Behaviour in a Computational Environment. In: ICTM, 2nd, 2002, Hersonissos. **2nd International Conference on the Teaching of Mathematics**. Hersonissos, Crete: University of Crete, 2002c.

DE LIMA, Rosana N. **Equações algébricas no Ensino Médio.** Uma jornada por diferentes mundos da Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2007. 358 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DENIS, M. **Image et cognition**. Paris: P. U. F., 1989.

DE SOUZA, Vera Helena Giusti; CAMPOS, Tania Maria Mendonça. Sobre a resolução da inequação $x^2 \leq 25$. In: EBRAPEM, IX, 2005, Faculdade de Educação da USP. **Caderno de Resumos**. São Paulo, SP: FEUSP, 2005. P. 1.40.

DE SOUZA, Vera Helena Giusti; CAMPOS, Tania Maria Mendonça. Uma experiência com funções. In: ENEM, IX, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática.** Belo Horizonte, MG: SBEM, 2007. Disponível em CD-ROM. ISBN 978-85-98092-05-8.

DREYFUS, Tommy; HOCH, Maureen. Equations – a structural approach. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 152-155.

DUVAL, Raymond. Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. **Les sciences de l'Éducation pour l'ère nouvelle**, Caen, 1-3, p. 57-72, 1993.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995. 400 p.

DUVAL, Raymond. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In: PME-NA, 21, 1999, Cuernavaca. **Proceedings of the 21st Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Cuernavaca, Mexico: PME-NA, 1999. P. 3-26.

DUVAL, R. Basic issues for research in Mathematics Education. In: PME, 24, 2000, Hiroshima, Japan (Plenary address). **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Hiroshima: Hiroshima University, 2000. P. 55-69.

DUVAL, Raymond. Comment décrire at analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. In: JOURNÉE EN HOMMAGE À RÉGINE DOUADY, 2002, Paris 7. **Actes de la Journée en Hommage à Régine Douady.** Paris: IREM, 2002. P. 83-105.

FISCHBEIN, Efraim. The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: BIEHLER, R. et al. (Org.). **Didactics of mathematics as a scientific discipline**. Dordrecht, Holanda: Kluwer, 1993. P. 231-240.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **Matemática fundamental**. Ensino Médio. São Paulo: Editora FTD, 1994. 560 p. (v. único.)

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**. Ensino Médio. 9ª ed. revisada. São Paulo: Atual Editora Ltda., 1981. 328 p. (1ª série.)

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**. Ensino Médio. 7ª ed. revisada. São Paulo: Atual Editora Ltda., 1980a. 356 p. (2ª série.)

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**. Ensino Médio. 7ª ed. revisada. São Paulo: Atual Editora Ltda., 1980b. 294 p. (3ª série.)

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para todos**. Ensino Fundamental. 2ª edição, 1ª impressão. São Paulo: Editora Scipione, 2002a. 440 p. (5ª série – livro do professor, com assessoria pedagógica.)

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para todos**. Ensino Fundamental. 1ª edição, 1ª impressão. São Paulo: Editora Scipione, 2002b. 480 p. (6ª série – livro do professor, com assessoria pedagógica.)

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para todos**. Ensino Fundamental. 2ª edição, 1ª impressão. São Paulo: Editora Scipione, 2002c. 480 p. (7ª série – livro do professor, com assessoria pedagógica.)

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática para todos**. Ensino Fundamental. 2ª edição, 1ª impressão. São Paulo: Editora Scipione, 2002d. 504 p. (8ª série – livro do professor, com assessoria pedagógica.)

KIERAN, Carolyn. The equation/inequality connection in constructing meaning for inequality situations. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 143-147.

KIERAN, Carolyn. Functions, Graphing, and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction. In: ROMBERG, Thomas A. et al. (Eds.). **Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.** Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1993. P. 189-237.

KLINE, Morris. **Why Jonnhy can´t add:** The failure of the new Mathematics. New York: St. Martin's Press, 1973.

LIMA, Élon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática, v. 1. 7ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. 238 p.

LINCHEVSKI, L.; SFARD, A. Rules without reasons as processes without objects–The case of equations and inequalities. In: PME, 15, 1991, Assisi. **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v.2. Assisi, Itália: PME, 1991. P. 317-324.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Conjuntos numéricos e funções**. Coleção MATEMÁTICA – Temas e Metas, v. 1. Ensino Médio. São Paulo: ATUAL Editora Ltda., 1986. 248 p.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Funções e Derivadas**. Coleção MATEMÁTICA – Temas e Metas, v. 6. Ensino Médio. São Paulo: ATUAL Editora Ltda., 1988. 198 p.

MARIANI, Rita de Cássia Pistóia. **Transição da Educação Básica para o Ensino Superior**: a coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo. São Paulo: PUC/SP, 2006. 220 p. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

PIAGET, J. **La formation du symbole chez l'enfant**. Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1968.

PIAGET, J. **Les Mécanismes Perceptifs**: Modèles probabilistes. Analyse génétique. Relations avec l'itelligence. Paris: Presses Universitaires de France, 1961. 458 p.

RADFORD, Luis. Syntax and meaning. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 161-166.

SACKUR, C. Problems related to the use of graphs in solving inequalities. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th** Conference **of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 148-152.

SCHOENFELD, A. H. On having and using geometric knowledge. In: HIEBERT, James (Ed.), **Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics.** New York: Lawrence Erlbaum Associates, 1986. P. 225-264.

SFARD, Anna; LINCHEVSKI, Lina. The gains and pitfalls of reifying–the case of Algebra. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands, v. 26, n. 2-3, p. 191-228, março 1994.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, 77. p. 20-26. 1976.

TALL, David. Reflections on research and teaching of equations and inequalities. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 1. Bergen: PME, 2004. p.158-161.

TSAMIR, Pessia; BAZZINI, Luciana. Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian and Israeli students. In: PME, 25, 2001, Utrecht. **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 4. Utrecht, The Netherlands: PME, 2001. P. 303-310.

TSAMIR, Pessia; ALMOG, N.; TIROSH, Dina. Students' solutions of inequalities. In: PME, 22, 1998, Stellenbosch. **Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 4. Stellenbosch, South Africa: PME, 1998. P. 129-136.

TSAMIR, Pessia; BAZZINI, Luciana. Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. In: ICTM, 2, 2002, Crete. **Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics**. Crete, Greece: ICTM 2, 2002.

TSAMIR, Pessia; TIROSH, Dina; TIANO, Sarit. "New errors" and "old errors": the case of quadratic inequalities. In: PME, 28, 2004, Bergen. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** v. 1. Bergen: PME, 2004. P. 155-158.

APÊNDICE A – PERFIL DOS ALUNOS

	Idade	Natural de	EF(1)	EM(2)	Livro Did(3)	Comp(4)	Cursinho(5)
1							
2	24	S. Paulo-SP	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0
3	23	S. Paulo-SP	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0
4	45	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0
5	21	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0
6							
7	45	Assaí-PR	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
8							
9	18	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0
10	33	Imaculada-PB	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
11	22	Maceió-AL	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
12							
13	20	Cantagalo-RJ	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0
14	22	Surubim-PE	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
15	20	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0
16	18	S. Paulo-SP	0,5	0,0	1,0	0,0	1,0
17	23	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
18	26	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	0,0
19							
20	20	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
21	32	S. Paulo-SP	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0
22							
23	23	S. Paulo-SP	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0
24							
25	22	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0
26							
27	21	S. Paulo-SP	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0
28	22	S. Paulo-SP	0,0	1,0	1,0	0,0	1,0
29							
30							
T	**25,0**		**17,5**	**17,0**	**9,0**	**0,0**	**17,0**

Obs.:**(1)** EF quer dizer Ensino Fundamental. 1,0 significa que fez escola pública; 0,5, pública e depois particular; 0,0, particular; **(2)** EM quer dizer Ensino Médio. 1,0 significa que fez escola pública; 0,0, particular; **(3)** 1,0 significa que usou livro didático; 0,5, só de 5a a 8a; 0,0, não usou livro didático; **(4)** 1,0 significa que usou computador; 0,0, não usou; **(5)** 1,0 significa que fez cursinho; 0,0, não.

APÊNDICE B – PRESENÇA DOS ALUNOS NAS ATIVIDADES

ALUNOS	ATIVIDADES					
	Atividade1	Atividade2	Atividade3	Atividade3cont.	Atividade4	CONSIDERAR?
1	sim	sim	sim	sim	sim	sim
2	sim	sim	sim	sim	sim	sim
3	sim	sim	sim	sim	sim	sim
4	sim	sim	sim	sim	sim	sim
5	sim	sim	sim	sim	não	não
6	sim	sim	sim	sim	não	não
7	sim	sim	sim	não	sim	sim
8	não	não	sim	não	sim	não
9	sim	sim	sim	sim	sim	sim
10	não	sim	sim	sim	não	não
11	sim	sim	sim	sim	não	não
12	sim	sim	sim	não	não	não
13	sim	sim	sim	sim	sim	sim
14	sim	sim	sim	sim	sim	sim
15	sim	sim	sim	sim	sim	sim
16	sim	não	sim	sim	sim	sim
17	sim	não	sim	sim	sim	sim
18	não	sim	não	sim	sim	sim
19	não	não	sim	sim	sim	sim
20	sim	não	sim	sim	sim	sim
21	sim	sim	sim	não	não	não
22	sim	sim	sim	sim	não	não
23	não	sim	sim	não	não	não
24	sim	sim	sim	sim	sim	sim
25	sim	sim	sim	não	sim	sim
26	não	sim	não	não	sim	não
27	não	não	sim	sim	não	não
28	não	não	sim	não	não	não
29	sim	não	não	não	sim	não
30	não	não	não	não	sim	não

APÊNDICE C – PRESENÇA DOS PROFESSORES NAS ATIVIDADES

		ATIVIDADES					
		Atividade1	Atividade2	Atividade3	Atividade4	Atividade5	CONSIDERAR?
PROFESSORES	1	sim	sim	sim	sim	sim	sim
	2	sim	sim	sim	não	sim	sim
	3	sim	sim	sim	não	não	não
	4	sim	sim	sim	não	sim	sim
	5	sim	sim	sim	sim	sim	sim
	6	sim	sim	sim	sim	sim	sim
	7	sim	sim	sim	sim	sim	sim
	8	não	sim	sim	sim	sim	sim
	9	sim	sim	sim	não	não	não
	10	não	sim	sim	não	não	não

ANEXO A – PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

1. O QUE DIZEM OS PARÂMETROS CURRICULARES DO EF

OBJETIVOS GERAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Utilizar as diferentes linguagens — verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal — como meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação.

Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos.

Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

A atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

1º e 2º ciclos

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. *Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas*. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

Ou seja, para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente.

O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. *Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações*.

Com relação à estatística, a finalidade é fazer com que o aluno venha a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia.

3º e 4º ciclos

O RECURSO ÀS TECNOLOGIAS DA COMUNICAÇÃO

Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas.

Uso como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções.

Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do teorema de Pitágoras, mediante figuras que permitem ver a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos.

Outro aspecto a ser considerado é o fato de que hoje a computação gráfica é um recurso bastante estimulador para compreensão e análise do comportamento de gráficos de funções como as alterações que estes sofrem quando ocorrem mudanças nos parâmetros de suas equações. Assim, a visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. Também a atual tecnologia de produção de vídeos educativos permite que conceitos, figuras, relações, gráficos sejam apresentados de forma atrativa e dinâmica.

Dessa forma, pode-se considerar que os conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes.

Os procedimentos não devem ser encarados apenas como aproximação metodológica para aquisição de um dado conceito, mas como conteúdos que possibilitem o desenvolvimento de capacidades relacionadas com o saber fazer, aplicáveis a distintas situações. Esse saber fazer implica construir as estratégias e os procedimentos, compreendendo os conceitos e processos neles envolvidos. Nesse sentido, os procedimentos não são esquecidos tão facilmente.

Exemplos de procedimentos: resolução de uma equação, traçar a mediatriz de um segmento com régua e compasso, cálculo de porcentagens. No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. *Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo.*

Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da Álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. *Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. Esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.*

Quanto ao bloco Tratamento da Informação, se nos ciclos anteriores os alunos começaram a explorar idéias básicas de estatística aprendendo a coletar e organizar dados em tabelas e gráficos, a estabelecer relações entre acontecimentos, a fazer algumas previsões, a observar a freqüência de ocorrência de um acontecimento, neste ciclo é importante fazer com que ampliem essas noções, aprendendo também a formular questões pertinentes para um conjunto de informações, a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas.

No terceiro ciclo é importante que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processo de resolução de situações-problema e compará-los. Ao desenvolver a capacidade de buscar soluções favorece a que o aluno passe a reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis. A argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la.... Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

PRINCÍPIOS NORTEADORES

A atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.

O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa.

O ensino-aprendizagem de Matemática tem como ponto de partida a resolução de problemas.

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos.

Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

OBJETIVOS DE MATEMÁTICA PARA O TERCEIRO CICLO

Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

* reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;

* *traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;*

* utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico.

CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas.

Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.

Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.

OBJETIVOS DE MATEMÁTICA PARA O QUARTO CICLO

Do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

* *produzir e interpretar diferentes escritas algébricas de expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;*

* *resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;*

* *observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.*

DO CONTEÚDO

O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a pré-álgebra, desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). *Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação.*

A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais (os contra-exemplos). O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática). Essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano.

CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

Tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.

Construção de procedimentos para calcular o valor numérico e efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas.

Obtenção de expressões equivalentes a uma expressão algébrica por meio de fatorações e simplificações.

Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta.

ERROS

Interpretar sentenças do tipo $x = -y$, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo).

ÁLGEBRA

Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica.

Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra.

O quadro a seguir sintetiza de forma bastante simplificada as diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras.

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. ***Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos***. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação.

No quarto ciclo pode-se construir uma série de retângulos semelhantes (como a medida da base igual ao dobro da medida da altura) e analisar a variação da área em função da variação da medida da base, determinando a sentença algébrica que relaciona essas medidas e expressando-a por meio de um gráfico cartesiano.

Convém também destacar a importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos e para mostrar a variedade de relações possíveis entre duas variáveis. Quando uma variável aumenta, a outra pode permanecer constante, aumentar ou diminuir na mesma razão da primeira, crescer ou decrescer mas não exatamente na mesma razão, aumentar ou diminuir muito mais acentuadamente, aproximar-se mais e mais de um determinado valor, aumentar e diminuir alternadamente, aumentar ou diminuir em etapas, formando platôs.

Existem alguns softwares interessantes que podem ser integrados às atividades algébricas, como os que utilizam planilhas e gráficos. Hoje em dia, com o uso cada vez mais comum das planilhas eletrônicas que calculam automaticamente a partir de fórmulas, a necessidade de escrever algebricamente uma seqüência de cálculos é maior que tempos atrás.

Ao longo desses ciclos é importante que os alunos percebam que as equações, sistemas e inequações facilitam muito as resoluções de problemas difíceis do ponto de vista aritmético. Nesse caso, a letra assume o papel de incógnita e eventualmente de parâmetro. Nesse documento, recomenda-se que o estudo das técnicas convencionais para resolver equações seja desenvolvido apenas no quarto ciclo, pois em caso contrário os conteúdos do terceiro ciclo ficarão mais extensos, dificultando o trabalho com os demais blocos. Entretanto, é possível que nesse ciclo os alunos traduzam algumas situações-problema por equações. Nesses casos, é desejável que eles desenvolvam estratégias próprias para resolvê-las.

Convém também salientar que a visualização de expressões algébricas, por meio do cálculos de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas.

O PROFESSOR E O SABER MATEMÁTICO

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

CONEXÕES ENTRE OS CONTEÚDOS

Essa organização linear e bastante rígida dos conteúdos, que vem sendo mantida tradicionalmente na organização do ensino de Matemática, é um dos grandes obstáculos que impedem os professores de mudar sua prática pedagógica numa direção em que se privilegie o recurso à resolução de problemas e a participação ativa do aluno.

Exemplo 2 . Variação de grandezas: medidas

Alguns dos possíveis contextos das situações-problema

- índices relacionados a saúde (taxas de mortalidade, doenças endêmicas etc.): interpretação, cálculos, *gráficos*;
- índices relacionados ao trabalho (taxas de desemprego, salários); interpretação, cálculos, *gráficos*;
- produção agrícola (produção de grãos, exportação, importação, custo, lucro, impostos): unidades de medidas, *gráficos* e cálculos;
- construção de uma horta (planejamento de canteiros, obtenção das medidas de um canteiro retangular de maior área entre vários de mesmo perímetro): cálculos, *gráficos*;
- *energia elétrica: unidades, cálculo do custo em função do consumo*;
- velocidade em estradas, velocidade máxima, consumo de combustível: unidades, cálculos (tempos, distâncias).

2. O QUE DIZEM OS PARÂMETROS CURRICULARES DO EM

Num mundo como o atual, de tão rápidas transformações e de tão difíceis contradições, estar formado para a vida significa mais do que reproduzir dados, denominar classificações ou identificar símbolos. Significa:

- saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir;
- enfrentar problemas de diferentes naturezas;
- participar socialmente, de forma prática e solidária;
- ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e,
- especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado.

Uma formação com tal ambição exige métodos de aprendizado compatíveis, ou seja, condições efetivas para que os alunos possam:

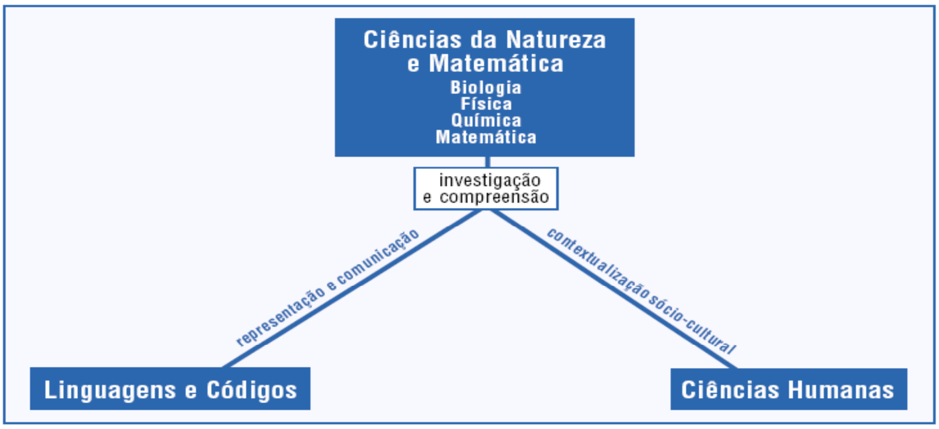
- comunicar-se e argumentar;
- defrontar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los;
- participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos;
- fazer escolhas e proposições;
- tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender.

A ARTICULAÇÃO ENTRE AS ÁREAS

3. Na Matemática e nas Ciências, é rotineiro o uso da língua, em textos regulares, combinada com gráficos cartesianos e outras formas de representação, assim como códigos matemáticos e científicos se combinam às palavras do vernáculo, nos textos de economia. Nos teclados dos computadores, como o que está sendo utilizado para redigir este texto, pode-se digitar o símbolo de porcentagem, “%”, os sinais de maior, “>“, de menor, “<“, ou de mais, “+”, respectivamente nas mesmas teclas acionadas para se escrever o número cinco, “5”, o ponto “.”, a vírgula “,” e a igualdade “=“. A Matemática, com seu ostensivo caráter de linguagem que se soma a seu caráter científico, facilita essa integração com as demais linguagens.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS NO APRENDIZADO DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA E DA MATEMÁTICA

Uma possível síntese dessas competências é a do quadro abaixo.



Representação e comunicação
Símbolos, códigos e nomenclaturas Reconhecer e utilizar adequadamente na forma oral e escrita símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.
Articulação dos símbolos e códigos Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.
Análise e interpretação de textos e outras comunicações Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculados por diferentes meios.
Elaboração de comunicações Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.
Discussão e argumentação de temas de interesse Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.

INSTRUMENTOS DE INVESTIGAÇÃO UTILIZADOS EM COMUM PELAS VÁRIAS CIÊNCIAS

Mesmo no interior de uma mesma disciplina, como a Matemática, as igualdades e variações podem ter muitos significados, relativamente distintos. Equações algébricas, apresentadas abstratamente em matemática como, por exemplo, $y=3x-2$ ou $y=x^2$, expressam, a um só tempo, a possibilidade de variações nas funções de ambos os lados de cada equação e a igualdade ou equivalência entre ambos estes lados que contêm elementos com significados efetivamente distintos. A primeira das expressões poderia representar a conversão de uma moeda em outra, numa casa de câmbio, onde 3 seria a taxa de câmbio do dia, e 2, a tarifa fixa cobrada pela operação. A outra igualdade poderia estar representando a área de uma sala quadrada de lado x. Em um caso como no outro as convenções, unidades e códigos precisam ser claramente explicitados. Numa outra situação, se quiséssemos investigar a igualdade numérica entre as duas expressões, ela poderia ter uma interpretação geométrica, ou seja, os valores de x que a satisfazem são os cruzamentos da reta, representada pelo termo 3x-2, com a parábola representada pelo quadrado de x. A mesma expressão, no entanto, pode estar simplesmente apresentando uma “equação de segundo grau”, $x^2-3x+2=0$, cujas soluções, ou raízes, seriam 1 e 2, ou seja, $x^2 -3x+ 2 = (x-1)(x-2)$. O quadro seguinte procura sintetizar esse conjunto.

Investigação e compreensão
Estratégias para enfrentamento de situações-problema Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.
Interações, relações e funções; invariantes e transformações Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações; identificar regularidades, invariantes e transformações.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.
Modelos explicativos e representativos Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos explicativos para fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.
Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas de conhecimento.

Contextualização sócio-cultural
Ciência e tecnologia na história Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.
Ciência e tecnologia na cultura contemporânea Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.
Ciência e tecnologia na atualidade Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.
Ciência e tecnologia, ética e cidadania Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esses conhecimentos no exercício da cidadania.

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.

Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

AS COMPETÊNCIAS EM MATEMÁTICA

Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento.

Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências.

Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

TEMAS ESTRUTURADORES DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio.

1. *Álgebra: números e funções*

2. Geometria e medidas

3. Análise de dados

Tema 1. Álgebra: números e funções

Os procedimentos básicos desse tema se referem a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Esse tema possui fortemente o caráter de linguagem com seus códigos (números e letras) e regras (as propriedades das operações), formando os termos desta linguagem que são as expressões que, por sua vez, compõem as igualdades e desigualdades.

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

UNIDADES TEMÁTICAS

1. *Variação de grandezas: noção de função; funções analíticas e não-analíticas; representação e análise gráfica*; seqüências numéricas: progressões e noção de infinito; variações exponenciais ou logarítmicas; funções seno, cosseno e tangente; taxa de variação de grandezas.

• Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica nas ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e fazendo conexões dentro e fora da Matemática.

• Compreender o conceito de função, associando-o a exemplos da vida cotidiana.

• *Associar diferentes funções a seus gráficos correspondentes.*

• Ler e interpretar diferentes linguagens e representações envolvendo variações de grandezas.

• Identificar regularidades em expressões matemáticas e estabelecer relações entre variáveis.

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO ESCOLAR

1ª série	2ª série	3ª série
1. Noção de função; funções analíticas e não-analíticas; análise gráfica; seqüências numéricas; função exponencial ou logarítmica. 1. Trigonometria do triângulo retângulo.	1. Funções seno, cosseno e tangente. 1. Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta.	1. Taxas de variação de grandezas.
2. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.	2. Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. 2. Métrica: áreas e volumes; estimativas.	2. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
3. Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	3. Estatística: análise de dados. 3. Contagem.	3. Probabilidade.

ESTRATÉGIAS PARA A AÇÃO

Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o trabalho em grupo. Outro aspecto que se deve enfatizar é a importância da comunicação em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão. Outro elemento importante da comunicação é a multiplicidade de formas textuais a que os alunos devem ser expostos. Gráficos, tabelas, esquemas, desenhos, fórmulas, textos jornalísticos, manuais técnicos, rótulos de embalagens, mapas são, na escola e fora dela, as diferentes linguagens e representações que o aluno deve compreender para argumentar e se posicionar frente a novas informações.