IRENE PATAKI

GEOMETRIA ESFÉRICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2003

IRENE PATAKI

GEOMETRIA ESFÉRICA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UMA PROPOSTA INTERDISCIPLINAR

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.***

PUC/SP

São Paulo

2003

Banca Examinadora

Dedico este trabalho

à *minha mã*e e a*os meus filhos*

Erwing, Hilbert e Brécht, por quem

tenho um sentimento tão intenso que

nenhuma palavra consegue exprimir.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Senhor dos Universos, que me deu forças e amigos, para que não caminhasse sozinha.

A Ramatis, que permitiu a visualização e a realização do meu sonho.

Ao Professor-Doutor Saddo Ag Almouloud, pela orientação desenvolvida com competência, compreensão e amizade.

Aos Professores-Doutores da Banca Examinadora Ubiratan D'Ambrósio e Antonio Carlos Carrera de Souza, pelos comentários, sugestões e incentivo que muito contribuíram para a evolução desta dissertação.

À coordenação e ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC – SP, pelo estímulo e afeto que nos dedicam.

À Eliana, Pitágoras e Rosângela, personagens da primeira experiência, pelas críticas e por nos fazerem acreditar que podíamos prosseguir na caminhada.

À direção da E.E. Prof. Esli Garcia Diniz, cenário da experimentação, por ter nos acolhido de braços abertos.

Aos professores Carlos José Ferreira, Elza Maria de Araújo, Evangelista Carvalho de Sandes, Marinês Zanzini Ribeiro Gregório, Orlando Alves de Lima e Telma Elaine Bravi, indispensáveis para a realização da pesquisa, pela dedicação, pelo convívio feliz e pela cumplicidade de emoções.

Às observadoras Lucia Rodrigues Milan e Olinda Aparecida Barbosa, pessoas fundamentais que não pouparam esforços e não mediram distâncias, nos acompanhando até o último encontro.

À amiga Maria José Ferreira da Silva, pelo estímulo e apoio em momentos cruciais.

À amiga Mônica de Moraes Oliveira, pelas orientações gramaticais.

À amiga Sonia Regina Facco, por me auxiliar a dar forma a este trabalho.

À amiga Renata Rossini pelo apoio incessante.

A todos aqueles, que de alguma maneira, propiciaram para que esta dissertação se tornasse real.

Eternamente grata...

RESUMO

Este trabalho dirige-se à formação continuada de professores de Matemática. Um dos seus objetivos é propor, aos professores, uma seqüência didática, com atividades, que mostre a relação interdisciplinar existente entre a Geometria esférica e a Geografia, formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade. Outro objetivo é proporcionar aos professores envolvidos reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria esférica. Fundamentados na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por G. BROUSSEAU (1986), na Metodologia de Pesquisa denominada Engenharia Didática de M. ARTIGUE (1988) e na Teoria de Britt-Mari BARTH (1993) concernente à Formação de Professores, elaboramos uma seqüência didática, a partir de uma situação-problema motivadora e mais oito atividades, abordando noções de Geometria esférica. Investigamos a questão: Como uma seqüência de ensino pode possibilitar a apropriação de um novo domínio – a Geometria esférica – e levar o educador a reelaborar seu pensar? Nossas hipóteses de pesquisa pressupõem que o conhecimento geométrico nos permite ter olhares diferentes do nosso mundo, que a apreensão dos conteúdos poderá nos conduzir a mudanças no comportamento como docente e que o uso da interdisciplinaridade e da contextualização estabelecerá conexões com outros campos do conhecimento. A análise dos resultados obtidos aponta uma mudança de atitudes e valores, nos professores, que confirmam nossas hipóteses de pesquisa e enfatizam a importância da Metodologia adotada, levando-nos a crer que alguns aspectos da Geometria em estudo foram apreendidos e se tornaram saberes institucionalizados.

Palavras-chave: Geometria esférica, formação de professores, situações didáticas, situação-problema, interdisciplinaridade, contextualização.

ABSTRACT

This work concerns the inservice education of mathematics teachers. One of its aims is to propose, to teachers, a teaching sequence, with activities that show the interdisciplinary relationship that exists between spherical geometry and geography, forming interconnections between these domains, at the same time as contextualising the content to be considered and motivating learning in a way that articulates the object of study with reality. Another aim is to provide to the teachers involved reflections about aspects related to the teaching of spherical geometry. Based on the Theory of Didactic Situation developed by G. BROUSSEAU (1986), the research methodology Didactic Engineering of M. ARTIGUE (1988) and the theory of Britt-Mari BARTH (1993) concerning teacher education, we elaborate a teaching sequence, composed of a motivating problem-situation along with eight other activities involving notions of spherical geometry. We investigate the question: How can a teaching sequence permit the appropriation of a new domain – spherical geometry – and encourage educators to re-elaborate their thinking? Our research hypotheses assume that geometrical knowledge allows different perspectives about our world, that the apprehension of content can lead to changes in our behaviour as teachers and that the use of interdisciplinarity and contextualisation will establish connections between different fields of knowledge. The analysis of the results points to a change in the attitudes and values of the teachers, which confirms our research hypothesis and emphasises the importance of the methodology adopted, leading us to believe that some aspects of the geometry studies were learnt and became institutionalised knowledge.

Keywords: Spherical geometry, teacher education, didactic situations, problem-situations , interdisciplinarity, contextualisation.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

PARTE I - ESTUDOS PRELIMINARES

Desde tempos muito remotos que os homens têm procurado uma linguagem ao mesmo tempo universal e sintética, e as suas investigações levaram-nos a descobrir imagens, símbolos, que exprimem, reduzindo-as ao essencial, as realidades mais ricas e mais complexas. As imagens, os símbolos, falam, têm uma linguagem, mas a linguagem simbólica absoluta é a das figuras geométricas. As figuras geométricas são como que uma estrutura, o esqueleto da realidade... Mas estas formas, ainda que reduzidas ao estado de esqueleto, não estão mortas, pois representam realidades vivas no homem e no Universo. Por isso, para podermos interpretá-las devemos vivificá-las, insuflar-lhes o espírito; elas não significarão nada enquanto nos limitarmos a estudá-las exteriormente a nós.

Omraam Mikhaël Aïvanhov

APRESENTAÇÃO

A essência da Matemática reside em sua liberdade.

George Cantor

Analisemos alguns pontos:

Os astrônomos gregos, nos primórdios do século IV a.C, afirmavam que a Terra era redonda, desde que observaram que a estrela polar estava mais alta no céu da Grécia do que no céu do Egito.

Nossos livros de História nos contam que, bem mais tarde, o português Fernão de MAGALHÃES (1480 - 1521) empreendeu a primeira viagem de circunavegação do mundo, ao partir de Sevilha em 1519, contornou o Estreito de Magalhães (Patagônia) até chegar às Filipinas (na Ásia) pelo Oceano Pacífico, comprovando o formato arredondado da Terra. (Figura1)

FIGURA 1 – A VIAGEM DE FERNÃO DE MAGALHÃES[1]

[1] Extraído do livro de COELHO, M. de A; TERRA, L., *Geografia Geral e espaço natural sócioeconômico,* 2001, p. 13. Esta ilustração e todas as demais não estarão em tamanho normal.

Após sua morte, a expedição sob o comando de Sebastião ELCANO (1460 - 1526), dobrou o Cabo da Boa Esperança e retornou, em 1522, à Espanha.

Para o geômetra EUCLIDES de Alexandria (330 a.C – 275 a.C), a superfície era um plano. Os matemáticos, no decorrer do tempo, nos provaram que a esfera possui curvatura constante positiva, uma sela de cavalo (um tipo de pseudo-esfera) tem curvatura constante negativa e o plano, contudo, possui curvatura constante igual a zero.

Outro ponto é que somos seres de três dimensões, nos movendo num mundo de três dimensões, no qual, porém, segundo os físicos, há uma quarta dimensão, o tempo. Na primeira metade do século XIX, o matemático RIEMANN (1826 – 1866) em sua célebre conferência, admitiu um espaço com um número arbitrário de dimensões. Mas antes dele, GAUSS, o "Príncipe dos Matemáticos", já sabia que os geógrafos localizavam uma cidade, no globo terrestre, por meio da sua latitude e da sua longitude, considerando meridianos e paralelos.

Com a finalidade de uniformizar a contagem de tempo, a cada 15° há um fuso horário que, convencionalmente, é uma das 24 partes em que o globo está dividido, e a Linha Internacional de Mudança de Data, um antimeridiano que, ao ser cruzado, acrescenta ou diminui 24 horas à data, conforme a cruzamos no sentido oeste-leste ou leste-oeste, respectivamente. O Brasil possui quatro fusos horários, todos situados à oeste do Meridiano de Greenwich e, portanto, os horários são sempre atrasados com relação a esse meridiano.

Com a evolução da Ciência, hoje sabemos que a forma da Terra não é de uma esfera perfeita, tendo NEWTON (1642 – 1727) proposto que ela fosse de um elipsóide achatado nos pólos, contudo, em mapas de pequenas escalas consta como sendo de uma esfera e os cálculos decorrentes disso apresentarão erros desprezíveis.

Diante de todos esses pontos, cremos que não podemos continuar limitando o pensamento do homem moderno, quando diante dele existem fatos que a Geometria euclidiana não explica. Na escola, o professor precisa valer-se de outras Geometrias relacionadas com o nosso dia-a-dia e o aprendiz verificar que as naves espaciais percorrem, em suas viagens, trajetórias que não são retilíneas.

Necessitamos buscar comprovações e, recorrendo às justificativas para essa posição, encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como um dos objetivos gerais do Ensino Fundamental “questionar a realidade formulando problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando a sua adequação”, (PCNEF, 1998, p. 9) bem como, no artigo 35 da LDB de 20 de dezembro de 1996, referente ao Ensino Médio, consta como uma das finalidades “a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.” (LDB, in PCNEM, 1999, p.46)

Isso implica que a organização curricular, entre outros pressupostos, deve ser orientada pela:

> ...abertura e sensibilidade para identificar as relações que existem entre os conteúdos do ensino e das situações de aprendizagem e os muitos contextos de vida social e pessoal, de modo a estabelecer uma relação ativa entre o aluno e o objeto do conhecimento e a desenvolver a capacidade de relacionar o aprendido com o observado, a teoria com suas conseqüências e aplicações práticas". (PCNEM, 1999, p.87)

Assim sendo, esta pesquisa procura abordar o tema *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar* e tem como objetivos:

- Propor aos professores uma seqüência didática, com atividades que mostre a relação interdisciplinar existente entre a Geometria esférica e a Geografia, formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade.
- Proporcionar aos professores envolvidos reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria esférica.

Portanto, trata-se de um tema que visa a interação entre alguns campos do conhecimento, tais como Geometria, Trigonometria, Geografia e História, contextualizando, proporcionando reflexões e questionamentos aos professores e possibilitando a cumplicidade entre o aprender esses conhecimentos e os diferentes olhares que teremos do nosso dia-a-dia.

Em vista disso, o ensino e aprendizagem da Geometria esférica precisam constar das grades curriculares, adentrar as salas de aula, com alardes, se necessário, e ocupar o lugar que há muito tempo lhe pertence.

Para que esta pesquisa se concretizasse, passamos por três fases: na primeira, elaboramos os Estudos Preliminares, que consideramos relevantes para que a experimentação ocorresse. Na segunda fase, sucedeu a experimentação e, na terceira, analisamos os resultados obtidos na etapa anterior, articulando e confrontando esses resultados com os estudos das etapas anteriores.

A primeira parte - Estudos Preliminares - desenvolveu-se em três capítulos. No capítulo I - Geometria esférica: do despontar de uma nova Geometria a objeto de ensino - procuramos analisar o ponto de vista filosófico gerador de uma posição unicista do pensamento matemático, as suas implicações no progresso desse pensamento e o surgimento de novas idéias de matemáticos arrojados, que se propuseram a indagar sobre a incerteza/veracidade de um paradigma ao relatarmos alguns pontos históricos das Geometrias não-euclidianas.

A seguir, consultamos as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, a respeito do ensino de Matemática e de Geometria e sobre o recurso da interdisciplinaridade que permite a interligação desses campos com a Geografia, da qual apontamos alguns conceitos definidos por essa ciência.

Após, buscamos realizar o estudo do objeto de ensino Geometria esférica, por intermédio de publicações a respeito da Geometria de RIEMANN, inclusive de pesquisas na área da Educação Matemática sobre essa Geometria representadas por quatro dissertações de Mestrado, para nortear nossos estudos.

Além disso, fez-se fundamental explorarmos as concepções dos professores acerca das Geometrias não-euclidianas do ponto de vista da teoria e de sua prática pedagógica.

O capítulo II – A Problemática e seus efeitos – no qual apoiados nos Estudos Preliminares, definimos nossa problemática, as hipóteses de pesquisa e a Metodologia de pesquisa - Engenharia Didática que norteou a construção da seqüência didática e organizamos os procedimentos metodológicos a serem executados no experimento, tendo como foco a questão:

Como uma seqüência de ensino pode possibilitar a apropriação de um novo domínio - a Geometria esférica - e levar o educador a reelaborar seu pensar?

O capítulo III – Formação de professores - teve como fonte uma das teorias que permitiram alicerçar esta pesquisa dirigida para a Formação de Professores elaborada por Britt-Mari BARTH (1993).

Na parte II - A experimentação - construímos uma seqüência didática, a partir de uma situação-problema, a qual abordou inúmeros conceitos geométricos, numa superfície esférica, procurando harmonizar com a realidade que vivemos, em interação com outros campos do conhecimento, formando o capítulo IV - A seqüência didática.

No capítulo V - Considerações Finais - enfatizamos a importância da Metodologia adotada, comparando os resultados obtidos na pesquisa com as teorias que a embasaram, assim como apontamos as destinações deste trabalho, deixando algumas sugestões para estudos futuros, esperando haver colaborado para novas investigações na área de Educação Matemática.

CAPÍTULO I

GEOMETRIA ESFÉRICA: DO DESPONTAR DE UMA NOVA GEOMETRIA A OBJETO DE ENSINO

Descobri coisas tão belas que me fascinei...
tirei do nada um novo universo.

Janos Bolyai

Neste capítulo, retornamos no tempo, para acompanharmos o desenvolvimento da Geometria, iniciando por EUCLIDES de Alexandria, passando pela influência da filosofia Kantiana que perdurou por séculos e o desenrolar de uma idéia intrigante - qual semente que brota, inesperadamente - abraçada por vários geômetras sonhadores celebrizados pela frase de WEIERSTRASS “nunca será um matemático completo aquele que não for um pouco poeta”. O germe da nova idéia era o questionamento a respeito da possibilidade da demonstração do quinto Postulado de Euclides.

Esta viagem ao tempo permitirá que mostremos que essa inquietação atingiu diferentes culturas em épocas diversas, assim como a influência do passado na construção/desenvolvimento do pensamento geométrico, mais propriamente, a importância dos estudos dos geômetras não-euclidianos na edificação da Geometria esférica, objeto de estudo desta pesquisa.

Acompanhemos, então, o desenrolar de uma longa história de mais de dois mil anos.

I.1 – ASPECTOS HISTÓRICOS DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

A *Geometria conduz a alma à verdade.*

Platão

A história das Geometrias não-euclidianas se inicia com EUCLIDES de Alexandria, como era conhecido. Alguns historiadores acreditam que tenha vivido por volta de 330 a.C - 275 a.C e fora professor da escola - denominada Museu - criada por PTOLOMEU I, sucessor de Alexandre. Dentre seus escritos, seu maior mérito foi coletar e organizar, em 300 a.C, proposições existentes sobre a Geometria Plana numa obra que chamou *Os Elementos*. Embora não tenha sido inédita, porque se soube de pelo menos outras três, inclusive a de HIPÓCRATES de Chios (430 a.C) intitulada *Os Elementos de Geometria*, ela é considerada um trabalho de muita importância por haver superado todos os que a precederam.

BOYER fez referência à obra de EUCLIDES, *Os Elementos*, cujos seis primeiros livros tratam de Geometria plana elementar; os três seguintes sobre Teoria dos Números, o livro X sobre Incomensuráveis e os três últimos sobre Geometria no espaço, principalmente.

No livro I, existem 23 definições, entre elas:

> Um ponto é o que não tem parte.
> Uma reta é comprimento sem largura.
> Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura.
> As extremidades de uma reta são pontos.
> Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos sobre ela.
> As extremidades de uma superfície são linhas. (BOYER, 1999, p. 72).

Em seguida às definições, EUCLIDES apresentou cinco postulados e cinco noções comuns (ou axiomas). Devemos a ARISTÓTELES (384 a.C – 322 a.C) a distinção entre postulados e axiomas, para o qual os primeiros seriam suposições sobre um assunto em particular e menos evidentes; as noções comuns seriam verdades comuns a todas as ciências e evidentes por si mesmas.

Entretanto, não há certeza de que EUCLIDES tenha acatado essa diferenciação e há edições em que os postulados e os axiomas aparecem juntos. Atualmente, os matemáticos não adotam essas pressuposições.

Os postulados são os seguintes:

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos. (ibidem, p.73)

Os cinco axiomas são estes:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte. (ibidem, p. 73).

Dos cinco postulados, apenas o quinto não possui uma evidência intuitiva, o próprio EUCLIDES somente o usou na 29ª proposição do livro I: "uma reta que corta duas paralelas forma com elas ângulos alternos internos de medidas iguais, correspondentes de medidas iguais e interiores de um mesmo lado suplementares."

A razão de o quinto postulado de EUCLIDES ser chamado de *Postulado das Paralelas é* que

> *ele é totalmente equivalente a qualquer uma das seguintes afirmativas envolvendo a palavra paralela:*
>
> 1. *Se uma reta intercepta uma das paralelas, interceptará a outra.*
> 2. *Retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si.*
> 3. *Duas retas que se interceptam não podem ser paralelas a uma mesma reta.*
> 4. *Sejam dados, em um plano, uma reta l e um ponto P que não está em l. Então existe uma e só uma paralela a l passando por P.* (DAVIS & HERSH, 1985, p. 252).

Veja a Figura 2.

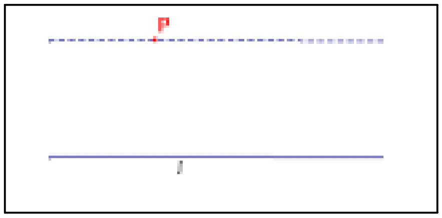


FIGURA 2 – RETA PARALELA À RETA *l* PASSANDO POR P

EUCLIDES chamou de paralelas “duas retas coplanares que prolongadas quanto se queira, não se encontram.” (BONOLA, 1951, p. 19)

Durante muito tempo, inúmeros matemáticos tentaram demonstrar o Postulado das Paralelas - o quinto postulado, de cuja veracidade eles teriam duvidado, por acharem "o enunciado de várias noções e proposições incompleto e sem rigor: era breve e até mesmo obscuro." (SOUZA, 1939, p 169)

Foram os gregos os primeiros a tentarem provar o Postulado. PROCLUS *(*410-485), chefe da escola de Atenas, foi o primeiro matemático a informar sobre essas tentativas no seu *Comentário sobre o Primeiro Livro dos Elementos de Euclides,* no qual cita entre vários, POSIDONIO (135 a.C - 41 a.C), que havia definido retas paralelas como retas coplanares e eqüidistantes. (BONOLA, 1951, p.20)

Entre os árabes, a prova do postulado também foi um desafio, embora eles tivessem mais interesse pela Álgebra e pela Trigonometria.

AGANIS (século VI a.C), com uma definição semelhante à de POSIDONIO, prova o postulado, admitindo que “por um ponto exterior a uma reta, passa sempre uma reta eqüidistante da primeira." (ibidem, p. 25)

NASIR EDDIN (1201 - 1274), que contribuiu, também, para a Trigonometria e para a Astronomia, apresentou uma alternativa que possibilitava demonstrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de dois ângulos retos. (ibidem, p. 27)

Na Renascença, o estudo de *Os Elementos* só era possível àqueles que já possuíam muito conhecimento. Entre eles, destacou-se P. A. CATALDI (1552 - 1626) que escreveu o primeiro tratado sobre o problema das paralelas. (ibidem, p. 13)

No século XVIII, os matemáticos contestavam a validade do postulado V, porque, na época, o pensamento filosófico era influenciado por Emmanuel KANT (1724 - 1804), que em sua obra *Crítica da razão pura* considerava o espaço como intuição pura *a priori* e a Geometria como uma verdade eterna de propriedades imutáveis.

Ainda na Europa, o jesuíta italiano e professor Girolamo SACCHERI *(*1677-1733), considerou o quadrilátero ABCD birretângulo isósceles (Figura 3), isto é, que tem dois lados opostos de medidas iguais e perpendiculares.

Demonstrou que, se os ângulos A e B são retos e os lados AC e BD têm medidas iguais, então os ângulos C e D têm medidas iguais.

Afirmou que para esses ângulos há três possibilidades:

- C e D são ângulos agudos.
- C e D são ângulos retos.
- C e D são ângulos obtusos.

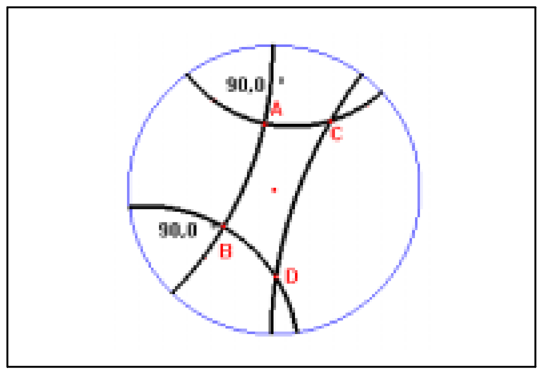


FIGURA 3 – O QUADRILÁTERO DE SACCHERI

A essas hipóteses SACCHERI chamou de hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso e deduziu que, segundo se verifique a hipótese do ângulo reto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de dois retos; se for a hipótese do ângulo obtuso, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que a medida de dois retos e, se for a hipótese do ângulo agudo, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor que a medida de dois retos. (ibidem, p. 43)

Conhecido por demonstrar a irracionalidade de , Johann Heinrich LAMBERT (1728 - 1777), suiço, na sua *Die Thèorie der Parallellinien*, publicada somente em 1786, introduziu um quadrilátero trirretângulo - atualmente conhecido como Quadrilátero de LAMBERT (Figura 4) e considerou, inclusive, as três hipóteses de

SACCHERI para o quarto ângulo. Mostrou que, a hipótese do ângulo obtuso leva a uma contradição, a hipótese do ângulo reto é deduzida facilmente e que a hipótese do ângulo agudo permite deduzir que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor, igual ou maior que a medida de dois retos.

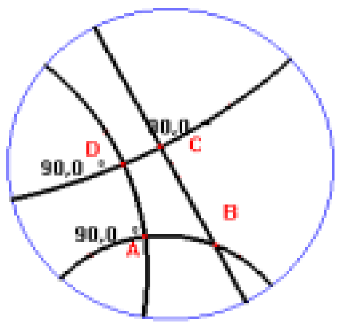


FOTO 1- J. H. Lambert

FIGURA 4 – O QUADRILÁTERO DE LAMBERT

LAMBERT chegou a afirmar que a hipótese do ângulo agudo poderia conduzir a uma geometria sobre uma superfície nova, como uma superfície esférica de raio imaginário. (ibidem, p. 56)

> Dentre os franceses, o matemático Jean Le Rond D'ALEMBERT (1717 - 1783), notando falta de clareza nas definições dadas por Euclides e também porque os postulados parecessem incompletos, disse a famosa frase: “a definição e as propriedades da linha reta e das paralelas são o escolho e, por assim dizer, o escândalo dos Elementos de Geometria.” (ibidem, p. 63)

FOTO 2 - J. R.D’Alembert

Propôs chamar de “paralela a uma reta dada a qualquer outra reta coplanar que une dois pontos eqüidistantes e situados numa mesma região”. Esta definição permite construir retas paralelas. (ibidem, p. 63)

Na mesma época, um físico e matemático inglês, John PLAYFAIR (1748 - 1819), fez a afirmação equivalente mais famosa do postulado das paralelas e utilizada até hoje: "por um ponto exterior a uma reta pode-se traçar, uma e só uma, paralela a esta reta*".*

Entre os matemáticos da Revolução francesa, Adrien Marie LEGENDRE (1752 - 1833) escreveu *Elementos de Geometria* de 1794 a 1823, buscando demonstrar o Postulado das Paralelas. Legendre estabeleceu que "a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual ou menor que a medida de dois retos." (ibidem, p. 66)

FOTO 3 - A.D. Legendre

No século XIX, o século da Revolução Industrial, uma das épocas em que ocorreram as maiores transformações na Matemática, um grande matemático se interessou pela questão do paralelismo:

Carl Friedrich GAUSS (1777-1855), alemão de Brunswick. Desde 1792 estudando o assunto, chegou à seguinte definição de retas paralelas: "duas retas coplanares não incidentes são paralelas, se toda reta traçada por um ponto da primeira e compreendida pelo ângulo formado por ela e pela primeira reta, encontra a segunda." (ibidem, p. 78)

FOTO 4 - C. F. Gauss

Assim, criou uma Geometria que independia do quinto postulado, logicamente coerente, entretanto, por temer *a "*gritaria dos beócios*"*, nada publicou a respeito. Sabe-se, apenas, de um diário com as anotações das conclusões que conseguira ao longo da sua vida e que somente foi encontrado em 1898.

Quando GAUSS resolveu publicar seus resultados, já existiam duas idéias sobre o problema das paralelas publicadas. A primeira delas foi a do russo Nicolai Ivanovitch LOBACHEWISKY (1793 - 1856) para quem paralelas são "retas que não se encontram por mais que as prolongue".

Em 1829, convencido de que o postulado das paralelas não poderia ser provado, publicou um artigo intitulado *Sobre os fundamentos da Geometria* acerca de uma nova Geometria que mantinha os quatro postulados de Euclides. Afirmou que "por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas duas retas paralelas a essa reta." (ibidem, p. 91)

FOTO 5 - N. I. Lobachewisky

Assim, contradisse o quinto postulado e derrubou a filosofia de KANT e mais, demonstrou que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor que a medida de dois retos.

Trabalhando de forma independente de LOBACHEWISKY, o húngaro Janos BOLYAI (1802 - 1860), filho de W. BOLYAI, tentou provar o quinto postulado, mas terminou por desenvolver a sua *Ciência absoluta do espaço* publicada em 1832 sem decidir, *a priori*, a veracidade ou não do postulado das paralelas. (ibidem, p. 101)

FOTO 6 - J. Bolyai

Nessa obra, JANOS afirma que "por um ponto não sobre uma reta, não uma, mas infinitas retas podem ser traçadas no plano, cada uma paralela à reta dada". Além disso, definiu retas paralelas de forma semelhante à do matemático russo e, certa ocasião, disse a seu pai: "descobri coisas tão belas que me fascinei...tirei do nada um novo universo".

Considerando como modelo de plano uma superfície esférica, surge outra Geometria não euclidiana, aquela criada por Georg Friederich Bernhard RIEMANN (1826 - 1866), alemão de Hanover. Fez seus estudos, inicialmente, em Berlim e depois em Göttingen, onde obteve o doutorado. (BOYER,1999, p. 377)

FOTO 7 - G. F. B. Riemann

Para ser nomeado *privatdozent* da Universidade, sem honorários, precisava proferir uma aula satisfatória diante de toda a Faculdade de Filosofia. Ele estudara três assuntos, dos quais “os dois primeiros tenho-os bem preparados, mas GAUSS escolheu o terceiro e agora me sinto embaraçado”, escrevera ao irmão. O assunto escolhido por GAUSS era *Das hipóteses que constituem fundamentos da Geometria*.

A aula foi apresentada num sábado, dia 10 de junho de 1854. Do corpo docente faziam parte historiadores, filósofos e outros, nenhum matemático. Pretendendo dar uma visão profunda e ampla da Geometria, falara sobre a curvatura de espaços n-dimensionais, sem escrever qualquer equação. O resultado da conferência o celebrizou, deixando Gauss muito entusiasmado.

Substituindo o quinto postulado pela afirmação “por um ponto de um plano não se pode traçar nenhuma paralela a uma reta dada”, RIEMANN obteve resultados importantes, tais como:

- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é maior que a medida de dois retos.
- Uma superfície pode ser finita, mas será ilimitada.
- A reta tem comprimento finito.
- À medida que um triângulo aumenta de tamanho, aumenta a medida de seus ângulos internos e a sua área também.
- Não existe semelhança de triângulos, mas existe a congruência de triângulos.

> Verificando a existência de uma Geometria compatível com a hipótese do ângulo obtuso, foi o primeiro a substituir a hipótese da reta infinita pela da reta ilimitada. RIEMANN afirmara que: “quando se estendem as construções do espaço ao infinitamente grande, necessitamos fazer a distinção entre o ilimitado e o infinito; o primeiro pertence às relações de extensão; o segundo , às relações métricas.” (BONOLA, 1951, p. 143)

Na Geometria de RIEMANN, cujo modelo é uma superfície esférica, a reta é interpretada como circunferência máxima.

Podemos verificar que, como por quaisquer dois pontos diametralmente opostos passam muitas circunferências máximas e ponto equivale a um par de pontos, o primeiro Postulado de Euclides é verdadeiro. O segundo também, pois, a reta (circunferência máxima) é finita.

O terceiro postulado é verídico, porque a distância entre dois pontos é a medida do arco de uma circunferência, entretanto, o círculo que esses dois pontos determinam pode ser definido como um conjunto de pontos de uma superfície esférica que estão a uma distância fixa de um ponto. O quarto postulado é evidentemente verdadeiro. Dessa forma, RIEMANN construiu uma Geometria consistente e coerente. (DAVIS & HERSH, 1985, p. 254)

Mais uma vez, o Postulado das Paralelas foi negado e substituído por outro que gerou uma nova Geometria não-euclidiana.

FELIX KLEIN (1849 – 1925) denominou a Geometria riemanniana de Esférica, admitindo-se que duas retas distintas se interceptam em dois pontos distintos diametralmente opostos ou antípodas e Elíptica, se as duas retas distintas possuírem somente um ponto em comum. (ibidem, p. 147)

A descoberta dessas Geometrias não-euclidianas pôs um final ao problema do quinto Postulado de Euclides: é um postulado independente dos demais e, portanto, não pode ser demonstrado.

Outras conseqüências não menos importantes foram a libertação da Geometria do tradicionalismo grego, que perdurou por séculos e a derrubada da teoria do espaço de KANT iniciada pela Geometria de LOBATCHEWISKY e confirmada por RIEMANN.

Certamente, o leitor fará a pergunta: Qual das Geometrias é a mais adequada ao nosso mundo físico?

A escolha não é fácil de ser feita, uma vez que todas as Geometrias têm o mesmo valor, o que as distingue é a aplicação que elas nos proporcionam.

A Geometria euclidiana é a mais apropriada para pequenas distâncias e, além do mais, a mais fácil para o professor ensinar estando mais enraizada às nossas concepções.

As Geometrias de LOBACHEWISKY-BOLYAI e RIEMANN são fundamentais para os estudos que envolvem grandes distâncias. São de grande utilidade, entre outros campos, para a Física atômica, à Óptica, à Teoria Geral da propagação de ondas, às distâncias estelares, às velocidades superiores àquelas imperceptíveis aos nossos sentidos e à Análise Matemática.

Além disso, a realidade nos mostra um mundo diferente do euclidiano: a curvatura da Terra não é nula, as retas traçadas sobre essa superfície não são retas euclidianas, o espaço é finito.

Sabemos, também, que EINSTEIN (1879 - 1955) empregou as idéias de RIEMANN na sua Teoria da Relatividade. Para o cientista, o Universo não é euclidiano e sim curvo, portanto, riemanniano, com quatro dimensões, sendo o tempo a quarta dimensão. As geodésicas são retas do espaço-tempo e os planetas se deslocam segundo essas geodésicas.

Concluindo, não existe a Geometria mais verdadeira, a mais importante, a mais apropriada, pois a Geometria euclidiana e as Geometrias não-euclidianas tiveram seus modelos comprovados e ainda continuam sendo consistentes e legítimas cientificamente. Existe, sim, a mais conveniente para a realidade que estamos vivendo ou imaginando.

Enfim, os efeitos das investigações dos geômetras não-euclidianos têm extensas ramificações no pensamento geométrico moderno.

Ao abordarmos alguns aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas, deparamos com modelos de outras superfícies e a questão do paralelismo entre retas, retomando o centro das discussões e, para a seqüência didática que propomos, os resultados obtidos por RIEMANN, desde a sua primeira aula em Göttingen, têm fundamental importância.

Em continuidade, faremos considerações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, orientadores do sistema educacional brasileiro, no que tange às funções da Matemática, ao ensino da Geometria e à Formação de professores de Matemática.

I.2 - PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

I.2.1 – CONSIDERAÇÕES

> *A educação de que falamos é aquela orientada desde a infância para o Bem, induzindo no homem o desejo ardente de tornar-se um cidadão perfeito, capaz de governar e de ser governado com justiça.*
>
> *Platão*

Este estudo tem como foco a Geometria esférica para a Formação continuada de professores, embora não conste na grade curricular do Ensino Fundamental nem do Ensino Médio, o que nos faz acreditar haver aspectos geométricos fundamentais a serem discutidos.

Em vista disso, consideramos indispensável consultarmos as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a respeito da Geometria e da formação docente, em particular no Ensino Médio.

Relativamente à Geometria, desde o Ensino Fundamental, ela desempenha um papel de conexão ao estabelecer relações entre vários aspectos do conhecimento, em especial, o matemático, ao ligar os quadros aritmético, métrico, algébrico, estatístico, combinatório e probabilístico. (PCNEF, 1998, p.48)

Além disso, no Ensino Médio, vista como complementação e aprofundamento da formação inicial, a Geometria pode propiciar o desenvolvimento das habilidades de visualização, desenho, argumentações lógicas e de aplicação, na busca de soluções a problemas, proporcionando ao estudante a utilização das formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (PCNEM, 1999, p. 257)

Um dos aspectos que apresentamos é que, ao principiarmos esta pesquisa por uma situação-problema, pretendíamos estudar as diferentes inter-relações entre a Geometria esférica, a Álgebra, a Aritmética e a Trigonometria e, também, com as áreas de Linguagens e Códigos, o que foi permitido com a utilização de símbolos geométricos, bem como com Ciências Humanas, explicitamente, Geografia e, implicitamente, Filosofia.

Optamos, igualmente, por usar o recurso de resolução de problemas, atendendo a uma das finalidades do ensino de Matemática no nível médio: "Desenvolver as capacidades de raciocínio e Resolução de Problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo." (PCNEM, 1999, p. 254)

Além disso, ao solucionar um problema, presumimos que o aluno "elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas e formular hipóteses), compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos", o que, certamente, conduzirá ao ensino e aprendizagem como um processo de reflexão/construção do conhecimento. (PCNEF, 1998, p. 41)

Outrossim, recorrendo à História da Geometria, que se estendeu à das Geometrias não-euclidianas, acreditamos a estar revelando como uma criação humana; como produto das necessidades e inquietações de diferentes culturas em épocas diversas; como comparação entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, compreendendo que o progresso tecnológico sucedeu a uma cultura passada. (PCNEF, 1998, p. 42)

Vimos que a própria História das Geometrias não-euclidianas surgiu de indagações ao Postulado das Paralelas, durante mais de dois mil anos, demonstrando de que forma foi edificado esse saber matemático.

Sobre a Formação de professores, essa proposta curricular encara como um dos maiores desafios a formação docente adequada e a modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, desde o ensino inicial, o que vimos idealizado na seguinte frase:

> Quando o aprendizado de Matemática, além de promover competências como o domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas, pretende desenvolver atitudes e valores, através de atividades dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos, toda a escola deve ter uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados. (PCNEM, 1999, p. 263)

Como alternativa, propõe um apoio científico e educacional das Universidades ou de outros centros formadores, que ofereçam programas de formação inicial e continuada e o envolvimento da comunidade escolar num projeto pedagógico. Reforça o papel do professor como aquele que:

> ... seleciona conteúdos instrucionais compatíveis com os objetivos definidos no projeto pedagógico; problematiza tais conteúdos, promove e media o diálogo educativo; favorece o surgimento de condições para que os alunos assumam o centro da atividade educativa, tornando-se agentes do aprendizado, articula abstrato e concreto, assim como teoria e prática; cuida da contínua adequação da linguagem, com a crescente capacidade do aluno, evitando a fala e os símbolos incompreensíveis, assim como as repetições desnecessárias e desmotivantes. (ibidem, p.265)

Podemos, então, chegar à conclusão de que os Parâmetros Curriculares Nacionais ao considerarem os conceitos geométricos como parte importante do currículo de Matemática, por permitir o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento, o qual permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivemos, evidencia que essas noções sejam introduzidas por meio de situações-problema, que possibilitarão a exploração de todas as demais noções matemáticas, em conexão umas com as outras e com outras áreas do conhecimento.

Acreditamos, portanto, que o trabalho que propomos se apresenta consistente, adequado e alicerçado nas propostas de ensino de Geometria estendida para a Geometria esférica e dirigida para a Formação de professores.

Em complementação e de acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, adotamos como recurso a Interdisciplinaridade que inclui, em sua essência, a contextualização como promovedora de uma aprendizagem mais sólida e libertadora das garras do tradicionalismo. Por esse motivo, procuraremos analisar um pouco mais essa articulação entre a interdisciplinaridade e a contextualização, um par de concepções relevantes para esse trabalho.

I.2.2 - INTERDISCIPLINARIDADE E CONTEXTUALIZAÇÃO: ANALISANDO UM POUCO MAIS

> *... ao buscar um saber mais integrado e livre, a interdisciplinaridade conduz a uma metamorfose que pode alterar completamente o curso dos fatos em Educação; pode transformar o sombrio em brilhante e alegre, o tímido em audaz e arrogante e a esperança em possibilidade.*
>
> *Ivani Fazenda*

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999), quando nos referimos às interconexões estabelecidas por intermédio da prática e entre as diversas áreas do conhecimento, estamos mencionando a função primordial da interdisciplinaridade, que, essencialmente, não criará novas disciplinas ou saberes, mas utilizará os diversos conhecimentos para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista.

A tal integração pode ocorrer desde uma troca de idéias, até a inter-relação dos conceitos, da epistemologia, da terminologia, da metodologia, dos procedimentos de coleta, da análise de dados e daquela que constata a existência de muitas e diversas formas de conhecimento (ibidem, p.88).

A interdisciplinaridade é caracterizada por supor um eixo integrador que pode ser o objeto de ensino, um projeto de pesquisa, uma experimentação, uma atividade ou plano de intervenção, reunindo os conceitos passíveis de serem utilizados de cada disciplina, sem que ela perca a sua individualidade. Dessa forma, a interdisciplinaridade abrange o problema, desde a sua concepção, execução até a avaliação.

Para FAZENDA (2001, p. 11), a interdisciplinaridade pode ser conceituada como "uma nova atitude diante da questão do conhecimento, de abertura à compreensão de aspectos ocultos do ato de aprender e dos aparentemente expressos, colocando-os em questão" e distinguimos cinco princípios que contribuem para uma prática docente interdisciplinar: humildade, coerência, espera, respeito e desapego; atributos como a afetividade; a ousadia; pressupostos como a metamorfose e a incerteza.

Acima de tudo, deve "**partir da necessidade sentida pelas escolas, professores e alunos de explicar, compreender, intervir, mudar, prever algo desafiador a uma disciplina isolada e atrair a atenção de mais de um olhar, talvez vários**." (PCNEM, 1999, p.88 - 89, grifo do texto original)

A interdisciplinaridade pressupõe um projeto, cujo sustentáculo é a contextualização, a qual permite ampliar as possibilidades de criar as condições essenciais para uma aprendizagem que será, certamente, motivadora e articulada a uma maior liberdade do professor e dos alunos.

Segundo FAZENDA (2001, p. 21), o procedimento interdisciplinar, então,

> reduz o modelo mecanicista da aprendizagem disciplinar, questiona a racionalidade dos ensinos ou didáticas, analisa os processos, a afetividade, o efeito da força e a força dos efeitos, as dimensões sociais e institucionais, as estratégias organizacionais, a articulação de saberes, toda e qualquer proposição que tenha a diversidade como princípio.

No que se refere à Matemática, a interdisciplinaridade surge como um critério central de escolha para um núcleo comum, ao lado da contextualização. Ambas permitirão a interligação entre os vários conceitos matemáticos e suas diferentes formas de pensamento e entre as diversas áreas do conhecimento.

Faz-se primordial observarmos que, na construção de uma pesquisa Matemática interdisciplinar, devemos explicitar a ambigüidade entre os movimentos e as ações pedagógicas, necessitamos planejar e imaginar, transformar e esperar, aprender a intervir sem destruir o construído, enfim devemos ter diversos olhares para um mesmo fenômeno.

Esta pesquisa busca promover a interdisciplinaridade entre os vários campos da Matemática, como a Álgebra, a Aritmética, a Trigonometria Plana, além da Geometria euclidiana.

A relação com Geografia se estabelece, na medida em que o saber geográfico contribui para a compreensão do mundo e institui uma rede entre os elementos que constituem a natureza, o social, o econômico, o cultural e o político.

Como a interdisciplinaridade transcende os limites do conhecer/saber/refletir trataremos das suas coesões com outros ramos, em particular com a Geografia, a seguir.

I.2.3 - ALGUNS CONCEITOS UTILIZADOS NESTA PESQUISA SOB O PONTO DE VISTA DA GEOGRAFIA

> *A Geometria não é a verdade sobre o espaço físico, mas o estudo dos espaços possíveis.*
>
> *Morris Kline*

Neste trabalho, algumas noções a respeito de elementos geográficos são vistas geometricamente, então se tornou necessário mostrarmos como eles foram definidos à vista daquela Ciência, tendo como referência um livro didático de Geografia, buscando a ação da interdisciplinaridade.

A procura para compreender o que acontece a sua volta foi um dos maiores enigmas da humanidade, desde os tempos mais remotos. A maioria dos povos da Antigüidade era constituída de comerciantes e navegantes que precisavam conhecer as rotas marítimas e, conseqüentemente, a Terra.

RAISZ (1969) nos conta essa interessante história, com porções de Geometria, cujos fatos se iniciaram na Grécia e no Egito.

Aos egípcios devemos, provavelmente, a origem do termo “geodésia” usado na medição de terras que podem ter sido iniciadas no reinado de RAMSÉS II (1333 a.C-1300 a.C), com o intuito de demarcar os limites das propriedades rurais e cobrar impostos.

Aos gregos atribuímos a base do sistema cartográfico atual. Possuidores de muitos conhecimentos sobre a Terra, os quais chamavam de “Geografia” que significava “escrever sobre a Terra” ou “estudo da superfície terrestre”, introduziram, no início do século IV a.C, a idéia de que o planeta tinha a forma redonda.

Dentre os escritos gregos mais famosos, destacamos os de ARISTÓTELES (384 a.C – 322 a.C) que provou a esfericidade terrestre por meio de seis argumentos e os de ERATÓSTENES (270 a.C – 195 a.C) que construiu um mapa-múndi do mundo habitado com sete paralelos e sete meridianos.

ERATÓSTENES, além disso, calculou a medida da circunferência terrestre da seguinte forma: ao tomar conhecimento de que, em 21 de junho, o dia mais longo do ano, os raios solares incidiriam perpendicularmente num poço de Siena (atualmente Assuã), mediu o ângulo do Sol ao meio dia, obtendo um valor um pouco maior que 7°. Considerando, ainda, que a distância entre Siena e Alexandria era de 5000 estádios (um estádio equivalia a 41,25 m), verificou que um meridiano da Terra deveria medir 250000 estádios, isto é, aproximadamente, 28000 milhas ou 45000 km (a medida correta é 40110 km), valores com uma precisão em torno de 14%, concluindo que a Terra era redonda. (Figura 5)

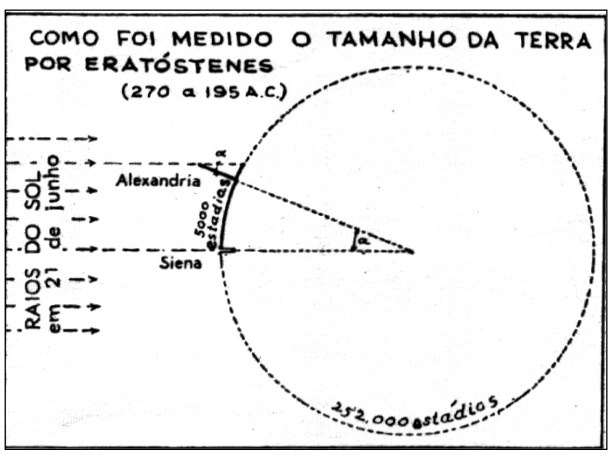


FIGURA 5 [8]– COMO ERATÓSTENES MEDIU A CIRCUNFERÊNCIA TERRESTRE

HIPARCO (190 a.C – 125 a.c) propôs um mapa em que o mundo está dividido em onze paralelos distanciados igualmente, cujos comprimentos seriam determinados pelas observações simultâneas dos eclipses da Lua.

[8] Esta figura foi retirada do livro de RAISZ, E., *Cartografia Geral,* 1969, p. 14.

Cláudio PTOLOMEU de Alexandria (90 a.C – 168 a.C), em sua obra mais famosa *Geografia,* fez estudos sobre os princípios da Cartografia, da Geografia, das Projeções, dos Métodos de Observação Astronômica e da Matemática, além de um mapa-múndi e 26 mapas com detalhes, sendo considerado o primeiro Atlas Universal. Embora o mapa apresente deformações, continuou como obra de referência até 1700. (Figura 6)

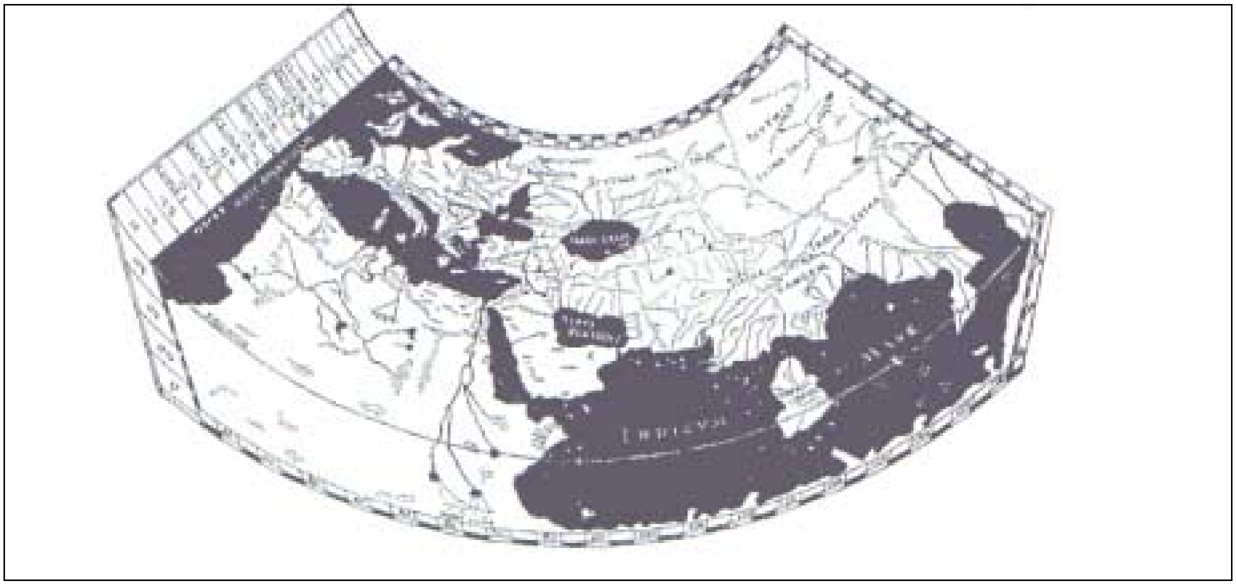


FIGURA 6[9] - O MAPA DE PTOLOMEU

ESTRABÃO (63 a.C – 25 d.C) tornou conhecidos os primeiros geógrafos como HICATEU (500 a.C) que considerava a Terra como um disco com as águas dos oceanos ao seu redor e ANAXIMANDRO DE MILETO (611 a.C – 547 a.C) que fizera um mapa de todo o mundo conhecido da época (Figura 7) e para quem a Terra tinha a forma de um tambor que flutuava livremente no espaço.

9 Ibidem, p. 16.

FIGURA 7[10] - A TERRA SEGUNDO ANAXIMANDRO

POSIDONIO (135 a.C – 41 a.C) utilizando a distância entre Rodes e Alexandria, considerou a altura da estrela Canopus, chegando à medida da circunferência máxima terrestre como 18000 milhas ou 29000 km, aproximadamente, o que representava três quartos do valor real. Possivelmente, Cristóvão COLOMBO (1451 – 1506) tenha adotado essas medidas, levando-o a confundir a América com a Ásia.

As idéias sobre a forma da Terra foram as mais estranhas possíveis.

Os babilônios julgavam que ela fosse constituída de duas pirâmides coladas pelas suas bases, sendo a pirâmide superior símbolo da vida e da luz e a inferior relacionada à obscuridade e ao mal, conforme Figura 8. (HATWAY, 1965, p. 6)

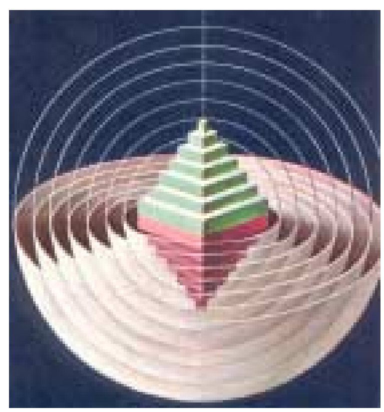


FIGURA 8[11] - A TERRA SEGUNDO OS BABILÔNIOS

A esfericidade da Terra incomodava Isaac NEWTON (1642 – 1727), que propôs a forma de um elipsóide achatado nos pólos, devido ao efeito da força gravitacional e da centrífuga causadas pela rotação. Então, por praticidade, a forma

[10] Esta figura foi extraída do livro de HATHWAY, J.-A. *Cartas geográficas,* 1965, p. 7.

[11] Ibidem, p. 6.

dela foi considerada como um elipsóide de revolução, embora em mapas de escalas pequenas, conste como uma esfera, o que implica em um erro desprezível.

O Sistema de Coordenadas Terrestres baseia-se na rotação da Terra e é composto pelos Paralelos e Meridianos.

Os pólos são definidos como ponto de interseção do eixo de rotação da Terra com a superfície terrestre, entretanto, para o pólo Sul, a superfície é reduzida ao nível do mar.

O Equador (do latim *equales: iguais*) é considerado como a interseção do planeta com um plano perpendicular ao seu eixo de rotação e que passa pelo ponto médio do segmento que liga os pólos.

Os Paralelos terrestres podem ser definidos como “linhas, na superfície da Terra, resultantes da interseção com planos paralelos ao Equador” (RAISZ, 1969, p. 401). São considerados círculos e se desenvolvem na direção Leste-Oeste e como a forma da Terra é um elipsóide, a sua curvatura é maior quanto mais próxima do Equador e, conseqüentemente, a distância entre dois paralelos varia e a latitude aumenta, à medida que nos aproximamos dos pólos. Por exemplo, a medida de 1° de latitude perto do Equador é 110,51 km e, nos pólos, é 111,70 km.

Os Meridianos (do latim *meridiem* que significa meio-dia) podem ser considerados como círculos máximos, que passam pelos pólos, formando ângulos de medidas iguais entre si e dividindo o Equador e os paralelos em 360° de longitude e se desenvolvem na direção Norte-Sul. O comprimento de 1° de longitude varia de 111,29 km no Equador, até 0 km nos pólos. (ibidem, p. 401)

Admitindo a esfericidade terrestre, o raio do paralelo será dado por r = R cos , sendo R o raio da Terra, r o raio de um paralelo e a latitude. (Figura 9)

Podemos demonstrar este resultado da seguinte maneira:

Consideremos $\overline{OB}$ como raio da esfera e $\overline{PB}$ como raio de um paralelo de latitude e o triângulo BOP, retângulo em P, cujos ângulos alternos internos PBO e AOB são congruentes e definem a latitude.

Pela Trigonometria plana, no triângulo retângulo, cos = BP/ OB = r/ R e, então, r = R cos .

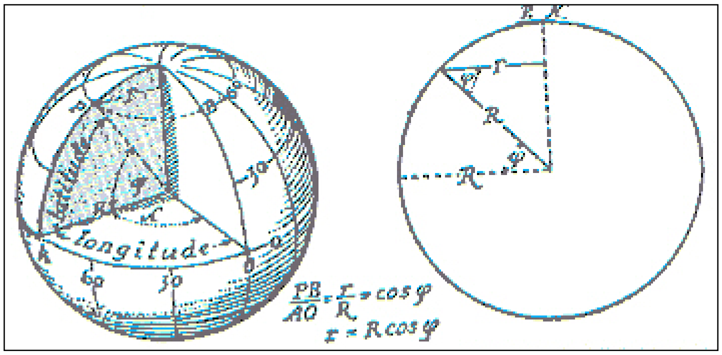


FIGURA 9[12] - A REPRESENTAÇÃO DA VARIAÇÃO DA LONGITUDE

Mais, o comprimento da circunferência máxima, no Equador, é C_E =2 R e da circunferência, no paralelo, é C_P = 2 r , que é 2 R cos e, daí, C_P = E cos .

Os sistemas de projeção de mapas adotam que a longitude varia com o cosseno da latitude.

Já um ponto, na superfície terrestre, é situado pelas suas Coordenadas Geográficas: a latitude pode ser definida como “a distância em arco medida em graus a partir do Equador” e a longitude, como “a distância em arco medida em graus a partir de um meridiano de origem”. (ibidem, p. 401)

A latitude, geralmente, é determinada pelas observações das alturas de algumas estrelas ou do Sol e a longitude é obtida pela diferença entre a hora local e a hora de Greenwich, considerando que cada uma hora de diferença corresponde a 15° de longitude. Os instrumentos modernos e os métodos atuais nos dão a latitude, a hora local e a longitude.

Por serem todos os meridianos de medidas iguais, qualquer um deles poderia ser o meridiano de origem e assim foram, por exemplo, o das ilhas Canárias, o

[12] Esta figura foi extraída do livro de RAISZ, E., *Cartografia Geral,* 1969, p. 53.

mencionado no Tratado de Tordesilhas, o de Londres, o de Lisboa, o de Madri, o de Paris, o da Filadélfia e o de Washington, entre outros.

O meridiano adotado como referência foi o de Greenwich, em virtude do prestígio do Observatório do mesmo nome situado em Londres. O Almirantado inglês, então, calculou as longitudes para todos os países, a partir desse meridiano. Verificou-se que ele corta a Europa e a África em duas partes e deixa a Linha Internacional de Mudança de Data a 180° do primeiro meridiano.

Dessa maneira, as latitudes se referem ao Norte a ao Sul do Equador e as longitudes a Leste e Oeste do Meridiano de Greenwich de 0° até 180°.

A orientação é dada pela direção de um ângulo medido, no sentido dos ponteiros do relógio. Considerando um círculo, o pólo Norte corresponderá a 0°, a 90° se situará o Leste, a 180° o Sul e a 270° o Oeste.

Para possibilitar a indicação, num mapa, das orientações, os cartógrafos inventaram um quadrante de 32 pontos semelhante a uma flor de muitas pétalas, a que chamaram de *rosa ventorum* ou rosa-dos-ventos. (Figura 10)

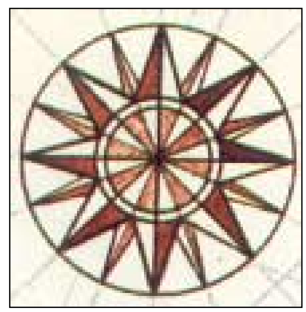


FIGURA 10 [13]- A ROSA-DOS-VENTOS

Dentre as representações da Terra, a mais utilizada é o mapa definido como "uma representação convencional da configuração da superfície da Terra" (ibidem, p. 47). A construção de mapas é anterior à escrita.

O mapa mais antigo que se tem conhecimento é uma placa de barro que se encontra no Museu Semítico da Universidade de Harvard e foi descoberto nas escavações das ruínas da cidade de Ga-Sur ao norte da Babilônia. (Figura 11)

[13] Esta figura foi extraída do livro de HATHWAY, J.-A., *Cartas Geográficas,* 1965, p. 18.

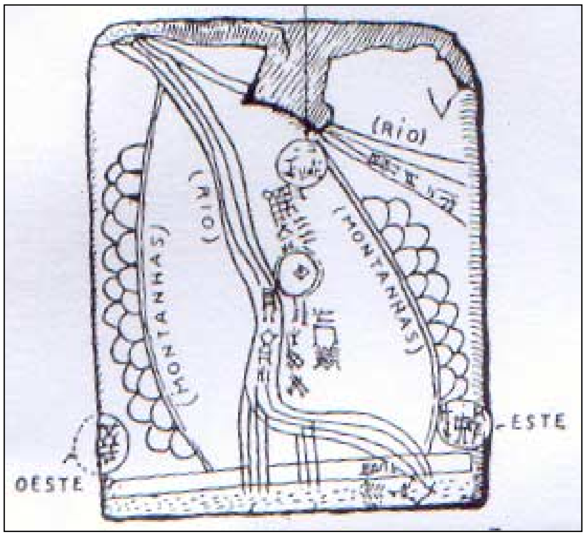


FIGURA 11[14] - O MAPA MAIS ANTIGO

Em 8 de setembro de 1522, retornou a Sevilha um único barco, com dezoito sobreviventes, da esquadra comandada por Fernão de MAGALHÃES que, como havíamos mencionado, partira em 1519 com a finalidade de circundar o mundo, o que foi realizado, ocasionando o fim do sistema geográfico de PTOLOMEU.

Por esse motivo, a América foi localizada com exatidão, o estreito de Magalhães foi marcado e o Oceano Pacífico passou a ser mostrado ao mundo. Com essas adaptações, Diogo RIBEIRO (1560 - 1633), em 1529, elaborou um mapa considerado de incrível atualidade.

A melhor representação da Terra é dada pelo globo terrestre, uma vez que mantém a semelhança das formas e as posições dos continentes e dos oceanos e são, relativamente, reais, apesar da redução e simplificação das dimensões.

O primeiro globo terrestre, ainda existente, é o confeccionado por Martim BEHAIM (1459 – 1506), de Nuremberg, (Figura 12). Acabado em 1492, ele possuía, além das concepções de PTOLOMEU, mais algumas vindas dos descobrimentos, todavia não mencionava a América, porém, aparecem ilhas, no oceano ao Sul e a Leste da Ásia, na região correspondente à América.

---

14 Esta figura foi extraída do livro de RAISZ, E., *Cartografia Geral,* 1969, p. 9.

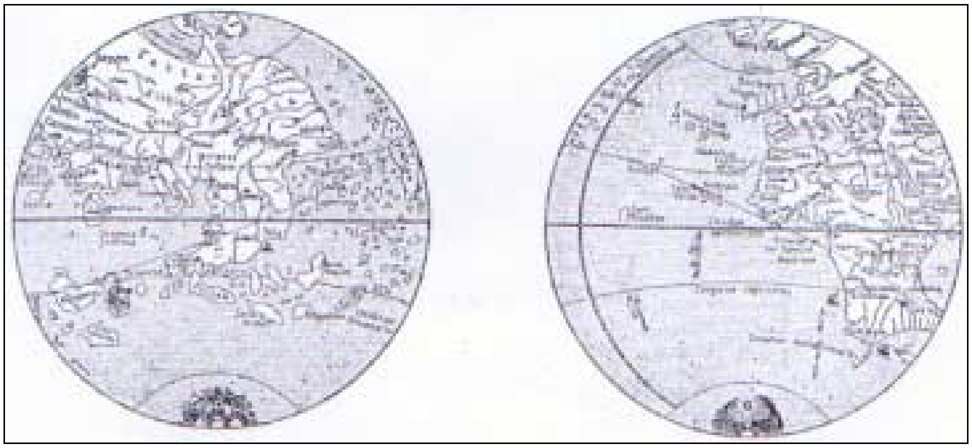


FIGURA 12[15] - O GLOBO TERRESTRE DE BEHAIM

A representação de uma esfera num plano, isto é, o seu desenvolvimento, apresenta dificuldades, isto porque a sua forma será alterada ou deformada ao ser "achatada".

Há vários métodos que conduzem às projeções cartográficas, as quais são consideradas como "sistemas planos de meridianos e paralelos, sobre os quais pode ser desenhado um mapa" (ibidem, p. 58), cada uma tendo finalidade própria.

A maioria das projeções atuais deriva de três tipos distintos: as cilíndricas (Figura 13a) que conservam a correspondência entre paralelo e clima e entre Leste e Oeste, as cônicas (Figura 13b) indicadas para a representação de países situados nas latitudes médias e as planas ou azimutais (Figura 13c) usadas em mapas náuticos e aeronáuticos.

[15] Ibidem, p. 28.

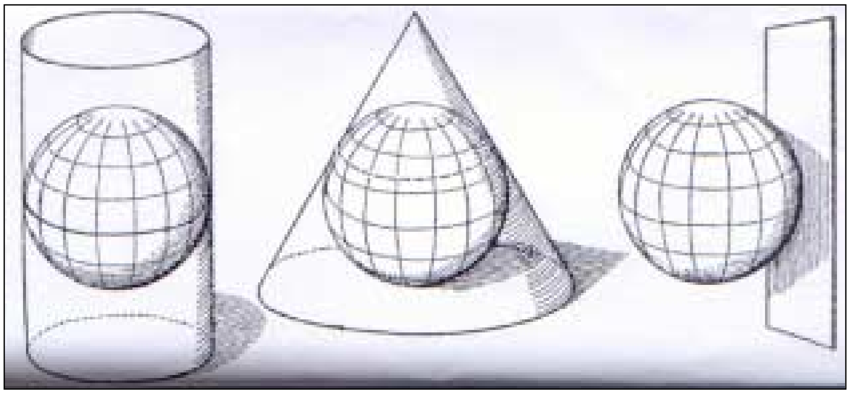


FIGURA 13[16] a, b, c – PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Em qualquer sistema de projeção, apenas os paralelos ou os meridianos ou outras linhas mantêm os comprimentos iguais aos seus correspondentes no mapa-múndi original; as outras serão de maiores ou menores medidas.

Em geral, o meridiano é dividido em partes eqüidistantes, ao considerarmos, no mapa, um comprimento igual a 111,1 km por graus ou 69,2 milhas por graus. Quando forem os paralelos, estes devem ser divididos em partes de comprimentos iguais ao produto 111,1x cos correspondentes a dois meridianos consecutivos.

A projeção cartográfica utilizada pelos navegadores, desde o século XVI, permite que as direções sejam traçadas em linha reta sobre o mapa e é devida a Gerhard Kremer MERCATOR (1512 – 1594). Em 1569, escreveu no seu Atlas: “se deseja navegar de um ponto para outro, aqui tem uma carta na qual figura uma linha reta. Se seguir cuidadosamente essa linha, chegará certamente ao destino.” (HATWAY, 1965, p. 36)

16 Ibidem, p. 57.

Na projeção de MERCATOR (Figura 14), os paralelos são retas horizontais e os meridianos são retas verticais, ambas perpendiculares entre si e não há a representação dos pólos, porque os meridianos são retas paralelas.

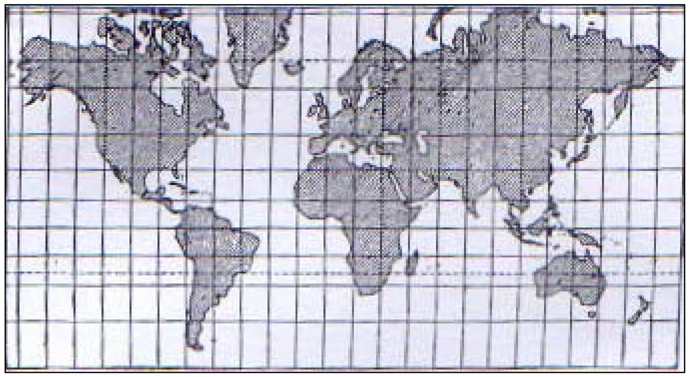


FIGURA 14 [17]- A PROJEÇÃO DE MERCATOR

Os paralelos têm comprimentos iguais, porém suas medidas diminuem ao se aproximarem dos pólos e os seus comprimentos são proporcionais ao cosseno da latitude, ou seja, a medida de cada paralelo é multiplicada por sec x 1/cos . Isso significa que cada grau de latitude deve ser multiplicado pela secante da latitude, sendo a latitude em graus.

Essa projeção mantém a forma dos continentes e países, mas as áreas sofrem deformações, acarretando críticas, porque os países ricos e desenvolvidos localizados nas latitudes médias e altas são apresentados com dimensões muito maiores, o que foi associado ao domínio político, figurando a Europa como centro do mundo. Já, nas baixas latitudes, onde estão situados os países pobres ou em desenvolvimento, o contrário acontece.

O menor percurso entre dois pontos, na superfície terrestre, é feito sobre um círculo máximo, por isso um navio deve mudar, constantemente, seu rumo. Nessa projeção, é possível ligarmos o ponto de partida de um navio ao ponto de chegada por uma reta chamada linha de rumo reta ou loxodrômica (Figura 15), depois ler o

[17] Ibidem, p. 60.

rumo desta linha e auxiliados pela rosa-idos-ventos, impressa no mapa, e considerando as derivas oriundas dos ventos e correntes marítimas, mantermos o navio sob este rumo.

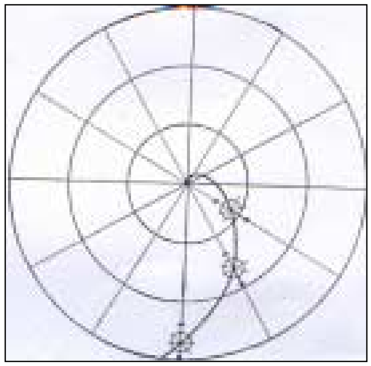


FIGURA 15[18] - AS LOXODRÔMICAS OU LINHAS DE RUMO

A maioria das cartas de navegação publicadas fundamenta-se na projeção de MERCATOR, sendo usada, também, em mapas-múndi e até para fins estatísticos, devido, principalmente, à facilidade de sua construção.

As noções geográficas que expusemos nos auxiliarão no ensinar/apreender a Geometria esférica e as justificativas disso daremos a seguir.

Na situação-problema, a posição do navio e da ilha foi dada pelas suas coordenadas geográficas, ou seja, a latitude ( ) e a longitude ( ) de ambos, tornando fundamentais os conhecimentos acerca dessas coordenadas que, por sua vez, mobilizaram conhecimentos a respeito de pólos, Equador, Meridianos, Meridiano de Greenwich e Paralelos terrestres, conforme a atividade 02.

Além disso, ao ligarmos dois pontos (um pólo ao navio ou um pólo à ilha) surgiu uma nova noção que é a de distância entre dois pontos, numa superfície esférica, cuja unidade é o grau, o que implicou na construção de um instrumento de medida adequado, como vimos na Atividade 03.

---

[18] Ibidem, p. 62.

O pólo, as posições do navio e da ilha são pontos pertencentes a arcos de circunferência, cujas interseções, dois a dois, determinam ângulos esféricos, que para serem medidos, necessitaram da construção de um instrumento apropriado: o transferidor esférico, como na Atividade 04. Nessa mesma atividade, construímos um triângulo esférico formado por aqueles pontos.

Obtivemos a Relação fundamental dos triângulos esféricos, na Atividade 06, que possibilitou a resolução da situação-problema, na Atividade 07, sendo o percurso do navio e o modelo gerado por ela questionados na Atividade 01.

Estudamos, mais cuidadosamente, os elementos contidos numa superfície esférica como: retas, segmentos de retas, polígonos e discutimos o não-paralelismo entre retas, o perpendicularismo entre retas, a não-existência de um quadrado, a não-semelhança e a congruência de triângulos esféricos e a não-validade do Teorema de Pitágoras na Atividade 08.

Dessa forma, a Geografia e a Geometria esférica se mantiveram em estrita conexão, uma desempenhando papel de suma importância no desenvolvimento da outra.

Após essas análises iniciais, por meio das quais tratamos do despontar de uma nova Geometria, passando pelos anseios do ensino de Geometria evidenciados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, sendo um deles a interdisciplinaridade/ contextualização, faremos um estudo do objeto de ensino Geometria esférica, para o qual pesquisamos algumas publicações em língua portuguesa, inclusive dissertações realizadas na área da Educação Matemática de 1995 a 2002.

I.3 - ESTUDO DO OBJETO DE ENSINO "GEOMETRIA ESFÉRICA"

I. 3.1 – PRODUÇÕES CIENTÍFICAS SOBRE A GEOMETRIA ESFÉRICA

O conhecimento a que aspira a Geometria é o conhecimento do eterno.

Platão

No transcorrer da investigação que produziu esta pesquisa, deparamo-nos com publicações que versavam sobre as Geometrias não-euclidianas e que nos conduziram à Geometria de RIEMANN. Tratam-se de alguns livros didáticos e devido a este estudo estar dirigido à Formação continuada de professores, buscamos, também, livros de complementação de estudos e uma dissertação de Mestrado, todos em língua portuguesa.

As produções em questão foram relevantes, na medida em que nos permitiram examinar a origem e o desenvolvimento dessa Geometria e as implicações para o seu ensino e aprendizagem:

QUADRO 1 - RELAÇÃO DAS PRODUÇÕES CIENTÍFICAS

OBRAS	TÍTULO	AUTOR (ES)	EDITORA	ANO
1	Maravilhas da Matemática - 4ª edição	Hogben, L.	Globo	1956
2	Matemática e Imaginação	Kasner, E.; Newman, J.	Zahar	1968
3	Matemática 2ª série - 2º grau - 8ª edição	Iezzi, G. et al	Atual	1991
4	Tratado da Esfera	Sacrobosco, J.	UNESP	1991
5	Fundamentos projetivos da Geometria Elíptica	Yamashiro, S.	PUC- SP	1991
6	Tópicos de História de Matemática para uso em sala de aula	Eves, H.	Atual	1992
7	Matemática Conceitos e Fundamentos - volume 2	Youssef, A. N.; Fernandez, V. P.	Scipione	1993
8	Matemática e Vida - 2º grau - volume 2	Bongiovanni, V. et al	Ática	1993
9	Matemática por assunto - volume 6 - Geometria plana e espacial - 3ª edição	Gonçalves Jr., O.	Scipione	1995
10	Matemática -Conceitos e Histórias - 8ª série	Pierro Neto, S. Di	Scipione	1998
11	Matemática hoje é feita assim - volume 6	Bigode, A. J. L.	FTD	2000
12	Meu professor de Matemática e outras histórias - 3ª edição	Lima, E.L.	SBM	2000
13	Convite às Geometrias não-euclidianas	Coutinho, L.	Interciência	2001
14	Atividades em Geometria - 3ª edição	Machado, N. J. (coord.)	Atual	2001
15	Fundamentos de Matemática Elementar - volume 10 - Geometria espacial	Dolce, O; Pompeo J. N.	Saraiva	2002
16	Matemática - volume único - 1ª edição	Paiva, M.	Moderna	2002

Inicialmente, observamos que dos livros didáticos, dois são dirigidos ao Ensino Fundamental e seis, ao Ensino Médio, o que não representa um número expressivo de publicações que tratam da Geometria de RIEMANN.

Para que pudéssemos analisar essas publicações, necessitamos estabelecer alguns critérios quanto à abordagem dada à Geometria esférica e, para simplificar a notação, utilizamos os seguintes códigos: para sim - 1 e para não - 0.

I - A obra considera uma esfera como modelo da Geometria esférica.

II - A obra considera uma superfície esférica como modelo dessa Geometria.

III - A obra faz um relato histórico sobre essa Geometria.

IV - A obra trata de alguns aspectos dessa Geometria, sem inter-relação com os conteúdos anteriores e posteriores.

V - A obra apresenta alguns aspectos dessa Geometria, sob o ponto de vista somente teórico, sem atividades de aplicação.

VI - A obra possui atividades retratando alguns elementos dessa Geometria, entretanto não faz referência e ela.

VII - A obra aborda essa Geometria teoricamente e por meio de atividades contextualizadas.

Mostramos, no quadro a seguir, os resultados referentes a esses critérios, considerando como referência as dezesseis obras apontadas na página anterior e que estão em ordem cronológica de publicação:

QUADRO 2 - RELAÇÃO DOS CRITÉRIOS ADOTADOS PELAS PRODUÇÕES

CRITÉRIOS	PRODUÇÕES															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
II	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
III	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
IV	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
V	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
VI	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Para a análise dos critérios adotados pelas produções em questão, elaboramos o seguinte quadro:

QUADRO 3 - TAXA DAS PRODUÇÕES EM FUNÇÃO DOS CRITÉRIOS

CRITÉRIOS	TAXAS (%)
I	62,5
II	43,7
III	37,5
IV	75
V	62,5
VI	37,5
VII	6,2

Como podemos notar, a maioria das publicações analisadas retrata somente alguns aspectos da Geometria esférica e, apenas teoricamente, sem encadeamentos com conteúdos anteriores e posteriores, não propõem atividades que permitam interpretar a realidade que ela apresenta e, às vezes, sequer essa Geometria é mencionada.

Nas produções que consideraram a esfera como modelo dessa Geometria, as retas de RIEMANN foram definidas como círculos máximos vistos como a interseção de uma esfera com um plano secante que passa pelo centro dela (ou uma secção).

Percebemos que algumas definições poderão induzir a um obstáculo didático compreendido como aquele que, devido à escolha inadequada de uma estratégia de ensino, acarretará a aquisição de conhecimentos errôneos ou incompletos e, portanto, se tornará obstáculo ao desenvolvimento de uma noção. Como exemplo, citamos a representação dos paralelos numa esfera, que, sabemos são seções feitas, por planos, paralelamente ao Equador, formando círculos (ou circunferências), o autor traça segmentos paralelos (segundo a visão da Geometria euclidiana), conforme vemos na Figura 16.

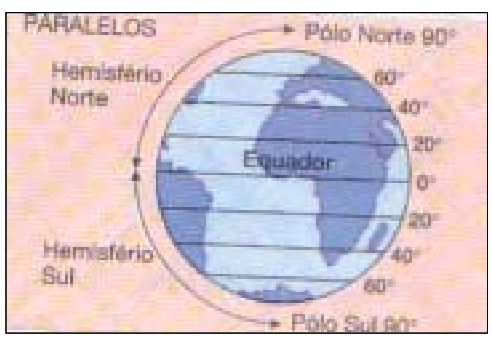


FIGURA 16[19] – REPRESENTAÇÃO DOS PARALELOS INDUZINDO AO OBSTÁCULO DIDÁTICO

---

[19] Figura extraída do livro de BIGODE, A. J. L., *Matemática hoje é feita assim,* 2000, p. 194.

Este trabalho voltado à Formação continuada dos professores acredita ser possível estimulá-los à pesquisa, ampliar suas visões de mundo, acompanhá-los na construção de novas concepções que os levarão a dominar um novo conhecimento e, para tanto, todas as publicações a respeito dessa Geometria será de fundamental importância.

Por isso, buscaremos apresentar e analisar, a seguir, quatro dissertações de Mestrado que por meios diretos ou indiretos pesquisaram a respeito, de forma ampla ou não, a Geometria esférica.

I.3.2 – DISSERTAÇÕES NA ÁREA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O estudo profundo da natureza é a fonte mais rica de descobertas matemáticas.

J. B. J. Fourier

As dissertações que analisamos a seguir abordam as Geometrias não-euclidianas, inclusive a Geometria de RIEMANN. Embora elas possuam objetivos diferenciados e conclusões várias, torna-se primordial um relato a respeito desses trabalhos.

Inicialmente, BRITO (1995) tratou do tema *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*, pela UNICAMP, São Paulo. A pesquisadora apresentou um estudo histórico-pedagógico das geometrias não-euclidianas, na forma de um diálogo hipotético entre a professora e quatro alunos, que se passou num curso de licenciatura em Matemática idealizado. A partir da "desconfiança histórica sobre a possibilidade de demonstração do quinto postulado de Euclides", fez considerações sobre as reconstituições racionais da história, discutiu as relações existentes entre a Teoria do conhecimento de Kant e a produção das novas geometrias.

Segundo a pesquisadora, seu trabalho "não pretende ser um modelo a ser seguido, mas um texto sobre o qual, futuramente, as pessoas possam se debruçar, analisar, contestar, utilizar trechos, enfim, recriar”.

Concluiu que esse estudo "possibilita perceber e avaliar a origem e o desenvolvimento histórico de tal concepção, tornando possível uma opção consciente entre superar ou não esse modo de encarar a Matemática", referindo-se ao fato de que futuros professores de Matemática, ainda consideram o saber Matemático como aquele que existe no Universo independente do Homem.

SOUZA (1998) com o título de *o 5° Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico*, pela UFRJ, Rio de Janeiro, analisou o Postulado sob três pontos de vista: o matemático, o histórico e o qualitativo. Apesar da área de concentração ter sido Matemática Pura, buscou investigar o conhecimento dos professores sobre a problemática gerada por este Postulado, analisou a influência dos livros didáticos no ensino da Geometria e examinou a importância das Geometrias não-euclidianas para o mundo atual.

Foram desenvolvidas atividades de "aplicação", a partir de situações-problema nas quais foram abordados os seguintes assuntos: o comprimento de curvas sobre superfícies não-planas, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo em uma superfície esférica e comparação intuitiva entre áreas de figuras sobre as superfícies plana, elíptica e hiperbólica.

A pesquisadora concluiu que a maioria dos 30 professores ainda via a Geometria euclidiana como a única forma de descrever a realidade e que os conteúdos matemáticos que os professores possuíam e que seriam usados nas demonstrações não estavam suficientemente consolidados.

A pesquisa recaiu num estudo de casos de, apenas, sete professores, a fim de traçar um perfil de cada um. Após o trabalho, os professores passaram a ter uma visão muito mais geral da Geometria, podendo estudar seus diversos tipos e discutirem sobre assuntos que provavelmente não imaginavam.

Quanto aos livros didáticos, escreveu que não mencionavam sobre as Geometrias não-euclidianas, embora tentassem relacionar o conteúdo geométrico com a realidade do aluno.

BONETE (2000) apresentou uma pesquisa sobre *As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências*, pela Unicamp, São Paulo e Unicentro, Guarapuava - PR e tinha como objetivo geral "a reflexão e a discussão sobre o ensino das geometrias não-euclidianas em um curso de licenciatura, onde estão futuros professores do ensino fundamental e médio".

A autora elaborou uma metodologia para o ensino dessas geometrias, sendo realizadas três experiências em diferentes salas de aula do curso de Licenciatura de Ciências iniciando com questões sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Concluiu que havia necessidade de modificações nos programas de formação de professores, por meio de experiências matemáticas e que era fundamental o ensino das geometrias não-euclidianas, pois, "além de provocar discussão nos conceitos de verdade matemática e espaço, pode provocar discussão no conceito de reta, curvatura, superfícies, paralelas, ângulos, triângulos e outras figuras geométricas e, conseqüentemente, mais compreensão a respeito do mundo que o rodeia".

MARTOS (2002) investigou sobre *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental*, pela UNESP, Rio Claro. Nesse estudo, a autora apresentou uma proposta didática ao ensino da Geometria euclidiana e não-euclidiana para o Ensino Fundamental, buscando o desenvolvimento significativo dessas geometrias, sendo aplicada em alunos de 8ª série.

A autora apresentou situações-problema em fichas de trabalho com descrições de atividades que seriam desenvolvidas, inclusive algumas baseadas no livro *O Pequeno Príncipe* de SAINT EXUPERY, adotando a pesquisa-ação como metodologia de pesquisa. Além disso, procurou por meio da interdisciplinaridade, relacionar conceitos geométricos com conceitos geográficos.

Destacou a interação entre os grupos de alunos, a dialogicidade, a construção de conceitos pelos aprendizes, o significado na aprendizagem e a inovação. Deduziu que, não obstante os conceitos de Geometria esférica não serem conteúdos comumente abordados nas aulas de Matemática, os professores podem avançar na busca de novos conhecimentos, trabalhando para desenvolver não somente as potencialidades de nossos estudantes, mas também seu espírito crítico e sua autonomia.

As experiências apontadas nos mostraram a preocupação de alguns pesquisadores com o ensino e aprendizagem da Geometria esférica, propondo práticas, metodologias, apresentando sugestões, no anseio de que tenham contribuído para que ela penetre no interior dos muros escolares. E lá no seu interior, é fundamental que conheçamos a concepção que os professores de Matemática têm acerca da teoria e da experimentação da Geometria.

Nossa dissertação propõe, sob o título *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*, uma seqüência de ensino constituída de uma situação-problema e oito atividades, cuja elaboração e experimentação estão fundamentadas na Teoria das Situações Didáticas, que permeia o processo de ensino e aprendizagem com situações de ação, de formulação, de validação e da institucionalização do conhecimento.

As realizações didáticas foram direcionadas pela Metodologia de Pesquisa intitulada Engenharia Didática, que possibilitou o controle desse processo, pois se baseou na concepção, na realização, na observação e na análise da situação-problema e de cada uma das atividades.

Esta investigação orienta-se para a Formação continuada de professores, por considerarmos esses profissionais como o alicerce de um aprendizado que se inicia nas primeiras letras e que acompanha o aluno por mais um longo tempo. Desejamos poder contribuir tanto no aprimoramento de conhecimentos prévios, quanto na aquisição de novos conteúdos, que poderão influenciar o ensinar e o currículo da disciplina escolar, que deverá ter como objetivo maior uma educação de melhor qualidade.

Ao adotarmos a estratégia da interdisciplinaridade, supomos o eixo integrador Geometria esférica-Geografia em restrita conexão na busca de conhecermos melhor o nosso planeta. Para tanto, construímos situações contextualizadas que, provavelmente, darão um novo significado aos assuntos tratados. Esse entrelaçamento pretende mostrar os entes geográficos sob o olhar da Geometria, alguns como os pólos, o Equador, os Meridianos, os Paralelos terrestres, as viagens que realizamos sem darmos conta da presença dessa Geometria que, embora não intervenha na nossa vivência, sua presença é marcante e mais próxima do que possamos imaginar.

Essa articulação abrange, ainda, os vários domínios matemáticos como a Aritmética, a Álgebra, a Trigonometria e a Geometria euclidiana, aborda fatos históricos que promoveram o nascer e o desenvolver da Geometria esférica, em meio ao predomínio da filosofia de KANT.

Em seguida, exploraremos as concepções dos professores com respeito às Geometrias não-euclidianas, particularmente, à Geometria esférica, as quais foram um dos pontos norteadores desta dissertação.

I.4 - CONCEPÇÕES DOS PROFESSORES

Só se percebe o que se concebe.
Britt-Mari Barth

Muitos pesquisadores têm se empenhado na investigação sobre as concepções dos professores de Matemática sobre a Matemática e o seu ensino. Esta pesquisa nos conduz à análise da concepção dos professores a respeito da Geometria.

Para tanto, inicialmente, adotaremos a conceituação de que:

> ... uma concepção é determinada por um conjunto de situações relativamente organizado, em torno de conhecimentos utilizados freqüentemente e que se manifesta através de um repertório relativamente estável e limitado de comportamentos, de linguagem, de técnicas, etc.” (Apud, ALMOULOUD, 2000, p. 179).

Tencionando diagnosticar se as concepções dos professores acerca da Geometria esférica podem subsidiar a construção de uma seqüência de ensino, elaboramos questões sob o título *Preliminares* (Anexo I), respondidas, individualmente, por seis professores da rede estadual de ensino da cidade de Arujá no Estado de São Paulo.

Tal questionário contém nove perguntas, a saber:

1) Você sabe que existem Geometrias não-euclidianas?

2) Em caso afirmativo, como ficou sabendo?

3) Você já participou de algum estudo sobre essas Geometrias?

4) Você já tinha ouvido falar na Geometria esférica?

5) Em caso afirmativo, como ficou sabendo?

6) Você acredita que a Geometria euclidiana soluciona todas as situações que envolvem a Geometria?

7) Situações como: viagens de longa distância, como por exemplo, as espaciais, por meio de navio, avião, a Geometria euclidiana consegue solucionar?

8) Você gostaria de tomar conhecimento de situações que envolvem a Geometria esférica?

9) Como você define circunferência, círculo, superfície esférica e esfera?

Estas questões tinham a finalidade de verificar:

- O conhecimento relativo às Geometrias não-euclidianas e depois, direcionar para a Geometria de RIEMANN (questões de 1 a 8), sendo que algumas perguntas (6 e 7) articuladas à Geometria euclidiana.

- A maneira pela qual os membros dos grupos definiriam circunferência, círculo, superfície esférica e esfera, pois, o tema deste estudo se desenvolveria sobre uma superfície não-plana (questão 9).

Procuramos analisar cada um dos itens acima, a partir das Preliminares. Para tanto, passaremos a identificar os sujeitos e nomeá-los por A, B, C, D, E e F.

Computando as informações, construímos a seguinte tabela:

TABELA 1–RESULTADOS OBTIDOS DAS RESPOSTAS DADAS PELOS PROFESSORES

Questão	Número de respostas		
	Sim	Não	Alguns casos
1	6	0	0
3	0	6	0
4	1	5	0
6	2	4	0
7	0	4	2
8	6	0	0

FONTE: Formulário de respostas.

NOTA: Participaram do questionário 6 professores.

Esse diagnóstico nos mostrou que os professores, embora soubessem da existência das Geometrias não-euclidianas, não haviam participado de algum estudo a respeito delas, levando-nos a concluir de que esses conteúdos não estavam incorporados ao currículo de muitas Universidades.

Quanto à questão 2, os professores (F, C) ficaram sabendo da existência das Geometrias não-euclidianas na Universidade; (A, B), em palestra; (E), por comentários entre professores e, além disso, a maioria deles não havia ouvido falar da Geometria esférica, conforme respostas dadas à questão 4.

Na questão 5, somente (C) lera sobre essa Geometria, entretanto, notamos a prontidão deles a um novo saber, se bem que com alguma ansiedade e incerteza pelo desconhecido.

Com respeito à Geometria euclidiana como a mais adequada para resolver algumas situações da nossa realidade, deduzimos que, majoritariamente, ela não abrange todos os casos.

Para a nona questão, que solicita a definição de circunferência, círculo, superfície esférica e esfera foram exibidas as seguintes respostas:

Circunferência

- *É um conjunto de pontos limitados por um círculo. (E)*
- *Conjunto de pontos eqüidistantes de um ponto C (centro). (A, D)*
- *Conjunto de vários pontos que foram a parte interna de um plano. (F)*
- *N pontos lado a lado que tem a mesma distância de um ponto chamado centro. (B)*
- *A partir de um ponto no centro. (C)*

Círculo

- *É um contorno circular, que determina um espaço. (E)*
- *Linha curva (conjunto de pontos) limitando um espaço. (D)*
- *Conjunto de vários pontos que foram a parte externa de um plano. (F)*
- *Região interna de uma circunferência.(A)*
- *É a parte interna de uma circunferência.(B)*
- *A partir de um ponto no centro. (C)*

Superfície esférica

- *É um corte sofrido pela esfera. (E)*
- *Parte da esfera-corte na esfera. (D)*
- *Parte seccionada da esfera. (F)*
- *Bolinha de ping-pong. (A)*
- *É o cálculo da área de uma esfera. (B)*
- *Figura circular composta de duas faces: interna e externa. (C*)

Esfera

- *Surgiu de um movimento de rotação de uma semicircunferência. (E)*
- *Superfície esférica maciça, compacta (que não é oca por dentro). (D)*
- *Corpo redondo maciço ou não que ocupa um lugar no espaço. (F)*
- *Bolinha de bilhar. (A)*
- *Não tem definição. (B, C)*

Pareceu-nos que algumas concepções estavam inadequadas, por exemplo:

Círculo como “um contorno circular que determina um espaço”; “é um conjunto de pontos que formam a parte externa de um plano”; “é a parte interna de uma circunferência”; “linha curva (conjunto de pontos) limitando um espaço”.

Circunferência como “um conjunto de pontos limitados por um círculo*”* e a definição para circunferência e círculo dada da mesma forma: “a partir de um ponto no centro”.

Superfície esférica como “um corte sofrido pela esfera”; “parte da esfera - corte da esfera”; ”parte seccionada da esfera”; ”é o cálculo da área de uma esfera”.

Esfera como “surgiu do movimento de rotação de uma semi-circunferência*”; “*superfície esférica maciça, compacta (que não é oca por dentro)”; “corpo redondo maciço ou não que ocupa um lugar no espaço*”.*

De acordo com LORENZATO (1995, p. 3 - 4):

> ... muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas", acreditando que se eles não estudaram Geometria, não saberão como ensiná-la e mais ainda "é preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar.

Essas conclusões nos levaram a reflexões acerca do ensino da Geometria, a qual muitos pesquisadores têm-se dedicado e sobre as concepções dos professores, a seu respeito.

Encerrado o primeiro capítulo, no qual tratamos da Geometria esférica desde o seu surgimento até se tornar objeto de ensino, necessitamos, neste momento, apontar a problemática existente no ensinar/aprender a Geometria, levantando uma questão de pesquisa que proporemos a solucionar.

CAPÍTULO II

A PROBLEMÁTICA E SEUS EFEITOS

A formação de professores é uma das pedras angulares imprescindíveis em qualquer tentativa de renovação do sistema educativo.

J. Gimeno

Este capítulo busca examinar a problemática surgida no ensino e aprendizagem da Geometria, apreciando os resultados obtidos por pesquisadores/professores, desde 1995, atentando para as direções apontadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para a Formação de professores.

Além disso, nos submetemos a analisar uma questão de pesquisa, a partir da problemática citada e com base nas nossas hipóteses de pesquisa. Apoiados numa Metodologia de pesquisa, elaboramos os procedimentos metodológicos a serem levados a efeito e embasados pela Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy BROUSSEAU (1986) e pelas pesquisas de Britt-Mari BARTH (1993).

II.1 - PROBLEMÁTICA E QUESTÃO DE PESQUISA

Tem-se revelado, a partir de pesquisas e em Congressos, cursos, palestras, artigos e dissertações de mestrado, a necessidade de repensar o ensino da Geometria e o papel que lhe cabe na Educação Matemática. Mais particularmente, nos referimos às Geometrias não-euclidianas, à qual pertence a Geometria esférica, alvo de investigações, quer histórico-pedagógica, quer sobre a problemática gerada pelo quinto Postulado de Euclides, quer sobre experiências em cursos de licenciatura e no Ensino Fundamental, na tentativa de torná-las domínios estruturados e integrados ao conteúdo escolar.

Sobre o ensino e aprendizagem da Geometria, LORENZATO (1995, p. 5) justifica, em um artigo, que "A Geometria está por ‘toda parte', desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la". Nele, argumenta que, sem o estudo desse componente, não há o desenvolvimento do pensamento geométrico ou o raciocínio visual e é impossível compreender e resolver questões de outras áreas do conhecimento.

FAINGUELERNT (1997, p.47) nos indica um possível caminho:

> O renascimento e a reformulação do ensino de Geometria, não é apenas uma questão didático-pedagógica, é também epistemológica e social. A Geometria exige do aprendiz uma maneira específica de raciocinar uma maneira de explorar e descobrir.

Necessitamos considerar alguns questionamentos que originaram a pesquisa de SOUZA (1998):

- Sob a ótica da história da Matemática, que desdobramentos surgiram para a Matemática a partir dos estudos sobre o 5 ° Postulado?
- O ensino de Matemática do 3° grau prepara e capacita graduandos a argumentar criticamente quando confrontados com tentativas de demonstração?
- Como os professores que lecionam Geometria vêem a problemática gerada pelo Axioma das Paralelas?
- Como os livros didáticos têm abordado a Geometria? Essa abordagem faz relação como o contexto histórico-social?

Ao mesmo tempo, precisamos considerar as conclusões de BRITO (1995) de que:

> Essas geometrias trazem no bojo de seu desenvolvimento discussões importantes sobre concepção de verdade, de rigor, de consistência, de sistema axiomático e outras trabalhadas no corpo dessa dissertação; reflexões sobre os pontos de interseção entre o discurso matemático e discursos de outros campos do conhecimento; análise dos momentos de continuidade e ruptura dentro da Matemática (há uma controvérsia, na Matemática, se há ou não essas rupturas dentro desse campo do saber. Não temos como objetivo desenvolver, aqui, essas discussões). Esses debates, além de colocarem um questionamento sobre os fundamentos da Matemática, ainda proporcionam uma percepção do dinamismo interno no qual se constrói esse saber.

Sem esquecermos as conclusões de BONETE (2000) de que:

> É fato que o conhecimento das Geometrias não-euclidianas pode proporcionar aos futuros professores um melhor preparo para que possam atuar no ensino fundamental e médio com a disciplina de Matemática e, em especial, com o ensino da geometria. Tal conhecimento permitirá a melhoria da qualidade do ensino da geometria euclidiana e possibilitará também a inclusão dessas geometrias nesses níveis de ensino, uma vez que, com esse conhecimento não terão a geometria euclidiana como a única geometria possível e verdadeira mas como, uma das possíveis e verdadeiras.

Necessitamos fazer, ainda, mais considerações, como é a dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio que têm demonstrado uma preocupação com a formação adequada de professores e a elaboração de materiais instrucionais apropriados, entre outras, reconhecendo ser indispensável superar a visão enciclopédica do currículo e que o professor é o detentor de todo o saber científico, o que, se persistir, acaba gerando dificuldades na sua formação e na organização dos conteúdos escolares.

Especificamente, referindo-se à Matemática, observa que, em virtude do "caráter de linguagem e de instrumento universal, os desvios no aprendizado influenciam muito duramente o aprendizado das demais ciências". Com relação ao ensino dessa ciência, faz considerações sobre o papel do professor que, conhecendo os conteúdos e convicto da importância e da possibilidade do aprendizado deles por todos os seus alunos, é aquele que "além de promover competências como o domínio de conceitos e a capacidade de utilizar fórmulas, pretende desenvolver atitudes e valores, através de atividades dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos". (PCNEM, 1999, p. 263 - 264).

Em ressonância aos interesses evidenciados nos PCNEM, decidimos pelas teorias de BARTH, que interligou teoria-prática, atribuindo-lhes valor na construção do saber e mais de que forma se apresenta o saber docente.

Com a finalidade de caracterizar o processo de aprendizagem, optamos pela Teoria das Situações Didáticas, a qual orientou a construção de uma série de situações denominada seqüência didática que, provocando mudanças no comportamento dos professores, permitisse a aquisição de um novo conhecimento -

a Geometria esférica - num determinado sistema que considera as interações entre o professor-pesquisador e os professores, mediada pelo saber.

Finalmente, esta investigação deseja mostrar as implicações inerentes ao ensino de um conhecimento/saber, ainda não incorporado à grade curricular do Ensino Fundamental e Médio e para tanto, examinaremos a seguinte questão:

Como uma seqüência de ensino pode possibilitar a apropriação de um novo domínio - a Geometria esférica - e levar o educador a reelaborar seu pensar?

II.2 - NOSSAS HIPÓTESES DE PESQUISA

Alicerçados pelos estudos mencionados, acreditamos ser possível responder a esta questão, pois:

- O conhecimento geométrico possibilita a compreensão/ descrição/ representação de forma organizada do nosso mundo.
- A apreensão dos conteúdos constituintes da Geometria esférica poderá nos conduzir a argüições/reflexões/transformações/conscientização da nossa posição como docente, diante da ação pedagógica.
- A utilização dos recursos da interdisciplinaridade e da contextualização promoverá conexões/encadeamentos/solidez de saberes inerentes à Geometria esférica e de outros campos do conhecimento.

II.3 - METODOLOGIA DE PESQUISA

Devemos a Michèle ARTIGUE o conceito de Engenharia Didática, como uma metodologia de pesquisa [20].

A autora comparou essa metodologia ao trabalho de um "engenheiro que para realizar um projeto particular, apóia-se em conhecimentos científicos de seu domínio, submete-se a um controle científico, mas ao mesmo tempo, necessita trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos simplificados da ciência e,

[20] ARTIGUE, M., *Ingénierie Ddactique,* RDM 1988, v. 9, nº 3, p. 281 – 308.

portanto lidar com todos os meios de que ele dispõe, problemas que a ciência não quer ou não é capaz de manipular". (ARTIGUE, 1988, p. 283)

A Engenharia Didática possui como característica principal ser "um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, baseado na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino" (ibidem, p. 285). Outra particularidade é dada pelo registro dos estudos feitos do caso em consideração e validação que é, sobretudo, interna, por permitir a confrontação da análise *a priori* com a análise *a posteriori*.

Além disso, de acordo com a seqüência são distinguidos dois níveis: a micro-engenharia, que é local por considerar a complexidade dos fenômenos ocorridos em sala de aula e a macro-engenharia complementar à anterior, vincula-a aos fenômenos que se referem à duração nas relações ensino e aprendizagem. Uma pesquisa em engenharia possui quatro fases:

- Análises prévias.
- Construção e análise *a priori* das situações didáticas.
- Experimentação.
- Análise *a posteriori* e validação.

Em nossa pesquisa, as análises prévias se apoiaram em um quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos adquiridos a respeito do assunto em estudo e também em certas análises preliminares sobre:

- A análise histórica e epistemológica dos conteúdos abrangidos por essa pesquisa a respeito da Geometria riemanniana.
- A análise da Proposta Curricular Nacional para o Ensino Médio, de publicações acerca da Geometria esférica como livros didáticos e de complementação de estudos.
- A análise de pesquisas que se concretizaram em dissertações na área da Educação relativas às Geometrias não-euclidianas.

- A análise de algumas concepções dos professores acerca da Geometria esférica, com o intuito de obter subsídios para a elaboração de uma seqüência didática.

A finalidade da análise *a priori* é especificar de que maneira as escolhas feitas permitem controlar o comportamento dos alunos e o significado de cada um desses procedimentos.

Nessa pesquisa, orientados pelas análises preliminares, adotamos certas variáveis concernentes ao sistema, as variáveis potenciais: aquelas relativas à organização global da engenharia chamadas variáveis macrodidáticas ou globais e as pertinentes à organização pontual de uma sessão ou de uma fase que compõe a seqüência e que são denominadas variáveis microdidáticas ou locais.

Assim, após a análise dos entraves, optamos pelas seguintes variáveis macrodidáticas:

- Desenvolvimento da experimentação em grupos;
- Relação e comparação dos conceitos geométricos da Geometria esférica e da Geometria euclidiana;
- Validação pelos professores dos resultados obtidos e reforçados pela institucionalização do saber.

Como variáveis microdidáticas, buscamos estabelecer que, em cada sessão, seriam examinadas noções não-euclidianas, que desafiariam o enraizamento de certos conhecimentos euclidianos, provocando conjeturas sobre esses saberes.

Na análise *a priori*, o pesquisador descreve cada escolha local feita e as características de cada situação didática, analisa a importância dessas situações para o aluno e prevê os possíveis comportamentos durante o experimento.

A experimentação é a fase da realização da engenharia, no nosso caso, à população de seis professores do Ensino Médio da rede estadual de ensino da cidade de Arujá, São Paulo, na E.E. Prof. Esli Garcia Diniz em 2002, tendo sido planejada para seis sessões e, na primeira delas, foram explicitados os seus objetivos.

Foi estabelecido que as questões seriam debatidas em grupos, com a nossa possível intervenção, uma vez que a apresentação de novos conceitos poderia gerar dificuldades e ao final de cada atividade, haveria a exposição das soluções e dos questionamentos que poderiam ocorrer conjuntamente com a institucionalização do conhecimento.

Como ferramentas de pesquisa, seriam usados um globo terrestre grande e vários pequenos, diversos instrumentos de medição, tais como régua centimetrada, pedaço de barbante, tira de cartolina, fita métrica e transferidor, além de bolas de isopor e canetas coloridas.

As observações seriam registradas por duas professoras e, ao mesmo tempo, descritas em gravações, fotos e pelas construções efetuadas pelos docentes.

A análise *a posteriori* e validação foi composta por todos os dados recolhidos durante a experimentação, por meio de observações de cada sessão, das produções dos professores no local, de questões preliminares respondidas individualmente.

II.4 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

> *O aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento. Deve adquirir espírito de pesquisa e desenvolver a capacidade de raciocínio e autonomia.*
>
> *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*

Duas experiências nortearam esta pesquisa: a primeira com três alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da PUC-SP, que se realizou entre junho a agosto de 2002, em seis sessões, como parte da disciplina de Geometrias não-euclidianas. A finalidade desse primeiro experimento foi a de que com essa aplicação inicial de uma seqüência didática, pudéssemos analisar os entraves que ocorressem, proceder aos devidos ajustes e reaplicá-la, depois, definitivamente, no público-alvo pretendido. Na ocasião, observamos que:

- Na institucionalização, deveríamos incluir mais figuras, tendo sido uma solicitação dos alunos.
- A definição de triângulo esférico gerou incompreensões.
- Incertezas surgiram no que se refere aos triângulos degenerados, que, na ocasião, ainda não possuíam essa denominação: a abstração e, conseqüentemente, a representação de dois triângulos, sendo um deles com dois ângulos medindo 0° e o outro maior, com os três ângulos medindo 180°.
- Houve dúvidas quanto à construção de um triângulo isósceles com um dos vértices no pólo e a determinação da medida do ângulo que tem esse vértice.

Portanto, esses fatos nos levaram a refletir mais, reformularmos a seqüência didática, a fim de que pudéssemos realizar um novo experimento.

A segunda experiência iniciou-se com nove professores da rede pública estadual da cidade de Arujá, estado de São Paulo, ocorrida na E. E. Prof. Esli Garcia Diniz subordinada à D.E. de Jacareí. Por motivos particulares, somente seis professores participaram até o final do trabalho. Desses, quatro estavam lotados naquela escola e dois, na E. E. Prof. Edir Paulino de Albuquerque.

As atividades foram realizadas em seis sessões, a partir de 19/11/2002 e até 11/12/2002, perfazendo 19horas e 30 minutos de estudos, sendo encaminhadas e orientadas pela própria pesquisadora.

No primeiro encontro, no dia 19/11, por meio de uma entrevista com os professores, soubemos que uma professora exercia a profissão há 20 anos, dois deles há sete anos, uma há seis anos e outra há um ano e meio e todos, atuavam no Ensino Médio.

Auxiliando-nos, duas professoras como observadoras e como instrumentos para a coleta de dados, teríamos gravador de fita cassete, máquina fotográfica, anotações das observações e produções, quer escritas, quer construções nas bolas de isopor ou em outras superfícies realizadas pelos professores.

Além disso, iniciando a experimentação, explicamos sobre o tema e sobre as finalidades a que nos propúnhamos. Expusemos sobre Contrato Didático (BROUSSEAU, 1986, p.51), que é um contrato estabelecido entre pessoas, contendo regras, cláusulas implícitas e explícitas, que deverão ser obedecidas pelas partes envolvidas, ou seja, o professor e o aluno, sendo que um dos itens dele é que o trabalho seria desenvolvido em grupos. Por isso, eles se agruparam em três pessoas, tendo em cada grupo uma observadora.

Abordamos, ainda, a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por BROUSSEAU, (1986), por ser uma das teorias que direcionariam o experimento. A seguir, foram-lhes entregues questões chamadas Preliminares a serem respondidas individualmente (Anexo I).

As observadoras receberam folhas, contendo o Roteiro para o observador (Anexo II) com perguntas para orientá-las em suas anotações, bem como com espaço a serem completados com detalhes que seriam de importância como apoio na pesquisa.

Em continuidade, foram colocadas à disposição dos professores uma situação-problema gerada por esta pesquisa e depois a Atividade 01 com perguntas, envolvendo aquela situação e sobre os caminhos traçados por um ponto e por dois pontos quaisquer numa superfície esférica, sendo que esses saberes foram institucionalizados após discussões/validações.

No segundo dia, analisamos a Atividade 02, dividida em duas situações, contendo questões relativas à localização geográfica de um ponto no globo terrestre, tratando de Pólos, Equador, Meridianos, Paralelos, Latitude e Longitude de um local, circunferências máximas e semi-circunferências, procurando a articulação desses saberes.

No terceiro encontro, desenvolvemos as questões da Atividade 03 e da Atividade 04, sendo a primeira delas sobre distância entre dois pontos numa superfície esférica, as unidades de medida possíveis de serem utilizadas, bem como a construção da régua esférica para medir essa distância. A segunda atividade, formada por duas situações, referiu-se a Ângulos numa superfície esférica e a Triângulo esférico, sendo construído o transferidor esférico, como instrumento de medida. Durante as atividades aconteceram momentos simultâneos de institucionalização e validação dos saberes.

No quarto dia, abordamos as questões referentes à Atividade 05 e à Atividade 06. Na primeira, constituída por duas situações, procuramos estabelecer uma relação entre o arco de paralelo e o arco do Equador correspondente, o que nos levou à solução de um problema sobre a distância percorrida por dois navios. Na outra atividade, com a finalidade de obtermos a Relação Fundamental dos Triângulos esféricos, agrupamos, na relação anterior, todos os conceitos já vistos e mais conhecimentos sobre Trigonometria Plana; as institucionalizações realizaram-se passo a passo com as validações.

No quinto encontro, tratamos da Atividade 07, que reapresentou a situação-problema para ser solucionada, mediante a articulação entre todos os conhecimentos/saberes anteriormente abordados e a institucionalização ocorrendo ao mesmo tempo.

Vimos, também, as situações 1, 2 e 3 da Atividade 08, quando foram colocadas lado a lado as noções da Geometria euclidiana e da Geometria de RIEMANN, gerando reflexões/conjeturas/compreensões/novos saberes, bem como surgiram novas definições para o caso de uma superfície esférica, tais como: as de reta; de segmento de reta; da não existência de retas paralelas; de regiões, inclusive congruentes, e os ângulos determinados por elas; de retas perpendiculares; de polígono esférico; de quadrilátero; da impossível obtenção de um quadrado, segundo as concepções euclidianas, com as validações e as institucionalizações ocorrendo simultaneamente.

No último dia, estudamos as situações 4 e 5 da Atividade 08, que procurou explorar mais sobre os Triângulos esféricos: a soma das medidas dos seus ângulos internos, a classificação quanto aos ângulos e quanto aos lados e, ainda, investigar a semelhança e a congruência de triângulos esféricos e examinar a validade do Teorema de Pitágoras numa superfície esférica, sendo as validações institucionalizações feitas no transcorrer dos debates.

Acreditamos que, durante a experimentação, ocorreram interações entre a pesquisadora e o professor-aluno mediadas pelo saber e passíveis de levarem este último à apropriação/modificação de um conhecimento/saber pela investigação/reflexão que aliadas à crítica poderão auxiliar o professor na sua prática pedagógica, assim como foram vivenciadas todas as fases propostas por BROUSSEAU, a saber: de ação, de formulação, de validação e de institucionalização do conhecimento/saber.

CAPÍTULO III

FORMAÇÃO DE PROFESSORES

> *Formar-se nada mais é senão um trabalho sobre si mesmo, livremente imaginado, desejado e procurado, realizado através dos meios que são oferecidos ou que o próprio procura.*
>
> *G. Ferry*

Neste capítulo, inicialmente, conceituaremos "formação", segundo GARCÍA (1999) e detalharemos a Teoria de Britt-Mari BARTH (1993), que fundamenta esta pesquisa e está orientada para a formação de professores.

De acordo com GARCÍA (1999, p.26):

> A Formação de Professores é a área de conhecimentos, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda os processos através dos quais os professores - em formação ou em exercício - se implicam individualmente ou em equipa, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permite intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objectivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem.

No que concerne à concepção de professor como um profissional reflexivo e investigador de sua prática, adotaremos os estudos de Britt-Mari BARTH, que expõe acerca da construção do saber, colocando como foco a questão da compreensão no processo de ensino e aprendizagem, por meio de uma reflexão sobre o saber e a sua elaboração, assim como sobre as condições que permitirão conduzir o processo de construção de sentido, articulando com o papel de mediador que o professor pode ter nesse processo.

Essa autora pesquisou mais profundamente a Formação de professores, cujo desafio maior é "conseguir suscitar uma mudança conceitual na sua relação com o saber e a sua elaboração" (BARTH, 1993, p. 13).

Para tanto, levanta questões como: "Como é que o saber toma forma? É possível apanhá-lo em 'movimento' exatamente no momento em que se elabora?" (ibidem, p.61). Em outras palavras, sob que forma o saber se apresenta no decorrer da ação educativa? E, afinal, “o que é o saber?”

No meio escolar, observou que somente o saber construído é privilegiado, predominando a visão do saber como uma entidade validada representada pela soma dos nossos conhecimentos constituídos.

Contudo, há um outro aspecto, que parecemos esquecer, que é o do saber em construção, aquele que está a se estruturar no cérebro, que evolui, é provisório, é relativo ao tempo, ao contexto e à afetividade e necessita da mediação do outro, para se tornar um saber validado. (ibidem, p. 87)

Para tanto, o saber é qualificado, simultaneamente, como estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo, como alguns aspectos da natureza do saber.

O saber é estruturado, porque se estrutura como uma rede de interconexões (um conjunto organizado de elementos dependentes), cada pessoa cria sua própria rede associando tudo o que sabe ou sente em relação a uma idéia" (ibidem, p. 64).

O saber é evolutivo, pois, "é sempre provisório, não tem fim" e é produzido "segundo uma ordem pessoal e segundo a experiência de cada um". (ibidem, p. 65 - 66)

O saber é cultural, porque se constitui "pela interação com os outros 'membros’ da nossa cultura”. O saber não existe de modo isolado, ele é sempre partilhado e transforma-se, modifica-se a partir da troca de experiências e da reflexão coletiva com os outros. (ibidem, p. 66)

O saber é contextualizado, "porque ele é pessoal e o nosso primeiro encontro com um determinado saber (ou saber-fazer) surge em circunstâncias ao mesmo tempo afetivas, cognitivas e sociais. É este contexto que lhe irá dar sentido - ou não. O contexto e a compreensão dele que têm um papel muito importante na interpretação, como, aliás, na comunicação do sentido". (ibidem, p. 74 - 75)

A pesquisadora nos mostra a relevância do contexto na construção do saber, daí jamais podemos desligá-lo do saber que se ensina e é, também, "a razão pela qual o mediador deve poder separar o saber do contexto habitual para o inserir em outros contextos". (ibidem, p. 83)

O saber torna-se, portanto, "uma busca conjunta, uma penetração de um objeto de conhecimento comum, um processo de diálogo e de confrontação, de questões e de respostas". (ibidem, p. 92). Daí, a questão fundamental será “onde está o saber?”

O saber é afetivo, "quando invadido pela emoção, deixamos de o ver de maneira nítida, pois a dimensão afetiva domina-o e funde-se com ele. Confundimos então o saber com a emoção e interpretamos a realidade de modo meramente subjetivo. O modo como julgamos o valor de um saber, mas também o modo como sentimos o nosso próprio saber avaliado pelos outros, influenciará a nossa maneira de compreender a realidade nova" (ibidem, p. 83 - 84).

BARTH verificou, em suas investigações, a importância da interação entre os aspectos cognitivos e afetivos na aquisição dos conhecimentos; “um influencia o outro, um alimenta o outro” (ibidem, p. 182). Considera que, desde o momento em que surgem dificuldades de aprendizagem, o aluno deveria ser encorajado a utilizar o seu potencial de aprender, retirando o sentimento de incapacidade causado por elas.

O efeito disso é a modificação de atitudes e valores, favorecendo a aquisição de conhecimentos. Portanto, é essencial fazermos emergir valores, como a autoconfiança pela valorização de si mesmo; reforçar atitudes como a participação ativa do educando no desenrolar das atividades, representada pelo alto nível de concentração dele, pelo entusiasmo em participar das discussões, pelo sentimento de prazer e confiança em produzir suas soluções e partilhá-las com os outros. Esses são alguns indicadores do que a pesquisadora denominou de motivação intrínseca.

Em prosseguimento, na parte II - A experimentação - pretendemos discorrer sobre a elaboração, a aplicação e a análise da seqüência didática gerada por esta pesquisa, a qual é constituída por atividades, algumas, também, contendo situações, com objetivos, análise *a priori* e *a posteriori* das mesmas.

PARTE II – A EXPERIMENTAÇÃO

As leis geométricas falam a linguagem da crença - da crença forte, apaixonada, duradoura. Nelas as leis eternas da proporção e da simetria reinam supremas. O ciclo daquilo que é gerado divinamente está reproduzido na linguagem numérica do coro, do transepto, da nave, do corredor, do portal, da janela, da coluna, da arcada, do frontão e da torre. Toda característica tem sua unidade de medida, seu simbolismo místico.

Hermon Gaylord Wood

CAPÍTULO IV

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

O que experenciamos é determinado pela linguagem teórica através da qual nos socializamos profissionalmente.

E. Eisner

Neste capítulo apresentamos a elaboração, a aplicação e a análise da seqüência didática gerada por esta pesquisa, contendo conhecimentos de Geometria esférica e que tem como objetivos:

- Propiciar aos professores a construção de conhecimentos/saberes acerca de uma Geometria não-euclidiana numa superfície esférica.
- Propor atividades que possam promover a interdisciplinaridade entre a Geometria e outros ramos do conhecimento.
- Buscar, por meio da Teoria das Situações Didáticas, momentos de ação, formulação validação e institucionalização do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em questão.

A elaboração e a experimentação desta seqüência fundamentou-se na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy BROUSSEAU (1986), que tem como foco as situações didáticas definidas como "o conjunto de relações estabelecidas, explicitamente e/ou implicitamente, entre um aluno ou grupo de alunos, um certo meio (contendo, eventualmente, instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para fazer adquirir, por esses alunos, um saber constituído ou em constituição". A finalidade desta teoria é:

> ... caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo, freqüentemente, à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos e determinar modelos (de alunos, de professores, de concepções da matéria a ensinar), na medida em que o processo é conhecido nos seus princípios e não na sua materialidade e as leis que regem esses modelos, ou seja, caracterizar a organização do meio que permite a aprendizagem de um dado saber matemático. (ALMOULOUD, 2000, p. 98)

A partir das interações com o meio já mencionadas, o processo de ensino e aprendizagem abrange quatro fases distintas, mas interligadas: de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

Nas situações de ação, o professor propõe um problema ao aprendiz de tal maneira que este possa agir, refletir sobre o resultado obtido e ajustá-lo, se necessário, sem que o professor intervenha.

Nas situações de formulação, o aluno troca informações com uma ou várias pessoas, em linguagem natural ou matemática, cujo resultado é um modelo que contém sinais e regras comuns, conhecidas ou não.

Nas situações de validação, o aprendiz submete o seu modelo ao julgamento de um interlocutor, podendo ocorrer, nessa fase, debates, maiores explicitações sobre a solução que ele obteve e até a rejeição, se a solução não for adequada.

Nas situações de institucionalização, o saber é fixado, convencional e explicitamente, pelo professor e torna-se saber oficial, que deverá ser retido pelos alunos e poderá ser utilizado na resolução de problemas. Fundamental, observarmos o papel do professor, na fase de institucionalização, pois, se feita muito cedo, ela interromperá a construção do saber, causando dificuldades para o professor e para o aluno; se tardiamente, reforça interpretações incorretas, atrasa a aprendizagem e dificulta as aplicações.

BROUSSEAU distingue "saber" de "conhecimento", primeiramente, pelo seu estatuto cultural, porque um saber é um conhecimento institucionalizado. "A passagem de um estatuto a outro implica, no entanto, em transformações que as diferenciam e que se explicam em parte pelas relações didáticas que se estabelecem". (BROUSSEAU, 1986, p. 97)

Com respeito ao saber, acreditamos haver uma semelhança entre as teorias de BARTH e de BROUSSEAU, porque a primeira autora superlativa o saber em construção com seus aspectos estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo, ocorrendo ao mesmo tempo.

O segundo autor pressupõe que o saber é construído, perpassando pelas etapas de ação, formulação, validação, para depois ser institucionalizado. Dessa maneira, quando nos referirmos ao saber, estaremos contemplando os pontos de vista dos dois autores.

No decorrer da análise, enfatizaremos os momentos de formulação, validação e de institucionalização, em virtude da fase de ação estar explícita durante a execução da tarefa.

Também importante é a situação adidática, integrante de uma situação didática. Nela não existe a intenção de ensinar, porém ocorre o processo de aprendizagem no qual a escolha de um problema pelo professor permite que o aluno aja/fale/reflita/evolua por si mesmo, adquira, enfim, independentemente, um novo conhecimento.

BROUSSEAU faz considerações fundamentais a respeito do erro, quando da aquisição e domínio de novos conhecimentos:

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso (...), mas o efeito de um conhecimento anterior que tinha o seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptável. Os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, eles se constituem em obstáculos. Tanto no funcionamento do mestre como naquele do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido (BROUSSEAU, 1983, p. 171).

Além disso, "estes erros, num mesmo sujeito, são ligados entre eles por uma fonte comum: uma maneira de conhecer uma concepção característica, coerente senão correta, um 'conhecimento' antigo que deu certo em toda uma área de ações." (ibidem, p. 173 - 174)

Baseados nesta concepção de erro é que não pretendemos computar o "certo" e o "errado", transformando-os em taxas. Não apontaremos como erros saberes provisórios, que estão a se estruturar ou conhecimentos anteriores a receberem novos significados.

A análise de cada uma das atividades da seqüência foi regida pela Metodologia de Pesquisa denominada Engenharia Didática e constituída pelas seguintes fases: análise *a priori*, na qual prevemos os possíveis métodos/estratégias de resolução de cada situação e os conhecimentos mobilizados em cada uma; pressupomos as dificuldades surgidas na solução de cada situação; identificamos os novos conhecimentos/saberes que poderão ser adquiridos; prevemos como institucionalizar esses conhecimentos/saberes.

Outra fase é a análise *a posteriori* apoiada nos dados obtidos na experimentação, por meio de observações, das produções dos professores e das discussões ocorridas durante os encontros. A confrontação dessas análises possibilitará a validação das nossas hipóteses de pesquisa.

Assim sendo, construímos a seqüência didática com uma situação-problema detonadora e mais oito atividades, sendo algumas compostas de mais de uma situação, tal que permitissem buscar a solução do problema dado.

Decidimos iniciar por uma situação-problema baseados nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio que apontam a resolução de problemas como uma importante estratégia de ensino, porque os aprendizes diante de uma situação-problema nova:

> ... aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e argumentação.(PCN, 1999, p.266).

SITUAÇÃO-PROBLEMA[21]

> O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: *localizados náufragos numa ilha de coordenadas $_{I}$ = 68° 40'N e $_{I}$* = 013°40'E. Naquele momento, a posição do navio era $_{N}$ = *42°10'N e $_{N}$ = 051°20'W* . Que distância o navio deverá percorrer para chegar à ilha?

Esta situação teve como objetivos:

- Fazer emergir outras Geometrias e, portanto, novos conhecimentos que permitam solucionar problemas que a Geometria euclidiana não consegue.
- Promover a interdisciplinaridade entre a Geometria esférica e a Geografia, por meio da manipulação de instrumentos adequados.
- Observar os procedimentos apresentados pelos professores e os conhecimentos mobilizados.
- Dar significado à seqüência em sua totalidade.

Para a representação desta situação, foi usado como modelo um triângulo de vértices P, N, I, correspondendo, respectivamente, a um pólo, à posição do navio e à posição da ilha. Esse triângulo ficou sobre uma superfície esférica, o globo terrestre, sendo denominado triângulo esférico, por seus lados serem arcos de circunferências máximas, ou seja, segmentos de reta, segundo o sentido dado por RIEMANN.

Então, para solucionarmos este problema, necessitamos compartilhar de alguns novos conhecimentos vindos da Geometria esférica, tais como: numa superfície esférica, há infinitos caminhos distintos passando por um ponto qualquer e aqueles de comprimento máximo serão chamados circunferências máximas ou geodésicas. Essas geodésicas serão as retas de RIEMANN e terão comprimento determinado que poderá ser dado em graus ou radianos. Além disso, o menor caminho que liga dois pontos distintos é um arco de circunferência máxima, que será um segmento; duas circunferências máximas têm sempre dois pontos de interseção e, portanto, não existirá paralelismo entre retas nessa superfície.

---

[21] Esta situação foi adaptada de COUTINHO, L., *Convite às Geometrias não-euclidianas, 2001, p. 99.*

Vimos, ainda, que o encontro de duas circunferências máximas formou um ângulo esférico e do encontro de três circunferências máximas surgiu um triângulo esférico (sob mais algumas condições). O estudo desses triângulos nos conduziu às conclusões de que: existem triângulos com um ângulo reto, com dois ângulos retos e com três ângulos retos; a soma das medidas de seus ângulos internos foi um valor entre 180° e 540° e que a soma das medidas de seus ângulos externos foi um valor entre 0° e 360°.

Concluímos que existe congruência entre dois triângulos (quatro possibilidades), mas não semelhança; que é possível construirmos um polígono de dois lados, mas não um quadrado! Que o Teorema de Pitágoras não é aplicável a um triângulo esférico retângulo.

Utilizando as orientações dadas pela interdisciplinaridade, notamos as conexões muito estreitas entre a Geometria esférica e a Geografia, o que percebemos ao analisarmos a posição do navio e da ilha sendo dada pelas suas coordenadas geográficas, isto é, latitude e longitude de ambos. Estas foram definidas a partir de entes como Pólos, Equador, Meridianos, Paralelos terrestres e tendo como referencial o Meridiano de Greenwich. Por isso, cremos que os professores puderam adquirir conhecimentos básicos acerca dessa Geometria que se tornaram saberes oficiais.

Aos professores foram cedidos um globo terrestre grande e seis pequenos, para serem manipulados e favorecerem as discussões e conclusões.

Análise *a priori*

Acreditávamos que os professores apenas discutissem as condições do problema; procurassem reconhecer as letras gregas e , respectivamente, como latitude e longitude de um lugar, no globo terrestre, dando o significado delas, como, por exemplo, latitude sendo "distância em graus de um lugar até o Equador" e longitude como "distância em graus até o Meridiano de Greenwich", conforme vimos; identificassem as direções dadas pelas letras N, E e W como norte, leste e oeste, respectivamente e se consideravam a situação rotineira ou não. Para tanto, necessitariam mobilizar os conhecimentos previamente tratados em Geografia, contemplando a interdisciplinaridade com essa área do conhecimento.

Além disso, julgávamos que os professores, por razão de seus conhecimentos em Geometria euclidiana, não conseguissem resolver o problema, esperávamos apenas que levantassem hipóteses e percebessem que novos conhecimentos seriam necessários.

Provavelmente, poderiam surgir dificuldades ao associarem as letras gregas e como latitude e longitude de uma localidade, na superfície terrestre, assim como verificariam que a distância do navio até a ilha não poderia ser determinada da maneira usual.

Análise *a posteriori*

Observamos, durante a experimentação, que cinco professores não reconheceram as letras gregas e , entretanto as letras N, E e W o foram por três deles como sendo Norte, Leste e Oeste, respectivamente. Por esse motivo, explicitamos que as letras gregas e representavam, respectivamente, a latitude e a longitude de um lugar.

Durante a execução desta situação-problema, os professores vivenciaram situações de ação, ao discutirem e refletirem, na busca de sua solução; de formulação, na qual, por intermédio de discussões entre si, tentaram identificar elementos conhecidos que permitissem solucionar o problema, acontecendo questionamentos como estes: “a latitude é horizontal ou vertical? norte é latitude ou longitude?” Também ocorreu a etapa de validação, no momento de institucionalização, quando retomamos as questões que os professores haviam respondido nas Preliminares (Anexo I) e as definimos conjuntamente, tentando discutir os erros por nós já mencionados anteriormente. Assim foi institucionalizado que:

Circunferência de centro O e raio r, no plano, é o conjunto de pontos situados a uma mesma distância (r) de um ponto fixo (O), conforme Figura 17.

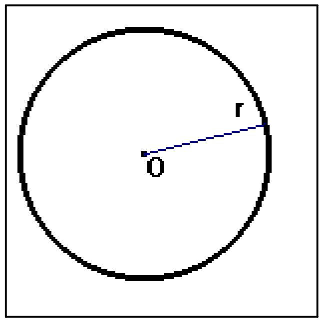


FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Círculo (ou disco) é a reunião dos pontos da fronteira da circunferência com os pontos do seu interior, como a Figura 18.

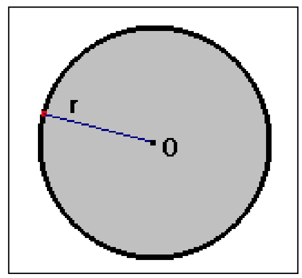


FIGURA 18 – REPRESENTAÇÃO DE UM CÍRCULO

Esfera de centro O e raio r (Figura 19) é o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância de O até P seja menor ou igual a r , isto é, d (O,P) r. Podemos afirmar, da mesma forma, que a esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semi-círculo, em torno de um eixo, que contém um de seus diâmetros.

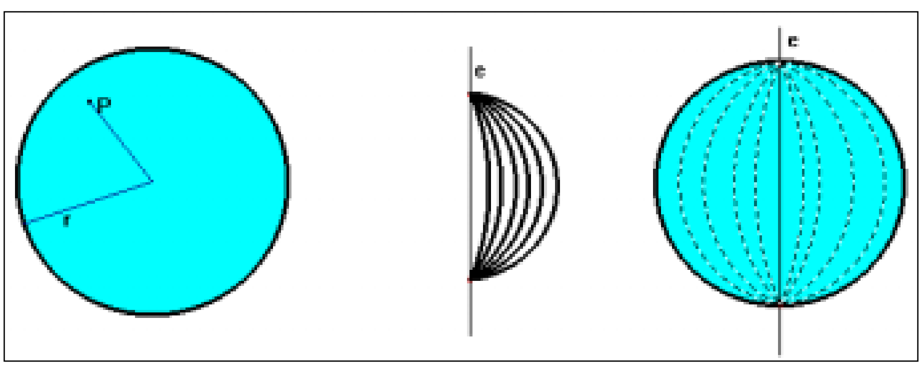


FIGURA 19 – REPRESENTAÇÃO DE UMA ESFERA

Superfície esférica de centro O e raio r (Figura 20) é o conjunto de pontos P do espaço, que distam r do ponto O, isto é, d (O, P) = r. Ela é, igualmente, uma superfície gerada pela rotação, em torno de um eixo, de uma semi-circunferência com as extremidades no eixo.

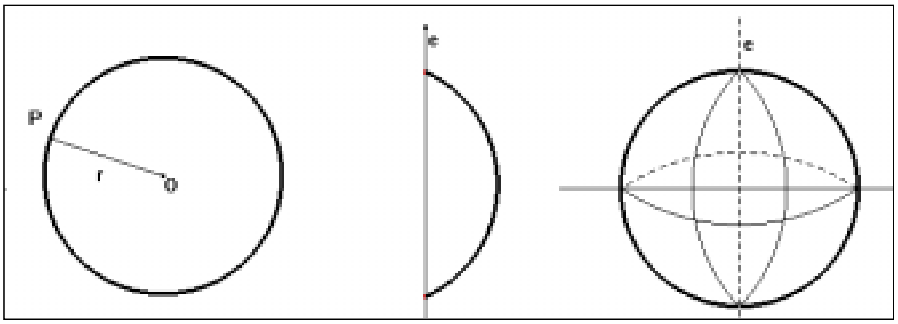


FIGURA 20 – REPRESENTAÇÃO DE UMA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Conforme as pesquisas de BARTH, o saber foi estruturado, mostrou-se evolutivo, contextualizado e cultural, pois os professores procuraram organizá-lo, cada um criando suas próprias idéias, dialogando, argumentando, com interações entre os membros dos grupos, associando os conhecimentos que possuíam aos novos que surgiram e com o contexto dando significado à situação-problema.

Procurando solucionar a situação-problema dada, elaboramos a Atividade 01, que contém duas situações:

Situação 1

a) Para resgatar os náufragos você acha que o percurso do navio deverá ser em linha reta? Justifique.
b) Em Geometria, qual a figura que você usaria para modelar esse problema? E essa figura pode ser uma figura plana?
c) Como você desenharia a situação do problema?

Esta situação teve como finalidades:

- Verificar que, em vista da forma "esférica" da Terra, o percurso do navio será dado por uma figura não-plana.
- Representar, no plano, a trajetória descrita pelo navio até a ilha.

Para esta situação, foram fornecidos, aos professores, um globo terrestre grande, seis globos pequenos, bolas de isopor de 25 cm e 15 cm de diâmetro e canetas coloridas, para manipulação e auxiliarem na solução.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que alguns professores responderiam que "não" e justificassem, a partir da forma arredondada da Terra e outros que "sim", em virtude do conhecimento proveniente da Geometria euclidiana de que a menor distância entre dois pontos é dada por um segmento de reta.

No item (b) e (c), poderiam usar, como modelo para a situação, figuras planas como um "segmento" de extremidades dadas pela coordenadas do navio e da ilha como a figura a seguir:

N_________________ I ou I_________________ N

Ou por um "triângulo" de vértices O, N e I, no qual O corresponderia à localização de um observador, N ao navio e I à ilha como a Figura 21:

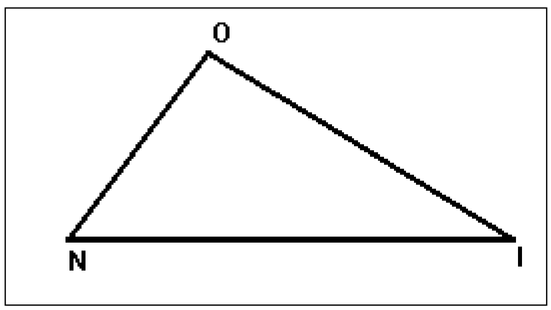


FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO DO TRIÂNGULO INO

Ou, ainda, poderiam pensar num globo terrestre e representá-lo como na Figura 22.

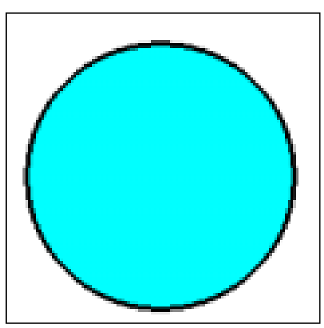


FIGURA 22 – REPRESENTAÇÃO DE UM GLOBO TERRESTRE

Entretanto, gostaríamos que eles percebessem que o percurso do navio até a ilha seria feito por um arco de circunferência máxima, conforme mostra a Figura 23.

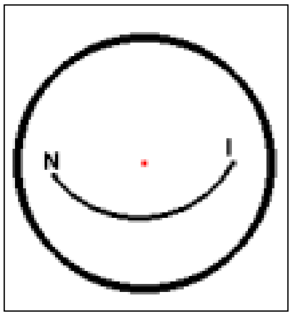


FIGURA 23 – REPRESENTAÇÃO DE UM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Para tanto, mobilizariam conhecimentos euclidianos de ponto, plano, curvas, figuras planas (especialmente, o triângulo) e figuras não-planas. Além disso, achávamos que dificuldades surgiriam na identificação do caminho percorrido pelo navio até a ilha como um arco de circunferência, na representação de uma figura não-plana no plano e na compreensão da esfera como um modelo da situação.

Análise *a posteriori*

A primeira atitude tomada pelos professores, de posse do material fornecido, foi a de retomarem as definições discutidas na institucionalização da situação-problema.

No item (a), para saberem se o percurso do navio até a ilha deveria ser em linha reta, eles debateram e procuraram manipular o globo terrestre, sendo que os professores (A, B) responderam "sim" e outros quatro, "não".

No item (b), sobre que figura eles usariam para modelar essa situação, (D, E, F) concluíram que utilizariam uma esfera; (A) usaria um fuso esférico, talvez se referindo à "parte da superfície esférica limitada por dois planos, cuja interseção contém um diâmetro dessa superfície" (YOUSSEF et all, p. 346); (B) usaria um referencial cartesiano, onde N e S seriam o eixo y e L e W seriam o eixo x, mostrando, claramente, o modelo plano para a situação.

Sobre se essa figura pode ser plana, (C) respondeu "sim" e (D, E, F), "não", sendo coerentes com a resposta dada anteriormente. Os professores (A, B) não responderam a essa segunda pergunta.

No item (c), (C) representou por uma figura irregular; (D, E, F) desenharam uma ilha e um navio destacando a forma em arco, talvez para evitar qualquer incompreensão a respeito dos objetos tratados (não deixar dúvidas), entretanto sem inseri-los numa superfície esférica, como na figura feita por (D):

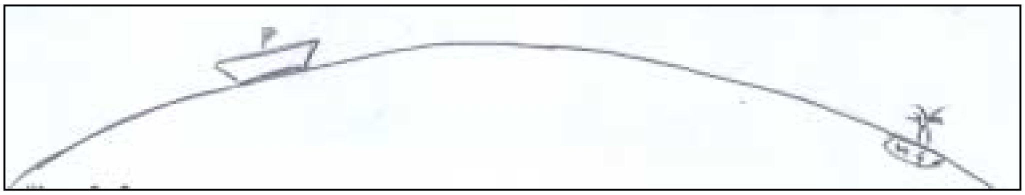


FIGURA 24 – PROTOCOLO REFERENTE AO DESENHO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Já o professor (B) representou a situação-problema por um sistema de coordenadas cartesianas, como na Figura 25, sendo coerente com a afirmação que havia dado:

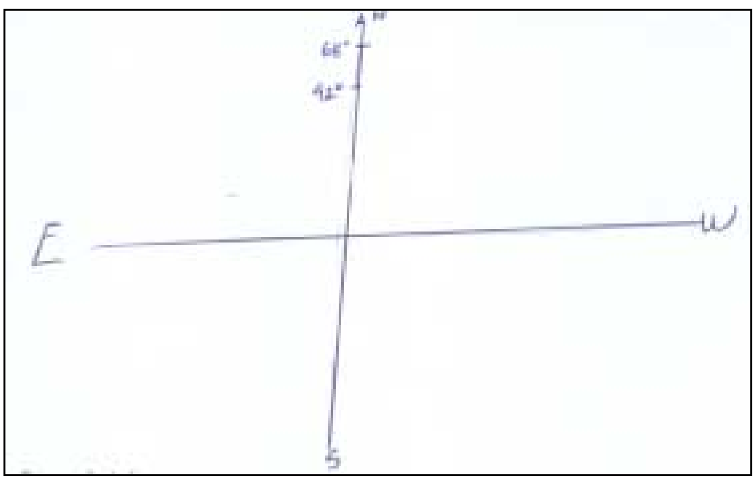


FIGURA 25 – OUTRO PROTOCOLO REFERENTE AO DESENHO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

O professor (A), representou pelo fuso esférico que mencionara no item anterior, conforme Figura 26.

FIGURA 26 – OUTRO PROTOCOLO REFERENTE AO DESENHO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Durante a aplicação, percebemos que, ao falarem sobre "curvas", não incluíram a reta, sendo, então, questionados a respeito.

As conclusões apresentadas pelos professores nos mostraram o saber em todas as suas formas (estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo). Um exemplo disso, pôde ser observado quando os professores deram a trajetória do navio até a ilha como sendo em forma de arco. Para tanto, elaboraram um novo significado ao que possuíam, ao mesmo tempo, em que ocorreu a interação entre todos os membros dos grupos, facilitada pela contextualização da situação proposta.

No decorrer da experimentação, os professores vivenciaram momentos de formulação em que, na busca de uma solução, debateram entre si e chegaram a conclusões tais como, no item (a): que “se o referencial for a bordo do navio o percurso é linha reta, visto de fora do navio é uma curva" dada pelo professor (A), que "a distância do navio até o náufrago é uma trajetória curva″ dada por (D) e "porque em qualquer ponto que o náufrago estiver a trajetória é curva″ dada por (E).

Na fase de validação, eles apresentaram suas soluções e seus argumentos, ao julgamento da pesquisadora, ocorrendo, a partir daí, a institucionalização daquelas consideradas adequadas, a saber: o percurso do navio até os náufragos não deveria ser em linha reta e sim, em um arco de circunferência, em virtude da forma "esférica" do globo terrestre e o modelo dessa situação seria dado por um arco de circunferência de extremidades N e I, correspondendo, respectivamente, às coordenadas do navio e da ilha em uma superfície esférica, por sua vez uma figura não-plana, cuja representação poderia ser dada pela Figura 27.

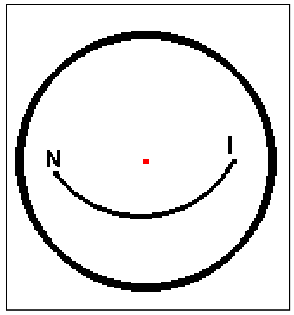


FIGURA 27 – REPRESENTAÇÃO DE UM ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Esclarecemos que não estamos considerando como erros as incoerências encontradas nas respostas como, por exemplo, o caso dos professores (A, B) que associaram a distância entre o navio e a ilha à distância entre dois pontos dada pela Geometria euclidiana e que (A), no item seguinte, modelou a situação como uma esfera. Entendemos que houve aqui a estruturação de um novo saber ao atribuírem um novo significado ao que já conheciam.

Situação 2

a) Marque um ponto, no espaço abaixo. Quantos caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto? b) Você recebeu uma superfície esférica. Marque um ponto nela. Quantos e que tipos de caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto? Esses caminhos têm comprimento finito? c) O problema lhe dá dois pontos distintos numa superfície esférica. Ligue-os por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem comprimento finito? d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantos caminhos você obteve? É possível determinar o comprimento deles? e) Se considerarmos dois caminhos distintos, numa superfície esférica, eles têm ponto de interseção?

Esta situação teve os seguintes objetivos:

- Descrever e definir os caminhos que passam por um ponto e por dois pontos distintos numa superfície esférica.
- Conceituar concorrência entre duas circunferências máximas numa superfície esférica.

Nessa situação, os professores receberam bolas de isopor de 25 cm e 15 cm de diâmetros e canetas coloridas, cuja manipulação acreditávamos que iriam facilitar as reflexões/conclusões das questões propostas.

Análise *a priori*

No item (a), esperávamos que os professores respondessem que "infinitos caminhos" poderiam ser traçados por um ponto, em um plano, conforme Figura 28 por ser um postulado da Geometria euclidiana.

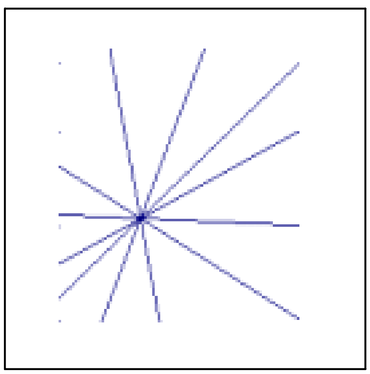


FIGURA 28 – REPRESENTAÇÃO DE INFINITOS CAMINHOS POR UM PONTO

No item (b), embora a situação se passasse numa superfície esférica, esperávamos que eles dissessem que por um ponto poderiam ser traçados infinitos caminhos de comprimento finito (Figura 29), tais como: circunferências menores e circunferências maiores, o que seria comprovado pela utilização da bola de isopor.

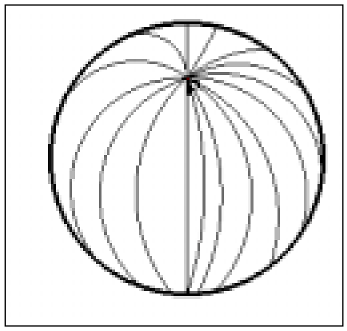


FIGURA 29 – REPRESENTAÇÃO DE INFINITAS CIRCUNFERÊNCIAS POR UM PONTO

No item (c), possivelmente, eles concluiriam que dois pontos numa superfície esférica poderiam ser ligados por "infinitos caminhos, todos de comprimento finito, sendo o menor deles dado por uma curva", ou outros diriam que esse menor caminho seria dado por um "arco de circunferência", como mostra a Figura 30, o que aguardávamos que concluíssem. Achávamos que as respostas teriam a visualização facilitada pelo uso da bola de isopor.

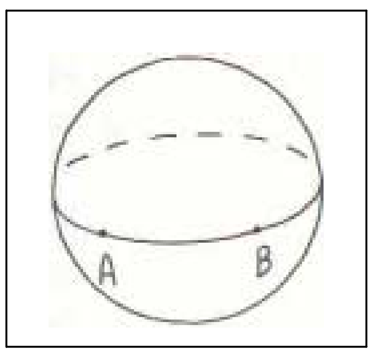


FIGURA 30[22] – REPRESENTAÇÃO DO MENOR CAMINHO ENTRE DOIS PONTOS

No item (d), alguns professores poderiam responder que, se prolongarmos esse menor caminho nos dois sentidos, obteríamos "infinitos caminhos", se não tivessem compreendido que o menor caminho é um arco de circunferência. Para outros, a resposta seria "dois caminhos" somente, ou seja, o caminho de A até B e o

[22] Esta figura foi retirada do livro de LÉNÁRT, I. *Non-euclidean Adventures on the Lénárt Sphere,* 1996, p. 15.

de B até A, circundando a superfície esférica e que seria a resposta adequada. Em ambos os casos, os comprimentos desses caminhos poderiam ser determinados.

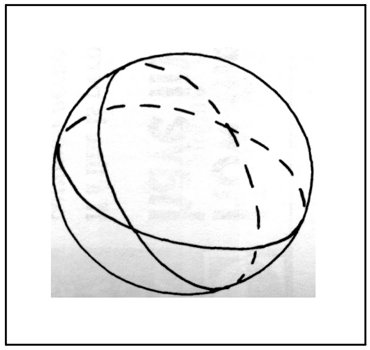


FIGURA 31[23] – REPRESENTAÇÃO DA INTERSEÇÃO DE DOIS CAMINHOS

No item (e)**,** uns professores poderiam dizer que dois caminhos distintos, numa superfície esférica, se interceptariam em "um ponto", se considerassem os caminhos dados, apenas, por semi-circunferências. No entanto, esperávamos que outros respondessem que esses caminhos teriam "dois pontos" de interseção, como mostra a Figura 33, o que seria observado na utilização das bolas de isopor.

Julgávamos que essa questão seria provocadora e romperia com os conhecimentos da Geometria euclidiana acerca de retas concorrentes.

Nessa situação, os professores mobilizariam os conhecimentos da Geometria euclidiana sobre caminhos e a medida do comprimento deles, circunferência e superfície esférica.

Acreditávamos, inclusive, que dificuldades poderiam ocorrer na escolha do menor caminho entre os infinitos caminhos traçados entre dois pontos, o que os conduziria a associá-lo à medida da distância entre dois pontos, numa superfície esférica ainda não abordada. Outro impasse seria verificarem que dois caminhos de comprimento máximo sempre se interceptam em dois pontos, gerando polêmica, por romper com os conhecimentos euclidianos sobre a concorrência entre retas.

Análise *a posteriori*

[23] Ibidem, p. 28.

Anteriormente à discussão das questões, os professores retomaram as conclusões obtidas na situação 1.

Após reunirmos os dados obtidos pelas verificações e produções dos participantes, durante o experimento, elaboramos a tabela a seguir:

TABELA 2 – RESULTADOS DA SITUAÇÃO 2

QUESTÕES	CAMINHOS		TIPOS DE CAMINHOS			POSSÍVEL DETERMINAR O COMP.
	Dois	Infinitos	Circulares	Infinitos	Sem resp.	
a	0	6	0	0	0	0
b	0	6	3	1	2	6
c	0	0	0	0	0	6
d	3	3	0	0	0	6

FONTE: formulário de respostas dos professores
NOTA: participaram desta atividade seis professores

A tabela nos leva a deduzir pelas respostas dadas no item (a), que, “por um ponto, no plano, podem ser traçados infinitos caminhos”.

No item (b), quando da transposição de um conhecimento dado numa superfície plana para uma superfície esférica, os professores inferiram, adequadamente, que existem "infinitos caminhos de comprimento determinado, passando por um ponto de uma superfície esférica" e esses caminhos podem ser “circulares e de infinitos tipos”. O professor (A) disse que eles são do tipo "arco de circunferência".

Em (c), depois de ligarem dois pontos distintos por vários caminhos, isto é, infinitos caminhos, os professores (D, E) responderam que o menor caminho que liga dois pontos distintos, numa superfície esférica, é "a menor distância"; (F) que é "a distância entre eles", associando com distância entre dois pontos; (A) que é "o de comprimento menor" e (B) que é um "setor circular", todos reforçando a possibilidade do caminho ser finito, ou seja, ter comprimento determinado.

No item (d), ao prolongarem o menor caminho entre dois pontos distintos, entretanto, para alguns professores, não pareceu claro que obteriam dois caminhos, achando que poderiam ser vários tipos de curvas, confirmando a nossa análise a priori, porque não observaram que esse caminho é dado por um arco de circunferência. Com referência ao comprimento desse caminho a noção de finitude pareceu consolidada.

Em (e), os professores (A, B) responderam que dois caminhos distintos, numa superfície esférica, têm "dois pontos de interseção"; (E, F), que "depende do caminho que vai ser traçado"; (C), que "depende do ponto que pegarmos" e (D), que "pode ter ou não ter". Aguardávamos essas respostas, uma vez que poderia ocorrer uma ruptura na noção de concorrência entre retas da Geometria euclidiana e aproveitamos para questioná-los sobre como seria a interseção se os dois caminhos fossem circunferências máximas.

Assim, o saber mostrou-se estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo, a partir da elaboração que cada professor fez dos conhecimentos tratados nesta situação, segundo suas experiências e concepções, como é o caso, de que "existem infinitos caminhos passando por um ponto numa superfície esférica".

Alguns professores concluíram, adequadamente, que "por dois pontos distintos de uma superfície esférica passam infinitos caminhos" e que "o menor caminho que liga dois pontos distintos é o de comprimento menor", mostrando o aspecto provisório do saber anteriormente adquirido de que, na Geometria euclidiana, há um único caminho que liga dois pontos numa superfície plana; o saber foi partilhado e o contexto permitiu que fosse dado significado a esse saber.

Nesta fase do experimento, a situação didática proporcionou que os professores vivenciassem as fases de ação, de formulação, por exemplo, quando o professor (A) afirmou, no item (b), que os caminhos distintos que podem ser traçados por um ponto, numa superfície esférica, são do tipo "arco de circunferência"; de validação e de institucionalização realizadas conjuntamente, ficando determinado que:

Por um ponto P, numa superfície esférica, passam infinitos caminhos (conforme a Figura 32) e aqueles de comprimento máximo são chamados de circunferências máximas ou geodésicas da superfície esférica.

FIGURA 32- PROTOCOLO REFERENTE A INFINITOS CAMINHOS TRAÇADOS POR UM PONTO

Por dois pontos distintos A e B, numa superfície esférica, existem várias possibilidades de caminhos. Dizemos que o menor caminho entre dois pontos distintos, numa superfície esférica, é um arco de circunferência. Prolongando-se esse menor caminho, nos dois sentidos, as suas extremidades se encontram, determinando dois arcos de comprimento finito, como vemos na Figura 33.

FIGURA 33 – PROTOCOLO REFERENTE À EXISTÊNCIA DE INFINITOS CAMINHOS POR DOIS PONTOS

Vimos, também, que duas circunferências máximas distintas têm, exatamente, dois pontos de interseção.

Finalizando, não atribuímos erros às conclusões dadas pelos professores. No item (b), por exemplo, alguns inferiram que, por um ponto de uma superfície esférica, poderiam ser traçados infinitos caminhos do tipo circular. No item (e)**,** em que uns para responderem se dois caminhos têm ponto de interseção, disseram que "depende do caminho que vai ser traçado".

Em vista disso, indagamos o que aconteceria se esses caminhos fossem circunferências máximas somente. Compreendemos que se tratava da estruturação de um novo saber, que, em alguns casos, teve que romper com saberes previamente construídos.

No segundo dia, abordamos a Atividade 02 constituída por duas situações.

Situação 1

a) O globo terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam as interseções do globo com esse eixo? b) Localize e caracterize o Equador. c) Identifique que tipos de circunferências você vê na superfície do globo terrestre. d) Quais das circunferências são denominadas paralelos terrestres? e) Quais das circunferências são denominadas Meridianos?

Esta situação teve como objetivos:

- Localizar e definir os Pólos terrestres.
- Identificar e definir o Equador, os Paralelos Terrestres e os Meridianos, no globo terrestre, relacionando-os às circunferências e semi-circunferências máximas.

Para tanto, foram cedidos aos professores um globo terrestre grande e seis globos pequenos, com o intuito de facilitar as reflexões/conclusões deles, o que a manipulação desses materiais promoveria.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que todos os professores respondessem que as interseções do globo terrestre com o seu eixo de rotação são chamadas de pólos, por serem objetos de estudo da Geografia, desde o Ensino Fundamental, como vemos na Figura 34.

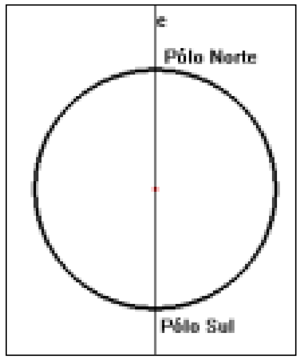


FIGURA 34 – REPRESENTAÇÃO DOS PÓLOS TERRESTRES

Em (b), esperávamos que eles localizassem corretamente o Equador, mas a caracterização, para alguns, poderia ser como "arco de circunferência que divide o globo em dois hemisférios", para outros como "circunferência máxima que separa o globo em dois hemisférios", o que esperávamos, em virtude desses termos já terem sido institucionalizados anteriormente (veja Figura 35). Ainda, para outros, como "linha imaginária que divide o globo em dois hemisférios", por ser uma das definições dadas em Geografia.

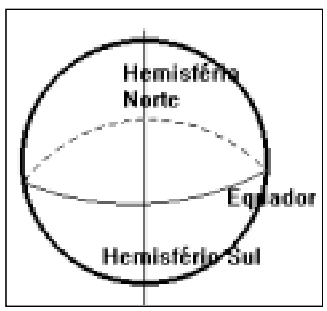


FIGURA 35 – REPRESENTAÇÃO DO EQUADOR E DOS HEMISFÉRIOS

No item (c), acreditávamos que identificassem os tipos de circunferências vistas na superfície do globo terrestre como circunferências máximas ou maiores e circunferências menores, em vista das primeiras já terem sido definidas na atividade que antecedeu a esta.

Em (d), possivelmente, os professores denominariam os Paralelos terrestres como "circunferências de raios menores", uma vez que já haviam percebido a existência de circunferências de raios distintos e necessitariam complementar que essas circunferências deveriam ser "paralelas" ao Equador, como a Figura 36.

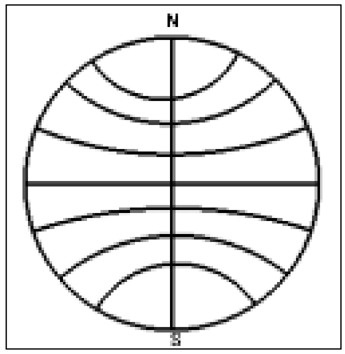


FIGURA 36 – REPRESENTAÇÃO DOS PARALELOS

Em (e), provavelmente, os Meridianos seriam denominados, por alguns, como "circunferências de raios maiores" ou "circunferências máximas que passam pelos pólos", por outros como "semi-circunferências máximas que passam pelos pólos", como esperávamos que fizessem, como mostra a Figura 37.

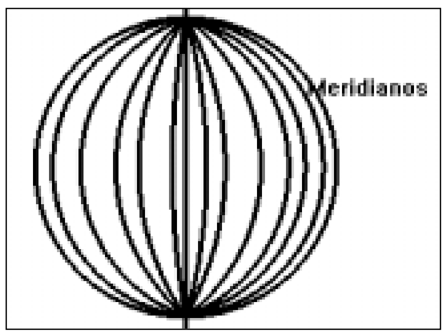


FIGURA 37 – REPRESENTAÇÃO DOS MERIDIANOS

Para isso, os professores mobilizariam os conhecimentos advindos da Geografia, tais como, pólos, eixo de rotação terrestre, Equador, Meridianos e Paralelos terrestres, bem como sobre circunferências e semi-circunferências máximas já estudados anteriormente.

Além disso, possivelmente eles teriam dificuldades para definirem os Meridianos como semi-circunferências máximas e os considerariam como circunferências máximas, se não tivessem observado que uma das definições dada em Geografia é que "são semi-círculos imaginários traçados sobre a Terra de pólo a pólo", como vimos.

Análise *a posteriori*

No item (a), todos os professores responderam que as interseções do globo terrestre com seu eixo de rotação são os pólos, conforme esperávamos.

Na questão (b), os seis professores localizaram adequadamente o Equador no globo terrestre.

Podemos inferir que houve possivelmente a influência dos conhecimentos sobre Equador dada em Geografia, pois o professor (A) o definiu como uma "linha horizontal que divide o globo em dois hemisférios". Outros como (D, E, F), como "circunferência" sem utilizar a palavra "máxima" e (B, C) deram uma função do Equador que é a de "dividir o globo em dois pólos", que não havíamos previsto.

Percebemos no item (c), que somente (A) reconheceu as circunferências máximas, o professor (B), as circunferências como paralelos e meridianos e (D, E,F) nomearam as circunferências como Trópicos e Meridianos, os quais são termos estudados em Geografia. Não esperávamos essas respostas predominantemente de cunho geográfico, provocando, assim, a inter-relação entre duas áreas do conhecimento.

No item (d), observamos que (A, B, C) apontaram os Paralelos terrestres, no globo terrestre, sendo que (A, B) os definiram como "circunferências paralelas ao Equador", dando o sentido da Geometria euclidiana de paralelismo entre retas aos paralelos terrestres. Os professores (D, E, F) os nomearam como Trópicos de Câncer e de Capricórnio, utilizados em Geografia, coerentemente com a afirmação anterior deles.

Notamos que, na questão (e), os mesmos professores identificaram os Meridianos no globo terrestre e (A, B, F) os definiram, como havíamos previsto, como "circunferências", por exemplo, (B) afirmou que são "circunferências que seccionam o eixo do Equador em dois pontos". Já (D, E), como "semi-circunferências...", mostrando coerência com afirmações antecedentes dadas por eles e (C) ainda associa os Meridianos com linhas.

Além disso, observamos todas as qualificações do saber: estruturado, evolutivo, cultural, afetivo e contextualizado. Um exemplo disso foi quando o professor (A), no item (e), afirmou que os Meridianos são "circunferências 'paralelas' ao Meridiano de Greenwich", colocando a palavra "paralelas" entre aspas, porque julgava não ser a palavra adequada e, possivelmente, haveria outra denominação para o caso de uma superfície esférica.

Outro exemplo foi quando o professor (D) definiu Equador como "circunferência que divide o globo em dois hemisférios"; os Paralelos terrestres como os "Trópicos de Câncer e Capricórnio"; os Meridianos como "todas as semi-circunferências que passam pelos pólos e interceptam o Equador" não usando uma das definições dadas em Geografia. Percebemos que os professores se surpreenderam com as conexões surgidas entre a Geometria esférica e a Geografia e com o fato de estarem gostando do que descobriam.

Enfim, a situação proposta possibilitou que fossem percorridas todas as fases da Teoria das Situações Didáticas como a formulação, em que, por meio de debates, os professores criaram soluções como esta em que (B, C) declararam que os Meridianos são "circunferências que seccionam o eixo do Equador em dois pontos"; validação em que (E) afirmou que os Meridianos são "todas as semi-circunferências que interceptam o eixo de rotação e cortam o equador em dois pontos" e a institucionalização que, simultaneamente, estabelecemos as seguintes definições:

Na Terra, há referenciais fundamentais, como os pólos, o Equador, os Meridianos, os Paralelos (Figura 38) e as suas direções de rotação como na Figura 39.

Dizemos que a Terra gira, diariamente, em torno do seu eixo de rotação. Esse eixo intercepta a superfície terrestre em dois pontos chamados Pólo Norte e Pólo Sul.

Temos uma circunferência máxima denominada Equador**,** cujo diâmetro é perpendicular ao eixo de rotação da Terra. O equador divide o globo em duas partes iguais o Hemisfério Norte e o Hemisfério Sul.

Existem, também, várias semi-circunferências máximas, que vão de um pólo ao outro chamadas Meridianos sendo que, pelos pólos, passam dois meridianos, um é o antimeridiano (ou antípoda) do outro.

Além disso, há diversas circunferências menores paralelas ao Equador que são os Paralelos terrestres. À direção anti-horária do giro da Terra chamaremos de Leste e a direção oposta de Oeste.

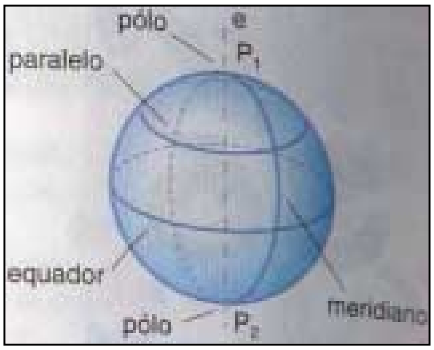


FIGURA 38[24] – REPRESENTAÇÃO DO EQUADOR, PARALELOS E MERIDIANOS

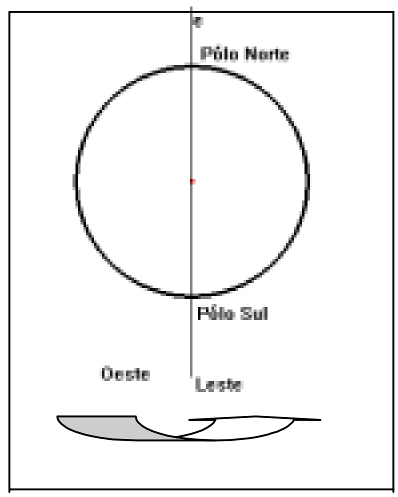


FIGURA 39 – REPRESENTAÇÃO DOS PÓLOS E DA DIREÇÃO DE ROTAÇÃO

Esclarecemos que não estamos apontando como erros algumas respostas dadas pelos professores, em virtude de essa situação ter procurado promover a interdisciplinaridade entre um conteúdo abordado em Geografia e a Geometria esférica e, conseqüentemente, a mudança para uma linguagem geométrica, simultaneamente, com a organização conceitual de um novo saber.

Situação 2

a) Você sabe que, no plano cartesiano XOY, um ponto pode ser localizado por suas coordenadas x e y. Como um ponto pode ser localizado, no globo terrestre?

b) Como você pode localizar, no globo terrestre, a posição do navio e da ilha, por meio da latitude e da longitude de ambos?

c) Determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição em que se encontram o navio e a ilha.

Pretendíamos atingir os seguintes objetivos:

- Comparar a localização de um ponto, no plano cartesiano, com a de um ponto no globo terrestre.
- Localizar um ponto, numa superfície esférica, por meio de suas coordenadas latitude e longitude.
- Determinar, aproximadamente, a posição do navio e da ilha no globo terrestre.

Nesse momento, os professores continuaram utilizando o globo terrestre grande e seis pequenos.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que, para os professores poderem localizar um ponto, no globo terrestre, descreveriam o caminho abrangendo o Equador, os Meridianos e os Paralelos terrestres, caso não possuíssem o conhecimento sobre as coordenadas geográficas de uma localidade tratado em Geografia, conforme a Figura 40. No entanto, esperávamos que respondessem que a localização seria feita pelas coordenadas geográficas do ponto latitude e longitude.

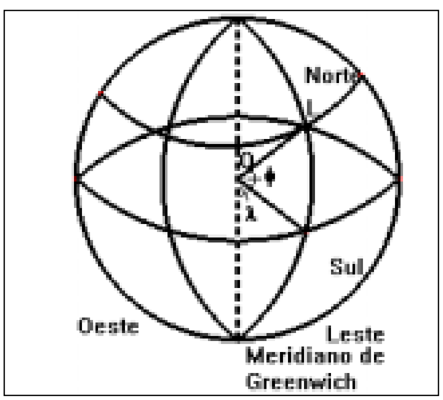


FIGURA 40 – REPRESENTAÇÃO DAS COORDENADAS GEOGRÁFICAS DE UM LUGAR L

Em (b) e (c), buscamos retomar a localização da posição do navio e da ilha, porque os professores têm, no momento, mais subsídios para um melhor resultado. Para a latitude, julgávamos que eles procurariam, ao Norte, um paralelo terrestre próximo, pois havia uma graduação de 10° em 10°. Para a longitude, a interseção do

[24] Esta figura foi extraída do livro de IEZZI et al. *Matemática, 2ª série, 2º grau.* 1991, p. 526.

Equador com um Meridiano próximo, observando que 0° corresponde ao Meridiano de Greenwich, bem como se a direção é Leste ou Oeste. Acreditávamos que a posição aproximada do navio e da ilha seria conseguida com sucesso.

Para essa situação, seriam necessários os conhecimentos sobre as Coordenadas cartesianas de um ponto e os anteriores como os referenciais Pólos, Equador, Meridianos, Paralelos terrestres e direção de giro da Terra, assim como achávamos que não haveria dificuldade a ser superada.

Análise *a posteriori*

Primeiramente, retornamos os saberes anteriores, em virtude de que o professor (C) nos pareceu não conseguir transpor os conhecimentos geométricos para a Geografia e vice-versa.

No item (a), cinco professores afirmaram que um ponto pode ser localizado no globo terrestre por meio do Equador e dos Meridianos. Já (C) respondeu que: "sendo y a ordenada meridiano e a abscissa x traçada pela linha do Equador, as coordenadas são latitude y e longitude x", procurando associar as coordenadas cartesianas com as coordenadas geográficas.

No item (b), todos os professores responderam que a posição do navio e da ilha pode ser dada pelo Equador e Meridianos. Por exemplo, (E) descreveu o caminho dado pela "linha do Equador e pelo Meridiano e as informações numéricas" de certa forma incompleta, já para (F) "tomando a linha do Equador que é longitude, podemos localizar os pontos e também pelos meridianos, com informações numéricas", nos mostrando que a palavra "linha" continua influenciando as suas concepções.

Em (c), como esperávamos, a localização foi realizada corretamente e concluíram que "o navio está no Oceano Atlântico próximo a New York e a ilha na Noruega", segundo o professor (B).

Durante a experimentação, pudemos "apanhar" o saber, no momento em que ele se elabora, quando o professor (A) organizou, conceitualmente, como pode ser localizado um ponto, no globo terrestre, ao dizer "através das coordenadas geográficas (latitude e longitude)" e com a afirmação dada por (C), no item (a), de que "sendo y a ordenada meridiano e a abscissa x traçada pela linha do Equador, as coordenadas são latitude y e longitude x", numa tentativa de estabelecer uma correspondência entre as coordenadas geográficas e as cartesianas.

Percebemos mudanças de valores e atitudes, no momento da troca de experiências individuais, pois, para solucionar o problema, precisaram integrar-se mais às discussões, deliberando suas conclusões com mais segurança e determinação. A emoção invadiu as suas próprias decisões.

Também foram vividas a fase de formulação, quando o professor (A) inferiu que um ponto pode ser localizado, no globo terrestre, "através das coordenadas geográficas (latitude e longitude); a de validação dada à questão (c) de que, por exemplo, a "ilha estava próxima da Noruega e o navio, no Oceano Atlântico, perto de Novas Iorque" e mais a de institucionalização ocorrida, momento a momento, ficando estabelecido que:

A localização geográfica de um lugar L é dada por sua latitude e longitude.

A latitude   de um lugar L é a medida do arco de meridiano, que vai do Equador ao paralelo do lugar. Será chamada Norte, se pertencer ao Hemisfério Norte e chamada Sul, se estiver no Hemisfério Sul. A sua unidade de medida é, usualmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 90°, como a Figura 41.

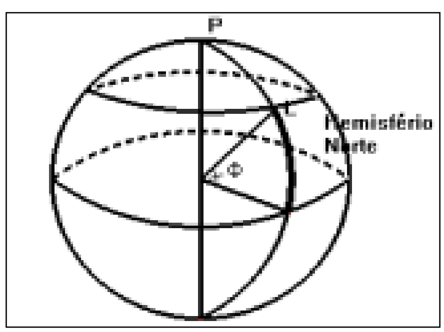


FIGURA 41 – REPRESENTAÇÃO DA LATITUDE DE UM LUGAR L

A longitude   de um lugar L é a medida do arco do Equador, com extremos na interseção do Meridiano de Greenwich (tomado como referência) com o Equador e na interseção do meridiano do lugar com o Equador. Será denominada Leste, se o lugar ficar à direita do observador (que estará de frente para aquele meridiano) e pode ser indicada por um sinal positivo e Oeste, se estiver à esquerda, sendo indicado com um sinal negativo. A sua unidade de medida é, geralmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0°a 180°, como podemos ver na Figura 42.

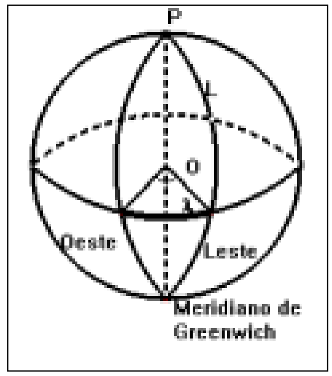


FIGURA 42 – REPRESENTAÇÃO DA LONGITUDE DE UM LUGAR L

A latitude e a longitude formam o Sistema de Coordenadas Geográficas.

Os dois sistemas de coordenadas permitem localizar um lugar. No sistema cartesiano um ponto no plano é localizado por suas coordenadas *x* e *y* e no sistema geográfico um ponto do globo terrestre é localizado por suas coordenadas latitude e longitude.

A diferença entre os dois sistemas é que o Sistema de Coordenadas Cartesianas é composto de duas retas perpendiculares e concorrentes no ponto O (0,0) e o Sistema de Coordenadas Geográficas utiliza circunferências máximas (meridianos) e circunferências menores (paralelos).

Complementando, não consideramos como erros a utilização da palavra "linha" na definição do Equador nem o fato de alguns professores terem associado, inadequadamente, as coordenadas geográficas (latitude e longitude), porque ao estabelecermos conexões com outro campo do conhecimento, precisamos aceitar a sua influência nas concepções deles e possibilitar que, então, façam a transposição necessária.

No terceiro dia, discutimos as Atividades 03 e 04, esta abrangendo duas situações.

Atividade 03

Como você observou, unindo os dois pontos distintos dados no problema, obtemos um arco de circunferência.

a) Procure medir a distância entre esses pontos. Que instrumentos você utilizou? Que unidades você pode usar para medir essa distância?

b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os pólos Norte e Sul?

Essa atividade teve as seguintes finalidades:

- Definir e medir a distância entre dois pontos, numa superfície esférica, utilizando os instrumentos adequados de medida.
- Construir uma régua esférica.
- Reconhecer a unidade de medida usada na atividade.

Foram colocados à disposição dos docentes, sem comentário algum, os seguintes instrumentos: régua de cm, cortes de barbante, fita métrica, tira de cartolina, além das bolas de isopor.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que os professores tentariam utilizar, inicialmente, a régua centimetrada e, verificando a impossibilidade de medir com ela, buscassem os outros instrumentos e, finalmente, concluíssem ser a fita métrica o mais adequado, para medir a distância entre dois pontos em uma unidade de comprimento.

Entretanto, após discussões entre os grupos, que incluiriam a unidade de comprimento de uma circunferência ser dada, também, em graus e radianos, a fita métrica seria descartada e então perceberiam que a tira de cartolina seria o melhor instrumento. Quanto às unidades de medida dessa distância, poderiam concluir serem de comprimento ou em graus.

Em (b), alguns**,** possivelmente, achariam que a distância entre os dois pontos "não fosse única", porque já vimos que "prolongando-se o menor caminho entre dois pontos distintos, numa superfície esférica, dois arcos de comprimento finito são determinados" (Atividade 01, situação 2) e a medida desse comprimento poderia levá-los a usar uma unidade de comprimento para medi-la. Outros, intuitivamente, deduziriam ser "única" pelos conhecimentos da Geometria euclidiana. A ruptura seria provocada ao solicitarmos a distância entre os pólos Norte e Sul, que verificariam ser única e não ser mais numa unidade de comprimento e, daí, sobreviria à unidade grau.

Para esta atividade seriam mobilizados os conhecimentos da Geometria euclidiana acerca de unidades de medidas de comprimento; de arco de circunferência e comprimento da circunferência dada em graus e radianos; da relação entre unidade de comprimento, entre o grau e o radiano, bem como entre medida do ângulo central e comprimento de um arco correspondente, além das noções anteriormente institucionalizadas.

Provavelmente, as dificuldades surgidas estariam relacionadas com a unidade de medida adequada (o grau) para medir a distância entre dois pontos, o que romperia com o conceito de distância entre dois pontos da Geometria euclidiana, cuja medida é dada em uma unidade de comprimento e outro entrave estaria na construção de um instrumento para medir a distância entre dois pontos, numa superfície esférica, que, no caso, seria inédito.

Análise *a posteriori*

No item (a), observamos que os professores (D, E) mediram duas distâncias: a do menor arco, que deu 10 cm, e a do maior arco, que deu 34 cm, e para (F) deram 8 cm e 39 cm, respectivamente. Dentre os professores, três usaram a fita métrica e o barbante como instrumentos, sendo que os dois primeiros utilizaram como unidade de medida km, m, cm, etc., em concordância com seus procedimentos.

Já (C) disse que usaria só a fita métrica e (A, B), a fita métrica e a tira de cartolina, anotando as seguintes medidas: “circunferência = 64 cm, arco = 8 cm” e estabeleceram a relação 360°/8= 45° e como unidades de medida o cm e o grau, mantendo a coerência com suas respostas.

Essa atividade foi palco de muita reflexão-ação-reflexão seguida de discussões, procurando cada um validar suas concepções e, após muitos debates, concluíram que o instrumento de medida da distância entre os dois pontos deveria ser um material maleável e como a unidade de medida do comprimento de uma circunferência pode ser o grau e a fita métrica ter como unidade só a de comprimento, a retiraram e optaram pela tira de cartolina, denominada por eles de régua esférica.

Descreveremos, a seguir, a construção desse novo instrumento de medida, feita em dupla ou individualmente:

Os professores (A, B) assim procederam: marcaram de um lado da fita 0 e 64 cm e de outro, 0 e 360°. A seguir, dobraram ao meio e marcaram: 32 cm e 180°; novamente ao meio e marcaram: 16 cm e 90°; 48 cm e 270°; analogamente, marcaram 8 cm e 45°, 56 cm e 315°; 40 cm e 225°; 24 cm e 135°. Entre 360° e 315° marcaram 330°; entre 315° e 270° marcaram 300°; entre 270° e 225° marcaram 240°; entre 225° e 180°, marcaram 210°; entre 180° e 135° marcaram 150°; entre 135° e 90° marcaram 120°; entre 90° e 45° marcaram 60°; entre 45° e 0° marcaram 30°, 20° e 10°. A seguir, uma parte do objeto confeccionado.

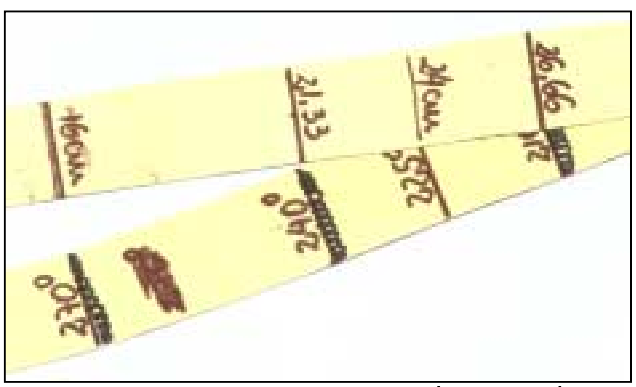


FIGURA 43 – PROTOCOLO DE UMA RÉGUA ESFÉRICA

O professor (D) assim fez: de um lado numerou 64 cm e do outro 360° e, dobrando, sucessivamente, ao meio, marcou, respectivamente, de um lado e do outro: 32 cm e 180°; 16 cm e 90°; 48 cm e 270°. A seguir, de um só lado, marcou: 45° e 315°, 225° e 135°; entre 225° e 270° marcou 247,5°; entre 0° e 45° marcou

22,25°; entre 90° e 135° marcou 112,5°; entre 135° e 180° marcou 157,5°; entre 180° e 225° marcou 202,5°; entre 225° e 270° marcou 247,5°; entre 270° e 315° marcou 292,5°; entre 315° e 360° marcou 337,5°. A seguir, uma parte do instrumento.

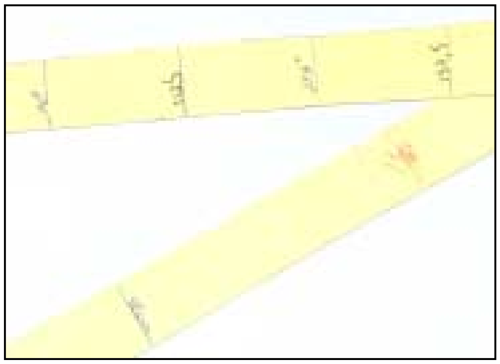


FIGURA 44 – OUTRO PROTOCOLO DE UMA RÉGUA ESFÉRICA

Embora cada um tenha construído uma régua, individualmente, os procedimentos foram os mesmos para (E, F): de um lado marcaram 0 cm e 47 cm e do outro, 0° e 360°. Dobrando, sucessivamente, ao meio, marcaram: 180° e 23,5 cm; 90° e 11,75 cm, 270° e 35,24 cm; 315° e 41,12 cm, 135° e 17,62 cm; 45° e 5,87 cm, 225° e 29,37 cm. Abaixo, um trecho do instrumento.

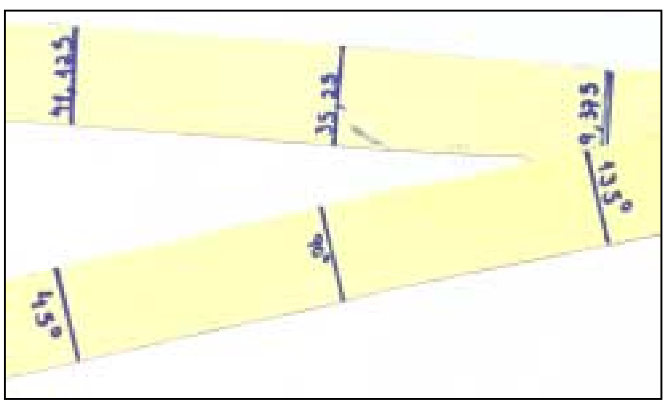


FIGURA 45 – OUTRO PROTOCOLO DE UMA RÉGUA ESFÉRICA

O professor (C) assim fez sua construção: de um lado marcou 360° e o outro, 48 cm; dividindo ao meio, respectivamente, marcou 180° e 24 cm; 90° e 12 cm; 270° e 36 cm. Adiante, uma parte do instrumento construído.

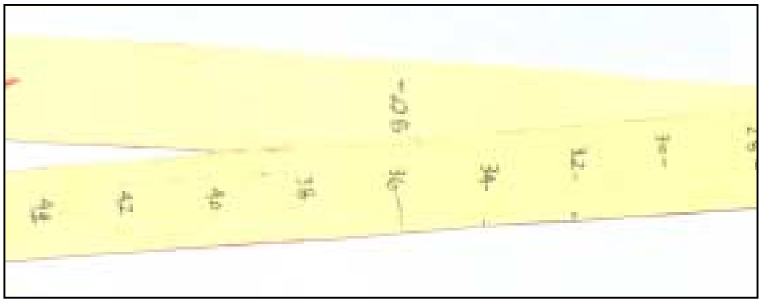


FIGURA 46 – OUTRO PROTOCOLO DE UMA RÉGUA ESFÉRICA

No item (b), o professor (C) respondeu que "sim", sem justificações e quatro os professores (A, B, E, F) que "não"**,** cabendo a (A) explicitar que "não, existem duas distâncias uma maior e outra menor".

Sobre a distância entre os pólos Norte e Sul, (A, B, D, F) responderam que é 180° e (C, E) não responderam, o que não nos surpreendeu, uma vez que todos participavam das discussões, contudo alguns não faziam os registros.

Notamos que alguns professores continuaram a utilizar a unidade de comprimento para medir a distância entre dois pontos, numa superfície esférica, como é o caso do professor (D) que afirmou que, se o diâmetro da circunferência é 64 cm, a distância entre os pólos é 32 cm e (F) relacionou 23,5 cm com 180°, associando as duas medidas.

É fundamental ressaltarmos a importância do manuseio dos instrumentos de medida, na tentativa de encontrar o mais adequado: a régua esférica, cujo nome foi sugerido pelos professores, sem que tenha havido alguma interferência exterior.

Para realizarem as divisões, em dupla ou individualmente, (A, B), por exemplo, mediram o diâmetro da circunferência (considerando a bola de isopor maior) dando 64 cm e um arco 8 cm e, então, estabeleceram que 360°/8 = 45° e cortaram uma tira de 64 cm e a dividiram em múltiplos de 2 cm e de 45°.

O professor (D), por sua vez, considerou um menor arco de 10 cm e um maior arco de 54 cm, numerando, depois, a tira recortada a partir de 64 cm; já (E, F) adotaram o menor arco como 8 cm e o maior arco como 39 cm e numeraram a tira recortada, a partir de 47 cm. O professor (D) fez o seguinte comentário: "para medir um arco numa superfície esférica em graus desprezamos o tamanho da superfície em cm e km, dependemos do comprimento do arco".

As deduções que os professores obtiveram nos apontam as inter-relações sendo estabelecidas, tal como o tecer dos fios estruturando um saber, que é provisório, cultural, contextualizado e afetivo.

Podemos exemplificar pelos minuciosos passos dados por eles na construção da régua esférica. Como o caso do professor (A) que respondeu a questão (b) da seguinte forma: "180°, pois esses dividem a circunferência máxima em dois arcos de mesmo tamanho" e, mais adiante, fez a multiplicação de 1852 m por 60, resultando 11.120 m que é, aproximadamente, 111 km, um resultado surpreendente, pois, a medida do Equador é 360° ou, aproximadamente, 40 000 km e se estabelecermos a razão 40 000 km/ 360°, obteremos, aproximadamente, 111 km/grau. (LÉNÁRT, 1996, p. 131).

Observamos os professores compartilhando instante por instante as suas idéias, emergindo valores como a autoconfiança e se sentindo articuladores entre a teoria e a prática.

Acrescentamos que o processo de ensino aprendizagem passou, por exemplo, pela fase de formulação, quando todos os professores criaram um modelo de instrumento de medida - a régua esférica - e a levaram para a validação, bem como a institucionalização, acontecendo conjuntamente com todas as outras fases, ficando estabelecido que:

Dois pontos dividem a superfície esférica em dois arcos de circunferência e para medirmos um arco, necessitamos compará-lo com outro, unitário: o grau ou o radiano. O grau é o arco unitário padrão mais utilizado, que corresponde a 1/360 da circunferência a que ele pertence. O radiano é o arco unitário, cujo comprimento é o mesmo do raio da circunferência, na qual ele se encontra. Seu símbolo é rad.

Fixada a medida de um arco (em grau ou radiano), podemos medir o comprimento, que depende do raio da circunferência que o contém e do ângulo central correspondente (medido em radianos). Prova-se que o arco de comprimento é dado pela relação = x r, com a medida do ângulo central, em radianos,como vemos na Figura 47.

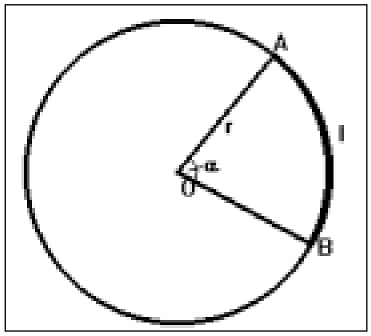


FIGURA 47 – REPRESENTAÇÃO DE UM ARCO DE COMPRIMENTO

Para medirmos o arco por dois pontos que lhe pertencem, usamos a régua esférica. A unidade de medida é o grau. Observa-se, entretanto, que há duas medidas possíveis de distância entre dois pontos, na superfície esférica. Adotamos a menor delas.

Observamos que, se os dois pontos forem pólos, a distância entre eles é 180°, conforme Figura 48.

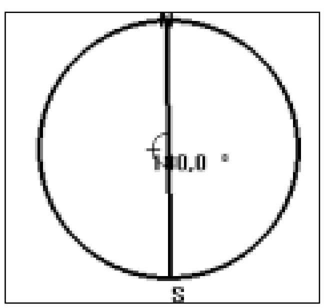


FIGURA 48 – MEDIDA DA DISTÂNCIA ENTRE OS PÓLOS

Sabemos que a forma da Terra não é de uma esfera perfeita, o que faz com que os meridianos se assemelhem a elipses, de curvaturas variáveis. Se a milha marítima for definida, apenas, como o comprimento do arco de 1 minuto, esse valor não seria único. Por isso foi estabelecida a Milha Marítima Internacional correspondendo a 1.852 m, como sendo a média das milhas medidas no pólo e no Equador.

Para os cálculos usados na navegação, entretanto, é feita a correspondência de 60 milhas para um arco de 1° de circunferência máxima. O erro cometido, se o local estiver próximo dos pólos ou do Equador pode ser desprezado, diante de outras incertezas que ocorrem na navegação marítima.

Em seguida, os professores receberam a Atividade 04 constituída por duas situações.

Situação 1

> Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas circunferências máximas.
>
> a) Quantos são os pontos de interseção e quantos são os arcos determinados por esses pontos?
>
> b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos?
>
> c) Defina ângulo esférico. Que elementos o constituem?
>
> d) Qual a unidade de medida que você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? O transferidor plano é um instrumento de medida de um ângulo esférico?

Esta situação teve as seguintes finalidades:

- Identificar e definir Ângulo, numa superfície esférica, como formado pela interseção de duas circunferências máximas.
- Utilizar a unidade de medida adequada para ângulo esférico.

Aos professores foram cedidas as bolas de isopor e as réguas esféricas construídas, cuja manipulação poderia facilitar as reflexões/conclusões das questões.

Análise *a priori*

No item (a), esperávamos que os professores respondessem que há dois pontos de interseção entre duas circunferências máximas e quatro arcos determinados por esses pontos, conforme a Figura 49.

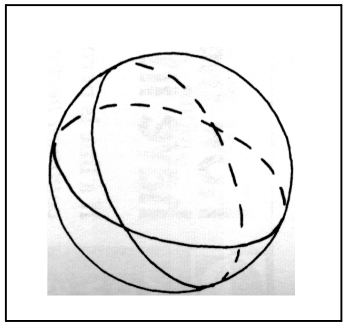


FIGURA 49[25] – REPRESENTAÇÃO DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS MÁXIMAS

Em (b), acreditávamos que os professores respondessem que "sim" e identificassem oito ângulos, segundo a Figura 50.

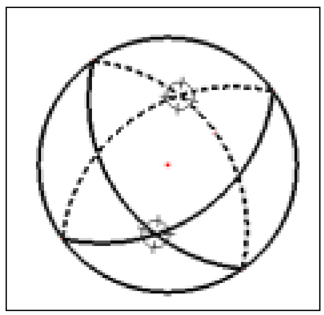


FIGURA 50 – REPRESENTAÇÃO DE OITO ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS CIRCUNFERÊNCIAS MÁXIMAS

Em (c), achávamos que alguns definissem ângulo esférico como uma figura "formada por dois arcos de circunferências máximas" e outros como "região limitada por dois arcos de circunferências máximas", como a Figura 51. Entretanto, não conseguiriam apontar os elementos de um ângulo como sendo lados e vértices, por julgarem ter nomes especiais. Qualquer uma das afirmações poderia ser considerada adequada.

Quanto aos elementos que constituem um ângulo esférico, esperávamos que os nomeassem tal como é para um ângulo plano, isto é, vértice como o ponto de interseção dos arcos de duas circunferências máximas e lados como os arcos destas circunferências.

[25] Esta figura foi extraída do livro de LENÁRT, I., *Non-euclidean Adventures on the Lénárt Sphere,* 1996, p. 28.

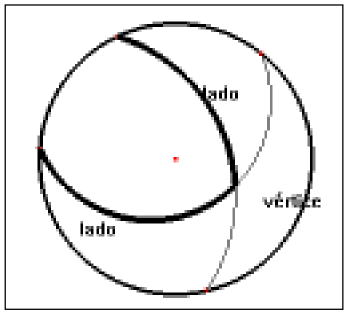


FIGURA 51 – REPRESENTAÇÃO DE UM ÂNGULO ESFÉRICO

Na questão (d), provavelmente eles responderiam que a unidade de medida para medir a abertura de um ângulo esférico seria o grau e o transferidor plano não seria um instrumento de medida adequado e deveria ser de um material maleável.

Assim, para essa situação, deveriam ser mobilizados os conhecimentos sobre arco de circunferência máxima, ângulo plano e seus elementos e unidade de medida de um ângulo plano e, como mencionamos, uma dificuldade estaria na denominação dos elementos de um ângulo esférico, possivelmente, por julgarem ser nomes diferentes dos usuais.

Análise *a posteriori*

Na questão (a), todos os professores identificaram dois pontos de interseção entre as duas circunferências máximas e quatro arcos formados pelos dois pares de pontos, cujas deduções foram facilitadas pelo manuseio das bolas de isopor, como vemos na Figura 52.

FIGURA 52 – PROTOCOLO REFERENTE A UM ÂNGULO ESFÉRICO

Em (b), todos identificaram oito ângulos determinados pela interseção de duas circunferências máximas, sendo que o professor (A) achou o termo "ângulo" não apropriado, tanto que colocou, no final da página, em letra maiúscula e com interrogação "Ângulo?”.

No item (c), as definições de ângulo esférico foram bastante diversificadas, tais como a dada pelo professor (A) de "região limitada por dois arcos. Dois arcos partindo de um ponto de intersecção entre eles. Para (B), é a intersecção entre duas circunferências máximas"; para (C), "o ângulo esférico é constituído por dois pontos formado pelas semi-retas que formam a intersecção definindo os oito ângulos". Os três não mencionaram os elementos que constituem um ângulo esférico.

O professor (D) elaborou as seguintes definições acerca de ângulo esférico: como "espaço limitado por arcos de circunferência que se interceptam em um determinado ponto", e "ângulo esférico é determinado por arcos de circunferências que se interceptam no mesmo ponto". Já (F) definiu que "são dois pontos delimitados na esfera, entre eles, formando o arco", (D) denominou os elementos de um ângulo esférico como "ponto e arco" e (E, F) como "ponto e arcos de circunferência" uma dificuldade já prevista por nós.

Em (d), cinco professores responderam que a unidade de medida da abertura de um ângulo esférico seria o grau. Ainda, o transferidor plano foi considerado por todos inadequado como instrumento de medida de um ângulo esférico e, segundo (E) "ele é um instrumento plano".

Durante as discussões, houve surpresa ao usarmos o nome "ângulo esférico", por imaginarem um nome sofisticado, muito diferente do usado na Geometria euclidiana e ao serem indagados como fariam para construir um instrumento de medida ideal, já que o transferidor plano não serviria, (E) afirmou que "um instrumento adaptável, que dê para manipular. E se eu fizer no sulfite?" Ao que (D) completou "os graus que tenho aqui (mostrando uma bola de isopor maior), também tenho nessa menor" e, os dois juntamente com (F) pensaram em diminuir ou ampliar um transferidor comum, construindo transferidores de 90°, de 180° e de 360° de medida.

Ao final da atividade, pedimos que denominassem o instrumento e sugeriram transferidor esférico, imediatamente validado e, então, foram construídos transferidores esféricos de vários diâmetros: de 12,5 cm; de 8,5 cm; de 4,2 cm e de 2 cm passaram a instrumentos de medida de um ângulo esférico, conforme protocolos a seguir:

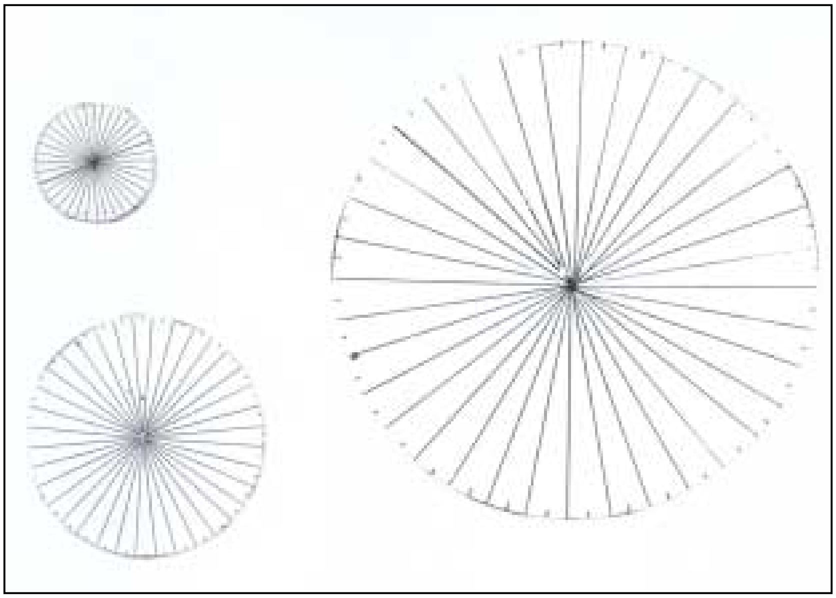


FIGURA 53 – PROTOCOLOS REFERENTES AOS MODELOS DE TRANSFERIDORES ESFÈRICOS DE VÁRIOS DIÂMETROS

Durante o experimento, notamos o saber sob os seus diferentes aspectos, desde o instante em que cada professor fez suas próprias interconexões em relação ao conteúdo em estudo, definindo um ângulo esférico ora como "região limitada por dois arcos", ora como "interseção entre duas circunferências máximas, ora como "arcos de circunferências que se interceptam num mesmo ponto", criando uma linguagem própria.

Ao ser utilizada uma atividade prática, a construção de um transferidor esférico, como elemento reforçador da compreensão, possibilitou que cada um tivesse uma visão própria daquele objeto, sentindo prazer e confiança na produção dele.

Além disso, os professores vivenciaram todas as fases da Teoria das Situações Didáticas como, por exemplo, a formulação em que (A, B) idealizaram um transferidor esférico, bastando "desenhar um transferidor plano, numa folha, traçar as divisões e diminuir, até ajustar na bola de isopor", "como o gorrinho de judeu"; a validação e a institucionalização foram executadas a todo momento, sendo que os professores receberam um texto com lacunas a serem preenchidas como um reforço auxiliar para a institucionalização (que apresentamos a seguir), provocando dessa forma novas reflexões, que julgávamos necessárias, principalmente, para (C).

Assim, numa superfície esférica, duas circunferências máximas possuem dois pontos de interseção os quais determinam quatro arcos. O ponto de interseção dos arcos é denominado vértice do ângulo e os arcos são chamados de lados do ângulo.

Podemos, então, definir ângulo esférico como uma figura formada por dois arcos de circunferências máximas e a sua unidade de medida *é o* grau. Para medir a abertura de um ângulo esférico, não podemos usar o transferidor plano e, portanto, necessitamos construir um objeto adequado chamado transferidor esférico. O ângulo, cuja medida é 90° é denominado ângulo reto, como a Figura 54**.**

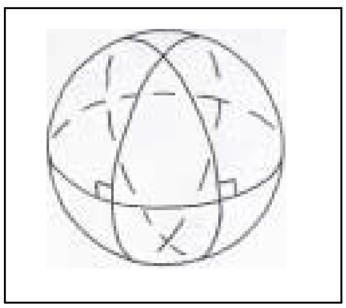


FIGURA 54[26] – REPRESENTAÇÃO DE DOIS ÂNGULOS RETOS

Acreditávamos que, ainda, não deveríamos falar em erros, mas sim em "saberes provisórios diferentes que procuram encaixar-se" (BARTH, p. 205).

Situação 2

Na superfície esférica, marque três pontos distintos, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima. Ligue esses pontos, usando a régua que você construiu. a) Descreva a figura encontrada. Que nome você daria a essa figura? Ela se assemelha a alguma figura da Geometria plana? b) Faça, na superfície esférica, um esboço, do triângulo esférico gerado pela situação-problema, de tal maneira que o vértice (I) seja o ponto de localização da ilha, o vértice (N) seja o ponto de localização do navio e o vértice (P) esteja no pólo.

Esta situação teve como objetivos**:**

- Identificar e definir Triângulo numa superfície esférica
- Representar a situação-problema por um triângulo esférico, cujos vértices são um pólo, a ilha e o navio.

Aos professores foram fornecidas bolas de isopor e réguas esféricas, para auxiliar nos questionamentos/deduções das questões propostas.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que, ao ligarem os três pontos distintos, nas condições dadas, a figura encontrada seria facilmente identificada como um triângulo, que se assemelharia a um triângulo plano, apesar de estar contido numa superfície esférica. Poderiam descrever a figura como composta por três lados e três vértices, ou alguns diriam por três arcos de circunferências máximas e três vértices, que são pontos de interseção dos arcos. Esperávamos que mencionassem uma figura que contenha três lados e três vértices, como mostra a Figura 55.

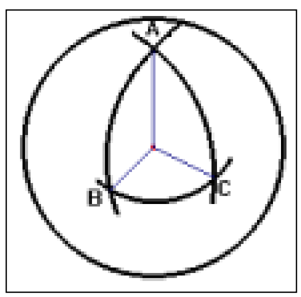


FIGURA 55 – EXEMPLO DE TRIÂNGULO ESFÉRICO

Na questão (b), julgávamos que o triângulo seria esboçado e os seus vértices nomeados adequadamente.

Esta situação movimentaria os conhecimentos já institucionalizados, para que fosse possível o esboço do triângulo nas condições especificadas pelo problema; manuseio da régua esférica para o traçado dos lados do triângulo e a representação da posição aproximada da ilha, do navio e de um pólo, a partir de suas coordenadas geográficas. Dessa forma aguardávamos que não houvesse dificuldade em item algum da situação.

---

[26] Ibidem, p. 37.

Análise *a posteriori*

Para responder à questão (a), todos os professores traçaram, convenientemente, um triângulo em uma bola de isopor e acharam que a figura se assemelhava a um triângulo, dando-lhe o nome de "triângulo esférico". Todos o caracterizaram como uma figura, cujos lados são arcos de circunferências máximas e dois completaram que possui três vértices.

Em (b)**,** cinco professores esboçaram o triângulo esférico, entretanto, (E, F) marcaram os três pontos I, N, P, sendo que (F) colocou o ponto I à esquerda de N; já (D) os nomeou de A, B, C, os professores (A, C) não colocaram letra alguma e (B) não esboçou o triângulo.

Pelos seus depoimentos, pudemos notar que estavam familiarizados com os saberes já abordados, como (E) ao afirmar que "os lados são arcos de circunferências máximas e os vértices são interseções dos arcos" e (D) que é uma "figura de 3 vértices cujos lados são arcos de circunferências máximas". Os vértices são pontos de interseção dos arcos que formam o lado." A seguir, a representação do triângulo esférico feito por (D) como Figura 56:

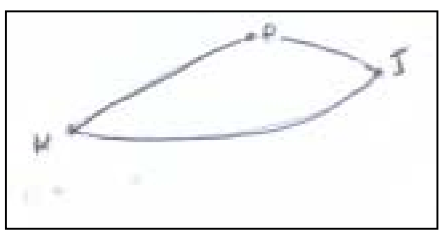


FIGURA 56 - PROTOCOLO REFERENTE A UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Em certo momento, indagamos a todos se o termo "reta" somente poderia ser usado na Geometria plana, ao que, o professor (A) complementou que, dado que "segmento é um pedaço finito da reta", para a superfície esférica seria "segmento esférico" o termo correto. E dessa maneira, surgiu a noção segmento esférico e mais uma vez "apanhamos" o saber num instante em que era estruturado e, conseqüentemente*,* nos apontou o saber como evolutivo, cultural, o contexto dando-lhe significação e o afetivo influenciando a maneira de apreender a nova realidade.

Pudemos constatar que o processo de ensino e aprendizagem passou, por exemplo, pela fase de formulação, quando (E) descreveu o triângulo encontrado como aquele em que "os lados são arcos da circunferência máxima e os vértices são interseções dos arcos"; de validação ao nomearmos a figura como "triângulo esférico" e de institucionalização realizada passo a passo. Após, os professores receberam a institucionalização na forma de lacunas a serem completadas:

Ao unirmos três pontos distintos, numa superfície esférica, tais que dois a dois pertençam a um mesmo arco de circunferência máxima, obtemos uma figura denominada triângulo esférico. Um triângulo esférico pode ser definido como uma figura formada por três arcos de circunferências máximas, cujos vértices são os pontos de interseção dos arcos, tais que dois a dois de seus pontos pertençam ao mesmo arco*,* como a Figura 57.

O triângulo esférico é formado por três arcos chamados lados do triângulo e possui três vértices e três ângulos esféricos.

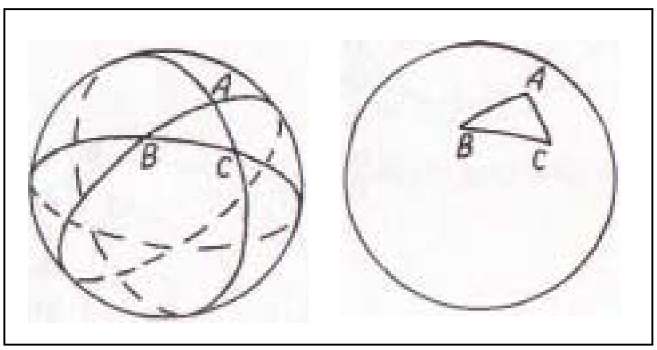


FIGURA 57[27] – EXEMPLO DE TRIÂNGULO ESFÉRICO

BARTH nos diz que "cada indivíduo 'entra' numa situação nova com a sua compreensão, o seu modo de ver as coisas, com a sua 'música' e vai interpretar esta situação nova a partir da sua história cognitiva, a partir da sua partitura" (BARTH, 1993, p. 71) e que pela integração com o outro, podemos ajustar pouco a pouco a nossa compreensão. Por isso é que acreditamos que o erro não é o oposto de certo.

No quarto encontro, refletimos sobre os conteúdos das Atividades 05 e 06.

[27] Ibidem, p. 53.

Atividade 05[28]

Nesta Atividade, estão contidas duas situações.

Situação 1

Nesta atividade, determinaremos a relação entre o arco de paralelo e o arco do Equador correspondente. Para isso, necessitaremos de relações da Trigonometria plana.

Desenhe, na sua superfície esférica de centro O e pólo P, um paralelo de centro C e o Equador. Desenhe também, um arco de meridiano de pólo P, que intercepta o paralelo no ponto A e o Equador no ponto B. Marque a latitude do ponto A.

Faça abaixo uma representação desse desenho.

a) O que você pode afirmar a respeito do triângulo POB.

b) Esse triângulo é esférico? Justifique.

c) Identifique outros triângulos retângulos.

d) Caracterize o triângulo OCA. Qual a medida do ângulo oposto ao lado AC? Determine o seno desse ângulo.

e) Relacione as medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AO}$ no triângulo OCA.

f) Relacione o resultado obtido em (e) com o resultado obtido no item (d).

g) Desenhe um arco de meridiano de pólo P que intercepta o paralelo no ponto D e o Equador no ponto E. Desenhe o arco AD e o arco BE.

Dizemos que esses arcos são correspondentes.

h) Determine a relação entre as medidas dos arcos AD e AC e as medidas dos arcos BE e BO.

i) É possível relacionar as medidas dos arcos AD e BE com os raios AC e BO?

j) Se OA = OB, pois, são raios terrestres, relacione esse resultado com o obtido no item (f).

Escreva a relação obtida no item anterior.

Esta situação teve as seguintes finalidades:

- Promover a articulação teoria-prática, entre a Trigonometria plana e um problema da Geometria esférica.
- Determinar a relação entre o arco de paralelo e o arco do Equador correspondente, permitindo solucionar a situação proposta.

---

[28] Esta atividade foi adaptada do livro de COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não-euclidianas,* 2001, p. 91.

Os professores receberam as bolas de isopor, para manusearem, apenas, no início da Atividade e depois passaram para uma representação dessa figura. Havia a possibilidade de serem feitas duas representações do problema: uma com os pontos A e B à direita do eixo de rotação e outra com esses pontos à esquerda, bem como o pólo poderia ser Norte ou Sul, uma vez que não há mais especificações, eles escolheram aquela que se encontra como Figura 58.

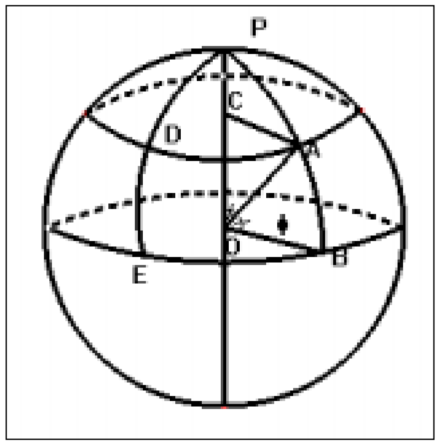


FIGURA 58 – A FIGURA QUE REPRESENTA A SITUAÇÃO 1

Análise *a priori*

Julgávamos que os professores, nos itens (a) e (b), afirmariam que o triângulo POB fosse esférico, pois, o lado PB é um arco de circunferência. No entanto, ele não é um triângulo esférico, porque os outros dois lados não são arcos de circunferência, se bem que é um triângulo plano retângulo.

Em (c), eles poderiam identificar outros triângulos retângulos, tais como: AOC, BOP e ACP, retângulos em C, O e C, respectivamente.

No item (d), os professores deveriam notar que, dado que $\overline{OP}$ é raio terrestre e perpendicular ao raio $\overline{AC}$ do paralelo, o triângulo OCA é retângulo em C. Para tanto, necessitariam da interferência da pesquisadora para fazerem as relações com a Trigonometria plana. Daí, a medida do ângulo oposto ao ângulo C poderia ser dada por 90° - e sen (90° -) seria dado pela razão AC/AO que é cos .

Na questão (e), a relação entre as medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AO}$ seria dada por

AC = AO x sen (90° -).

Em (f), obteriam AC = AO x cos .

Na questão (g), desenhariam, adequadamente, os arcos AD e BE.

No item (h), para obterem a relação entre as medidas dos arcos AD e AC e as medidas dos arcos BE e BO, deveriam reconhecer que os arcos AD e BE são arcos de circunferências, por isso podem ser determinados os seus comprimentos e que existe um fator de proporcionalidade k, ou seja:

AD = k x 2 x AC e BE = k x 2 x BO.

Acreditávamos que conseguissem associar com a medida do comprimento de um arco de circunferência, mas não usariam o fator de proporcionalidade.

A questão (i) seria solucionada, desde que determinassem as razões AD/ AC e BE/ BO, que seriam dadas por AD/ AC = BE/ BO = k x 2 e assim,

AD/ AC = BE/ BO.

Em (j), desde que AO = OB por serem raios terrestres, a relação seria

AD/ BE = cos ou AD = BE x cos e estaria obtida a relação entre o arco de Paralelo e o arco do Equador correspondente.

Para tanto, seriam mobilizados os conhecimentos sobre a fórmula do comprimento de uma circunferência e sobre as relações da Trigonometria plana, além dos anteriormente estudados.

Acreditávamos que existiriam inúmeras dificuldades a serem vencidas, tais como aquelas relativas à representação plana de uma figura tridimensional e quanto à aplicação das relações da Trigonometria plana no problema.

Análise *a posteriori*

Os professores, adequadamente, marcaram o pólo que escolheram o Norte, traçaram o paralelo de centro C, o Equador, um arco de meridiano de pólo P e a latitude .

Todas as questões foram respondidas exigindo a nossa interferência permanente, ocorrendo, então, todas as fases da Teoria das Situações Didáticas. Um exemplo da situação de formulação é aquele em que, ao perguntamos para o professor (D) se existia triângulo retângulo esférico, ele confirmou e chamou de "hipotenusa" um dos arcos de circunferência. Outro exemplo pode ser visto na conclusão dada por (A) que, notando as relações entre os lados dos triângulos, que poderia ser aplicado o Teorema de Tales. Percebemos a validação e a institucionalização sendo feitas simultaneamente com as discussões suscitadas pelo problema.

Esta situação nos conduziu à articulação entre a teoria e a prática, a fim de conseguirmos solucioná-la e encontramos em BARTH a afirmação de que a teoria tem um papel fundamental como ferramenta de análise de uma situação.

Além disso, acompanhamos o saber se estruturando, evoluindo, se culturalizando e com afetividade, cujo contexto permitiu a relação entre os itens, fazendo emergir modelos geométricos, ao propiciar a aplicação de noções de Trigonometria plana a um problema de Geometria esférica, pela interação entre todos os membros dos grupos e pela modificação de atitudes e valores nos professores.

Julgamos que não existiram erros para serem registrados, existiram sim reflexões seguidas de validações das afirmativas que cada um dos professores apresentou que, por sua vez, foram institucionalizadas e tornadas saberes oficiais, podendo ser utilizadas na resolução de outros problemas.

Situação 2

> Resolva o seguinte problema[29]:
>
> Um navio N percorre 1700 milhas sobre o Equador, enquanto que um navio M percorre o correspondente arco no paralelo de 60°. Qual dos navios percorreu a maior distância, em milhas marítimas? Justifique a sua resposta.

[29] Esta atividade foi retirada do livro de COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não-euclidianas,* 2001, p. 92

Este problema teve como objetivo aplicar os resultados obtidos anteriormente numa situação contextualizada.

Análise *a priori*

Essa situação poderia ser solucionada, a partir da utilização da relação obtida anteriormente. Nesse caso, seriam mobilizados os conhecimentos acerca do cosseno de um ângulo agudo, além dos já institucionalizados e esperávamos que não houvesse dificuldades na obtenção de sua solução.

Dessa forma, acreditávamos que todos os professores resolveriam o problema, percebendo que o arco NY é dado pelo problema como sendo a distância percorrida pelo navio N sobre o Equador de valor igual a 1700 milhas e o arco MX é o correspondente arco no paralelo de 60°, percorrido pelo navio M. Para determinarem qual dos navios percorreu a maior distância, bastaria usar a relação obtida na situação precedente, ou seja, a medida de um arco de paralelo é dada pelo produto da medida do arco do Equador (170 milhas) pela medida do cosseno da latitude que é 60°.

Uma das possíveis soluções poderia ser aquela em que a distância percorrida pelo navio M seria dada por d = 1700 x cos 60° = 1700 x ½ = 850 milhas.

Análise *a posteriori*

Os professores construíram como figura representativa da situação a que está sob nº 59.

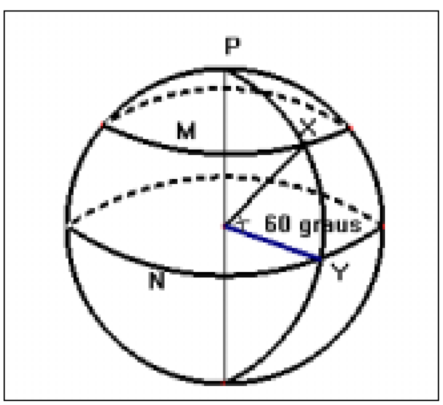


FIGURA 59 – A FIGURA QUE REPRESENTA A SITUAÇÃO 2

Todos os professores solucionaram o problema, sendo uma das resoluções a feita por (D) que está como Figura 60:

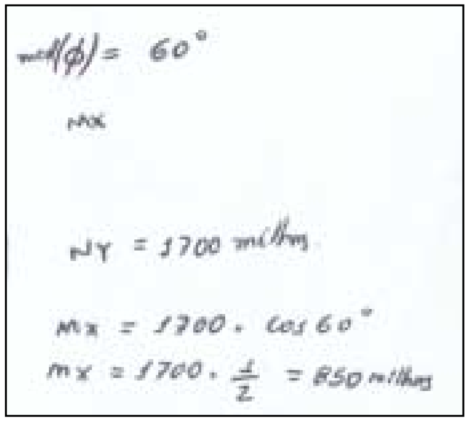


FIGURA 60 – PROTOCOLO REFERENTE A UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Neste momento, percebemos que os professores, depois de questionamentos, transferiram os conhecimentos adquiridos na situação anterior, resolvendo o problema, que pedia a determinação do comprimento de um arco de paralelo, dado o comprimento de um arco do Equador, colocando para tanto uma situação com dois navios. É o saber se apresentando como estruturado, evolutivo, cultural e contextualizado e afetivo.

Notamos, ainda, que todas as etapas da Teoria das Situações Didáticas foram vivenciadas, sendo a validação e a institucionalização feitas em simultaneidade às discussões, ficando acatado que:

Os arcos MX e NY são arcos correspondentes. Assim, podemos aplicar a Relação entre o arco de Paralelo MX e o arco de Equador NY correspondente.

Daí, a distância percorrida pelo navio M será d_M = 1700 x cos 60° = 850 milhas.

Como a distância percorrida pelo navio N é de 1700 milhas, concluímos que o navio N percorreu a maior distância.

Atividade 06

Você irá determinar a Relação Fundamental dos triângulos esféricos, também chamada Fórmula do Cosseno.

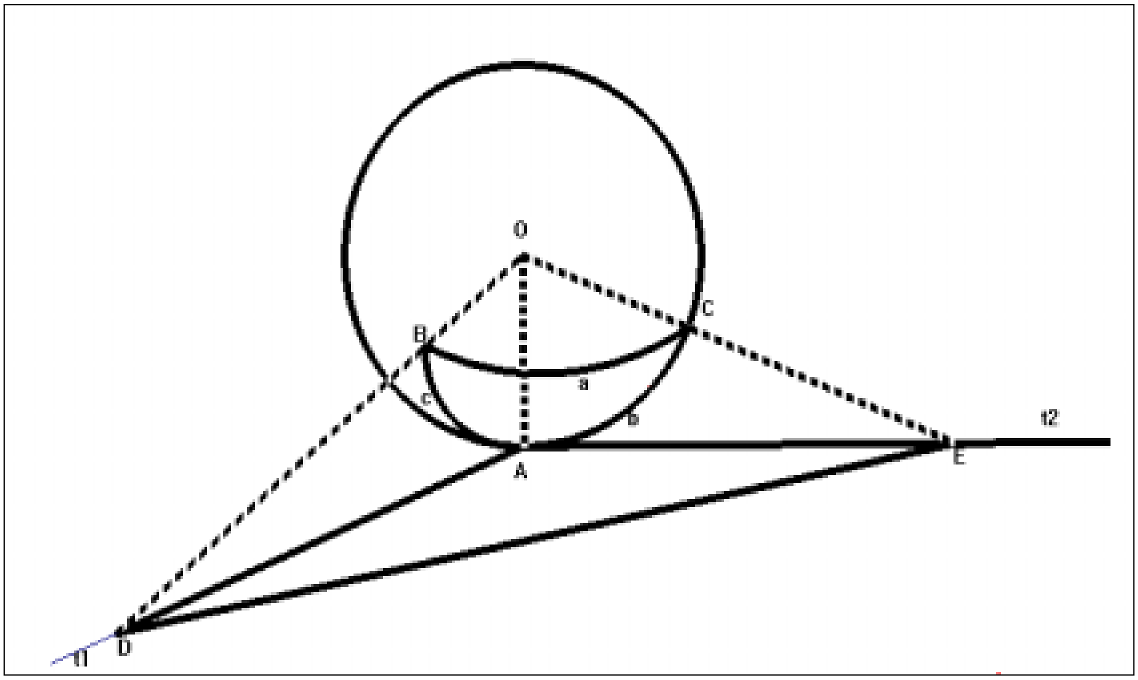


FIGURA 61 – A FIGURA QUE REPRESENTA A ATIVIDADE 06

Considere, no desenho acima, o qual representa uma superfície esférica de centro O, o triângulo esférico ABC de lados a, b, c medidos pelos ângulos BOC, AOC e AOB, respectivamente.

Considere as retas, t_1 e t_2, tangentes às circunferências máximas AB e AC, respectivamente. Observe que a semi-reta OB intercepta t_1 no ponto D e a semi-reta OC intercepta t_2 no ponto E, formando o triângulo plano ADE.

a) No triângulo retângulo AOD, o ângulo reto é ________ Neste triângulo, determine o valor do seno e do cosseno do ângulo AOD.

b) Considerando a medida do arco AB, lado do triângulo esférico, como sendo c, determine o valor da tangente e da secante do ângulo AOD em função da medida do arco AB.

c) Determine AD em função de tg c e OD em função de sec c.

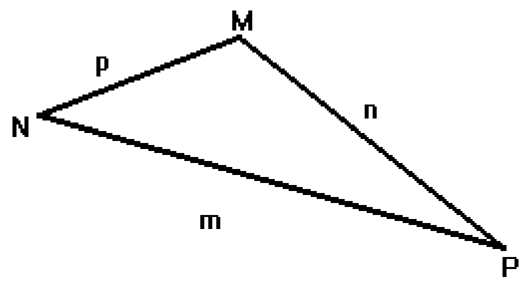
d) No triângulo retângulo AOE, cujo ângulo reto é _________, determine o valor do seno e do cosseno do ângulo AOE e, também, da tangente e da secante do mesmo ângulo.

e) Considerando a medida do arco AC, lado do triângulo esférico, como sendo b, determine o valor da tangente e da secante do ângulo AOE, em função da medida do arco AC.

f) Determine AE em função de tg b e OE em função de sec b.

g) Considere, agora, o triângulo DAE. Nele, aplique a Relação dos cossenos para o ângulo A. Lembrando que, num triângulo plano MNP (Figura 63), cujo lado MP mede n, o lado MN mede p e o lado NP mede m, a Relação dos cossenos é a seguinte:

$m^2 = n^2 + p^2 - 2np \times \cos M$



Assim, DE^2=____________________________

h) Considerando a medida do raio AO como sendo 1, e AD obtida no item (c) e AE obtida no item (f), podemos escrever que DE^2 =_________________________

i) No triângulo DOE, aplique a Relação dos cossenos da Trigonometria plana para o ângulo DOE, determinando DE^2=___________________________________

j) Considerando a medida do raio $\overline{AO}$ como sendo 1 e OD obtida no item (c) e OE obtida no item (f), podemos escrever que DE^2=_________________________

l) Lembrando que o ângulo DOE mede o lado a do triângulo esférico ABC, escrevemos DE^2=__________________________________

m) Observe os resultados obtidos nos item (h) e (l). O que você pode concluir?

n) Qual a relação entre a secante e a tangente de um ângulo agudo na Trigonometria plana?

o) Como você pode escrever, então, $\sec^2 c$ e $\sec^2 b$?

p) Use as relações do item (o), para escrever a relação obtida em (m).

q) Utilizando as relações da Trigonometria plana, como podem ser escrito sec b, sec c, tg b e tg c, em função de seno e cosseno de c e de b?

r) Das relações dadas nos itens (p) e (q), determine cos a.

cos a=_______________________________________

Esta é a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos.

s) Qual é a utilidade dessa relação?

t) É possível que essa relação solucione a situação-problema inicial? Justifique.

Esta atividade teve as finalidades seguintes:

- Determinar a Relação Fundamental dos triângulos esféricos
- Reconhecer a aplicabilidade dessa relação.

Análise *a priori*

Neste experimento, procuramos articular teoria e prática, associando as questões, cujas respostas validadas passariam a ser institucionalizadas simultaneamente.

Assim sendo, esperávamos que os professores chegassem às seguintes conclusões:

No triângulo retângulo AOD**,** cujo ângulo reto é A, sen AÔD = AD/ OD e

cos AÔD = AO/ OD.

Como a medida do arco AB = medida do ângulo AOD = c,

tg AÔD = tg c = AD/ AO e sec AÔD = sec c= OD/ AO. Portanto, AD = AO x tg c e

OD = AO x sec c. (c)

No triângulo retângulo AOE, reto em A, sen AÔE = AE/ OE e

cos AÔE = AO/ OE. Também, tg AÔE = AE/ AO e sec AÔE = OE/ AO.

Como a medida do arco AC = medida do ângulo AOE = b,

tg AÔE= tg b = AE/ AO e sec AÔE = sec b = OE/ AO. Portanto, AE = AO x tg b e

OE = AO x sec b. (f)

Utilizando a Relação dos cossenos da trigonometria plana,

$DE^2 = AD^2 + AE^2 – 2 \times AD \times AE \times \cos \hat{A}$

Por (c) e (f), $DE^2 = (AO)^2 (tg^2 c + tg^2 b - 2 \times tg c \times tg b \times \cos \hat{A})$ (1)

No triângulo DOE: $DE^2 = OD^2 + OE^2 – 2 \times OD \times OE \times \cos D\hat{O}E$.

Por (c) e (f), $DE^2 = (AO)^2 (\sec^2 c + \sec^2 b – 2 \times \sec c \times \sec b \times \cos D\hat{O}E)$ e como medida do ângulo DOE = a,

$DE^2 = (AO)^2 (\sec^2 c + \sec^2 b - 2 \times \sec c \times \sec b \times \cos a)$ (2)

De (1) e (2), deduzimos que:

$(AO)^2$ ($tg^2 c + tg^2 b - 2 \times tg\ b \times tg\ c \times \cos\hat{A}$) que é igual a

$(AO)^2$ ($\sec^2 c + \sec^2 b – 2 \times \sec b \times \sec c \times \cos a$).

Da Trigonometria plana, para um ângulo x, $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$, daí

$\sec^2 b = 1 + tg^2 b$ e $\sec^2 c = 1 + tg^2 c$

Logo, $tg\ b \times tg\ c \times \cos \hat{A} = -1 + \sec b \times \sec c \times \cos a$

Usando as relações da secante e da tangente com seno e cosseno,

$sen\ b \times sen\ c \times \cos\hat{A} = \cos a - \cos b \times \cos c$

Portanto: $\boxed{\cos a = \cos b \times \cos c + sen\ b \times sen\ c \times \cos \hat{A}}$, que é a Relação fundamental para os triângulos esféricos.

Na questão (s), os professores, provavelmente, achariam a relação útil, pois, permitiria associar as medidas dos lados e de um ângulo em um triângulo esférico.

No item (t)**,** acreditávamos que eles considerariam que essa relação solucionaria a situação-problema inicial, porque ela estabeleceu correspondências entre os triângulos de ambas as situações, nas quais três dados são conhecidos e o quarto será determinado.

Para solucionar esta atividade, os professores necessitariam mobilizar conhecimentos da Trigonometria plana e, possivelmente, apresentariam dificuldades quando da passagem para o registro algébrico.

Análise *a posteriori*

A Relação fundamental para os triângulos esféricos, objeto de estudo dessa atividade, foi determinada, por intermédio de questionamentos, exigindo troca de informações de todos os professores, a fim de que novas concepções se formassem.

Nesta experimentação, o saber foi sendo estruturado, organizado passo a passo, à medida que os itens eram debatidos e respondidos, um em conexão com o outro, fazendo com que novos conhecimentos fossem incorporados e surgisse um novo saber. São essas algumas qualificações do saber, isto é, estruturado, evolutivo, cultural e afetivo, este último percebido pelo comentário de um professor diante da solução: "gostei disso. A relação relaciona os três lados do triângulo e um ângulo".

Na resolução deste problema, os professores vivenciaram, por exemplo, a fase de formulação, quando, sobre a utilidade da relação que fora determinada e sobre a possibilidade de ela solucionar a situação-problema proposta no início das atividades, o professor (E) respondeu que "ela serve para determinar as medidas dos lados e também a medida dos ângulos de um triângulo esférico".

O professor (D) afirmou que "sim, mas é preciso conhecer os arcos NP, PI e o ângulo P" e (A) disse que "é possível, desde que as informações necessárias sejam determinadas, ou seja, necessitamos verificar as distâncias do navio ao pólo e deste à ilha e o ângulo formado pelos arcos de circunferências máximas (distâncias)".

No quinto encontro**,** discutimos a Atividade 07 e as situações 1, 2 e 3 da Atividade 08.

Atividade 07

Para resolver a nossa situação-problema, utilizaremos as conclusões obtidas anteriormente, lembrando que as coordenadas do navio são $_N$ = 42° 10´N e $_N$ = 051°20´W e da ilha são $_I$ = 68°40´N e $_I$ = 013°40´E.

a) Considere, novamente, o triângulo esférico PNI, no qual P é o pólo, N a posição do navio e I a posição da ilha. Chame d a distância do navio à ilha.

b) Faça uma representação para esse triângulo esférico no espaço abaixo.

c) O que você necessita traçar para representar, no desenho anterior, a latitude e a longitude do navio e da ilha?

d) Represente, no desenho anterior, a latitude $_N$ e determine a medida do lado NP.

e) Represente, no desenho anterior, a latitude $_I$ e determine a medida do lado PI.

f) Represente a longitude $_N$ e a longitude $_I$. A soma das medidas das longitudes de N e I, corresponde à medida de qual ângulo do triângulo esférico ? Determine essa medida.

g) Você pode aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, para solucionar o problema? Justifique.

h) Para essa situação, como pode ser escrita a Relação Fundamental?

i) Substituindo os elementos determinados, na relação anterior, você obterá que ___

j) Transforme, em graus, a medida do lado NP e a medida do lado PI, com aproximação de centésimos.

l) Escreva a relação (i), substituindo os resultados obtidos em (j).

m) Utilizando a calculadora, determine os valores do seno e do cosseno das medidas anteriores, com aproximação de centésimos de milésimos.

n) Substituindo os valores encontrados no item anterior, você obterá a Relação Fundamental.

o) Utilizando a calculadora, determine a medida da distância d, em graus.

p) Escreva a relação anterior, em função de milhas marítimas, sendo que 1° corresponde a 60 milhas marítimas.

q) Transforme a medida obtida, em km, recordando que a milha marítima internacional corresponde a 1852 metros.

Esta atividade teve como objetivo solucionar a situação-problema foco desta pesquisa.

Como essa situação envolveu operações com medidas de ângulos e transformação de unidades, foi necessário o uso de uma calculadora científica, para facilitar os cálculos.

Análise *a priori*

Esperávamos que os professores fizessem uma representação adequada da situação-problema o que, realmente, aconteceu, conforme vemos na Figura 62 que segue:

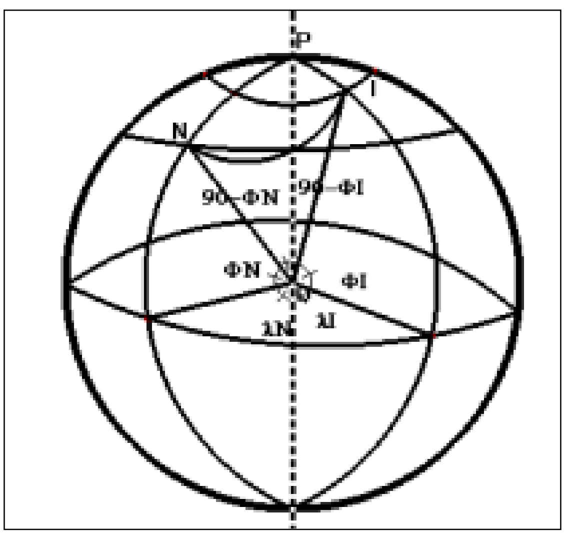


FIGURA 62 – A FIGURA QUE REPRESENTA A ATIVIDADE 07

Acreditávamos que os professores elaborassem as seguintes respostas:

No item (c), seriam necessários traçar os Pólos, o Meridiano de Greenwich (ou o eixo de rotação da Terra), o Equador, os Paralelos e os Meridianos.

Em (d)**,** após representarem a latitude do navio, para determinar a medida do lado NP, precisariam saber que a unidade de medida de um arco de circunferência (o lado NP) é o grau e que o ângulo central correspondente a esse arco mede 90° - $_N$, então a medida de NP seria dada por 90° - 42°10´= 47° 50´.

No item (e), representariam a latitude da ilha e para determinar a medida do lado PI, fariam os procedimentos análogos e, assim, a medida de PI seria dada por 90° - $_I$ = 90° - 68° 40´= 21° 20´.

Na questão (f), depois de representarem a longitude do navio e a longitude da ilha, verificariam que a soma das medidas dessas longitudes corresponde à medida do ângulo P, cuja medida será dada por 51° 20´+ 13° 40´= 64° 60´= 65°.

Em (g), afirmariam que é possível aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, porque, no triângulo esférico PNI, foram determinadas as medidas dos lados NP e PI e do ângulo P.

Na questão (h), lembrando que d é a distância do navio à ilha, escreveriam a relação como:

cos d = cos NP x cos PI + sen NP x sen PI x cos P ou

cos d = sen PN x sen PI x cos P + cos PI x cos PN.

No item (i), substituiriam os elementos determinados na relação anterior, chegando ao resultado:

cos d = cos 47° 50´ x cos 21° 20´+ sen 47° 50´ x sen 21° 20´ x cos 65° ou

cos d = sen 47° 50´ x sen 21° 20´x cos 65° + cos 47° 50´x cos 21° 20´ .

Em (j), transformariam a medida do lado NP e a medida do lado PI, usando uma regra de três simples direta, lembrando que 1° corresponde a 60'. Assim,

50' = 0,83° e 20' = 0,33° considerando a aproximação de centésimos. Logo, med (NP) = 47,83° e med (PI) = 21,33°.

Na questão (l), escreveriam a relação como

cos d = sen 47,83° x sen 21,33° x cos 65° + cos 47,83° x cos 21,33°.

Em (m), com a calculadora, determinariam os valores pedidos aproximados, ou seja, sen 47,83° = 0,74... e sen 21,33° = 0,36...; cos 47,83° = 0,67... e

cos 21,33° = 0,93... e cos 65° = 0,42...

No item (n), substituiriam os valores encontrados na relação, que se tornaria

cos d = 0,74 x 0,36 x 0,42 + 0,67 x 0,93, que implica cos d = 0,11 + 0,62 e

cos d = 0,73. Logo d = arc cos 0,73.

Em (o), utilizando a calculadora, determinariam a medida da distância d, em graus, como d = 43,11°, aproximadamente.

Em (p), relacionando 1° com 60 milhas marítimas, escreveriam que d = 2586,6 milhas marítimas.

No item (q), transformariam essa medida, desde que estabelecido que 1 milha marítima internacional corresponde a 1852 metros, para d = 4790383,2 metros ou d = 4790,38 km.

Para solucionarem a situação-problema, os professores deveriam mobilizar os conhecimentos das atividades precedentes, mais a relação entre a medida de um ângulo central com a do arco correspondente, as operações com números decimais, as operações com medidas de ângulos, a regra de três simples, a transformação de unidades de medida de comprimento, as relações da Trigonometria plana e as operações com funções trigonométricas inversas.

Provavelmente, surgiria dificuldade no manuseio da calculadora científica e na conversão de medidas de ângulos, um conteúdo pouco abordado.

Análise *a posteriori*

Em virtude das respostas das questões terem sido validadas e institucionalizadas uma a uma, as possíveis soluções acabaram sendo aceitas.

No item (c), para representar a latitude e a longitude do navio e da ilha alguns professores (B, D, F) disseram que necessitavam traçar 5 Meridianos (com 10° um do outro), 4 Paralelos, o Equador, o Meridiano de Greenwich. Já o professor (E) traçaria 5 Meridianos e 4 Paralelos (cada um tem 10°) para o navio e 1 Meridiano e 7 Paralelos (também considerando a graduação de 10°) para a ilha. A Figura 63 mostra a representação do professor (A). Essas respostas nos surpreenderam, porque não supúnhamos que explicitariam o número de Paralelos e de Meridianos.

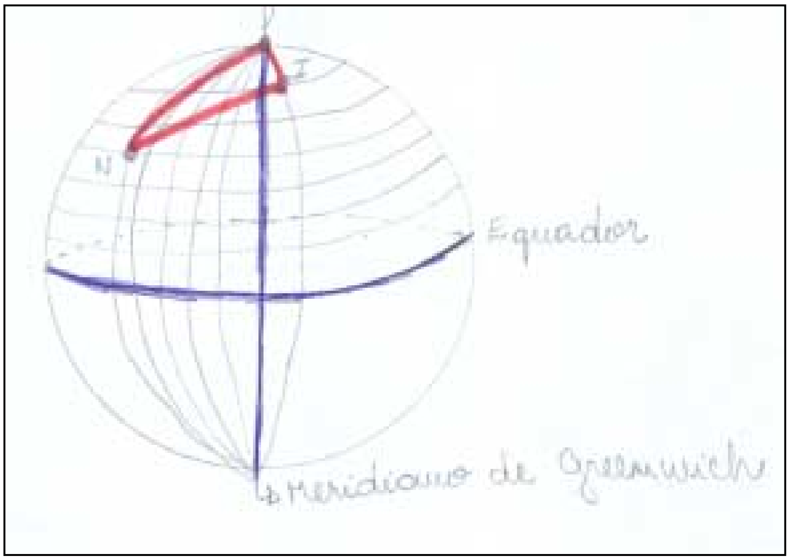


FIGURA 63 – PROTOCOLO REFERENTE À POSIÇÃO DO NAVIO E DA ILHA

Em resposta à questão (g), o professor (A) afirmou que: "sim, pois temos dois lados e o ângulo oposto ao lado a ser determinado, o que será necessário para aplicarmos a Relação fundamental para os Triângulos esféricos".

No item (h), (E) escreveu as seguintes regras de três simples:

1° ________ 60'	e	1° _______ 60'
x _________ 50'		y ________ 20'

Em (p), os professores (C, D, E, F) anotaram que d = 43,11 x 60 e d = 2586,6 milhas marítimas.

Em (q), (D, F) utilizaram a seguinte regra de três:

1 milha________1852 m

2586,6________ x

Analisando os resultados, percebemos o dinamismo que o saber possui, isso porque esta situação-problema, cuja resolução foi fundamental para a nossa pesquisa, movimentou saberes oriundos da Aritmética, que se encaixou com a Álgebra que, por sua vez, se integrou à Trigonometria, esta à Geometria esférica e esta ao contexto, num vai e vem cada vez mais forte, qual um turbilhão de idéias e ações, de discussões e validações, de reflexões e institucionalizações.

Percebemos o saber como estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo. Exemplificamos pelos professores (D, E) que, na questão (g), afirmaram que "sim, porque temos o ângulo P, a distância PN e a distância PI, assim podemos calcular a distância do navio até a ilha".

Para solucionar essa situação, os professores necessitaram transferir saberes contidos desde a primeira até a sexta atividade e mais os conhecimentos prévios já citados. Necessitaram, ainda, compartilhar seus conhecimentos com o outro, modificando-os, se preciso.

Além disso, esta situação-problema partiu de um contexto (um navio dirigindo-se a uma ilha e salvar os náufragos) que, embora não seja corriqueira é passível de ocorrer e isso lhe dá sentido. Essa situação foi usada para articular o saber cognitivo com o afetivo, uma vez que ela possibilita o despertar da emoção, fazendo com que os professores se interessassem mais.

Acerca do processo de ensino e aprendizagem envolvido nesta situação, notamos que percorreu as fases de formulação, como na questão (c), em que alguns professores enumeraram quantos Paralelos e Meridianos seriam ultrapassados pelo navio até a ilha e, por força da integração entre as questões, de validação e institucionalização ocorreram gradativamente e ao mesmo tempo.

Esta não é a atividade final, porque, embora a situação-problema tivesse sido solucionada, nos sentimos conduzidos para algumas reflexões a respeito de outros tópicos da Geometria na superfície esférica.

Por isso, os professores discutiram a Atividade 08 constituída de cinco situações.

Situação 1

Utilizando uma superfície esférica e os instrumentos necessários, responda às seguintes questões: a) Como você define *reta* numa superfície esférica? b) Numa superfície esférica, existem retas concorrentes? Justifique. c) Numa superfície esférica, existem retas paralelas? Justifique. d) Os paralelos terrestres são retas paralelas numa superfície esférica? Justifique. e) Na Geometria Esférica, a reta é infinita? Justifique. f) Numa superfície esférica, como você define segmento de reta?

Esta situação teve como finalidades:

- Definir reta e segmento, numa superfície esférica.
- Verificar a validade ou não do V Postulado de Euclides numa superfície esférica.
- Investigar a finitude da reta numa superfície esférica.

Uma vez que pretendíamos que os professores construíssem novos conhecimentos, todo o material manipulado, anteriormente, tornou-se de uso permanente, estando à disposição deles a qualquer instante.

Análise *a priori*

No item (a), julgávamos que os professores definissem reta, numa superfície esférica, como circunferência máxima, em vista das conclusões anteriores.

Em (b), achávamos que responderiam que "sim", existem retas concorrentes, em virtude da institucionalização ocorrida na atividade 01.

Na questão (c), eles, possivelmente, responderiam que "não", justificada pelas discussões geradas na questão precedente.

Em (d), esperávamos que respondessem "não", porque não são considerados como retas.

Em (e), poderiam responder que "não", em vista da institucionalização dada na atividade 01.

No item (f), eles, talvez, definissem segmento de reta, numa superfície esférica, como um arco de circunferência máxima.

Nesta situação, os professores necessitariam transferir saberes da Geometria euclidiana, bem como da atividade 01 e acreditávamos que não surgiriam dificuldades.

Análise *a posteriori*

Em (a), todos os professores definiram reta como uma “circunferência máxima”.

No item (b), todos responderam que “sim”. Como justificativa temos aquela dada pelo professor (D) para quem “as circunferências máximas como dois meridianos ou qualquer meridiano com o Equador" e (E) para quem "as circunferências máximas representadas pelo Equador e pelo Meridiano de Greenwich são concorrentes".

No item (c), todos concordaram que “não” existem retas paralelas e uma das explicações foi dada por (A) ao afirmar que "não, pois reta na superfície esférica é definida como circunferência máxima e as circunferências máximas sempre se encontram em dois pontos".

Em (d), todos responderam que os paralelos terrestres “não são retas paralelas”, por exemplo, (C, D, E, F) disseram que "não, pois os paralelos terrestres não são considerados retas".

No item (e), sobre a reta ser infinita, todos afirmaram que “não” e (A) respondeu que "não, é finita, pois inicia em ponto e volta a esse mesmo ponto. O comprimento da reta será o comprimento da circunferência máxima".

Em (f), todos definiram segmento de reta como "arco de circunferência máxima".

Observamos que os professores possuíam o conceito euclidiano de reta e suas especificações e utilizaram, com naturalidade, as mesmas denominações para uma superfície esférica, sem que houvesse conflito entre elas. O julgamento que fizemos acerca do obstáculo epistemológico causado pela reta, vista como infinita pela Geometria euclidiana, não se confirmou, porque eles concluíram que, na superfície esférica, podemos determinar o comprimento de uma reta.

O saber "tomou forma" nesta situação, quando, no item (c), o professor (B) ao responder sobre se existem retas paralelas disse: "não, quaisquer circunferências máximas se encontram em dois pontos" e (E) respondeu: "não, pois as retas paralelas não são circunferências máximas", conclusões fundamentais, porque causaram uma ruptura no pensamento geométrico que afirmava que o quinto postulado de Euclides era questionável.

Mais comprovações encontramos, no item (d), a uma pergunta provocadora a qual o professor (A) inferiu "não, levando-se em consideração que retas são circunferências máximas, paralelos não são retas". Tudo isso com discussões entusiasmadas, tendo como efeito a valorização de si próprio.

Além disso, todas as etapas da Teoria das Situações Didáticas foram vividas pelos professores, como é o caso da formulação dada por (F), no item (e), ao deduzir que "não, porque todos os pontos se encontram e podemos medir como, por exemplo, as circunferências máximas"; da validação da resposta ao item (e) dada pelo professor (B): "não, pois ela sai de um ponto e retorna ao mesmo ponto de origem, isto é, podemos medir" e mais da institucionalização simultânea, na qual estabelecemos que:

Na Geometria esférica, as retas são circunferências máximas e duas circunferências máximas sempre se interceptam em dois pontos, então, elas podem ser chamadas concorrentes. Conseqüentemente, podemos dizer que, nessa Geometria, não existem retas paralelas. Este foi o marco inicial da Geometria de RIEMANN.

Os paralelos terrestres não são retas paralelas (conforme a definição dada na Geometria Euclidiana), porque, numa superfície esférica, eles são circunferências menores e, portanto, não são retas, e mais, não existem retas paralelas.

Na Geometria de RIEMANN, a reta tem comprimento determinado.

Segmento de reta pode ser definido como um arco de circunferência máxima.

Cada um, à sua maneira, organizou um saber provisório, validou-o e, depois, ele foi institucionalizado, dessa forma não podemos falar em erros.

Situação 2

a) Utilizando as réguas esféricas, desenhe duas retas em uma superfície esférica. Quantas regiões internas à elas ficam determinadas? Caracterize essas regiões. b) Qual a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si numa superfície esférica? O que você pode concluir a respeito dos ângulos determinados pela interseção dessas retas?

Os objetivos desta situação são:

- Caracterizar as regiões internas a duas retas numa superfície esférica.
- Identificar as condições para que duas retas sejam perpendiculares, numa superfície esférica e descrever os ângulos formados por elas.

Análise *a priori*

Em (a), acreditávamos que alguns professores identificariam quatro regiões internas e finitas e as caracterizariam como formadas por oito ângulos que, por sua vez, têm seus vértices nos dois pontos de interseção de cada reta, sendo quatro pares de ângulos opostos pelo vértice congruentes como na Figura 64 e, ainda, outros poderiam mencionar que há dois lados medindo 180° cada um.

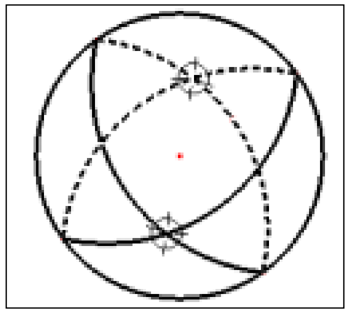


FIGURA 64 – REPRESENTAÇÃO DE REGIÕES DETERMINADAS POR DUAS RETAS

Na questão (b), associando seus conhecimentos da Geometria euclidiana, poderiam afirmar que duas retas seriam perpendiculares entre si, se os ângulos formados por elas medissem 90°. Esperávamos que notassem, também, que essas retas formam quatro regiões congruentes segundo a Figura 65:

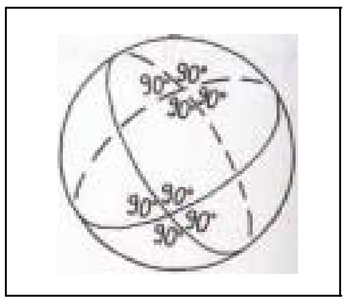


FIGURA 65[30] – REPRESENTAÇÃO DE DUAS RETAS PERPENDICULARES

Os professores necessitariam mobilizar, nesta situação, os conhecimentos da Geometria euclidiana sobre ângulos opostos pelo vértice e retas perpendiculares, além dos anteriormente institucionalizados e, provavelmente, não existiriam dificuldades na aprendizagem.

Análise *a posteriori*

No item (a), cinco professores perceberam que duas retas, numa superfície esférica, determinam quatro regiões internas.

Quanto à caracterização dessas regiões, todos responderam que elas possuem ângulos opostos pelo vértice; os professores (A, B, C, D) que elas possuem

[30] Esta figura foi extraída do livro de LÉNART, I., *No-euclidean Adventures on the Lénárt Sphere,* 1996, p. 34.

ângulos suplementares; (D, E, F) que a medida de cada lado mede 180°, sendo que, apenas, (E, C) apontaram a existência de oito ângulos. Já os professores (A, D, E) afirmaram que "a soma das medidas dos 4 ângulos é 360°" e (D) que as "regiões são congruentes", particularizando a situação.

Na questão (b), todos colocaram como condição para duas retas serem perpendiculares, a interseção entre elas formarem ângulos de medida 90°. Os professores (A, C, D, E) colocaram, ainda, que as regiões devem ser congruentes e todos identificaram ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. O professor (B) disse, além disso, que as retas seriam congruentes e (F) que formariam ângulos congruentes. Diante dessas afirmações, notamos o surgimento da noção de congruência, aplicada à superfície esférica e uma articulação entre a Geometria euclidiana e a Geometria esférica.

O saber foi, novamente, "apanhado", quando se movimentava de uma situação à outra, mediado pelas interações entre os membros dos grupos, o que pode ser comprovado pelas conclusões a que os professores chegaram, no item (a), como (B) ao caracterizar as regiões internas a duas retas como "pares de ângulos opostos pelos vértices, suplementares dois a dois" e (D) com a afirmação de que "cada região possui dois ângulos iguais (bi-ângulo); a soma dos 4 ângulos é 360°; são opostos pelo vértice; suplementares; cada lado do ângulo mede 180°; as regiões são congruentes".

Em (b), o professor (C) que dissera “... que formem 4 ângulos de 90° assim formando regiões congruentes"; (B) "...que ao se interceptarem formem ângulos de 90°, que teremos retas congruentes", que nos leva a investigar a existência ou não de "retas congruentes". O saber foi estruturado, evoluiu, foi cultural, contextualizado e atingiu a dimensão afetiva.

Por outro lado, a situação permitiu que fossem vivenciadas todas as fases da Teoria das Situações Didáticas, como a de ação, quando diante do problema, os professores manusearam as réguas esféricas e refletiram sobre as condições dadas; de formulação exemplificada, na questão (b) pelo professor (D): "as retas se interceptarem formando ângulos de 90°, e 4 regiões congruentes", além da validação e da institucionalização, simultaneamente, às conclusões e, no final, a institucionalização foi apresentada na forma de lacunas a serem preenchidas:

Numa superfície esférica duas retas determinam regiões internas a elas e finitas. Essas regiões possuem dois pares de ângulos de vértices opostos e congruentes, dois lados medindo 180° cada um. Cada região é denominada bi-ângulo.

Dizemos que duas retas são perpendiculares entre si se elas dividiram a superfície esférica em quatro regiões congruentes e os ângulos formados pela interseção entre elas forem retos.

As afirmações dadas pelos professores (A, D, E) de que "a soma das medidas dos 4 ângulos é 360°", no item (a)**,** ao caracterizarem as regiões formadas por duas retas não consideraremos erradas, por se tratar de um caso particular, quando as retas são perpendiculares entre si e quanto às outras afirmações, elas são perfeitamente adequadas.

Situação 3

Valendo-se das réguas esféricas, responda às seguintes questões: a) Como pode ser definido polígono na Geometria esférica? b) É possível construir um polígono de dois lados nessa Geometria? Justifique. c) Como pode ser definido um quadrilátero? d) É possível construir um quadrado? Justifique.

As finalidades para esta situação foram:

- Identificar e definir polígono esférico.
- Reconhecer a existência de um polígono esférico de dois lados.
- Identificar e definir um quadrilátero numa superfície esférica.
- Discutir a existência de um quadrado numa superfície esférica.

Análise *a priori*

Na questão (a), julgávamos que alguns professores definiriam um polígono esférico como uma figura, cujos lados são arcos de circunferências máximas e outros como uma figura, cujos lados são segmentos, termo já abordado na situação 1 e esperávamos que respondessem ser uma figura formada por dois ou mais segmentos.

Em (b), uns professores diriam que "não", por analogia com a Geometria euclidiana, já outros, traçando um polígono com as réguas esféricas, verificariam ser possível, bastando considerar um dos lados como um arco pertencente ao contorno da superfície, como mostra a Figura 66.

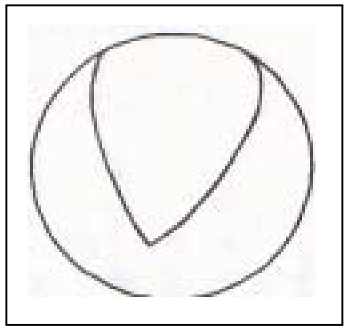


FIGURA 66[31] – REPRESENTAÇÃO DE UM POLÍGONO ESFÉRICO

No item (c), uns professores poderiam definir quadrilátero como uma figura de quatro lados e mesmo como uma figura formada por quatro segmentos dois a dois concorrentes, conforme a Figura 67 e que esperávamos como resposta.

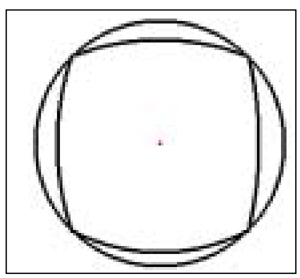


FIGURA 67 – REPRESENTAÇÃO DE UM QUADRILÁTERO ESFÉRICO

Na questão (d), seria possível que alguns professores concluíssem que "não", porque os ângulos formados pelas retas não são retos e outros poderiam justificar que os segmentos "não são paralelos".

Para tanto, deveriam ser transferidos conhecimentos da Geometria euclidiana sobre polígonos e os saberes já institucionalizados nas situações anteriores, podendo surgir dificuldade na definição de quadrado numa superfície esférica.

Análise *a posteriori*

No item (a), todos professores definiram polígono esférico como "uma região..." com certas características, por exemplo:

(A): "região limitada por ´n´ arcos de circunferências máximas, em que a intersecção é denominada vértice, sendo n 2 , n € **N**".

(E): "polígono é uma região determinada por arcos de circunferências máximas, formando ângulos na intersecção destas".

Observamos que não esperávamos que definissem um polígono esférico como uma região e sim como uma figura.

Em (b), todos concluíram que é possível construir um polígono de dois lados e (A, B, C, F) especificaram que duas circunferências máximas formariam o polígono e (D, E) que dois arcos de circunferências máximas o formariam.

Na questão (c), (A, C, D, E, F) definiram um quadrilátero como uma "região...", o que não aguardávamos e (B) como uma figura geométrica. Algumas definições dadas pelos professores foram: (A): "região limitada por 4 arcos de circunferências máximas e a intersecção desses arcos formam 4 ângulos". Para (B) é "figura geométrica formada por segmentos e possui 4 ângulos não retos" e para (C, D, F) é "região determinada por quatro arcos de circunferências máximas".

Em (d), todos foram unânimes em afirmarem que "não é possível construir um quadrado" numa superfície esférica e os professores (A, B, D, E) justificaram: "não existem retas paralelas na superfície esférica", (C): "não existem retas paralelas de lados dois a dois" e (F): "precisamos ter retas paralelas e ângulos congruentes e não existem".

Notamos que os professores, ainda, utilizam as palavras "arcos de circunferências máximas" ao se referirem às retas de uma superfície esférica e isso é causado, possivelmente, pela definição de reta dada na Geometria euclidiana.

[31] Ibidem, p. 43.

Esta situação nos mostra uma rede de conhecimentos sendo tecida, ligando noções uma a uma, organizando o saber: é o que vemos na afirmação do professor (D) sobre o polígono esférico como "uma região determinada por arcos de circunferências máximas. A intersecção das circunferências máximas são os vértices que determinam os ângulos" ou de (F) como "uma região formada por arcos de circunferências máximas que se interceptam formando os vértices do polígono".

Esse saber está em permanente transformação, evolui, como percebemos, na mesma questão, na afirmação de (B), no item (a), de que é "uma figura formada por duas ou mais retas concorrentes", na qual usa o termo "retas" em substituição à "circunferências máximas". O saber não existe isoladamente, ele convive com o homem, emaranha-se no contexto, integra-se às mais diversificadas idéias, harmonizando-as e como produto final a emoção, a afetividade. São estes os atributos do saber, ou seja, estruturado, evolutivo, contextualizado, cultural e afetivo.

Vimos o saber/processo ultrapassando todas as etapas da Teoria das Situações Didáticas, como podemos perceber na formulação feita pelo professor (E), para a questão (c), ao definir um quadrilátero como "uma região limitada por 4 arcos de circunferências máximas e a intersecção entre estes arcos formam 4 ângulos", a validação do item (d) de que "não é possível construir um quadrado", porque não existem retas (lados) paralelas, Vimos, também, a institucionalização feita passo a passo.

Após as discussões, os professores preencheram as lacunas do texto referente à institucionalização, ficando estabelecido que:

Numa superfície esférica, podemos definir um polígono esférico como uma figura geométrica formada por duas ou mais retas concorrentes.

Ao polígono definido por duas retas concorrentes, que possui dois lados e dois ângulos e cujas medidas não ultrapassam 180°, damos o nome de bi-ângulo.

Numa superfície esférica, podemos construir um quadrilátero, cujos quatro lados são segmentos e cujos quatro ângulos não são retos. Portanto, é impossível construir um quadrado, pois, os quatro ângulos não são retos.

Novamente, não atribuiremos erros às concepções incompletas, porque o saber é provisório e cremos que, após a institucionalização, os professores fizeram as devidas adaptações.

No sexto encontro, foram abordadas as situações 4 e 5 da Atividade 08.

Situação 4

Na situação 2, da atividade 4, você definiu triângulo esférico. Agora, faremos um estudo mais amplo sobre esse objeto matemático. Para tanto, use réguas esféricas.

a) Marque os pontos L, M, N distintos, numa superfície esférica. Quantos triângulos você pode formar com esses vértices?

b) Diante da conclusão anterior, como você complementa a sua definição de triângulo esférico escrita naquela atividade?

Você conhece que, na Geometria euclidiana, que, num triângulo qualquer, a soma das medidas dos seus ângulos internos é sempre 180°. Vejamos o que acontece num triângulo esférico.

c) Marque um ponto P, numa superfície esférica. Trace uma reta da qual P é o pólo. Existe um triângulo que tem, apenas, um ângulo reto?

d) É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos retos numa superfície esférica? Justifique.

e) Desenhe, na superfície esférica, duas retas perpendiculares das quais P é o pólo. Faça a distância entre dois vértices opostos ser 90°. Quanto mede cada um dos três ângulos? A que conclusão você chegou?

f) Existem triângulos que possuem os três vértices numa mesma reta, sendo denominados triângulos degenerados. Quais as possibilidades para os ângulos desses triângulos? Faça uma representação desses triângulos e determine a soma Si das medidas dos seus ângulos internos.

g) Qual a soma Si das medidas dos ângulos internos do triângulo que possui três ângulos retos?

h) O que você pode concluir sobre a soma Si das medidas dos ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica?

i) Considere, numa superfície esférica, um triângulo FGH, cujos ângulos internos medem f, g, h. Como você define ângulo externo a esses ângulos internos? Qual a medida dos ângulos externos aos ângulos f, g e h?

j) Qual a soma Se das medidas dos ângulos externos de um triângulo numa superfície esférica?

Os objetivos desta situação foram:

- Verificar que existem oito triângulos esféricos formados por três vértices dois a dois pertencentes a uma mesma reta.
- Redefinir triângulo esférico.
- Comprovar que há triângulos esféricos com um, dois e três ângulos retos.
- Determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico.
- Determinar a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo esférico.

Análise *a priori*

No item (a), acreditávamos que os professores identificassem até seis triângulos de vértices L, M e N, pois poderiam não computar os vértices ligados por arcos dois a dois distintos. Feito isso, esperávamos que concluíssem que seriam formados oito triângulos.

Na questão (b), eles notariam que, em face de não existir um único triângulo, naquelas condições, precisariam considerar uma das medidas possíveis que, no caso, aguardávamos que seria a menor delas, da mesma forma como foi elaborado para a distância entre dois pontos e, assim, a definição de triângulo esférico poderia ser complementada com "três arcos de menor comprimento" ou "três arcos menores".

Em (c), responderiam que "sim", bastando que um dos lados do triângulo fosse perpendicular, como na Figura 68:

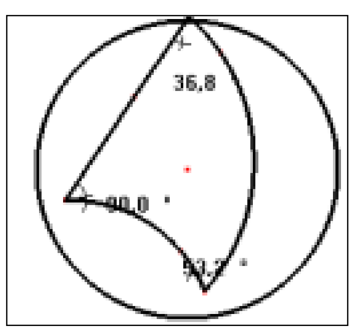


FIGURA 68 – REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO COM UM ÂNGULO RETO

No item (d), os professores diriam que "sim", desde que dois lados do triângulo fossem perpendiculares a um terceiro, como podemos ver na Figura 69:

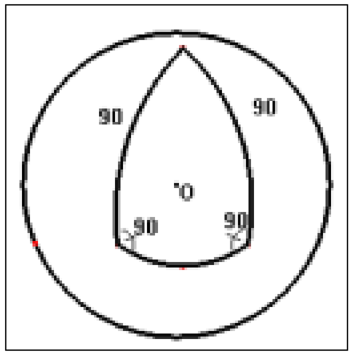


FIGURA 69 – REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO COM DOIS ÂNGULOS RETOS

Em (e), os professores desenhariam duas retas perpendiculares de pólo P, fariam a distância entre dois vértices como 90° e verificariam que cada um dos três ângulos do triângulo formado mede 90° (Figura 70) e, portanto, a soma das medidas desses ângulos seria 270°. Isso provocaria uma ruptura na noção da Geometria euclidiana de que "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°".

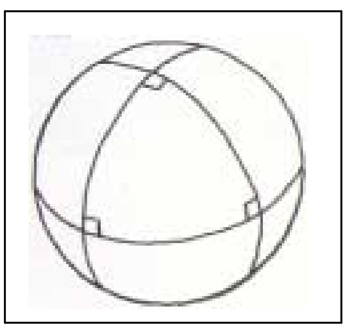


FIGURA 70[32] – REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO COM TRÊS ÂNGULOS RETOS

[32] Ibidem, p.187.

Na questão (f), julgávamos que os professores visualizassem, apenas, três ângulos de 180° como na Figura 71.

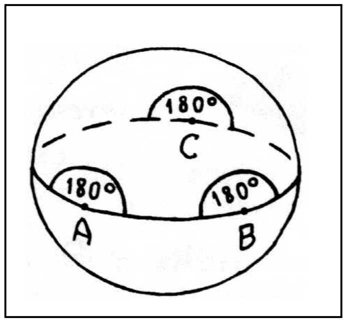


FIGURA 71[33] – REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO COM TRÊS ÂNGULOS DE MEDIDA 180°

No entanto, esperávamos que representassem, também, um triângulo com dois ângulos medindo 0° e outro medindo 180°, como vemos na Figura 72, entretanto esperávamos que aqui surgisse uma dificuldade, pois seria um conhecimento que exigiria uma abstração maior da parte deles.

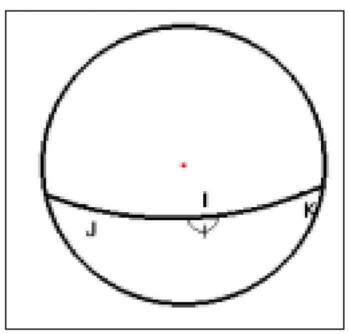


FIGURA 72 – REPRESENTAÇÃO DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO COM DOIS ÂNGULOS DE MEDIDA 0°

No item (g), em virtude da resposta dada no item (e), deveriam citar que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 270°.

[33] Ibidem, p. 57.

Em (h), os professores, possivelmente, concluiriam que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, numa superfície esférica, fosse um valor entre 180° e 540°.

Na questão (i), alguns professores poderiam definir ângulo externo de um triângulo como um ângulo adjacente a um ângulo interno e outros como o ângulo suplementar a ele, de qualquer maneira como eles são suplementares as suas medidas seriam dadas por 180° - f, 180° - g e 180° - h, como vemos na Figura 73.

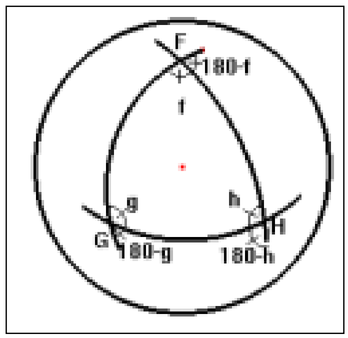


FIGURA 73 – REPRESENTAÇÃO DE ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Em (j), achávamos que deduzissem que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo, numa superfície esférica, variasse de 0° a 360°.

Para tanto, seriam mobilizados saberes institucionalizados de pólo, ângulo e triângulo esférico, bem como sobre triângulo plano e acreditávamos que surgiriam dificuldades, quando da identificação dos oito triângulos possíveis e na imaginação e representação dos triângulos degenerados, por se tratar de um caso particular de triângulo esférico.

Análise *a posteriori*

Na questão (a), necessitamos intervir, no momento em que os professores procuravam formar todos os triângulos de vértices L, M e N, porque não conseguiam visualizar os oito triângulos, considerando as maiores e as menores distâncias entre os vértices. Após muitas discussões, obtiveram a resposta esperada.

Ao complementarem a definição dada, anteriormente, por eles a um triângulo esférico, no item (b), o professor (B) o fez como "figura geométrica formada por 3 arcos menores"; (D): "são 3 arcos de circunferências máximas, utilizando os menores arcos para formar o triângulo menor", (E) como "são 3 arcos de circunferência máxima, utilizando os menores arcos de circunferência máxima", (F): "3 arcos de circunferência máxima de menor comprimento" e (C) apresentou o argumento de que "excluindo os arcos maiores, podemos encontrar um só triângulo formado apenas pelos 3 arcos menores".

Na questão (c), todos traçaram, com a régua esférica, uma reta de pólo P e concluíram que existe um triângulo que tem apenas um ângulo reto. Além disso, (A, D, E, F) exemplificaram como aquele formado pela interseção do Equador com o Meridiano, se referindo ao Meridiano de Greenwich.

Em (d), todos construíram um triângulo que tem dois ângulos retos e (A, D, E, F) particularizaram como aquele em que um dos vértices está no pólo e os outros dois no Equador.

No item (e), formaram o triângulo solicitado e verificaram que cada um dos seus ângulos mede 90°, porque a medida de um arco é dada pelo seu ângulo correspondente, sendo que (B, C, F) concluíram que a soma das medidas dos ângulos deste triângulo é 270°.

Em (f), a pesquisadora precisou levantar conjeturas, uma vez que os professores estavam achando difícil visualizar, principalmente, o triângulo que possui dois ângulos de medida 0° e outro de 180°. Finalmente, analisando cada possibilidade, representaram os dois tipos triângulos, isto é, um deles que possui três ângulos de medida 180° cada um e o outro com dois ângulos medindo 0° e o outro 180°. Determinaram a soma das medidas destes ângulos internos como 540° e 180°, respectivamente.

Na questão (g), ratificaram que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo que possui três ângulos retos é 270°. Nesta questão, pretendíamos que, comparando essa resposta com o resultado obtido no item anterior, inferissem que essa soma teria seus valores contidos num intervalo.

No item (h), alguns responderam que 180° Si 540° e outros que essa soma varia de 180° a 540°, como esperávamos.

Em (i), alguns professores desenharam o triângulo FGH com os ângulos externos (Figura 75) e o professor (A), por exemplo, definiu ângulo externo desse triângulo como "a diferença entre 180° e a medida interna do ângulo". Os outros relevaram as medidas como é o caso do professor (B), cujo protocolo compõe a Figura 74.

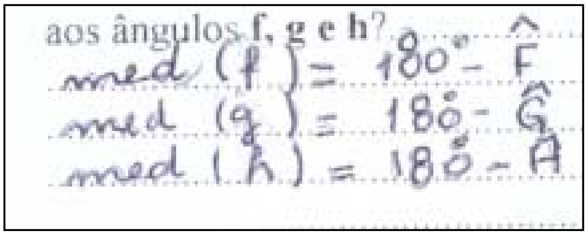


FIGURA 74 – PROTOCOLO REFERENTE ÀS MEDIDAS DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Em (j), os professores verificaram que a soma das medidas dos ângulos externos era dada por Se = 180° – f + 180° - g + 180° - h, ou seja, 540° - (f + g + h), sendo a soma Si = f + g + h. Portanto, para Si = 180°, obtiveram Se = 540° - 180° = 360° e para Si = 540°, Se = 540° - 540° = 0°, em virtude do intervalo de variação de Si ser de 180° a 540°, conforme já havíamos visto. Assim, eles concluíram que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é dada por 0° Se 360°, conforme as anotações do professor (D) conforme Figura 75.

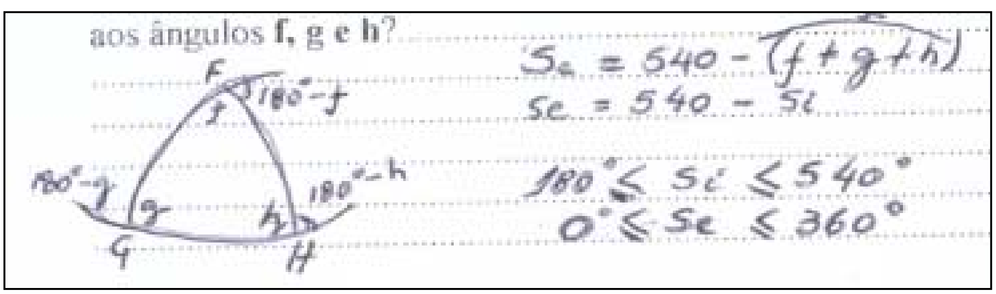


FIGURA 75 – PROTOCOLO REFERENTE À SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Os resultados obtidos foram, de certa forma, surpreendentes para os professores e ao serem perguntados se eles esperavam a conclusão de que "a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico varia de 180° a 540°", Um deles falou: "Não. Não conhecia esse lado. Tudo o que a gente imagina, tem. Foi ótimo". Da mesma forma, foi importante a dedução dada por (A), conforme Figura 76, em que notamos um pensamento voltado para a possível existência do Teorema de Pitágoras.

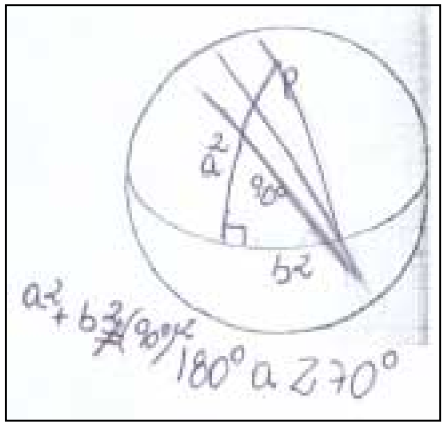


FIGURA 76 – PROTOCOLO REFERENTE AO TEOREMA DE PITÁGORAS

O conhecimento é pessoal, cada um traz o seu modo de olhar, mas é argumentando, trocando opiniões com o outro que ele se transforma, se organiza e se torna saber oficial. Nesta situação, os grupos manipularam os instrumentos que haviam construído sobre uma superfície esférica, partilharam idéias, até chegarem a alguns critérios comuns como o de que "excluindo os arcos maiores, podemos encontrar um só triângulo formado apenas pelos 3 arcos menores" idealizada pelo professor (C) e a definição de triângulo esférico vista na Atividade 04.

Já (E) dissera como "3 arcos de circunferência máxima chamados lados do triângulo e 3 vértices que são as interseções dos arcos de circunferência" completada como "são 3 arcos de circunferência máxima, utilizando os menores arcos de circunferência máxima". Estas são as fases do saber, isto é, estruturado, evolutivo, contextualizado, cultural e, também, afetivo, porque os professores se sentiram edificadores de um pensamento geométrico.

Observamos, ainda, que foi vivida a fase da formulação, quando, na segunda questão, (A) complementa que um triângulo esférico é uma "região limitada por três arcos de circunferências máximas sendo escolhidos os arcos de menor comprimento"; os momentos de validação e institucionalização ocorreram simultaneamente, sendo que examinamos diversos tipos de triângulos esféricos, que foram classificados de acordo com as medidas dos seus lados e quanto ao número de ângulos retos que possuíam. Posteriormente, os professores receberam, novamente, o texto da institucionalização com algumas lacunas para serem preenchidas, no qual estabelecemos que:

Num triângulo esférico, há três pares de vértices, que são ligados por arcos de circunferência máxima dois a dois distintos, formando 2 x 2 x 2 = 8 triângulos esféricos. Escolhemos, então, um triângulo esférico, cujos lados sejam os menores arcos de circunferência.

Uma definição de triângulo esférico pode ser como a "união de três arcos menores de circunferências máximas distintas" ou "união de três segmentos de menores medidas".

Sabemos que, na Geometria euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é uma constante e igual a 180°.

Numa superfície esférica, existe o triângulo esférico que possui um ângulo reto e que é chamado triângulo retângulo (Figura 77 a). O triângulo que possui dois ângulos retos é denominado triângulo birretângulo (Figura 77 b) e o triângulo que possui três ângulos retos é chamado triângulo trirretângulo (Figura 77 c).

Temos o triângulo, cujos dois ângulos medem 90° e, conseqüentemente, os dois lados opostos a eles medem 90°, denominado triângulo isósceles.

Podemos considerar o triângulo que tem três ângulos retos e, portanto, tem os três lados opostos a eles medindo 90°, chamado triângulo eqüilátero. Nesse caso, a soma das medidas desses ângulos é 270°.

Seguem adiante, algumas representações dos triângulos, conforme a Figura 77:

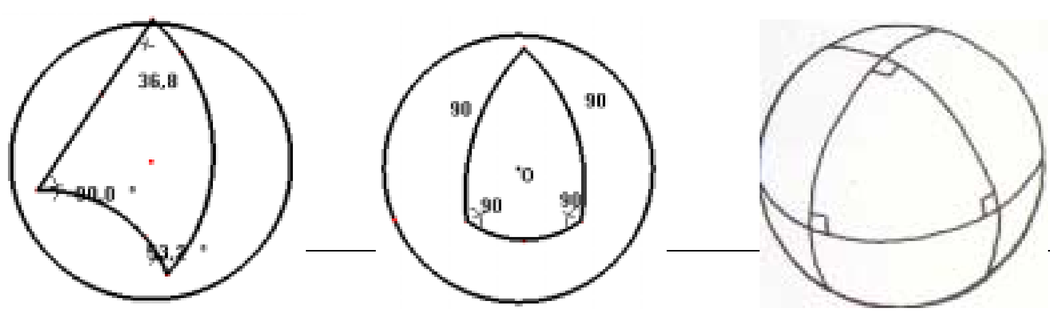


FIGURA 77[34] a, b, c – REPRESENTAÇÃO DE TIPOS DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

No triângulo trirretângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 270°.

Existem triângulos, cujos vértices pertencem a uma mesma reta, denominados triângulos degenerados. Há dois triângulos possíveis nessas condições:

O menor triângulo, que nomeamos IJK, tem seus vértices pertencentes a uma mesma reta, mas seus ângulos pertencem dois a dois ao mesmo arco, como mostra a Figura 72, no qual o ângulo J pertence ao arco IJ e mede 0°, o ângulo K pertence ao arco IK medindo 0° e o ângulo I mede 180°. Nesse caso, a soma das medidas dos ângulos internos é 180°.

O maior triângulo, que nomeamos de ABC, tem seus vértices pertencentes a uma mesma reta, sendo que dois ângulos pertencem ao mesmo arco e o terceiro não e, portanto, esses três ângulos medem 180°, conforme a Figura 71. Nesse caso, a soma das medidas desses ângulos é 540°.

Concluindo, num triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos não é uma constante e sim, um valor maior ou igual a 180° e menor ou igual a 540°.

Consideremos o triângulo FGH, cujas medidas de seus ângulos internos são f, g, e h. Uma representação desse triângulo foi dada pela Figura 73. As medidas de três ângulos externos dos ângulos f, g, h são dadas, respectivamente, por 180° - f, 180° - g, 180° - h. A soma das medidas dos ângulos externos Se será dada por

Se = 540° - (f + g + h) = 540° - Si.

Assim, Se varia de 540° - 180° = 360° a 540° - 540° = 0°, ou seja, de O° a 360°.

Ao discutirem o comportamento dos triângulos degenerados, os professores não cometeram erro algum na omissão de um deles, apenas possuíam um saber provisório anterior que, a partir desse momento, sofreu um acréscimo.

Situação 5

[34] Ibidem, p. 187.

Investiguemos a semelhança e a congruência de triângulos esféricos.

Na Geometria euclidiana, triângulos são semelhantes, se e somente se, todos os ângulos correspondentes têm a mesma medida e todos os lados correspondentes são proporcionais (AAA).

a) Desenhe, numa superfície esférica, usando a régua esférica, um triângulo ABC, cujos lados têm uma medida qualquer. Desenhe outro triângulo DEF, tal que a medida de seus lados seja a metade da medida dos lados do triângulo ABC. Você pode concluir que os ângulos do triângulo DEF são congruentes aos ângulos do triângulo ABC? Podemos dizer que esses triângulos são semelhantes? Justifique.

b) Na Geometria euclidiana, a congruência de triângulos pode ser verificada nos seguintes casos: LLL, LAL e ALA. Verifique essas possibilidades de congruência de triângulos numa superfície esférica. Há mais algum caso possível de congruência?

c) Numa superfície esférica, é válido o Teorema de Pitágoras? Justifique.

Esta situação teve como finalidades:

- Pesquisar a semelhança e a congruência entre triângulos esféricos.
- Verificar a validade do Teorema de Pitágoras numa superfície esférica.

Análise *a priori*

Acreditávamos que os professores, na questão (a), concluíssem que os ângulos do triângulo ABC e do triângulo DEF não são congruentes, pois, se diminuirmos as medidas dos lados do triângulo DEF, as medidas dos ângulos correspondentes também diminuiriam, não mantendo a congruência entre os ângulos correspondentes dos dois triângulos e, portanto, esses triângulos não seriam semelhantes, conforme a Figura 78:

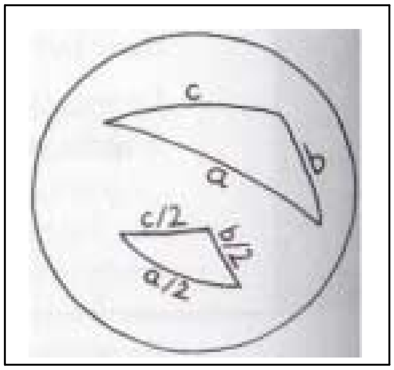


FIGURA 78[35] – REPRESENTAÇÃO DE DOIS TRIÂNGULOS DE LADOS PROPORCIONAIS E NÃO SEMELHANTES

No item (b), achávamos que os professores examinariam os casos de congruência LLL, LAL e ALA, com procedimento análogo aquele na Geometria euclidiana e concluiriam que não haveria mais algum caso possível de congruência entre dois triângulos, numa superfície esférica. No entanto, esperávamos que verificassem, ainda, o caso AAA que é válido somente na Geometria esférica.

Em (c), provavelmente, alguns professores responderiam que "sim", em virtude de existir triângulo retângulo numa superfície esférica, entretanto, outros diriam que "não", porque não valeria a igualdade dada pelo Teorema de Pitágoras. Queríamos que respondessem que "não", porque, no triângulo que tem três ângulos retos, os três lados seriam congruentes e, se considerarmos a medida de um dos lados como **a**, todas as outras medidas também o serão e, então, a relação ficaria como $a^2 = a^2 + a^2$, o que implicaria que $a = 0$.

Nesta situação, deveriam ser transferidos os conhecimentos sobre semelhança e congruência de triângulos planos, destacando os casos de congruência e, ainda, sobre o Teorema de Pitágoras.

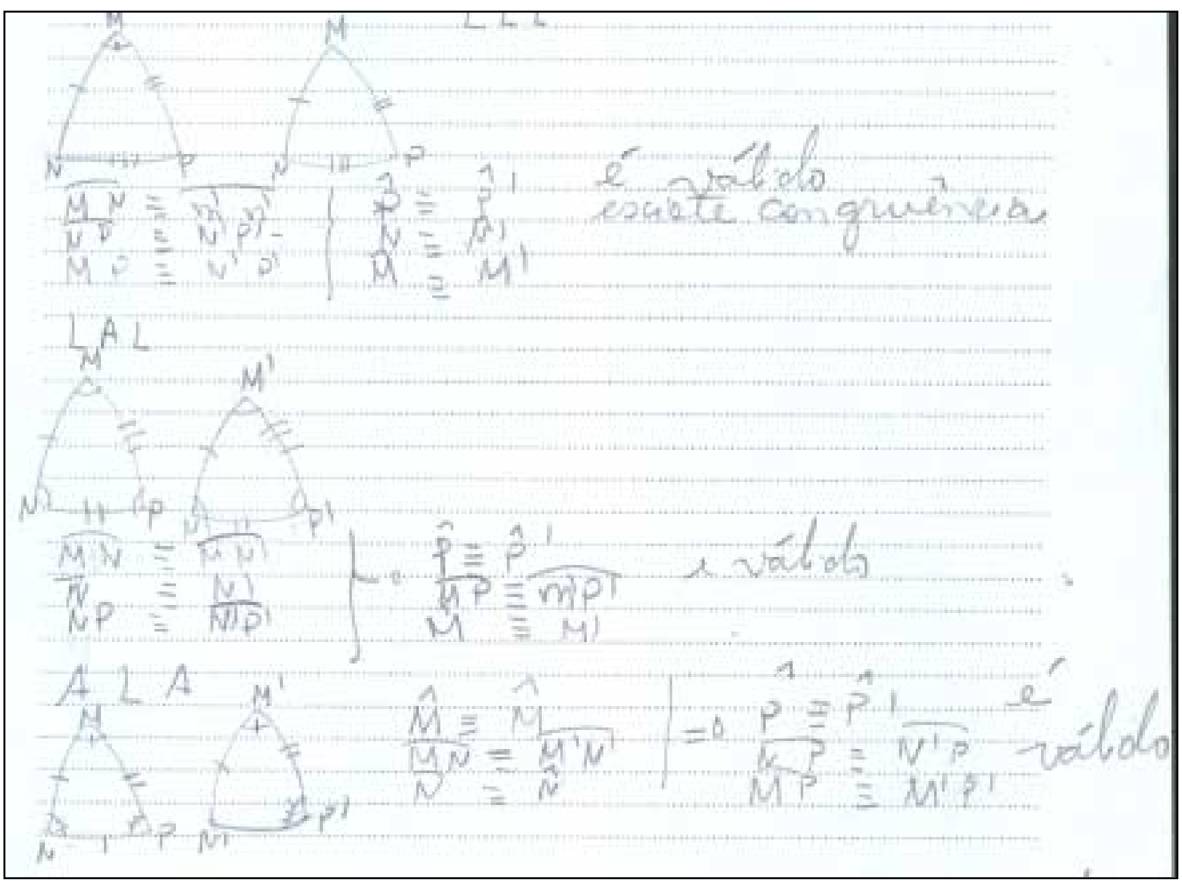
[35] Ibidem, p. 66.

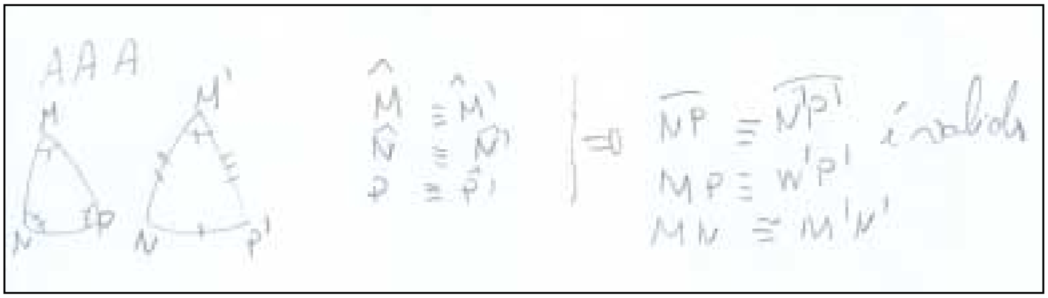
Possivelmente, apareceria dificuldade em aplicar os casos de congruência nos triângulos esféricos, principalmente, o caso AAA que seria válido só nessa Geometria e com relação ao Teorema de Pitágoras por não analisarem o triângulo com mais de um ângulo reto.

Análise *a posteriori*

No item (a), os professores inferiram que os ângulos "não" são congruentes e que os triângulos "não" são semelhantes, como a justificação dada pelo professor (D): "à medida que diminuímos o arco de circunferência, diminui também a abertura dos ângulos, logo os ângulos não são congruentes e os triângulos não são semelhantes" e (B) que "ao reduzirmos as medidas do triângulo ABC (no exemplo citado) pela metade não haverá semelhança, pois os ângulos não serão congruentes".

Na questão (b), todos responderam que somente os casos de congruência LLL, LAL e ALA são válidos para os triângulos esféricos e, como conseqüência, foram questionados pela pesquisadora a examinarem outros casos possíveis de congruência. Após discussões, comprovaram a validade do caso AAA, conforme protocolos sob nº 79 e 80.





FIGURAS 79 e 80 - PROTOCOLOS REFERENTES AOS CASOS DE CONGRUÊNCIA ENTRE DOIS TRIÂNGULOS

Em (c), os professores concluíram que "não" é válido o Teorema de Pitágoras para um triângulo esférico e, como exemplo, apresentamos abaixo as deduções do professor (A): "no trirretângulo - os 3 arcos medem 90°, portanto o quadrado de um lado é menor que a soma do quadrado dos outros dois. No birretângulo - dois arcos medem 90°, portanto o quadrado de 90° é menor que a soma do quadrado dos outros dois (90° e   ). No retângulo - um dos arcos mede 90°, a soma das medidas dos outros dois arcos está entre 180° e 270°, portanto o quadrado de 90° será diferente da soma do quadrado dos outros dois arcos".

As afirmações do professor (D) foram: "no triângulo trirretângulo não é válido, porque temos 3 lados (arcos) iguais, tomando um lado qualquer como hipotenusa, o quadrado deste é diferente da soma dos quadrados dos outros dois. No birretângulo, que é isósceles a hipotenusa é um dos dois lados iguais o qual o seu quadrado também é diferente da soma dos quadrados dos outros dois lados".

Novamente, percebemos que os professores realizaram novas inferências como, na primeira questão, em que (E) justificou a não-semelhança entre os dois triângulos "porque à medida que diminuímos o arco de circunferência a abertura do ângulo diminui, também".

Ao procurar validar suas afirmações, participaram entusiasticamente das discussões, demonstrando prazer e confiança nas suas produções, expondo o saber como estruturado, evolutivo, cultural, contextualizado e afetivo.

Além disso, o processo do ensino e aprendizagem perpassou por todas as etapas da Teoria das Situações Didáticas, pela formulação com as conclusões dadas pelo professor (E), no item (c), de que "porque no trirretângulo temos $(90°)^2 = (90°)^2 + (90°)^2$ e $8100 \quad 8100 + 8100$ não é válido ou no birretângulo temos $(90°)^2 \quad (90°)^2 + (\quad)^2$ ", quando da verificação da validade do Teorema de Pitágoras, também pela validação e institucionalização simultâneas e estabelecemos que:

Numa superfície esférica, não há triângulos semelhantes, pois, dois triângulos que possuem os lados correspondentes proporcionais, os seus ângulos não têm as medidas iguais. Triângulos esféricos só serão semelhantes, se forem congruentes.

Numa superfície esférica, encontramos as seguintes combinações entre lados e ângulos correspondentes congruentes, que garantem a congruência entre triângulos esféricos: LLL, LAL, ALA e AAA.

O Teorema de Pitágoras não é válido, numa superfície esférica, porque, para o triângulo com três ângulos retos, que também é eqüilátero, no qual a medida de seus lados seja, por exemplo, a, teríamos, ao aplicarmos o Teorema que: $a^2 + a^2 = 2a^2$, o que implica que $a = 0$.

Não apontaremos como erros o fato de não haverem pensado em verificar outro caso de congruência de triângulos esféricos. Não podemos esquecer que o saber não é definitivo, desenvolve-se com o tempo e permanentemente, cabe a cada um de nós dar-lhe movimento e colocá-lo em situações novas.

Na parte que encerramos, buscamos mostrar que, a partir de uma seqüência e articulando conhecimentos/saberes da Geometria euclidiana e da Geografia, tendo como apoio as discussões/reflexões/validações/institucionalizações, perpassando pela interdisciplinaridade e manuseando material de custo baixo e de fácil construção, os conhecimentos acerca de uma nova Geometria – a Geometria esférica – se tornaram saberes.

A seguir, procuramos confrontar os resultados obtidos, na experimentação, com as teorias que a fundamentaram, validando nossas hipóteses de pesquisa, ao mesmo tempo em que enfatizamos a Metodologia de pesquisa adotada.

CAPÍTULO V

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As capacidades de adquirir, de utilizar e de criar um saber novo são hoje tão importantes como o saber adquirido.

Britt- Mari Barth

Esta dissertação, *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar,* teve como objetivos:

- Propor, aos professores, uma seqüência didática, com atividades que mostre a relação interdisciplinar existente entre a Geometria esférica e a Geografia, formando interconexões entre esses domínios, ao mesmo tempo em que contextualiza os conteúdos a serem considerados e possibilita uma aprendizagem motivadora, que articule o objeto de estudo com a realidade.
- Proporcionar aos professores envolvidos reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino da Geometria esférica.

A partir da problemática que apontou, entre outros fatores, a necessidade de refletirmos a respeito do ensino da Geometria e o seu papel na Educação Matemática, assim como o efeito de seu estudo para o desenvolvimento do pensamento geométrico, levantamos a questão: Como uma seqüência de ensino pode possibilitar a apropriação de um novo domínio – a Geometria esférica – e levar o educador a reelaborar o seu pensar?

Para respondê-la, pressupomos as seguintes hipóteses de pesquisa:

- O conhecimento geométrico possibilita a compreensão/descrição/ representação de forma organizada do nosso mundo.
- A apreensão dos conteúdos constituintes da Geometria esférica poderá nos conduzir a argüições/reflexões/transformações/conscientização da nossa posição como docente, diante da ação pedagógica.
- A utilização dos recursos da interdisciplinaridade e da contextualização promoverá conexões/encadeamentos/solidez de saberes inerentes à Geometria esférica e de outros campos do conhecimento.

Inicialmente, percebemos, pelas respostas dos professores, às questões denominadas Preliminares, que lhes foram dadas no primeiro encontro, que eles não haviam participado de algum estudo acerca da Geometria esférica e acreditavam, em sua maioria, que a Geometria euclidiana não solucionaria todas as situações que envolviam a Geometria.

Fomos orientados, na elaboração de uma seqüência didática, por esse fato e pelos resultados dos Estudos preliminares, que trataram desde a análise histórica e epistemológica do objeto Geometria esférica, até a análise de algumas concepções dos professores acerca dessa Geometria, passando pelas análises das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, de publicações científicas a respeito dela e de dissertações relativas às Geometrias não-euclididanas.

Essa seqüência de ensino foi elaborada de tal maneira que os professores fossem conduzidos a refletir/questionar acerca de alguns aspectos da Geometria de RIEMANN, sendo a sua construção e a experimentação baseada na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy BROUSSEAU (1986). A análise de cada uma das atividades foi regida pela Engenharia Didática, Metodologia de Pesquisa de Michèle ARTIGUE (1988) e no que se refere à Formação de professores, optamos pela teoria de Britt-Mari BARTH (1993).

Apoiados nos PCNEM, que apontam a resolução de problemas como uma importante estratégia de ensino, decidimos iniciar este trabalho, por uma situação-problema, que para ser solucionada demandou sete atividades e, para aprofundar algumas noções, da oitava atividade.

Relataremos, a seguir, as conclusões obtidas pelos dois grupos de professores nas atividades, as quais, em virtude de terem sido discutidas, coletivamente, possuem pontos de encontro.

Ressaltamos que o professor (C) manteve-se perseverante no seu desejo de apreender, embora tenha apresentado dificuldades maiores, inclusive quanto aos conhecimentos prévios e à escrituração das respostas (que não serão objeto de análise), nos levando a retomar discussões e institucionalizações por vários momentos.

Os professores (A, C, D, E, F), ao tomarem contato com a situação-problema, colocaram que o percurso do navio não seria em linha reta. Segundo (A), o “percurso do navio dependia de um referencial” que poderia ser a bordo do navio e fora dele, já para (B), seria em linha reta. A figura que modelaria esse problema seria, para (A) um “fuso esférico” e, para (B), um “referencial cartesiano, onde N e S seriam o eixo y e L e W o eixo x”. Depois, compreenderam que uma superfície esférica modelaria esse problema. Os professores (D, E, F) concluíram que o modelo para o problema seria uma esfera.

Em prosseguimento, os professores (A, B, C) perceberam que, numa superfície esférica, existem infinitos tipos de caminhos de comprimento finito traçados por um ponto que lhe pertence; há infinitos caminhos ligando dois pontos e o menor caminho, de comprimento finito, segundo (A) é o de “comprimento menor”, para (B) é “um setor circular” e para (C) é a “distância entre os dois pontos”. Perceberam que, prolongando esse menor caminho, dois caminhos de comprimento determinado seriam formados.

Já os professores (D, E, F), afirmaram que há “infinitos caminhos circulares com comprimentos finitos traçados por um ponto; que o menor caminho que liga dois pontos distintos tem comprimento finito e é a “menor distância entre eles” e ao prolongá-lo, obteriam infinitos caminhos de comprimento determinado.

Manuseando o globo terrestre, os professores identificaram os pólos, o Equador, os Meridianos e os Paralelos terrestres, sendo que (A) definiu o Equador como “linha que divide o globo terrestre em dois hemisférios”; (C), como “linha que divide os pólos”; (B) como “serve para dividir o globo terrestre em dois pólos”; (D, E) como “linha (circunferência) que divide o globo em dois hemisférios e (F) como “linha que separa os meridianos”.

Quanto aos Meridianos, (A) disse que são “linhas verticais (circunferências) ‘paralelas’ ao Meridiano de Greenwich”; (B) que são “circunferências que seccionam o eixo do Equador verticalmente em dois pontos”; (D) que são “todas as semi-circunferências que passam pelos pólos e interceptam o Equador”; (E) que “são todas as semi-circunferências interceptam o eixo de rotação e cortam o Equador em dois pontos” e (F) que “são circunferências que interceptam a linha do Equador nos pontos”.

Quanto aos Paralelos terrestres, (A) coloca que são “linhas horizontais (circunferências) paralelas ao Equador”; (B) que são “circunferências paralelas ao eixo do Equador” e (D, E, F) como sendo os trópicos. Observaram a existência de circunferências máximas e menores, no globo terrestre, sendo que (A) apontou as coordenadas geográficas (latitude e longitude) e (B, C, D, E, F), a interseção da linha do Equador com os Meridianos, como aquelas que localizam um ponto no globo. Todos determinaram a posição aproximada do navio e da ilha.

Os professores construíram réguas esféricas, numa tira de cartolina, como instrumento de medida da distância entre dois pontos, a qual afirmaram não ser única e cuja unidade de medida pode ser o grau ou uma unidade de comprimento.

Familiarizados com as circunferências máximas, observaram que há dois pontos de interseção entre duas delas, determinando quatro arcos e oito ângulos, tendo como medida o grau. (A) definiu ângulo esférico como “uma região limitada por esses arcos”; (B) como a “interseção entre duas circunferências máximas”; (D) como “um espaço limitado por arcos de circunferência que se interceptam num ponto...”; (E, F) como “a reunião de dois arcos de circunferência que se interceptam num mesmo ponto”. Os professores sugeriram para instrumento de medida um transferidor esférico construído com diâmetros menores ao de um transferidor plano.

Ao unirem três pontos distintos, dois a dois pertencentes a uma mesma circunferência máxima e utilizando a régua esférica, os professores identificaram um triângulo esférico, o qual (A) designou como “uma região limitada por três arcos, cujos vértices são os pontos de interseção dos arcos”; (B) como “uma figura geométrica formada por três arcos”; (D) é “uma figura de três vértices, cujos lados são arcos de circunferências máximas”; (E) como “três arcos de circunferências máximas chamadas lados do triângulo e por três vértices que são a interseção dos arcos” e (F) como “a reunião de dois arcos de circunferência que se interceptam no mesmo ponto”.

Quando da determinação da relação entre um arco de paralelo e o arco do Equador correspondente, os professores valeram-se de conhecimentos da Trigonometria plana e resolveram o problema subseqüente usando a relação anterior.

Quanto à situação-problema, os professores determinaram a Relação Fundamental dos Triângulos Esféricos, utilizando, novamente, a Trigonometria plana, acharam essa relação útil para a determinação da medida de um lado e dos ângulos de um triângulo esférico e que permitiria solucionar a situação, o que ocorreu mobilizando conhecimentos de todas as atividades anteriores, incluindo os da Trigonometria plana, da Geometria euclidiana, da Aritmética e da Álgebra.

Procurando aprofundar os conhecimentos, os professores estabeleceram confrontações com aqueles advindos da Geometria euclidiana. Exemplificando, sobre a reta que, na Geometria esférica, é “uma circunferência máxima”, sendo o segmento de reta “arco de uma circunferência máxima”, sobre o não-paralelismo entre retas e a comprovação de que os paralelos terrestres não são retas paralelas e, também, o fato da reta ter seu comprimento determinado pelo comprimento da circunferência máxima que a contém.

Ao caracterizarem as regiões formadas por duas retas, emergiram noções acerca de ângulos opostos pelo vértice e de ângulos suplementares. A respeito do perpendicularismo entre retas, concluíram que elas formam entre si ângulos de 90° e determinam regiões congruentes.

Ao prolongarmos os estudos, (A) definiu polígono esférico como “uma região limitada por ‘n’ arcos de circunferência máximas, com n um número natural maior ou igual a 2”, (B) como “figura geométrica formada por duas ou mais retas concorrentes”, (D, E, F) como uma “região determinada por arcos de circunferências máximas”, sendo os vértices formados pela interseção delas, com todos verificando a possibilidade de construirmos um polígono de apenas dois lados.

Sobre o quadrilátero, (A) disse ser “região limitada por quatro arcos de circunferência máxima, cuja interseção formam quatro ângulos”; (B) é uma “figura geométrica formada por segmentos e possui quatro ângulos não-retos”; (D, F) como “região determinada por quatro arcos de circunferências máximas”; (E) como “uma região limitada por quatro arcos de circunferências máximas e a interseção entre estes arcos formam quatro ângulos”. Acerca do quadrado, concluíram que não é possível construirmos um, porque inexistem retas paralelas numa superfície esférica.

Complementaram suas definições dadas anteriormente sobre triângulo esférico, em virtude de existirem oito triângulos determinados por três vértices e escolheram os arcos de menor comprimento para formarem um triângulo. Verificaram que há triângulos com um, dois e três ângulos retos, gerando denominações semelhantes às usadas na Geometria euclidiana, concluindo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo varia de 180° a 540°, inclusive. Além disso, apontaram os ângulos externos de um triângulo, determinando a soma das medidas desses ângulos como um valor entre 0° e 360°, inclusive.

Os professores comprovaram que não há semelhança entre dois triângulos, porque “diminuindo a medida do arco, diminuímos a medida do ângulo”, porém existem quatro possibilidades de congruência entre dois triângulos: LLL, LAL, ALA e AAA. Ainda, o Teorema de Pitágoras não é válido, exemplificando para os triângulos retângulo, birretângulo e trirretângulo.

Assim, os resultados alcançados nos permitem inferir que a seqüência de ensino proposta, a partir de uma situação-problema, nos pareceu consistente e coerente, porque sua construção, tal como o trabalho de um engenheiro, apoiou-se em alicerces firmes previamente estabelecidos, edificou-se por meio da relação entre teoria/experimentação e finalizou com sua validação/institucionalização

As pesquisas de BROUSSEAU nos amparam, porque os professores, ao serem colocados diante de um problema a ser resolvido, precisaram argumentar, refletir, ouvir o outro, partilhar suas soluções e apresentá-las como modelos a serem julgados e as soluções aceitas se converteram em saberes oficiais, podendo ser utilizados nas atividades subseqüentes.

Tomemos, como exemplo, a Atividade 03, a qual, a partir do traçado de dois pontos distintos, numa superfície esférica, conduziu os aprendizes à noção de distância entre dois pontos, à construção de um instrumento de medida e à determinação de uma unidade de medida conveniente, bem como à medida da distância entre os pólos Norte e Sul.

Para que esse conhecimento fosse institucionalizado, os professores discutiram a unicidade dessa distância, surgindo opiniões divergentes. Para medir essa distância, necessitariam optar pelo uso de uma fita métrica, de uma tira de cartolina, de um pedaço de barbante ou de uma régua centimetrada, decidindo pela segunda. Para a construção de tal instrumento, simularam situações, manusearam o material, propuseram cálculos para acharem a melhor forma de marcar as medidas.

Dessa forma, eles confirmaram, empiricamente, a validade de tal ferramenta, cada um apresentando a sua resolução para os outros, todas construídas de forma diferente, ficando, então, com uma variedade de instrumentos de medida, cada um se adequando às dimensões da bola de isopor usada. No final, todas as soluções foram legitimadas e aceitas como úteis para medirmos a distância entre dois pontos numa superfície esférica.

Observamos, nos professores, modificações em suas concepções anteriores, porque, à medida que institucionalizávamos novos conhecimentos, eles passavam a usar a terminologia adequada, mobilizavam o pensamento geométrico que transitava ora pela Geometria euclidiana, ora pela Geometria de RIEMANN. Simultaneamente, estabeleciam inter-relações entre os diversos domínios da Matemática e a Geografia, reforçadas por um contexto que abordava uma situação real.

Os estudos de BARTH também contribuíram para a concretização deste trabalho, pois, segundo a pesquisadora, uma formação docente deve provocar mudanças na relação do professor com o saber e a sua elaboração, apontando o saber em algumas de suas formas: estruturado, evolutivo, contextualizado, cultural e afetivo a se sucederem, ao mesmo tempo.

Pudemos, por meio da mesma atividade, inserida num contexto, notar o saber tomando forma, cada professor estruturando suas idéias, movimentando conhecimentos anteriores e encaixando novos, compartilhando seus resultados com o outro, discutindo com entusiasmo e, simultaneamente, observamos o despontar da autoconfiança pela valorização de si mesmo.

Percebemos que houve mudanças de atitudes e valores, que podemos observar nos comentários feitos pelos professores:

O professor E observou que:

Num primeiro momento, apesar de ter 20 anos no magistério, fiquei assustada com a proposta a ser desenvolvida. Mas à medida que ia participando das etapas, fui inteirando-me do novo conceito apresentado: a Geometria não-euclidiana. Percebi que para a realização desse conceito, precisaria ter alguns pré-requisitos.

O assunto foi maravilhoso, principalmente trabalhando com a parte concreta: globo terrestre, instrumentos de medição e alguns conceitos sobre Geografia: meridianos, paralelos, pólos, latitude e longitude.

Na minha opinião a proposta foi interessante, pois nos levaria a pensar que não vivemos em uma superfície plana e sim sobre arcos de circunferência.

Outro professor disse que:

O curso foi muito enriquecedor, pois me deu a chance de participar de algo novo e acrescentou muito em minha profissão. As aulas foram muito claras e objetivas, mas sempre com situação onde você poderia fazer perguntas que logo eram esclarecidas de maneira convincente.

A Geometria não-euclidiana é muito interessante e pouco discutida no meio acadêmico.

Uma outra afirmação foi esta:

Foi uma experiência muito boa, pois o tema abordado para mim é inédito. Me chamou a atenção no sentido de que para grandes distâncias, a trajetória curva é diferente da trajetória em reta. Outro dado curioso foi que todo o nosso conhecimento ou bagagem pode ser utilizado nesse estudo, exigindo a utilização de conteúdos básicos e fazendo associações.

O desenvolvimento foi muito bom, pois nosso grupo tinha grande expectativa por se tratar de algo novo e também curiosidade nas conclusões.

Um terceiro professor disse que:

Participar deste "projeto" foi gratificante, empreendedor, enriquecedor. Aprendi a analisar, discutir, descobrir coisas novas, em tudo de velho que já existia nos meus conhecimentos prévios, foram as novidades que chegaram. Amei os antigos termos com cara nova, denominar um triângulo de esférico é um 'charme'. Toda experiência envolveu um clima de aprendizado, mesmo o que nós já sabíamos, aprendemos novamente. Como é legal pensar, avaliar, discutir e construir um conceito. O assunto também prendeu demais a atenção, tanto em casa continuava pensando sobre a situação-problema, encontrar sua solução foi um momento "delicioso". Esse novo momento me fez despertar para um maior aprimoramento em minha profissão.

Com relação à Metodologia aplicada, podemos inferir que, analisando o desenvolvimento dos professores, durante a experimentação e os resultados apresentados, que a mesma contribuiu para o ensino e a aprendizagem de alguns aspectos da Geometria esférica, auxiliando na concepção, na realização, na observação e na análise das atividades.

Para tanto, em cada atividade, explicitávamos os objetivos a que nos propúnhamos, a análise *a priori* (considerando o material a ser manipulado, prevendo as possíveis estratégias de resolução, com os conhecimentos a serem mobilizados, com as dificuldades passíveis de acontecerem); a análise *a posteriori* (com o relato das soluções dadas, por intermédio das observações de cada sessão e pelas produções dos professores) e a validação dos resultados obtidos com a confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Quanto às Hipóteses de pesquisa, percebemos que os conhecimentos/ saberes adquiridos possibilitaram que os professores visualizassem o mundo em que vivemos sob um olhar mais amplo, ao permitirem a sua compreensão/ descrição/ representação geográfica e geometricamente.

Para exemplificar, examinemos o caso da situação-problema, que colocou face a face noções euclidianas e riemannianas, levando os aprendizes a reorganizarem seus conhecimentos e concluírem que a trajetória do navio até a ilha, para salvar os náufragos, não poderia ser uma reta, na concepção euclidiana. Isso fez com que os professores fossem tirados de uma posição sedimentada, estável, deixada pela Geometria euclidiana que, ainda alguns acreditam ser inquestionável. Em vista disso, cremos que a primeira hipótese de pesquisa foi validada.

Este problema nos conduziu a reflexões acerca da nossa prática pedagógica, o que podemos notar na fala de um dos professores: "... acrescentou muito em minha profissão", transportando-os para uma sala de aula e uma possível introdução desse conteúdo, após estudos da Trigonometria plana.

Além disso, a contextualização da situação em questão permitiu que diversos conhecimentos fossem utilizados para resolvê-la, inter-relacionando saberes de Matemática e de Geografia, o que, certamente, implicará numa mudança na organização da escola, no currículo escolar, no plano de aula de cada professor envolvido, sem que cada um perca a sua individualidade, enfim, um comprometimento de todos no ensino e na aprendizagem. Em virtude disso, julgamos que a segunda e a terceira hipóteses de pesquisas podem ser validadas.

Outro exemplo foi extraído das Atividades 05 e 06. Na primeira delas, foi solicitado, aos professores, a determinação da Relação entre o arco do paralelo e do Equador correspondente, por meio da manipulação de relações da Trigonometria plana, levando-os à averiguação de que a razão entre um arco de paralelo e o arco do Equador correspondente é o cosseno da latitude de um lugar localizado naquele arco de paralelo.

Na segunda atividade em questão, obtiveram a Relação fundamental dos triângulos esféricos, permitindo a determinação da distância a ser percorrida pelo navio, desde a posição em que se encontrava ao receber a mensagem, até a ilha onde se encontravam os náufragos, como a soma dos cossenos das medidas de dois lados (traçados de um pólo à posição do navio e de um pólo à posição da ilha) do triângulo esférico construído, com os senos destes mesmos lados, sendo que as coordenadas do navio e da ilha foram dadas pela latitude e longitude de cada um deles.

Assim, acreditamos que nossas hipóteses de pesquisas foram validadas e as teorias que fundamentaram esta dissertação permitiram a solidificação de conhecimentos/saberes a respeito de alguns pontos da Geometria esférica.

Este trabalho apresentou algumas limitações as quais cremos poder minimizá-las, se investigarmos alguns assuntos, tais como:

- Aprofundamento da inter-conexão teoria/prática, com a introdução do software CABRI GÉOMÉTRE II, que permitiria, numa superfície esférica, a construção/visualização de retas, inclusive comprovando o não-paralelismo entre elas; de segmentos; de ângulos; de triângulos dos quais poderíamos verificar a soma das medidas dos seus ângulos internos; de quadriláteros, como o caso do Quadrilátero de Saccheri e do Quadrilátero de Lambert vistos no capítulo I, etc.

- Realização de investigações a respeito da validade do Teorema de Thales, numa superfície esférica, porque, na Atividade 05, por exemplo, percebemos relações entre os lados dos triângulos que nos pareceram levar a essa possibilidade.

- Introdução de estudos acerca de círculos, que poderiam ser obtidos, considerando um ponto, numa superfície esférica, e traçando um círculo de centro nesse ponto. Veríamos que círculos têm raios, diâmetros e cordas que seriam arcos de circunferência máxima, sendo o grau a unidade de medida e que cada círculo tem dois centros que seriam pontos opostos.

- Estudos sobre a área de um triângulo, cuja unidade de medida seria o grau e determinado pela soma das medidas de seus ângulos subtraindo-se 180° (chamado excesso esférico do triângulo).
- Investigações a respeito da inscrição e circunscrição de polígonos regulares, num círculo, sendo que a medida da área dos polígonos inscritos seria menor que a área do círculo e que a do polígono circunscrito, maior que a área do círculo.
- Verificações acerca de triângulos inscritos, num círculo, com um de seus lados sendo o diâmetro do círculo e que não seria um triângulo retângulo e o ângulo oposto a esse lado mediria mais que 90°.

Esta dissertação mostrou que é possível o professor introduzir os conteúdos abordados, em seu plano de aula, articulando teoria e prática, ensino e aprendizagem, interdisciplinaridade e contextualização.

Esperamos que nossa pesquisa tenha revelado aos geógrafos e aos matemáticos que podemos buscar um ensino conjunto, permeando o velho conhecimento com o novo saber.

Há muita pesquisa para ser realizada e muitos caminhos diferentes para serem seguidos. A Geometria esférica nos trouxe do passado, nos transporta para o futuro, para além da nossa fantasia.

Esta dissertação dirigiu-se, não apenas aos professores, mas para todo aquele que não tenha um olhar de mundo apenas científico, mas busque os Universos pontilhados de continentes, oceanos, estrelas, galáxias, ...

BIBLIOGRAFIA

AÏVANHOV, O.M. *A linguagem das figuras geométricas.* 4. ed. Lisboa. Prosveta, 1990.

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo, PUC-SP, 2.sem.2000.

ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique.* Recherches em Didactique des Mathématiques, Paris, v. 9, n . 3, p. 281-308, 1988.

BARTH, B-M., *O saber em construção.* Lisboa. Instituto Piaget, [1993?].

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim.* v.6. São Paulo. FTD, 2000.

BONETE, I. P. *As Geometrias não-euclidianas em cursos de Licenciatura: algumas experiências.* Guarapuava, 2000. 239 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas e Universidade Estadual do Centro-Oeste.

BONGIOVANNI, V.; LEITE, O .R. V.; LAUREANO, J. L. T. *Matemática e Vida 2º grau.* v. 2. São Paulo. Ática, 1993.

BONOLA, R. *Geometrias no euclidianas: Exposición histórico-crítica de su desarollo*. Buenos Aires. Espasa – Calpe Argentina, 1951.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2. ed. reimp. São Paulo. Edgard Blücher,1999.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Ambiental. *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental,* Brasília, 1998.

_____ Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio.* Brasília, 1999.

BRITO, A. de J. *Geometrias não-euclidianas: Um estudo Histórico-Pedagógico.* Campinas, 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

BROUSSEAU, G. *L'observation des activités didactiques.* Revue Français de Pedagogie. v. 45, p. 130 – 139, 1978.

_____*Les Obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques*. Recherches em Didactique des Mathématiques.v. 4, n. 2, p. 165 -198. Grenoble. La Pensée Sauvage, 1983.

_____*Fondements et* méthodes *de la didactique des Mathématiques.* v. 7, n. 2, p. 33-115. La Pensée Sauvage,Grenoble,1986.

CHABERT, J-L. *Les Geometries non euclidiennes.* IREM n. 1, oct. 1990.

COELHO, M. de A.; TERRA, L. *Geografia Geral e espaço cultural e socioeconômico.* São Paulo. Moderna, 2001.

COUTINHO, L. *Convite às Geometrias não-euclidianas.* Rio de Janeiro. Interciência, 2001.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática: a história de uma ciência em tudo e por tudo fascinante.* 2. ed. Rio de Janeiro. Francisco Alves, 1985.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar Geometria espacial posição e métrica.* v. 10. São Paulo. Saraiva, 2000.

EVES, H. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula Geometria.* São Paulo. Atual, 1992.

FAINGUELERNT, E. K., *O Ensino de Geometria e a Teoria das Inteligências Múltiplas: uma experiência com Informática no Colégio Santa Úrsula, no Rio de Janeiro.* Pátio revista pedagógica. Porto Alegre. Ano 1. n. 1, p. 46-50, maio/jul. 1997.

FAZENDA, I. (org.). *Dicionário em construção: interdisciplinaridade.* São Paulo. Cortez, 2001.

_____ *Didática e Interdisciplinaridade.* 6. ed. São Paulo. Papirus, 2001.

GARCÍA, C. M. *Formação de Professores para uma mudança educativa.* Porto, 1999.

GONÇALVES JR., O. *Matemática por assunto geometria plana e espacial.* 3. ed. v. 6. São Paulo. Scipione, 1995.

HATWAY, J. – A. *Cartas geográficas.*Lisboa. Verbo, 1965.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática Influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos.* 4. ed. Rio de Janeiro. Globo, 1956.

IEZZI, G. et al. *Matemática 2ª série 2º grau*. nova ed. São Paulo. Atual, 1991.

KASNER, E.; NEWMAN, J. *Matemática e Imaginação*. Rio de Janeiro. Zahar, 1968.

LÉNÁRT, I. *Non-euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: investigations in Planar and Spherical Geometry.* USA. Key Curriculum, 1996.

LIBAULT, A. *Geocartografia.* São Paulo. Nacional e da Universidade de São Paulo, 1975.

LIMA, E. L. de. *Meu professor de Matemática e outras histórias.* 3. ed. São Paulo. SBM, 2000.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria?*A Educação Matemática em Revista, São Paulo. ano III. p. 3-13, 1. sem. 1995.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.* 3. ed. São Paulo. Cortez, 1999.

_____. (coord.) *Atividades em Geometria.* 3. ed. São Paulo. Atual, 1991.

MARTOS, Z. G. *Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental.* Rio Claro, 2002. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

OLIVA, W. M. *A independência do axioma das paralelas e as Geometrias não-euclidianas.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 2, p. 28 - 31, 1. sem.1983.

PAIVA, M. *Matemática.* 1. ed. v. único. São Paulo. Moderna, 2002.

PEREZ, G. *A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus no Estado de São Paulo.* São Paulo. Ano III. p. 54-62, 1. sem. 1995.

PIERRO NETO, S. Di. *Matemática conceitos e histórias 8ª série*. São Paulo. Scipione, 1998.

RAISZ, E. *Cartografia Geral.* Rio de Janeiro. Científica, 1969.

SACROBOSCO, J. *Tratado de Esfera.* São Paulo. UNESP, 1991.

SANTALÓ, L. A. *Geometrias no euclidianas.* Buenos Aires. Eudeba, 1961.

SOUZA, M e. *Histórias e fantasias da Matemática.* 2. ed. Calvino, 1939.

SOUZA, M. C. G. *O. 5º Postulado de Euclides: A Fagulha que Desencadeou uma Revolução no Pensamento Geométrico.* Rio de Janeiro, 1998. 225 f. Dissertação (Mestrado em Ciências)- Universidade Federal do Rio de Janeiro.

SOUZA, A. C. C. de *Aspectos históricos das Geometrias não-euclidianas.* Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 8. n. 9, p. 75-84, 1993.

STRUIK, D. J., *História Concisa das Matemáticas.* 2. ed. Lisboa. Gradiva, abr./ 1992.

VERA, F. *Breve História de la Matematica.* Buenos Aires. Losada, 1946.

YAMASHIRO, S. *Fundamentos projetivos da Geometria Elíptica.* Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 1991.

YOUSSEF, A . N. ; FERNANDES, V. P. *Matemática Conceitos e Fundamentos.* v. 2*.* São Paulo. Scipione, 1993.

ANEXOS

ANEXO I

NOME____

CURSO__________________________________DATA_______/________/2002.

PRELIMINARES

Responda às questões abaixo, colocando a sua opinião:

1) Você sabe que existem Geometrias não-euclidianas?

____

____

2) Em caso afirmativo, como ficou sabendo?

____

____

3) Você já participou de algum estudo sobre essas Geometrias?

____

____

4) Você já tinha ouvido falar na Geometria esférica?

____

____

5) Em caso afirmativo, como ficou sabendo?

____

____

6) Você acredita que a Geometria euclidiana soluciona todas as situações que envolvem a Geometria?

____

____

7) Situações como: viagens de longa distância, como por exemplo, as espaciais, por meio de navio, avião, a Geometria euclidiana consegue solucionar?

____

____

8) Você gostaria de tomar conhecimento de situações que envolvem a Geometria esférica?

____

____

9) Como você define circunferência, o círculo, a superfície esférica e a esfera?

____

____

____

____

ANEXO II

ROTEIRO PARA O OBSERVADOR

Quanto à situação problema:

1) Os membros do grupo reconheceram os símbolos e ? S ( ) - N ( ).
2) Os membros do grupo reconheceram as letras N, E, W ? S ( )- N ( ).
3) Algum membro falou sobre latitude, longitude? S ( ) - N ( ).
4) Os membros do grupo acharam a situação: corriqueira ( )
imaginária ( )
Outras____

Mais algumas observações____

Quanto à atividade 01:

Situação 1

1) O grupo concordou que o percurso será em linha reta? S ( ) - N ( ).
2) Quantos membros do grupo acharam que a figura pode ser plana? ___________
3) Quantos membros do grupo desenharam um triângulo, cujos lados são os segmentos de reta ?____
4) A discussão em grupo, fez com que algum membro alterasse sua resposta? S ( ) - N ( ).

Mais algumas observações____

Situação 2

Ao receberem a bola de isopor:

1) Ela foi identificada como uma circunferência? S ( ) - N ( ).
2) Ela foi identificada como um círculo? S ( ) - N ( )
3) Ela foi identificada como uma superfície esférica? S ( ) - N ( ).
4) Ela foi identificada como uma esfera? S ( ) - N ( ).
5) A discussão em grupo causou mudança na resposta de algum membro? S ( ) - N ( ).
6) Ao responder às questões, houve algum membro que procurou validar suas respostas? S ( ) - N ( ).

Mais algumas observações____

Quanto à atividade 02:

Situação 1

1) Os membros do grupo identificaram os Pólos? S ( ) - N ( ).
2) Os membros do grupo identificaram o Equador? S ( ) - N ( ).
3) Os membros do grupo identificaram os Paralelos terrestres? S ( ) - N ( ).
4) Os membros do grupo identificaram os Meridianos? S ( ) - N ( )

Mais algumas observações____

Situação 2

1) Os membros do grupo sabem identificar e definir latitude e longitude? S ( ) – N ( ).
2) De posse do globo terrestre, conseguiram identificar os Pólos, o Equador, os Paralelos e os Meridianos? S ( ) - N ( ).
3) A posição do navio e da ilha, no globo terrestre, foram determinadas: Facilmente ( ) Com dificuldade ( ).
4) Algum membro necessitou validar suas afirmações? S ( ) - N ( ).

Mais algumas observações____

Quanto à atividade 03:

1) Para medir a distância entre dois pontos, os membros do grupo utilizaram:

Barbante S (   ) - N (   ).

Régua de centímetros S (   ) - N   ).

Fita métrica S (   ) - N (   ).

Régua de cartolina S (   ) - N (   ).
Mais algumas observações____

2) Quanto à unidade usada para medir a distância em questão concluíram que:

Pode ser uma unidade de comprimento S (   ) - N (   ).

Pode ser uma outra unidade S (   ) - N (   ).

Pode ser o grau S (   ) - N (   ).
Mais algumas observações____
3) Algum membro do grupo sugeriu um instrumento de medida? S (   ) - N (   ).
4) O pesquisador precisou interferir, apresentando um instrumento de medida?
S ( ) - N (   ).
5) Para responderem sobre a distância entre os pólos, os membros do grupo:
Convenceram-se de que a unidade de medida deve ser o grau S (   ) - N (   ).

Pensaram em outra unidade de medida S (   ) - N (   ).
Mais algumas observações____

Quanto à atividade 04:
Situação 1
1) Os membros do grupo desenharam, adequadamente, as circunferências máximas? S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo identificaram os arcos de circunferência máxima?
S (   ) - N (   ).
3) Os membros do grupo, para identificarem os ângulos esféricos, buscaram identificá-los com os ângulos da Geometria Euclidiana? S (   ) - N (   ).
4) Os membros do grupo acharam difícil definir um ângulo esférico?
S (   ) – N (   ).
5) Os membros do grupo aceitaram que a unidade de medida de um ângulo esférico é o grau e seus submúltiplos? S (   ) - N (   ).
6) Os membros do grupo sugeriram um instrumento para medir um ângulo esférico? S (   ) - N (   ).

Mais algumas observações____
Situação 2
1) Os membros do grupo utilizaram a régua esférica construída anteriormente?
S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo identificaram a figura encontrada com:
um triângulo ? S (   ) - N (   ).
um polígono qualquer? S (   ) - N (   ).

3) Algum membro do grupo sugeriu um nome para essa figura? S (   ) - N (   ).
4) Os membros do grupo tiveram dificuldade em traçar o triângulo sugerido?
S (   ) - N (   ).
Mais algumas observações____

Quanto à atividade 05:

Situação 1
1) Os membros do grupo desenharam, adequadamente:
O pólo P? S (   ) - N (   ).
Um paralelo de centro C? S (   ) - N (   ).
O Equador? S (   ) - N (   ).
Um arco de meridiano de pólo P? S (   ) - N (   ).
A latitude? S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo fizeram uma representação do desenho adequada?
S (   ) - N (   ).
3) Os membros do grupo identificaram o triângulo retângulo? S (   ) - N (   ).
4) Os membros do grupo identificaram o triângulo esférico? S (   ) - N (   ).
5) Os membros do grupo souberam determinar o seno do ângulo em questão?
S (   ) - N (   ).
6) No item g, souberam desenhar os arcos pedidos? S (   ) - N (   ).
7) Para responderem às perguntas, foi necessária a interferência do pesquisador?
S (   ) - N (   ).
8) Em qual(is) item (s), a dificuldade dos membros dos grupos foi maior?_____
____
9) Qual a opinião dos membros do grupo sobre essa situação?________________
Situação 2

1) Os membros do grupo relacionaram o problema com a relação obtida, anteriormente, por meio da demonstração? S (   ) - N (   ).
2) Houve necessidade da interferência do professor, em algum momento?
S (   ) – N (   ).
3) Algum membro do grupo conhecia a unidade milhas ? S (   ) - N (   ).

Quanto à atividade 06
1) Os membros do grupo conseguiram interpretar o desenho? S (   ) - N (   ).
2) Em quais itens houve dificuldade de compreensão? _______________________
____
3) Houve dificuldade em utilizar os elementos da Trigonometria Plana, ou seja, seno, cosseno, tangente, secante dos ângulos em questão? S (   ) - N (   ).
E a relação dos cossenos? S (   ) - N (   ).
Qual (is) o (s) elemento (s) que os membros do grupo, sentiram mais dificuldade em determinar?____
____
4) Houve necessidade da interferência do professor? S (   ) - N (   ).
Em qual (is) item (s)?____
____

5) Qual a opinião dos membros sobre a demonstração da Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos? ____
____
____

<u>Quanto à atividade 07:</u>

1) Os membros do grupo identificaram os símbolos, que correspondem à latitude e à longitude? S (   ) - N (   ).

2) Para representar o triângulo esférico, os membros do grupo:

Marcaram o pólo P adequadamente? S (   ) N (   ).

Identificaram os meridianos adequadamente? S (   ) - N (   ).

Identificaram os paralelos adequadamente? S (   ) - N (   ).

Identificaram o Equador adequadamente? S (   ) - N (   ).

Marcaram, adequadamente, a latitude e a longitude do navio? S (   ) - N (   ).

Marcaram, adequadamente, a latitude e a longitude da ilha? S (   ) - N (   ).
Algum membro do grupo necessitou relembrar alguns dos conceitos anteriores?
S (   ) -   N (   ). Qual (is)?____

3) Os membros do grupo relacionaram a medida do arco com a do ângulo correspondente? S (   ) - N (   ).

4) Os membros do grupo identificaram o ângulo complementar da latitude do navio e da latitude da ilha? S (   ) - N (   ).

5) Os membros do grupo realizaram, com facilidade, a operação de:
Adição de medidas de ângulos? S (   ) - N (   ).
Subtração de medidas de ângulos? S (   ) - N (   ).

6) Os membros do grupo observaram a possibilidade da aplicação da Relação Fundamental para os triângulos esféricos? S (   ) - N (   ).

7) Para transformar as medidas dos lados em graus, houve necessidade da interferência do:
Pesquisador? S (   ) - N (   ).
Algum membro do grupo? S (   ) - N (   ).

8) Os membros do grupo conheciam calculadora científica? S (   ) - N (   ).

9) Os membros do grupo sabiam utilizar a calculadora científica? S (   ) - N (   ).

10) Para determinar a distância d, os membros do grupo associaram à função inversa do cosseno? S (   ) - N (   ).

11) Os membros do grupo transformaram, adequadamente, a medida da distância d em:
Milhas marítimas ? S (   ) - N (   ).
Em metros? S (   ) - N (   ).
Em quilômetros? S (   ) - N (   ).
12) Qual a reação dos membros do grupo ao conseguirem solucionar a situação problema?____

Quanto à atividade 08:

Situação 1
1) Os membros do grupo associaram reta (da Geometria Esférica) à circunferência máxima? S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo tinham o conceito euclidiano de:
Retas concorrentes? S (   ) - N (   ).
Retas paralelas? S (   ) - N (   ).
Aplicaram - no, adequadamente, às questões? S (   ) - N (   ).
3) Para a pergunta (d), os membros do grupo responderam afirmativamente? S (   ) N (   ).
Houve divergência de opiniões? S (   ) - N (   ).
Mais observações____
4) A finitude ou infinitude da reta gerou divergência de opiniões? S (   ) - N (   ).

Situação 2
1) Os membros do grupo utilizaram a régua esférica com facilidade?
S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo tinham o conceito euclidiano de retas perpendiculares?
S (   ) - N (   ).
Aplicaram -no, adequadamente, à questão (b)? S (   ) - N (   ).
3) Os membros do grupo identificaram, adequadamente, os ângulos esféricos?
S (   ) - N (   ).

Situação 3
1) Os membros do grupo tinham o conceito euclidiano de polígono? S (   ) - N (   ).
Aplicaram- o, adequadamente, à questão (a)? S (   ) - N (   ).
2)A possível existência de um polígono de 2 lados gerou divergência de opiniões?
S (   ) - N (   ).
3) Houve discussões sobre a definição de quadrilátero? S (   ) - N (   ).
4) Houve discussões sobre a definição de quadrado? S (   ) - N (   ).
Mais observações ____

Situação 4
1) Os membros do grupo lembraram da definição dada para triângulo esférico?
S (   ) - N (   ).

2) Os membros do grupo desenharam, adequadamente, um ângulo reto na superfície esférica? S (   ) - N (   ).
Dois ângulos retos? S (   ) - N (   ).
Três ângulos retos? S (   ) - N (   ).
3) Houve discussões sobre a existência de um triângulo com:
Um ângulo reto? S (   ) - N (   )
Dois ângulos retos? S (   ) - N (   )
Três ângulos retos? S (   ) - N (   )
4) Qual a opinião dos membros do grupo quanto à soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos esféricos anteriores? ________________________________
5) Os membros do grupo conseguiram representar:
O menor triângulo? S (   ) - N (   ).
O maior triângulo? S (   ) - N (   ).
6) Os membros do grupo sabiam o conceito euclidiano de ângulo externo de um triângulo? S (   ) - N (   ).
7) Qual a opinião dos membros do grupo sobre a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo? ____
8) Qual a opinião dos membros do grupo quanto à nomenclatura dada aos triângulos esféricos?____

Situação 5

1) Os membros do grupo tinham o conceito euclidiano de semelhança?
S (   ) - N (   ).
2) Os membros do grupo desenharam, adequadamente, os triângulos pedidos?
S (   ) - N (   ).
3) Os membros do grupo sabiam o conceito euclidiano de congruência de triângulos?
S (   ) - N (   ).
4) Os membros do grupo conheciam os casos de congruência mencionados?
S (   ) - N (   ) .
5) Para verificar a validade dos casos de congruência citados e mais algum possível, houve necessidade da interferência do professor? S (   ) - N (   ).
6) Os membros do grupo conheciam o Teorema de Pitágoras? S (   ) - N (   ).
7) Os membros do grupo divergiram sobre a validade do Teorema de Pitágoras?
S (   ) - N (   ).
Mais algumas observações____

ANEXO III

NOME____

CURSO____DATA___/______ /2002.

SITUAÇÃO- PROBLEMA

O comandante de um navio recebeu a seguinte mensagem de um helicóptero: *localizados náufragos numa ilha de coordenadas* $_{I} = 68° \, 40'N$ *e* $_{I}$ = 013°40'E. Naquele momento, a posição do navio era $_{N} = 42°10'N$ *e* $_{N} = 051°20'W$. Que distância o navio deverá percorrer para chegar à ilha?

Para melhor entender e resolver o problema, iremos fazer algumas atividades.

Atividade 01

Situação 1

a) Para resgatar os náufragos você acha que o percurso do navio deverá ser em linha reta? Justifique____

b) Em Geometria, qual a figura que você usaria para modelar esse problema? E essa figura pode ser uma figura plana?______________________________________

c) Como você desenharia a situação do problema?

Situação 2

a) Marque um ponto, no plano abaixo. Quantos caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto?____

b) Você recebeu uma superfície esférica. Marque um ponto nela. Quantos e que tipos de caminhos distintos podem ser traçados por esse ponto? Esses caminhos têm comprimento finito?____

c) O problema lhe dá dois pontos distintos numa superfície esférica. Ligue-os por vários caminhos. Qual é o menor caminho que liga esses pontos? Esse caminho tem comprimento finito?____

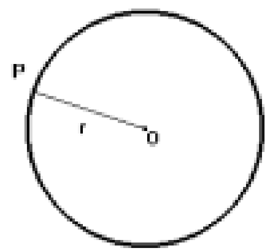
d) Prolongue esse menor caminho nos dois sentidos. Quantas partes você observa? Determine o comprimento delas.____

e) Se considerarmos dois caminhos distintos, numa superfície esférica, eles têm ponto de interseção? Quantos?____

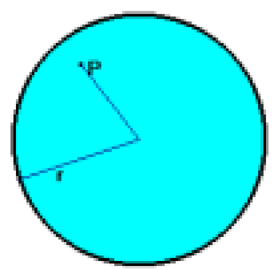
INSTITUCIONALIZAÇÃO

Percebemos que a situação-problema não ocorre no plano, portanto, necessitamos distinguir, claramente, os seguintes elementos geométricos: a circunferência, o círculo, a esfera e a superfície esférica.

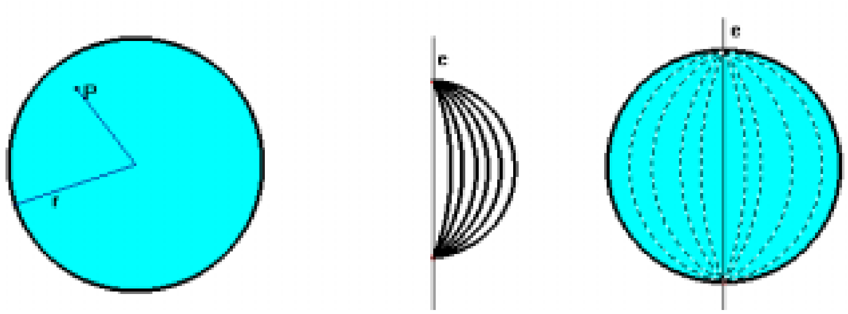
A circunferência de centro O e raio r**,** no plano, é o conjunto de pontos situados a uma mesma distância (r) de um ponto fixo (O).



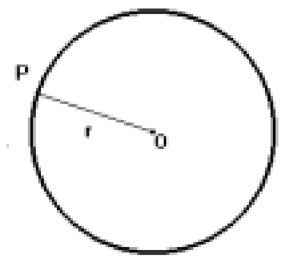
O círculo (ou disco) é a reunião dos pontos da fronteira da circunferência com os pontos do seu interior.

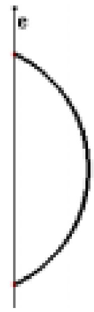


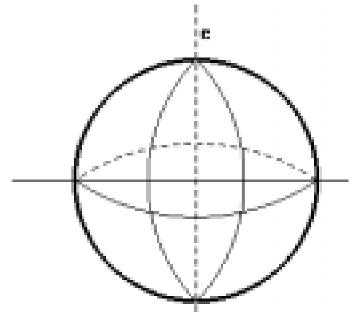
A esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância de O até P seja menor ou igual a r , isto é, d (O, P)   r. Podemos afirmar, também, que a esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo, em torno de um eixo, que contém um de seus diâmetros.



A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto de pontos P do espaço, que distam r do ponto O, isto é, d (O, P) = r. Ela é, também, uma superfície gerada pela rotação, em torno de um eixo, de uma semi-circunferência com as extremidades no eixo.

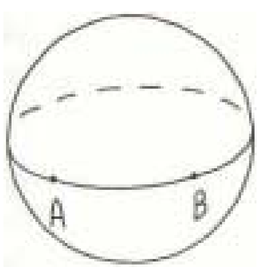


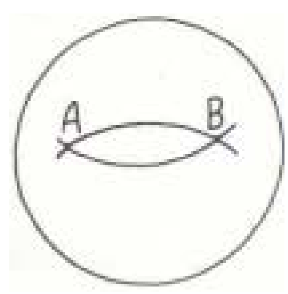




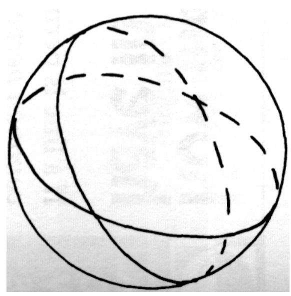
Por um ponto P, numa superfície esférica, passam infinitos caminhos e aqueles de comprimento máximo são chamados de circunferências máximas ou geodésicas da superfície esférica.

Por dois pontos distintos A e B, numa superfície esférica, existem várias possibilidades de caminhos. Dizemos que o menor caminho entre dois pontos distintos, numa superfície esférica, é um arco de circunferência**.** Prolongando-se esse menor caminho, nos dois sentidos, as suas extremidades se encontram, determinando dois arcos de comprimento finito.





Vimos, também, que duas circunferências máximas distintas têm, exatamente, dois pontos de interseção.



Atividade 02

Situação 1

a) O globo terrestre possui um eixo de rotação. Como se chamam as interseções do globo com esse eixo? ____

b) Localize e caracterize o Equador.____

c) Identifique que tipos de circunferências você vê na superfície do globo terrestre___

d) Quais das circunferências são denominadas Paralelos terrestres?______________

e) Quais das circunferências são denominadas Meridianos?_____________________

Situação 2

a) Você sabe que, no plano cartesiano X OY, um ponto pode ser localizado por suas coordenadas x e y. Como um ponto pode ser localizado no globo terrestre?_________

b) Como você pode localizar, no globo terrestre, a posição do navio e da ilha, por meio da latitude e da longitude de ambos?_____________________________________

c) Determine, no globo terrestre, aproximadamente, a posição em que se encontram o navio e a ilha.____

INSTITUCIONALIZAÇÃO

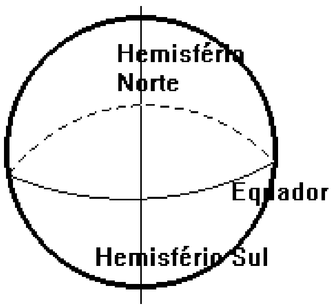
Na Terra, há referenciais fundamentais, como os pólos, o Equador, os Meridianos, os Paralelos e as suas direções de rotação.

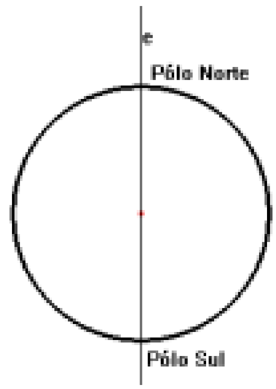
Dizemos que a Terra gira, diariamente, em torno do seu eixo de rotação. Esse eixo intercepta a superfície terrestre em dois pontos chamados Pólo Norte e Pólo Sul.

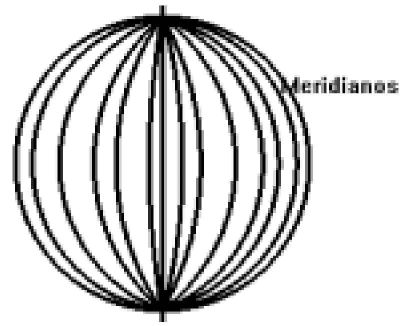
Temos uma circunferência máxima denominada Equador**,** cujo diâmetro é perpendicular ao eixo de rotação da Terra. O equador divide o globo em duas partes iguais o Hemisfério Norte e o Hemisfério Sul**.**

Existem, também, várias semi-circunferências máximas, que vão de um pólo ao outro chamadas Meridianos sendo que, pelos pólos, passam dois meridianos, um é o antimeridiano (ou antípoda) do outro.

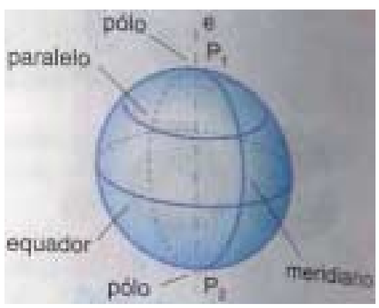
Além disso, há diversas circunferências menores paralelas ao Equador que são os Paralelos terrestres**.** À direção anti-horária do giro da Terra chamaremos de Leste e a direção oposta de Oeste**.**





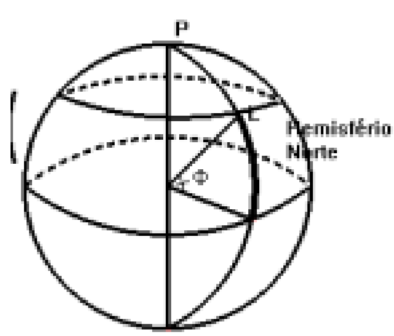


Oeste Leste

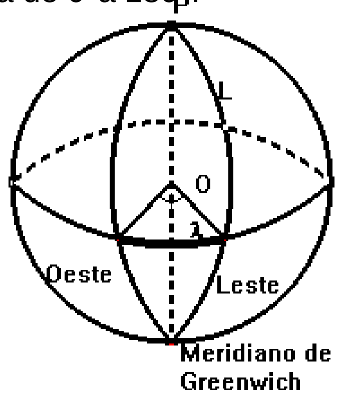


A localização geográfica de um lugar L é dada por sua latitude e longitude.

A latitude de um lugar L é o arco de meridiano, que vai do Equador ao paralelo do lugar. Será chamada Norte, se pertencer ao Hemisfério Norte e chamada Sul, se estiver no Hemisfério Sul. A sua unidade de medida é, usualmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0° a 90°.



A longitude de um lugar L é o arco do Equador, com extremos na interseção do Meridiano de Greenwich (tomado como referência) com o Equador e na interseção do meridiano do lugar com o Equador. Será denominada Leste**,** se o lugar ficar à direita do observador (que estará de frente para aquele meridiano) e pode ser indicada por um sinal positivo e Oeste, se estiver à esquerda, sendo indicado com um sinal negativo. A sua unidade de medida é, geralmente, dada em graus, minutos e segundos e varia de 0°a 180°.



A latitude e a longitude formam o Sistema de Coordenadas Geográficas.

Os dois sistemas de coordenadas permitem localizar um lugar. No sistema cartesiano um ponto no plano é localizado por suas coordenadas *x* e *y* e no sistema geográfico um ponto do globo terrestre é localizado por suas coordenadas latitude e longitude.

A diferença entre os dois sistemas é que o Sistema de Coordenadas Cartesianas é composto de duas retas perpendiculares e concorrentes no ponto O (0,0) e o Sistema de Coordenadas Geográficas utiliza circunferências máximas (meridianos) e circunferências menores (paralelos).

Atividade 03

Como você observou, unindo os dois pontos distintos dados no problema, obtemos um arco de circunferência.

a) Procure medir a distância entre esses pontos. Que instrumentos você utilizou? Que unidades você pode usar para medir essa distância? ______________________

____

b) Há uma única distância entre esses pontos? Qual a distância entre os pólos Norte e Sul?____

____

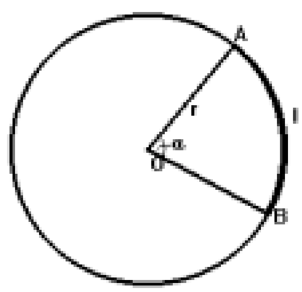
INSTITUCIONALIZAÇÃO

Já vimos que, dois pontos dividem a superfície esférica em dois arcos de circunferência e para medirmos um arco, necessitamos compará-lo com outro, unitário: o grau ou o radiano.

O grau é o arco unitário padrão mais utilizado, que corresponde a 1/360 da circunferência a que ele pertence.

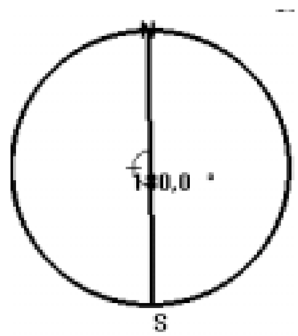
O radiano é o arco unitário, cujo comprimento é o mesmo do raio da circunferência, na qual ele se encontra. Seu símbolo é rad.

Fixada a medida de um arco (em grau ou radiano), podemos medir o comprimento, que depende do raio da circunferência que o contém e do ângulo central correspondente (medido em radianos). Prova-se que o arco de comprimento é dado pela relação = . r, com a medida do ângulo central, em radianos.



Para medirmos o arco por dois pontos que lhe pertencem, usamos a régua esférica. A unidade de medida é o grau**.** Observa-se, entretanto, que há duas medidas possíveis de distância entre dois pontos, na superfície esférica. Adotamos a menor delas.

Observamos que, se os dois pontos forem pólos, a distância entre eles será 180°.



Sabemos que a forma da Terra não é de uma esfera perfeita, o que faz com que os meridianos se assemelhem a elipses, de curvaturas variáveis. Se a milha marítima for definida, apenas, como o comprimento do arco de 1 minuto, esse valor não será único. Por isso foi estabelecida a Milha Marítima Internacional correspondendo a 1.852 m, como sendo a média das milhas medidas no pólo e no Equador. Para os cálculos usados na navegação, entretanto, é feita a correspondência de 60 milhas para um arco de 1° de circunferência máxima. O erro cometido, se o local estiver próximo dos pólos ou do Equador pode ser desprezado, diante de outras incertezas que ocorrem na navegação marítima.

Atividade 04

Situação 1

Na superfície esférica que você possui, faça o esboço de duas circunferências máximas.

a) Quantos são os pontos de interseção e quantos são os arcos determinados por esses pontos?____

b) Você identifica algum ângulo na figura que você fez na superfície esférica? Quantos?____

c) Defina ângulo esférico. Que elementos o constituem? ________________________

d) Qual a unidade de medida você pode utilizar para medir a abertura de um ângulo esférico? O transferidor plano é um instrumento de medida de um ângulo esférico?__

____

Situação 2

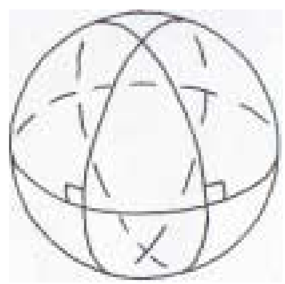
Na superfície esférica, marque três pontos distintos, tais que dois a dois pertençam a uma mesma circunferência máxima. Ligue esses pontos, usando a régua que você construiu.

a) Descreva a figura encontrada. Que nome você daria a essa figura? Ela se assemelha a alguma figura da Geometria Plana?______________________________

b) Faça, na superfície esférica, um esboço, do triângulo esférico gerado pela situação- problema, de tal maneira que o vértice (I) seja o ponto de localização da ilha, o vértice (N) seja o ponto de localização do navio e o vértice (P) esteja no pólo.____

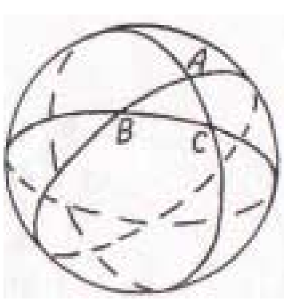
INSTITUCIONALIZAÇÃO

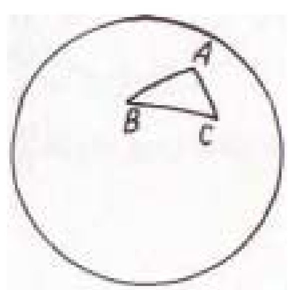
Numa superfície esférica, duas circunferências máximas possuem dois pontos de interseção os quais determinam quatro arcos. O ponto de interseção dos arcos é denominado vértice do ângulo e os arcos são chamados de lados do ângulo. Podemos, então, definir ângulo esférico como sendo _________________________ e a sua unidade de medida é _______ Para medir a abertura de um ângulo esférico, não podemos usar o transferidor plano e, portanto necessitamos de construir um objeto adequado chamado transferidor esférico. O ângulo, cuja medida é 90° é denominado ângulo reto.



Ao unirmos três pontos distintos, numa superfície esférica, tais que dois a dois pertençam a um mesmo arco de circunferência máxima, obtemos uma figura denominada triângulo esférico. Um triângulo esférico pode ser definido como _____
____

O triângulo esférico é formado por _________arcos, chamados lados do triângulo e possui ________vértices e ________ângulos esféricos.





Atividade 05[2]

Situação 1

Nesta atividade, determinaremos a relação entre o arco de paralelo e o arco do Equador correspondente**.** Para isso, necessitaremos de relações da Trigonometria Plana.

Desenhe, na sua superfície esférica de centro O e pólo P, um paralelo de centro C e o Equador. Desenhe também, um arco de meridiano de pólo P, que intercepta o paralelo no ponto A e o Equador no ponto B**.** Marque a latitude do ponto A.

Faça abaixo uma representação desse desenho.

a) O que você pode afirmar a respeito do triângulo POB?______________________

b) Esse triângulo é esférico? Justifique. ___________________________________

c) Identifique outros triângulos retângulos. _________________________________

d)Caracterize o triângulo OCA. Qual a medida do ângulo oposto ao lado $\overline{AC}$? Determine o seno desse ângulo____

d) Relacione as medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AO}$ no triângulo OCA. ________________

f) Relacione o resultado obtido em (e) com o resultado obtido no item (d).__________

g) Desenhe um arco de meridiano de pólo P que intercepta o paralelo no ponto D e o Equador no ponto E. Desenhe o arco AD e o arco BE.

Dizemos que esses arcos são correspondentes**.**

h) Determine a relação entre as medidas dos arcos AD e AC e as medidas dos arcos BE e BO.____

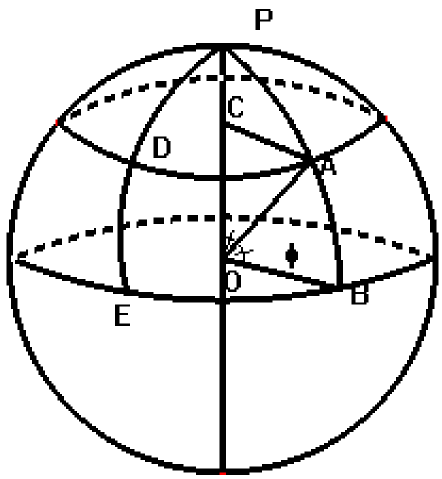
i) É possível relacionar as medidas dos arcos AD e BE com os raios $\overline{AC}$ e $\overline{BO}$?_____

j) Se OA = OB, pois, são raios terrestres, relacione esse resultado com o obtido no item (f). Escreva a relação obtida no item anterior.___________________________

[2] Atividade adaptada do livro "Convite às Geometrias não- euclidianas", Lázaro Coutinho, RJ, 2.001. p. 91.

INSTITUCIONALIZAÇÃO

Uma representação dessa situação é o desenho abaixo.



Nesse desenho, o triângulo POB não é esférico, porque ele não é formado por três arcos de circunferências máximas distintas. Além dele, há os triângulos retângulos PCA e OCA.

O triângulo OCA tem o ângulo C como reto e o ângulo oposto ao lado AC mede 90° - . O seno de 90°- = cos = AC/ AO.

As relações entre as medidas dos arcos correspondentes AD e BE são as seguintes:

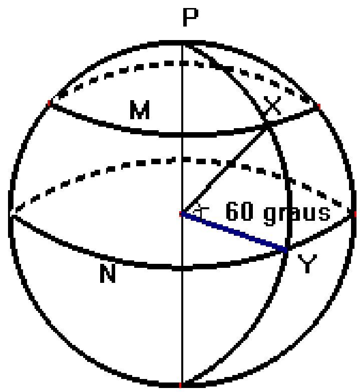
AD = k. 2 . AC e BE= k. 2 .BO. Daí, AD/AC = BE/BO ou AD/BE = AC/BO. Como AO = OB e são raios terrestres, chegamos que: AD/BE = cos o que implica que AD= BE. cos .

Esta é a Relação entre o arco de Paralelo e o arco do Equador correspondente.

Situação 2

Resolva o seguinte problema:

Um navio N percorre 1700 milhas sobre o Equador, enquanto que um navio M percorre o correspondente arco no paralelo de 60°. Qual dos navios percorreu a maior distância, em milhas marítimas? Justifique a sua resposta.



INSTITUCIONALIZAÇÃO

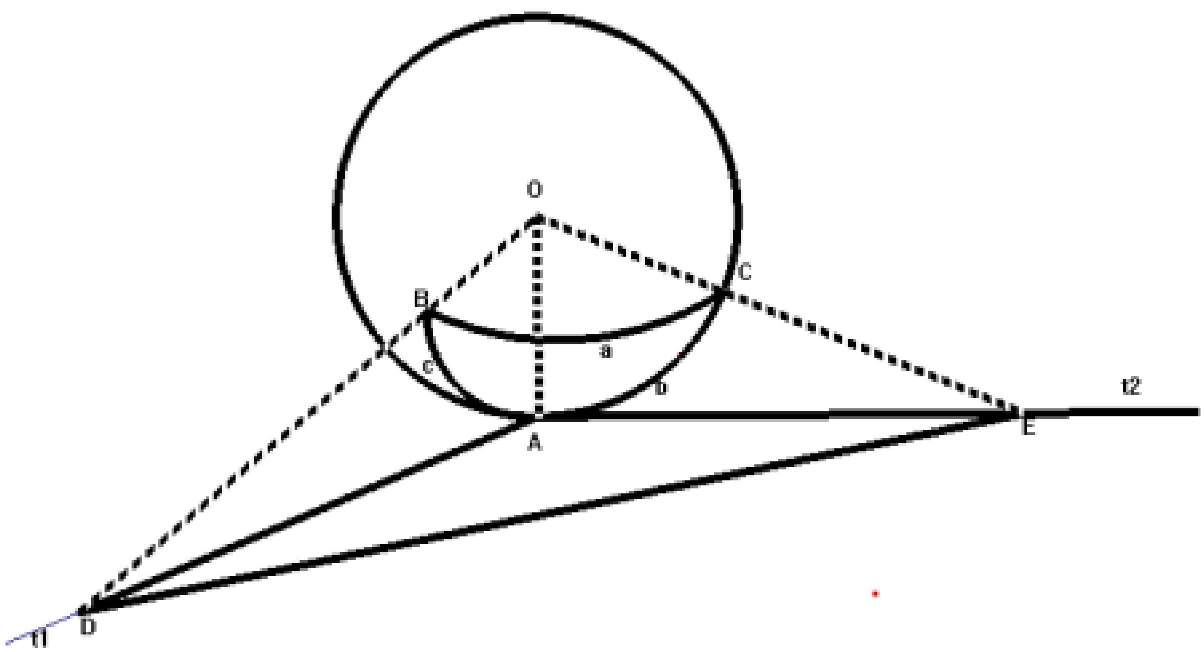
Os arcos MX e NY são arcos correspondentes. Assim, podemos aplicar a Relação entre o arco de Paralelo MX e o arco de Equador NY correspondente.

Daí, a distância percorrida pelo navio M será: d_M = 1700 . cos 60° = 850 milhas.

Como a distância percorrida pelo navio N é de 1700 milhas, concluímos que o navio N percorreu a maior distância.

Atividade 06

Você irá determinar a Relação Fundamental dos triângulos esféricos, também chamada Fórmula do Cosseno.



Considere, no desenho acima, o qual representa uma superfície esférica de centro O, o triângulo esférico ABC de lados a, b, c medidos pelos ângulos BOC, AOC e AOB, respectivamente.

Considere as retas, t_1 e t_2, tangentes às circunferências máximas AB e AC, respectivamente. Observe que a semi-reta OB intercepta t_1 no ponto D e a semi-reta OC intercepta t_2 no ponto E, formando o triângulo plano ADE.

a) No triângulo retângulo AOD, o ângulo reto é ______. Neste triângulo, determine o valor do seno e do cosseno do ângulo AOD. ________________________________

b) Considerando a medida do arco AB, lado do triângulo esférico, como sendo **c**, determine o valor da tangente e da secante do ângulo AOD em função da medida do arco AB ____

c) Determine AD em função de tg c e OD em função de sec c.__________________

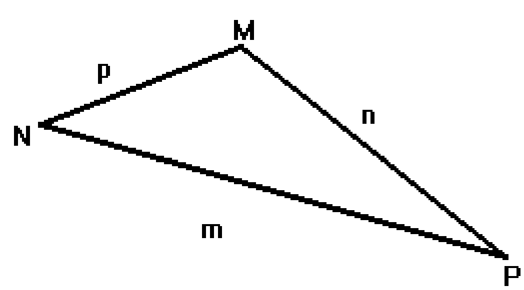
d) No triângulo retângulo AOE, cujo ângulo reto é_______, determine o valor do seno e do cosseno do ângulo AOE e, também, da tangente e da secante do mesmo ângulo.____

e) Considerando a medida do arco AC, lado do triângulo esférico, como sendo **b**, determine o valor da tangente e da secante do ângulo AOE, em função da medida do arco AC ____

f) Determine AE em função de tg b e OE em função de sec b.___________________

g) Considere, agora, o triângulo DAE**.** Nele, aplique a Relação dos cossenos da Trigonometria plana para o ângulo A. Lembrando que, num triângulo plano MNP, cujo lado MP mede n, o lado MN mede p e o lado NP mede m, a Relação dos cossenos é a seguinte:

$m^2 = n^2 + p^2 - 2np. \cos M$



Assim, DE^2= ____

h) Considerando a medida do raio $\overline{AO}$ como sendo 1, e AD obtida no item (c) e AE obtida no item (f), podemos escrever que DE^2 = ________________________________

i) No triângulo DOE, aplique a Relação dos cossenos da Trigonometria plana para o ângulo DOE, determinando DE^2=____

j) Considerando a medida do raio AO como sendo 1 e OD obtida no item (c) e OE obtida no item (f), podemos escrever que DE ^{2}= _________________________________

l) Lembrando que o ângulo DOE mede o lado **a** do triângulo esférico ABC, escrevemos DE^2= ____

m) Observe os resultados obtidos nos item (h) e (l). O que você pode concluir? _____

n) Qual a relação entre a secante e a tangente de um ângulo agudo na Trigonometria plana?____

o) Como você pode escrever, então, sec^2 c e sec^2 b ? _________________________

p) Use as relações do item (o), para escrever a relação obtida em (m) _____________

q) Utilizando as relações da Trigonometria plana, como podem ser escrito sec b, sec c, tg b e tg c, em função de seno e cosseno de **c** e de **b**? ____________________

r) Das relações dadas nos itens (p) e (q), determine cos a.______________________

cos a= ____

Esta é a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos.

s) Qual é a utilidade dessa relação? ____

t) É possível que essa relação solucione a situação problema inicial? Justifique._____

INSTITUCIONALIZAÇÃO

No triângulo retângulo AOD**,** cujo ângulo reto é A, temos:

sen AÔD = AD/OD e cos AÔD = AO/OD.

Como a medida do arco AB = medida do ângulo AOD =c, obtemos:

tg AÔD = tg c = AD/AO e sec AÔD = sec c= OD/AO.

Portanto, AD = AO . tg c e OD = AO . sec c. (c)

No triângulo retângulo AOE, reto em A, temos:

sen AÔE = AE/OE e cos AÔE = AO/OE. Também, tg AÔE = AE/AO e

sec AÔE = OE/AO.

Como a medida do arco AC = medida do ângulo AOE = b, obtemos:

tg AÔE= tg b = AE/AO e sec AÔE = sec b = OE/AO.

Portanto, AE = AO. tg b e OE = AO. sec b. (f)

Utilizando a Relação dos cossenos da trigonometria plana, obtemos:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2.\ AD\ .\ AE.\ \cos \hat{A}$

Por (c) e (f): $DE^2 = (AO)^2\ (tg^2\, c + tg^2\, b - 2.tg\ c.\ tg\ b\ .\ \cos \hat{A})$ (1)

No triângulo DOE: $DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2.\ OD\ .\ OE.\ \cos D\hat{O}E$.

Por (c) e (f): $DE^2 = (AO)^2(\sec^2 c + \sec^2 b - 2.\ \sec c.\ \sec b\ .\ \cos D\hat{O}E)$ e como medida do ângulo DOE = a, temos:

$DE^2 = (AO)^2\ (\sec^2 c + \sec^2 b - 2.\ \sec c.\ \sec b.\ \cos a)$ (2)

De (1) e (2): $(AO)^2\ (tg^2\, c + tg^2\, b - 2.tg\ b.\ tg\ c.\ \cos\hat{A}) = (AO)^2\ (\sec^2 c + \sec^2 b - 2.\ \sec b.\ \sec c.\ \cos a)$

Da Trigonometria plana, para um ângulo x, $\sec^2 x = 1 + tg^2\, x$, daí:

$\sec^2 b = 1 + tg^2\, b$ e $\sec^2 c = 1 + tg^2\, c$

Logo, $tg\ b\ .\ tg\ c\ .\ \cos \hat{A} = -1 + \sec b\ .\ \sec c.\ \cos a$

Usando as relações da secante e da tangente com seno e cosseno, obtemos:

$sen\ b\ .\ sen\ c.\ \cos\hat{A} = \cos a - \cos b.\ \cos c$

Portanto: **cos a= cos b. cos c + sen b. sen c. cos Â**, que é a Relação fundamental para os triângulos esféricos.

Atividade 07

Para resolver a nossa situação problema, utilizaremos as conclusões obtidas anteriormente, lembrando que as coordenadas do navio são $_N$ = 42° 10´N e $_N$ = 051°20´W e da ilha são $_I$ = 68°40´N e $_I$ = 013°40´E.

a) Considere, novamente, o triângulo esférico PNI, no qual P é o pólo, N a posição do navio e **I** a posição da ilha. Chame d a distância do navio à ilha.

b) Faça uma representação para esse triângulo esférico no espaço abaixo.

c) O que você necessita traçar para representar, no desenho anterior, a latitude e a longitude do navio e da ilha?____

d) Represente, no desenho anterior, a latitude $_N$ e determine a medida do lado NP.

____

e) Represente, no desenho anterior, a latitude $_I$ e determine a medida do lado PI. _

____

f) Represente a longitude $_N$ e a longitude $_I$. A soma das medidas das longitudes de N e I, corresponde à medida de qual ângulo do triângulo esférico ? Determine essa medida. ____

g) Você pode aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, para solucionar o problema? Justifique. _______________________________________

h) Para essa situação, como pode ser escrita a Relação Fundamental? ___________

____

i) Substituindo os elementos determinados, na relação anterior, você obterá que____

____

j) Transforme, em graus, a medida do lado NP e a medida do lado PI, com a aproximação de centésimos ____

l) Escreva a relação (i), substituindo os resultados obtidos em (j)________________

____

m) Utilizando a calculadora, determine os valores do seno e do cosseno das medidas anteriores, com aproximação de centésimos de milésimos.____________________

n) Substituindo os valores encontrados no item anterior, você obtém a Relação Fundamental.____

o) Utilizando a calculadora, determine a medida da distância **d**, em graus. _________

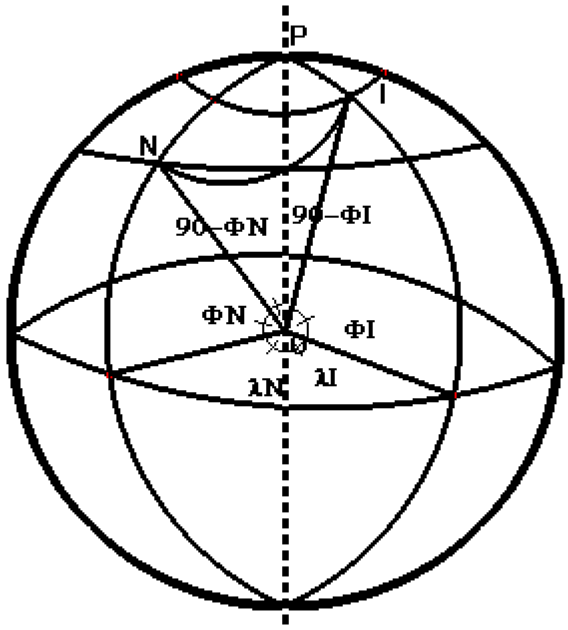
p) Escreva a relação anterior, em função de milhas marítimas, sendo que 1° corresponde a 60 milhas marítimas. ______________________________________

q) Transforme a medida obtida, em km, recordando que a milha marítima internacional corresponde a 1.852 metros._________________________________

Você acaba de resolver um problema, envolvendo a Geometria esférica no globo terrestre.

INSTITUCIONALIZAÇÃO

Uma representação para a situação problema é a seguinte:



Vimos que, para representar a latitude e a longitude do navio e da ilha, necessitamos traçar o Equador, o paralelo que passa por N, o meridiano que passa por P e N, o meridiano que passa por P e I, o meridiano de Greenwich, o eixo de rotação.

A medida do lado NP será NP= 90° - $_{N}$ = 90° - 42° 10´= 47° 50´.

A medida do lado PI será PI= 90° - $_{I}$ = 90° - 68° 40´= 21° 20´.

A soma das medidas das longitudes de N e I corresponde à medida do ângulo P, cuja medida será P = 51° 20´+ 13° 40´= 65°.

Para solucionar o problema, podemos aplicar a Relação Fundamental para os Triângulos Esféricos, porque foram determinadas as medidas dos lados NP e PI e do ângulo P do triângulo PNI.

Essa Relação pode ser escrita da seguinte forma:

cos d = cos NP . cos PI + sen NP . sen PI . cos P .

Substituindo as medidas determinadas, essa relação se torna:

cos d = cos 47° 50´. cos 21° 20´+ sen 47° 50´. sen 21° 20´ . cos 65° .

Para transformar as medidas dos lados em graus, usamos uma regra de três simples direta, lembrando que 1° corresponde a 60´. Assim, 50´= 0,82 ° e 20´= 0,33° considerando a aproximação de centésimos. Logo, NP = 47,82° e PI = 21,33° .

A Relação pode ser escrita da seguinte forma:

cos d = cos 47,82°. cos 21,33° + sen 47,82°. sen 21,33° . cos 65°.

Utilizando a calculadora, determinados os valores necessários, ou seja:

cos 47,82° = 0,67146... ; cos 21,33° = 0,93150... ; sen 47,82° = 0,74103... ; sen 21,33° = 0,36374... e cos 65° = 0,42262...

Assim, obtemos a Relação :

cos d = 0,67146 . 0,93150 + 0,74103 . 0,36374 . 0,42262 = 0,73937

E d = arc cos 0,73937 e, portanto, d = 42,32 °, aproximadamente.

Como 1° corresponde a 60 milhas marítimas, temos que: d = 2539,2 milhas marítimas.

Como 1 milha marítima internacional corresponde a 1.852 m, obtemos que:

d = 4702598,4 m = 4702,5984 km, que é a distância que o navio deverá percorrer até chegar à ilha.

Essa situação-problema, embora solucionada, nos leva a algumas reflexões a respeito de outros tópicos da Geometria na superfície esférica.

Atividade 08

Situação 1

Utilizando uma superfície esférica e os instrumentos necessários, responda às seguintes questões:

a) Como você define reta numa superfície esférica? ___________________________

b) Numa superfície esférica, existem retas concorrentes? Justifique.______________

c) Numa superfície esférica, existem retas paralelas? Justifique._________________

d) Os paralelos terrestres são retas paralelas numa superfície esférica? Justifique.__

____

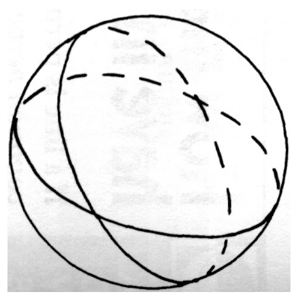
e) Na Geometria esférica, a reta é infinita? Justifique._________________________

f) Numa superfície esférica, como você define segmento de reta? _______________

INSTITUCIONALIZAÇÃO

Na Geometria de RIEMANN, vimos que as retas são circunferências máximas e que duas circunferências máximas sempre se interceptam em dois pontos, então, elas podem ser chamadas______________________ Conseqüentemente, podemos dizer que, nessa Geometria, não existem retas paralelas. Este foi o marco inicial da Geometria de RIEMANN, a Geometria esférica.

Os paralelos terrestres não são retas paralelas (conforme a definição dada na Geometria euclidiana), porque, numa superfície esférica, eles são circunferências menores e, portanto, não são retas, além disso, não existem retas paralelas, segundo RIEMANN.



Na Geometria de RIEMANN, a reta é finita.

Segmento de reta pode ser definido como sendo um arco de circunferência máxima.

Situação 2

a) Utilizando as réguas esféricas, desenhe duas retas em uma superfície esférica. Quantas regiões internas às elas ficam determinadas? Caracterize essas regiões.

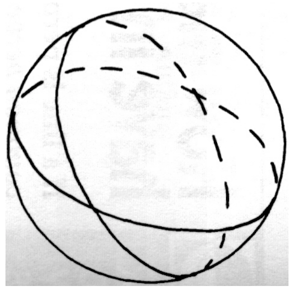
____

b) Qual a condição para que duas retas sejam perpendiculares entre si numa superfície esférica? O que você pode concluir a respeito dos ângulos determinados pela interseção dessas retas?____

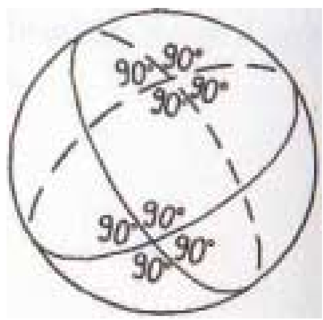
____

INSTITUCIONALIZAÇÃO

Numa superfície esférica, duas retas determinam _______regiões internas a elas e finitas. Essas regiões possuem dois pares de ângulos de vértices opostos e congruentes, dois lados medindo 180° cada um. Cada região é denominada bi-ângulo.



Dizemos que duas retas são perpendiculares entre si se elas dividem a superfície esférica em quatro regiões congruentes, sendo que os ângulos formados pela interseção entre elas são ______________________________



Situação 3

Valendo-se das réguas esféricas, responda às seguintes questões:

a) Como pode ser definido polígono na Geometria esférica?____________________

____

b) É possível construir um polígono de dois lados nessa Geometria? Justifique.____

____

c) Como pode ser definido um quadrilátero?________________________________

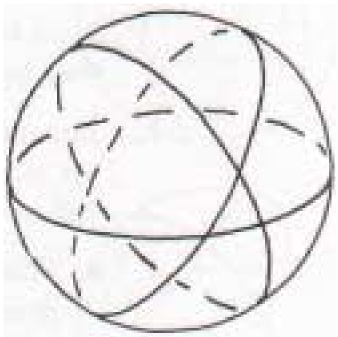
____

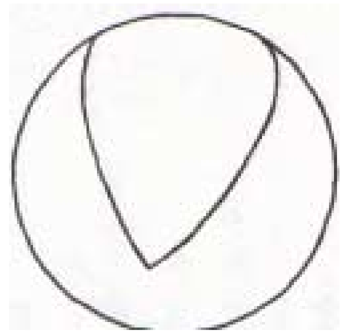
e) É possível construir um quadrado? Justifique.____________________________

INSTITUCIONALIZAÇÃO

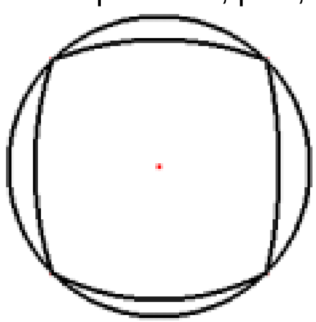
Numa superfície esférica, podemos definir um polígono esférico como uma figura geométrica formada por duas ou mais ________________concorrentes.

O polígono definido por duas retas concorrentes possui dois lados e dois ângulos, cujas medidas não ultrapassam 180°. A esse polígono damos o nome de bi-ângulo.





Numa superfície esférica, podemos construir um quadrilátero, cujos quatro lados são______________ e cujos quatro ângulos não são retos. Portanto, é impossível construir um quadrado, pois, os quatro ângulos _____________________



Situação 4

Na situação 2, da atividade 4, você definiu triângulo esférico. Agora, faremos um estudo mais amplo sobre esse objeto matemático. Para tanto, use réguas esféricas.

a) Marque os pontos L, M, N, numa superfície esférica. Quantos triângulos você pode formar com esses vértices?____

____

b) Diante da conclusão anterior, como você complementa a sua definição de triângulo esférico escrita naquela atividade?_________________________________

Você conhece da Geometria euclidiana, que, num triângulo qualquer, a soma das medidas dos seus ângulos internos é sempre 180°. Vejamos o que acontece num triângulo esférico.

c) Marque um ponto P, numa superfície esférica. Trace uma reta da qual P é o pólo. Existe um triângulo que tem, apenas, um ângulo reto?__________________________

d) É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos retos numa superfície esférica? Justifique. ____

e) Desenhe, na superfície esférica, duas retas perpendiculares das quais P é o pólo. Faça a distância entre dois vértices opostos ser 90°. Quanto mede cada um dos três ângulos? A que conclusão você chegou?_____________________________________

____

f) Existem triângulos que possuem os três vértices numa mesma reta, sendo denominados triângulos degenerados**.** Quais as possibilidades para os ângulos desses triângulos? Faça uma representação desses triângulos e determine a soma Si das medidas dos seus ângulos internos.____________________________________

____

g) Qual a soma Si das medidas dos ângulos internos do triângulo que possui três ângulos retos?____

h) O que você pode concluir sobre a soma Si das medidas dos ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica?_______________________________________

____

i) Considere, numa superfície esférica, um triângulo FGH, cujos ângulos internos medem f, g, h. Como você define ângulo externo a esses ângulos internos? Qual a medida dos ângulos externos aos ângulos f, g e h?_____________________________

____

j) Qual a soma Se das medidas dos ângulos externos de um triângulo numa superfície esférica____

INSTITUCIONALIZAÇÃO

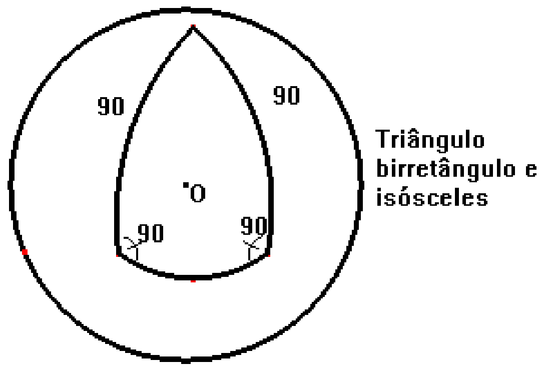
Num triângulo esférico, há três pares de vértices, que são ligados por arcos dois a dois distintos, formando 2x2x2=8 triângulos esféricos. Escolhemos, então, um triângulo esférico, cujos lados sejam os menores dos arcos entre seus vértices.

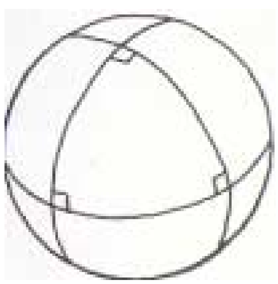
A definição de triângulo esférico torna-se como a "união de três arcos menores de circunferências máximas distintas".

Sabemos que, na Geometria Euclidiana, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é uma constante e igual a _____________

Numa superfície esférica, existe o triângulo esférico que possui um ângulo reto e que é chamado triângulo retângulo**.** O triângulo que possui dois ângulos retos é denominado triângulo birretângulo e o triângulo que possui três ângulos retos é chamado triângulo trirretângulo.

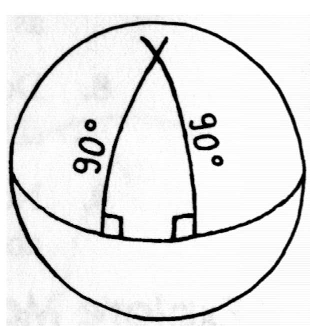
Triângulo retângulo



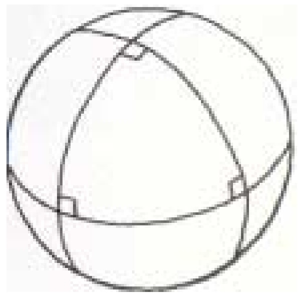


Triângulo trirretângulo e eqüilátero

Temos, ainda, o triângulo, no qual dois ângulos medem 90° e, conseqüentemente, dois lados medindo 90° e que é denominado triângulo isósceles.

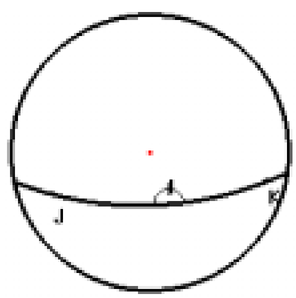


Podemos considerar, ainda, o triângulo que tem três ângulos retos e, portanto, terá três lados medindo 90° e que será chamado de triângulo eqüilátero**.** Nesse caso, a soma das medidas desses ângulos é ___________________________

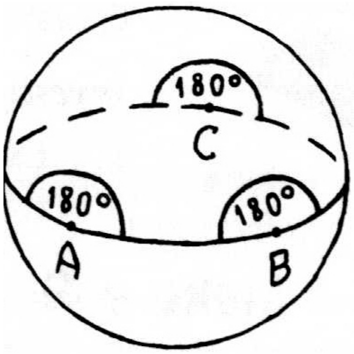


Existem triângulos, cujos vértices pertencem a uma mesma reta, que são denominados triângulos degenerados. Há dois triângulos possíveis nessas condições:

O menor triângulo, que nomeio IJK, tem seus vértices pertencentes a uma mesma reta, mas seus ângulos pertencem dois a dois ao mesmo arco, como mostra a figura abaixo. O ângulo J pertence ao arco IJ e mede 0° e o ângulo K pertence ao arco IK e mede 0°. O ângulo I mede 180°. Nesse caso, a soma das medidas dos ângulos internos é ___________________



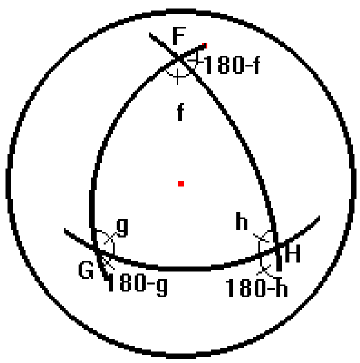
O maior triângulo, que nomeamos de ABC, tem seus vértices pertencentes a uma mesma reta, sendo que dois ângulos pertencem ao mesmo arco e o terceiro não e, portanto, esses três ângulos medem 180°. Nesse caso, a soma das medidas desses ângulos é _____________________________



No triângulo que têm três ângulos retos, a soma das medidas dos seus ângulos internos é 270°.

Concluindo, num triângulo, a soma das medidas de seus ângulos internos não é uma constante e sim, um valor _________a 180° e ____________a 540°.

Consideremos o triângulo FGH, cujas medidas de seus ângulos internos é f, g e h. Uma representação desse triângulo pode ser:



As medidas de três ângulos externos dos ângulos f, g, h são, respectivamente, 180° - f, 180° - g, 180° - h.

A soma das medidas dos ângulos externos Se = 540° - (f + g + h)= 540° - Si. Assim, Se varia de 540° - 180° = 360° a 540° - 540° =0°, ou seja, de ____________

____

Situação 5

Investiguemos a semelhança e a congruência de triângulos esféricos.

Na Geometria Euclidiana, triângulos são semelhantes, se e somente se, todos os ângulos correspondentes têm a mesma medida e todos os lados correspondentes são proporcionais (AAA).

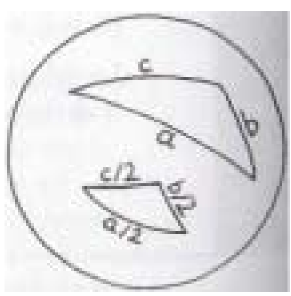
a) Desenhe, numa superfície esférica, usando a régua esférica, um triângulo ABC, cujos lados têm uma medida qualquer. Desenhe outro triângulo DEF, tal que a medida de seus lados seja a metade da medida dos lados do triângulo ABC. Você pode concluir que os ângulos do triângulo DEF são congruentes aos ângulos do triângulo ABC? Podemos dizer que esses triângulos são semelhantes? Justifique.___

b) Na Geometria Euclidiana, a congruência de triângulos pode ser verificada nos seguintes casos: LLL, LAL e ALA. Verifique essas possibilidades de congruência de triângulos numa superfície esférica. Há mais algum caso possível de congruência?__

c) Numa superfície esférica, é válido o Teorema de Pitágoras? Justifique__________

INSTITUCIONALIZAÇÃO

Numa superfície esférica, não há triângulos semelhantes, pois, dois triângulos que possuem os lados correspondentes proporcionais, os seus ângulos não têm as medidas iguais. Triângulos esféricos serão semelhantes, se forem congruentes.



Numa superfície esférica, encontramos as seguintes combinações entre lados e ângulos correspondentes congruentes, que garantem a congruência entre triângulos esféricos: LLL, LAL, ALA e AAA.

O Teorema de Pitágoras não é válido, numa superfície esférica, porque, para o triângulo com três ângulos retos, que também é eqüilátero, no qual a medida de seus lados seja, por exemplo, a, teríamos, ao aplicarmos o Teorema que: $a^2 + a^2 = 2a^2$, o que implica que a =0.