

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA E SUA CONSISTÊNCIA

Dissertação apresentada como exigência parcial
para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

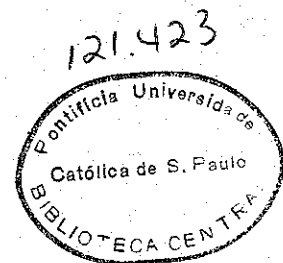
à Comissão Julgadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
por

ESTHER WAJSKOP TERDIMAN

28cm
202 f
il

TOMCAR
EX 2

SÃO PAULO
1989



"Deus algumas vezes geometriza"

PLATÃO.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao eminente Professor Doutor Bene
dito Castrucci, pela orientação
segura, paciência e dedicação que
me conduziram para os resultados
obtidos.

À Professora Doutora Érika Brigit
ta Ledergerber pelo incentivo, co
laboração e sugestão do tema.

A todos que colaboraram para a
execução deste trabalho.

A Autora

Ao meu marido TALLY e às mi-
nhas filhas THAIS e CLAUDIA, pela
compreensão e estímulo.

Comissão Julgadora

R E S U M O

Esther Wajskop Terdiman

Históricamente, sabemos que as tentativas infrutíferas da demonstração do Postulado das Paralelas de Euclides levaram à conclusão da independência desse axioma.

O trabalho de Saccheri, nesse sentido, partindo da demonstração por absurdo da famosa proposição, resultou no aparecimento dos primeiros teoremas básicos da Geometria não-Euclidiana.

O nosso propósito é fazer uma exposição axiomática da Geometria Hiperbólica, com a demonstração de todos os teoremas necessários a esse estudo.

A seguir, verificamos a consistência do sistema axiomático relativamente a um plano Euclidiano, utilizando para isso a

inversão em relação à circunferência, bem como introduzindo os conceitos de razão dupla, quádruplas harmônicas e perspectividade, para justificar a construção das paralelas-limite de Janos Bolyai.

A consistência está apresentada por meio do primeiro modelo de Poincaré, de maneira completa, e pelo de Klein e um segundo de Poincaré, por isomorfismo.

Í N D I C E

CAPÍTULO I. INTRODUÇÃO HISTÓRICA.....	9
1. As origens da Geometria.....	9
2. O sistema axiomático modificado de Hilbert.....	13
3. Tentativas de demonstração do postulado das paralelas.....	24
CAPÍTULO II. GEOMETRIA HIPERBÓLICA.....	43
1. Teorema Hiperbólico fundamental.....	43
2. Inexistência de triângulos semelhantes.....	54
3. Paralelas que admitem uma perpendicular comum.....	58
4. Semi-retas paralelas-limite.....	68
5. Classificação das paralelas.....	78
CAPÍTULO III. CONSISTÊNCIA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA.....	99
1. Primeiro modelo de Poincaré.....	100
2. Verificação dos axiomas.....	102
3. Ângulos de paralelismo.....	147
4. Modelo de Betrami-Klein.....	153
5. Isomorfismo entre os modelos de Klein e Poincaré.....	164
6. Congruência no modelo de Klein.....	173
7. Reflexão no modelo de Klein.....	176
8. Cálculo do comprimento de um segmento no modelo de Klein.....	192
9. Segundo modelo de Poincaré.....	199
BIBLIOGRAFIA.....	203

C A P Í T U L O I

I N T R O D U Ç Ã O H I S T Ó R I C A

1. AS ORIGENS DA GEOMETRIA

A palavra geometria, do grego "Geometrein" (geo = terra e metrein = medida), foi, originalmente, a ciência da medição de terra.

O historiador Heródoto (sec. V AC) credits aos egípcios a origem da geometria, mas outras civilizações antigas, como os Babilônios, Hindus e Chineses possuíam informações geométricas; mas o raciocínio dedutivo, começado por Tales de Mileto, que desenvolveu a primeira geometria com demonstração, foi característico dos matemáticos gregos.

Tales começou a sistematização desenvolvida depois por Pitágoras e seus discípulos.

Hipócrates, no seu "Elementos", estabelece, por volta do ano 400 AC, a base sistemática da Geometria Plana.

Sua obra se perdeu, mas cobria boa parte dos "Elementos" de Euclides, que apareceu quase um século depois.

Eudoxo, o verdadeiro autor do axioma conhecido como de Arquimedes, reconhecido pelo próprio Arquimedes, desenvolve a teoria das proporções, que também era válida para medidas irracionais e que foi incorporada ao "Elementos" de Euclides.

A obra de Euclides tomou completamente o lugar das tentativas anteriores dos trabalhos geométricos.

Sua obra dominou o ensino desse assunto por mais de 2.000 anos.

O método axiomático, usado por Euclides, é o protótipo do que chamamos "matemática pura": somente o raciocínio nas demonstrações tem que ser conferido.

Quando se fala em Geometria, pensa-se imediatamente na Geometria Aplicada, na geometria usada na engenharia, naquela que nossos sentidos mais imediatos se acostumaram, na Geometria chamada Euclidiana.

Nosso propósito é mostrar outra geometria, onde aparece um estranho mundo novo e que é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana.

POSTULADOS DE EUCLIDES

Postule-se

P_1 . Traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer.

P_2 . Prolongar uma reta finita continuamente numa reta.

P_3 . Descrever um círculo com qualquer centro e raio.

P_4 . Todos os ângulos retos são iguais.

Esses 4 postulados sempre foram prontamente aceitos pelos matemáticos, mas o 5º foi muito questionado, até o século XIX.

Vamos apresentá-lo como Playfair o formulou em 1795 e, anteriormente, Proclus (410-485 DC).

Essa forma é equivalente à de Euclides, como veremos.

DEFINIÇÃO. Duas retas l e m , do mesmo plano, são paralelas, se elas não se cortam, isto é, se não existem pontos em comum.

Observação. A definição não diz que as retas são equidistantes, isto é, não diz que a distância entre as duas retas é sempre a mesma.

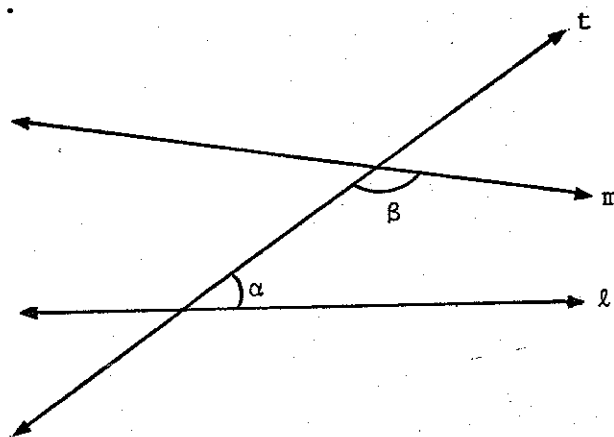
P_5 .

1) *Por Playfair*

Para toda reta ℓ e todo ponto P que não está em ℓ ($P \notin \ell$), a paralela m , por P , a ℓ , é única, no plano de P e ℓ .

2) *Por Euclides*

Se a soma dos ângulos colaterais internos a ℓ e m em relação a uma 3.^a reta t (que intercepta ℓ e m em pontos distintos), for menor que 180° , então ℓ e m não são paralelas e se encontrarão no mesmo semi-plano em relação a t , onde se acham os ângulos.



O próprio Euclides reconheceu a natureza questionável do 5.^o postulado, tanto é que só foi usá-lo na sua 29.^a proposição.

Os axiomas têm que ser simples e são aceitos facilmente, se intuitivamente óbvios.

O postulado das paralelas sempre foi, há 2.000 anos, considerado como possível de ser demonstrado.

Entretanto, sempre se esbarrava, nas tentativas de demonstração do 5º postulado, em outras afirmações, que também eram logicamente equivalentes ao 5º postulado, formando-se um círculo vicioso.

Daí construirmos a estrutura que chamamos "Geometria Absoluta", que é uma geometria que omite o postulado das paralelas

2. O SISTEMA AXIOMÁTICO MODIFICADO DE HILBERT

Em fins do século passado, vários matemáticos passaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da Geometria de Euclides, principalmente no que se refere à *ordem*.

A obra mais conhecida é o "Fundamentos da Geometria" de Hilbert.

Daremos aqui os axiomas de Hilbert, que fixou os fundamentos da Geometria Plana, substituindo seus 2 axiomas de continuidade pelo de Dedekind, a eles equivalente.

Os axiomas de Hilbert, no plano, estão divididos em 5 grupos: Incidência, Ordem, Congruência, Continuidade e Paralelismo.

I. AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

1. Qualquer que seja o ponto P e qualquer que seja o ponto Q , $P \neq Q$, existe uma única reta ℓ que passa por P e Q . ("Passa por" é outra forma de dizer "é incidente com")

2. Qualquer que seja a reta ℓ , existem pelo menos 2 pontos distintos incidentes com ℓ .

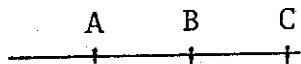
3. Existem 3 pontos distintos com a propriedade de que nenhuma reta é incidente com todos os 3.

II. AXIOMAS DE ORDEM

($A * B * C$, notação abreviada para "ponto B está entre o ponto A e o ponto C ").

1. Se $A * B * C$, então A , B e C são pontos distintos da mesma reta e $C * B * A$.

2. Dados 2 pontos A e B , existe um ponto C , tal que $A * B * C$.



3. Se A , B e C são 3 pontos distintos sobre a mesma reta, então 1 e somente 1 dos pontos está entre os outros 2.

4. Axioma de Pasch

Dados A , B e C não colineares, se r não passa por nenhum desses pontos e encontra AB num ponto M entre A e B , então encontra BC ou AC .

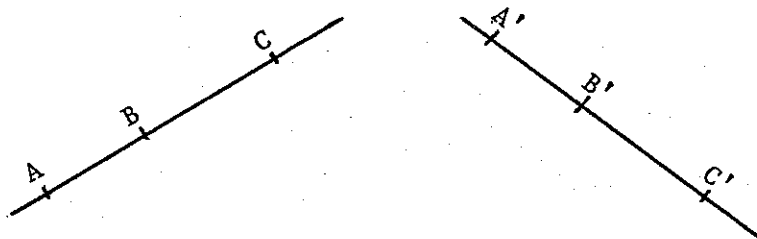
III. AXIOMAS DE CONGRUÊNCIA

(Congruência: é uma relação (representada por \cong) entre segmentos ou uma relação entre ângulos).

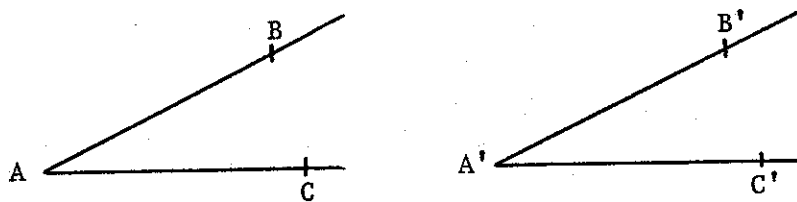
1. Se A e B são pontos distintos de uma reta r , e se A' é qualquer ponto da mesma reta ou de outra, então existe um ponto B' em r ou na outra, tal que $AB \cong A'B'$.

2. Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF$, então $CD \cong EF$.

3. Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$, então $AC \cong A'C'$.



4. Dado um ângulo qualquer \widehat{BAC} (onde, por definição de "ângulo", \overrightarrow{AB} diferente de \overrightarrow{AC}) e dada uma semi-reta qualquer $\overrightarrow{A'B'}$ com origem em A' , então existe uma única semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ num semi-plano dado em relação a $\overrightarrow{A'B'}$, tal que $\widehat{B'A'C'} \cong \widehat{BAC}$.



5. Todo ângulo é congruente a si mesmo.

6. (LAL) Se 2 lados e o ângulo compreendido entre eles, de um triângulo, são congruentes respectivamente a 2 lados e o ângulo compreendido entre eles, de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

IV. AXIOMA DE CONTINUIDADE

1. Axioma de Dedekind

Suponhamos que o conjunto de todos os pontos numa reta ℓ seja a união $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de 2 subconjuntos não vazios, tal que nenhum ponto de Σ_1 esteja entre os pontos de Σ_2 e vice-versa.

Então há um único ponto O sobre ℓ tal que $P_1 * O * P_2$ se e somente se $P_1 \in \Sigma_1$ e $P_2 \in \Sigma_2$ e $O \neq P_1$, $O \neq P_2$.

CONSEQUÊNCIAS DO AXIOMA DE DEDEKIND

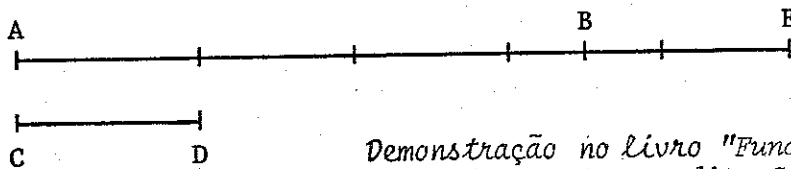
Podemos, com o Axioma de Dedekind, demonstrar:

1. Axioma de Arquimedes.

Se AB e CD são segmentos quaisquer, então existe um número n tal que, se o segmento CD é colocado n vezes sucessivamente na semi-reta \overrightarrow{AB} com origem A , então um ponto E é atingido, onde

$$n \cdot CD \cong AE$$

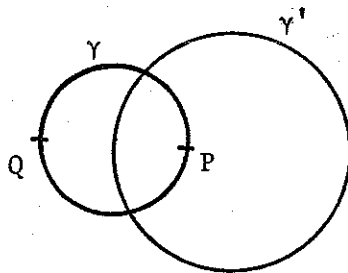
e B está entre A e E



Demonstração no livro "Fundamentos de Geometria" - Prof. Benedito Castrucci.

2. Princípio da Continuidade Circular.

Se uma circunferência γ tem um ponto P e um ponto Q , respectivamente interno e externo a outra circunferência γ' , então as duas circunferências se interceptam em 2 pontos.



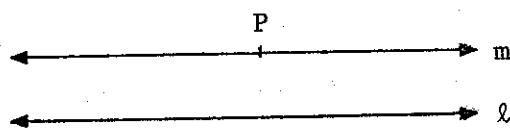
3. Princípio da Continuidade elementar.

Se uma extremidade de um segmento é interno a uma circunferência e a outra extremidade é externa, então o segmento corta a circunferência.

V. AXIOMA DO PARALELISMO

1. Axioma do paralelismo de Hilbert.

Para toda reta ℓ e todo ponto P não pertencente a ℓ , existe no máximo uma reta m , por P , tal que m é paralela a ℓ .



Podemos provar que o postulado do paralelismo de Hilbert é equivalente ao 5º postulado de Euclides.

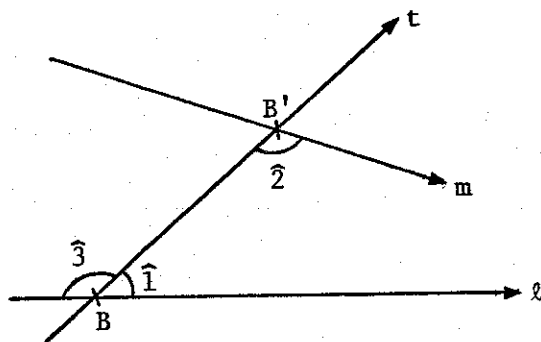
TEOREMA 1. 5º Postulado de Euclides \iff Postulado das paralelas de Hilbert.

Demonstração:

1) \longleftarrow

Seja o postulado de Hilbert.

A situação do 5º postulado de Euclides fica mostrada na figura abaixo.

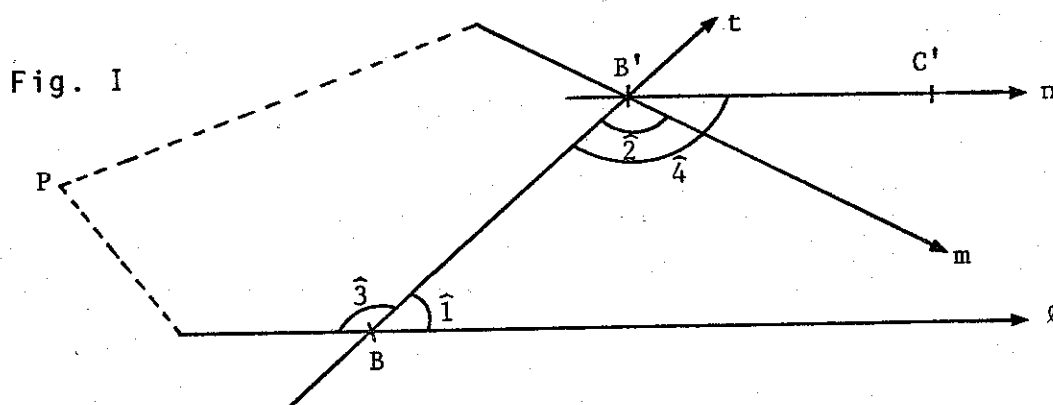


Suponhamos então que $\hat{1} + \hat{2} < 180$ (hip.) e queremos provar que (como quer Euclides), ℓ e m se encontram no mesmo semiplano em que se encontram os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$, em relação a t .

Então,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{1} + \hat{2} < 180^\circ \Rightarrow \hat{2} < 180 - \hat{1} \\ e \\ \hat{1} + \hat{3} = 180^\circ (\text{supl}) \Rightarrow \hat{3} = 180^\circ - \hat{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{2} < \hat{3} \quad (1)$$

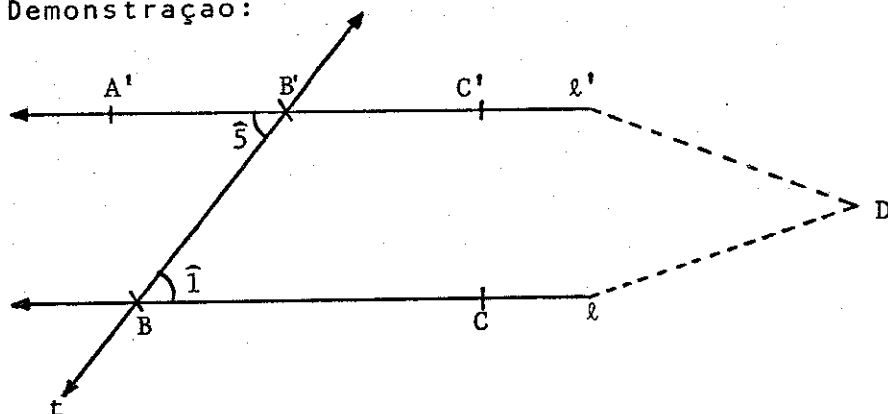
Mas existe uma única semi-reta $\overrightarrow{B'C'}$ tal que $\hat{3}$ e $\hat{4}$ sejam ângulos alternos internos congruentes (ax. congr. 4).



Também podemos demonstrar que:

TEOREMA 2. Se 2 retas cortadas por uma transversal têm um par de ângulos alternos internos congruentes, então as 2 retas são paralelas (Geometria Absoluta).

Demonstração:



Seja $\hat{I} \cong \hat{S}$ onde $A'B'B = \hat{S}$ e $CBB' = \hat{I}$. Suponhamos por absurdo que $l \cap l' = \{D\}$ e que D esteja no mesmo semi-plano de C e C' em relação a t.

Então, no $\triangle BB'D$, $\hat{I} \cong \hat{S}$, onde \hat{S} é ângulo externo não adjacente de \hat{I} ; absurdo, pois \hat{S} deve ser maior que qualquer ângulo interno não adjacente $\Rightarrow l \parallel l'$.

Atenção: A recíproca na G.H. não é verdadeira.

Então $\overrightarrow{B'C'}$ é paralela a l (figura I).

Desde que $m \neq \overrightarrow{B'C'}(n)$, ($\overrightarrow{B'C'}$ é única, por hipótese de Hilbert), m encontra l .

Para concluir, devemos provar que m encontra l no mesmo semi-plano em que se encontram os ângulos \hat{I} e $\hat{2}$, em relação a t.

Suponhamos, por absurdo, que eles se encontrem no ponto P, no semi-plano oposto.

Então $\hat{2}$ é um ângulo externo do $\triangle PB'B$. Mas ele é me-

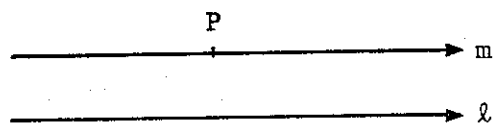
nor que o ângulo interno não adjacente $\hat{3}$ (por (1)).

Essa contradição do Teorema do ângulo externo (Geometria Absoluta), prova Euclides.

2) \implies

Suponhamos, agora, válido o 5º postulado de Euclides.

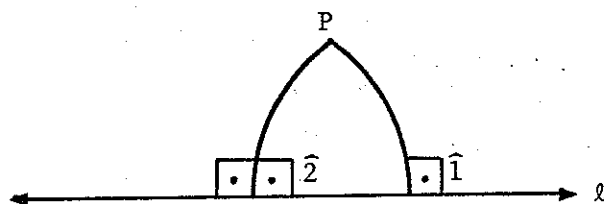
Veja a situação do Postulado de Hilbert na figura



Seja t a perpendicular a l , por P e m a perpendicular a t , por P .

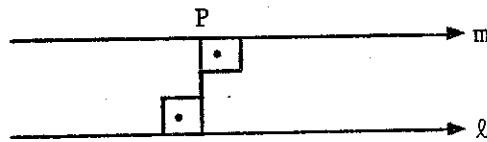
Temos o

TEOREMA 3. Unicidade da perpendicular de um ponto P , $P \notin l$, a l (Geometria Absoluta).

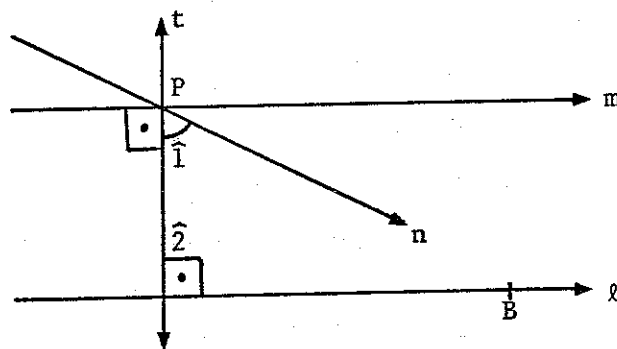


Se tivéssemos 2 perpendiculares, pelo teorema do ângulo externo (Geometria Absoluta), $\hat{1} > \hat{2}$ e haveria um absurdo, pois teríamos então 2 ângulos de 90° e $\hat{1} > \hat{2}$ e $\hat{1} \cong \hat{2}$.

Sabemos também que $m \parallel \ell$ (consequência do Teorema 2)



Então, seja n outra reta qualquer por P .



Devemos mostrar que n encontra ℓ .

Seja $\hat{1}$ o ângulo agudo que n faz com t (cujo ângulo existe, pois $n \neq m$). Então $\hat{1} + \hat{2} < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Assim, a hipótese de Euclides fica satisfeita:

$$\hat{1} + \hat{2} < 180^\circ.$$

Então n encontra ℓ (por Euclides), provando o postulado de Hilbert (que é única), pois qualquer reta por P , exceto m , encontra ℓ .

Poderemos, agora, usar, indiferentemente, qualquer dos 2 postulados, porque são logicamente equivalentes, na Geometria Absoluta.

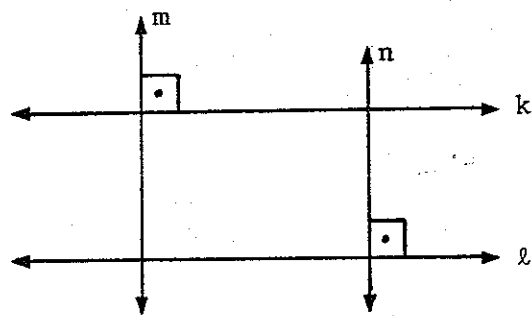
Essas outras afirmações são, também, logicamente equivalentes ao postulado das paralelas:

Hilbert \Leftrightarrow Se uma reta corta uma de 2 retas paralelas, então corta também a outra.

Hilbert \Leftrightarrow Os ângulos alternos internos de 2 retas paralelas, cortadas por 1 transversal, são congruentes (recíproco do teorema dos ângulos alternos internos).

Hilbert \Leftrightarrow Se t é transversal a ℓ e m , com $\ell // m$, e $t \perp \ell$, então $t \perp m$.

Hilbert \Leftrightarrow Se $k // \ell$, $m \perp k$ e $n \perp \ell$, então $m = n$ ou $m // n$.



Hilbert \Rightarrow A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° (a demonstração contrária só poderá ser feita mais tarde).

As tentativas de demonstração do 5º postulado culminaram com o aparecimento de Geometrias não Euclidianas no século XIX: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elítica.

3. TENTATIVAS DE DEMONSTRAÇÃO DO POSTULADO DAS PARALELAS

Nas tentativas para demonstrar o 5º postulado de Euclides, os matemáticos acabavam introduzindo implicitamente alguns postulados equivalentes ao postulado de Euclides.

Entre os matemáticos que o tentaram, podemos citar:

1) *Ptolomeu (século I DC)*

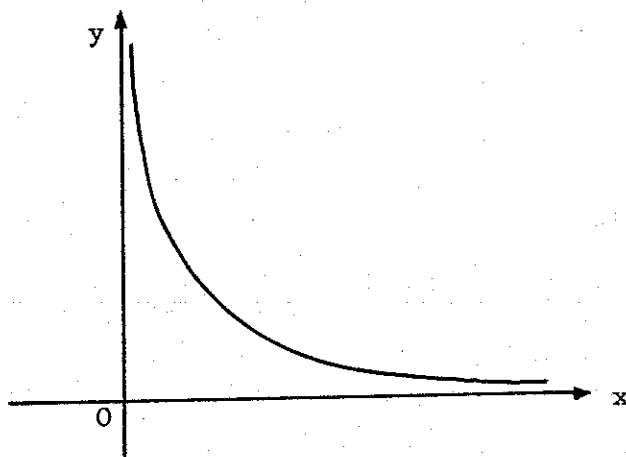
Na sua tentativa para demonstrar o 5º postulado de Euclides, Ptolomeu usa o postulado de Hilbert, que é equivalente logicamente ao de Euclides, sem perceber.

Seu raciocínio se tornava, então, um círculo vicioso.

2) *Proclus (410-485 DC)*

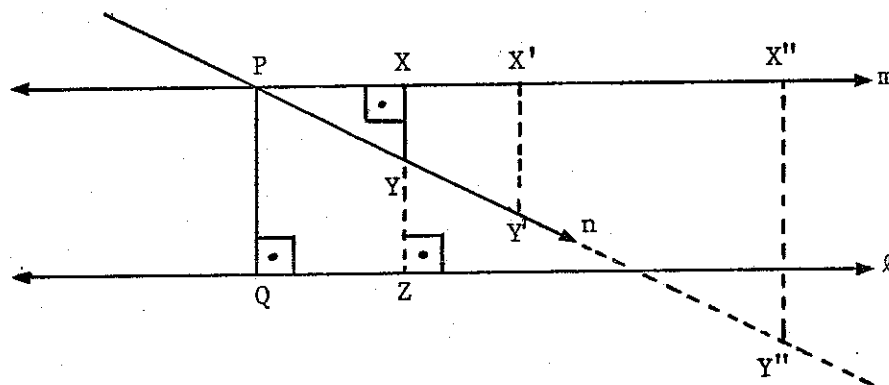
Proclus, uma das maiores fontes de informações da Geometria Grega, já criticava o postulado de Euclides.

Dã o exemplo da hipérbole, que se aproxima de suas assíntotas tanto quanto se queira, sem encontrá-las.



Proclus tentou provar o postulado de Euclides da seguinte maneira:

Dadas duas retas paralelas ℓ e m , suponhamos que a reta n corte m em P .



Seja Q o pé da perpendicular de P a ℓ (que existe e é única, pelo teorema 3).

Se n coincide com \overrightarrow{PQ} , então ela intercepta ℓ em Q . Se n não coincide com \overrightarrow{PQ} , uma semi-reta \overrightarrow{PY} , de n , está entre \overrightarrow{PQ} e uma semi-reta \overrightarrow{PX} de n .

Consideremos X como o pé da perpendicular de $Y \in n$, a m .

Como o ponto Y se afasta infinitamente de P , sobre n , o segmento XY cresce indefinidamente em tamanho e, então, eventualmente, se torna maior que o segmento PQ .

Portanto, Y deve estar do outro lado de ℓ , então n deve encontrar ℓ .

Crítica à demonstração:

O raciocínio de Proclus é, acima de tudo, um raciocínio sofisticado: envolve movimento e continuidade.

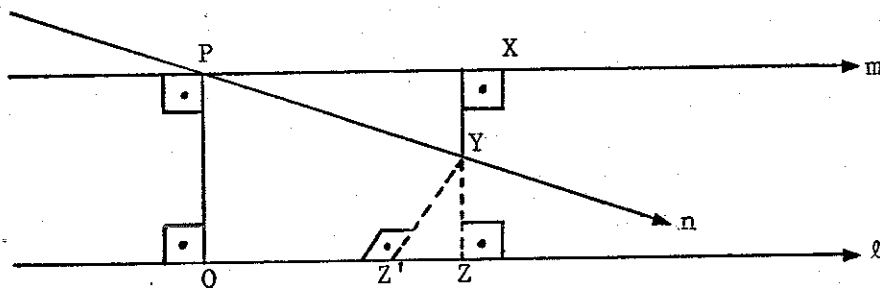
Além do mais, cada passo no raciocínio pode ser mostrado como correto — exceto que o crescimento de XY pode não alcançar PQ .

Por exemplo, a sequência de números

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots,$$

crece infinitamente, mas não chega a 1.

Vejam os:



Baixemos a perpendicular YZ de y a l .

1) Se X, Y, Z estão alinhados, isso significa que temos um retângulo $PQZX$ e teríamos 4 ângulos retos e já estaríamos usando o 5º postulado (4º ângulo reto), e então,

$$XZ \cong PQ \quad (2)$$

Então, quando XY se torna maior que PQ , XY deve ser também maior que XZ ou $XY > PQ \implies$ por (2) $XY > XZ$, então Y deve estar no outro semi-plano em relação a ℓ .

2) Não podemos, no entanto, afirmar que XYZ estejam alinhados, e portanto não poderíamos afirmar que $XZ \cong PQ$.

Somente a figura nos faz pensar que as conclusões de 1) estejam corretas e isso só é possível usando o 5º postulado, na Geometria Euclidiana.

Isso faz com que a demonstração de Proclus seja um círculo vicioso.

A análise do raciocínio imperfeito nos mostra bem como devemos pensar cuidadosamente nas paralelas.

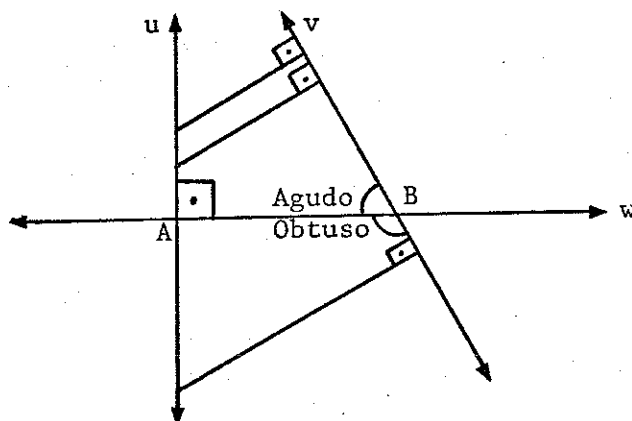
Sem o postulado das paralelas, a única coisa que podemos dizer sobre duas retas é que serão "paralelas" se, por definição de "paralelismo", não tiverem ponto em comum.

Não se pode falar em equidistância entre duas retas se não se pode mesmo admitir a existência de perpendicular comum.

Observação. Se duas retas têm uma perpendicular comum, são paralelas, mas não é verdade que se 2 retas são paralelas, elas têm perpendicular comum.

3) *Nasir Eddin Al Tusi (1201-1274)*

Astrônomo e matemático persa (neto de Gengis Kan), introduziu outra hipótese equivalente ao postulado de Euclides.



Se uma reta u é perpendicular a outra reta w em A e v é oblíqua a w em B , então as perpendiculares traçadas de u sobre v são menores que AB , do lado onde v e w formam ângulo agudo e maiores que AB do lado onde v e w formam ângulo obtuso.

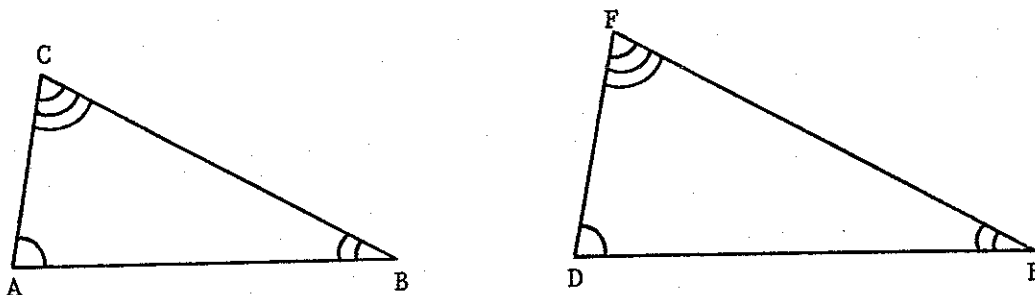
4) *John Wallis (1616-1703)*

Wallis desistiu de tentar demonstrar o postulado das paralelas na Geometria Absoluta e, em vez disto, propôs um novo axioma, que imaginou mais plausível que o 5º postulado.

P O S T U L A D O D E W A L L I S

Consideremos o $\triangle ABC$ qualquer e seja DE um segmento qualquer.

Existe um triângulo, $\triangle DEF$ (DE um dos lados) que é semelhante ao $\triangle ABC$.



Notação: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

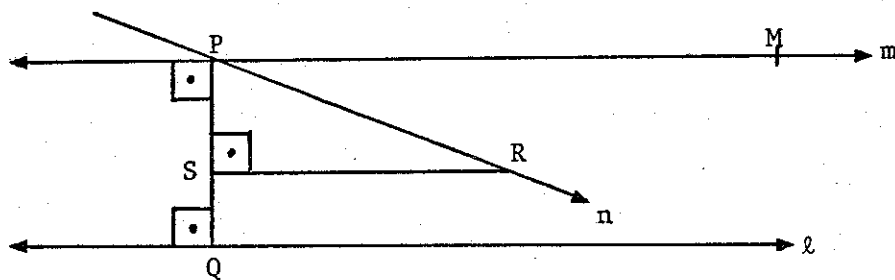
Temos que notar que esses triângulos semelhantes são triângulos cujos vértices podem ser postos em correspondência biunívoca, tal que os ângulos correspondentes sejam congruentes.

Prova-se, na Geometria Euclidiana, que lados correspondentes de triângulos semelhantes, são proporcionais.

O pensamento intuitivo do postulado de Wallis nos diz, então, que podemos encolher ou aumentar um triângulo quanto se queira, sem distorção.

Usando o postulado de Wallis, o postulado de Euclides ficaria (segundo Wallis) demonstrado como se segue:

Demonstração. Dado um ponto P , $P \notin \ell$, construímos uma paralela m a ℓ , por P , como antes, baixando a perpendicular \vec{PQ} a ℓ e construindo m perpendicular a \vec{PQ} .



Seja n qualquer outra reta por P . Devemos mostrar que n encontra l .

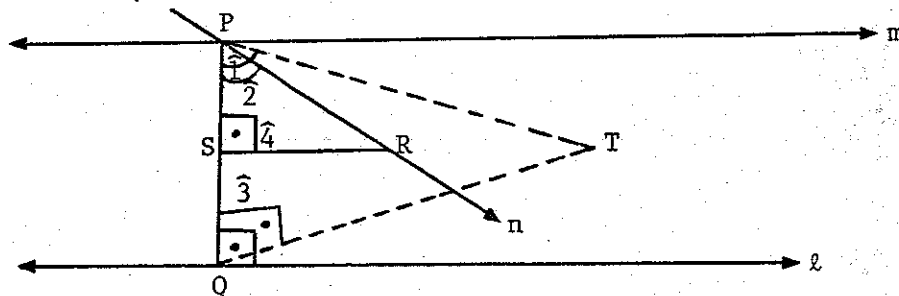
Como antes, consideremos uma semi-reta de n saindo de P , tal que esteja entre uma semi-reta de m e \overrightarrow{PQ} (qualquer ponto de n é interno ao ângulo $Q\hat{P}M$); de qualquer ponto S de \overrightarrow{PQ} , traçamos \overline{RS} , perpendicular a \overrightarrow{PQ} (a perpendicular baixada de um ponto é única (teorema 3)).

Aplicamos agora o postulado de Wallis, ao $\triangle PSR$ e o segmento PQ .

Ele nos diz que existe um ponto T , tal que $\triangle PSR$ é semelhante ao $\triangle PQT$

$$\triangle PSR \sim \triangle PQT$$

Mais que isso, suponhamos que T e R estejam no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{PQ} .



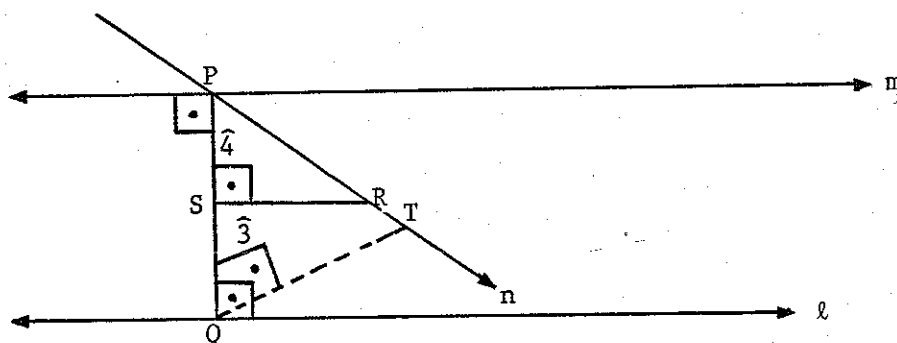
Por definição de triângulos semelhantes, $\hat{1} \cong \hat{2}$.

Desde que esses ângulos têm a semi-reta $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS}$ como lado comum, e desde que T e R estão no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{PQ} , a única maneira de $\hat{1} \cong \hat{2}$ é $\hat{1} = \hat{2}$, e isto só é possível se

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PT} \implies T \in n. \quad (1)$$

Do mesmo modo $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos retos); como $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS}$ (lado comum desses ângulos) e T e R estão no mesmo semi-plano em relação a $\overrightarrow{PQ} \implies \hat{3} = \hat{4}$ (medidas iguais).

$$\implies T \in \ell \quad (2)$$



Resumindo:

Se $T \in n$ e $\triangle PSR \sim \triangle PQT$, os 2 ângulos retos em Q são congruentes e como têm um lado comum, $QT = \ell \implies T \in \ell$.

Por (1) e (2)

$$\begin{cases} T \in n \\ T \in \ell \end{cases} \implies T \in n \cap \ell \implies n \text{ e } \ell \text{ se encontram em } T;$$

m é, conseqüentemente, a única reta, por P , paralela a ℓ .

Mas não devemos considerar o postulado de Wallis mais plausível que o 5º postulado de Euclides, pois ele é logicamente equivalente ao 5º de Euclides.

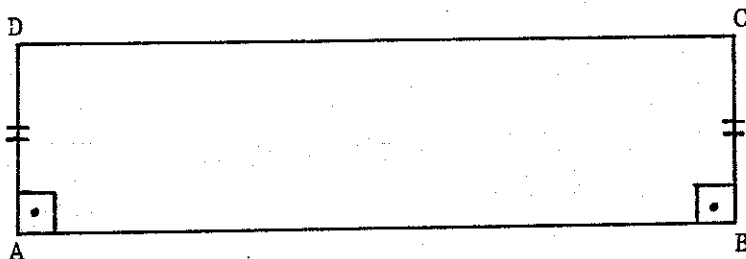
(Se Wallis não usasse o 5º postulado, não teríamos triângulos semelhantes, mas sim, congruentes).

5) *Girolamo Saccheri (1667-1733)*

Pouco antes de morrer, o padre jesuita Girolamo Saccheri publicou um pequeno livro com o título "Euclides ab omni naevo vindicatus" (Euclides vingado de toda a mácula ou Euclides liberto de qualquer imperfeição), que não foi notado até um século e meio depois, quando Eugenio Beltrami o redescobriu.

Nele, Saccheri tentava demonstrar o postulado das paralelas, usando o raciocínio da redução ao absurdo: negava o 5º postulado e tentava deduzir a contradição.

Especificamente, estudou certos tipos de quadriláteros, cujos ângulos da base, A e B são retos e cujos lados AD e BC são congruentes.

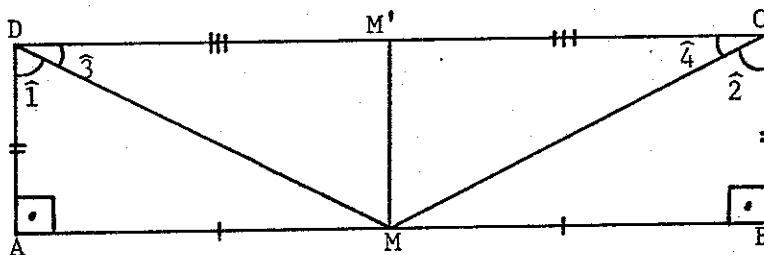


Esses quadriláteros foram posteriormente conhecidos como "Quadriláteros de Saccheri".

Na Geometria Absoluta (sem o postulado das paralelas) também é fácil provar que:

TEOREMA 4. Ângulos superiores \hat{C} e \hat{D} de um quadrilátero de Saccheri, são congruentes.

Demonstração:



Sejam M ponto médio de AB, M' ponto médio de CD

Então

$$\triangle DAM \cong \triangle CBM \text{ (LAL) (por hip)} \implies DM \cong CM \quad (1)$$

$$\text{e } \hat{1} \cong \hat{2}$$

$$\implies \triangle DMM' \cong \triangle CMM' \text{ (LLL)} \iff \hat{3} \cong \hat{4} \quad (2)$$

Somando membro a membro (1) + (2) temos:

$$\hat{1} + \hat{3} \cong \hat{2} + \hat{4} \implies \hat{C} \cong \hat{D}.$$

Então os ângulos superiores são congruentes.

Pela hipótese de Saccheri, haveria 3 possibilidades:

- 1º caso. \hat{C} e \hat{D} retos
- 2º caso. \hat{C} e \hat{D} obtusos
- 3º caso. \hat{C} e \hat{D} agudos

Querendo demonstrar o 1º caso (e, então, o postulado das paralelas), que é o caso da Geometria Euclidiana, Saccheri tentou demonstrar que os outros dois casos levavam a contradições; só o conseguiu com o 2º caso: se os ângulos superiores \hat{C} e \hat{D} fossem obtusos, a soma dos ângulos do quadrilátero seria maior que 360° , contrariando o corolário do Teorema de Saccheri-Legendre que diz: A soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero convexo qualquer é no máximo 360° .

TEOREMA 5. Teorema de Saccheri - Legendre (da Geometria Absoluta).

A soma das medidas dos 3 ângulos internos de um triângulo qualquer é menor ou igual a 180° .

A demonstração é feita por absurdo e usando o axioma de Arquimedes.

Constroe-se um triângulo ABC onde se admite que a soma das medidas dos ângulos internos seja $180^\circ + p^\circ$, com $p > 0$.

Podemos construir outro triângulo, com a mesma soma dos ângulos, onde um dos ângulos é $\frac{1}{2}$ de um ângulo do triângulo

anterior, e assim por diante, até que um dos ângulos do último triângulo construído tenha um ângulo no máximo $= p^\circ \implies$ a soma dos 2 outros ângulos será 180° ou mais, contrariando um corolário da Geometria Absoluta que diz que a soma de 2 ângulos quaisquer de um triângulo é menor que 180° .

Observação: Na Geometria Elítica não vale o Teorema de Saccheri - Legendre.

Por mais que tentasse, Saccheri não conseguia uma contradição do 3º caso, "a hipótese inimiga, do ângulo agudo", como ele a chamava.

Conseguiu, então, deduzir vários resultados estranhos, mas não uma contradição.

Exclamou, então, frustrado: "A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa, porque é incompatível com a natureza das retas".

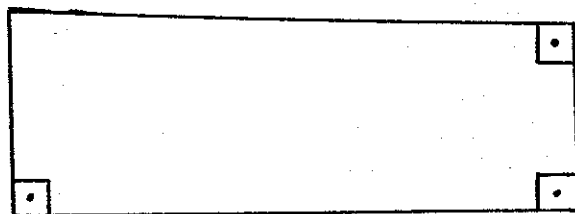
"É como se um homem tivesse descoberto um raro diamante mas, incapaz de acreditar no que via, anunciava que era falso".

Embora não o reconhecesse, Saccheri descobriu a Geometria não Euclidiana.

6) Lambert (1728-1777)

Num caminho semelhante ao problema das paralelas, Johann Heinrich Lambert estudou quadriláteros tendo pelo menos 3

ângulos retos, que são atualmente conhecidos como de Lambert.



Deduziu muitas proposições não-Euclidianas da hipótese do ângulo agudo, mas, ao contrário de Saccheri, não alegava ter achado contradições.

Indo além de Saccheri, Lambert mostrou que a hipótese do ângulo agudo implica que a área do triângulo é proporcional a suas "deficiências" e especulou que esta hipótese correspondia à Geometria sobre uma "esfera de raio imaginário".

(Deficiência de um triângulo: se o triângulo ABC é um triângulo qualquer, então 180° menos a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é um número ≥ 0).

Esse número é chamado de "deficiência" do triângulo e tem um papel muito importante na Geometria Hiperbólica.

Um triângulo tem "deficiência 0 (zero)" se a soma das medidas dos ângulos internos é 180°).

Mais tarde Beltrami mostrou que a Geometria numa pseudo esfera satisfaz a hipótese do ângulo agudo.

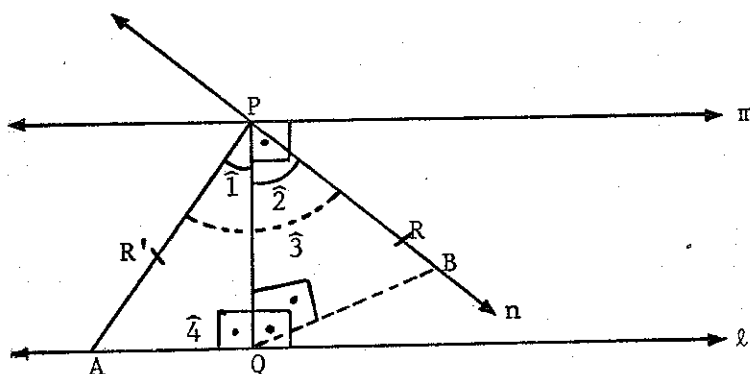
7) *Adrien Marie Legendre (1752-1833)*

Legendre, um dos melhores matemáticos de seu tempo, tendo contribuído em vários ramos da matemática, estava tão

obcecado em provar o postulado das paralelas que, durante um período de 29 anos, publicou uma tentativa após outra, em diferentes edições de seu "Elementos de Geometria".

Eis aqui uma de suas tentativas:

Demonstração. Seja ℓ uma reta qualquer e $P \notin \ell$; baixamos a perpendicular PQ de P a ℓ , em Q e $m \perp PQ$ em P (pelo teorema 3).



Seja n uma reta qualquer, por P , diferente de m e \overleftrightarrow{PQ} . Temos que mostrar que n intercepta ℓ .

Seja \overrightarrow{PR} uma semi-reta de n , entre \overrightarrow{PQ} e uma semi-reta de m , de origem P .

Existe um ponto R' , oposto a R em relação a PQ tal que o ângulo $R'\hat{P}Q \cong Q\hat{P}R$ (na fig: $\hat{1} \cong \hat{2}$) (postulado de congruência e ordem).

Então Q está no interior de $R'\hat{P}R(\hat{3})$. Desde que a reta ℓ passe pelo ponto Q , interior do ângulo $\hat{3}$, ℓ tem que interceptar um dos dois lados deste ângulo. (Isto é falso; só é verdadeiro na Geometria Euclidiana).

Se ℓ encontra o lado \overrightarrow{PR} , então certamente ℓ encontra n .

Suponhamos que ℓ encontra o lado $\overrightarrow{PR'}$ no ponto A.

Seja B o único ponto no lado \overrightarrow{PR} (sobre n) (1), tal que $PA \cong PB$. Então

$$\Delta PQA \cong \Delta PQB \text{ (LAL)} \begin{pmatrix} PA \cong PB \\ \hat{1} \cong \hat{2} \\ PQ \text{ comum} \end{pmatrix}$$

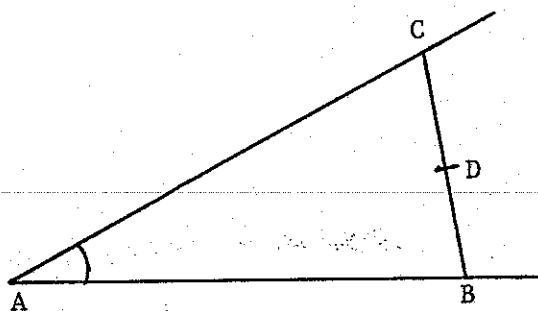
Então \widehat{PQB} é um ângulo reto (pois é congruente a $\hat{4}$) \implies
 $\implies B$ está sobre ℓ e n (por (1)) $\implies \ell \cap n = \{B\}$.

Pode parecer que esta demonstração esteja correta, mas teríamos que justificar cada passagem, definindo cada termo cuidadosamente.

1. Se $m, \ell \perp PQ \implies m \parallel \ell$ (já demonstrado) consequência do teorema 2.

2. Semi-reta interior. Em Hilbert temos:

Dado um ângulo \widehat{CAB} , e um ponto D sobre BC, então D está no interior de \widehat{CAB} se e somente se $B * D * C$ ($D \in CB$).



3. Critérios de congruência (válidos em Hilbert).

4. ℓ encontraria PR' em A porque Q , sendo interno ao ângulo $R'\hat{P}R$, ℓ cortaria os lados do ângulo.

Isso não é verdade se não for na Geometria Euclidiana: Todo ponto interior de um ângulo pertence a um segmento que liga um ponto de um lado a outro ponto do outro lado do ângulo.

5. Podemos sempre construir $PB \cong PA'$ (ax. congr.)

6. $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$ e então $\hat{A} = \hat{Q}B$ e $B \in \ell$ e $n \cap \ell \neq \emptyset$.

A falha na demonstração aparece justamente no item 4, pois Legendre não supôs que a reta ℓ , toda, pudesse estar no interior do ângulo, sem encontrar nenhum dos lados, fenômeno que achou impossível.

8) *Wolfgang Farkas Bolyai*

Os matemáticos se desencorajaram. O húngaro Wolfgang Bolyai, por mais que tentasse, sempre achava uma falha na dedução do 5º postulado e aconselhava seu filho, Janos, a que não insistisse.

9) *Janos Bolyai (1802-1860)*

Janos Bolyai tinha, porém, uma idéia completamente nova.

Ele admitia que a negação do postulado das paralelas de Euclides não era absurda e, por volta de 1823, estabeleceu uma relação entre ângulo de paralelismo e distância, que consta de uma publicação "Appendix", de junho de 1831.

Seu pai enviou a publicação a Gauss, seu amigo, indiscutivelmente o maior matemático de seu tempo.

Em 4 de março de 1832, Gauss respondeu à carta, dizendo que tudo aquilo ele mesmo já pensara há cerca de 35 anos, mas que esses resultados não seriam compreendidos pelos contemporâneos e, assim, deixara de publicá-los.

Bolyai se aborreceu e escreveu seus pensamentos reprovando a atitude de Gauss.

10) Gauss (1777-1855) - "O príncipe dos matemáticos"

Existem evidências de que Carl Friedrich Gauss tenha, de fato, se antecipado a algumas descobertas de J. Bolyai, pois esteve trabalhando na Geometria não-Euclidiana desde os 15 anos, isto é, desde 1792.

O que mostra que Gauss realmente tinha resultados da Geometria não-Euclidiana é a reconstrução de suas ideias, conforme as seguintes fontes:

1) O trabalho "Disquisitiones Generales circa superficies curvas" (1827).

2) Cartas escritas a Wachter (1816), Gerling (1819), Taurinus (1824), Bessel (1829), Schumacher (1831) e Farkas Bolyai (1832).

3) Suas notas que foram encontradas depois de sua morte.

Gauss, além de ser um perfeccionista, temia Kant e os categóricos.

11) *Lobachevsky (1792-1856)*

O matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky roubou a cena de Bolyai e Gauss quando, em primeiro lugar, publicou, em 1829, uma avaliação da Geometria não-Euclidiana.

Seu livro não teve muita repercussão, pois foi publicado em russo mas, em 1840, o publicou em alemão, o qual chegou às mãos de Gauss (que, além de elogiar, reiterava sua própria prioridade no assunto).

No começo, Lobachevsky chamou sua Geometria de "Geometria Imaginária" e depois de "Pangeometria".

Na sua obra publicada, desenvolveu quase completamente sua tese.

Lobachevsky desafiava abertamente a doutrina de espaço de Kant, como uma intuição subjetiva.

Infelizmente sua teoria não foi devidamente considerada, durante sua vida; ele ditou seu último livro no ano anterior à sua morte, pois ficara cego.

Somente quando Gauss faleceu, em 1855, e a sua correspondência foi publicada, é que o mundo matemático começou a levar a sério as idéias não-Euclidianas.

Alguns dos melhores matemáticos (Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré e Riemann) retomaram o assunto, estenderam-no, aclararam-no e o aplicaram em outros ramos da matemática.

12) *Beltrami*

Em 1868, o matemático italiano estabeleceu de uma vez por todas, a questão de uma demonstração para o postulado das paralelas: ele demonstrou que nenhuma demonstração é possível! Ele o fez, demonstrando que a Geometria não-Euclidiana é tão consistente quanto a Euclidiana.

C A P Í T U L O II

G E O M E T R I A H I P E R B Ô L I C A

1. TEOREMA HIPERBÓLICO FUNDAMENTAL

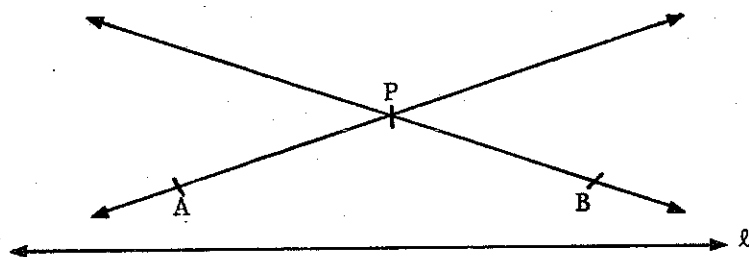
Qualquer geometria que não satisfaça o axioma das paralelas de Euclides é uma geometria não Euclidiana.

Particularmente, estudaremos a Geometria descoberta por Gauss, J. Bolyai e Lobachevsky, chamada atualmente de Geometria Hiperbólica.

Geometria Hiperbólica é, por definição, a Geometria que obtemos, aceitando todos os axiomas da Geometria Absoluta e trocando o postulado das paralelas segundo Hilbert, por uma de suas negações, à qual chamaremos de "Axioma Hiperbólico".

Axioma Hiperbólico: Na Geometria Hiperbólica existe uma reta ℓ e um ponto P , $P \notin \ell$, tal que por P passam pelo

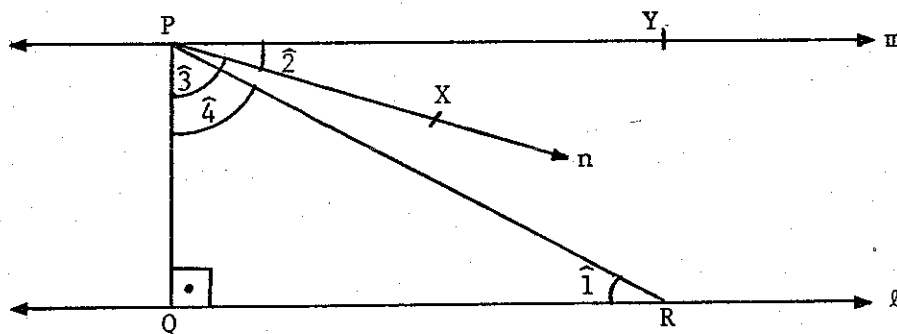
menos duas retas distintas paralelas a ℓ .



Com o axioma Hiperbólico, temos a 1.^a consequência importante:

Lema. Existe um triângulo, cuja soma dos ângulos é menor que 180° .

Demonstração:



Seja ℓ uma reta e P um ponto, $P \notin \ell$, tal que duas paralelas a ℓ passem por P (ax. hiperbólico).

Construimos uma paralela m da maneira usual, baixando a perpendicular \vec{PQ} a ℓ e tomando m perpendicular a \vec{PQ} , por P (teorema 3).

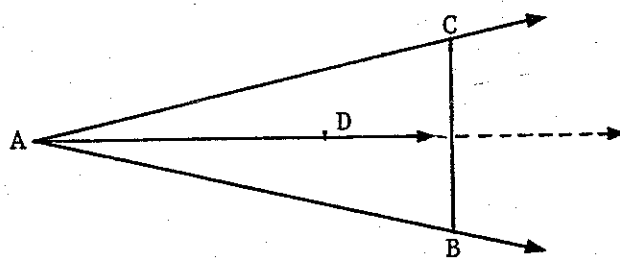
Seja n outra paralela a ℓ , por P . \overrightarrow{PX} uma semi-reta de n , entre \overrightarrow{PQ} e uma semi-reta \overrightarrow{PY} de m (qualquer ponto de n é interior ao ângulo formado por \overrightarrow{PQ} e m).

Por uma aplicação do axioma de Arquimedes, podemos mostrar que existe um ponto R sobre ℓ , no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{PQ} , que X e Y , tal que

$$\hat{1} < \hat{2} \quad (1)$$

onde $\hat{1}$ é \widehat{PRQ} e $\hat{2}$ é \widehat{XPY} ; mas, ao mesmo tempo, \overrightarrow{PR} está no interior do ângulo $\hat{3} = \widehat{QPX}$, pois senão \overrightarrow{PX} estaria no interior de $\hat{4} = \widehat{QPR}$ e encontraria QR , contrariando nossa hipótese de que n paralela a ℓ e, portanto, não encontra ℓ (teorema 60 - Fundamentos da Geometria, Prof. Castrucci).

Se \overrightarrow{AD} está entre \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AB} , então \overrightarrow{AD} corta o segmento BC (teorema da Geometria Absoluta).



Então, se PR está no interior do ângulo $\hat{3}$,

$$\hat{4} < \hat{3} \text{ por definição} \quad (2)$$

Somando as desigualdades (1) e (2) temos

$$\hat{1} + \hat{4} < \hat{3} + \hat{2} = 90^\circ \quad \text{ou} \quad \hat{1} + \hat{4} < 90^\circ$$

Então, a soma dos ângulos do ΔQRP é menor a 180° .

Usando esse lema, podemos estabelecer uma versão geral do axioma Hiperbólico.

O postulado das paralelas de Euclides afirma que para *toda* reta e *todo* ponto fora da reta, a unicidade de paralela à reta dada, pelo ponto dado, é assegurada.

Uma sua negação, o axioma Hiperbólico afirma que para *alguma* reta ℓ e para *algum* ponto P , $P \notin \ell$, a unicidade das paralelas *não* é assegurada.

Vamos mostrar que na Geometria Hiperbólica a unicidade das paralelas não é assegurada somente para algum ponto P e alguma reta ℓ .

TEOREMA 6. *Teorema Hiperbólico Fundamental.*

Na Geometria Hiperbólica, para *toda* reta ℓ e *todo* ponto P , $P \notin \ell$, passam por P pelo menos duas retas paralelas a ℓ .

Para demonstrar o Teorema Hiperbólico Fundamental, vamos demonstrar antes os seguintes teoremas da Geometria Absoluta (creditado também a Saccheri - Legendre).

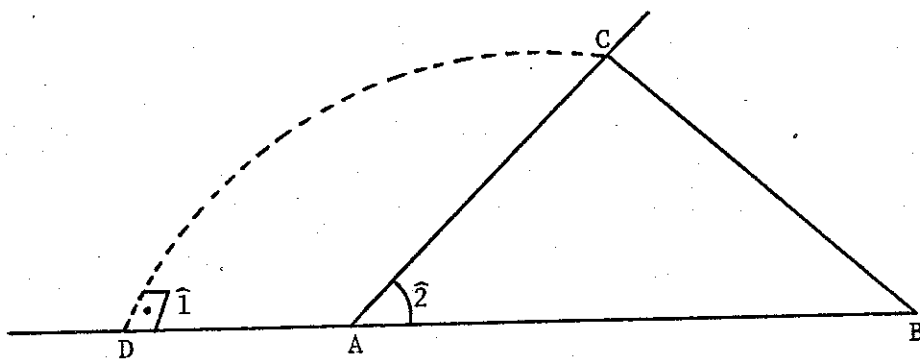
TEOREMA 7.

a) Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° , então existe um retângulo.

b) Se existe um retângulo, então *todo* triângulo tem a soma dos ângulos igual a 180° .

Demonstração de a). Seja $\triangle ABC$ o triângulo existente, com soma dos ângulos 180° (deficiência zero).

Pelo menos 2 dos ângulos nesse triângulo são agudos, desde que a soma de 2 ângulos num triângulo tem que ser menor que 180° .



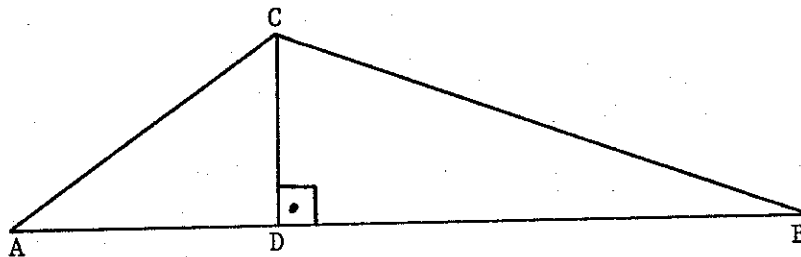
Suponhamos \hat{A} e \hat{B} agudos e seja CD a altura do vértice C em relação a \overline{AB} . Essa altura existe, pela Geometria Absoluta.

Afirmamos que D está entre A e B .

Suponhamos, por absurdo $D * A * B$; $\hat{2} = \hat{A}$ é externo ao $\triangle CDA$ e não adjacente a $\hat{1} = \hat{CDA}$ e ao mesmo tempo agudo, por hipótese.

Teremos então, $\hat{1} (= 90^\circ) > \hat{2}$, contrariando o teorema da Geometria Absoluta, de que um ângulo externo num triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente.

Analogamente, se $A * B * D$, teremos a mesma contradição.
Então $A * D * B$ (Axioma de ordem 3)



Vamos demonstrar também, agora, que:

TEOREMA 8. Num triângulo $\triangle ABC$ qualquer, com D um ponto entre A e B, a deficiência do $\triangle ABC$ é igual à soma das deficiências dos triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ (definição de deficiência já vista).

Seja

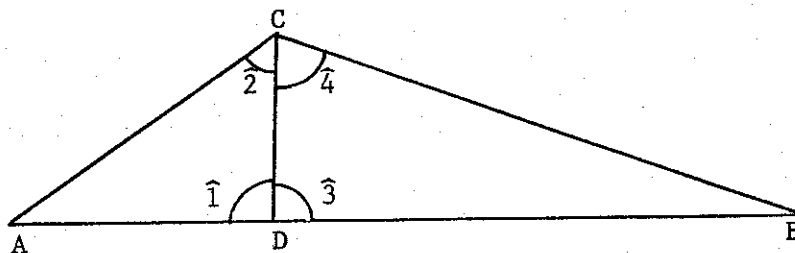
ϵ_1 = deficiência do $\triangle ABC$

ϵ_2 = deficiência do $\triangle ACD$

ϵ_3 = deficiência do $\triangle BCD$

Então, deveremos ter $\epsilon_1 = \epsilon_2 + \epsilon_3$.

Demonstração.



Dados

$$\triangle ABC, \quad A * D * B$$

$$\triangle ADC \quad e \quad \triangle BDC$$

então

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \varepsilon_1 \quad (1)$$

$$\hat{A} + \hat{1} + \hat{2} = 180^\circ - \varepsilon_2$$

$$\hat{B} + \hat{3} + \hat{4} = 180^\circ - \varepsilon_3$$

$$\hat{A} + \hat{B} + 180^\circ + \hat{C} = 360^\circ - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2)

$$180^\circ - \varepsilon_1 = 180^\circ - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \implies \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Corolário. Sob as mesmas hipóteses, a soma dos ângulos do $\triangle ABC$ é igual a 180° se, e somente se, a soma dos ângulos de cada triângulo $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$ é igual a 180° .

Por este corolário, se existe um triângulo cuja soma é 180° , então cada um dos triângulos retângulos $\triangle ADC$ e $\triangle BDC$ tem deficiência zero, então existe triângulo retângulo com deficiência zero, ou, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Isto é:

$$\text{Se } \varepsilon_1 = 0 \implies \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \implies \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 \implies \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

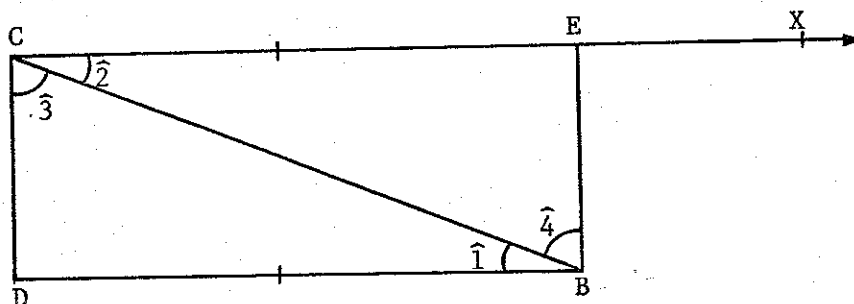
Verifica-se que:

De um triângulo retângulo de deficiência zero, podemos construir um retângulo.

Seja $\triangle CDB$ um triângulo retângulo de deficiência zero, com D reto.

Pelo axioma de Congruência 4, existe uma única semi-reta \vec{CX} no semi-plano oposto a D em relação a CB , tal que:

$$\hat{1} \cong \hat{2} \quad (1)$$



Pelo axioma de congruência 1 existe um único ponto E , em \vec{CX} , tal que $CE \cong BD$. Então

$$\triangle CDB \cong \triangle BEC \text{ (LAL)}$$

Então $\triangle BEC$ é também um triângulo retângulo de deficiência zero, com um ângulo reto em E .

Pela nossa hipótese

$$\hat{1} + \hat{3} = 90^\circ \quad (2)$$

Então, substituindo (1) em (2)

$$\hat{2} + \hat{3} = 90^\circ$$

e

$$\hat{1} + \hat{4} = 90^\circ$$

Mais que isso, B é um ponto interior de $\hat{C}(E\hat{C}D)$, desde que o teorema dos ângulos alternos internos implica em $\vec{CE} // \vec{DB}$ e $\vec{CD} // \vec{BE}$ e C é interior do ângulo $\hat{B}(E\hat{B}D)$ (pela mesma razão).

Assim, podemos usar o teorema da Geometria Absoluta que diz que se as medidas de 2 ângulos são iguais, então eles são congruentes, então

$$\hat{C}(E\hat{C}D) = 90^\circ = \hat{B}(E\hat{B}D)$$

e isto prova que $\square CDBE$ é retângulo.

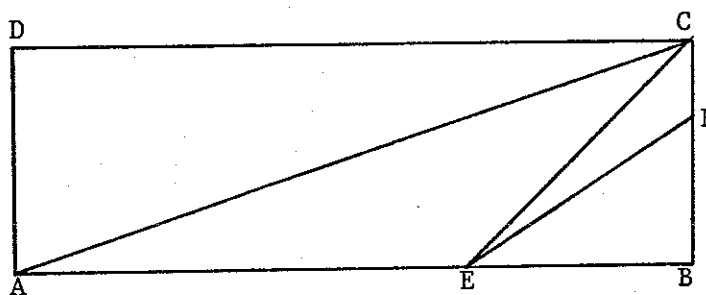
Fica assim demonstrado o 7.a):

Se existe um triângulo cuja soma dos ângulos é 180° , então existe um retângulo.

Podemos construir, então, retângulos com lados arbitrariamente maiores, usando, para isso, o axioma de Arquimedes.

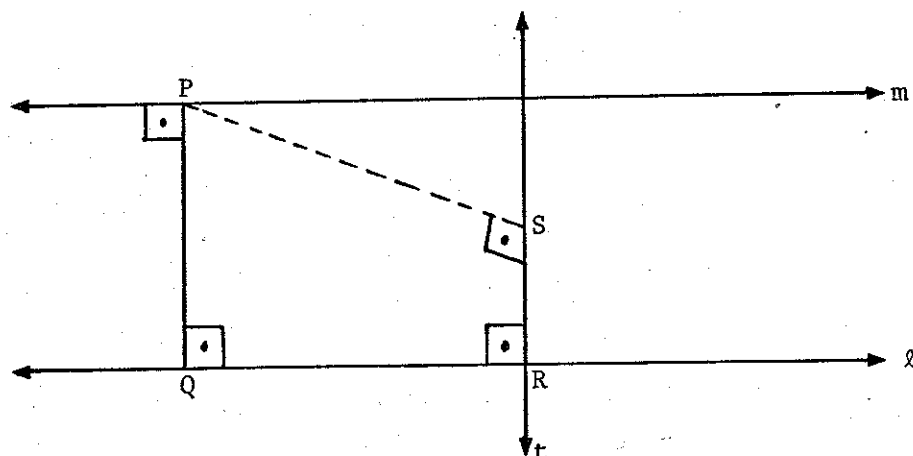
Falta-nos demonstrar (7b); Se existe retângulo, *todos* os triângulos têm deficiência zero.

Isso se consegue, "embutindo" um triângulo retângulo arbitrário, $\triangle EBF$ em um retângulo, como na figura.



Aplicando o corolário (2 vêzes) do teorema 8, mostramos que todo triângulo tem deficiência zero, isto é, a soma de seus ângulos é 180° .

Demonstração do Teorema Hiperbólico Fundamental -6-



Baixemos a perpendicular \overrightarrow{PQ} a l e tracemos a reta m , por P , perpendicular a \overrightarrow{PQ} .

Seja R um ponto em l , $R \neq Q$; levantemos a perpendicular t a l , por R e baixemos a perpendicular \overrightarrow{PS} a t .

Agora \overrightarrow{PS} é paralela a l , desde que ambas são perpendiculares a t (consequência do teorema 2).

Afirmamos que m e \overrightarrow{PS} são retas distintas: $m \neq \overrightarrow{PS}$.

Suponhamos, por absurdo, que $S \in m$. Então PQRS é um retângulo; mas, pelo teorema demonstrado acima, se existe um retângulo, então *todo* triângulo tem a soma de 180° (Geometria Absoluta), o que contradiz o lema (Geometria Hiperbólica) de que existe *pelo menos* um triângulo cuja soma dos ângulos é menor que 180° , então $S \notin m \Rightarrow m \neq \vec{PS}$.

Concluimos assim o seguinte:

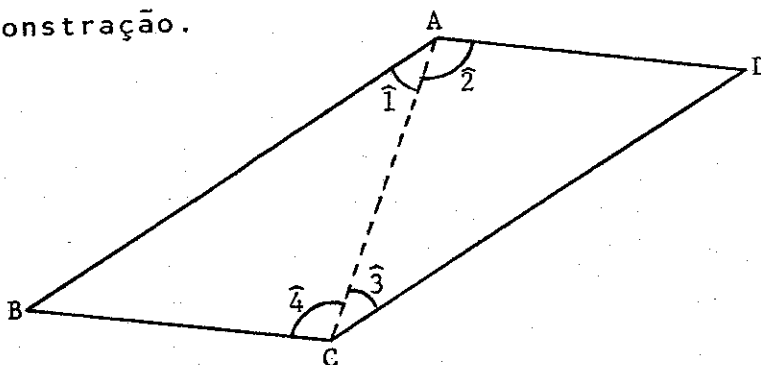
TEOREMA 9. Na Geometria Hiperbólica não existem retângulos e a soma dos ângulos dos triângulos é menor que 180° .

(Pois se a soma dos ângulos de um triângulo é menor que 180° , pelo teorema da Geometria Absoluta, não existe retângulo) ou se

\exists retângulo $\Rightarrow S_{\text{ang}} = 180^\circ \Rightarrow$ se $S_{\text{ang}} \neq 180^\circ \Rightarrow \nexists$ retângulo (lógica)

Corolário. Na Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é menor que 360° .

Demonstração.



Consideremos um quadrilátero convexo qualquer $\square ABCD$. Tomemos AC diagonal e consideremos os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$.

Pelo teorema 9, esses triângulos têm a soma de seus ângulos menor que 180° .

A hipótese de que $\square ABCD$ é convexo implica que \vec{AC} está entre \vec{AB} e \vec{AD} e \vec{CA} está entre \vec{CB} e \vec{CD} , então

$$\hat{1} + \hat{2} = \hat{A}$$

e

$$\hat{4} + \hat{3} = \hat{C} \text{ por definição,}$$

onde

$$\hat{1} = \hat{BAC}$$

$$\hat{2} = \hat{CAD}$$

$$\hat{3} = \hat{ACD}$$

$$\hat{4} = \hat{BCA}$$

Somando todos os 6 ângulos, vemos que a soma dos ângulos do $\square ABCD < 360^\circ$.

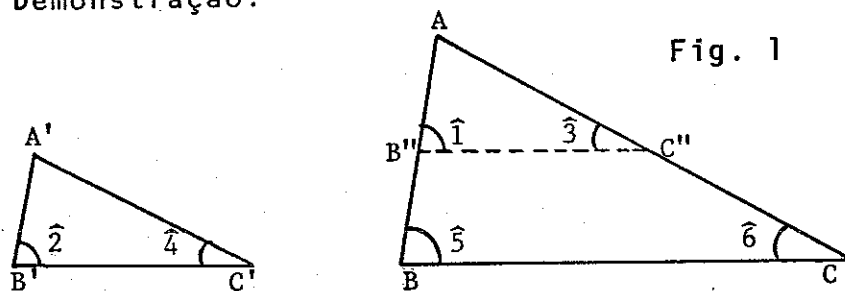
2. INEXISTÊNCIA DE TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Vamos provar agora que, no plano Hiperbólico, sob nenhuma circunstância, existem triângulos semelhantes.

TEOREMA 10. Na Geometria Hiperbólica, se dois triângulos são semelhantes, eles são congruentes.

(Em outras palavras, AAA é um critério válido para congruência de triângulos).

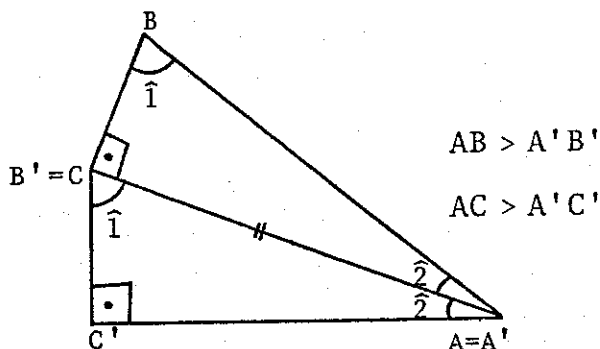
Demonstração.



Suponhamos, por absurdo, que existem $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ que são semelhantes, então AAA, mas não congruentes, então nenhum lado correspondente é congruente, senão os triângulos seriam congruentes (caso ALA).

Consideremos os ternos (AB, AC, BC) e $(A'B', A'C', B'C')$ de lados desses triângulos.

Um desses ternos deve conter pelo menos 2 segmentos que são maiores que 2 segmentos correspondentes do outro terno, por exemplo, $AB > A'B'$ e $AC > A'C'$.



Então, por definição de "maior", existem pontos B'' sobre AB e C'' sobre AC tal que

$$AB'' \cong A'B'$$

e

$$AC'' \cong A'C'$$

Pelo caso LAL, $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB''C''$. Então, os ângulos correspondentes são congruentes (figura 1).

$$\hat{1} \cong \hat{2}$$

$$\hat{3} \cong \hat{4}$$

Pela hipótese de que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes, temos também:

$$\hat{1} \cong \hat{5}$$

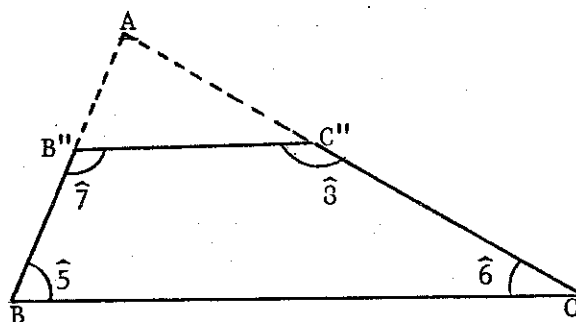
e

$$\hat{3} \cong \hat{6}$$

(axioma de congruência 5 - transitividade).

Então, usando o teorema 2, dos ângulos alternos internos de 2 retas, cortadas por uma transversal, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B''C''}$.

O quadrilátero $\square BB''C''C$ é, então, convexo, pois, (na figura 1) se a reta $\overleftrightarrow{B''C''} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, então $\overleftrightarrow{B''C''}$ deixa BC toda no mesmo semi-plano em relação a $B''C''$ e do mesmo modo BC deixa $B''C''$ no mesmo semi-plano. $\overleftrightarrow{C''C}$ corta $\overleftrightarrow{BB''}$ em A , mas A não está entre C e C'' , pela construção de $AC'' \cong A'C'$ ($A'C' < AC$).



Daí $\square BB''C''C$ é convexo. Também

$$\hat{5} + \hat{7} = 180^\circ = \hat{6} + \hat{8}$$

e

$$\hat{5} + \hat{7} + \hat{6} + \hat{8} = 360^\circ$$

o que contraria o corolário do teorema 9, e o $\square BB''C''C$ não existe, isto é, os triângulos são congruentes.

Juntando tudo, é impossível, na Geometria Hiperbólica, aumentar ou diminuir um triângulo, sem distorção. (Porque não há semelhança). "Num mundo hiperbólico, a fotografia seria surrealista".

Uma consequência surpreendente do teorema 10 é que, na Geometria Hiperbólica, um segmento pode ser determinado com a ajuda de um ângulo, por exemplo, um ângulo de um triângulo determina univocamente o comprimento do lado.

Podemos dizer, então, que a Geometria Hiperbólica tem uma *unidade absoluta* de comprimento.

"Se a Geometria do Universo físico fosse hiperbólico, não seria mais necessário conservar cuidadosamente a unidade

de comprimento no Bureau Standards". (O mesmo é verdade para a Geometria Elíptica).

3. PARALELAS QUE ADMITEM UMA PERPENDICULAR COMUM

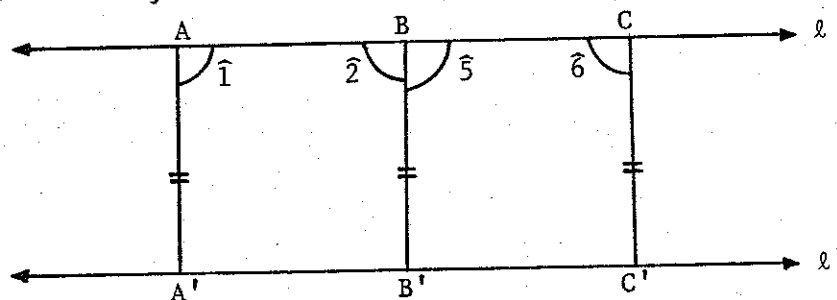
Quando se fala no postulado das paralelas de Euclides, lembramos dos trilhos de trem, cuja distância permanece constante.

Vamos fazer uma observação mais precisa. Dadas as retas ℓ e ℓ' e os pontos A, B, C, \dots sobre ℓ , baixemos as perpendiculares AA', BB', CC', \dots , desses pontos, sobre ℓ' .

Diremos que A, B, C, \dots são equidistantes de ℓ' , se todos esses segmentos de perpendiculares forem congruentes entre si.

TEOREMA 11. Na Geometria Hiperbólica, se ℓ e ℓ' são duas retas paralelas quaisquer, ℓ tem no máximo 2 pontos equidistantes de ℓ' .

Demonstração.



Suponhamos, por absurdo, que haja 3 pontos, A, B, C, em ℓ , equidistantes de ℓ' .

Então os quadriláteros

$$\square A'B'BA$$

$$\square A'C'CA$$

e

$$\square B'C'CB$$

são quadriláteros de Saccheri pois os ângulos da base são ângulos retos e os lados AA', BB' e CC' são congruentes.

Mas já demonstramos (teorema 4) que os ângulos superiores de um quadrilátero de Saccheri, são congruentes, então

$$\hat{1} \cong \hat{2}$$

$$\hat{1} \cong \hat{6}$$

$$\hat{5} \cong \hat{6}$$

e daí, pela transitividade (axioma congruência 5), $\hat{1} \cong \hat{5}$ e $\hat{2} \cong \hat{5}$ como $\hat{2}$ e $\hat{5}$ são ângulos suplementares, $\hat{2}$ e $\hat{5}$ são retos.

Consequentemente, esses quadriláteros de Saccheri são todos retângulos.

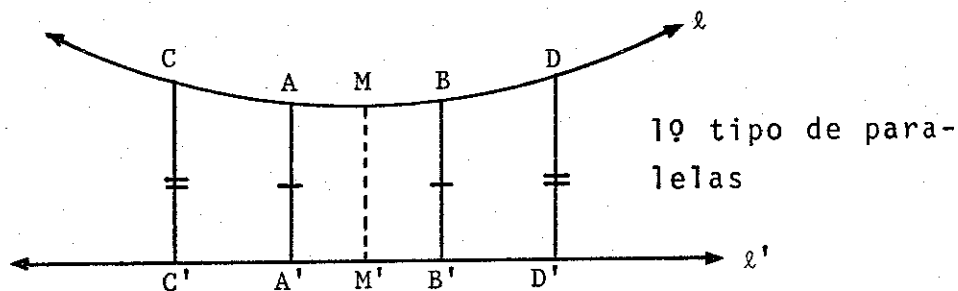
Mas não existem retângulos na Geometria Hiperbólica (teorema 9). Essa contradição mostra, então, que A, B, C não podem ser equidistantes de ℓ' .

O teorema afirma que no máximo 2 pontos de ℓ podem, ao mesmo tempo, ser equidistantes de ℓ' .

Ele permite a possibilidade de existirem pares de pontos (A,B) , $(C,D), \dots$, em ℓ , tais que cada par seja equidistante de ℓ' .

Então, baixemos as perpendiculares, $AA' \cong BB'$ e $CC' \cong DD'$, com $AA' \neq CC'$.

Podemos representar por:



Esta figura sugere que o ponto "no meio", M , de ℓ , está mais próxima de M' , de ℓ' , com ℓ afastando-se de ℓ' , simetricamente, de ambos os lados deste ponto médio.

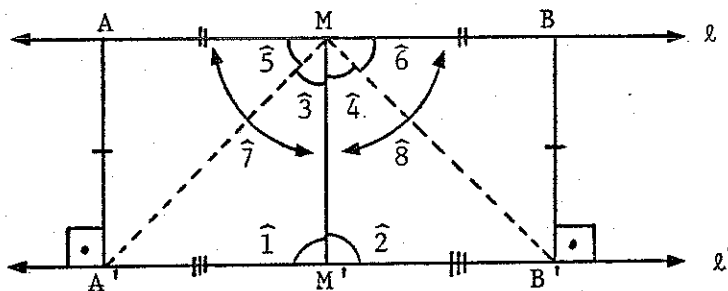
TEOREMA 12. Na Geometria Hiperbólica, se ℓ e ℓ' são retas paralelas, para as quais existem um par de pontos A e B em ℓ , equidistantes de ℓ' , então:

- 1) ℓ e ℓ' têm um segmento perpendicular comum.
- 2) Esse segmento é o menor segmento entre ℓ e ℓ' .

Demonstração. Suponhamos que A e B , em ℓ , sejam equidistantes de ℓ' .

Então $\square A'B'BA$ é um quadrilátero de Saccheri (lados laterais-congruentes e perpendiculares a $A'B'$, onde A' e B' são os pés das perpendiculares de A e B em ℓ').

Seja M o ponto médio de AB e M' o ponto médio de $A'B'$ (pela Geometria Absoluta, todo segmento tem um ponto médio).



Para demonstrar o teorema, vejamos antes o seguinte lema:

Lema. O segmento que une os pontos médios da base e do lado superior do quadrilátero de Saccheri é:

- (i) perpendicular a ambos (base e lado superior).
- (ii) esse segmento é menor que os lados.

Demonstração. Sabemos que $\hat{A} \cong \hat{B}$ (ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri são congruentes). Então

$$\Delta A'M \cong \Delta B'M \quad (\text{LAL})$$

então os lados correspondentes $A'M$ e $B'M$ são congruentes \implies
 $\Delta A'M'M \cong \Delta B'M'M \quad (\text{LLL}) \implies$ os ângulos correspondentes $\hat{1} \cong \hat{2}$.

Desde que $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são suplementares, eles devem ser re
tos, provando então que

$$M'M \perp A'B' \quad (1)$$

Dos dois pares de triângulos congruentes, temos também

$$\hat{3} \cong \hat{4}$$

e

$$\hat{5} \cong \hat{6}$$

somando esses ângulos, temos, pela Geometria Absoluta,

$$\underbrace{\hat{3} + \hat{5}}_{\hat{7}} \cong \underbrace{\hat{4} + \hat{6}}_{\hat{8}}$$

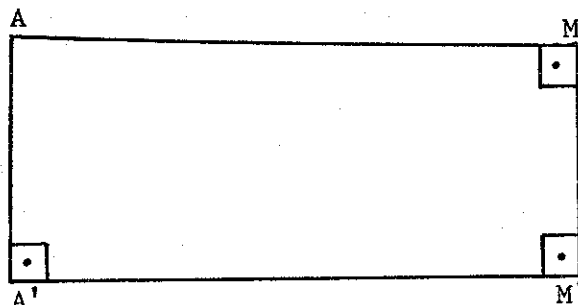
isto é, os ângulos suplementares $\hat{7}$ e $\hat{8}$ são congruentes.

Eles são, então, ângulos retos e MM' é, também, perpen
dicular ao lado superior AB :

$$MM' \perp AB \quad (2)$$

Então, por (1) e (2), MM' é perpendicular comum, e fi
ca demonstrado (i).

Consideremos agora o seguinte quadrilátero $\square A'M'MA$.



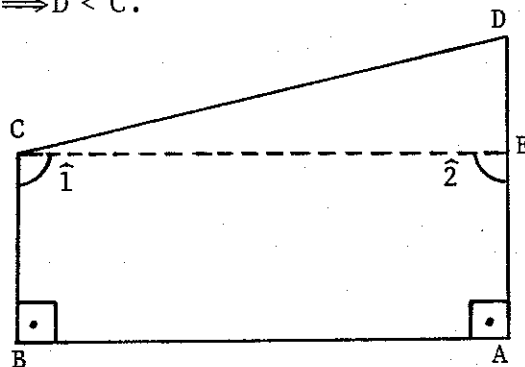
Ele tem 3 ângulos retos, então ele é o que chamamos de quadrilátero de Lambert.

Na Geometria Hiperbólica, o quarto ângulo deve ser agudo, porque a soma dos ângulos é menor que 4 retos (corolário do teorema 9).

Vejamos que $AA' > MM'$, isto é, que $MM' < AA'$. Vamos demonstrar que $AA' > MM'$, usando resultados da Geometria Absoluta.

Teoremas auxiliares

I. Na figura abaixo, vamos demonstrar em primeiro lugar que, se $BC < AD \implies \hat{D} < \hat{C}$.



Então, seja $\square ABCD$, um quadrilátero cujos ângulos da base \hat{A} e \hat{B} sejam retos: $\hat{A} \cong \hat{B} = 90^\circ$ e $BC < AD$.

Demonstração. Se $BC < AD$, tomamos E entre A e D , tal que $BC \cong AE$, com $A * E * D$.

Temos então um quadrilátero de Saccheri. Então

$$\hat{1} \cong \hat{2} \quad (1)$$

e daí, no $\triangle ECD$,

$$\hat{2} > \hat{D} \quad (2)$$

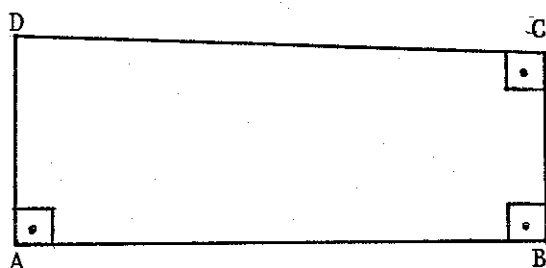
(teorema do ângulo externo) e então, por (1) e (2) $\hat{1} > \hat{D}$ e como $\hat{C} > \hat{1}$, temos $\hat{C} > \hat{D}$ ou $\hat{D} < \hat{C}$.

II. Num quadrilátero de Lambert (3 ângulos retos),

a) O 4º ângulo nunca é obtuso, pois se fosse obtuso, teríamos um quadrilátero cuja soma dos ângulos seria maior que 360° , absurdo.

b) Se \hat{D} é um ângulo reto, então os lados opostos do $\square ABCD$ são congruentes, pois se não são congruentes, podemos supor $DC > AB$ e pelo resultado anterior $\hat{C} < \hat{D}$, contra a hipótese.

c) Se \hat{D} é agudo, então os lados adjacentes a \hat{D} são maiores que seus lados opostos, isto é, $AD > BC$ e $DC > AB$ porque $\hat{D} < \hat{C} = 90^\circ$.



Se BC não fosse menor que AD , então

(i) $BC \cong AD$ ou

(ii) $BC > AD$

(i) Mas se $BC \cong AD$, no quadrilátero de Saccheri, $\hat{C} \cong \hat{D}$, contra a hipótese.

(ii) Se $BC > AD$, pelo resultado do teorema auxiliar I, $\hat{C} < \hat{D}$, contra a hipótese, e daí $BC < AD$ ou $AD > BC$. Da mesma forma, $DC > AB$.

Para completar a demonstração do teorema 12, precisamos demonstrar que

III. Se $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} = 90^\circ$ e $\hat{D} < 90^\circ$ então $AD > BC$ e $DC > AB$

Demonstração. Pelo teorema auxiliar I e $\hat{C} > \hat{D}$ temos $DA > CB$.

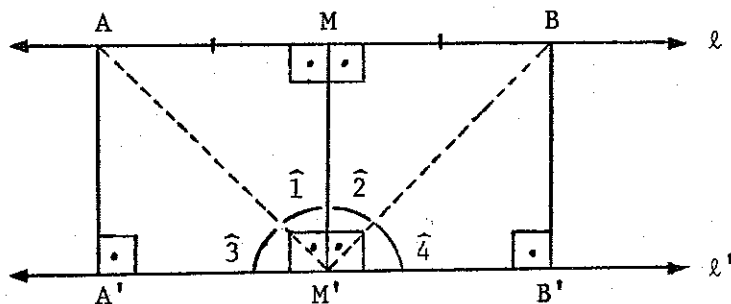
Pelo teorema auxiliar I e $\hat{D} < \hat{A}$, temos $DC > AB$.

Aplicando esse resultado no teorema 12, fica demonstrado que MM' é menor que qualquer outro segmento entre ℓ e ℓ' .

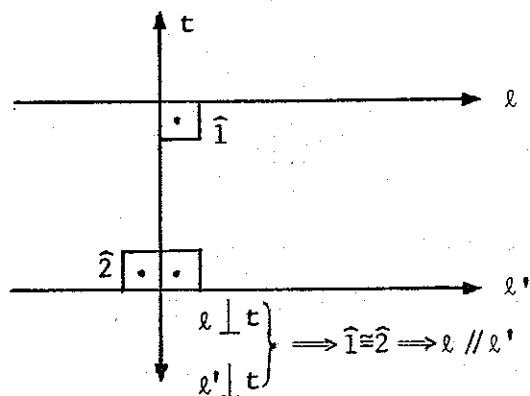
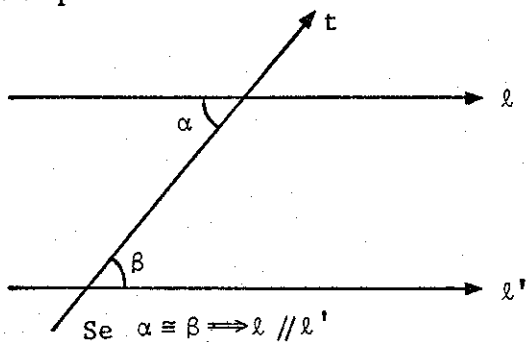
TEOREMA 13. Na Geometria Hiperbólica, se as retas ℓ e ℓ' têm um segmento perpendicular comum MM' , então:

- 1) Elas são paralelas ($\ell // \ell'$).
- 2) MM' é única.
- 3) Se A e B são pontos quaisquer de ℓ , tal que M é ponto médio do segmento AB , então A e B são equidistantes de ℓ' .

Demonstração.

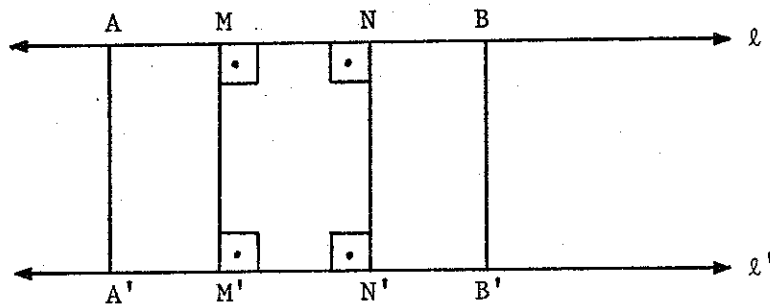


1) O fato de que ℓ e ℓ' são paralelas decorre do seguinte corolário do teorema dos ângulos alternos-internos (teorema 2, Geometria Absoluta); 2 retas perpendiculares à mesma reta, são paralelas.



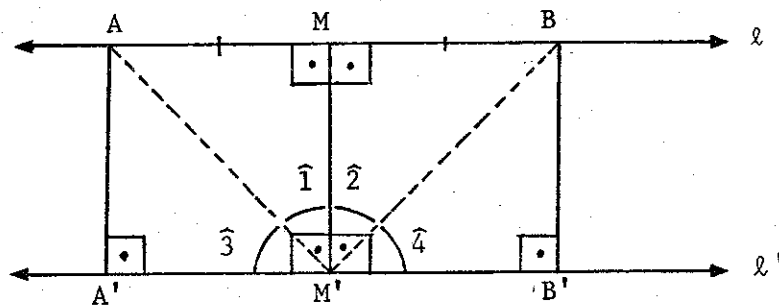
2) *Unicidade.*

Se ℓ e ℓ' tivessem um outro segmento de perpendicular comum NN' , então $\square M'N'NM$ seria um retângulo, que não pode existir (teorema 9).

3) *A e B equidistantes de ℓ' .*

Suponhamos agora que M é o ponto médio de AB. Baixe mos as perpendiculares AA' e BB' a ℓ' . Devemos demonstrar que $AA' \cong BB'$.

Na figura

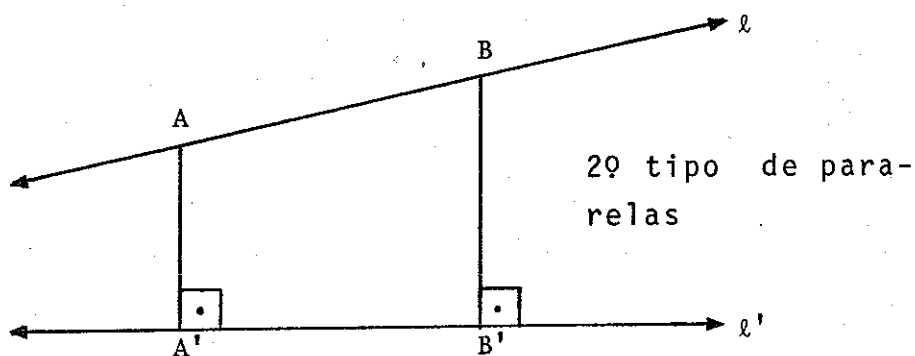


1º) $\triangle AM'M \cong \triangle BM'M$ (LAL) $\implies AM' \cong BM'$ e $\hat{1} \cong \hat{2}$ então a medida de $\hat{3} = 90^\circ$ - medida do $\hat{1} = 90^\circ$ - medida de $\hat{2} =$ medida de $\hat{4}$ (Geometria Absoluta), então $\hat{3} \cong \hat{4}$.

Consequentemente $\triangle AA'M' \cong \triangle BB'M'$ (\triangle retângulos) então os lados correspondentes são congruentes $\implies AA' \cong BB'$.

Notemos, no entanto, que o teorema 11 (duas retas paralelas têm no máximo 2 pontos equidistantes), permite outra possibilidade, a de que não existam pares de pontos sobre ℓ , equidistantes de ℓ' .

Um diagrama disto, poderia ser



Nesta figura, os pontos de ℓ estão em distâncias variadas, de ℓ' ; ℓ se afasta em uma direção e se aproxima de ℓ' em outra direção, sem nunca encontrá-la.

Assim, diferentes pares de retas paralelas não necessitam posicionar-se da mesma forma — umas podem parecer com o 1º tipo e outras com o 2º.

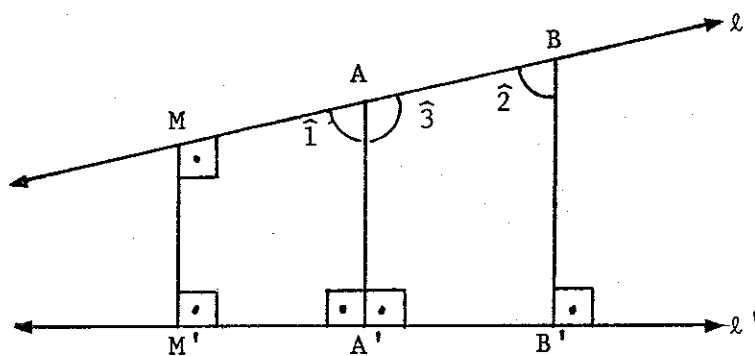
4. SEMI-RETAS PARALELAS - LIMITE

Os teoremas 12 e 13, acrescentados com os seguintes, nos dão uma compreensão dos tipos de retas paralelas.

TEOREMA 14. Seja MM' o segmento de perpendicular comum entre ℓ e ℓ' .

Sejam A e B pontos quaisquer em ℓ , tais que $M * A * B$ e baixemos as perpendiculares AA' e BB' a ℓ' .

Vamos demonstrar que $AA' < BB'$.



Demonstração. Temos:

$$\left. \begin{array}{l} MM' \perp \ell \\ MM' \perp \ell' \end{array} \right\} \text{por hipótese}$$

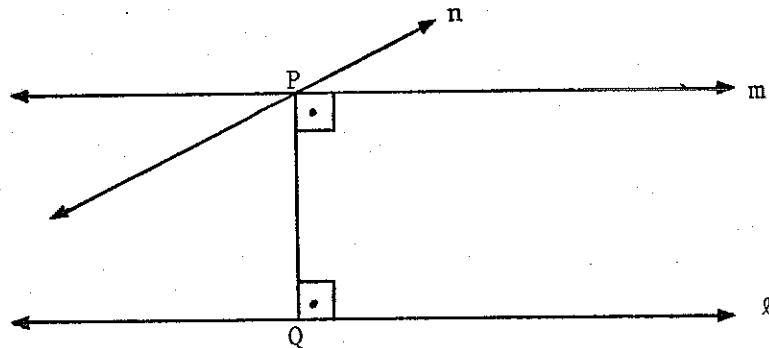
$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp \ell' \\ BB' \perp \ell' \\ M * A * B \end{array} \right\} \text{por construção}$$

Sabemos que no quadrilátero de Lambert $\square MM'A'A$, $\hat{1}$ é agudo (consequência do corolário do teorema 9), e no quadrilátero de Lambert $\square MM'B'B$, $\hat{2}$ é agudo (pelo mesmo motivo).

Então, se $\hat{1}$ é agudo, $\hat{3}$, seu suplementar, é obtuso. Então, $\hat{3} > \hat{2} \implies AA' < BB'$ (parte II.c - dos teoremas auxiliares do teorema 12).

Dadas qualquer reta ℓ e qualquer ponto P , $P \notin \ell$, baixemos a perpendicular \overline{PQ} a ℓ e seja m a perpendicular a \overline{PQ} por P .

m e ℓ têm, então, um segmento de perpendicular PQ comum.



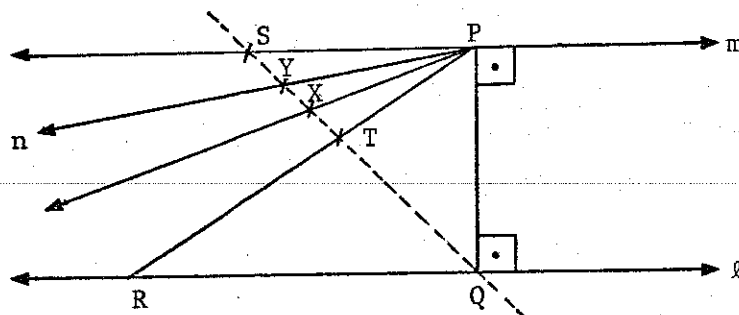
Pares de pontos em m , situados simetricamente em relação a \overline{PQ} , são equidistantes de ℓ (teorema 13).

Pelo teorema Hiperbólico fundamental, existem outras retas n , por P , paralelas a ℓ .

Não podemos dizer, no entanto, que essas retas n são do 2º tipo de paralelas porque, apesar de n e ℓ não terem uma perpendicular comum em P , poderiam ter uma perpendicular comum por um ponto diferente de P .

Vejamos, intuitivamente, como se pode aplicar o axioma da continuidade, mostrando, assim, que existem paralelas do 2º tipo.

Consideremos uma semi-reta \overrightarrow{PS} de m e consideremos várias semi-retas entre \overrightarrow{PS} e \overrightarrow{PQ} .



Algumas dessas semi-retas, como \overrightarrow{PR} , interceptarão ℓ ; outras, como \overrightarrow{PY} , não.

Usando o axioma de continuidade de Dedekind, concluímos que existe uma semi-reta \overrightarrow{PX} que não encontra ℓ e tal que todas as semi-retas do ângulo \widehat{QPX} encontram ℓ .

A semi-reta \overrightarrow{PX} é "limite", no seguinte e preciso sentido:

Qualquer semi-reta entre \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PQ} intercepta ℓ , enquanto que qualquer outra semi-reta \overrightarrow{PY} , tal que \overrightarrow{PX} está entre \overrightarrow{PY} e \overrightarrow{PQ} , não intercepta.

A semi-reta \overrightarrow{PX} pode ser, então, chamada de *semi-reta paralela-limite*, à esquerda, a ℓ , por P.

TEOREMA 15. Qualquer que seja ℓ e qualquer que seja P, $P \notin \ell$, seja Q o pé da perpendicular de P a ℓ .

1. Existem, então, duas *únicas* semi-retas \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PX}' , em semi-planos opostos em relação a \overrightarrow{PQ} , que não encontram ℓ e têm a propriedade de que uma semi-reta com origem em P encontra ℓ se e somente se está entre \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PX}' .

2. Essas semi-retas estão situadas simetricamente em relação a \overrightarrow{PQ} , no sentido de que $\widehat{XPQ} \cong \widehat{X'PQ}$ ou $\hat{1} \cong \hat{2}$ (na figura).

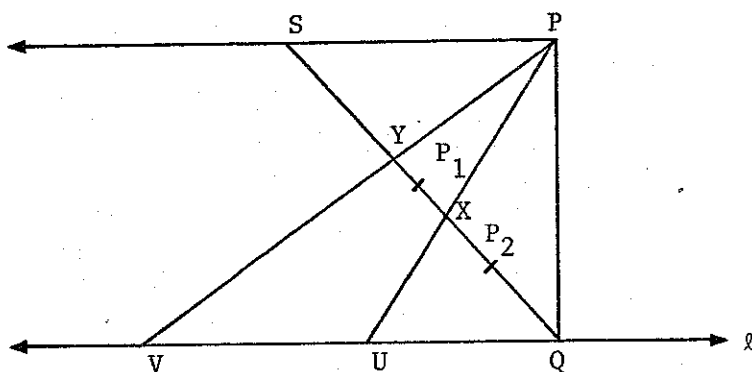
$$\Sigma_1 \neq \emptyset \text{ pois } Q \in \Sigma_1$$

e

$$\Sigma_2 \neq \emptyset \text{ pois } S \in \Sigma_2$$

consequentemente (Σ_1, Σ_2) é um corte de Dedekind.

Pelo axioma de Dedekind, existe um único ponto X sobre \overleftrightarrow{SQ} , tal que para P_1 e P_2 sobre \overleftrightarrow{SQ} , $P_1 * X * P_2$ se e somente se $P_1 \in \Sigma_2$ e $P_2 \in \Sigma_1$.



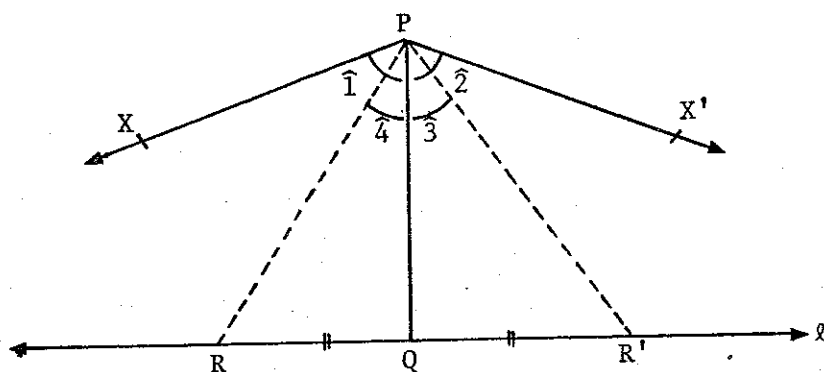
Por definição de Σ_1 e Σ_2 , todas as semi-retas com origem P que contem um ponto entre X e Q , encontram l e as semi-retas com origem P que contem um ponto entre S e X , não. Afirmamos, então, que \overleftrightarrow{PX} também não encontra.

Suponhamos, por absurdo, que \overleftrightarrow{PX} encontre l num ponto U . Escolhemos um ponto V em l , tal que $V * U * Q$ (axioma de ordem 2).

V e U estão no mesmo semi-plano em relação a SQ , pois Q não está entre V e U , uma vez que vale $V * U * Q$; V e P estão em semi-planos opostos em relação a SQ , porque, como vale $S * X * Q$, Q é externo ao ângulo \widehat{SPU} e como vale $V * U * Q$, V é

interno a $S\hat{P}U$. Como $S \in \vec{PS}$ e $X \in \vec{PU}$, então PV corta SX em Y , tal que $S * Y * X$ e $Y \in \Sigma_2$, contrariando o fato de que $P\vec{Y}$ encontra ℓ .

Então PX é a semi-reta paralela limite à esquerda. Obtemos a semi-reta paralela limite à direita, de maneira análoga.



2. Para demonstrar a simetria, suponhamos, por absurdo, que os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ não sejam congruentes.

Por exemplo, medida de $\hat{1} <$ medida de $\hat{2}$. Pelo axioma da congruência 4, existe uma semi-reta entre $P\vec{X}'$ e $P\vec{Q}$ que intercepta ℓ (por definição de semi-reta limite) em um ponto R' , tal que

$$\hat{3} \cong \hat{1} \quad (1)$$

Seja R o ponto simétrico de R' , no semi-plano oposto em relação a $P\vec{Q}$, tal que $R * Q * R'$ e $RQ \cong R'Q$ (axioma de congruência 1). Então

$$\triangle RPQ \cong \triangle R'PQ \text{ (LAL)} \implies \hat{4} \cong \hat{3}.$$

Como $\hat{3} \cong \hat{1}$ (por (1)) e $\hat{4} \cong \hat{3} \implies \hat{4} \cong \hat{1}$ (por transitividade) mas isso é impossível, pois \overrightarrow{PR} está entre \overrightarrow{PX} e \overrightarrow{PQ} (axioma da congruência 4) $\implies \hat{1} \cong \hat{2}$.

Consequência. Cada um dos ângulos congruentes $\hat{1}$ e $\hat{2}$ é chamado (por abuso de linguagem), de *ângulo do paralelismo* no ponto P, com relação a ℓ .

Sua medida, em graus, é usualmente indicada por

$$\pi(PQ)^\circ$$

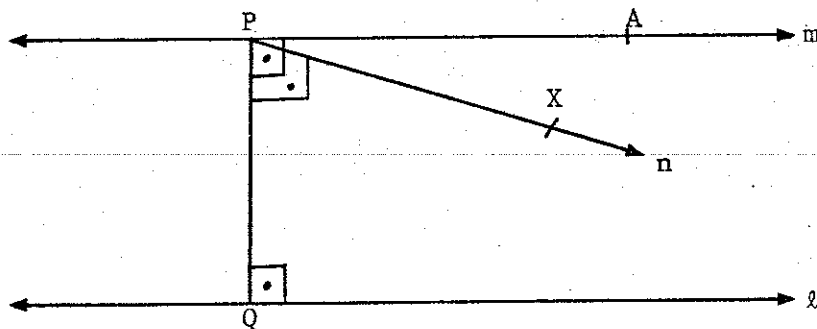
Notemos que $\pi(PQ)^\circ < 90^\circ$, porque, se

$$\pi(PQ)^\circ = 90^\circ \implies \angle \hat{PQ} = 90^\circ$$

e como

$$\left. \begin{array}{l} \angle \hat{PQ} = 90^\circ \\ m \perp PQ \\ \overrightarrow{PX} \text{ semi-reta paralela limite} \end{array} \right\} \text{então } \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PA}$$

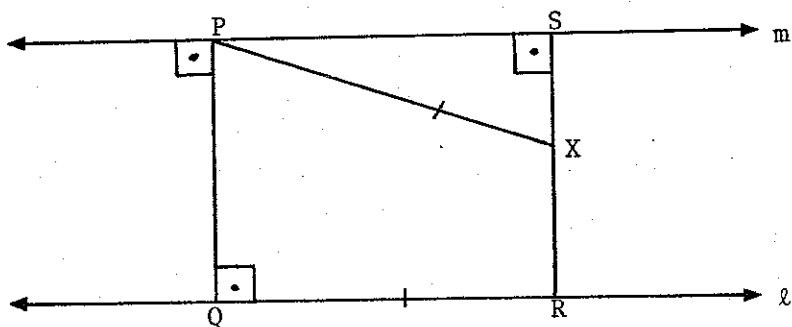
então \overrightarrow{PA} é única, contrariando o teorema fundamental da Geometria Hiperbólica (teorema 6).



Demonstramos, assim, a existência de semi-retas paralelas limite, pelo uso do axioma da continuidade.

Vejamos o método que J. Bolyai descobriu, para construir a semi-reta paralela limite.

Dado um ponto P , e uma reta ℓ , $P \notin \ell$, seja Q o pé da perpendicular de P a ℓ , m a reta perpendicular a \overline{PQ} , por P , $R \neq Q$ qualquer ponto de ℓ , e S o pé da perpendicular de R a m .

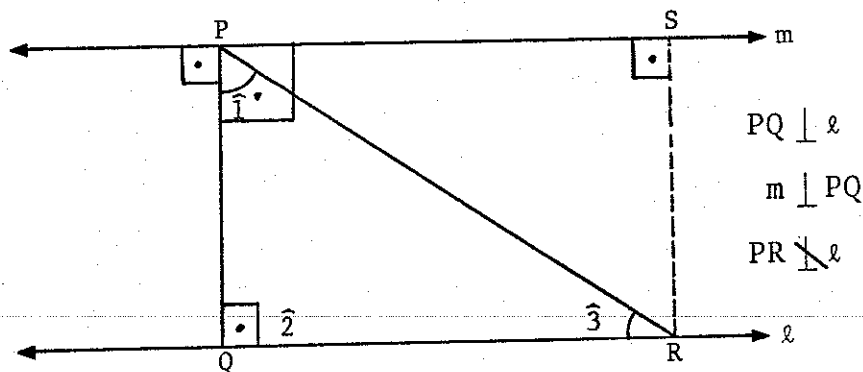


Vamos demonstrar antes, que:

$$PR > QR \quad (1)$$

e

$$PS < QR \quad (2)$$



Como $QR > PS$, a circunferência de centro P e raio QR corta \overline{PS} no ponto Y , com S entre P e Y e então, S é interno à circunferência. R é externo a essa circunferência, pois $PR > QR$.

Logo, o segmento SR corta a circunferência em X , pelo princípio da continuidade, tal que $S * X * R$.

\overrightarrow{PX} é a semi-reta paralela limite, à direita, a ℓ , por P , (por construção), como demonstraremos adiante, por reflexão.

5. CLASSIFICAÇÃO DAS PARALELAS

Discutimos, então, dois tipos de paralelas a ℓ , por um ponto P , $P \notin \ell$.

O 1º tipo, constituído por paralelas que têm uma perpendicular comum com ℓ e o 2º tipo, que se aproximam assintoticamente de ℓ , numa direção e divergem na outra.

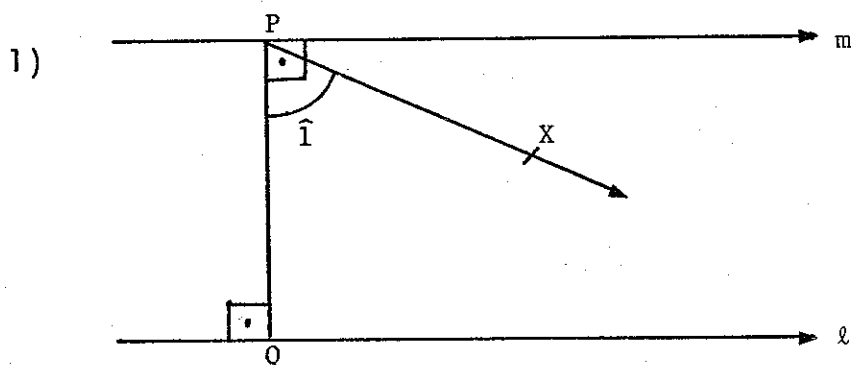
Vamos demonstrar que:

TEOREMA 16.

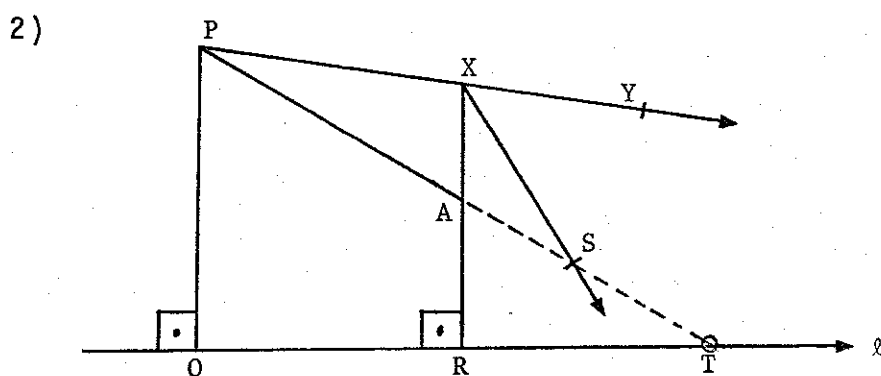
1) O 2º tipo de paralelas não tem perpendicular comum com ℓ .

2) Se \overrightarrow{PY} é a semi-reta paralela limite a ℓ , por P , \overrightarrow{XY} é a semi-reta paralela limite a ℓ , por X , onde $X \in \overrightarrow{PY}$ e $P * X * Y$.

Demonstração.

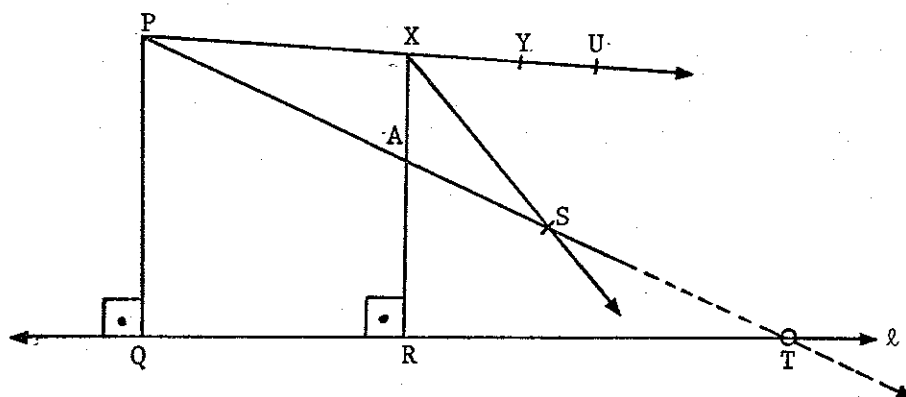


Já vimos que se $\pi(PQ) = 90^\circ$, isto implica que existe uma única paralela a ℓ , por P , contrariando o teorema Hiperbólico fundamental (teorema 6), então $\hat{i} < 90^\circ$.



Dados, então, $PQ \perp \ell$, \vec{PY} semi-reta paralela limite a ℓ , por P e $X \in \vec{PY}$, X entre P e Y , vamos mostrar que \vec{XY} é a semi-reta paralela limite a ℓ , por X .

Devemos provar, então, que qualquer semi-reta \vec{XS} , entre \vec{XY} e \vec{XR} , onde R é o pé da perpendicular de X a ℓ , encontra ℓ , porque se \vec{XS} encontra ℓ , então \vec{XY} será paralela limite.



1º. Temos que mostrar que \overrightarrow{PS} está entre \overrightarrow{PY} e \overrightarrow{PQ} .

De fato:

Em relação à semi-reta \overrightarrow{XR} :

a) S e Y estão no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{XR} porque tomamos \overrightarrow{XS} entre \overrightarrow{XR} e \overrightarrow{XY} .

b) P e Y estão em semi-planos opostos em relação a \overrightarrow{XR} , porque tomamos X entre P e Y.

Então por a) e b) P e S estão em semi-planos opostos em relação a \overrightarrow{XR} .

$$\Rightarrow \exists \{A\} = \overrightarrow{XR} \cap \overrightarrow{PS} \quad (1)$$

e S e Y estão no mesmo semi-plano em relação a PQ, pois $P \in PQ$ e $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{XR}$ e X entre P e Y.

Em relação à semi-reta \overrightarrow{XY} :

a) S e R estão no mesmo semi-plano em relação a $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PY}$, pois $Y \in \overrightarrow{PY}$.

b) Q e R estão no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{PY} , pois $\ell // \overrightarrow{PY}$ por hipótese e $Q \in \ell$ e $R \in \ell$.

Então por a) e b) Q e S estão no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{PY} e S está entre \overrightarrow{PY} e \overrightarrow{PQ} , isto é, interior ao ângulo YPQ . Então \overrightarrow{PS} está entre \overrightarrow{PY} e \overrightarrow{PQ} .

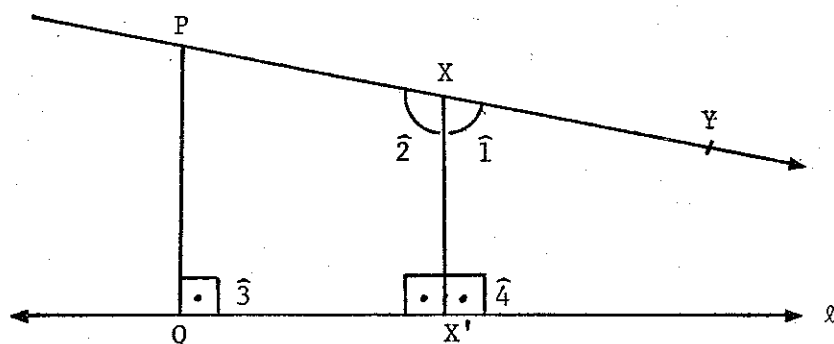
Como \overrightarrow{PY} é paralela limite, \overrightarrow{PS} , então, intercepta ℓ num ponto T.

2°. X é exterior ao $\triangle ART$, pois $\exists A$, por (1) tal que $\{A\} = \overrightarrow{XR} \cap \overrightarrow{PS}$.

Tomemos \overrightarrow{XS} entre \overrightarrow{XR} e \overrightarrow{XY} : \overrightarrow{XS} não corta o segmento AR e, cortando AT em $S \neq T$ intercepta \overrightarrow{RT} (por Pasch); então \overrightarrow{XS} encontra $\ell \implies \overrightarrow{XY}$ é paralela limite.

Mostrando que \overrightarrow{XY} é a paralela limite, podemos tomar qualquer ponto U sobre \overrightarrow{XY} tal que $X * Y * U$ e a paralela limite é \overrightarrow{YU} e podemos provar que a distância a ℓ ficará menor, isto é, a distância de X a ℓ decresce se X se afasta de P, sobre uma semi-reta paralela limite.

TEOREMA 17. Se \overrightarrow{PX} é a semi-reta paralela limite, a ℓ , por P, e Q e X', os pés das perpendiculares a ℓ , de P e X, respectivamente, então $PQ > XX'$.



Demonstração.

Temos: \overrightarrow{PX} semi-reta paralela limite a ℓ , por P, por hipótese; $\hat{3} \cong \hat{4} = 90^\circ$ por construção.

Como $\pi(PQ) < 90^\circ$ (consequência do teorema 15) e $\pi(PQ) \cong \pi(XX')$ (consequência do teorema 16) $\implies \pi(XX') < 90^\circ$ então pelo teorema 12 (teoremas auxiliares II-c), no $\square PQX'X$, ao maior ângulo opõe-se o maior lado, então $PQ > XX'$. Então, as distâncias entre PY e ℓ diminuem, à medida que X se afasta de P, sobre a semi-reta paralela limite a ℓ .

S I M E T R I A D O P A R A L E L I S M O L I M I T E

TEOREMA 18. Se \overrightarrow{PB} é paralela limite a \overrightarrow{QD} , (isto é, a \overrightarrow{QD}), então \overrightarrow{QD} é também paralela limite a \overrightarrow{PB} .

Demonstração.

\overrightarrow{GH} intercepta o lado PQ do ΔPQJ , em G, mas não o lado QJ, pois $\overrightarrow{GH} \perp PQ$ e $\overrightarrow{QJ} \perp PQ$, então, por Pasch, intercepta PJ num ponto K.

Seja L o único ponto em \overrightarrow{PB} tal que $PL \cong PK$.

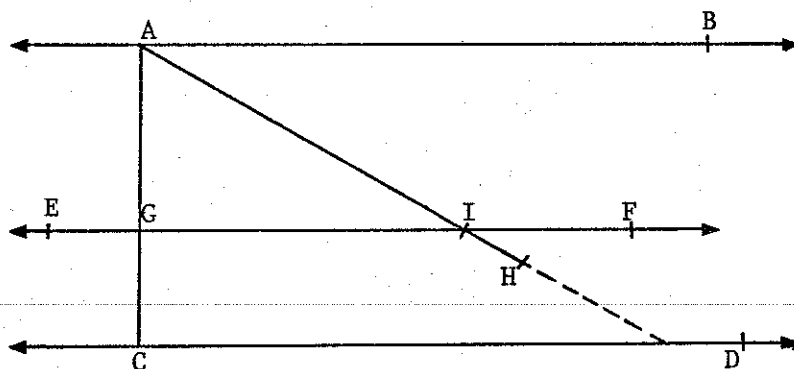
Temos, então,

$$\Delta PGK \cong \Delta PFL \quad \text{pois} \quad \begin{cases} PG \cong PF & \text{por construção} \\ \hat{1} \cong \hat{2} & \text{por construção} \\ PL \cong PK & \text{por construção} \end{cases}$$

Então \hat{PFL} é um ângulo reto (pois \hat{G} é reto). Então L deve estar sobre \overrightarrow{QE} e então, $\{L\} = \overrightarrow{PB} \cap \overrightarrow{QE}$ e portanto \overrightarrow{QE} intercepta \overrightarrow{RB} , ou seja, QD também é paralela limite a \overrightarrow{PB} .

TRANSITIVIDADE DO PARALELISMO LIMITE

TEOREMA 19. Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são ambas paralelas limite a \overrightarrow{EF} , então elas são paralelas limite entre si.



$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \text{lim a } \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{CD} \parallel \text{lim a } \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{AB} \parallel \text{lim a } \overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Demonstração. \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} não têm pontos em comum, pois, se tivessem, existiriam 2 paralelas limite a uma reta, por 1 ponto, num semi-plano, contrariando o teorema 15, de que a semi-reta paralela limite a uma reta, por 1 ponto, é única.

Podemos então considerar 2 casos:

- a) \overrightarrow{EF} está entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} (ver figura)
- b) \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} estão ambas no mesmo semi-plano em relação a \overrightarrow{EF} .

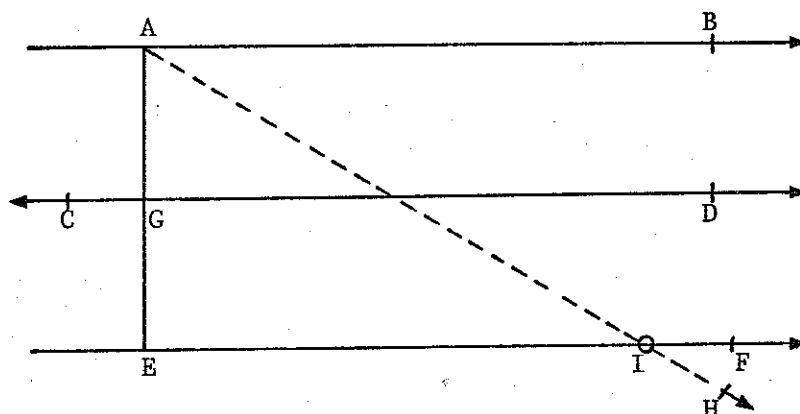
a) No caso de \overrightarrow{EF} estar entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} , consideremos G a intersecção de AC com \overrightarrow{EF} (axioma de ordem). Ou G está na semi-reta \overrightarrow{EF} ou tomamos a semi-reta \overrightarrow{GF} (no caso de E estar no outro semi-plano em relação a AC).

Qualquer semi-reta \overrightarrow{AH} interior ao ângulo \widehat{GAB} intercepta \overrightarrow{EF} num ponto I (por que \widehat{GAI} é menor que o ângulo da paralela limite \overrightarrow{AB}).

\overrightarrow{IH} , estando no interior do ângulo \widehat{CIF} , deve interceptar \overrightarrow{CD} , porque o ângulo \widehat{CIH} é menor que o ângulo \widehat{CIF} da paralela limite (pela simetria do paralelismo limite, se $\overrightarrow{CD} \parallel_{\text{lim}} a \overrightarrow{EF} \implies \overrightarrow{EF} \parallel_{\text{lim}} a \overrightarrow{CD}$).

Então qualquer semi-reta \overrightarrow{AH} interior do ângulo \widehat{CAB} , deve interceptar \overrightarrow{CD} ; então \overrightarrow{AB} é paralela limite a \overrightarrow{CD} .

b) No caso de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} estarem ambas na mesma semi-plano em relação a \overrightarrow{EF} , podemos supor que \overrightarrow{CD} , por exemplo, esteja já entre \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{EF} .

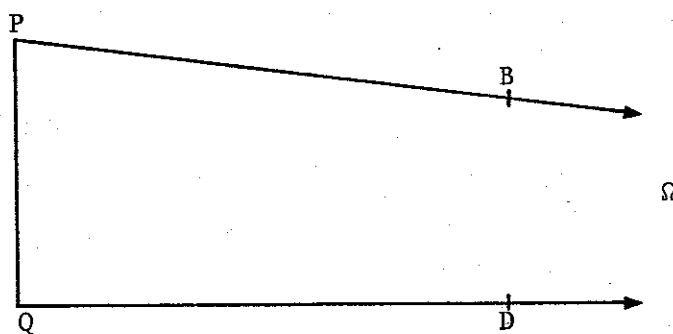


Neste caso AE intercepta \overleftrightarrow{CD} num ponto G , o qual podemos supor estar na semi-reta \overrightarrow{CD} .

Qualquer *semi-reta* \overrightarrow{AH} interior ao ângulo \widehat{GAB} intercepta \overleftrightarrow{EF} num ponto I .

Desde que \overleftrightarrow{CD} entra no $\triangle AEI$, deve encontrar AI (axioma de Pasch), então \overleftrightarrow{CD} é paralela limite a \overrightarrow{AB} .

Observação. Se \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{QD} são paralelas limite entre si, podemos supor que elas atinjam um ponto ideal Ω e indicá-las simplesmente por $P\Omega$ e $Q\Omega$.



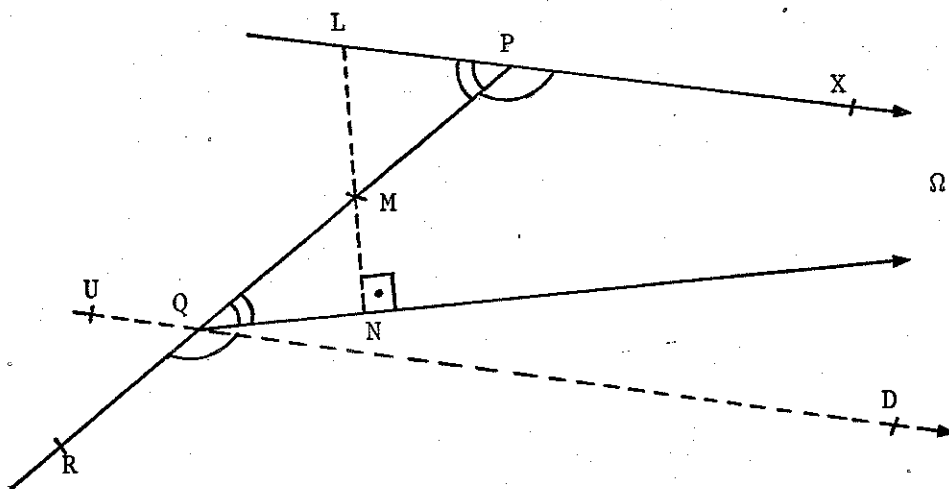
A figura consistente dessas semi-retas e o segmento PQ é, então, chamada de triângulo assintótico. PQ não é necessariamente perpendicular a $Q\Omega$.

Vejamos agora algumas propriedades destes triângulos, semelhantes aos dos triângulos da Geometria Euclidiana.

TEOREMA 20. Teorema do ângulo externo.

Se $\Delta PQ\Omega$ é um triângulo assintótico, onde $P\Omega$ e $Q\Omega$ são paralelas limite, então o ângulo externo $R\hat{Q}\Omega$ é maior que seu interno não adjacente $Q\hat{P}\Omega$.

Demonstração.



Tomemos $R\hat{Q}D \cong Q\hat{P}\Omega$.

a) \overrightarrow{QD} não corta $\overrightarrow{P\Omega}$, porque se \overrightarrow{QD} cortasse $\overrightarrow{P\Omega}$ em X então no ΔPQX , o ângulo externo $R\hat{Q}D$ seria congruente ao interno não adjacente, o que é absurdo.

Então \overrightarrow{QD} não é interna a $P\hat{Q}\Omega$, pois senão cortaria $\overrightarrow{P\Omega}$, pois $\overrightarrow{Q\Omega}$ é paralela limite a $\overrightarrow{P\Omega}$.

Logo, $\overline{QD} = \overline{Q\Omega}$ ou é interna a $R\hat{Q}\Omega$.

b) Suponhamos $\overline{QD} = \overline{Q\Omega}$ e tracemos $MN \perp \overline{Q\Omega}$, com M ponto médio de PQ e tomemos L em $\overline{P\Omega}$, tal que $PL \cong QN$ com L^*P^*X e unamos L a M.

Como $R\hat{Q}D \cong R\hat{Q}\Omega \cong Q\hat{P}\Omega$, então $M\hat{Q}N = L\hat{P}M$ e $\Delta LPM \cong \Delta NQM$ e $L\hat{M}P \cong N\hat{M}Q$ e M, N, L colineares.

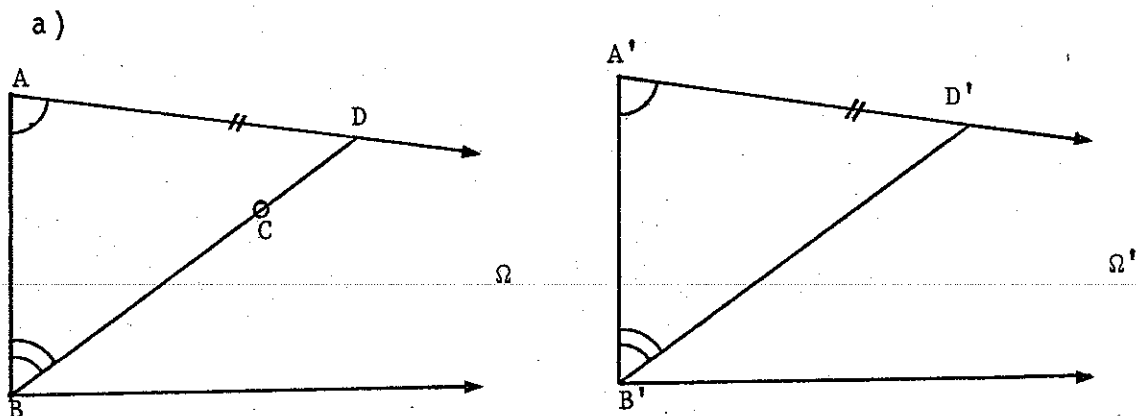
Daí, LN perpendicular comum de $\overline{P\Omega}$ e $\overline{Q\Omega}$ e o ângulo de paralelismo é reto, o que é absurdo, na Geometria Hiperbólica. Daí

c) \overline{QD} é interna a $R\hat{Q}\Omega$ e $R\hat{Q}\Omega > R\hat{Q}D$, isto é,

$$R\hat{Q}\Omega > Q\hat{P}\Omega.$$

TEOREMA 21. Teorema de congruência.

Se nos triângulos assintóticos $\Delta AB\Omega$ e $\Delta A'B'\Omega'$, onde $A\Omega$ e $B\Omega$, bem como $A'\Omega'$ e $B'\Omega'$ são paralelas limite, temos $B\hat{A}\Omega \cong B'\hat{A}'\Omega'$, então $A\hat{B}\Omega \cong A'\hat{B}'\Omega'$ se e somente se $AB \cong A'B'$.



Suponhamos $\widehat{B\hat{A}\Omega} \cong \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$ e $AB \cong A'B'$. Vamos demonstrar que $\widehat{A\hat{B}\Omega} \cong \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$.

Demonstração.

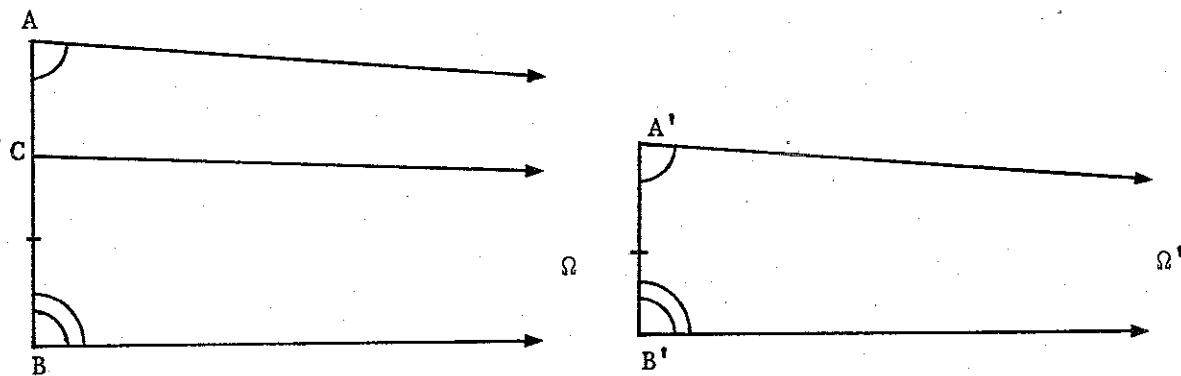
Se $\widehat{A\hat{B}\Omega} \neq \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$, podemos supor $\widehat{A\hat{B}\Omega} > \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$.

Tomemos então $\widehat{A\hat{B}C} \cong \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$. \overline{BC} corta $\overline{A\Omega}$ em D, pois $\overline{B\Omega}$ é paralela limite a $\overline{A\Omega}$. Tomemos agora D' tal que $A'D' \cong AD$.

Teremos então $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ e $\widehat{A'\hat{B}'D'} \cong \widehat{A\hat{B}D} \cong \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$ que é absurdo. $\implies \widehat{A\hat{B}\Omega} \cong \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$.

Reciprocamente:

b) Suponhamos agora $\widehat{B\hat{A}\Omega} \cong \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$ e $\widehat{A\hat{B}\Omega} \cong \widehat{A'\hat{B}'\Omega'}$. Vamos demonstrar que $AB \cong A'B'$.



Demonstração.

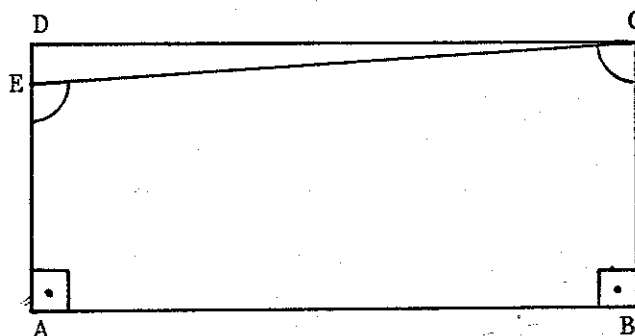
Se $AB > A'B'$, seja C o ponto sobre AB tal que $BC \cong B'A'$ e seja $C\Omega$ a semi-reta com origem C, a paralela limite a $A\Omega$. Pelo teorema da transitividade (teorema 19) $C\Omega$ é também paralela limite a $B\Omega$. Pela 1.^a parte da demonstração, então $\widehat{B\hat{C}\Omega} \cong \widehat{B'\hat{A}'\Omega'}$

Daí $\widehat{BC\Omega} \cong \widehat{BA\Omega}$, mas $\widehat{BC\Omega} > \widehat{BA\Omega}$, pelo teorema 20, do ângulo externo, o que é uma contradição. Então $AB \cong A'B'$.

Corolário. $PQ \cong P'Q'$ se e somente se $\pi(PQ)^\circ = \pi(P'Q')^\circ$

TEOREMA 22. Se no quadrilátero birretângulo ABCD, $\widehat{A} \cong \widehat{B} = 1$ reto e $\widehat{C} \cong \widehat{D}$, então $AD \cong BC$ e ABCD é um quadrilátero de Saccheri.

Demonstração.



Se $AD > BC$, tomemos E tal que, $AE \cong BC$ e então ABCE é um quadrilátero de Saccheri e $\widehat{AEC} \cong \widehat{BCE}$ (agudos).

Mas $\widehat{BCE} < \widehat{BCD} \cong \widehat{ADC}$ por hipótese e $\widehat{ADC} < \widehat{AEC}$ (teorema 20 do ângulo externo), o que é contradição, então $AD \cong BC$ e ABCD é quadrilátero de Saccheri.

Vamos provar, agora, que só existem os dois tipos de paralelas, na Geometria Hiperbólica.

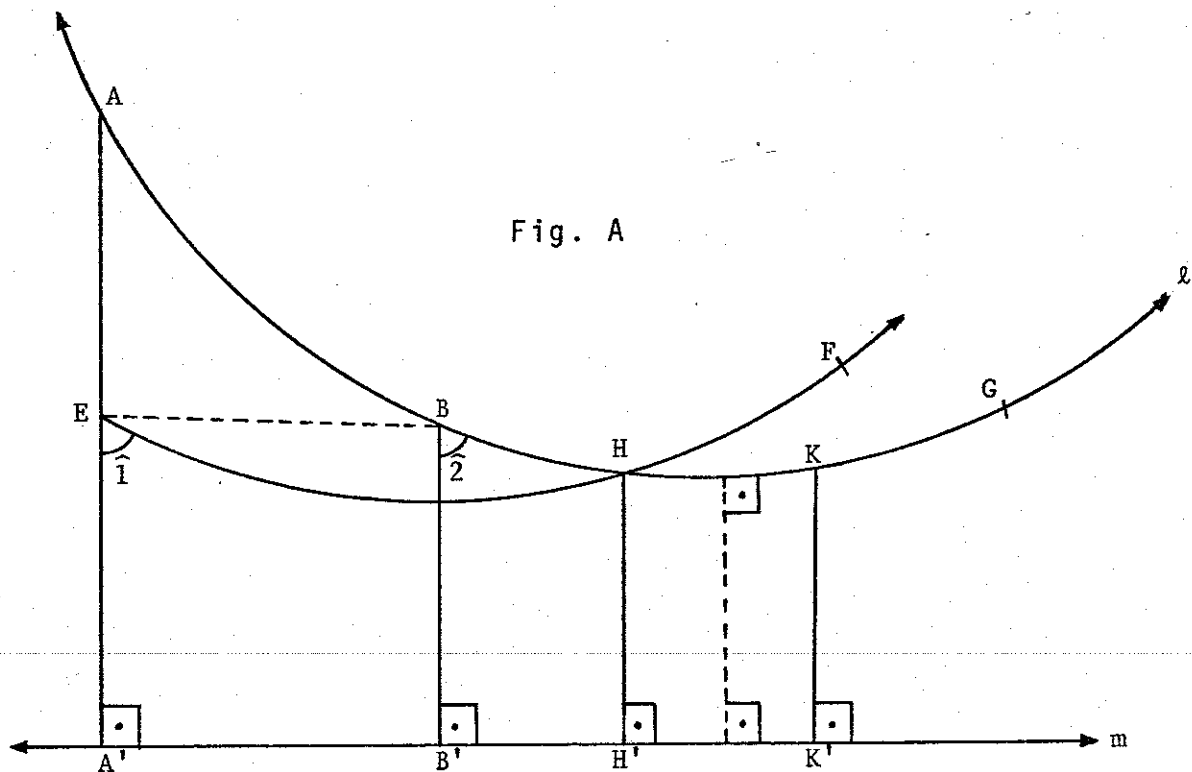
TEOREMA 23. Seja m uma paralela a ℓ , tal que m não contém uma semi-reta paralela limite a ℓ , em nenhuma das duas direções.

Então *existe* uma perpendicular a m e ℓ (a qual é única, pelo teorema 13).

Este teorema foi demonstrado por Borsuk e Szmielew pelo raciocínio da continuidade, mas suas demonstrações não nos dão idéia de como achar a perpendicular comum.

Hilbert deu uma construção direta, da qual faremos um esboço.

CONSTRUÇÃO DA PERPENDICULAR COMUM NO 1º TIPO



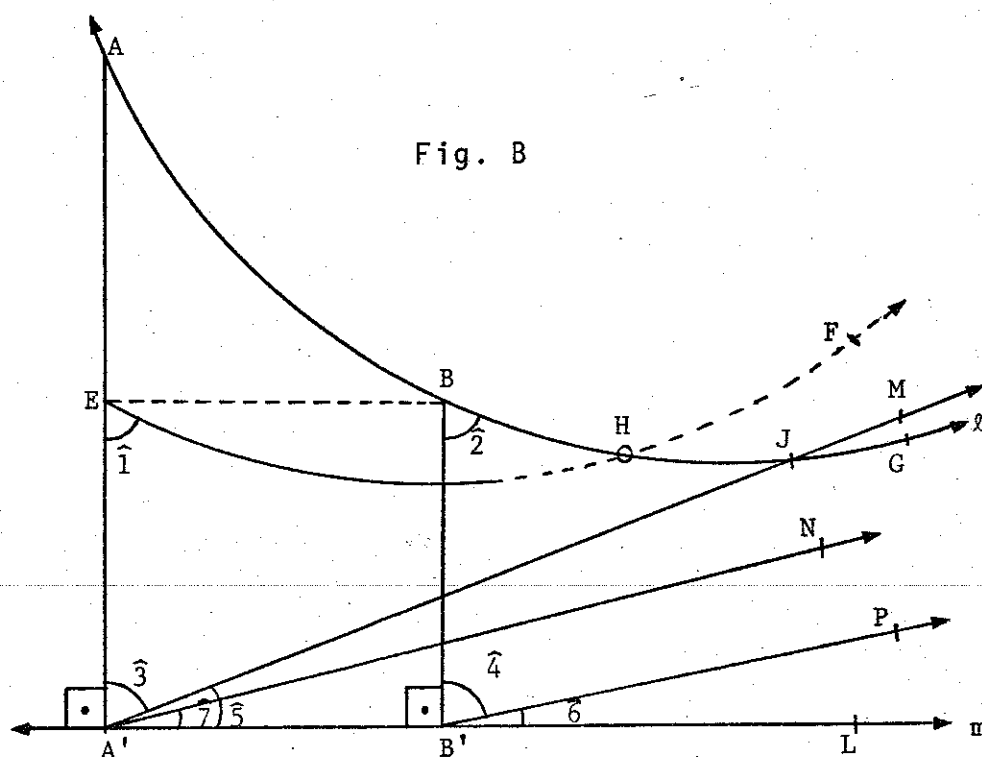
A idéia de Hilbert é determinar 2 pontos H e K em ℓ , que sejam equidistantes de m, porque, uma vez descobertas, a mediatriz do segmento HK é também perpendicular a m (pelo teorema 12). O segmento que une os pontos médios da base e do lado superior do quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos (base e lado superior).

Escolhamos 2 pontos quaisquer A e B, em ℓ , e suponhamos que o segmento perpendicular AA' de A a m é maior que o segmento BB' de B a m (ver figura).

Seja E o ponto entre A' e A tal que $A'E \cong B'B$.

No mesmo semi-plano de B em relação a AA', considere mos \vec{EF} a única semi-reta tal que $\hat{1} \cong \hat{2}$, onde $A * B * G$ (I).

Vejam agora que \vec{EF} intercepta \vec{AG} em um ponto H, isto é, $\vec{AG} \cap \vec{EF} = \{H\}$.



Sejam

$\overrightarrow{A'M}$ paralela limite a \overrightarrow{EF} por construção.

$\overrightarrow{A'N}$ paralela limite a \overrightarrow{AG} por construção.

$\overrightarrow{B'P}$ paralela limite a \overrightarrow{BG} por construção, então

$\overrightarrow{B'P}$ paralela limite a \overrightarrow{AG} , pois pelo teorema 16 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$.

$\left. \begin{array}{l} EA' \cong BB' \text{ por construção} \\ \hat{1} \cong \hat{2} \text{ por construção} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{3} \cong \hat{4} \text{ pois as semi-retas paralelas}$
 limite em relação a segmentos con-
 gruentes, determinam ângulos congru-
 entes (teorema 21) (O ângulo é fun-
 ção da distância).

$\hat{5} \cong \hat{6}$ (complemento de ângulos congruentes).

Então $\hat{7} < \hat{6}$, pois $\hat{7} < \hat{5}$ (1).

Como $\overrightarrow{B'L} \neq \overrightarrow{B'P}$ (ângulos diferentes com BB') e $\overrightarrow{A'L} \neq \overrightarrow{A'N}$ (ângulos diferentes com AA') (2), então

$\overrightarrow{B'P}$ é paralela limite a $\overrightarrow{A'N}$, pela transitivi-
 dade e por (1) e (2).

Segue então que $\overrightarrow{A'M}$ está entre $\overrightarrow{A'N}$ e $\overrightarrow{A'A}$; então ela
 deve interceptar \overrightarrow{AG} num ponto J . J e A' estão no mesmo semi-
 plano em relação a EF , pois $\overrightarrow{A'J}$ é paralela limite a \overrightarrow{EF} e en-
 tão estão no semi-plano oposto a A , em relação a \overrightarrow{EF} .

Então \overrightarrow{AJ} intercepta \overrightarrow{EF} num ponto H , que deve estar
 sobre EF , porque H está no mesmo semi-plano de J em relação a
 AA' e $\overrightarrow{A'J}$ é paralela limite de \overrightarrow{EH} . Como $G \in \overrightarrow{AG} \Rightarrow H \in \overrightarrow{AG}$. (Foi
 usada a hip. (I) e a 2.^a parte do teorema 16).

Voltemos agora à figura A. Seja K , então, o único ponto sobre \vec{BG} tal que $EH \cong BK$

Então

$\hat{1} \cong \hat{2}$ por construção

$EH \cong BK$ por construção

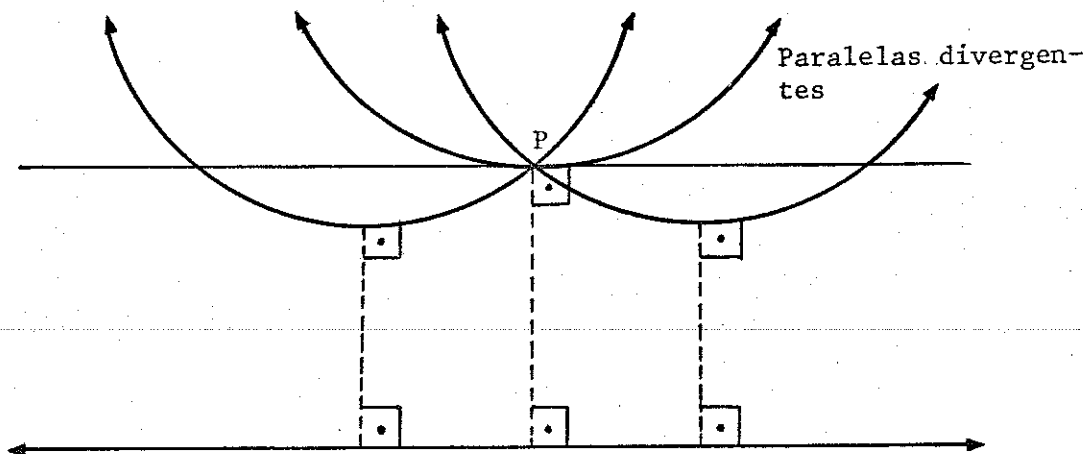
Baixemos as perpendiculares \vec{HH}' e \vec{KK}' a m . Então,

$\square EHH'A' \cong \square BKK'B' \implies HH' \cong KK' \implies H$ e K são equidistantes de m , então existe perpendicular comum.

Assim fica demonstrado que se a reta paralela não é do 2º tipo, então será do 1º tipo, pois tem uma perpendicular comum.

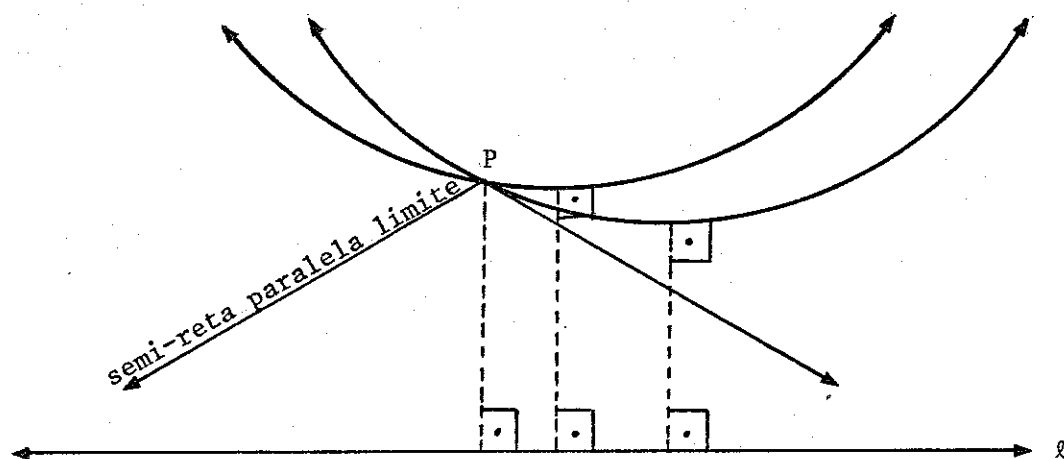
Juntando tudo, dado um ponto P , $P \notin \ell$, existem exatamente 2 semi-retas paralelas limite, por P , uma em cada direção.

Existe um número infinito de retas por P , que não estão na região entre a semi-reta paralela limite, e ℓ .



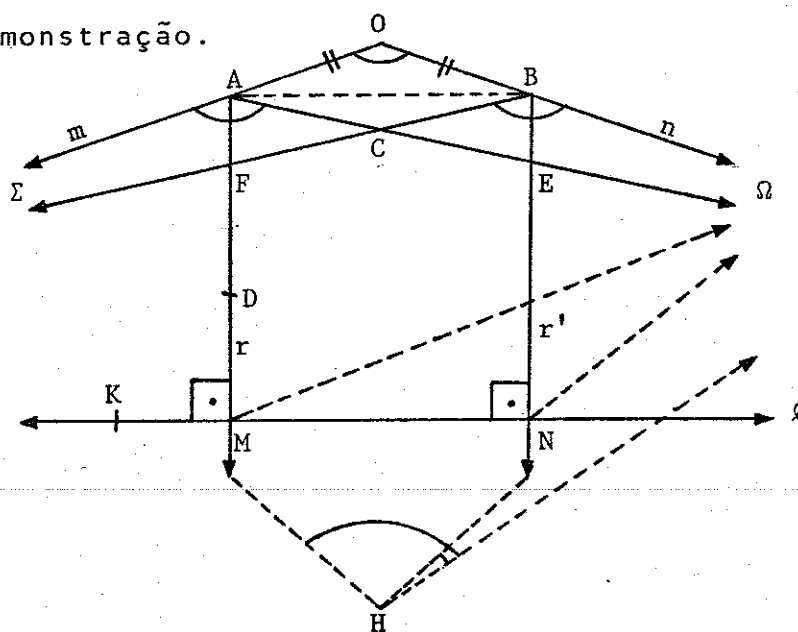
Cada uma de tais retas é paralela divergente de ℓ e admite uma perpendicular comum com ℓ .

Para uma dessas retas, a perpendicular comum passará por P, mas para todas outras, a perpendicular comum passará por outros pontos.



TEOREMA 24. Dado qualquer ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, existe, na Geometria Hiperbólica, uma única reta ℓ , chamada de *reta interior* ao ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$, tal que ℓ é paralela limite a ambos os lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .

Demonstração.



Sejam m e n 2 retas que se interceptam em O .

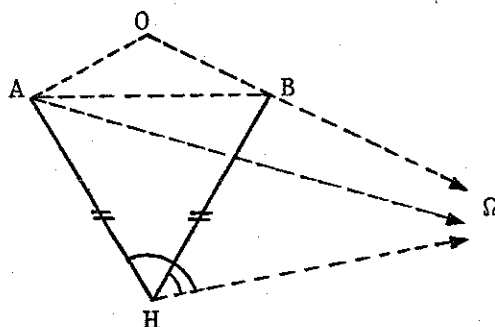
Tomemos A e B sobre m e n , respectivamente, tais que $OB \cong OA$ e sejam ainda $\overrightarrow{A\Omega}$ a semi-reta paralela limite a \overrightarrow{OB} por A e $\overrightarrow{B\Sigma}$ a semi-reta paralela limite a \overrightarrow{OA} por B .

Como $\widehat{A\Omega} \cong \widehat{B\Omega\Sigma}$, então, pelo teorema 21, $\widehat{OAC} \cong \widehat{OBC}$, (1) onde C é a intersecção de $\overrightarrow{B\Sigma}$ e $\overrightarrow{A\Omega}$.

Sejam ainda as semi-retas r e r' as bissetrizes de $\widehat{CA\Sigma}$ e $\widehat{CB\Omega}$ respectivamente (2).

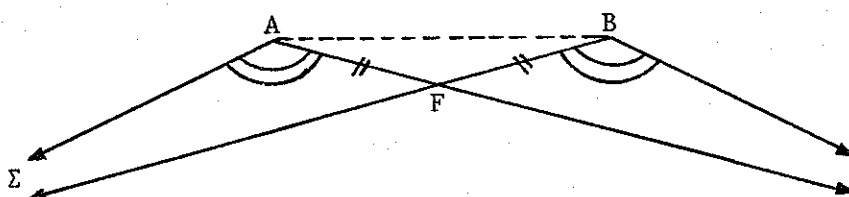
Temos que mostrar que as retas que contêm essas semi-retas não se interceptam e nem são paralelas assintóticas (que contêm semi-reta paralelas limite) e, então, pelo teorema 23, elas têm uma perpendicular comum ℓ , que será a reta interior ao ângulo \widehat{AOB} .

a) Não pode ser $AD \cap BE = \{H\}$, pois se assim fosse, teríamos $\widehat{CA\Sigma} \cong \widehat{CB\Omega}$ (suplementar de ângulos congruentes $\widehat{OAC} \cong \widehat{OBC}$ por (1)) e então $\widehat{CAD} \cong \widehat{CBE}$ (metade de ângulos congruentes) por (2) e como $\triangle OAB$ é isósceles, $\widehat{OAB} \cong \widehat{OBA}$, então $\widehat{OAC} - \widehat{OAB} \cong \widehat{OBC} - \widehat{OBA}$, então $\widehat{CAB} \cong \widehat{CBA}$ e $\widehat{BAD} \cong \widehat{ABE}$ (3) e então $\triangle ABH$ é isósceles e $AH = BH$ como $\widehat{H A \Sigma} = \widehat{H B \Omega}$ pois são ângulos formados pelas bissetrizes de ângulos congruentes, ou $\widehat{H A \Omega} \cong \widehat{H B \Omega}$, então pelo teorema 21, $\overrightarrow{A\Omega} \cong \overrightarrow{B\Omega}$ o que é falso, pois então $\overrightarrow{H A}$ conteria a semi-reta $\overrightarrow{H B}$ e então $\overrightarrow{A\Omega}$ encontraria $\overrightarrow{B\Omega}$ em B e não seriam paralelas limite.



b) \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} não são paralelas limite. Se \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} fossem paralelas limite, comparando as paralelas limite $\overrightarrow{A\Sigma}$ e $\overrightarrow{F\Sigma}$ e sua transversal AF e as paralelas limite \overrightarrow{FD} e \overrightarrow{BE} e sua transversal FB, temos $\widehat{FAS} \cong \widehat{FBE}$ (metade de ângulos congruentes) e $\widehat{AFS} \cong \widehat{BFD}$ (o.p.v) e então, pelo teorema 21, $AF \cong FB$, então $\triangle AFB$ isósceles e $\widehat{BAF} \cong \widehat{ABC}$, o que é absurdo, pois \widehat{ABC} congruente a uma parte de \widehat{BAF} .

Segue-se, então, que \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} não são paralelas limite.



c) Se \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} não se cortam e não são paralelas limite, então, pelo teorema 23, existe uma perpendicular comum a \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BE} .

Seja MN essa perpendicular comum. Vamos verificar que \vec{MN} é paralela limite a $\vec{O\Sigma}$ e $\vec{O\Omega}$.

Como $\widehat{AMN} \equiv \widehat{BNM}$ (retos) e $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NBA}$ (por 3)) então, pelo teorema 21

$$AM \equiv BN \quad (4)$$

Se \vec{MN} não é paralela limite, podemos considerar as paralelas limite $\vec{M\Omega}$ e $\vec{N\Omega}$.

Daí, como $AM \equiv BN$ (por (4)), e $\widehat{M\Omega} \equiv \widehat{N\Omega}$, pelo teorema 21 $\widehat{M\Omega} \equiv \widehat{N\Omega}$, o que contradiz o teorema 20, pois teríamos $\widehat{KM\Omega} = \widehat{KN\Omega}$ (ângulo externo congruente a interno não adjacente do $\triangle MN\Omega$, quando somado com o ângulo reto).

Então \vec{MN} é paralela limite a $\vec{O\Sigma}$ e $\vec{O\Omega}$ e portanto é "interior" ao ângulo.



C A P Í T U L O I I I

CONSISTÊNCIA DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

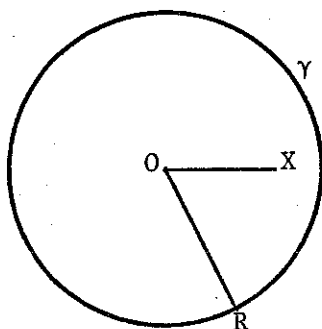
Para demonstrarmos que o sistema de axiomas que caracteriza a Geometria Hiperbólica é consistente, necessitamos construir um modelo na Geometria Euclidiana no qual, com a axiomática desta geometria (Euclidiana), se demonstram todos os axiomas hiperbólicos.

Consequentemente, feito isto, fica, também, demonstrado que o axioma das paralelas é independente dos demais, isto é, pode-se substituí-lo no sistema Euclidiano, pelo axioma da existência de mais de uma paralela, por algum ponto A , a uma reta dada r , $A \notin r$ e obter um sistema consistente.

1. PRIMEIRO MODELO DE POINCARÉ

Fixamos uma circunferência γ no plano Euclidiano.

Se O é o centro de γ e OR é um raio, o interior de γ , por definição, consiste de todos os pontos X tais que $OX < OR$.



O plano hiperbólico π é o conjunto dos pontos interiores de γ .

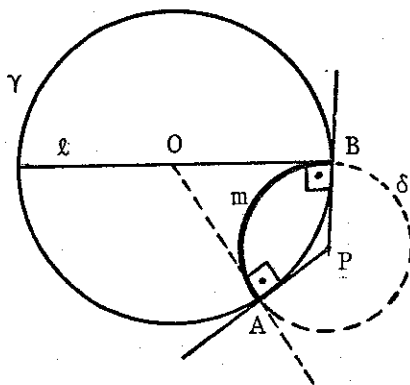
As retas são representadas pelas cordas abertas que passam pelo centro O de γ (todos os diâmetros abertos ℓ , de γ) e por arcos de circunferências abertas, ortogonais a γ .

Observação. As cordas de γ e os arcos ortogonais a γ são "abertos", se não contiverem as extremidades e os indicaremos por $A)(B$, onde $A \in \gamma$ e $B \in \gamma$.

Mais precisamente:

Seja δ uma circunferência ortogonal a γ (em cada ponto de intersecção de γ e δ , os raios de δ e γ , por esses pontos, são perpendiculares).

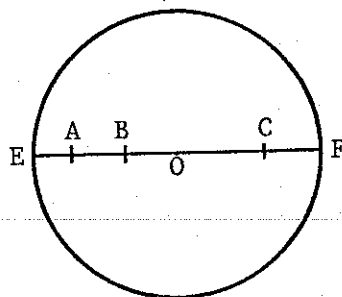
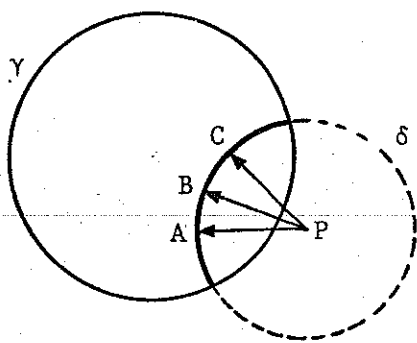
Então a intersecção de δ com o interior de γ dá um arco aberto m que, por definição, representa, além dos diâmetros abertos, uma reta hiperbólica no modelo de Poincaré.



Assim, chamaremos de reta de Poincaré, ou "P-reta", a um diâmetro aberto ℓ , de γ ou a um arco de circunferência aberto m , ortogonal a γ e interno a γ .

Um ponto interior a γ "está em" uma reta de Poincaré se ele pertence a ela, no sentido do plano Euclidiano.

Do mesmo modo, "entre" tem a interpretação usual da Geometria Euclidiana. Para A , B e C em um arco aberto vindo de uma circunferência ortogonal δ com centro P , B está entre A e C se \overrightarrow{PB} está entre \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PC} ; se A , B e C no diâmetro EF , então B está entre A e C se assim acontece na reta \overleftrightarrow{EF} da Geometria Euclidiana.



Devemos examinar os axiomas de Incidência, Ordem, Paralelismo, Congruência e Continuidade.

O modelo de Poincaré nos fornecerá, então, uma prova de que se a Geometria Euclidiana é consistente, a Geometria Hipérbolica também o é.

2. VERIFICAÇÃO DOS AXIOMAS

Axiomas de Incidência: I

I_1 . Dados 2 pontos A e B de π , existe uma e uma só reta a de π , tal que $A, B \in a$.

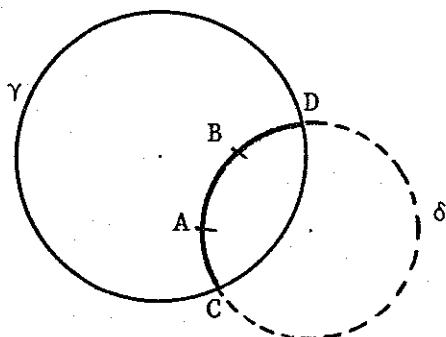
Demonstração. Sejam $A, B \in \pi$, então A e B são do plano Euclidiano.

No caso de A e B pertencerem a um diâmetro de γ , pelo axioma 1 de incidência Euclidiana, existe uma e uma só reta r tal que $A, B \in r$.

Como A e B são interiores a γ , pois $A, B \in \pi$, pelo princípio de continuidade Euclidiano, r corta γ em 2 pontos C e D e, portanto a reta a de π é C)(D e $A, B \in C)(D$.

No caso de A e B pertencerem a um arco ortogonal a γ , A e B pertencem a uma circunferência δ ortogonal a γ no plano Euclidiano e, portanto, pelo princípio de continuidade circular, consequência do axioma de Dedekind, δ corta γ em 2 pon-

tos C e D e, portanto, a reta a de π é $C)(D$ e $A, B \in C)(D$.



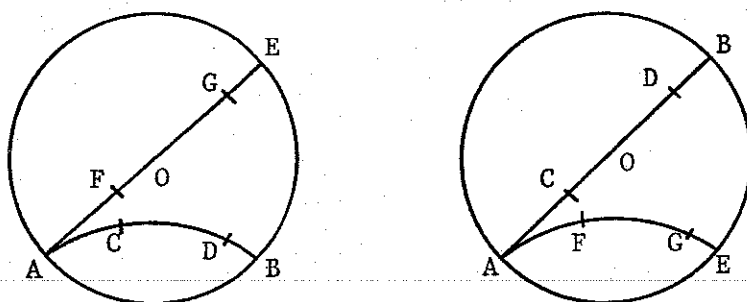
A unicidade vem do fato que por A e B , existe uma só circunferência ortogonal a γ , como veremos mais tarde.

I_2 . Qualquer que seja a reta $a = C)(D$ de π , existem 2 pontos A e $B \in \pi$, tais que $A, B \in C)(D$.

Se $C)(D \in \pi$, então C e D pertencem ao plano Euclidiano. Como o plano Euclidiano é contínuo, então em qualquer P -reta existem infinitos pontos.

I_3 . Existem 3 pontos de π não colineares.

Seja a reta $A)(B$ e nela, pelo axioma I_2 existem C e $D \in \pi$. Tomamos um ponto $E \in \gamma$, com $E \neq B$, $E \neq A$ e tal que ou AB ou AE sejam um diâmetro de γ .



Unimos E a A pela reta Euclidiana, se for diâmetro ou por uma circunferência ortogonal a γ , que passe pelos 2 pontos.

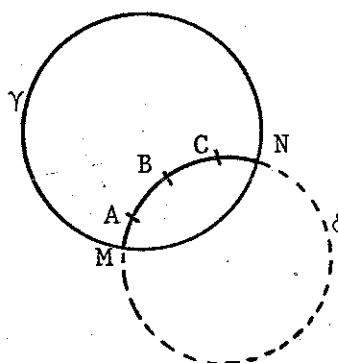
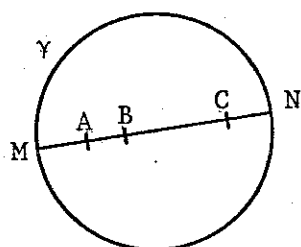
Temos, então, a reta A)(E de π . Em A)(E existem F e $G \in \pi$ por I_2 .

É claro que F (ou G) $\notin A$)(B, senão A)(B coincidiria com A)(E, pelo axioma I_1 .

Daí $C, D, F \in \pi$ e são não colineares.

Axiomas de Ordem: 0

O_1 . Se $A * B * C$, com $A, B, C \in \pi \implies \exists a \in \pi (A, B, C \in a)$.



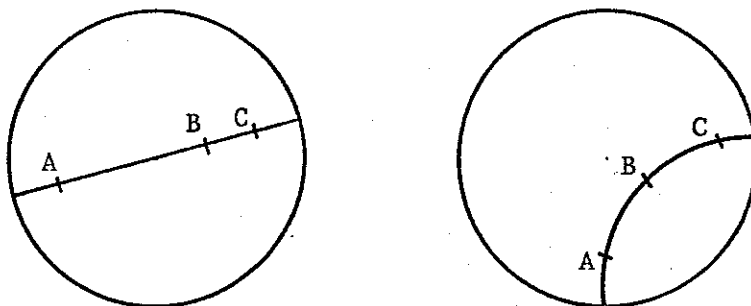
Se $A, B, C \in \pi$, e $A * B * C$, então $A * B * C$, também na Geometria Euclidiana, então $\exists r$ do plano Euclidiano, ou uma circunferência δ ortogonal a γ , tal que $A, B, C \in r$, ou $A, B, C \in \delta$.

Mas, r ou δ cortam γ em 2 pontos M e N e daí,

$\exists a = M$)($N \in \pi$, tal que $A, B, C \in a$.

O_2 . $A * B * C$, com $A, B, C \in \pi \implies A \neq B \neq C \neq A$.

Se $A, B, C \in \pi$ e $A * B * C$, e como $A * B * C$ na Geometria Euclidiana, então $A \neq B \neq C \neq A$, daí acontece o mesmo em π .



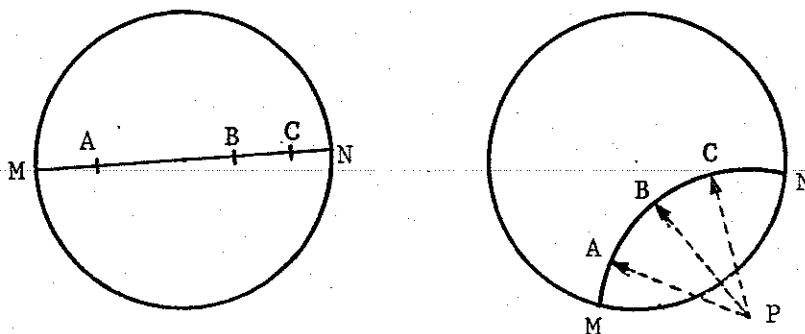
O_3 . Se $A * B * C \implies C * B * A$.

Se $A * B * C$ e $A, B, C \in \pi$ e como $A * B * C$ e A, B, C são também do plano Euclidiano, então $C * B * A$ na reta ou na circunferência δ , na Geometria Euclidiana, e daí $C * B * A$ no plano π .

Esses 3 axiomas demonstram o 1º axioma de ordem de Hilbert.

O_4 . Se $A \neq B \in \pi \implies \exists C \in \pi$ tal que $A * B * C$.

Se $A, B \in \pi$, então $A)(B$ encontra γ em M e N . Como A e B são interiores a γ e $N \in \gamma$, então vale $A * B * N$ ou $B * A * N$.



Suponhamos $A * B * N$ na Geometria Euclidiana. Se A e B pertencem a um diâmetro, (pelo teorema 25 Fundamentos - Castrucci), $\exists C$ em $A)(B$, tal que $B * C * N$, pois A e B são do plano Euclidiano.

Daí, de $A * B * N$ e $B * C * N$, vem $A * B * C$, (pelo corolário do teorema 29 Fundamentos - Castrucci), pois A, B, N, C são do plano Euclidiano.

O mesmo acontece com arcos de circunferências ortogonais. Vale o raciocínio para o feixe $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PN}, \vec{PC}$, pois no plano Euclidiano valem $\vec{PA} * \vec{PB} * \vec{PN}$ e $\exists \vec{PC}$ tal que $\vec{PB} * \vec{PC} * \vec{PN}$.

$$O_5. (A * B * C) \implies \sim A * C * B \wedge \sim (B * A * C)$$

Se $A, B, C \in \pi$, então A, B, C são do plano Euclidiano. Neste caso $A * B * C$, então, $\sim(A * C * B) \wedge \sim(B * A * C)$, pelo axioma 3 segundo Hilbert e conseqüências. Daí, O_5 é válido para π .

O_6 . Axioma de Pasch

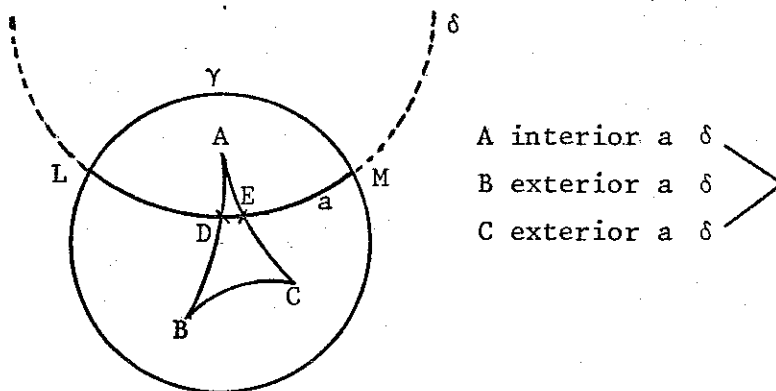
DEFINIÇÃO. Se $A, B \in \pi$, chama-se segmento AB de π ao conjunto dos pontos A e B e dos pontos entre A e B .

O_6 . Sejam $A, B, C \in \pi$, $a \subset \pi$, $a = L)(M$ e tal que $A, B, C \notin a$ e A, B, C não colineares. Então

$$\text{Se } AB \cap a = \{D\} \implies a \cap AC = \{E\} \text{ ou } a \cap BC = \{F\}.$$

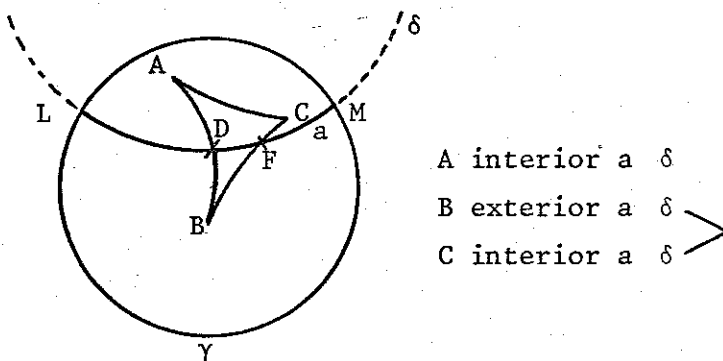
Examinaremos dois casos:

1) $a \in \pi$, arco da circunferência δ ortogonal a γ e suponhamos $A \in \pi$ interior a δ , então $B \in \pi$ e $C \in \pi$ exteriores a δ .



Seja $\delta \supset a$ no plano Euclidiano. Então, pelo axioma da continuidade circular, δ intercepta AC num ponto E e portanto a intercepta AC em E em π .

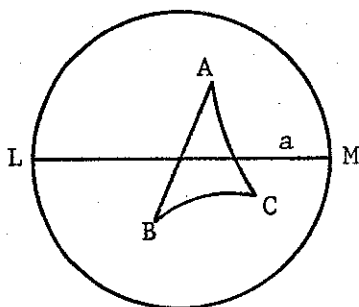
2) $a \in \pi$, arco da circunferência δ ortogonal a γ e $A \in \pi$ interior a δ , então B exterior a δ , e $C \in \pi$ interior a δ .



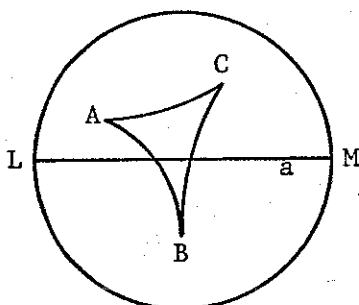
$\delta \supset a$ no plano Euclidiano. Então, pelo axioma da continuidade circular, δ intercepta BC num ponto F e portanto δ intercepta BC no ponto F em π .

Os outros casos, como:

1) a diâmetro de γ e um dos segmentos AB, AC ou BC pertencerem a outro diâmetro.



2) a diâmetro de γ e os segmentos AB, AC e BC não pertencerem a diâmetro de γ .



são estudados da mesma forma, através da divisão do plano por uma reta.

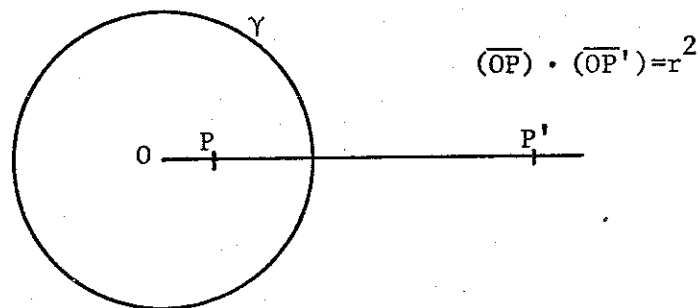
Axiomas de Congruência: C

Afim de definir congruência no modelo de Poincaré, vamos abrir um parênteses para estudar a *inversão* relativa a uma circunferência, na *Geometria Euclidiana*, para verificar posteriormente os axiomas de congruência.

DEFINIÇÃO. Seja γ uma circunferência de raio r e centro O . Qualquer que seja o ponto $P \neq O$, o *inverso* de P em relação a γ é o ponto P' , único, na semi-reta \overrightarrow{OP} tal que

$$(\overline{OP})(\overline{OP'}) = r^2$$

onde \overline{OP} significa o comprimento do segmento OP com relação a uma unidade fixa de medida.



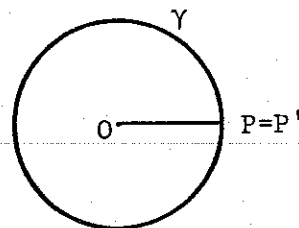
As seguintes propriedades da inversão, são imediatas, a partir da definição de inversão.

TEOREMA 25.

a) $P = P'$ se e somente se P está sobre a circunferência de inversão γ .

Demonstração.

$$P = P' \iff P \in \gamma$$



$$\left. \begin{array}{l} \implies \text{se } P = P' \\ \text{e } \overline{OP} = x \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = x^2 \\ x \cdot x \\ \text{e } \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = r^2 \text{ (por definição)} \end{array} \right\} \implies x^2 = r^2 \implies x = r \implies P' \in \gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} \longleftarrow \text{se } P \in \gamma \implies \overline{OP} = r \\ \text{e } \overline{OP}' = x \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = x \cdot r \\ \text{e } \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = r^2 \text{ (por definição)} \end{array} \right\} \implies x \cdot r = r^2 \implies \\ \implies x = \frac{r^2}{r} \implies x = r \implies P = P'$$

b) Se P está no interior de γ , então P' está no exterior de γ , e se P está no exterior de γ , então P' está no interior de γ .

Demonstração.

Suponhamos $\overline{OP} < r$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP}' = x \\ \text{e } \overline{OP} \cdot x = r^2 \text{ (por definição)} \end{array} \right\} x = \frac{r^2}{\overline{OP}} \implies x > r \text{ e vice-versa}$$

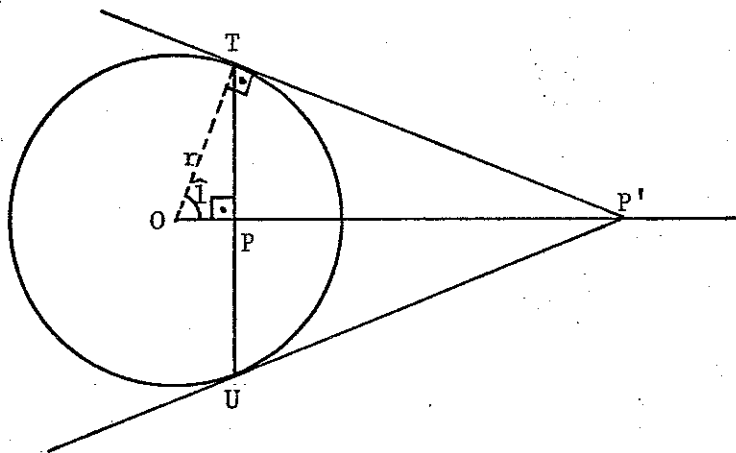
c) $(P')' = P$

$$\begin{aligned} &\text{Como } \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = r^2 \text{ (por definição)} \implies (\overline{OP}')(\overline{OP}')' = r^2 \implies \\ &\implies (P')' = P. \end{aligned}$$

Os dois teoremas seguintes nos dizem como construir o inverso de um ponto, com régua e compasso.

TEOREMA 26. Suponhamos P interior a γ ; seja TU a corda de γ por P , que é perpendicular a \overrightarrow{OP} .

Então o inverso P' de P é o polo da corda TU , isto é, o ponto de intersecção das tangentes a γ em T e U .



Demonstração. Suponhamos que a tangente a γ em T corte \overrightarrow{OP} no ponto P' . O triângulo retângulo ΔOPT é semelhante ao triângulo retângulo $\Delta OTP'$

$$\Delta OPT \sim \Delta OTP'$$

pois $\hat{T} \cong \hat{P}$ (reto), \hat{I} (\hat{TOP}) (comum) e a soma dos ângulos = 180° , pois estamos na Geometria Euclidiana.

Então os lados correspondentes são proporcionais. Então, como $\overline{OT} = r$, temos

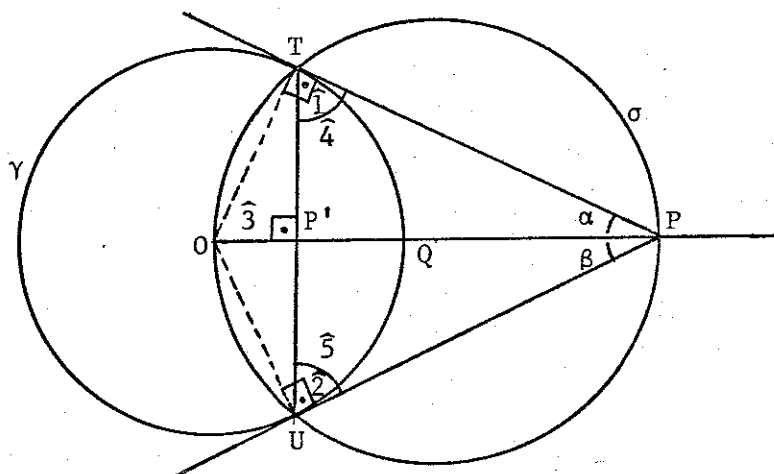
$$\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP}'} \implies \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = r^2,$$

que nos mostra que P' é inverso de P .

Pela reflexão de eixo \overleftrightarrow{OP} , vemos que a tangente a γ em U também passa por P' , então P' é realmente o polo de TU , pois P' tem que ser o mesmo, na intersecção das duas tangentes com \overleftrightarrow{OP} (teoremas da Geometria Euclidiana).

TEOREMA 27. Se P está fora de γ , seja Q o ponto médio do segmento OP .

Seja σ a circunferência com centro Q e raio $\overline{OQ} = \overline{QP}$.



Então

- 1) σ corta γ em 2 pontos T e U .
- 2) \overline{PT} e \overline{PU} são tangentes a γ .
- 3) O inverso P' de P é a intersecção de TU e OP .

Demonstração.

- 1) Pelo princípio da continuidade circular (consequência do axioma de Dedekind), σ e γ se encontram em 2 pontos T e U .

2) Desde que $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são inscritos em semi-circunferências de σ , eles são ângulos retos, então \hat{PT} e \hat{PU} são tangentes a γ .

3) Se TU encontra OP num ponto P', então P' é o inverso de P em γ .

Para verificar que $TU \perp OP$, temos

$$\triangle OTP \cong \triangle OUP \text{ (retângulo)} \left(\begin{array}{l} \text{pois } OT \cong OU \text{ (cateto)} \\ OP \cong OP \text{ (hipotenusa)} \end{array} \right)$$

e daí $\alpha \cong \beta$ segue-se que

$$\triangle TP'P \cong \triangle UP'P \left(\begin{array}{l} \text{pois } TP \cong PU \\ \alpha \cong \beta \\ P'P = P'P \end{array} \right)$$

então $T\hat{P}'P \cong U\hat{P}'P = \text{reto}$ e $TU \perp OP'$.

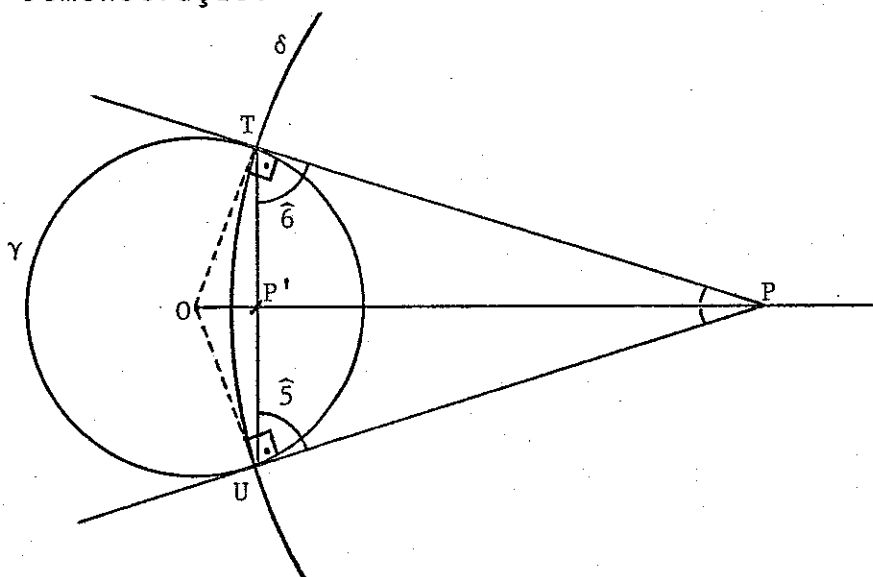
Finalmente, P é o polo de TU e então P' é inverso de P.

Vamos ver agora como podemos construir a reta de Poincare ligando 2 pontos ideais, a reta interior ao ângulo (construção da circunferência δ ortogonal a γ , passando por 2 pontos). Isso é feito demonstrando o seguinte teorema:

TEOREMA 28. Sejam T e U pontos sobre γ que não sejam diametralmente opostos e seja P o polo de TU .

Então $PT \cong PU$, $\hat{S} \cong \hat{6}$ ($\hat{S} = P'\hat{O}P$, $\hat{6} = P'\hat{T}P$), $\vec{OP} \perp \vec{TU}$ e a circunferência δ com centro P e raio $\overline{PT} = \overline{PU}$ corta γ ortogonalmente em T e U .

Demonstração.



Se P é polo de TU , \vec{PT} e \vec{PU} são tangentes à γ em T e U e portanto $PT \cong PU$.

O triângulo ΔPTU é isósceles e então $\hat{S} \cong \hat{6}$ e $\vec{TU} \perp \vec{OP}$.

Além disso, PT e PU , raios de δ , são perpendiculares respectivamente aos raios OT e OU de γ (pois são tangentes a γ em T e U), então γ e δ são ortogonais.

Lema. Teorema da Potência de um ponto externo ou interno, em relação a uma circunferência.

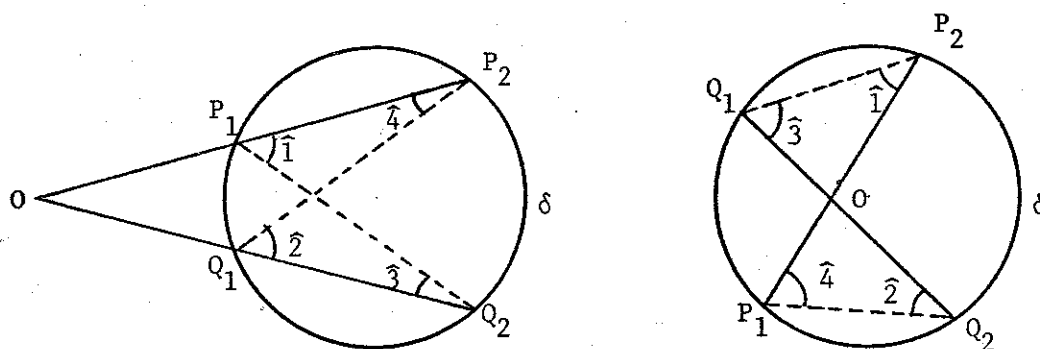
Dado o ponto $O \notin \delta$.

a) Se 2 retas por O interceptam δ em pares de pontos (P_1, P_2) e (Q_1, Q_2) , respectivamente, então

$$(\overline{OP_1})(\overline{OP_2}) = (\overline{OQ_1})(\overline{OQ_2})$$

Esse produto comum é chamado de *potência de O em relação a δ* ; quando O está fora de δ , é positivo, e quando O está dentro de δ , é negativo.

b) Se O está fora de δ e a tangente a δ , de O toca δ no ponto T, então \overline{OT}^2 é igual à potência de O em relação a δ .



Demonstração.

a) Desde que os ângulos inscritos em uma circunferência e subentendem o mesmo arco são congruentes, temos:

$$\hat{1} \cong \hat{2}$$

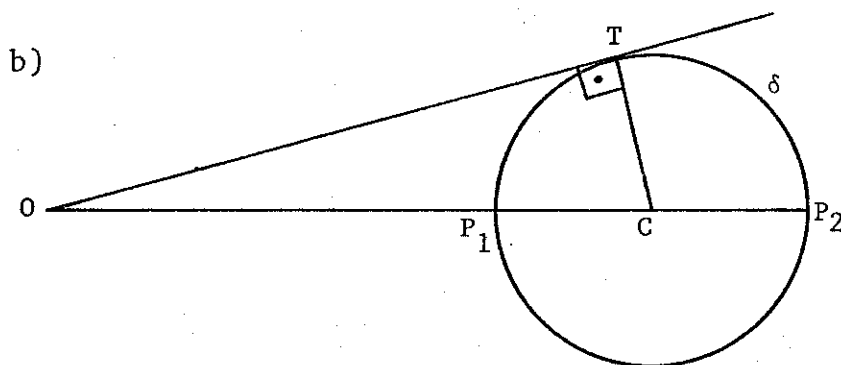
$$\hat{3} \cong \hat{4}$$

segue-se que $\Delta OP_1Q_2 \sim \Delta OQ_1P_2$, então:

$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OQ_1}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}}$$

ou seja,

$$(\overline{OP_1}) \cdot (\overline{OP_2}) = (\overline{OQ_1}) \cdot (\overline{OQ_2})$$



Seja C o centro de δ e a reta \overleftrightarrow{OC} corte δ em P_1 e P_2 , com $O * P_1 * P_2$

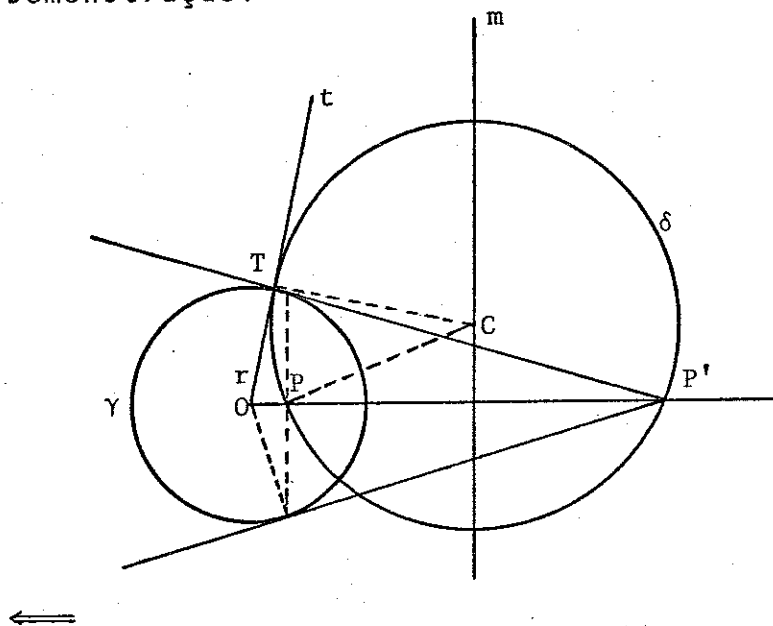
$$\overline{OT}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CT}^2 = (\overline{OC} - \overline{CT})(\overline{OC} + \overline{CT}) = (\overline{OC} - \overline{CP_1})(\overline{OC} + \overline{CP_2}) = (\overline{OP_1}) \cdot (\overline{OP_2})$$

Atribuindo-se sinal à potência, necessariamente, se O é externo, ela é positiva, pois vale \overline{OT}^2 . Assim, se O é interno, é negativa.

TEOREMA 29. Seja P qualquer ponto, $P \notin \gamma$ e que não coincida com o centro O de γ ($P \neq O$) e seja δ uma circunferência por P , de centro C .

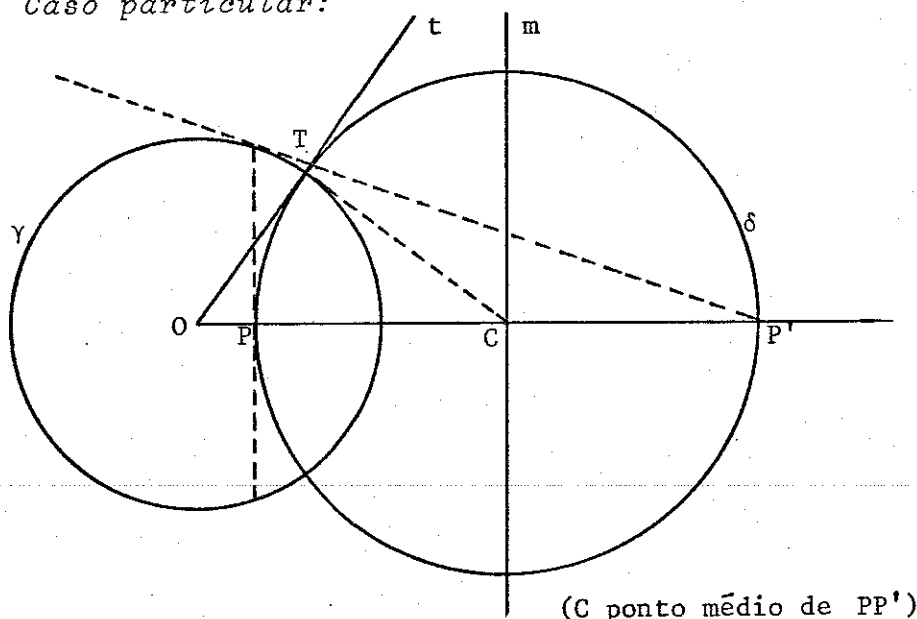
Então δ corta γ ortogonalmente se, e somente se, δ passa por P' , ponto inverso de P em relação a γ .

Demonstração.



$P' \in \delta \Rightarrow C \in m$ (mediatriz de PP') e como $P \neq O$ então $CO > CP \Rightarrow O$ externo de $\delta \Rightarrow \exists T \in \delta / t$ passa por $O \Rightarrow \overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ ($r =$ raio de γ) $\Rightarrow T \in \gamma \Rightarrow \delta$ corta γ ortogonalmente (porque $OT = r$ de γ é tangente a δ por T e TC é raio de δ em T , então $OT \perp TC$) $\Rightarrow \gamma \perp \delta$.

Caso particular:



(C ponto médio de PP')

Suponhamos primeiro que δ passa por P' . Então o centro C de δ está na mediatriz de PP' , então $\overline{CO} > \overline{CP}$ e O é externo a δ .

Portanto existe um ponto T em δ , tal que a tangente a δ , em T passa por O (pelo teorema 27).

O lema, então dá: $\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP}' = r^2$, então T também está em γ e δ corta γ ortogonalmente.

\implies

Reciprocamente, suponhamos que δ corte γ ortogonalmente no ponto T e U (então os raios são perpendiculares nos pontos de intersecção), então as tangentes a δ em T e U se encontram em O , então O está fora de δ .

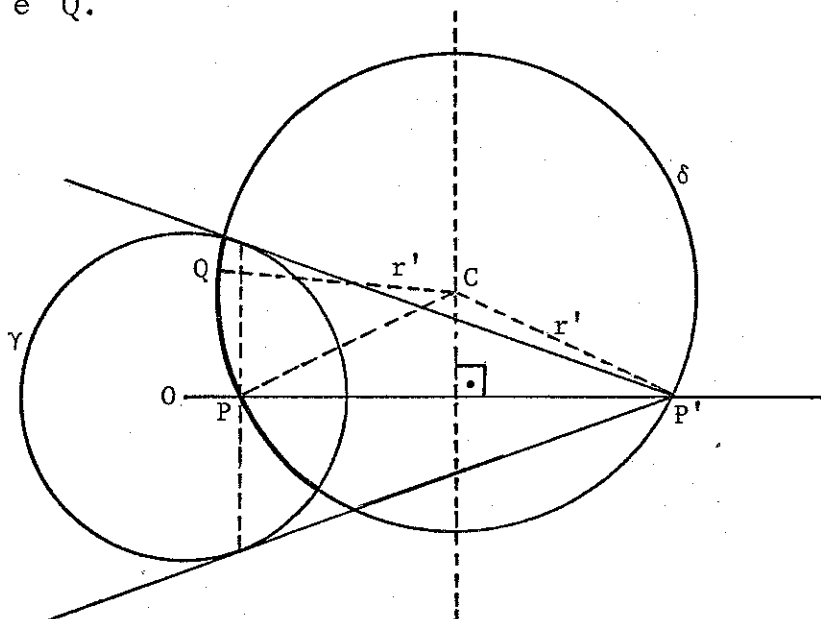
Segue-se que \overline{OP} corta δ novamente no ponto Q . Pelo lema b), $r^2 = \overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$, então $Q = P'$, o inverso de P em γ .

Chegamos à conclusão de que 2 circunferências γ e δ são ortogonais se e somente se δ passa por 2 pontos inversos ($P \neq O$, $P \notin \gamma$).

O teorema 29 pode ser usado para construir a P -reta ligando 2 pontos P e Q interiores a γ , e que não estão num diâmetro de γ .

Primeiro, construímos o ponto inverso P' , de P , usando o teorema 26 (temos infinitas circunferências ortogonais a γ , passando por P e P').

Construímos a circunferência determinada pelos 3 pontos não colineares, P , Q e P' (essa circunferência é única), o que nos dá, pelo teorema 29, que δ será ortogonal a γ ; a intersecção de δ com o interior de γ nos dá a desejada P-reta (única), por P e Q .

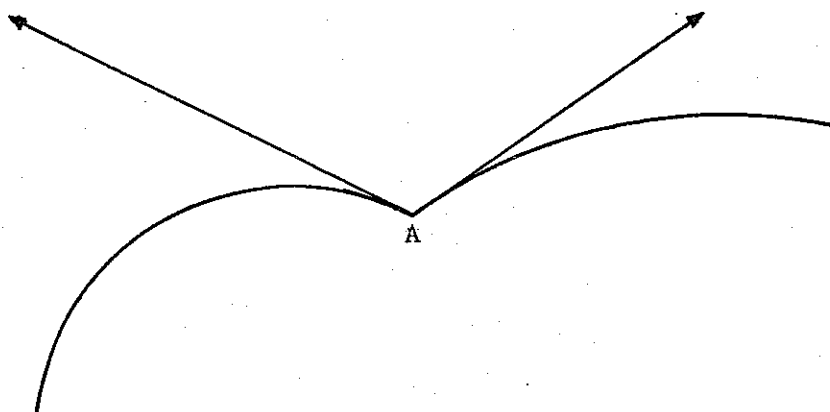


Isto mostra a efetiva construção de uma única P-reta, não pelo centro, e que passa por 2 pontos (axioma 1 de incidência).

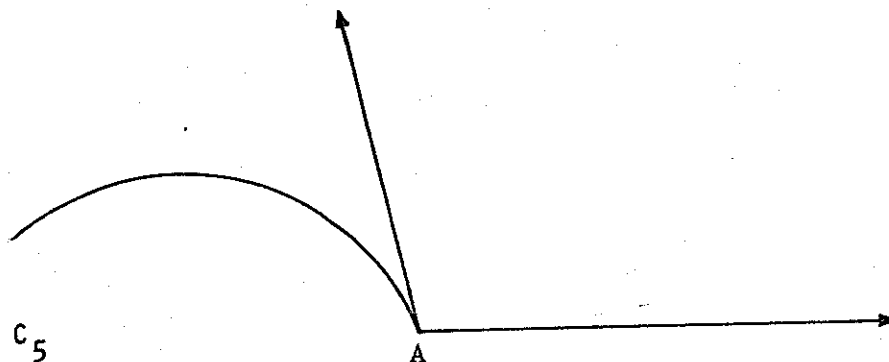
CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

A congruência de ângulos tem o significado usual Euclidiano.

Se dois arcos de circunferência se interceptam num ponto A , a medida do "ângulo" que eles fazem é, por definição, a medida do ângulo entre as semi-retas tangentes aos arcos em A .



Se um arco de circunferência intercepta uma semi-reta qualquer em A, a medida do "ângulo" que eles fazem é, por definição, a medida do ângulo formado pela semi-reta tangente ao arco e a semi-reta comum, em A.

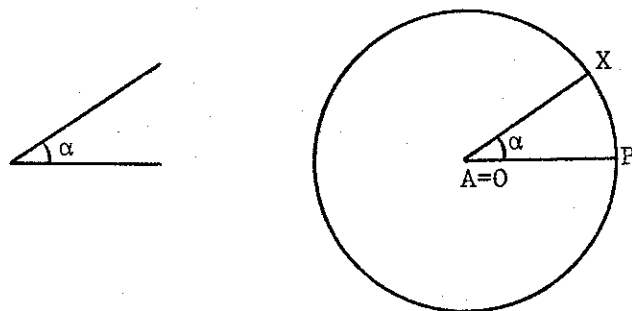


Desde que ângulos são medidos no sentido Euclidiano no modelo de Poincaré, a interpretação do *Axioma de Congruência 5* é trivialmente verificado, pois se reduz ao axioma Euclidiano de ângulos.

C_4

Dado um ângulo qualquer $B\hat{A}C$, (onde, por definição de "ângulo", \vec{AB} não é oposto a \vec{AC}) e dada uma semi-reta qualquer $\vec{A'B'}$, com origem em A' , então existe uma única semi-reta $\vec{A'C'}$ num semi-plano dado em relação a $\vec{A'B'}$, tal que $B'\hat{A}'C' \equiv B\hat{A}C$.

1. Se $A=0$ é o centro de γ e \overrightarrow{AP} uma semi-reta, existe uma semi-reta \overrightarrow{AX} tal que $\widehat{POX} \cong \alpha$ (dado) no plano Euclidiano; logo, neste caso vale em π .



2. Se A não é o centro O de γ , então a verificação é uma questão de achar uma única circunferência δ por A , tal que seja ortogonal a γ e tangente a uma dada reta Euclidiana ℓ , que passa por A e não por O (desde que as tangentes aos arcos ortogonais determinam a medida do ângulo).

Pelo teorema 29, δ deve passar pelo inverso A' de A , em relação a γ .

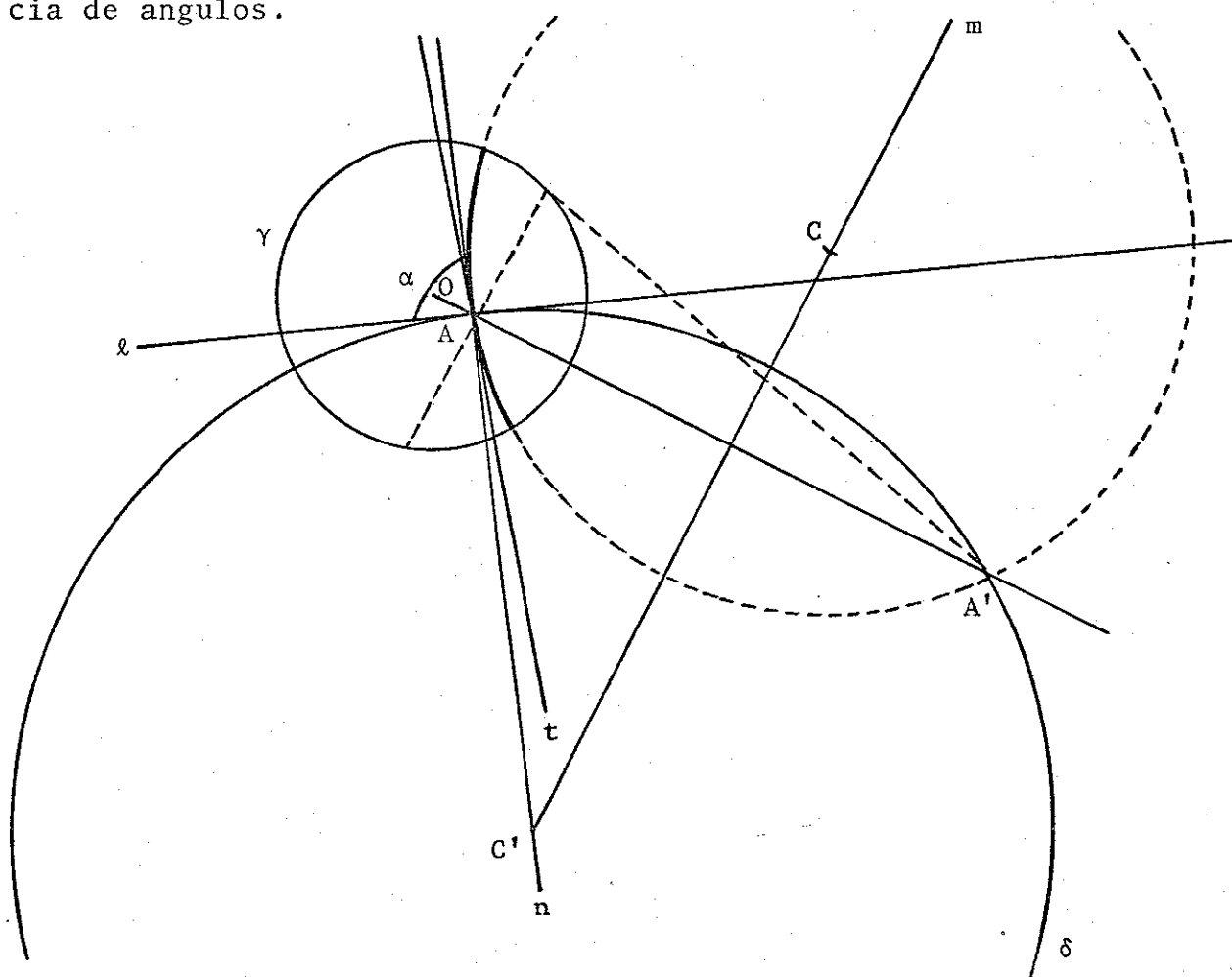
O centro C' de δ deve estar na mediatriz de AA' (teorema 29). Chamemos essa mediatriz de m .

Se δ é tangente a ℓ em A , então C' deve também estar na perpendicular n a ℓ , em A .

Assim, δ deve ser a circunferência cujo centro é a intersecção C' de m e n e cujo raio é $C'A$.

Construção de um ângulo com vértice no ponto $A \neq 0$, no 1º modelo de Poincaré, congruente a um ângulo dado α .

Dada uma reta de Poincaré por A , devemos determinar outra reta de Poincaré, que faça com a reta dada, o ângulo congruente ao ângulo dado, verificando assim o axioma 4 de congruência de ângulos.



Tomamos a tangente t à reta dada de Poincaré, que passa por A e pelo inverso A' em relação a γ e construímos a reta ℓ Euclidiana que forme com a tangente construída t , o ângulo congruente ao ângulo α dado.

Construímos agora por A e A' a circunferência δ ortogonal a γ , cujo centro C' está na perpendicular n a ℓ , em A , e na mediatriz m de AA' e que, portanto, passará por A e A' .

Então a parte interna a γ , intersecção de δ com γ é a P-reta de Poincaré, cujo ângulo com a P-reta dada, por A, é congruente ao ângulo dado.

CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS

Daremos, antes, a definição de *comprimento*, no modelo disco de Poincaré.

DEFINIÇÃO. Sejam A e B pontos no interior de γ e sejam P e Q extremos da P-reta por A e B.

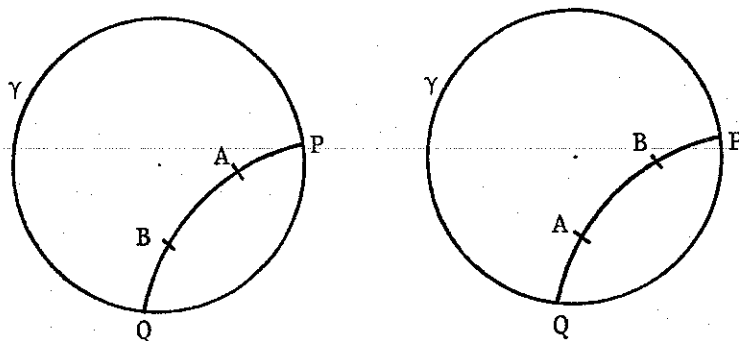
Definimos a razão dupla (AB, PQ) por

$$(AB, PQ) = \frac{(\overline{AP}) \cdot (\overline{BQ})}{(\overline{BP}) \cdot (\overline{AQ})} \quad (1)$$

onde por \overline{AP} se indica o comprimento Euclidiano do segmento Euclidiano AP.

Definimos, então, *Comprimento de Poincaré* $d(AB)$ por

$$d(AB) = |\log (AB, PQ)|$$



Notemos que este comprimento não depende da ordem na qual escrevemos P e Q, pois se $(AB, PQ) = x$ vem:

$$\begin{aligned} |\log x| &= |\log (AB, PQ)| = \log (\overline{AP} \cdot \overline{BQ}) - \log (\overline{BP} \cdot \overline{AQ}) = \\ &= \log \overline{AP} + \log \overline{BQ} - \log \overline{BP} - \log \overline{AQ} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \log (AB, QP) &= \log (\overline{AQ} \cdot \overline{BP}) - \log (\overline{BQ} \cdot \overline{AP}) = \log \overline{AQ} + \log \overline{BP} - \\ &- \log \overline{BQ} - \log \overline{AP} = -(\log \overline{AP} + \log \overline{BQ} - \log \overline{BP} - \log \overline{AQ}) = \\ &= -\log (AB, PQ) = \log \frac{1}{x} \end{aligned}$$

e portanto

$$|\log (\frac{1}{x})| = |-\log x| = \log x.$$

Além disso, desde que $(AB, PQ) = (BA, QP)$ vemos que $d(AB)$ também não depende da ordem na qual escrevemos A e B.

Podemos, então, interpretar os segmentos de Poincaré AB e CD como sendo *Poincaré-congruentes* se $d(AB) = d(CD)$.

Com essa interpretação, os *axiomas de congruência 2*, são imediatamente verificados:

C_2

a) Se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF \implies CD \cong EF$ e

b) $AB \cong AB$

$$a) \quad d(AB) = |\log (AB, PQ)| = \log \overline{AP} + \log \overline{BQ} - \log \overline{BP} - \log \overline{AQ}$$

$$d(CD) = |\log (CD, XY)| = \log \overline{CX} + \log \overline{DY} - \log \overline{DX} - \log \overline{CY}$$

$$d(EF) = |\log (EF, MN)| = \log \overline{EM} + \log \overline{FN} - \log \overline{FM} - \log \overline{EN}$$

então se $AB \cong CD$ e $AB \cong EF \implies d(AB) = d(CD)$ e $d(AB) = d(EF)$

$$\implies |\log (AB, PQ)| = |\log (CD, XY)| \text{ e } |\log (AB, PQ)| = |\log (EF, MN)|$$

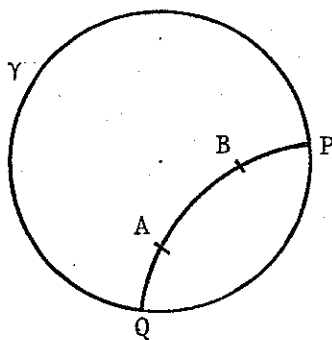
$$\implies |\log (CD, XY)| = |\log (EF, MN)| \implies d(CD) = d(EF) \implies CD \cong EF$$

Verificação do *axioma de congruência 1*

C_1

Dados AB e um ponto A' da reta \overleftrightarrow{AB} ou de reta diferente, existe B' tal que $AB \cong A'B'$.

Suponhamos que fixemos o ponto A na P -reta $P(Q)$ e que o ponto B se mova continuamente de A para P , onde $Q * A * B * P$



A razão dupla

$$(AB, PQ) = \frac{(\overline{AP}) (\overline{BQ})}{(\overline{BP}) (\overline{AQ})}$$

aumenta continuamente de 1 a ∞ , desde que

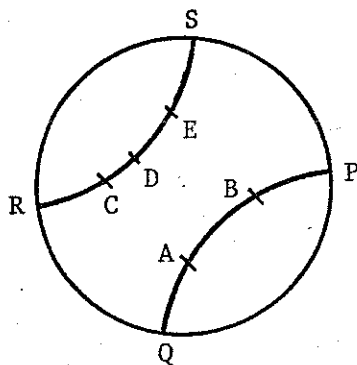
	\overline{AP}	constante
$\frac{(\overline{AP})}{(\overline{AQ})}$	é constante pois	\overline{BQ} aumenta
		\overline{BP} diminui
		\overline{AQ} constante

\overline{BP} se aproxima de zero e \overline{BQ} se aproxima de \overline{PQ} .

Se fixamos B e movemos A continuamente, de B para Q, teremos o mesmo resultado.

Segue-se imediatamente que para toda semi-reta de Poincaré \overleftrightarrow{CD} , existe um único ponto E em \overleftrightarrow{CD} tal que $d(CE) = d(AB)$, onde A e B são dados antecipadamente.

Demonstração.



Existe um ponto E na reta \overleftrightarrow{CD} (igual ou diferente de \overleftrightarrow{AB}) tal que $d(CE) = d(AB)$ porque

$$d(AB) = |\log (AB, PQ)| = \left| \log \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} \right|$$

$$d(CE) = |\log (CE, RS)| = \left| \log \frac{\overline{CS} \cdot \overline{ER}}{\overline{CR} \cdot \overline{ES}} \right|$$

e para que sejam iguais

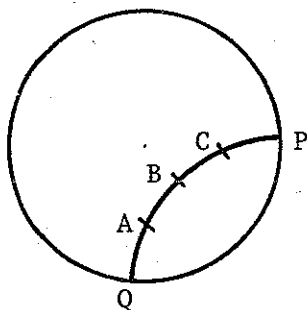
$$\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} = \frac{\overline{CS} \cdot \overline{ER}}{\overline{CR} \cdot \overline{ES}}$$

o que é sempre possível, pois usamos medidas de segmentos Euclidianos e portanto podemos achar E (podemos achar E na P-reta, com a distância dada, pois a distância varia de 0 a $+\infty$).

Isto verifica o *Axioma de congruência 1*.

C_3

Se $A * B * C$, $A' * B' * C'$, $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C' \implies AC \cong A'C'$.



A demonstração segue imediatamente da adição dos comprimentos de Poincaré, que afirma que se $A * B * C$, no sentido do modelo-disco, então $d(AB) + d(BC) = d(AC)$.

Para provar essa soma, indiquemos os extremos tais que $Q * A * C * P$.

Então as razões duplas (AC, PQ) , (AB, PQ) e (BC, PQ) são maiores que 1 (porque $AP > CP$, $CQ > AQ$, etc).

Seus logaritmos são, então, positivos e podemos suprimir o sinal do valor absoluto. Temos:

$$d(AB) + d(BC) = \log (AB, PQ) + \log (BC, PQ) = \log [(AB, PQ) \cdot (BC, PQ)]$$

mas

$$(AB, PQ) \cdot (BC, PQ) = (AC, PQ)$$

pois

$$\left. \begin{aligned} (AB, PQ) &= \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} \\ (BC, PQ) &= \frac{\overline{BP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{CP} \cdot \overline{BQ}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (AB, PQ) (BC, PQ) = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{BP} \cdot \overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{CP} \cdot \overline{BQ}} =$$

$$= \frac{\overline{AP} \cdot \overline{CQ}}{\overline{CP} \cdot \overline{AQ}} = (AC, PQ)$$

$$\Rightarrow \log [(AB, PQ) \cdot (BC, PQ)] = \log (AC, PQ)$$

então, $d(AB) + d(BC) = d(AC)$.

$$\text{Se } A = B \Rightarrow d(AB) = |\log (AB, PQ)| = \log 1 = 0.$$

c_6

(Axioma de congruência (LAL)). Se 2 lados de 1 triângulo e o ângulo compreendido entre eles são respectivamente congruentes a 2 lados e o ângulo compreendido entre eles, de outro triângulo, então os 2 triângulos são congruentes.

Para verificar esse axioma, precisamos estudar os efeitos das inversões nos elementos e suas relações no modelo-disco.

Introduzamos uma aplicação do plano Euclidiano em si mesmo: a homotetia.

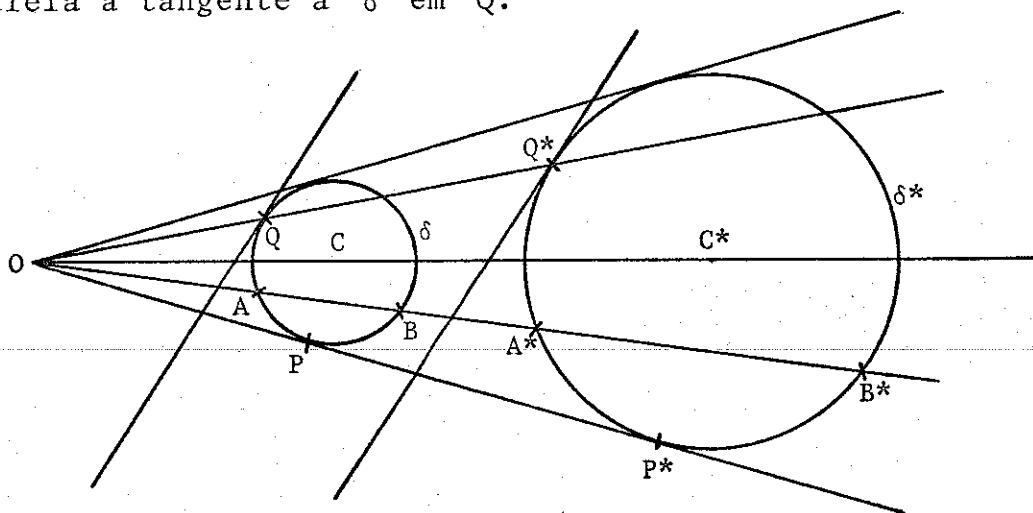
DEFINIÇÃO. Seja O um ponto e k um número positivo. A *homotetia* com centro O e razão k é a transformação do plano Euclidiano que fixa O e projeta um ponto $P \neq O$ em um único ponto P^* de \overrightarrow{OP} , tal que $\overline{OP^*} = k(\overline{OP})$.

Lema.

1) Seja δ uma circunferência com centro $C \neq O$ e raio s .

Pela homotetia com centro O e razão k , δ é transformada na circunferência δ^* com centro C^* e raio ks .

2) Se Q é um ponto de δ , a tangente a δ^* em Q^* é paralela a tangente a δ em Q .



Demonstração.

2) Escolhemos coordenadas retangulares tal que O seja a origem. Então a homotetia é dada por $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

A imagem da reta de equação $ax + by = c$ é a reta de equação $ax + by = kc$, pois

$$(x, y) \text{ vai em } (kx, ky) \text{ e } ax + by \rightarrow \underbrace{(ax + by)}_c k$$

Então a imagem é paralela à reta original.

Em particular, \overrightarrow{CQ} é paralela a $\overrightarrow{C^*Q^*}$ e suas perpendiculares em Q e Q^* respectivamente são, também, paralelas.

1) Se δ tem equação $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = s^2$ então δ^* tem equação $(x - kc_1)^2 + (y - kc_2)^2 = (ks)^2$, do qual se segue o lema.

TEOREMA 30. Seja γ uma circunferência de raio r e centro O . δ uma circunferência de raio s e centro C .

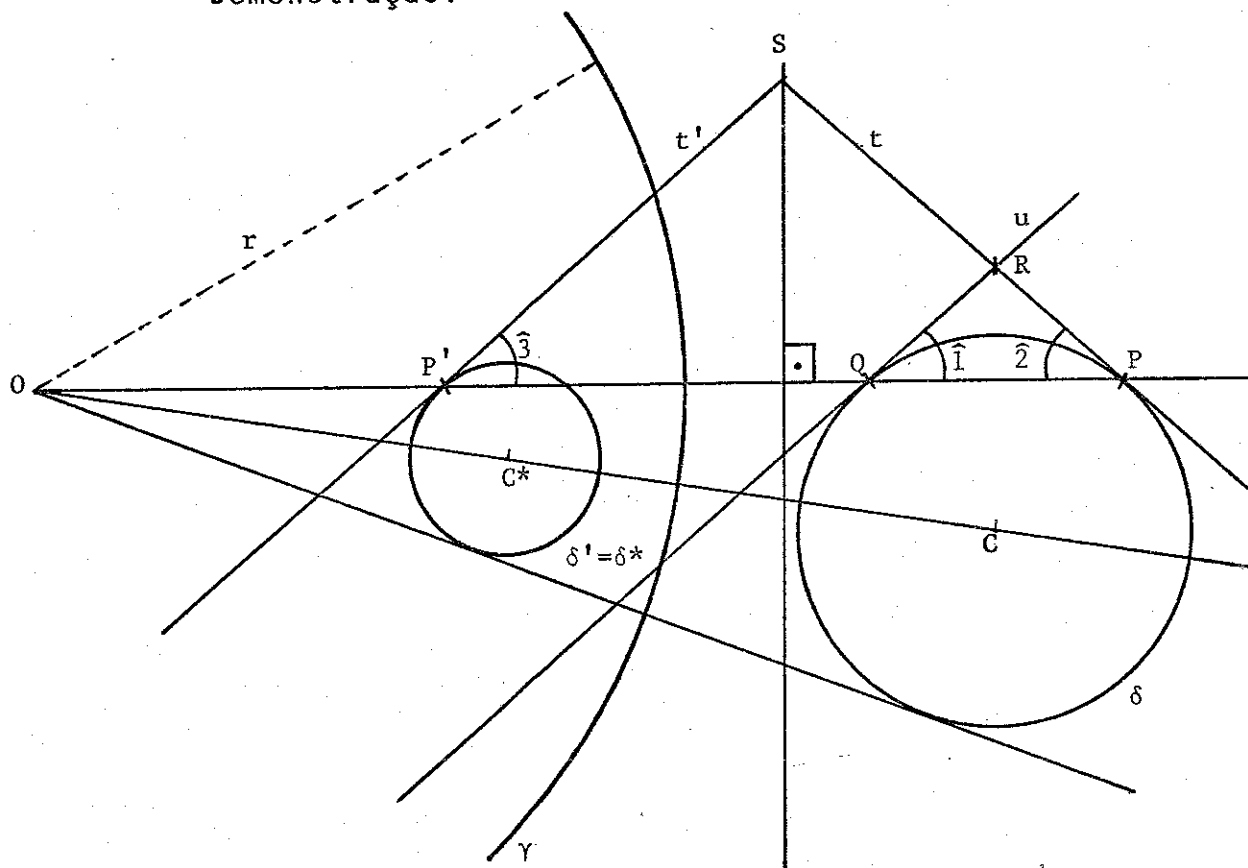
Consideremos O externo a δ ; e seja p a potência de O em relação a δ .

$$\text{Seja } k = \frac{r^2}{p}.$$

1) Então a imagem δ' de δ pela inversão em γ é a circunferência de raio ks , cujo centro é a imagem C^* de C pela homotetia de O de razão k .

2) Se P é um ponto qualquer em δ e P' é seu inverso em γ , então a tangente t' à δ' em P' é a reflexão, através da mediatriz de PP' , da tangente t à δ em P .

Demonstração.



1) Como O é externo à δ , \overrightarrow{OP} corta δ em outro ponto Q (P e Q não diametralmente opostos) ou é tangente a δ em P (em cujo caso $Q = P$). Então:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{P} \quad (\text{por definição de inversão em } \gamma) = k$$

(por definição de potencia)

$$\Rightarrow \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = k \quad \text{ou} \quad \overline{OP'} = k \cdot \overline{OQ}$$

o que mostra que P' é a imagem de Q pela homotetia de centro O e raio $k = \frac{r^2}{p}$.

Então $\delta' = \delta^*$ (δ' é homotética de δ).

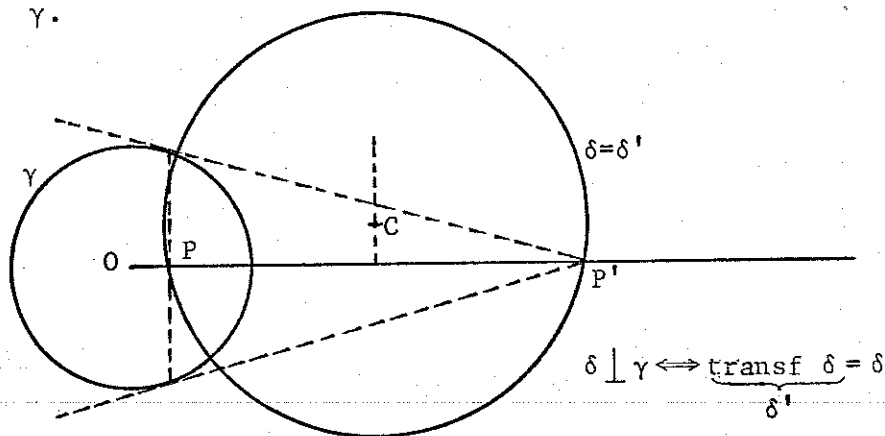
2) Pelo lema do teorema 30, a tangente t' a δ' em P' é paralela à tangente u a δ em Q , então $\hat{3} \cong \hat{1}$ (ângulos correspondentes).

Seja t a tangente a δ em P .

Se t e u se encontram em $R \Rightarrow \hat{1} \cong \hat{2}$ pelo teorema 28. Então t e t' se encontram num ponto S tal que $\hat{3} \cong \hat{2}$.

Como $\triangle PSP'$ é um triângulo isósceles (ângulos da base congruentes), S está na mediatriz de PP' . Então t' é a imagem de t , pela reflexão, cujo eixo é a mediatriz de PP' .

Corolário. A circunferência δ é ortogonal à circunferência γ se e somente se δ é transformada nela mesma, pela inversão em γ .



Demonstração.

⇒

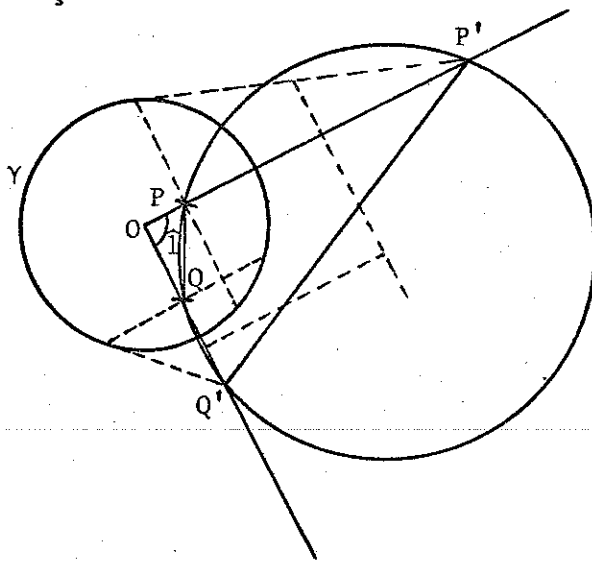
Se $\delta \perp \gamma$ e P está sobre δ , então $\text{pot} = (\overline{OP}) \cdot (\overline{OP'}) = r^2$ pelo teorema 29 ($\delta \perp \gamma \Rightarrow \delta$ passa por P e P') e pelo lema do teorema 29 (definição de potência) então $k=1$, (pois $r^2 = p$, e como $k = \frac{r^2}{p} \Rightarrow k=1$) e $\delta = \delta'$ (r raio de γ).

⇐

Reciprocamente, se $\delta = \delta'$, então $p = r^2$, δ passa pelo inverso P' de P em γ , então pelo teorema 29, δ é ortogonal a γ .

Lema. Seja O o centro da circunferência γ e sejam P e Q 2 pontos não colineares com O ; sejam P' e Q' seus inversos em γ ; então $\Delta POQ \sim \Delta Q'OP'$.

Demonstração.



Os triângulos ΔPOQ e $\Delta Q'OP'$ têm $\hat{I} = \hat{P}OQ$ comum e

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'},$$

pois P e Q estão na mesma circunferência

$$\Rightarrow \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$$

Então o critério de semelhança (lados proporcionais) fica satisfeito.

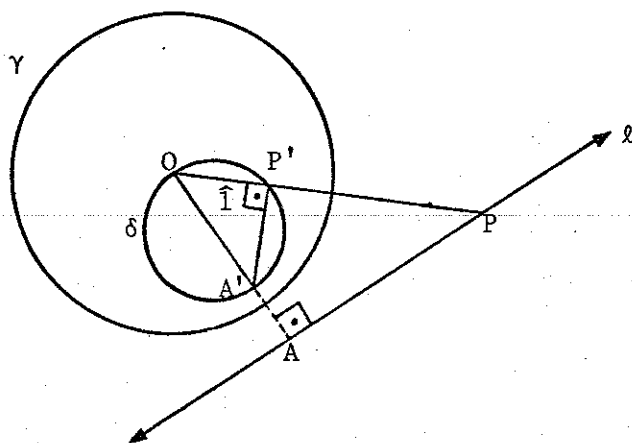
TEOREMA 31. Seja ℓ uma reta que não passa pelo centro O da circunferência γ .

1. A imagem de ℓ pela inversão em γ é uma circunferência sem o ponto O .

2. O diâmetro por O , da circunferência completa δ é, quando prolongado, perpendicular a ℓ .

Demonstração.

1) Seja A o pé da perpendicular de O a ℓ , P um outro ponto qualquer em ℓ e A' e P' seus inversos em γ .



Pelo lema do teorema 31 $\triangle OP'A' \sim \triangle OAP$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$$

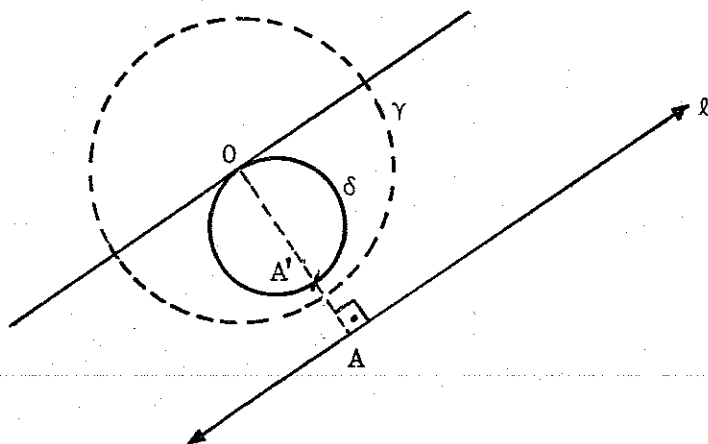
Então \hat{i} é um ângulo reto; então P' deve estar na circunferência δ .

2) A reta $\overline{OA'}$ que contém o diâmetro é perpendicular a ℓ , pela semelhança dos triângulos.

Reciprocamente, se começamos com qualquer ponto P' em δ , $P' \neq O$ e $\overline{OP'}$ corta ℓ em P , então, voltando ao raciocínio acima, $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ mostra que P' é o inverso de P em γ .

TEOREMA 32. Seja δ uma circunferência passando pelo centro O de γ .

A imagem de δ , menos O , pela inversão em γ é uma reta ℓ não por O . ℓ é paralela à tangente a δ em O .



Demonstração. Seja A' o ponto em δ , diametralmente oposto a O ; seja A seu inverso em γ e ℓ a reta perpendicular a \overline{OA} em A .

Pela demonstração do teorema 31, a inversão em γ transforma ℓ em $\delta - \{O\}$, então deve transformar $\delta - \{O\}$ em ℓ (pelo teorema 25 c) que diz que $(P')' = P$).

Sabemos que a reflexão numa reta Euclidiana preserva a medida de um ângulo, mas inverte a orientação do ângulo.

Vejamos o que acontece com a reflexão, na inversão.

TEOREMA 33.

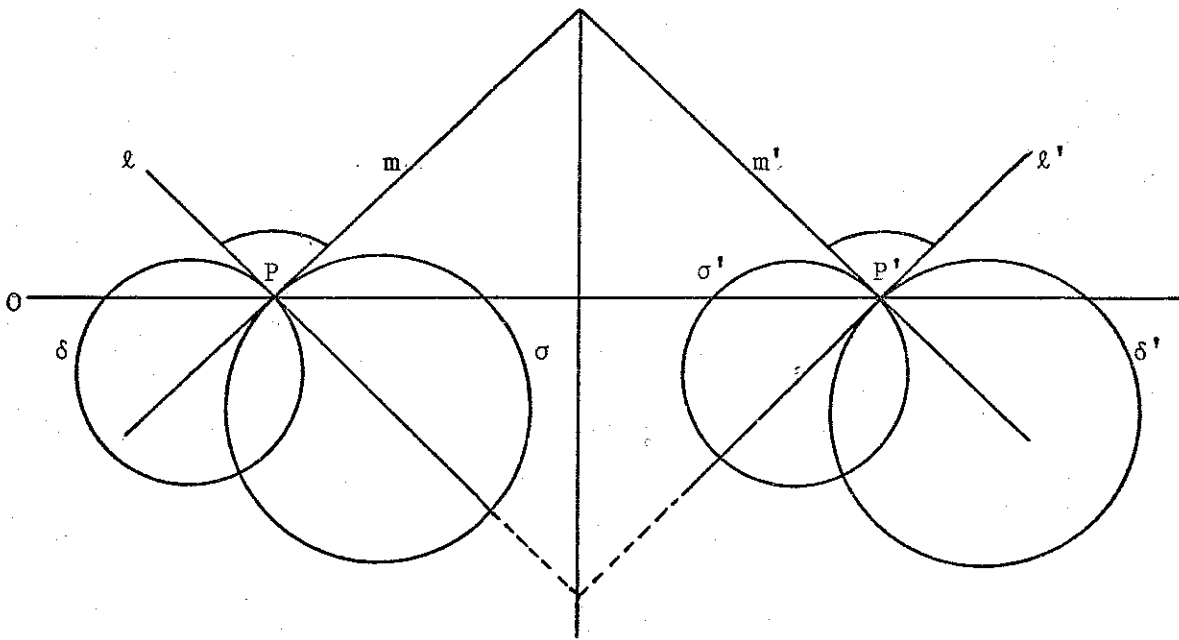
1. Um ângulo orientado da intersecção de 2 circunferências é conservado em valor absoluto, mas invertido na orientação, por qualquer inversão.

2. O mesmo se aplica ao ângulo da intersecção de uma circunferência e uma reta ou de duas retas.

Demonstração. Suponhamos que as circunferências δ e σ se interceptem no ponto P , com ℓ e m tangentes, respectivamente, a δ e σ , nesse ponto.

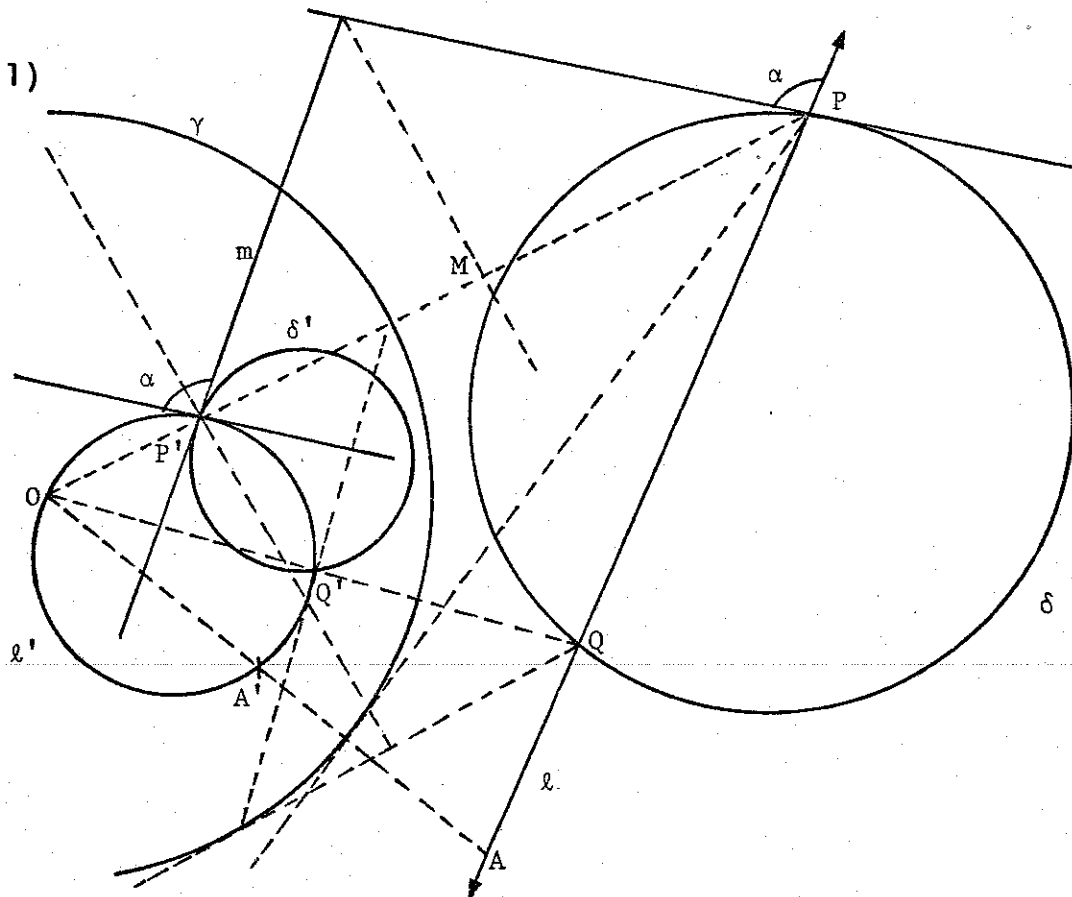
Seja P' o inverso de P em γ e sejam δ' e σ' as imagens de δ e σ pela inversão em γ .

Sejam ainda ℓ' e m' suas respectivas tangentes em P' .

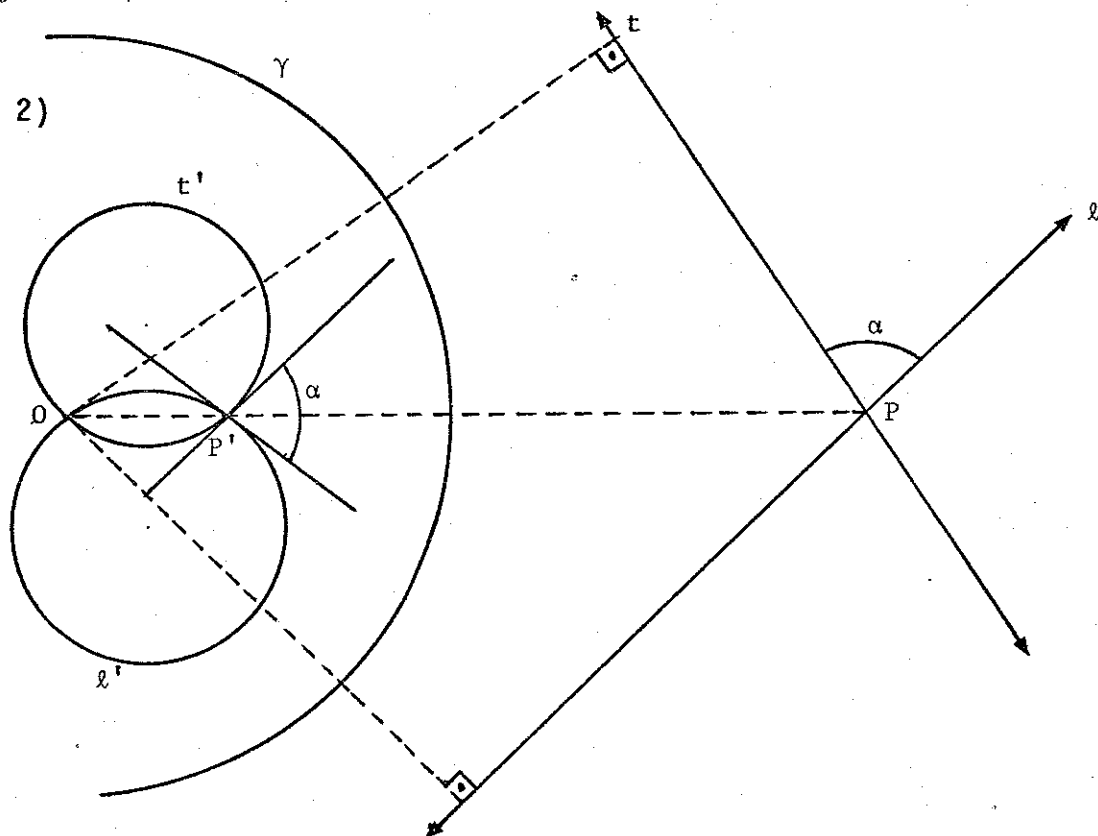


A primeira afirmação, então, segue-se do fato de que l' e m' são reflexões de l e m pela mediatriz de PP' (teorema 30 - 2)

Os outros casos se seguem dos teoremas 31 e 32.



Faz-se a inversão da reta ℓ e da circunferência δ em relação a γ e mede-se como o anterior.



Faz-se a inversão das retas t e ℓ e mede-se como o ângulo de 2 circunferências.

O teorema seguinte mostra que a inversão preserva a razão dupla, usada para definir comprimento de Poincaré.

TEOREMA 34. Se A, B, P, Q são 4 pontos diferentes do centro O de γ e A', B', P', Q' são seus inversos em γ , então $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$.

Demonstração. Pelo lema do teorema 31,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}}$$

e

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'Q'}}{\overline{OQ'}}$$

daí, dividindo membro a membro as igualdades, vem

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{A'Q'}} \implies \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{A'Q'}} \quad (1)$$

Analogamente, para um ponto B

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{OP'}}$$

e

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{OQ'}}$$

donde

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OB}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{B'Q'}}$$

ou

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{B'P'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{OQ'}} \quad (2)$$

Então, multiplicando (1) por (2), membro a membro

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{A'Q'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{B'P'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{OQ'}} \implies (AB, PQ) = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}} \cdot \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{B'P'}} = (A'B', P'Q')$$

portanto os inversos mantêm a razão dupla, então os inversos manterão as distâncias como foram definidas (pelo módulo do logaritmo das razões duplas).

Lema. Se $d(OB) = d$, então

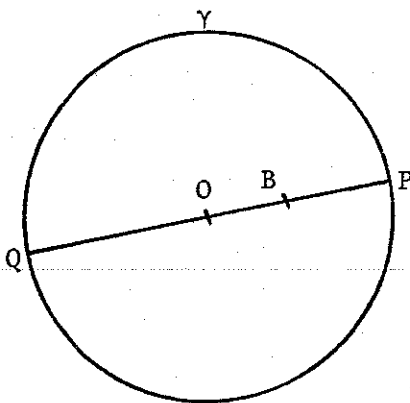
$$\overline{OB} = \frac{r(e^d - 1)}{(e^d + 1)}$$

onde e é a base dos logaritmos naturais e r é o raio de γ .

Demonstração. Se P e Q são os extremos do diâmetro de γ por B , marquemos os pontos, de modo que $Q * O * B * P$ então $d = d(OB) = |\log (OB, PQ)|$.

$$(OB, PQ) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$$

mas $\overline{OP} = r = \overline{OQ}$.



Então,

$$(OB, PQ) = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}}$$

então

$$\underbrace{d(OB)}_d = |\log (OB, PQ)| = \left| \log \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}} \right|$$

Exponenciando ambos os membros dessa equação:

$$e^d = e^{\left| \log \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}} \right|} \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{r + \overline{OB}}{r - \overline{OB}} \Rightarrow$$

$$e^d(r - \overline{OB}) = r + \overline{OB} \Rightarrow$$

$$e^d \cdot r - e^d \cdot \overline{OB} = r + \overline{OB} \Rightarrow$$

$$\overline{OB}(1 + e^d) = r(e^d - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{OB} = \frac{r(e^d - 1)}{1 + e^d}}$$

TEOREMA 35. Seja a circunferência δ ortogonal a circunferência γ . Então:

Como P está entre Q e Q', temos as desigualdades:

$$\overline{CQ} < \overline{CP} < \overline{CQ'}$$

Tomando as desigualdades inversas, temos

$$\frac{s^2}{\overline{CQ}} > \frac{s^2}{\overline{CP}} > \frac{s^2}{\overline{CQ'}}$$

e como por (1)

$$\frac{s^2}{\overline{CP}} = \overline{CQ'}$$

$$\frac{s^2}{\overline{CQ}} = \overline{CQ'}$$

$$\frac{s^2}{\overline{CQ'}} = \overline{CQ}$$

Temos $\overline{CQ'} > \overline{CP'} > \overline{CQ}$, então P' está entre Q e Q' e, portanto interior à γ .

2) Pelos teoremas 30, 32 e 33, a inversão em δ transforma qualquer circunferência σ , ortogonal à γ ou numa outra circunferência σ' ortogonal à γ ou numa reta σ' , ortogonal a γ , isto é, a reta pelo centro O de γ .

Obviamente, a reta σ ligando O a C é transformada em si mesma e qualquer outra reta σ por O é transformada pontualmente numa circunferência σ' , que é ortogonal à γ (pelos teoremas 31 e 33).

Em todos esses casos, o raciocínio anterior mostra que a parte de σ no interior de γ se transforma na parte de σ' no interior de γ .

Então, P-retas são transformadas em P-retas.

Se A e B estão no interior de γ e P e Q são extremos da P-reta por A e B, então inversão em δ transforma P e Q nas extremidades da P-reta por A' e B'.

Pelo teorema 34, $d(AB) = d(A'B')$. Então congruência de segmentos é conservada.

O teorema 33 mostra que congruência de ângulos também é preservada.

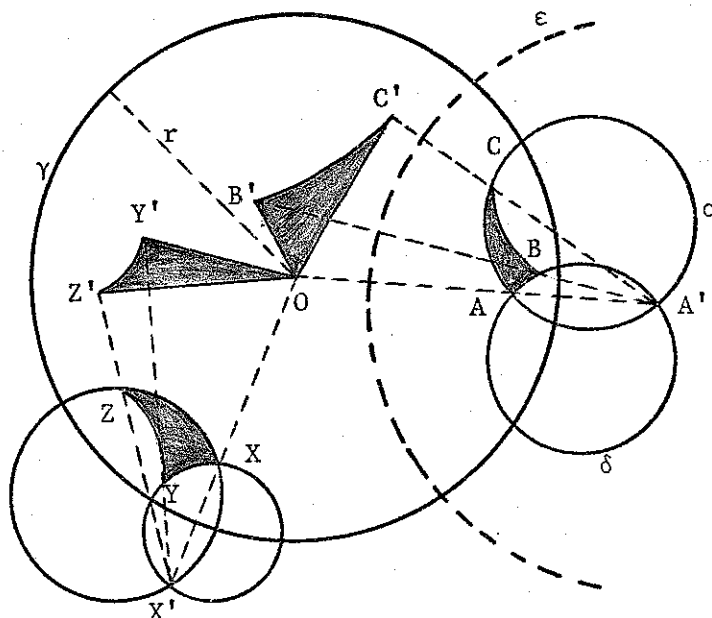
Além disso, a *ordem* de Poincaré é também preservada, porque B está entre A e D se e somente se A, B e D são colineares-Poincaré, e $d(AD) = d(AB) + d(BD)$.

Corolário. É fácil ver que se na afirmação do teorema 35, δ é tomado como uma reta pelo centro O de γ e a palavra "inversão" é mudada para "reflexão", então a conclusão do teorema 35 ainda é válida.

TEOREMA 36. Dois triângulos no modelo-disco de Poincaré são Poincaré-congruentes se e somente se eles podem ser transformados um no outro por uma sucessão de inversões em circunferências ortogonais a γ e reflexões relativas a diâmetros de γ .

Demonstração. Vamos verificar, finalmente, o Axioma

C_6 - LAL.



São dados dois triângulos de Poincaré, $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$, interiores a γ , tal que: $\hat{A} \cong \hat{X}$, $d(AC) = d(XZ)$ e $d(AB) = d(XY)$.

Devemos provar que esses triângulos são Poincaré-congruentes.

Primeiro reduzimos ao caso onde $A = X = O$ (O centro de γ).

Seja δ a circunferência ortogonal a γ por A e B e σ a circunferência ortogonal a γ por A e C.

Então δ novamente encontra σ no ponto A' fora de γ , que é inverso de A em γ (teorema 29)

Seja ϵ a circunferência centrada em A' , de raio s , onde

$$s^2 = (\overline{AA'}) \cdot (\overline{A'O}) \quad (1)$$

porque O é inverso de A em relação a ϵ , de centro A' .

Como $\overline{AA'} = \overline{A'O} - \overline{AO}$ substituindo em (1)

$$s^2 = (\overline{A'O} - \overline{AO}) (\overline{A'O}) = (\overline{A'O})^2 - (\overline{AO}) (\overline{A'O}) = (\overline{A'O})^2 - r^2$$

pois A' é o inverso de A em relação a γ e r é o raio de γ .

Esta equação mostra que ϵ é ortogonal a γ (recíproca do teorema de Pitágoras).

Por definição de ϵ , O é o inverso de A em ϵ e pelo teorema 35, inversão em ϵ transforma o triângulo de Poincaré $\triangle ABC$ no Poincaré-congruente $\triangle OB'C'$.

Da mesma maneira, o triângulo de Poincaré $\triangle XYZ$ pode ser transformado pela inversão, no triângulo de Poincaré, Poincaré-congruente, $\triangle OY'Z'$.

Mostramos que podemos assumir $A = X = O$.

Pelo lema do teorema 35 e a hipótese LAL, temos

$$\overline{OB'} = \overline{OY'} \quad \text{porque} \quad \overline{AB} = \overline{XY}$$

$$\overline{OC'} = \overline{OZ'} \quad \overline{AC} = \overline{XZ}$$

e

e

$$B'\hat{O}C' \cong Y'\hat{O}Z'$$

$$B\hat{A}C \cong Y\hat{X}Z$$

Então, uma conveniente rotação Euclidiana em O - combinando, se necessário, com reflexão num diâmetro - transforma o triângulo Euclidiano $\triangle OBC'$ no triângulo Euclidiano $\triangle OY'Z'$.

Esta transformação leva γ em si mesma e a circunferência ortogonal, por B e C na circunferência ortogonal por Y e Z , conservando o comprimento de Poincaré e a medida de ângulo.

Então os triângulos de Poincaré $\triangle OBC$ e $\triangle OYZ$ são Poincaré congruentes.

3. ÂNGULO DE PARALELISMO

Podemos mostrar que se P varia, $\pi(PQ)^\circ$ toma todos os possíveis valores entre 0° e 90° .

Uma das maiores descobertas de J. Bolyai e Lobachevsky são suas fórmulas para essa medida.

Um *segmento básico natural* OI na Geometria Hiperbólica é qualquer segmento OI tal que $\pi(OI)^\circ = 45^\circ$.

Pelo corolário do teorema 21, tais segmentos são congruentes.

Vamos agora usar o modelo de Poincaré para determinar a fórmula de J. Bolyai e Lobachevsky para o ângulo de paralelismo.

Seja $\pi(d)$ a notação do número de radianos no ângulo de paralelismo correspondente à distância d de Poincaré (número de radianos é $\frac{\pi}{180}$ vezes o número de graus).

TEOREMA 37. No modelo disco de Poincaré, a fórmula para o ângulo de paralelismo é

$$e^{-d} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(d)}{2} \right)$$

onde e é a base dos logaritmos naturais, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ e $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{cos} x$, são definidos pelo desenvolvimento em séries (a tangente não pode ser interpretada como a razão do lado oposto sobre o lado adjacente de um triângulo retângulo, no plano hiperbólico).

Demonstração. Por definição de ângulo de paralelismo, d é a *distância de Poincaré* $d(PQ)$ de algum ponto P a alguma reta ℓ , e $\pi(d)$ é o número de radianos do ângulo que uma semi-reta paralela-limite a ℓ , por P , faz com \overline{PQ} .

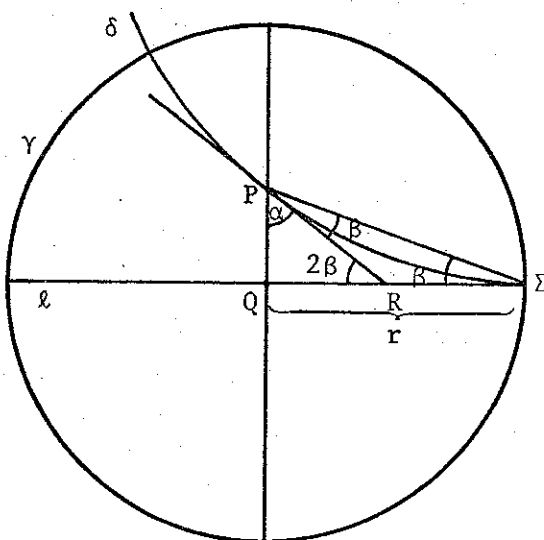
Podemos escolher ℓ para que seja diâmetro de γ e Q o centro de γ , tal que P esteja no diâmetro perpendicular.

Uma semi-reta paralela-limite, por P , é, então, um arco de circunferência δ ortogonal à γ , tal que δ é tangente à ℓ num extremo Σ .

A reta tangente a δ , em P, portanto, encontra ℓ em algum ponto interior R, que é o polo da corda P Σ de δ , e, pelo teorema 28

$$\underbrace{\widehat{RP\Sigma}}_{\beta} \text{ e } \underbrace{\widehat{R\Sigma P}}_{\beta}$$

têm, ambos, o mesmo número de radianos β .



Seja $\alpha = \pi(d)$, que é o número de radianos em \widehat{RPQ} ; como 2β é o número de radianos em \widehat{PRQ} (exterior ao $\triangle P R \Sigma$), temos

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \implies 2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \boxed{\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

A distância Euclidiana \overline{PQ} (na figura)

$$\frac{\overline{PQ}}{r} = \operatorname{tg} \beta \implies \boxed{\overline{PQ} = r \operatorname{tg} \beta} \quad (2)$$

então, pela demonstração do lema do teorema 35

$$e^d = \frac{1 + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \beta}.$$

De fato; pelo lema, se $d(PQ) = d$,

$$d(PQ) = \frac{r(e^d - 1)}{e^d + 1}$$

então, por (2)

$$r \operatorname{tg} \beta = \frac{r(e^d - 1)}{e^d + 1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \beta (e^d + 1) = e^d - 1 \Rightarrow$$

$$e^d \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta = e^d - 1 \Rightarrow$$

$$e^d (\operatorname{tg} \beta - 1) = -\operatorname{tg} \beta - 1 \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{-\operatorname{tg} \beta - 1}{\operatorname{tg} \beta - 1} \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1 - \operatorname{tg} \beta}$$

(3)

Usando a fórmula para β (por (1)) e a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} \left(\underbrace{\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}}_{\beta} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

temos, por (3) e (1)

$$e^d = \frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1 - \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{1 + \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{1 - \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow$$

$$e^d = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

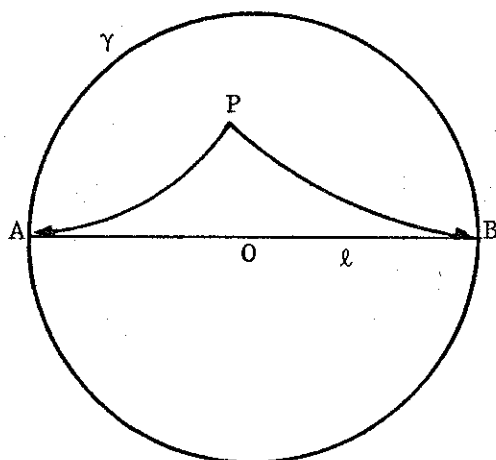
$$e^d = \frac{2}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$e^{-d} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ e como } \alpha = \pi(d)$$

$$e^{-d} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi(d)}{2} \right) \text{ c.q.d.}$$

As semi-retas paralelas-limite, no modelo de Poincaré,

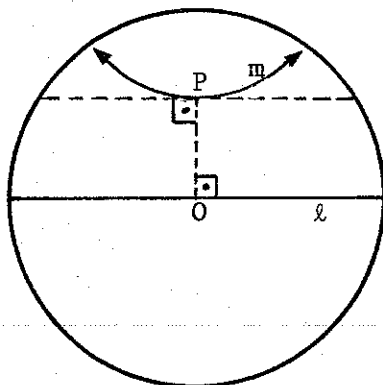
são ilustradas assim:



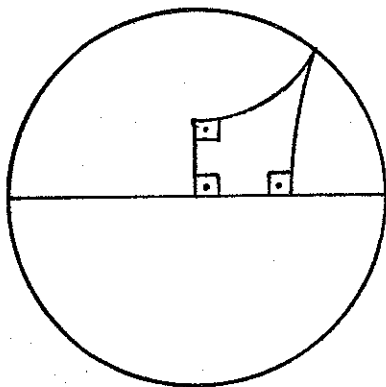
Escolhemos ℓ como um diâmetro aberto $A)(B$; as semi-retas são arcos de circunferências ortogonais a γ , por P , que encontram \overline{AB} em A e B e são tangentes a essa reta, nesses pontos.

Pode-se ver como essas semi-retas se aproximam assintoticamente de ℓ e se movem de encontro aos pontos ideais representados por A e B .

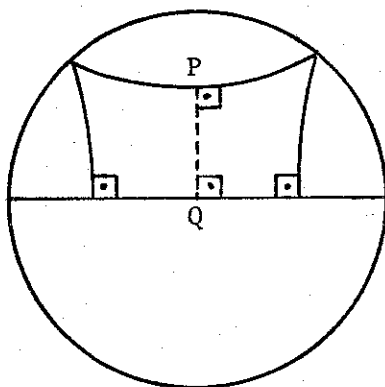
Nesta ilustração temos 2 retas de Poincaré paralelas, com uma perpendicular comum; m diverge de ℓ de ambos os lados da perpendicular comum PO .



O quadrilátero de Lambert fica representado assim, onde se vê o 4º ângulo que é agudo.



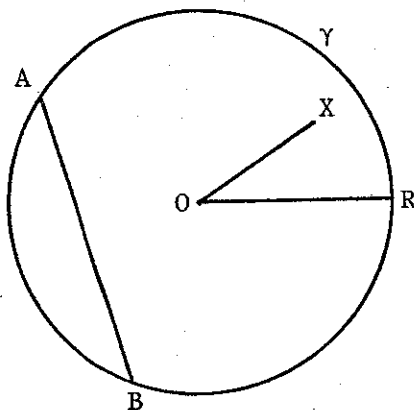
O quadrilátero formado pela reunião do quadrilátero de Lambert e seu simétrico em relação à reta \overleftrightarrow{PQ} que contém o lado PQ é o quadrilátero de Saccheri.



4. MODELO DE BELTRAMI-KLEIN

Fixamos uma circunferência γ no plano Euclidiano. Como no primeiro modelo de Poincaré, os pontos internos da circunferência γ serão os pontos do plano hiperbólico π , de Klein,

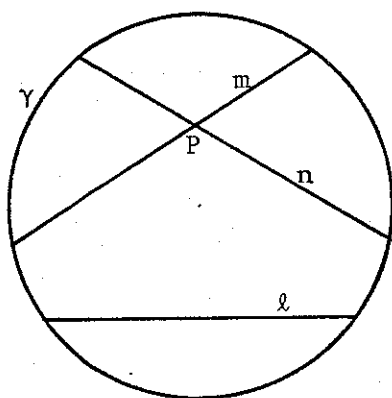
isto é, se O é o centro de γ e OR um raio de γ , serão todos os pontos X , tais que $OX < OR$.



As cordas AB de γ , sem as extremidades, são as retas de π , representadas por $A)(B$ ou r .

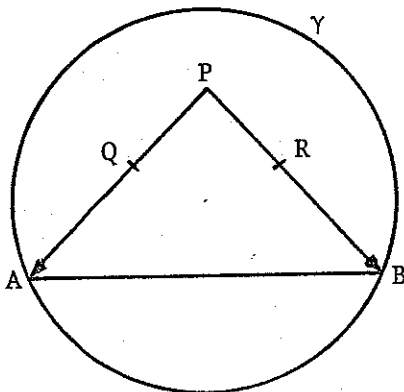
As relações "incide" e "entre", são usadas no sentido usual de Euclides.

REPRESENTAÇÃO DO PLANO HIPERBÓLICO



Nesta representação, as cordas abertas m e n por P , satisfazem o Axioma Hiperbólico.

O modelo de Klein nos permite visualizar a semi-reta paralela-limite.



Seja P um ponto interior a γ e não pertencente à corda aberta $A)(B$.

A e B são pontos da circunferência e portanto não representam pontos no plano hiperbólico; eles representam "pontos ideais" e são chamados "extremos" da reta hiperbólica representada por $A)(B$.

Fica também óbvia no modelo de Klein, a reta interior ao ângulo.

Na figura acima, dado o ângulo \widehat{QPR} , se A é o extremo de \overrightarrow{PQ} e B é o extremo de \overrightarrow{PR} , então $A)(B$ é a reta interior ao ângulo \widehat{QPR} , com \overrightarrow{PB} e \overrightarrow{PA} semi-retas paralelas-limite.

PERPENDICULARISMO NO MODELO DE
BELTRAMI - KLEIN

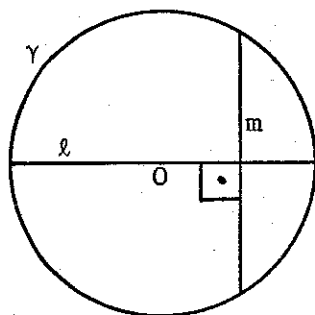
A congruência de ângulos, no modelo de Klein, é interpretada diferentemente do modo usual de Euclides.

Vejamos, antes, os ângulos retos, que são os ângulos congruentes aos seus suplementos.

Sejam ℓ e m cordas abertas de γ . Para descrever perpendicularismo no modelo de Klein, vamos considerar 2 casos:

1) ℓ ou m é diâmetro.

Então $\ell \perp m$ no sentido de Klein, se e somente se, $\ell \perp m$ no sentido de Euclides.

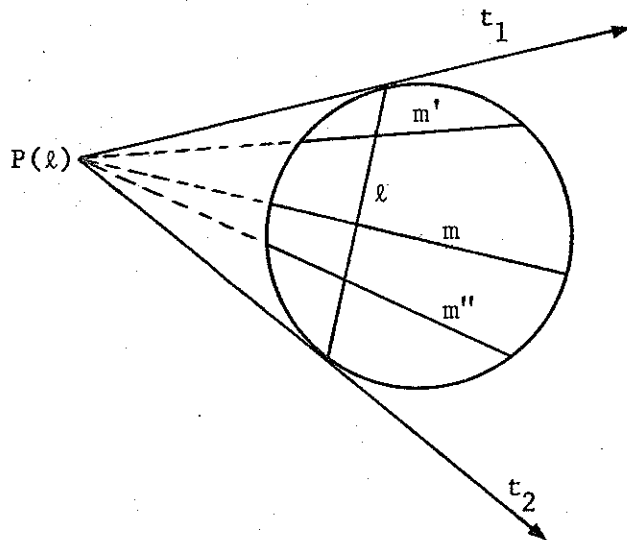


2) ℓ e m não são diâmetros.

Neste caso, associamos a ℓ um certo ponto $P(\ell)$, fora de γ , chamada *polo* de ℓ , definido como se segue:

$P(\ell)$ é a intersecção das tangentes t_1 e t_2 , a γ , nos pontos "ideais" de ℓ .

(t_1 e t_2 não são paralelas, porque ℓ não é diâmetro).



Então, por definição, $m \perp \ell$ no sentido de Klein, se e somente se, a reta Euclidiana, extensão de m , passa por $P(\ell)$.

Então, na figura:

$$m' \perp \ell$$

$$m \perp \ell$$

$$m'' \perp \ell$$

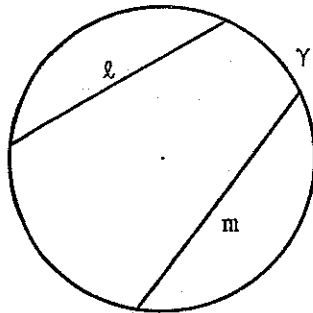
porque m , m' , m'' passam por $P(\ell)$ (veremos mais tarde a justificação no ítem 6 - Congruência no modelo de Klein).

Podemos também ver como paralelas divergentes têm uma perpendicular comum (teorema 23), que é única, (pelo teorema 13)

Na figura, m' e m têm a perpendicular comum ℓ .

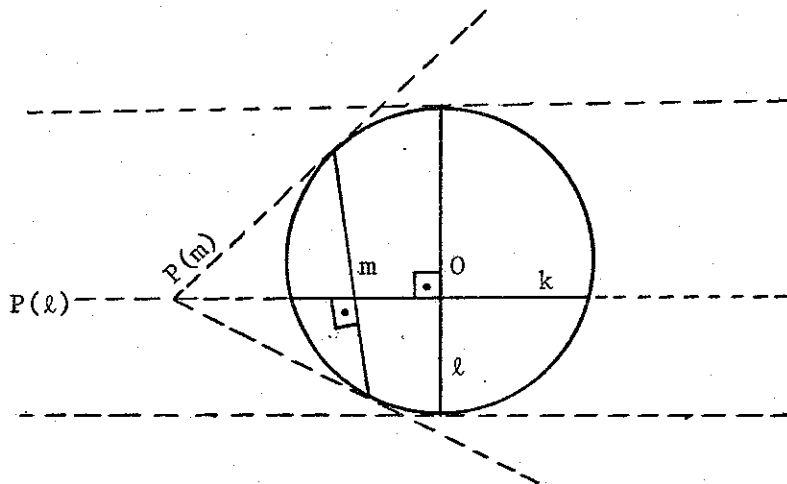
Na hipótese do teorema 23, foram dadas duas retas paralelas que não contêm as semi-retas paralelas-limite.

No modelo de Klein, isto significa que foram dadas duas cordas abertas ℓ e m que não têm uma extremidade comum.



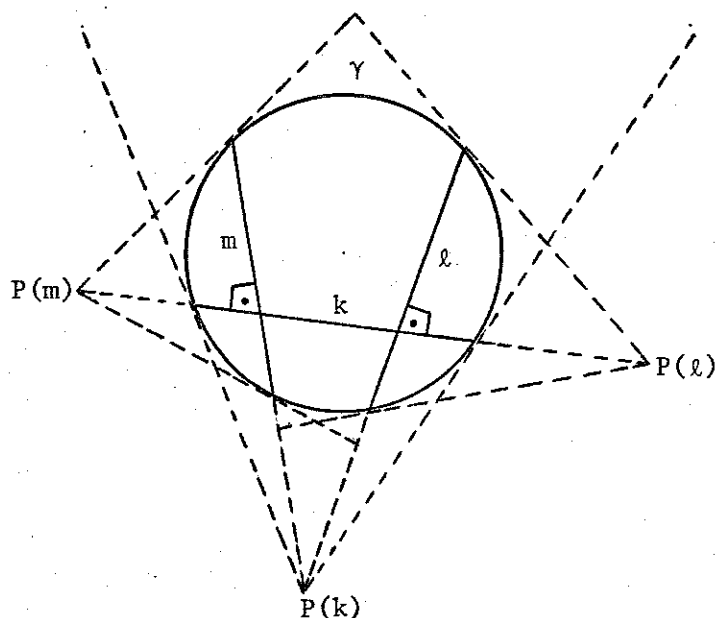
A conclusão do teorema 23 é que ℓ e m têm uma perpendicular comum k . Vejamos como determinar k .

caso 1. ℓ é diâmetro e m corda aberta (não diâmetro)



Por definição, qualquer reta Euclidiana que passe por $P(m)$ é perpendicular a m ; tomamos a reta perpendicular a ℓ (diâmetro), perpendicular no sentido Euclidiano, que passe por $P(m)$ $\implies k \perp \ell$ e $k \perp m$. Note-se que k é paralela às tangentes a γ nas extremidades de ℓ .

caso 2. ℓ e m não são diâmetros.



Pela definição de perpendicularismo em Klein, para que k seja perpendicular a ℓ e m ao mesmo tempo, a reta Euclidiana que contém k tem que passar pelo polo de ℓ e pelo polo de m .

Consequentemente, para construir k , temos unicamente que ligar estes 2 polos pela reta Euclidiana e tomar k como a corda aberta de γ contida nessa reta.

Vejamos agora o comportamento de pares de retas no modelo de Klein.

Chamemos os pontos interiores da circunferência γ (que representam todos os pontos no plano hiperbólico) de "pontos hiperbólicos".

Os pontos na circunferência γ são os "pontos ideais".

Os pontos fora de γ são os "pontos ultra-ideais".

Finalmente, para todo diâmetro de γ , imaginemos outro ponto "infinito", tal que todas as retas paralelas a esse diâmetro, no sentido Euclidiano, se encontrem nesse ponto.

Esses pontos no infinito serão também chamados "ultra-ideais".

Podemos, então, dizer, que duas retas de Klein se "encontram" num ponto hiperbólico, num ponto "ideal", ou num ponto "ultra-ideal", dependendo delas se interceptarem, serem paralelas assintóticas ou paralelas divergentes, respectivamente.

O ponto "ultra-ideal", onde as retas paralelas divergentes ℓ e m se encontram, é o polo $P(k)$ da sua perpendicular comum k (figura anterior).

Vejamos a questão de dois pontos determinarem uma única reta.

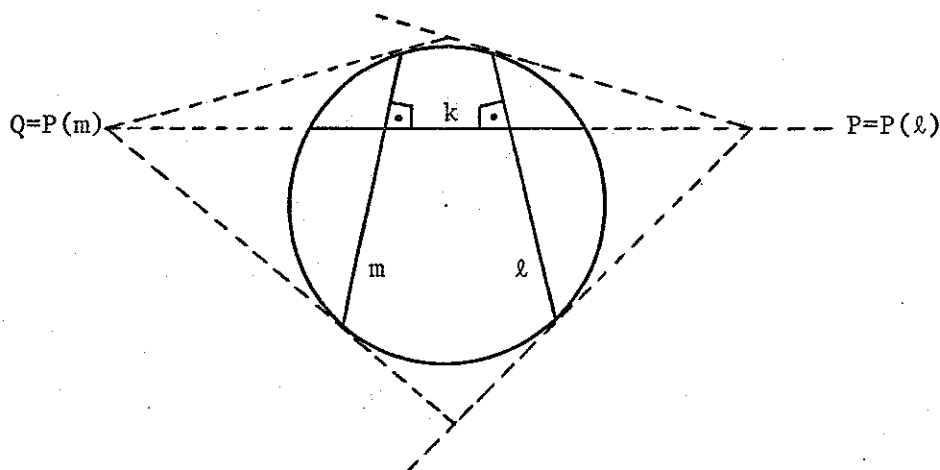
Sabemos que 2 pontos hiperbólicos determinam uma única reta hiperbólica.

Sabemos também que 2 pontos ideais também determinam uma única reta e que esses pontos ideais estão na reta Euclidiana que liga esses pontos.

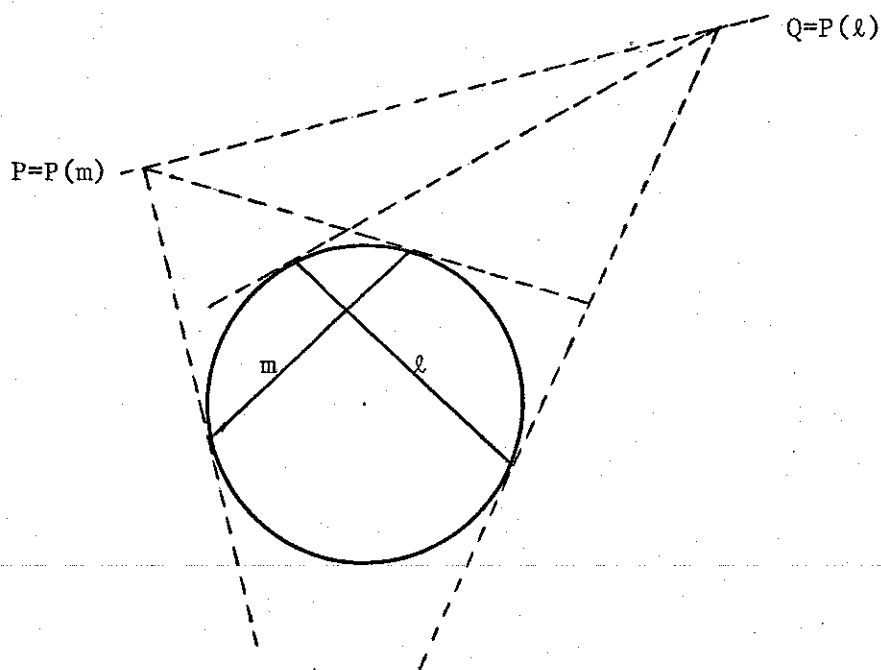
Vejamos o que acontece com 2 pontos ultra-ideais e com 2 pontos de diferentes espécies.

1) Dados 2 pontos *ultra-ideais* P e Q , eles são polos de 2 retas de Klein, m e ℓ .

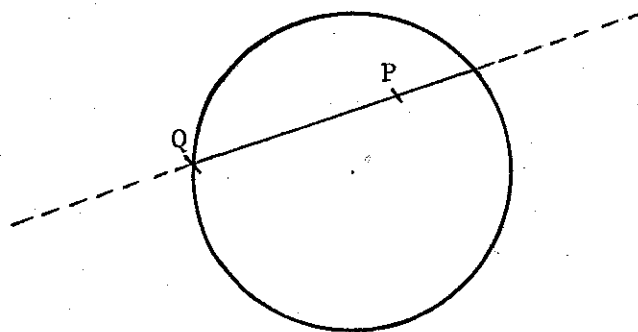
a) Se $m // \ell$ no sentido de Klein, a reta Euclidiana que une os 2 pontos P e Q é a reta que une os dois polos, e é, então, a reta perpendicular comum a ℓ e m (única) e que contém a reta hiperbólica k .



b) Se m e ℓ têm um ponto comum, isto é, m concorrente com ℓ , não existe reta Euclidiana \overleftrightarrow{PQ} que contenha uma reta hiperbólica \overleftrightarrow{PQ} , onde P e Q são polos de m e ℓ .

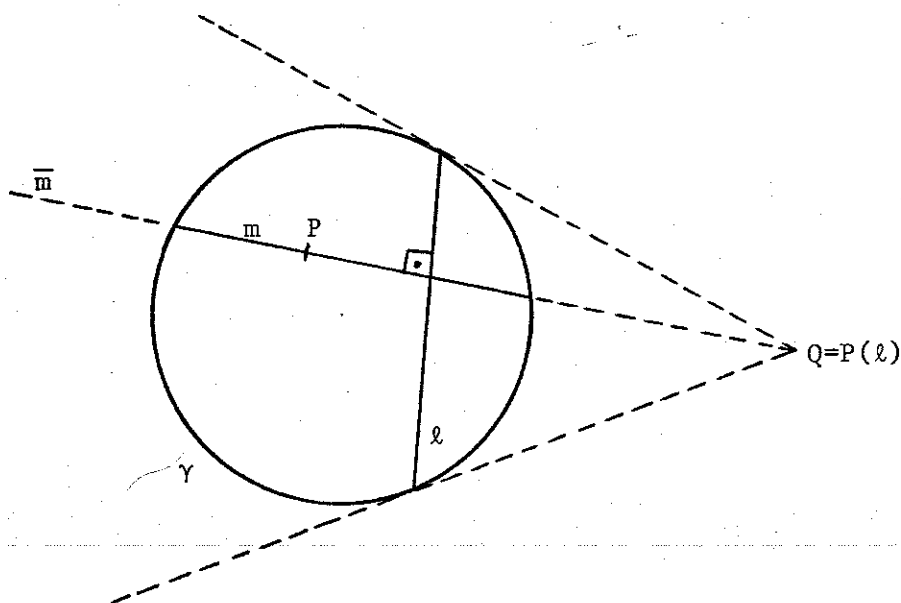


2) Dados um ponto hiperbólico P e um ponto ideal Q , a reta Euclidiana pelos 2 pontos é única e contém uma corda de γ então, em Klein, a corda aberta é única (reta hiperbólica).

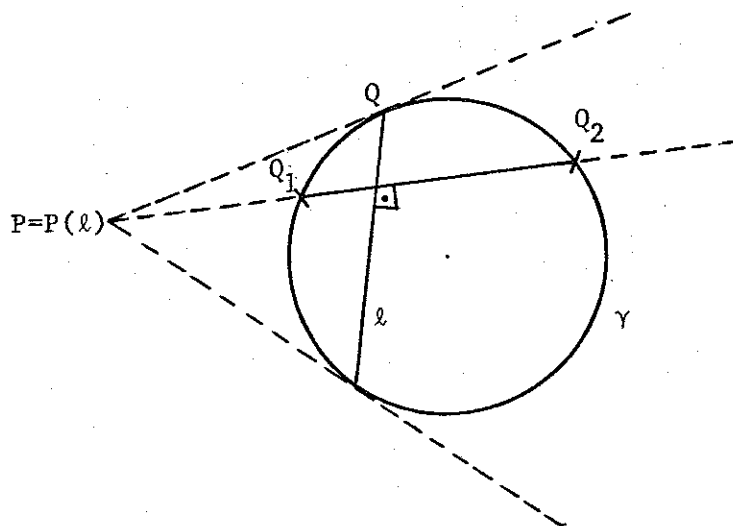


3) Dados 1 ponto hiperbólico P e um ponto ultra-ideal Q , Q será o polo de uma reta de Klein ℓ .

A reta Euclidiana \bar{m} , unindo P a $Q = P(\ell)$ é a única reta por P , que contém m , reta de Klein, e que é perpendicular a ℓ , no sentido de Klein.



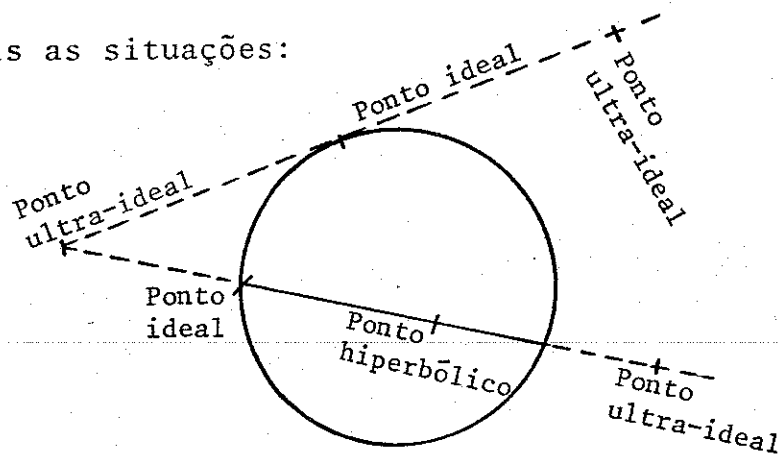
4) Dados um ponto ideal Q e um ponto ultra-ideal $P = P(\ell)$.



a) Se $P = P(\ell)$ é ponto ultra-ideal e Q ponto ideal extremidade de ℓ , então não existe reta hiperbólica contida na reta Euclidiana, pelos 2 pontos, pois a reta \overleftrightarrow{PQ} não contém corda aberta de γ .

b) Se $P = P(\ell)$ é ponto ultra-ideal e Q_1 ou Q_2 ponto ideal diferentes das extremidades de ℓ , então existe a reta $\overleftrightarrow{PQ_1}$ ($\overleftrightarrow{PQ_2}$) e $\overleftrightarrow{PQ_1} \perp \ell$ é a única reta por Q_1 perpendicular a ℓ e que contém a reta hiperbólica.

Eis as situações:

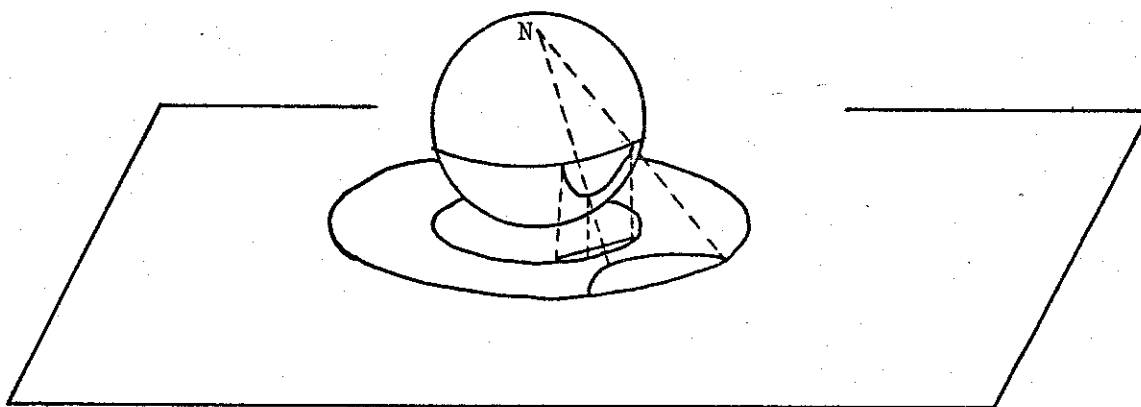


5. ISOMORFISMO ENTRE OS MODELOS DE KLEIN E POINCARÉ

Podemos notar que os 2 modelos apresentados não são essencialmente diferentes.

Esses modelos são, de fato, isomorfos, no sentido técnico de que uma correspondência bi-unívoca pode ser estabelecida entre "pontos" e "retas" de um modelo e os "pontos" e "retas" do outro, tal que preserve as relações de incidência, ordem e congruência.

Podemos mostrar esse isomorfismo, tomando em primeiro lugar o modelo de Klein e, no espaço Euclidiano, uma superfície esférica, com raio igual ao do modelo de Klein, tangente ao plano no centro da circunferência.



Projetamos ortogonalmente o modelo de Klein inteiro so
bre o hemisfério inferior dessa superfície esférica.

Por essa projeção, as cordas do modelo de Klein se tornam arcos de circunferências ortogonais ao equador.

Projetamos então, estereograficamente, o hemisfério inferior, do polo norte da superfície esférica sobre o plano original.

O equador da superfície esférica será projetado sobre o plano, numa circunferência maior que aquela usada no modelo de Klein e o hemisfério inferior será projetado estereograficamente no interior dessa circunferência.

Sob essas sucessivas transformações, as cordas do modelo de Klein são projetadas biunivocamente sobre os diâmetros e arcos ortogonais do modelo de Poincaré.

Nesse sentido, o isomorfismo dos modelos estará estabelecido.

Vamos provar que todos os possíveis modelos da Geometria Hiperbólica são isomorfos uns aos outros, isto é, que os axiomas para a Geometria Hiperbólica são categóricos.

O mesmo é verdade para a Geometria Euclidiana.

A natureza categórica da Geometria Euclidiana fica estabelecida, introduzindo-se coordenadas cartesianas sobre o plano Euclidiano. Podemos, então, demonstrar, analiticamente, as propriedades.

Analogamente, a natureza categórica da Geometria Hiperbólica é estabelecida introduzindo-se as coordenadas de Beltrami

no plano hiperbólico, no qual a trigonometria hiperbólica deve ser desenvolvida antes, que não é objetivo deste trabalho.

Tendo verificado que a interpretação do disco de Poincaré é realmente um modelo da Geometria Hiperbólica, vamos demonstrar pelo isomorfismo, que a interpretação de Klein é também modelo.

Consideremos a esfera unitária Σ no espaço tridimensional cartesiano, dada pela equação

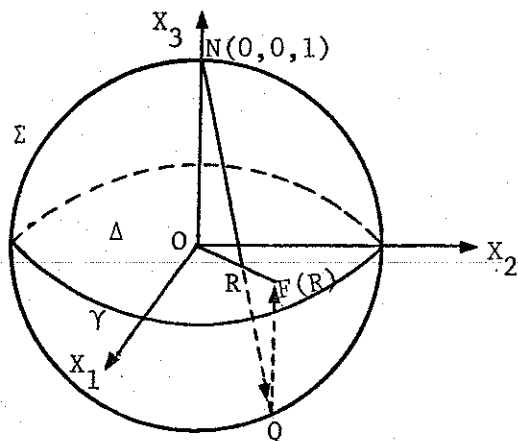
$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \text{ (raio 1)}$$

Seja γ a circunferência unitária no plano equatorial de Σ , determinada pela equação $X_3 = 0$.

Representaremos ambos, o disco de Poincaré e o disco de Klein pelo conjunto Δ dos pontos de γ e seu interior e tomaremos como nosso isomorfismo, F , a composição de duas aplicações.

Se $N(0, 0, 1)$ é o polo norte de Σ , primeiro projetamos Δ estereograficamente de N , sobre o hemisfério sul de Σ .

Então projetamos ortogonalmente esse hemisfério no disco Δ .



O isomorfismo F leva o modelo de Poincaré para o modelo de Klein.

Temos $R = (x_1, x_2, 0)$.

A reta pelos pontos $N(0,0,1)$ e $R(x_1, x_2, 0)$ é dada por

$$\frac{X_1 - 0}{0 - x_1} = \frac{X_2 - 0}{0 - x_2} = \frac{X_3 - 1}{1 - 0}$$

ou

$$\frac{X_1}{-x_1} = \frac{X_2}{-x_2} = \frac{X_3 - 1}{1} \Rightarrow \frac{X_1}{x_1} = \frac{X_2}{x_2} = \frac{X_3 - 1}{-1} = t, \text{ com } t \neq 0,$$

então

$$X_1 = x_1 t$$

$$X_2 = x_2 t \tag{1}$$

$$X_3 - 1 = -t \Rightarrow X_3 = 1 - t \Rightarrow X_3^2 = 1 - 2t + t^2$$

Como

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \tag{2}$$

substituindo (1) em (2)

$$x_1^2 t + x_2^2 t + 1 - 2t + t^2 = 1 \Rightarrow t^2 (x_1^2 + x_2^2 + 1) = 2t \Rightarrow \text{como } t \neq 0$$

$$t(x_1^2 + x_2^2 + 1) = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

então, substituindo t em (1)

$$X_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

$$X_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

$$X_3 = 1 - \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

No plano, a 3.^a coordenada é 0, daí:

$$F(R) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, 0 \right)$$

F é dado, então, em coordenadas, por

$$F(x_1, x_2, 0) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, 0 \right)$$

ou, se ignorarmos a 3.^a coordenada (zero), e usarmos simplesmente as coordenadas complexas,

$$Z = x_1 + i x_2 \quad (3)$$

então F é dada por

$$F(Z) = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} + i \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \frac{2(x_1 + i x_2)}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$$

e como por (3) $|Z|^2 = x_1^2 + x_2^2$

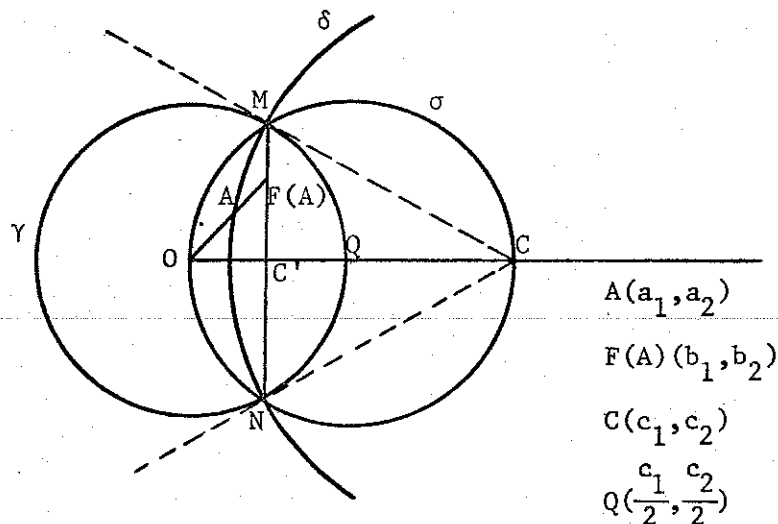
$$F(Z) = \frac{2Z}{1 + |Z|^2}$$

Está claro que F projeta os pontos do diâmetro de γ com extremos P e Q no mesmo diâmetro (mas movendo os pontos para fora, em direção à circunferência).

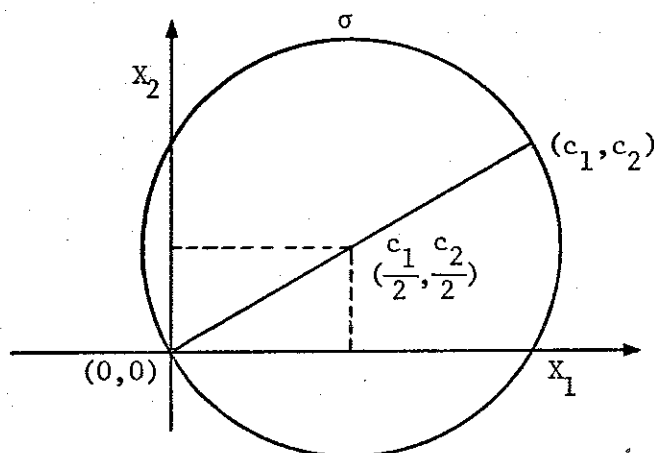
(No exemplo dado na figura, $R \in \Delta$ e ao diâmetro. Q é a projeção estereográfica de R na superfície esférica e $F(R)$ é a projeção ortogonal de Q).

TEOREMA 38. Seja δ uma circunferência ortogonal a γ , cortando γ nos pontos M e N . Então F projeta a reta de Poincaré com extremidades M e N na corda aberta $M)(N$.

Vamos provar que, se A está sobre o arco de δ de M a N , dentro de γ , então $F(A)$ é a projeção de A por O , na corda MN (ver figura).



Suponhamos que o centro C de δ tenha coordenadas (c_1, c_2) . Pelo teorema 27, os pontos M e N são intersecções da circunferência σ que tem CO como diâmetro, com γ . A equação desta circunferência σ é:



$$\left(x_1 - \frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{c_2}{2}\right)^2 = r^2 \quad (1)$$

r = raio de σ

$$\text{mas } r^2 = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2 \quad (2)$$

então, desenvolvendo (1) e substituindo (2)

$$x_1^2 - 2 \cdot \frac{c_1}{2} \cdot x_1 + \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + x_2^2 - 2 \cdot \frac{c_2}{2} \cdot x_2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1^2 - c_1 x_1 + x_2^2 - c_2 x_2 = 0} \quad \text{equação de } \sigma \quad (3)$$

Combinando esta equação com a equação

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ de } \gamma \quad (4)$$

Temos a equação

$$\boxed{c_1 x_1 + c_2 x_2 = 1} \quad (5)$$

(solução de (3) e (4)) da reta \overline{MN} (polar C com relação a γ).

Como δ é ortogonal a γ (porque MN é polar de C então $MC = NC$, tangente à γ em M e N), \widehat{ONC} é um ângulo reto e o teorema de Pitágoras nos dá

$$\overline{CN}^2 = \overline{CO}^2 - \overline{ON}^2 = c_1^2 + c_2^2 - 1 \quad (6)$$

onde

\overline{CN} = raio de δ

\overline{ON} = raio de $\gamma = 1$

$c_1^2 + c_2^2$ = distância de $C(c_1, c_2)$ a $O(0, 0)$

Então δ é a circunferência de centro C

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = \underbrace{c_1^2 + c_2^2 - 1}_{\text{raio de } \delta \text{ ao quadrado (por (6))}}$$

para um ponto qualquer (x_1, x_2) .

Temos então

$$x_1^2 - 2x_1 c_1 + \cancel{c_1^2} + x_2^2 - 2x_2 c_2 + \cancel{c_2^2} = \cancel{c_1^2} + \cancel{c_2^2} - 1$$

ou

$$\boxed{2x_1 c_1 + 2x_2 c_2 - 1 = x_1^2 + x_2^2} \quad \text{equação de } \delta$$

ou

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 c_1 + 2x_2 c_2 - 1} \quad (7)$$

Suponhamos agora que $A(a_1, a_2)$ esteja sobre δ e $F(A) = (b_1, b_2)$ seja a imagem de A por F .

Temos para $j = 1, 2$

$$b_j = \frac{2a_j}{1 + a_1^2 + a_2^2}$$

substituindo $a_1^2 + a_2^2$ por $2c_1 a_1 + 2c_2 a_2 - 1$ (de (7), pois $A \in \delta$, onde $x_1 = a_1$ e $x_2 = a_2$).

Temos:

$$b_j = \frac{2a_j}{1 + 2c_1 a_1 + 2c_2 a_2 - 1} = \frac{2a_j}{2(c_1 a_1 + c_2 a_2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{b_j = \frac{a_j}{c_1 a_1 + c_2 a_2}}$$

ou

$$b_1 = \frac{a_1}{c_1 a_1 + c_2 a_2}$$

$$b_2 = \frac{a_2}{c_1 a_1 + c_2 a_2}$$

substituindo-se x_1 por b_1 e x_2 por b_2 em $c_1 x_1 + c_2 x_2$ em (5)

temos

$$c_1 \cdot \frac{a_1}{c_1 a_1 + c_2 a_2} + c_2 \cdot \frac{a_2}{c_1 a_1 + c_2 a_2} = \frac{c_1 a_1 + c_2 a_2}{c_1 a_1 + c_2 a_2} = 1$$

que satisfaz a equação da reta \overleftrightarrow{MN} e portanto $F(A)$ está sobre o polar de C , como foi afirmado.

6. CONGRUÊNCIA NO MODELO DE KLEIN

Para definir congruência no modelo de Klein, usaremos o isomorfismo F .

DEFINIÇÃO. Dois segmentos (respectivamente 2 ângulos), são interpretados como Klein-congruentes se sua imagem inversa, por F , no modelo de Poincaré, são Poincaré-congruentes (como de finido antes).

Com essa interpretação, a verificação dos axiomas é imediata.

Vamos então justificar agora a descrição já feita do *perpendicularismo no modelo de Klein*, usando F e F^{-1} .

Usando a definição acima, podemos demonstrar:

TEOREMA 39. Duas retas de Klein, ℓ e m são Klein-perpendiculares se e somente se suas imagens inversas $F^{-1}(\ell)$ e $F^{-1}(m)$ são retas de Poincaré-perpendiculares.

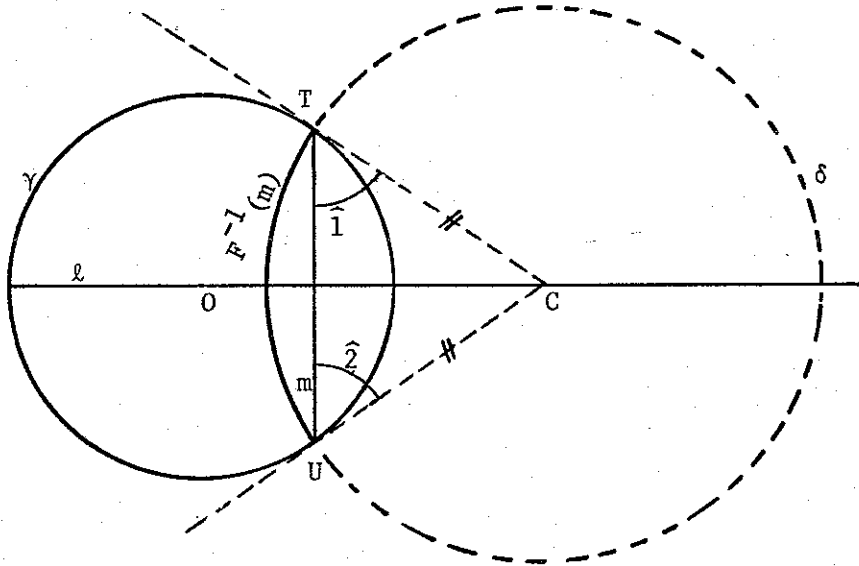
Existem 3 casos a considerar:

1º caso. Ambas, ℓ e m , são diâmetros.

Neste caso, é claro que perpendicularismo tem o sentido usual de Euclides, pois o diâmetro vai no diâmetro, como vemos e $F^{-1}(\ell) = \ell$ e $F^{-1}(m) = m$.

2º caso. Somente ℓ é diâmetro.

Então $F^{-1}(\ell) = \ell$. O único modo para que $F^{-1}(m)$, um arco de circunferência δ ortogonal a γ (que nos dá a reta de Poincaré), seja perpendicular a ℓ , é que a reta Euclidiana $\bar{\ell}$, que contém a reta de Klein ℓ , passe pelo centro C de δ (veja a figura).



Pelo teorema 28,

$$CT \cong CU$$

$$\hat{i} \cong \hat{z}$$

$$\delta C \perp \bar{m}$$

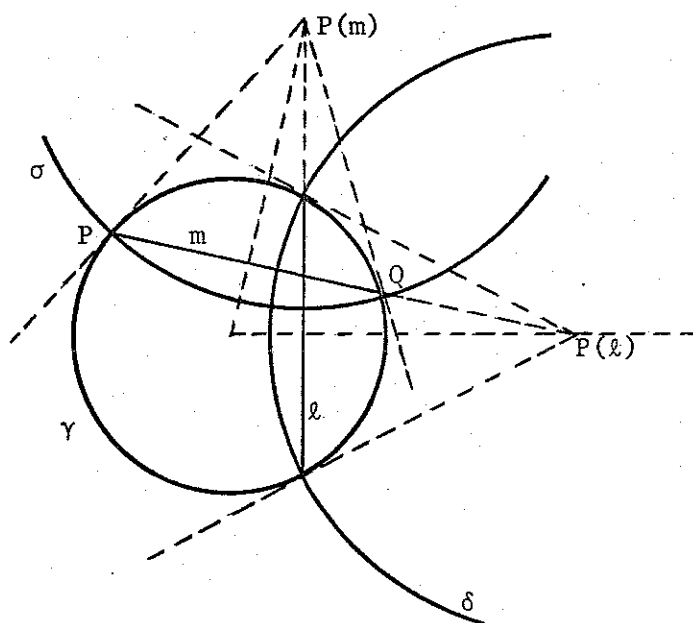
e a circunferência δ com centro C e raio $\overline{CT}=\overline{CU}$ corta γ ortogonalmente em T e U .

Neste caso, $\bar{\ell} = \overline{OC}$ é a mediatriz da corda m .

Reciprocamente, se ℓ é perpendicular a m no sentido Euclidiano, ℓ é a mediatriz de m ; então $\bar{\ell}$ passa por C e ℓ é então perpendicular ao arco $F^{-1}(m)$.

3º caso. ℓ e m não são diâmetros.

Então, $F^{-1}(\ell)$ e $F^{-1}(m)$ são arcos de circunferências δ e σ , ortogonais a γ .



Suponhamos que δ seja ortogonal a σ . Pelo teorema 28 os centros dessas circunferências são polos $P(\ell)$ e $P(m)$ de ℓ e m , porque essas circunferências encontram γ nas extremidades de ℓ e m .

Sejam P e Q as extremidades de m . Inversão em δ troca entre si P e Q , porque esta inversão projeta ambas, γ e σ nelas mesmas (corolário do teorema 30).

Mas se P e Q são inversas em δ , a reta Euclidiana ligando P a Q tem que passar pelo centro $P(\ell)$ de δ . Então $P)(Q$ (Klein) $\perp \ell \implies m \perp \ell$.

Resumindo. Pela inversão, provamos que a reta Euclidiana que passa por P e Q passa pelo polo $P(\ell) \implies P)(Q$ é perpendicular a ℓ , ou $m \perp \ell$.

\implies

Reciprocamente:

Se a extensão de m passa por $P(\ell)$, então P e Q são inversas uma da outra em δ (desde que pontos em γ são projetados em γ pela inversão em δ).

Então, pelo teorema 29, σ é ortogonal a δ

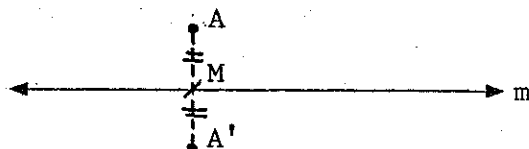
$$\implies F^{-1}(m) \perp F^{-1}(\ell).$$

7. REFLEXÃO NO MODELO DE KLEIN

DEFINIÇÃO. Tanto na Geometria Euclidiana quanto na Geometria Hiperbólica, a reflexão em uma reta m é a transformação R_m do plano, que deixa cada ponto de m fixo e transforma um ponto $A \notin m$, da seguinte maneira:

Seja M o pé da perpendicular de A a m . Então, por definição, $R_m(A)$ é o único ponto A' , tal que $A' * M * A$ e $A'M \cong MA$.

A reflexão conserva a incidência, a ordem e a congruência no plano Euclidiano e como



já demonstramos que o modelo de Klein é isomorfo ao modelo de Poincaré, onde os postulados de Incidência, Ordem e Congruência são válidos, então a reflexão conserva a Incidência, a Ordem e a Congruência no sentido do modelo de Klein.

Consideremos agora o modelo de Klein e vamos descrever a reflexão nesse modelo.

Suponhamos 1) que m não seja um diâmetro de γ . Seja P seu polo.

Para baixar uma perpendicular de Klein de A a m , tracemos a reta ligando A a P .

Essa reta cortará m em um ponto M .

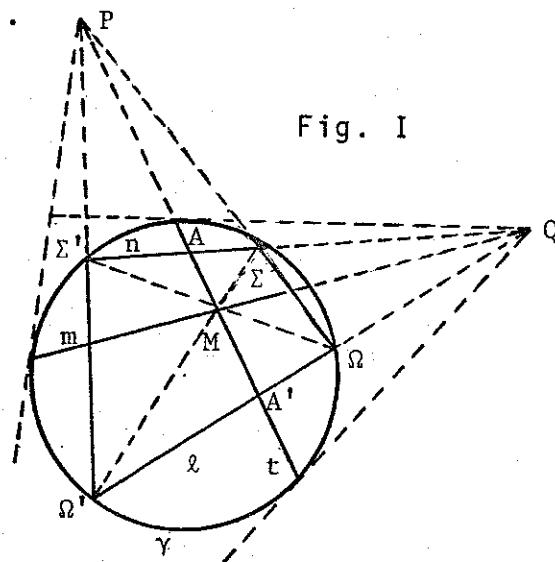
Seja t a corda de γ dada por essa reta Euclidiana.

Seja Q o polo de t e tracemos a reta unindo Q a A .

Essa reta cortará γ em Σ e Σ' . Seja n a corda aberta $\Sigma)(\Sigma'$.

Tracemos a reta ligando Σ' e M e que corta γ novamente no ponto Ω .

Ligando agora Ω e Q , obteremos uma reta que corta t em A' e γ em Ω' .



O ponto A' determinado é a reflexão, no modelo de Klein, de A , em relação a m .

As retas Euclidianas $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma}$ e $\overleftrightarrow{\Omega'\Sigma'}$ se encontram em P e $\overleftrightarrow{\Omega\Sigma'}$ encontra $\overleftrightarrow{\Omega'\Sigma}$ no ponto M .

Vejamos uma justificação dessa construção:

Tomemos as retas paralelas divergentes $l = \overleftrightarrow{\Omega\Omega'}$ e $n = \overleftrightarrow{\Sigma\Sigma'}$ e sua perpendicular comum t ($t \perp n$ por construção e $l \parallel n$).

Suponhamos que l encontre t em A' e n encontre t em A e seja M o ponto médio de AA' no sentido do modelo de Klein.

Seja m a reta de Klein, perpendicular a t por M ; m é obtida ligando M ao polo Q de t . A semi-reta $\overrightarrow{M\Sigma'}$ é uma paralela limite a n .

Se fizermos a reflexão por m , então n é projetada na reta ℓ que passa por A' , Klein-perpendicular a t .

A extremidade Σ' é projetada na extremidade de ℓ , o ponto Ω' , no mesmo semi-plano de Σ' em relação a t .

Então a semi-reta $\overrightarrow{M\Sigma}'$ é projetada na semi-reta $\overrightarrow{M\Omega}'$.

Façamos agora a reflexão através de t (perpendicular e distância congruente).

Ω' , pela reflexão, vai em Ω (na reta $\ell \perp t$ e por congruência de triângulos por Klein), então $M\Omega'$ é projetado em $M\Omega$.

As sucessivas reflexões nas retas perpendiculares de Klein, m e t dão uma rotação de 180° por M .

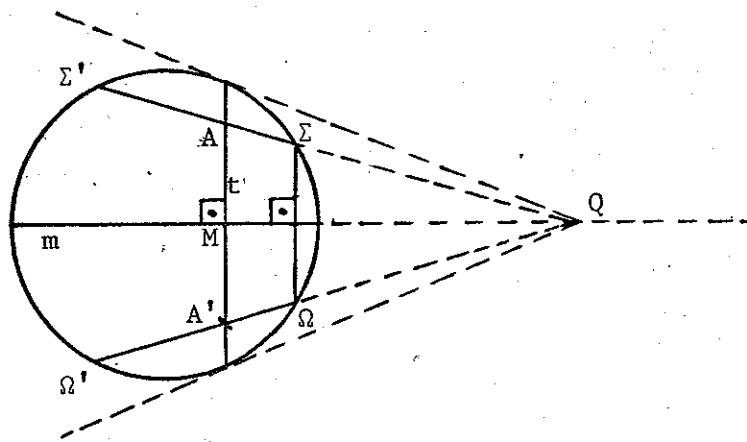
Então $\overrightarrow{M\Omega}$ é a semi-reta oposta a $\overrightarrow{M\Sigma}'$.

Semelhantemente, $\overrightarrow{M\Sigma}$ é a semi-reta oposta a $\overrightarrow{M\Omega}'$.

Como a reflexão em m leva Σ' em Ω' e Σ em Ω , $\Sigma'\Omega'$ e $\Sigma\Omega$ devem ambas serem perpendiculares de Klein à m (por definição de reflexão) e suas extensões Euclidianas se encontram no polo P de m .

2) Suponhamos agora que m seja um diâmetro de γ .

Neste caso, P é um ponto no infinito, t é perpendicular a m por A , no sentido Euclidiano e M é o ponto médio Euclidiano da corda t (porque um diâmetro perpendicular a uma corda, corta-a em segmentos congruentes).

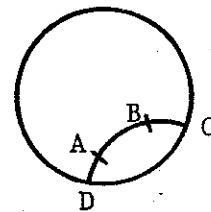


A corda $\Omega\Sigma$ é perpendicular ao diâmetro m , então, Ω é a reflexão Euclidiana de Σ , através de m .

Então $\overleftrightarrow{Q\Omega}$ é a reflexão Euclidiana de $\overleftrightarrow{Q\Sigma}$ e deduzimos que A' é a reflexão Euclidiana ordinária de A através do diâmetro m .

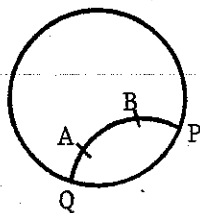
Afim de descrever a reflexão de Klein algebricamente, retomemos a noção de razão dupla, (AB, CD) , definida por:

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$



ou como havia sido anotado:

$$(AB, PQ) = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}}$$



$$\text{ou } (AB, PQ) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$$

No plano Euclidiano:

$$\begin{array}{c} \text{---|---|---|---} \\ \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \end{array} \quad (AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = +1 \implies C$ e D são *conjugados harmônicos* em relação a A e B .

DEFINIÇÃO. Se A, B, C e D são 4 pontos colineares distintos no plano Euclidiano, tal que

$$(AB, CD) = +1 \text{ ou } (AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = +1$$

dizemos que C e D são conjugados harmônicos com relação a AB e que $ABCD$ é uma *quadrupla harmônica*.

Pela simetria da razão dupla, A e B são então também conjugados harmônicos com relação a CD .

Uma outra maneira de escrever a condição para uma quadrupla harmônica é

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = + \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \quad \begin{array}{c} \text{---|---|---|---} \\ \text{A} \quad \text{C} \quad \text{B} \quad \text{D} \end{array}$$

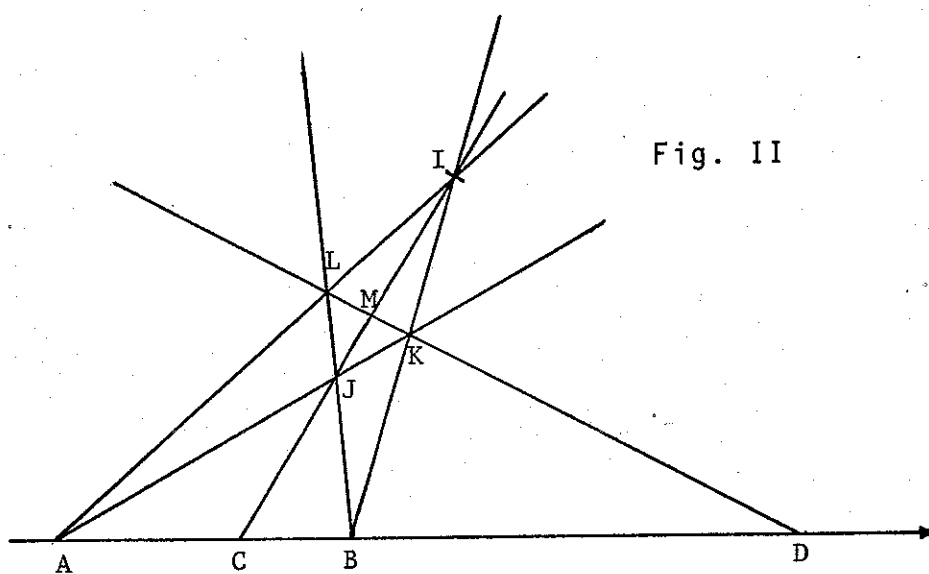
Como C e D são distintos, um deve estar dentro do segmento AB e o outro fora (então " C e D dividem AB internamente e externamente na mesma razão").

CONSTRUÇÃO DO CONJUGADO HARMÔNICO
DE C EM RELAÇÃO A AB

Tomemos 2 pontos quaisquer I e J, colineares com C, mas não sobre \overleftrightarrow{AB} .

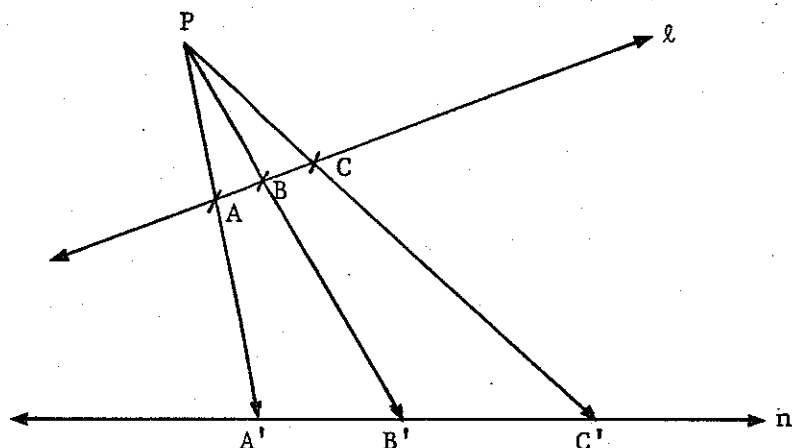
Suponhamos que \overleftrightarrow{AJ} encontre \overleftrightarrow{BI} no ponto K e \overleftrightarrow{AI} encontre \overleftrightarrow{BJ} no ponto L.

Então \overleftrightarrow{AB} encontra \overleftrightarrow{KL} no conjugado harmônico D, de C.



Justificação dessa construção:

DEFINIÇÃO. *Perspectividade* de uma reta ℓ sobre uma reta n é uma aplicação bijetora de ℓ sobre n , obtida projetando ℓ de um ponto P não pertencente a nenhuma dessas retas, sobre n .



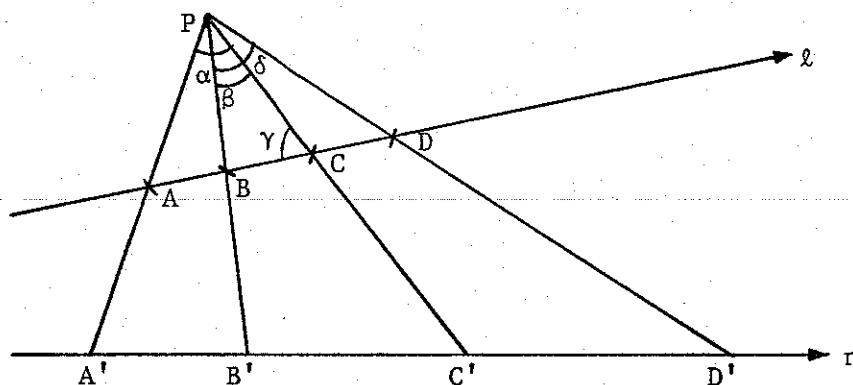
A perspectiva determina para o ponto A sobre ℓ , o ponto A' da intersecção de \overleftrightarrow{PA} com n (se \overleftrightarrow{PA} for paralela a n , a imagem de A é o ponto no infinito de n).

P é chamado de *centro* dessa perspectiva.

TEOREMA 40. A perspectiva conserva a razão dupla de 4 pontos colineares, isto é, se A, B, C e D são 4 pontos sobre a reta ℓ e A', B', C' e D' são suas imagens sobre a reta n , pela perspectiva com centro P , então

$$(AB, CD) = (A'B', C'D').$$

Demonstração.



Sabemos que no $\triangle APC$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \gamma} \quad (1)$$

no $\triangle BPC$

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \beta} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen } \gamma} \implies \text{sen } \gamma = \text{sen } \beta \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} \quad (2)$$

substituindo (2) em (1)

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \beta \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}} \implies$$

$$\boxed{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP} \cdot \text{sen } \alpha}{\overline{BP} \cdot \text{sen } \beta}}$$

Da mesma forma

$$\boxed{\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP} \cdot \text{sen } \delta}{\overline{AP} \cdot \text{sen } \hat{A}PD}}$$

mas como

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \implies$$

$$(AB, CD) = \frac{(\text{sen } \alpha)(\text{sen } \delta)}{(\text{sen } \beta)(\text{sen } \hat{A}PD)}$$

mas

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \widehat{A'PC'} = \text{sen } \widehat{A'P'C'}$$

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \widehat{B'PD'} = \text{sen } \widehat{B'P'D'}$$

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \widehat{B'PC'} = \text{sen } \widehat{B'P'C'}$$

$$\text{sen } \widehat{A'PD'} = \text{sen } \widehat{A'P'D'}$$

então obtemos a mesma fórmula para $(A'B', C'D')$, o que nos prova que a perspectividade conserva a razão harmônica.

Voltemos para a figura II.

Consideremos \overleftrightarrow{IJ} encontrando \overleftrightarrow{KL} no ponto M.

Usando a perspectividade com centro I, o teorema anterior nos dá:

$$(AB, CD) = (LK, MD)$$

Usando a perspectividade com centro J, teremos

$$(AB, CD) = (KL, MD)$$

mas, pela definição de razão dupla

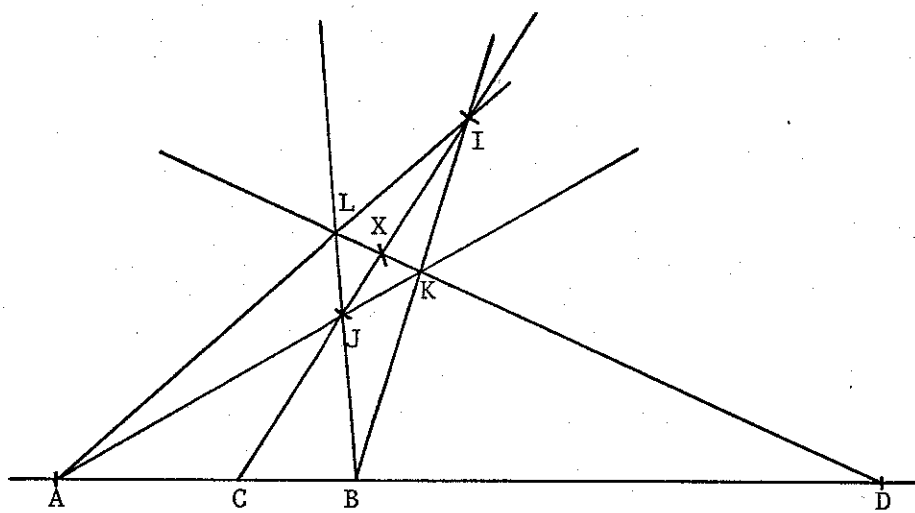
$$(KL, MD) = \frac{1}{(LK, MD)}$$

Então, (AB, CD) é a sua própria recíproca, o que significa que

$$(AB, CD)^2 = 1$$

isto é, $(AB, CD) = \pm 1$; então $(AB, CD) = +1$ (porque (AB, CD) não pode ser negativo) e $ABCD$ é uma quádrupla, como afirmamos. Isto justifica a construção harmônica da Figura II.

Esta justificação pode ser descrita do seguinte modo:



$A * C * B * D$

Projetamos $ABCD$ de I sobre a reta \overleftrightarrow{LD} ; obtemos $LKXD$.

Projetamos novamente $LKXD$ de J sobre \overleftrightarrow{AB} .

$L \rightarrow B$

$K \rightarrow A$

$X \rightarrow C$

$D \rightarrow D$

então $B * A * C * D$

$$(AB, CD) = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC}$$

$$(BA, CD) = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$$

Trocamos o lugar A com B.
Uma é o inverso da outra.

$$\Rightarrow (AB, CD) = \frac{1}{(AB, CD)}$$

Se olharmos agora a figura I, onde a reflexão de Klein A' de A foi construída, veremos que A' é o conjugado harmônico de A em relação a MP .

Se mudarmos os nomes dos pontos na figura I, pelos correspondentes

$$I \rightarrow \Sigma'$$

$$J \rightarrow \Sigma$$

$$K \rightarrow \Omega$$

$$L \rightarrow \Omega'$$

$$A \rightarrow P$$

$$B \rightarrow M$$

$$C \rightarrow A$$

$$D \rightarrow A'$$

obteremos a figura pela construção do conjugado harmônico.

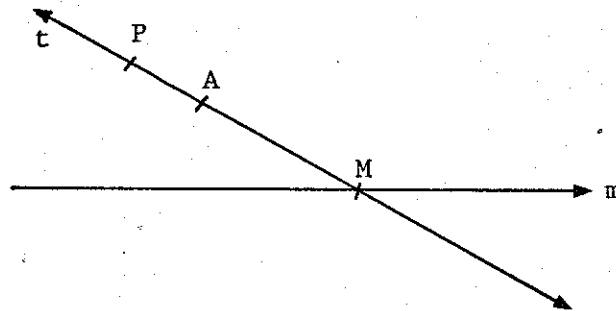
Observação: O ponto D não depende do quadrângulo $LIKJ$ (Geometria Projetiva - Giacomo Albanese, pgs. 82, 83, 84).

DEFINIÇÃO. Seja m uma reta e P , ponto, $P \notin m$.

Uma transformação do plano Euclidiano chamada *homologia harmônica*, com centro P e eixo m , é definida como se segue:

A transformação *homologia harmônica* deixa P e todo ponto sobre m , fixo.

A reta t , ligando P a A , onde A é qualquer, encontra m em M .

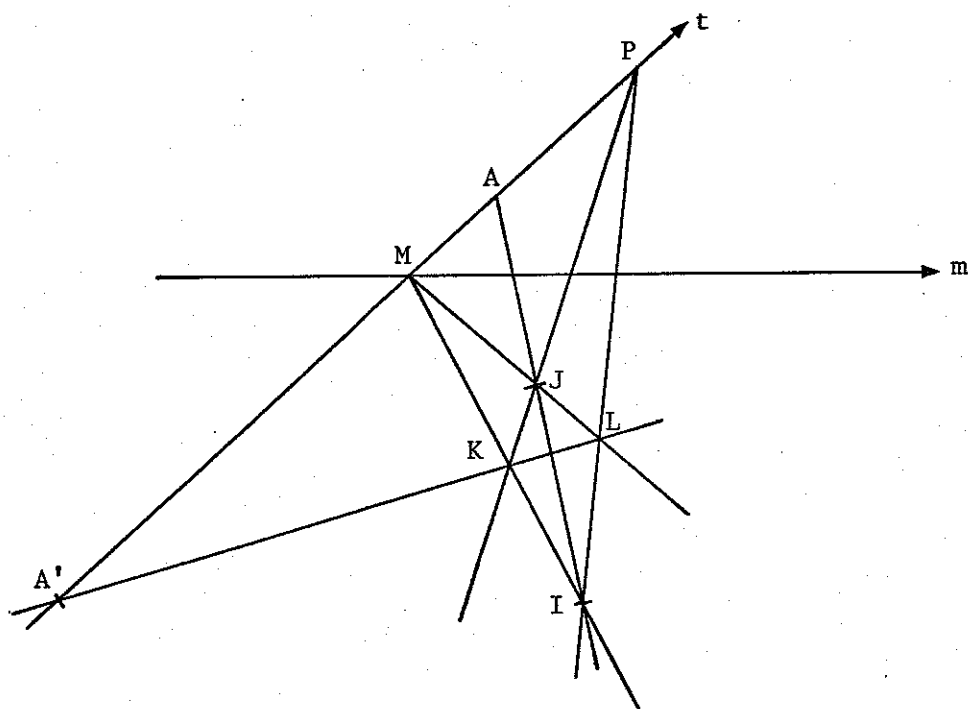


Para determinar A' , o *conjugado harmônico* de A com relação a MP , usamos a construção da figura II.

Tomamos I, J quaisquer, colineares com A .

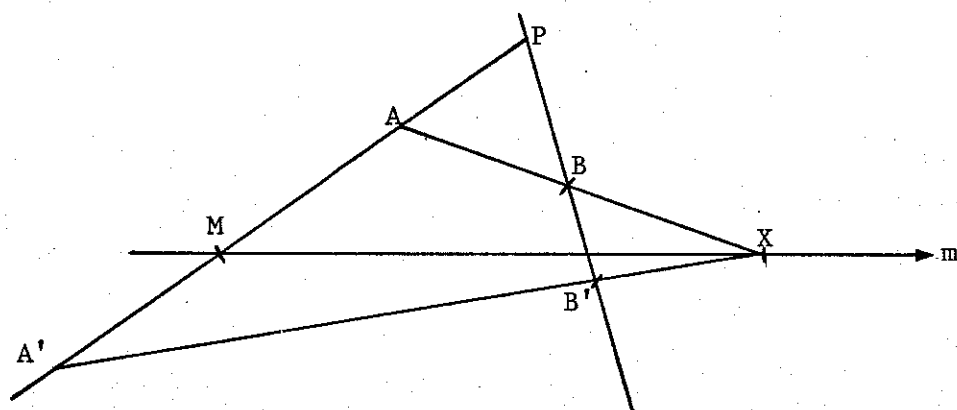
Unimos agora M e P com J e com I . Determinaremos L e K .

A reta \overleftrightarrow{KL} determina sobre t , o ponto A' .

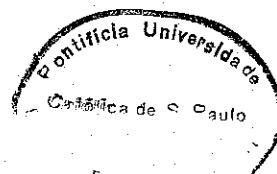


Já sabemos que a Homologia é uma transformação do plano com P fixo e todos pontos de m , fixos.

Daí, os pontos correspondentes estão em retas por P .
A homologia é determinada por P , m , A e A' .



É harmônica se $(PM, AA') = +1$.



Dado outro ponto B, unimos A a B.

A reta \overline{AB} determina o ponto X sobre m.

Unindo A' a X, e P a B, teremos

$$\overline{A'X} \cap \overline{PB} = \{B'\},$$

conjugado harmônico de B, onde A' é conjugado harmônico de A em relação a MP.

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}}$$

A transformação que leva A a A' e fixa P e m é chamado de *homologia harmônica* com centro P e eixo m.

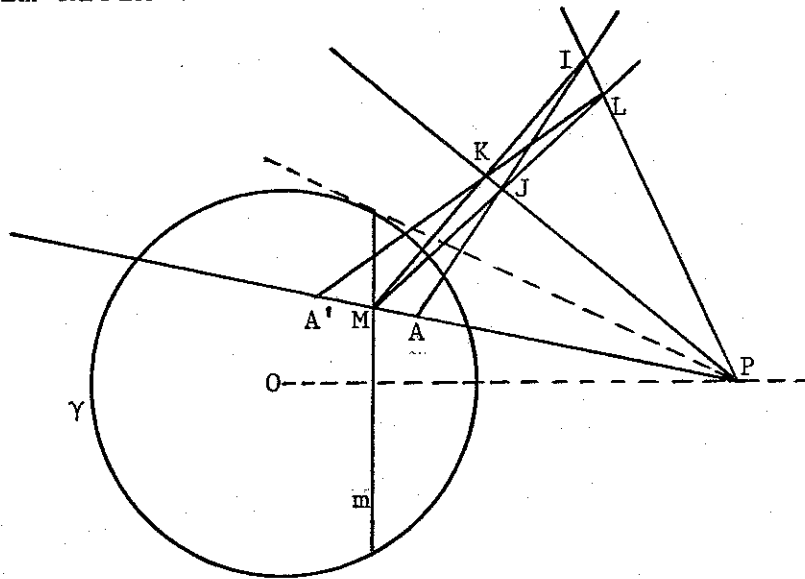
O teorema seguinte pode então nos dar nosso resultado, de maneira diferente:

TEOREMA 41. Seja m uma reta de Klein que não é um diâmetro de γ e seja P seu polo.

Então a reflexão por m é interpretada no modelo de Klein como restrição ao interior de γ da homologia harmônica com centro P e com eixo a reta Euclidiana, extensão da reta m.

Se m é um diâmetro de γ , então a reflexão por m tem seu sentido usual.

Em Klein teremos



$m =$ reta de Klein

$P \notin m$ (centro da homologia harmônica) P polo de m .

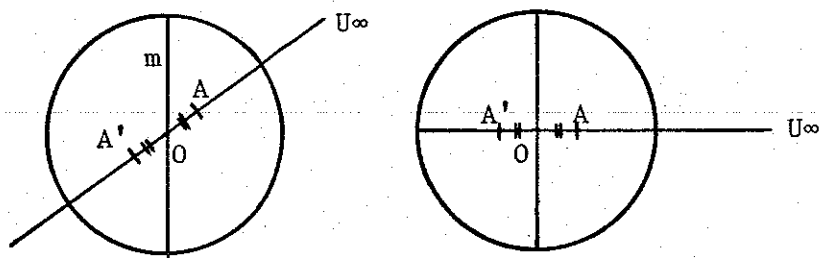
$A \notin m$

A homologia harmônica leva $A \rightarrow A'$, que é a reflexão de A em relação a m e deixa fixos m e P.

A' é o conjugado harmônico de A em relação a MP.

Observação. Obteremos a reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ da mesma forma já dada.

Se m é diâmetro



8. CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE UM SEGMENTO NO MODELO DE KLEIN

Pela nossa definição, o comprimento no modelo de Klein é dado, voltando ao modelo de Poincaré através do inverso do isomorfismo F e usando a definição de comprimento já dado aí.

Então, o comprimento $d'(AB)$ de um segmento no modelo de Klein é dado por:

$$d'(AB) = d(ZW) = |\log (ZW, PQ)|$$

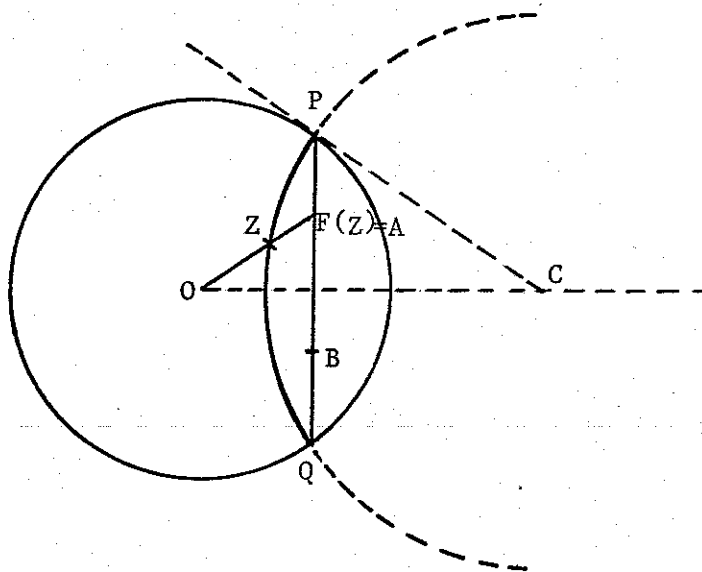
onde

$$A = F(Z)$$

$$B = F(W)$$

e P e Q são as extremidades da reta de Poincaré por Z e W .

Já vimos que P e Q , extremidades da reta de Poincaré são também as extremidades da reta de Klein por A e B .



Vejamos como se calcula $d'(AB)$, diretamente, em termos de A, B, P e Q . Em primeiro lugar, temos que mostrar que:

TEOREMA 42. A razão dupla (AB, PQ) é conservada por qualquer reflexão de Klein.

Isto é claro se estamos refletindo em um diâmetro de γ .

Se estivermos refletindo em uma reta de Klein que não seja um diâmetro de γ , a reflexão de Klein é uma homologia harmônica, cujo centro R fica fora de γ (pelo teorema 41).

Uma reflexão no plano hiperbólico conserva a colinearidade, então, para qualquer reta de Klein ℓ , a projeção de centro R , de ℓ , em sua reflexão de Klein, n , é, justamente, a perspectividade de centro R e então, a razão dupla é conservada como assegura o teorema 40 (ver figura III - na justificação da construção de J. Bolyai).

TEOREMA 43. Se A e B são 2 pontos internos a γ , e P e Q são as extremidades da corda por A e B , então o comprimento de Klein do segmento AB é dado pela fórmula:

$$d'(AB) = \frac{1}{2} |\log (AB, PQ)|$$

Demonstração. Vimos na verificação do axioma LAL para o modelo disco de Poincaré, que qualquer reta de Poincaré

pode ser projetada num diâmetro, por uma inversão em uma circunferência ortogonal conveniente.

O teorema 34 garante que a razão dupla é conservada pela inversão.

A transformação do modelo de Klein que corresponde a essa inversão sob nosso isomorfismo F é uma homologia harmônica (pelo teorema 41), e isso conserva a razão dupla de pontos colineares.

Podemos, então, supor que A e B estejam num diâmetro

Seja

$$A = F(Z)$$

$$B = F(W)$$

então, por definição

$$d'(AB) = d(ZW). \quad (1)$$

Depois de uma rotação conveniente (que conserva a razão dupla), podemos assumir que o diâmetro dado é o eixo real.

Suas extremidades P e Q , então, tem coordenadas -1 , $+1$.

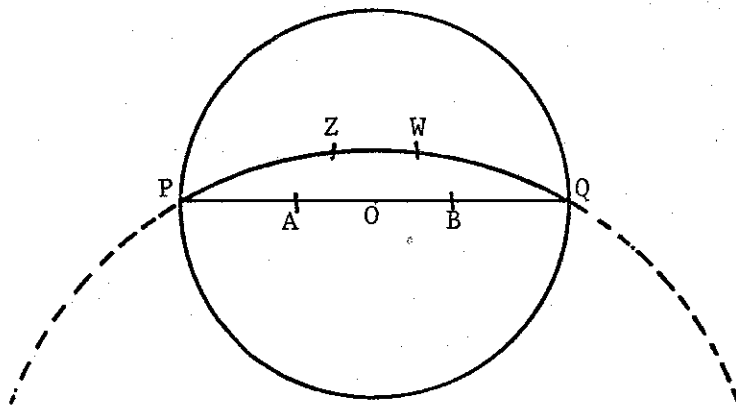
Se Z e W têm coordenadas reais z e w , isto é:

$$Z(z)$$

$$W(w)$$

$$P(-1)$$

$$Q(+1)$$



então

$$(ZW, PQ) = \frac{\overline{ZP}}{\overline{ZQ}} \cdot \frac{\overline{WQ}}{\overline{WP}} = (ZW, (-1, +1)) = \frac{(z - (-1))}{(z - 1)} \cdot \frac{(w - 1)}{(w - (-1))} = \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{w-1}{w+1}$$

ou

$$(ZW, PQ) = \frac{(1+z)}{(1-z)} \cdot \frac{(1-w)}{(1+w)}$$

Então, como $A = F(Z)$

$$B = F(W)$$

$$(AB, PQ) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} \cdot \frac{1 - F(w)}{1 + F(w)}$$

mas

$$1 - F(z) = 1 - \frac{2z}{1 + |z|^2} = \frac{1 - 2z + |z|^2}{1 + |z|^2}$$

e

$$1 + F(z) = 1 + \frac{2z}{1 + |z|^2} = \frac{1 + 2z + |z|^2}{1 + |z|^2}$$

e portanto

$$\frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} = \frac{1 + 2z + |z|^2}{1 - 2z + |z|^2}$$

Como z é real, $z = \pm |z|$ temos

$$\frac{1 + F(z)}{1 - F(z)} = \left| \frac{1 + z}{1 - z} \right|^2$$

da mesma forma

$$\frac{1 + F(w)}{1 - F(w)} = \left| \frac{1 + w}{1 - w} \right|^2$$

Temos então

$$(AB, PQ) = (ZW, PQ)^2$$

Aplicando logaritmos a ambos os termos, para obtermos a medida, temos:

$$|\log (AB, PQ)| = |2 \log (ZW, PQ)| \implies$$

$$|\log (ZW, PQ)| = \frac{1}{2} |\log (AB, PQ)|$$

ou

$$d'(AB) = \frac{1}{2} |\log (AB, PQ)| \text{ por (1)}$$

como queríamos demonstrar.

Podemos agora justificar a construção de J. Bolyai da semi-reta paralela limite.

É dada uma reta de Klein ℓ e um ponto P fora de ℓ ($P \notin \ell$).

O ponto Q em ℓ é o pé da perpendicular de Klein t , por P .

Seja R qualquer outro ponto em ℓ e S o pé da perpendicular de R à m .

A construção de Bolyai é baseada no argumento de que se a semi-reta paralela limite à ℓ , de P , na direção \overrightarrow{QR} , encontra RS em X , então PX é Klein congruente a QR .

Vamos demonstrar isso:

Sejam T e M os polos de t e m .

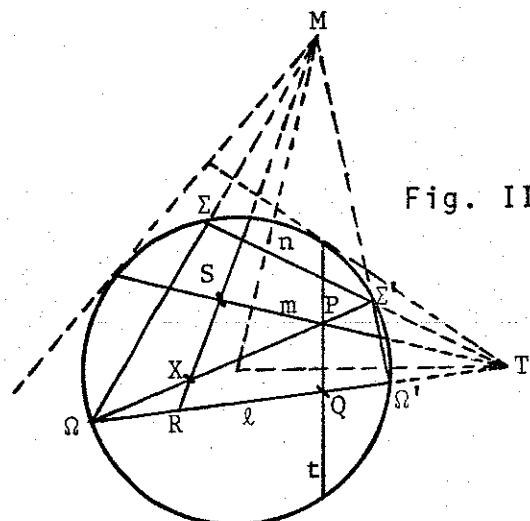


Fig. III

Sejam Ω e Ω' as extremidades de ℓ . Se ligarmos essas extremidades a M , as intersecções Σ e Σ' com γ serão as extremidades da reflexão de Klein n , através de m .

Como a figura mostra, os pontos colineares Ω , X , P e Σ' estão em perspectiva com os pontos Ω , R , Q e Ω' (nesta ordem), sendo M o centro da perspectividade.

Pelo teorema 40, tal perspectividade conserva a razão dupla, tal que

$$(XP, \Omega\Sigma') = (RQ, \Omega\Omega').$$

O teorema 43, então, nos diz que

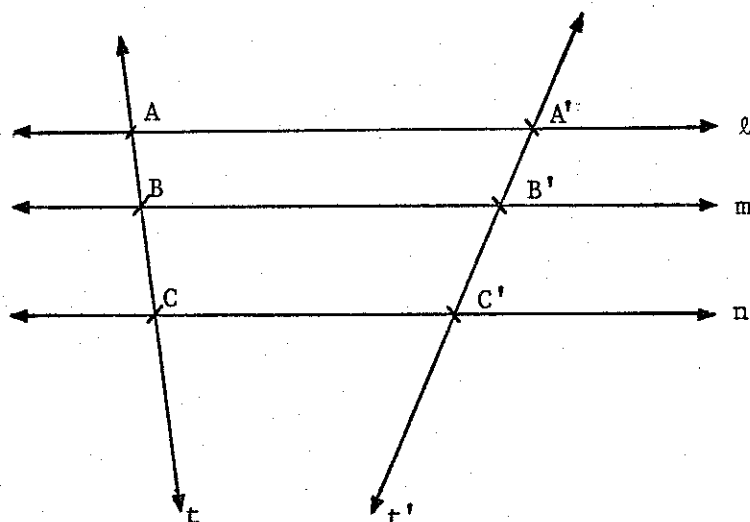
$$d'(XP) = d'(RQ),$$

justificando o argumento de Bolyai.

No caso de m ser um diâmetro de γ , M é um ponto no infinito.

Então, em vez do teorema 40, podemos usar o teorema da projeção paralela, que diz que, dadas 3 retas paralelas ℓ , m e n e 2 transversais t e t' , cortando ℓ , m e n em A , B , C e A' , B' , C' , respectivamente, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



Como esse é um teorema da Geometria Euclidiana, podemos usar o postulado de Euclides das paralelas e suas consequências para deduzir a igualdade das razões duplas.

9. SEGUNDO MODELO DE POINCARÉ

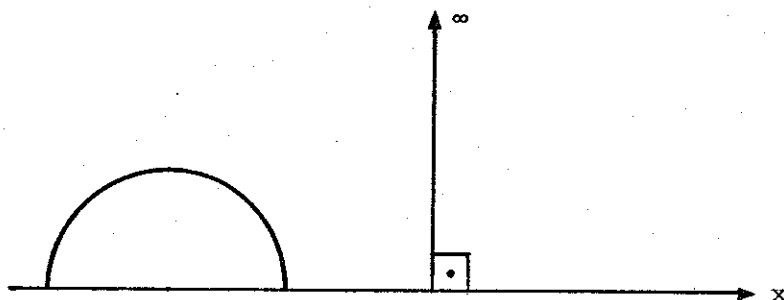
No segundo modelo de Poincaré, os pontos do plano Hiperbólico são representados pelos pontos de um dos semi-planos Euclidianos determinados por uma reta Euclidiana fixa.

Se usamos o modelo cartesiano para o plano Euclidiano, fixamos a reta do eixo x e usamos para nosso modelo o semi-plano superior (inferior), consistindo de todos os pontos (x, y) , com $y > 0$ ($y < 0$).

Retas hiperbólicas são representadas de duas maneiras:

1.^a - Como semi-retas de origem em pontos de eixo x e perpendiculares ao eixo x ($y > 0$ ou $y < 0$).

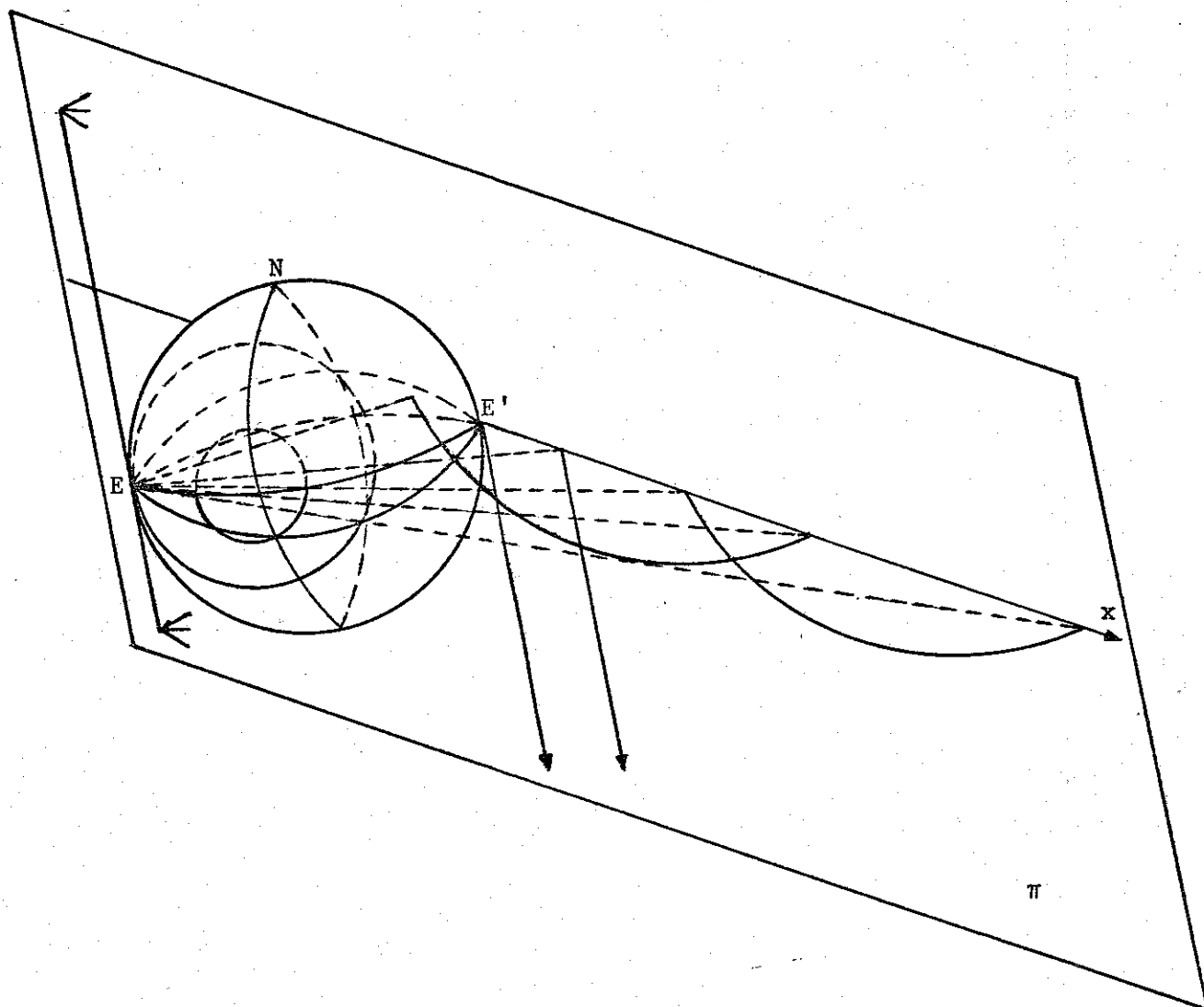
2.^a - Como semi-circunferências no semi-plano superior (inferior), cujo centro está sobre o eixo x .



Incidência e ordem têm a interpretação Euclidiana usual. Neste modelo, os ângulos são medidos no modo Euclidiano.

Para estabelecer um isomorfismo com os modelos anteriores, ou melhor, com o modelo de Klein, vamos tomar a superfície esférica apoiada no plano do modelo de Klein, representada pela circunferência γ , no centro de γ , e de raio igual ao raio de γ .

Escolhemos um ponto E no equador da superfície esférica e consideramos um plano π tangente à superfície esférica no ponto E' , diametralmente oposto a E .



Fazendo a projeção ortogonal do modelo de Klein para a superfície esférica, a circunferência γ irá, por essa projeção, para o equador da superfície esférica e, fazendo a projeção estereográfica com centro E , do equador, sobre π , teremos o eixo x do 2º modelo de Poincaré.

Os pontos de γ , pontos ideais no modelo de Klein, serão os pontos de x e, portanto, pontos ideais no 2º modelo de Poincaré.

B I B L I O G R A F I A

- [1] ALBANESE, GIACOMO. *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Anno Accademico 1925-1926. Terza Edizione, 1934. Circolo Matematico di Catania - Editore, 1934.
- [2] ALMEIDA e VASCONCELOS, FERNANDO DE. *Histórias das Matemáticas na Antiguidade*. Livrarias Ailland e Bertrand, Paris Lisboa.
- [3] BACCA, JUAN D.G. *Elementos de Geometria*. Universidade Nacional Autônoma de México, 1944.
- [4] BELL, ERIC TEMPLE. *Men of Mathematics*. Harmonds-Worth, Penguin, 1953.
- [5] CASTRUCCI, BENEDITO. *Fundamentos da Geometria. Estudo Axiomático do Plano Euclidiano*. Livros técnicos e científicos Editora. Rio de Janeiro, 1978.
- [6] GANS, DAVID. *An Introduction to Non-Euclidean Geometry*. Academic Press, New York and London.
- [7] GREENBERG, MARVIN JAY. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Development and History*. University of California, Santa Cruz, 1972.
- [8] HILBERT, DAVID. *Foundation of Geometry*. La Salle (Illinois). Open Court, 1971.
- [9] MUIR, JANE. *Of men and Numbers*. New York, Dell, 1965.
- [10] WOLF, H.E. *Introduction to Non-Euclidean Geometry*. New York: Holt, Rinehart, Winston, 1945.

